Literatur:

[1] French, A. P.: Die spezielle Relativitätstheorie. M. I. T. Einführungskurs Physik, Vieweg, 1971.
(Umfangreiches experimentelles Material, vielschichtige betrachtungsweise relativistischer Probleme, didaktisch aufgearbeitetes Hochschullehrbuch).

[2] Göhler, H.: Gamma- und Beta-Szintillationsspektroskopie. Leybold Kat. Nr. 559971 (1984).

[3] Kuhn, W. (Hrsg.): Relativitätstheorie. (Mehrere Beiträge) Praxis der Naturwissenschaften, Heft 3/37 (1988).

[4] Melcher, H.: Relativitätstheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974.
(Elementare Einführung in die Relativitätstheorie auf formal anspruchsvollem Niveau).

[5] Sexl, R./Schmidt, H. K.: Raum-Zeit-Relativität. rororo vieweg, 1978.
(Ausführliche Diskussion der historischen Bezüge, Einführung in die Relativitätstheorie auf mehreren Ebenen, unter anderem eine elementare Darstellung der Vierervektoren).

[6] Sexl, R./Schmidt, H. K.: Relativitätstheorie. Grundkurs Physik in der Sekundarstufe II, Schulverlag Vieweg, 1978, J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 1979
(einschließlich Lehrerbegleitheft mit didaktischen und methodischen Hinweisen, Vorlagen für Projektionsfolien etc.).

Aufgaben und Lösungen zu Kapitel 8

Zu 8.1.1, *Seite 332*

8/1: Nennen Sie Beispiele für Inertialsysteme und für beschleunigte Bezugssysteme.

Lösung:
Der Unterrichtsraum und jeder andere, gleichförmig bewegte Raum lassen sich näherungsweise als Inertialsystem verwenden, wenn man die von der Erdrotation hervorgerufene Beschleunigung von 0,0337 $m/s^2 \cos\varphi$ (φ ist der geogr. Breitengrad) vernachlässigt. Aufgrund der Bewegung um die Sonne erfährt jeder Punkt der Erde eine Beschleunigung von 5,9 mm/s^2 und das Sonnensystem wird bei seiner Bewegung in der Milchstraße (*Kap. 14.3.1*) mit $1{,}8 \cdot 10^{-10}\ m/s^2$ beschleunigt.
Fahrstuhl, anfahrende Straßenbahn oder Karussell sind typische Beispiele für beschleunigte Bezugssysteme.

8/2: Zeigen Sie an einigen Beispielen aus der Mechanik die Gültigkeit des Galileischen Relativitätsprinzips.

Lösung:
Eine Kugel fällt am Mast eines Schiffes hinab, gleichgültig ob das Schiff im Hafen liegt oder gleichförmig fährt. In einem Salonwagen eines D-Zuges kann man Billard spielen, solange der Zug gleichförmig fährt. In einem Flugzeug kann man problemlos ein Getränk eingießen, wenn nur das Flugzeug seine Geschwindigkeit nicht ändert.

Zu 8.1.2, *Seite 333 und 334*

***8/3:** In dem von Michelson durchgeführten Experiment betrug die effektive Länge der Spektrometerarme $d = 11$ m. Berechnen Sie die erwartete Laufzeitdifferenz $t_{||} - t_{\perp}$, und vergleichen Sie diese Zeit mit der Schwinguugsdauer von Licht. Um welchen Phasenwinkel sollten sich die beiden Teilbündel bei einer Drehung der Apparatur um 90° gegeneinander verschieben?

Lösung:

$$t_{||} - t_{\perp} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right) \approx \frac{d v^2}{c^3} = 3{,}7 \cdot 10^{-16}\ \text{s};$$

$$\Delta t/T = \Delta t f = 0{,}22 \text{ für } \lambda = 500 \text{ nm};$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360° = 0{,}22 \cdot 360° \approx 80°.$$

***8/4:** Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich die Erde um die Sonne bewegt. Die Erde bewegt sich näherungsweise auf einem Kreis mit r = 149,6 Millionen km. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Sonne um das Zentrum des Milchstraßensystems? Die Bahn ist etwa kreisförmig mit einem Radius $R = 3{,}024 \cdot 10^{17}$ km, und ein Umlauf dauert 225 Millionen Jahre.
Warum hat man wohl das Michelson-Experiment zu verschiedenen Jahreszeiten an verschiedenen Orten der Erde wiederholt?

Lösung:

$$v_{\text{Erde}} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \text{km}}{1\ \text{a}} = 29{,}8\ \text{km/s},$$

$$v_{\text{Sonne}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3{,}024 \cdot 10^{17}\ \text{km}}{225 \cdot 10^6\ \text{a}} = 268\ \text{km/s}.$$

Ruht der Äther im Universum, so hätte es sein können, daß sich bei Michelsons Versuch die Geschwindigkeiten von Erde und Sonnensystem ungünstig addiert und dabei zum Teil aufgehoben hätten.

Zu 8.1.3, *Seite 334*

8/5: Erläutern Sie, wie man mit den Postulaten der Relativitätstheorie den negativen Ausgang des Michelson-Experiments erklären kann.

Lösung:
Hat das Licht in einem Inertialsystem in jeder Richtung die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit, wie es das zweite Postulat fordert, so hat eine Drehung des Michelson-Interferometers keine Änderung der Laufzeiten zur Folge, und eine Verschiebung der Interferenzstreifen ergibt sich nicht.

8/6: In der Relativitätstheorie hat die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem den gleichen Wert c. Man bezeichnet dies als Invarianz der Lichtgeschwindigkeit. Gibt es auch in der klassischen Physik eine invariante Geschwindigkeit, die also bei einem Wechsel des Inertialsystems ihren Wert nicht ändert?

