NELINEARNE JEDNAČINE

April, 2013

Izolacija rešenja

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

f - nelinearna funkcija

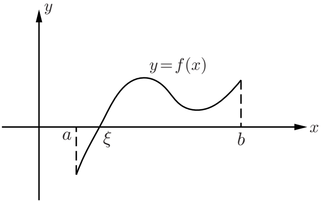
Primer:

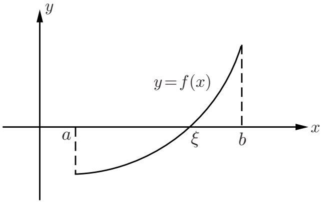
$$72 \ln(1 + i/100) = i \ln 2. \qquad \text{'Pravilo 72'} \tag{2}$$

$f(\xi) = 0$: ξ je **tačno rešenje** jednačine (1)

Dve etape u numeričkom rešavanju jednačine (1):

1. izolacija rešenja (korena) jednachine
2. nalaženje približnog rešenja sa unapred zadanom tačnošću





Teorema: Ako neprekidna funkcija f na krajevima odsečka $[a, b]$ ima vrednosti različitog znaka, tj. ako je $f(a)f(b) < 0$, onda unutar odsečka postoji bar jedno rešenje jednačine $f(x) = 0$.

Iterativne metode:

1. generišu niz brojeva $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ koji konvergira ka tačnom rešenju ξ,
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi;$$
2. za približnu vrednost x^* korena ξ može se uzeti bilo koji član x_n niza (x_n) koji zadovoljava uslov
$$|x_n - \xi| < \varepsilon.$$

Definicija: Red konvergencije iterativne metode jednak je p ako je

$$|x_n - \xi| \leq C|x_{n-1} - \xi|^p,$$

gde je $C > 0$ konstanta koja ne zavisi od n. Za $0 < C < 1$ i $p = 1$ konvergencija je *linearna*, a za $p = 2$ konvergencija je *kvadratna*.

Teorema (o oceni greške): Neka je (a, b) interval izolacije korena ξ jednačine (1) i neka je funkcija f neprekidno diferencijabilna na odsečku $[a, b]$ tako da je $f'(x) \neq 0$ za $x \in [a, b]$. Ako je $x^* \in [a, b]$ približna vrednost korena ξ, onda je

$$|\xi - x^*| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1}, \tag{3}$$

gde je $m_1 = \min\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.

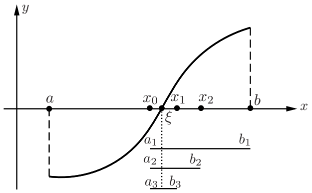
Dokaz:

$$f(\xi) - f(x^*) = f'(c)(\xi - x^*), \qquad \text{(Lagranžova t.)}$$

Kako je $f(\xi) = 0$, imamo

$$|\xi - x^*| = |f(x^*)|/|f'(c)| \leq |f(x^*)|/m_1$$

$\boxed{\text{Metoda polovljenja intervala}}$



1. $x_0 = \frac{a+b}{2}$
   - $f(x_0) = 0 \Rightarrow f(\xi) = x_0$
   - $f(x_0) \neq 0 : [a_1, b_1]$
2. $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$
   - $f(x_1) = 0 \Rightarrow f(\xi) = x_1$
   - $f(x_1) \neq 0 : [a_2, b_2]$
3. ...

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \tag{4}$$

Teorema: Ako je (a, b) interval izolacije korena ξ jednačine (1) i ako je funkcija f neprekidna na odsečku $[a, b]$, onda niz (4) konvergira korenu ξ,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Dokaz: Lako se uočava da je

$$|\xi - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}. \tag{5}$$

Kako $(b-a)/2^{n+1} \to 0$ kada $n \to \infty$, to i $|\xi - x_n| \to 0$, odnosno $x_n \to \xi$ kada $n \to \infty$.

Primer: Metodom polovljenja intervala naći rešenje jednačine

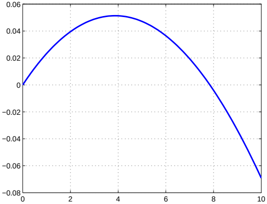
$$72 \ln(1 + x/100) = x \ln 2.$$

sa tachnošču do 10^{-2}.