Lösung:
In der klassischen Physik, in der alle Geschwindigkeiten möglich sind, wäre eine unendlich große Geschwindigkeit invariant gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems.

8/7: Stellen Sie sich vor, Sie hielten vor sich einen Handspiegel und würden mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum laufen. Könnten Sie sich dann in dem Spiegel sehen? Was sagt die klassische Physik und was die Relativitätstheorie zu diesem Problem?

Lösung:
Einstein selbst soll sich diese Frage als sechzehnjähriger Schüler gestellt haben. Klassisch sollte bei Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit das Licht zunehmend länger brauchen, um den Spiegel zu erreichen; bei Lichtgeschwindigkeit selbst wird der Spiegel schwarz. Einstein meinte intuitiv, daß dies nicht sein könne; bei keiner Geschwindigkeit sollte sich etwas am Spiegelbild verändern, so wie es die Relativitätspostulate verlangen.

8/8: Wieso widerspricht das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der klassischen Addition von Geschwindigkeiten? Was folgt daraus für die klassische Addition von Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie?

Lösung:
Hat ein Elektron eine Geschwindigkeit von 0,9 c und fliegen dieses Elektron und ein Photon aufeinander zu, so hätte das Photon aus der Sicht des Elektrons klassisch gerechnet die Geschwindigkeit 1,9 c und nicht 1 c, wie es die Relativitätstheorie verlangt. Die klassische Addition von Geschwindigkeiten ist daher die falsche mathematische Methode, um relativistisch Geschwindigkeiten zu „addieren".

Zu 8.2.1, *Seite 335 und 336*

8/9: Der Relativitätsexpreß rast mit nahezu Lichtgeschwindigkeit dahin. Da schlägt ein Blitz in das vordere und ein Blitz in das hintere Ende des Zuges ein. Ein Reisender, der sich in der Mitte des Zuges befindet, und ein Bahnwärter draußen am Bahndamm sehen die Blitze gleichzeitig. Beim Eintreffen der von den Blitzen ausgesandten Lichtsignale befinden sich der Reisende und der Bahnwärter auf gleicher Höhe. Welche Schlüsse ziehen beide daraus über die Zeiten, zu denen die Blitze einschlugen?

Lösung:
Man kehre in *Abb. 8-5* und *8-6* alle Geschwindigkeiten um und lasse die Zeit rückwärts, in den Bildern also von unten nach oben ablaufen. Betrachtet man die obere Rakete mit den Uhren A und B als Relativitätsexpreß, so hat man eine anschauliche Darstellung für dieses Problem: *Abb. 8-5* zeigt, daß für den Bahnwärter, der sich in der Mitte der unteren Rakete befindet, der Blitz erst in das hintere Ende des Zuges (A) einschlägt, danach in das vordere Ende (B). Für den Reisenden in der Mitte des Zuges, das zeigt *Abb. 8-6*, schlagen beide Blitze gleichzeitig ein.

8/10: Zwei Raumschiffe fliegen mit halber Lichtgeschwindigkeit durch das Sonnensystem. Ihr Abstand im Sonnensystem beträgt konstant 600000 km. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem die Besatzung der beiden Raumschiffe die Uhren an Bord synchronisiert. Um wieviel werden die Uhren im hinteren Raumschiff für einen Beobachter auf einem Planeten eher in Gang gesetzt?

Lösung:
Die Synchronisation der Uhren kann so ablaufen: Vom hinteren Raumschiff wird ein Lichtsignal ausgesandt, gleichzeitig werden dort die Uhren in Gang gesetzt. Am vorderen Raumschiff wird das Signal reflektiert und gleichzeitig werden dort die Uhren in Gang gesetzt. Die Mannschaft im hinteren Raumschiff mißt die gesamte Signallaufzeit und teilt dem vorderen Raumschiff mit, daß dessen Uhren um die halbe Laufzeit vorgestellt werden müssen. (Dies sind allerdings keine 2 Sekunden sondern 2,31 s, da man die Lorentz-Kontraktion des Abstands im Sonnensystem berücksichtigen muß.)
Für den Beobachter im Sonnensystem braucht das Signal von dem hinteren zum vorderen Raumschiff die Zeit $T = 4$ s, da das Signal nicht nur die Strecke s = 600000 km zu durchlaufen hat, sondern auch den vom Ranmschiff während T zurückgelegten Weg $\Delta s = (c/2)\,T$; ans $s + \Delta s = cT$ folgt $T = 4$ s. Für den Beobachter im Sonnensystem ist also das Vorstellen der Uhren im vorderen Raumschiff von 2 s (oder 2,31 s) zu wenig.

Zu 8.2.2, *Seite 339*

8/11: Zwei synchronisierte Uhren A und B haben auf der Erde einen Abstand von 600 km. Eine Rakete fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 12/13\,c$ über die Erde hinweg und kommt erst au Uhr A, dann an Uhr B vorbei. Bei A zeigt eine Uhr in der Rakete die gleiche Zeit wie Uhr A an. Welche Zeit zeigt die Raketenuhr im Vergleich zur Uhr B an, wenn sie über diese hinwegfliegt?

Lösung:

Auf der Erde vergeht die Zeit $\Delta t_R = \dfrac{600\text{ km}}{\dfrac{12}{13}\cdot 300000\text{ km/s}} = \dfrac{13}{6}\text{ ms} \approx 2{,}167\text{ ms}.$

In der Rakete geht die Uhr nur um die Zeit Δt weiter:

$$\Delta t = \Delta t_R\sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{13}{6}\text{ m}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{6} \approx 0{,}833\text{ ms}.$$

Die Uhr in der Rakete zeigt 1,33 s weniger an als die Uhr B, wenn sie über diese hinwegfliegt.

8/12: Astronauten benötigen für die Hin- und Rückreise zum Mond vier Tage. Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit und die dadurch anftretende Zeitdilatation. Könnte man die Zeitdilatation mit Atomuhren messen? Die Ganggenauigkeit neuester Atomuhren beträgt $\Delta t/t = 10^{-14}$ und die kleinste meßbare Zeitspanne sei 0,1 ns.

Lösung:

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $v = \dfrac{2\cdot 384400\text{ km}}{4\text{ d}} = 2225\text{ m/s}.$

Für die Zeiten t_{Rakete} und t_{Erde} gilt $t_{\text{Rakete}} = t_{\text{Erde}}\sqrt{1 - v^2/c^2}$, oder

$$t_{\text{Rakete}} \approx t_{\text{Erde}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = t_{\text{Erde}} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t_{\text{Erde}}.$$

Die relative Zeitabweichung berechnet sich also zu

$$\frac{t_{\text{Erde}} - t_{\text{Rakete}}}{t_{\text{Erde}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}2\text{ km/s}}{300000\text{ km/s}}\right)^2 = 2{,}75\cdot 10^{-11};$$

dieser Wert ist 2750 mal größer als $\Delta t/t = 10^{-14}$.
Die absolute Zeitabweichung beträgt

$$t_{\text{Erde}} - t_{\text{Rakete}} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t_{\text{Erde}} = 2{,}75\cdot 10^{-11}\cdot 4\text{ d} = 9{,}5\ \mu s$$

und ist damit 95000 mal größer als die kleinste, von der Atomuhr meßbare Zeitspanne.

8/13: Ein 30jähriger Weltraumfahrer startet im Jahre 1989 zu einer Reise durch das Weltall. Seine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit beträgt relativ zur Erde gemessen $v = 40/41\,c$. Wie alt ist der Weltraumfahrer, wenn er im Jahre 2030 zurückkehrt?

Lösung:

$$\Delta t = (2030\text{a} - 1989\text{a})\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2} = 41\text{a}\,\frac{9}{41} = 9\text{a}.$$

Nach 41 Jahren kehrt der Weltraumfahrer im Jahre 2030 als Neunundreißigjähriger zurück.

8/14: Der nächste Fixstern ist Alpha-Centauri am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.
a) Wie lange bräuchte ein Raumschiff, um zu dem Stern zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0{,}5\,c$ beträgt?
b) Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord des Raumschiffs dauern?
c) Welche Geschwindigkeit müßte das Raumschiff haben, damit für die Besatzung während der Reise nur ein Jahr vergeht?

Lösung:
a) Das Raumschiff bräuchte 9 Jahre: $\Delta t_{\text{Erde}} = \dfrac{4{,}5\text{ a}c}{0{,}5\,c} = 9\text{a}.$
b) Für die Astronauten vergingen nur 7,8 Jahre, was sich allerdings erst bei deren Rückkehr zeigen würde:

$$\Delta t_{\text{Astr.}} = \Delta t_{\text{Erde}}\sqrt{1 - v^2/c^2} = 9\text{a}\sqrt{1 - 0{,}5^2} = 7{,}8\text{a}.$$

c) Aus $\Delta t_{\text{Astr.}} = \Delta t_{\text{Erde}} \sqrt{1 - v^2/c^2}$ folgt $1\,\text{a} = \dfrac{4{,}5\ ac}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2}$

und daraus $v/c = 0{,}9762$.
Für die Erdbewohner würde der Flug 4,61 a dauern.

8/15: Ein Autorennen dauert zwei Stunden. Es wird dabei mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 280 km/h gefahren.
Um wieviel ist ein Rennfahrer am Ende des Rennens weniger gealtert als die Zuschauer auf den Rängen?

Lösung:
Es tritt eine Zeitdifferenz von 0,24 Nanosekunden auf:

$$t_{\text{Rennf}} = t_{\text{Zus}} \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx t_{\text{Zus}} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right),$$

$$t_{\text{Rennf}} - t_{\text{Zus}} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 t_{\text{Zus}} = \frac{1}{2}\left(\frac{77{,}8\ \text{m/s}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}\right)^2 2\ \text{h} = 0{,}24\ \text{ns}.$$

Zu 8.2.3, *Seite 340 und 341*

8/16: Zeigen Sie anhand einer Skizze, daß Uhren, die in ihrem Ruhsystem synchronisiert sind, auch in jedem anderen Inertialsystem synchron gehen, wenn sie senkrecht zur Bewegungsrichtung hintereinander angeordnet sind. Erläutern Sie, wie man damit senkrecht zur Bewegungsrichtung in allen Inertialsystemen gleiche Längen mißt.

Lösung:

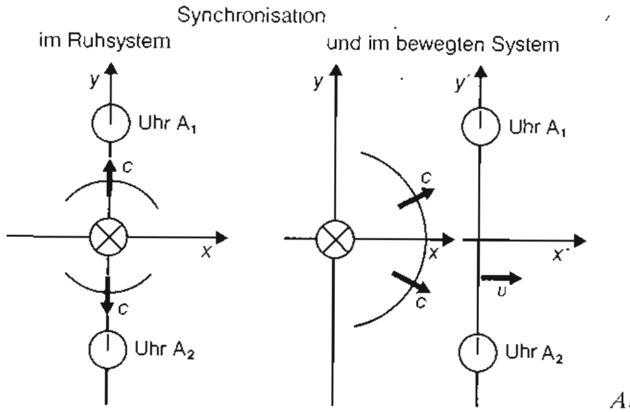

Abb. 65

Die Lichtsignale erreichen die Uhren in beiden Fällen gleichzeitig. Hinterlassen die beiden Uhren A_1 und A_2 zu einem bestimmten Zeitpunkt gleichzeitig Marken in einem der beiden Bezugssysteme, so wird deren Abstand in jedem System gleich gemessen.