Rešenje:

$$\left.\begin{array}{r} f(7) = \quad 0.019 \\ f(8) = -0.004 \end{array}\right\} \Rightarrow \xi \in (7,8)$$

$$\frac{8-7}{2^{n+1}} < 10^{-2} \Rightarrow n > 5.64; \;\; n \geq 6$$



k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	7.0000	8.0000	7.5000	+
1	7.5000	8.0000	7.7500	+
2	7.7500	8.0000	7.8750	−
3	7.7500	7.8750	7.8125	+
4	7.8125	7.8750	7.8438	+
5	7.8438	7.8750	7.8594	−
6	7.8438	7.8594	**7.8516**	−

$$f(x) = 0 \tag{6}$$

f - dva puta neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$

Oznake:

ξ - tačna vrednost korena jednačine (6)
x^* - približna vrednost korena jednačine (6)
$\Delta x = \xi - x^*$

Važi

$$0 = f(\xi) = f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x + \frac{1}{2} f''(\theta_x)(\Delta x)^2, \tag{7}$$

Ako je Δx dovoljno malo, jednačinu (7) zamenjujemo linearnom,

$$0 = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x, \tag{8}$$

Pod pretpostavkom $f'(x^*) \neq 0$, iz (8) sledi da je

$\Delta x = -f(x^*)/f'(x^*)$, pa je

$$\xi \approx x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)}$$

Iterativni proces Njutnove metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

Teorema (**dovoljni uslovi konvergencije**): Neka je $f(a)f(b) < 0$, gde je (a, b) interval izolacije korena ξ jednačine $f(x) = 0$. Pored toga, neka je:

(*i*) funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna na $[a, b]$,

(*ii*) f' i f'' su stalnog znaka na $[a, b]$.

Tada za svako $x_0 \in [a, b]$ koje zadovoljava uslov $f(x_0)f''(x_0) > 0$ iterativni proces (9) konvergira ka ξ,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Dokaz: Pretpostavimo, oderedjenosti radi, da je

$$f(a) < 0, f(b) > 0 \text{ i } f'(x) > 0, f''(x) > 0, x \in [a, b]$$

Dokazujemo:

- Niz (x_n) je ograničen odozdo.

  Metodom matematičke indukcije dokazaćemo da je $x_n > \xi$ za $n = 0, 1, \ldots$

  1. Iz $f(x_0)f''(x_0) > 0$ sledi $f(x_0) > 0$ pa je $x_0 > \xi$, jer je funkcija f monotono rastuća na $[a, b]$.
  2. Pretpostavimo da je $x_n > \xi$ za <u>neki</u> prirodan broj n.
  3. U razvoju

  $$0 = f(\xi) = f(x_n + (\xi - x_n)) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(\theta_{x_n})(\xi - x_n)^2$$

  poslednji sabirak je pozitivan , zbog $f''(\theta_{x_n}) > 0$, pa je

  $$f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) < 0.$$

  Sledi, zbog $f'(x_n) > 0$, da je

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > \xi,$$

odnosno $x_{n+1} > \xi$.

- Niz (x_n) je monotono opadajući.

  Iz monotonosti funkcije f sledi da je $f(x_n) > f(\xi) = 0$ za $n = 0, 1, \ldots$, pa je

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0 \quad \text{za } n = 0, 1, \ldots\ . \tag{10}$$

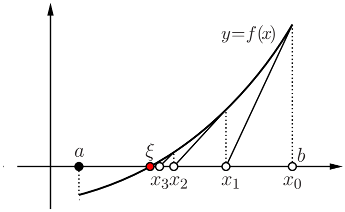
Zaključujemo da je niz (x_n) konvergentan. Neka je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c. \tag{11}$$

Tada je $\xi \leq c < x_0$. Prelaskom u (9) na graničnu vrednost kada $n \to \infty$, zbog neprekidnosti f, f' i uslova $f'(c) \neq 0$, dobijamo

$$c = c - \frac{f(c)}{f'(c)}, \tag{12}$$

odakle sledi da je $f(c) = 0$, odnosno $c = \xi$.



- Brzina konvergencije Njutnove metode dobija se iz razvoja

$$
\begin{aligned}
0 = f(\xi) &= f(x_{n-1} + (\xi - x_{n-1})) \\
&= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(\xi - x_{n-1}) + \frac{f''(c_n)}{2}(\xi - x_{n-1})^2,
\end{aligned}
$$

gde je c_n izmedju ξ i x_{n-1}. Iz prethodnog sledi

$$
\begin{aligned}
\xi &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} - \frac{f''(c_n)}{2f'(x_{n-1})}(\xi - x_{n-1})^2 \\
&= x_n - \frac{f''(c_n)}{2f'(x_{n-1})}(\xi - x_{n-1})^2,
\end{aligned}
$$

odnosno

$$\xi - x_n = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_{n-1})}(\xi - x_{n-1})^2.$$

pa je

$$|\xi - x_n| = \frac{|f''(c_n)|}{2|f'(x_{n-1})|}|\xi - x_{n-1}|^2 \le \frac{M_2}{2m_1}|\xi - x_{n-1}|^2.$$

Njutnova metoda ima <u>kvadratnu</u> konvergenciju!