8/17: Erläutern Sie, wie in *Abb. 8-10* jeder der beiden Beobachter die nach seiner Meinung falsche Längeumessung des anderen erklärt.

Lösung:
Für den Beobachter in der Rakete geht die Uhr C zu langsam; die mit ihr ermittelte Länge ist daher zu klein. Für den Beobachter am Boden gehen die Uhren A und B nicht synchron, sondern B geht vor. Daher ist die ermittelte Zeitspanne zu groß und damit für ihn auch die daraus berechnete Länge.

8/18: Myonen werden in 20 km Höhe erzeugt und fliegen mit $v = 0{,}9998\ c$ auf die Erde zu. Welche Ausdehnung hat für die Myonen die Atmosphärenschicht von 20 km?

Lösung:
Die Höhe von 20 km ist auf 400 m kontrahiert:

$$h = 20\ \text{km} \sqrt{1 - 0{,}9998^2} = 400\ \text{m}.$$

8/19: Ein Raumschiff fliegt mit $v = 0{,}6\ c$ über eine synchronisierte Uhrenkette hinweg. Anfang und Ende des Raumschiffs befinden sich gleichzeitig über zwei Uhren, die einen Abstand von 48 m haben. Wie lang ist das Raumschiff für einen Astronauten, der sich im Raumschiff aufhält? Wie erklärt er sein anderslautendes Ergebnis?

Lösung:
Die Eigenlänge der Rakete beträgt $l_R = 60$ m:

$$l_R = \frac{48\ \text{m}}{\sqrt{1 - 0{,}6^2}} = 60\ \text{m}.$$

Für den Astronauten ist die Uhrenkette nicht synchronisiert; in Flugrichtung gesehen geht jede nachfolgende Uhr um eine bestimmte Zeitspanne gegenüber der davor stehenden Uhr **vor**! Anfang und Ende des Raumschiffs werden daher für den Astronauten nicht gleichzeitig markiert, sondern der Anfang zu früh, das Ende zu spät. Die Länge wird zu klein gemessen.

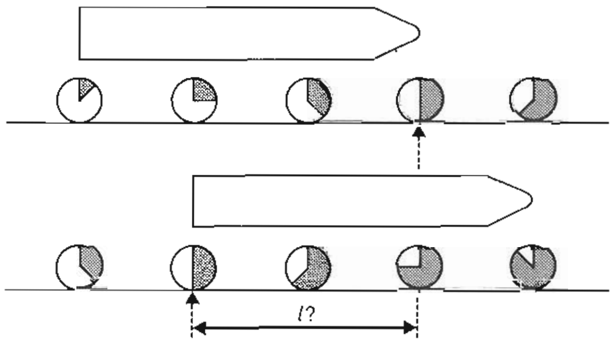

Abb. 66

8/20: Wie schnell muß eine Rakete an der Erde vorbeifliegen, damit ihre gemessene Länge die Hälfte ihrer Eigenlänge beträgt? Wie lange dauert in diesem Fall eine Sekunde an Bord der Rakete?

Lösung:

Die Geschwindigkeit der Rakete beträgt $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}\;c = 0{,}866\;c$:

$$l = \frac{1}{2}\,l_R = l_R\sqrt{1 - v^2/c^2} \;\Rightarrow\; v/c = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.$$

An Bord der Rakete vergehen 0,5 s, wenn auf der Erde eine Sekunde vergeht.

8/21: Um wieviel Zentimeter ist für einen Beobachter im Sonnensystem die Erde aufgrund ihrer Bewegung um die Sonne kontrahiert?

Lösung:
Um etwa 6 cm ist die Erde kontrahiert:

$$\text{Aus } d = d_R\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx d_R\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \text{ folgt}$$

$$d_R - d = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 d_R = \frac{1}{2}\left(\frac{30\text{ km/s}}{300000\text{ km/s}}\right)^2 12740\text{ km} = 6{,}37\text{ cm}.$$

***8/22:** Zeigen Sie, daß sich in *Abb. 8-7* kein Widerspruch ergibt, wenn man die Uhr C als ruhend und die Uhren A und B als bewegt ansieht. Berücksichtigen Sie dabei,
a) daß der Abstand der Uhren A und B Lorentz-kontrahiert ist (um welchen Faktor?),
b) daß die Uhr B gegenüber der Uhr A um 3 ns vorgeht (woher kommt das?).

Lösung:
Eine sorgfältige Diskussion dieser nicht einfachen Aufgabe kann den Abschluß des Themenkreises „Relative Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation und Lorentz-Kontraktion" bilden. Geht es doch hier um den von Kritikern erhobenen Vorwurf, daß die Symmetrie der Zeitdilatation bezüglich zweier Inertialsysteme bereits einen inneren Widerspruch darstellt.
In *Abb. 8-7* geht die bewegte Uhr nur halb so schnell wie die ruhenden Uhren, woraus sich die Relativgeschwindigkeit $v/c = \sqrt{3/2} = 0{,}866$ ergibt *(Aufgabe 8/20)*. Der Abstand der beiden Uhren A und B beträgt demnach in deren Ruhsystem $d_r = 4\text{ ns}\cdot v$; diese Form ist aussagekräftiger als der daraus berechnete Wert von 104 cm.
Betrachten wir nun die Uhr C als ruhend, so ist der Abstand der bewegten Uhren A und B Lorentz-kontrahiert: $d = 2\text{ ns}\cdot v$. Die beiden Uhren A und B gehen nicht mehr synchron; welche Zeitdifferenz sie anzeigen, ergibt sich aus der Betrachtung der in ihrem Ruhsystem erfolgten Einstein-Synchronisation:

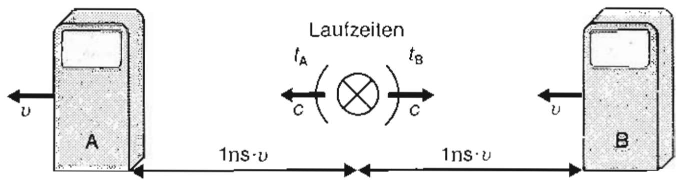

Abb. 67

Die Uhr B wird vor der Uhr A iu Gang gesetzt; seien t_A und t_B die Laufzeiten der Synchronisationsblitze (gemessen von der Uhr C), so ergibt die Rechnung:

Aus $c\,t_A = 1\text{ ns}\cdot v + v\,t_A$ folgt $(c - v)\,t_A = 1\text{ ns}\cdot v$,
und aus $c\,t_B = 1\text{ ns}\cdot v - v\,t_B$ folgt $(c + v)\,t_B = 1\text{ ns}\cdot v$,
so daß sich ergibt $t_A - t_B = 1\text{ ns}\cdot v\left(\frac{1}{c - v} - \frac{1}{c + v}\right) = 1\text{ ns}\,\frac{2}{c^2/v^2 - 1} = 6\text{ ns}$.

Diese von der Uhr C gemessene Zeitdifferenz von 6 ns wird jedoch nicht von den bewegten Uhren A und B angezeigt; sie gehen um den Faktor 1/2 langsamer, so daß B nur um 3 ns gegenüber A vorgeht.
Kommt die Uhr A an der Uhr C vorbei, so zeigt sie 100 ns an *(Abb. 7-8)*; Uhr B zeigt demnach (gleichzeitig für C) 103 ns. Bis die Uhr B an C vorbeikommt, vergehen 2 ns; für die langsamer gehende Ubr B vergeht jedoch nur 1 ns, so daß sie dann 104 ns wie in *Abb. 7-8* anzeigt.

Zu 8.2.4, *Seite 343*

***8/23:** Ein Fluß hat eine Strömungsgeschwindigkeit von 50 m/min. Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das das Inertialsystem „Ufer" darstellt ($0 \leqslant x \leqslant 400$ m: $0 \leqslant t \leqslant 3$ min). Zeichnen Sie ein schiefwinkliges Koordinatensystem hinein, das das Inertialsystem „Fluß" darstellt. Lösen Sie damit die folgenden Aufgaben graphisch: Ein Motorbootfahrer startet am Bootshaus H (250 m; 0 min) zu einer Fahrt stromanfwärts. Sein Boot fährt relativ zum Wasser mit einer Geschwindigkeit von 200 m/min. Nach einer Minute bemerkt er, daß ihm eine halbvolle Whiskyflache über Bord gefallen ist. Er kehrt um und holt die Flasche 100 m unterhalb des Bootshauses ein. Allerdings war ihm kurz nach dem Wenden der Motor für eine halbe Minute ausgefallen, und am Bootshaus mußte er 38 Sekunden wegen einer Fähre anhalten. Wann und wo fiel die Flasche über Bord? Zeichnen Sie in beiden Inertialsystemen ein Netz von Parallelen zn den Achsen und konstruieren Sie die Weltlinien von Boot und Flasche.

Lösung:
Aus dem Diagramm liest man ab, daß die Flasche 15 Sekunden nach dem Start, etwa 37 m oberhalb des Bootshauses über Bord gefallen war.

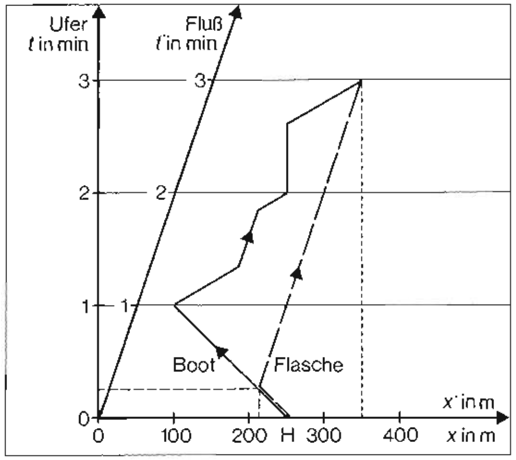

Abb. 68

***8/24**: Tragen Sie in ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Punkte A (3,5; 1,8), B (5,5; −5,5) und C (−5; 0) ein. Zeichnen Sie in das erste Koordinatensystem ein zweites, schiefwinkliges System, dessen Achsen einen Winkel von 120° einschließen. Beide Koordinatensysteme sollen dabei dieselbe Winkelhalbierende haben. Geben Sie die Koordinaten der Punkte im stumpfwinkligen System an, wenn dessen Einheitsstrecken 1,5mal größer als im rechtwinkligen System sind.

Lösung:
Im schiefwinkligen Koordinatensystem liest man folgende Koordinaten ab:
A (3; 2), B (3; −3), C (−3, 7; −1).

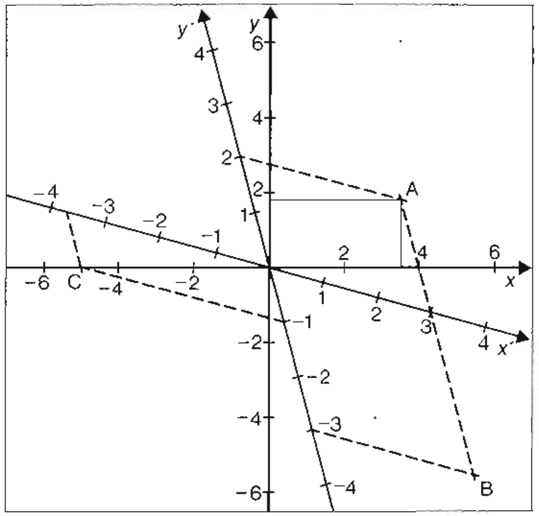

Abb. 69

Zu 8.2.5, *Seite 346*

***8/25**: Zeichnen Sie in einem Minkowski-Diagramm ein rechtwinkliges Koordinatensystem I und ein System I', das sich relativ zu I mit $v = 0{,}8\,c$ bewegt. Zeigen Sie, daß aus der Sicht eines jeden Systems die Uhren im anderen System langsamer gehen, daß also die Zeitdilatation ein symmetrischer Effekt ist. Zeigen Sie, daß auch die Lorentz-Kontraktion ein symmetrischer Effekt ist.