- Ocene greške Njutnove metode:
  1. Opšta ocena,
  $$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} \tag{13}$$
  2. Ocena svojstvena samo Njutnovoj metodi,
  $$|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2, \quad M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)| \tag{14}$$

Ova ocena se izvodi iz ocene (13). Iz razvoja

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})) \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\theta_n)}{2}(x_n - x_{n-1})^2, \end{aligned}$$

imajući u vidu da je, na osnovu (9),

$$f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x_{n-1} - x_n),$$

sledi

$$f(x_n) = \frac{1}{2}f''(\theta_n)(x_n - x_{n-1})^2. \tag{15}$$

Iz (13) i (15) sledi

$$|\xi - x_n| \leq \frac{f''(\theta_n)}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2,$$

odakle proizilazi ocena (14).

Iterativni algoritam metode sečice,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots . \qquad (16)$$

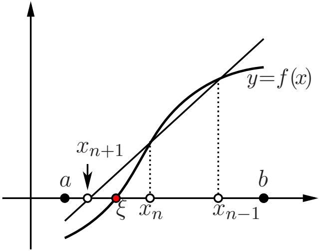
dobija se kada se u Njutnovoj formuli (9) izvod $f'(x_n)$ aproksimira količnikom priraštaja,

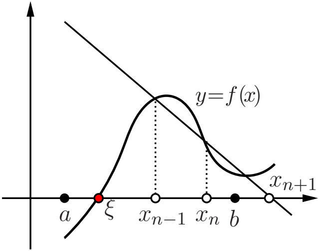
$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Metoda je dvokoračna! Obično se uzima $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Red konvergencije metode je $p = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1.618$, pa metoda konvergira sporije od Njutnove.

Geometrijska interpretacija metode:





Ako u jednačini sečice kroz tačke $(x_n, f(x_n))$ i $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$,

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}(x - x_n).$$

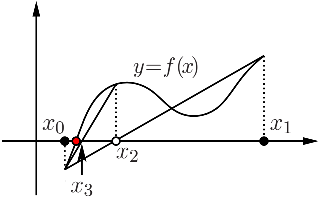
stavimo $y = 0$, dobijamo

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) = x_{n+1}.$$

Metoda *regula falsi*

Varijanta metode sečice u kojoj rešenje jednačine uvek ostaje izmedju dve uzastopne aproksimacije.

1. Za početne aproksimacije x_0 i x_1 biraju se bilo koje dve tačke odsechka $[a, b]$ za koje je $f(x_0)f(x_1) < 0$
2. $$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1).$$



3. - ako je $f(x_2)f(x_1) < 0$,

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2). \tag{17}$$

- ako je $f(x_2)f(x_0) < 0$, stavljamo $x_1 = x_0$ i ponovo računamo x_3 po formuli (17)
- ...

Iterativni niz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \qquad (18)$$

Ako se u iterativnom procesu (18) fiksira vrednost za x_{n-1}, dobija se jednokoračna varijanta metode *regula falsi*.

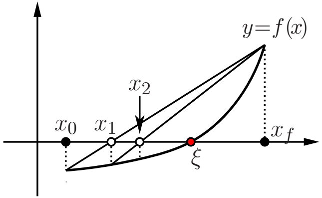
Teorema (**dovoljni uslovi konvergencije**): Neka je (a, b) interval izolacije korena jednačine $f(x) = 0$ i neka je drugi izvod funkcije f stalnog znaka na $[a, b]$. Ako su x_0 i x_f tačke odsečka $[a, b]$ takve da je $f(x_0)f(x_f) < 0$ i $f(x_f)f''(x_f) > 0$, onda iterativni proces

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_f)}(x_n - x_f), \quad n = 0, 1, \dots \qquad (19)$$

konvergira korenu jednachine $f(x) = 0$.

Dokaz: Odredjenosti radi, pretpostavimo da je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ i $f''(x) > 0$ za $x \in [a, b]$. Metodom matematičke indukcije dokazaćemo da je

$$f(x_n) < 0 \text{ i } x_n < \xi < x_f \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (20)$$



1.
$$f(x_f)f''(x_f) > 0 \Rightarrow f(x_f) > 0$$
$$f(x_0)f(x_f) < 0 \quad \Rightarrow f(x_0) < 0 \text{ i } x_0 < \xi < x_f,$$

   pa je tvrdjenje tačno za $n = 0$.
2. Pretpostavimo da relacije (20) važe za neki nenegativan ceo broj n.