Lösung:
Für einen Beobachter in I vergehen $\Delta t_R = 5$ s, währenddessen vergehen in I' nur $\Delta t = 3$ s; befindet sich der Beobachter in I' und es vergehen dort $\Delta t_R' = 3$ s, so vergehen in I nur $\Delta t' = 1{,}8$ s. Hat ein Körper in I die Eigenlänge $l_R = 1$ Ls, so hat er in I' die Länge $l = 0{,}6$ Ls; hat er in I' die Eigenlänge $l_R' = 1$ Ls, so hat er in I die Länge $l' = 0{,}6$ Ls.

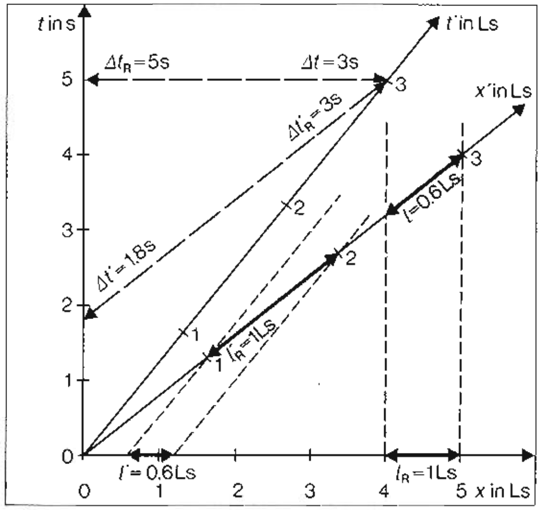

Abb. 70

***8/26**: Warum verlaufen in einem klassischen Raum-Zeit-Diagramm die Ortsachsen parallel, in einem relativistischen dagegen nicht?

Lösung:
Gleichzeitigkeit wird parallel zur Ortsachse abgelesen. Da es klassisch eine absolute Gleichzeitigkeit gibt, müssen demnach alle Ortsachsen parallel sein; relativistisch gilt dies nicht mehr.

***8/27:** Nehmen Sie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Zeicheneinheit von $e = 6$ cm für 1 s bzw. für 1 Ls an. Zeichnen Sie eine Folge von 10 Inertialsystemen mit den Relativgeschwindigkeiten

$$v = \pm\frac{1}{6}c\,;\ \pm\frac{2}{6}c\,;\ \pm\frac{3}{6}c\,;\ \pm\frac{4}{6}c\,;\ \pm\frac{5}{6}c$$

und tragen Sie jeweils 1 s und 1 Ls ein. Bei negativen Relativgeschwindigkeiten erhält man stumpfwinklige Koordinatensysteme.

Lösung:

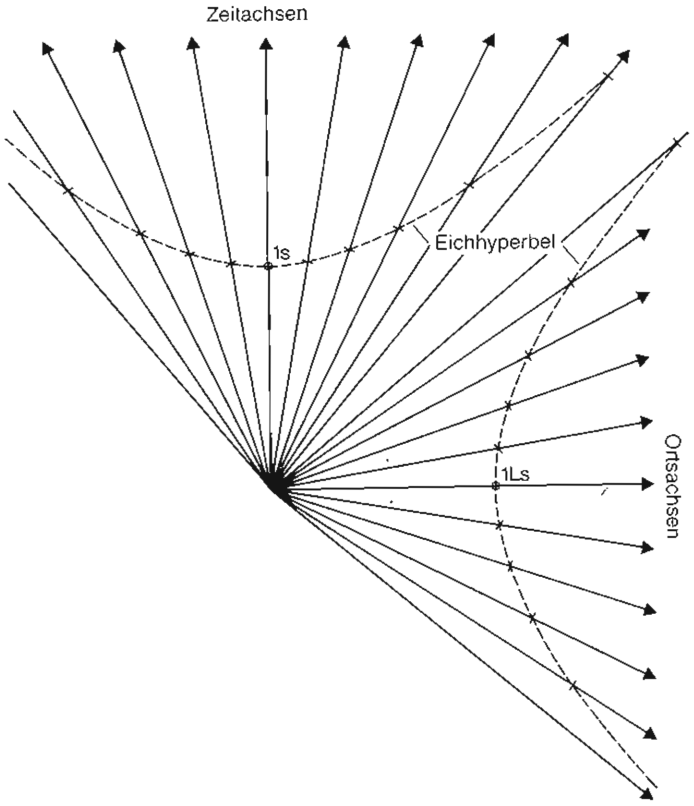

Abb. 71

***8/28:** Zwei Raumschiffe fliegen in entgegengesetzter Richtung mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 0{,}6\,c$ und $v_2 = 0{,}3\,c$ an der Erde vorbei. Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm, in dem das Erdsystem (rechtwinklig) und die Ruhsysteme der beiden Raumschiffe eingetragen sind. Lesen Sie ab, um welchen Faktor die Uhren des einen Raumschiffs langsamer im Vergleich zu den Uhren des anderen Raumschiffs gehen. Zeigen Sie, daß der Effekt symmetrisch ist. Zeigen Sie, daß die Raumschiffe um den gleichen Faktor Lorentz-kontrahiert sind.

Lösung:
Das erste Raumschiff bewegt sich mit $0{,}6\,c$ nach rechts, das zweite mit $0{,}3\,c$ nach links. Vergehen für einen Beobachter in I'' 10 s, so vergehen in I' für ihn nur 6,5 s. Daraus ergibt sich der Faktor 0,65; befindet sich der Beobachter in I' und es vergehen für ihn dort $\Delta t'_R = 6$ s, so vergehen in I'' $0{,}65 \cdot 6\text{ s} = 3{,}9$ s. Ein Körper mit der Eigenlänge $l_R = 2$ Ls wird im jeweils anderen System zu $0{,}65 \cdot 2\text{ Ls} = 1{,}3$ Ls verkürzt gemessen.

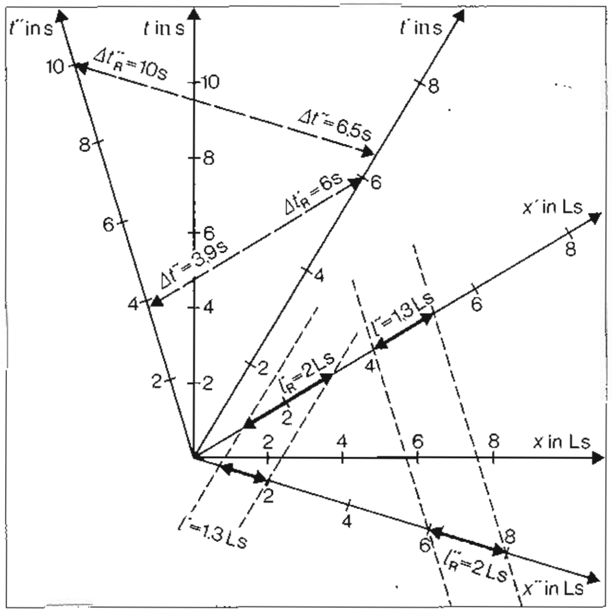

Abb. 72

Zu 8.2.6, *Seite 347*

8/29: Eine Wasserstofflinie im Spektrum des Spiralnebels Hydra hat eine Wellenlänge von 475 nm, während man im Labor die Linie bei einer Wellenlänge von 394 nm mißt. Wie groß ist die Fluchtgesehwindigkeit des Spiraluebels?

Lösuug:
Der Spiralnebel Hydra entfernt sich mit 18,5 % der Lichtgeschwindigkeit:

$$\frac{v}{c} = \frac{(\lambda_E/\lambda_s)^2 - 1}{(\lambda_E/\lambda_s)^2 + 1} = \frac{(475/394)^2 - 1}{(475/394)^2 + 1} = 0{,}185\ .$$

8/30: Worin unterscheiden sich akustischer und optischer Doppler-Effekt? Welche Frequenzen werden empfangen, wenn sich Sender und Empfänger mit Sehall- bzw. mit Lichtgeschwindigkeit aufeinander zubewegen oder voneinander entfernen?

Lösung:
Beim akustischen Doppler-Effekt stellt die Luft als Träger der Schallwellen ein ausgezeiehnetes Bezugssystem dar. Es ist zu unterscheiden, ob sieh Sender oder Empfänger in diesem Wellenträger bewegeu. Beim optischen Doppler-Effekt gibt es kein ausgezeichnetes Bezugssystem; daher spielt auch nur die Relativbewegung zwisehen Sender und Empfänger eine Rolle. Entfernt sich beim akustisehen Doppler-Effekt der Empfänger mit Schallgeschwindigkeit, so empfängt er keine Welle mehr ($f = 0$ Hz); entfernt sich hingegen der Sender mit Schallgeschwindigkeit, so wird die halbe Frequenz empfangen. Beim optisehen Doppler-Effekt geht die Frequenz gegen Null, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger sich der Liehtgeschwindigkeit nähert.

8/31: Ein Raumsehiff nähert sich mit $v = 0{,}6\,c$ der Erde. Während einer Fernsehübertragung zur Erde vergeht im Raumschiff eine Stunde. Wie lange dauert die Sendung auf der Erde? (Verwenden Sie die Formel $f = 1 : T$ und betrachten Sie T als Übertragungszeit.) Lösen Sie die Aufgabe auch mit einem Minkowski-Diagramm.

Lösung:

Auf der Erde dauert die Übertragung eine halbe Stunde: Aus $f_E = f_s \sqrt{\dfrac{1 - v/c}{1 + v/c}}$ folgt

bei Annäherung mit $f = 1/T$, und damit wird $T_E = T_S$

$$\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = 1\,\text{h} \sqrt{\frac{1 - 0{,}6}{1 + 0{,}6}} = \frac{1}{2}\,\text{h}\ .$$

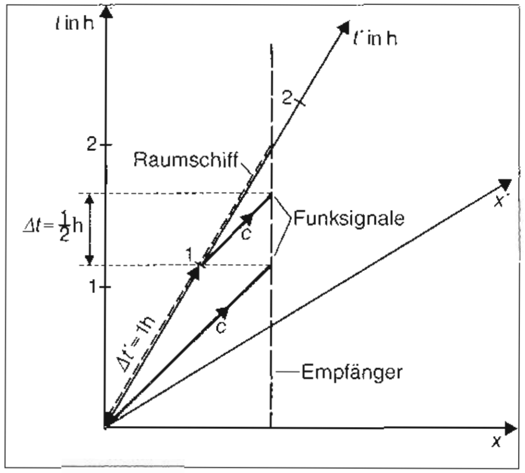

Abb. 73

Zu 8.2.7, *Seite 349*

***8/32:** Zwei Raketen fliegen in entgegengesetzter Richtung an der Erde vorbei. Die Geschwindigkeit beider Raketen beträgt relativ zur Erde $v = 0{,}8\,c$. Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Raketen?