3. Neka je $y = L(x)$ jednačina sečice koja sadrži tačke $(x_n, f(x_n))$ i $(x_f, f(x_f))$. Tada je

$$f(x_{n+1}) < L(x_{n+1}) = 0,$$

jer je funkcija f konveksna na intervalu (x_n, x_f), a x_{n+1} presečna tačka sečice L i x-ose. Sada imamo $f(x_{n+1})f(x_f) < 0$, pa je $x_{n+1} < \xi < x_f$.

Kako je $f(x_n) < 0$, $f(x_f) > 0$ i $x_n < x_f$, iz (19) sledi da je

$$x_{n+1} > x_n \text{ za } n = 0, 1, \ldots . \tag{21}$$

Iz (20) i (21) sledi da je niz (x_n) monoton i ograničen, pa je i konvergentan. Ako je $\eta = \lim_{n\to\infty} x_n$, onda je $\eta \leq \xi$ i $f(\eta) < f(x_f)$. Prelaskom u (19) na graničnu vrednost kada $n \to \infty$ dobijamo

$$\eta = \eta - \frac{f(\eta)}{f(\eta) - f(x_f)}(\eta - x_f),$$

odakle sledi da je $f(\eta) = 0$.

Pod pretpostavkama prethodne teoreme, uz dodatnu pretpostvku da je prvi izvod funkcije f stalnog znaka na $[a, b]$, može se dobiti formula za ocenu greške jednokoračne metode *regula falsi*,

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_{n+1} - x_n|. \tag{22}$$

Zaista,

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{f(x_n) - f(\xi)}{f(x_n) - f(x_f)} (x_n - x_f),$$

pa primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \xi &= x_n - \xi - \frac{f'(c_{1,n})(x_n - \xi)}{f'(c_{2,n})(x_n - x_f)} (x_n - x_f) \\ &= (x_n - \xi) \left(1 - \frac{f'(c_{1,n})}{f'(c_{2,n})}\right) \qquad (23) \\ &= (x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - \xi) \left(1 - \frac{f'(c_{1,n})}{f'(c_{2,n})}\right). \end{aligned}$$

gde su $c_{1,n}$ i $c_{2,n}$ neke tačke intervala $(x_n x_f)$.

Iz prethodne relacije sledi

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f'(c_{1,n}) - f'(c_{2,n})}{f'(c_{2,n})}(x_{n+1} - x_n),$$

a iz ove relacije neposredno proizilazi ocena (22).

Napomena: Iz (23) sledi da je

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - \xi|,$$

što znači da je konvergencija jednokoračne metode *regula falsi* linearna.

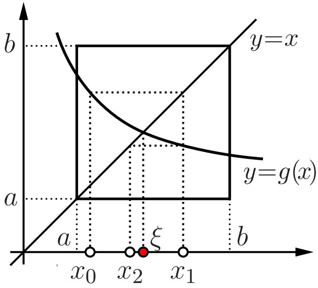
Metoda iteracije

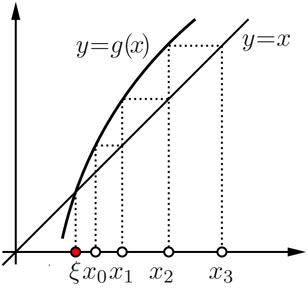
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x), \quad x \in [a, b] \tag{24}$$

ξ je rešenje jednačine $f(x) = 0$ ako i samo ako je ξ nepokretna (fiksna) tačka preslikavanja g

Iterativni proces metode iteracije:

$$x_n = g(x_{n-1}), \quad n = 0, 1, \ldots \quad x_0 \in [a, b] \tag{25}$$





Teorema (**dovoljni uslovi konvergencije**): Neka je (a, b) interval izolacije korena ξ jednačine $f(x) = 0$ i neka je g diferencijabilna funkcija za koju postoji konstanta q takva da je

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{26}$$

Tada za proizvoljno $x_0 \in [a, b]$:

1. iterativni niz (25) konvergira ka ξ,
2. važi ocena

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_1|, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{27}$$

Dokaz:

- Metodom matematičke indukcije dokazaćemo da

$$x_n \in [a, b] \tag{28}$$

i da je

$$|x_n - \xi| \leq q^n |x_0 - \xi| \quad \text{za } n = 1, 2, \ldots \tag{29}$$

1. Primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned}|x_1 - \xi| = |g(x_0) - g(\xi)| &= |g'(c_1)(x_0 - \xi)| \\ &= |g'(c_1)||x_0 - \xi| \leq q|x_0 - \xi|,\end{aligned}$$

pa $x_1 \in [a, b]$, jer je $0 \leq q < 1$.

2. Pretpostavimo da je $|x_{n-1} - \xi| \leq q^{n-1}|x_0 - \xi|$ i da $x_{n-1} \in [a, b]$ za neki prirodan broj n.
3. Tada je

$$\begin{aligned}|x_n - \xi| = |g(x_{n-1}) - g(\xi)| &= |g'(c_n)(x_{n-1} - \xi)| \\ &= |g'(c_{n-1})||x_{n-1} - \xi| \leq q \cdot q^{n-1}|x_0 - \xi| \\ &= q^n|x_0 - \xi|. \end{aligned} \tag{30}$$

Iz (30) sledi da relacije (28) i (29) važe za svaki prirodan broj n.

- Korišćenjem nejednakosti trougla i primenom nejednakosti (29) za $n = 1$ imamo

$$|x_0-\xi| = |x_0-x_1+x_1-\xi| \leq |x_0-x_1|+|x_1-\xi| \leq |x_0-x_1|+q|x_0-\xi|,$$

odakle sledi da je

$$|x_0 - \xi| \leq \frac{|x_0 - x_1|}{1 - q}. \tag{31}$$

Ocena (27) sledi neposredno iz (29) i (31).

Neke napomene o metodi iteracije

- Pored ocene (27), za metodu iteracije važi **aposteriorna ocena** greške,

$$|x_n - \xi| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|. \tag{32}$$

  Naime,

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - \xi| &\leq q(|x_{n-1} - x_n| + |x_n - \xi|) \\ &\Rightarrow (1-q)|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - x_n| \\ &\Rightarrow (32) \end{aligned}$$

- Konvergencija metode iteracije je linearna. To sledi iz relacije

$$|x_n - \xi| \leq q|x_{n-1} - \xi|.$$

- Ako je $|g'(x)| < 1$ u nekoj okolini korena ξ, a $|g'(x)| > 1$ van te okoline, konvergencija zavisi od izbora početne aproksimacije x_0. O tome govori teorema o lokalnoj konvergenciji metode iteracije.

Teorema (**o lokalnoj konvergenciji**): Neka je ξ jedinstven koren jednačine $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) i neka je g neprekidno diferencijabilna funkcija u nekom otvorenom intervalu koji sadrži ξ. Ako je

$$|g'(\xi)| < 1,$$

onda postoji $\delta > 0$ takvo da iterativni niz $x_n = g(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ konvergira ka ξ za bilo koje x_0 koje zadovoljava uslov $|x_0 - \xi| < \delta$.

- Pod pretpostavkama teoreme je

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \xi}{x_n - \xi} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g'(c_n)(x_n - \xi)}{x_n - \xi} \\ &= \lim_{n\to\infty} g'(c_n) = g'(\xi). \end{aligned}$$

Veličinu $|g'(\xi)|$ nazivamo asimptotskim koeficijentom konvergencije.

Primer: Nalaženje kvadratnog korena iz broja $a > 0$ svodi se na odredjivanje pozitivnog rešenja jednačine

$$x^2 - a = 0$$

koja je ekvivalentna jednačini

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \equiv g(x).$$

U iterativnom algoritmu metode iteracije

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

je $g'(x) = 0.5(1 - a/x^2)$ i $g'(\sqrt{a}) = 0$, pa asimptotski koeficijent konvergencije ima najmanju moguću vrednost.

U tabeli su dati rezultati primene iterativnog algoritma za nalaženje vrednosti $\sqrt{5}$ u pet iteracija. Za početnu vrednost korena uzeto je $x_0 = 3$.

n	x_n	$\frac{q}{1-q}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	3.0000000000000	
1	2.3333333333333	0.1991342
2	2.2380952320952	0.0284474
3	2.2360688956433	0.0006052
4	2.2360679775000	0.0000003
5	2.2360679774998	$0.56 \cdot 10^{-13}$

Posle pete iteracija dostignuta je tačnost koja garantuje 14 sigurnih cifara približne vrednosti x_5. Ovaj algoritam prvi je koristio starogrčki matematičar Heron Aleksandrijski (prvi v.n.e), a koriste ga i savremeni računari !!!