Lösung:
Die Relativgeschwindigkeit der beiden Raketen beträgt 0,976 c:

$$u = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + 0{,}8 \cdot 0{,}8} = 0{,}976\,c\ .$$

***8/33:** Ein radioaktiver Kern fliegt mit $v = 0{,}5\,c$ und sendet in seinem Ruhsystem Elektronen mit einer Geschwindigkeit von 0,6 c aus. Welche Geschwindigkeiten haben die Elektronen in und entgegen der Flugrichtung des Kerns im Laborsystem?

Lösung:
In der Flugrichtung des Kerns haben die Elektronen die Geschwindigkeit 0,846 c, entgegen der Flugriehtung 0,143 c:

$$u_1 = \frac{0{,}5\,c + 0{,}6\,c}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}6} = 0{,}846\,c\ ; \quad u_2 = \frac{0{,}5\,c - 0{,}6\,c}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6} = -0{,}143\,c\ .$$

***8/34**: Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 1000 km/h und feuert in Vorausrichtung ein Geschoß mit ebenfalls 1000 km/h ab. Wie genau müßte eine Geschwindigkeitsmessung des Geschosses sein, wollte man den relativistischen Effekt nachweisen?

Lösung:
Mit $v = 1000$ km/h $= 278$ m/s folgt für die relativistische Geschwindigkeit u des Geschosses:

Aus $u = \dfrac{2v}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 2v\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$ folgt durch Umformen der Näherung

$$\frac{2v - u}{2v} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{278}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 8{,}6 \cdot 10^{-13}.$$

Die relative Geschwindigkeitsänderung beträgt $8{,}6 \cdot 10^{-13}$; mit dieser Genauigkeit ist eine Geschwindigkeitsmessung nicht möglich!

Zu 8.2.8, *Seite 350 und 351*

***8/35:** Leiten Sie mit den Lorentz-Transformationsgleichungen die Formel für die Zeitdilatation her. Legen Sie zunächst zwei Ereignisse für die Ablesung einer in I bewegten, in I' ruhenden Uhr fest. Beachten Sie, daß die Ablesung in I' am gleichen Ort ($x'_1 = x'_2$), in I an verschiedenen Orten erfolgt.

Lösung:
Eine Uhr bewegt sich im Inertialsystem I mit der Geschwindigkeit v. Zu den Zeiten t_1 und t_2 befindet sich die Uhr an den Orten x_1 bzw. x_2. In ihrem Ruhsystem I' werden diese beiden Ereignisse durch die Koordinaten (x'_1/t'_1) und (x'_2/t'_2) beschrieben, wobei $x'_1 = x'_2$. Für die Zeitspanne $t_2 - t_1$ im Inertialsystem I ergibt sich:

$$t_2 - t_1 = k\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2\right) - k\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1\right) = k\,(t'_2 - t'_1).$$

***8/36**: Zwei Ereignisse haben im Inertialsystem I die Koordinaten E_1 (2 Ls; 2 s) und E_2 (6 Ls; 5 s).

a) Transformieren Sie die Koordinaten der beiden Ereignisse in das System I', das sich relativ zu I mit $v = 0{,}6\,c$ bewegt.
b) Bilden Sie in beiden Inertialsystemen den räumlichen Abstand Δx, den zeitlichen Abstand Δt und den sogenannten raum-zeitlichen Abstand $\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}$ der beiden Ereignisse. Was fällt auf?

Lösuug:

a) Mit $x' = \dfrac{1}{0{,}8}(x - 0{,}6\,ct)$ und $t' = \dfrac{1}{0{,}8}\left(t - 0{,}6\,\dfrac{x}{c}\right)$ berechnet man

E'_1 (1 Ls/1 s) und E'_2 (3,75 Ls/1,75 s).

b) $\Delta x = x_2 - x_1 = 4$ Ls; $\quad \Delta t = t_2 - t_1 = 3$ s;
$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 2{,}75$ Ls; $\quad \Delta t' = t'_2 - t'_1 = 0{,}75$ s;
$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2} = \sqrt{(3\text{ Ls})^2 - (4\text{ Ls})^2} = \sqrt{-7}$ Ls;
$\Delta s' = \sqrt{c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2} = \sqrt{(0{,}75\text{ Ls})^2 - (2{,}75\text{ Ls})^2} = \sqrt{-7}$ Ls.

Während sich der räumliche Abstand Δx und der zeitliche Abstand Δt beim Wechsel des Bezugssystems ändern, bleibt der raum-zeitliche Abstand $\Delta s = \Delta s'$ konstant. Der nichtreelle Wert besagt, daß die beiden Ereignisse E_1 und E_2 nicht aufeinander einwirken können; in einem mit $v = 0{,}75\,c$ bewegten Bezugssystem sind sie gleichzeitig.

***8/37**: Auf dem Planeten Merkur (Umlaufgeschwindigkeit um die Sonne 48 km/s) uud auf dem Planeten Pluto (Umlaufgeschwindigkeit 5 km/s) werden Bomben mit Zeitzünder gelegt. Um wieviel explodiert die Bombe auf dem Merkur später, wenn die Zeitzünder auf 100 Jahre eingestellt werden?

Lösung:
Auf dem Pluto zündet die Bombe 40 s früher als auf dem Merknr: Näherungsweise gilt

$$t_{\text{Merkur}} = t_{\text{Sonne}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{\text{Merkur}}}{c}\right)^2\right); \quad t_{\text{Pluto}} = t_{\text{Sonne}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{\text{Pluto}}}{c}\right)^2\right) \text{ und}$$

$$t_{\text{Pluto}} - t_{\text{Merkur}} = \frac{1}{2}\left(v^2_{\text{Pluto}} - v^2_{\text{Merkur}}\right)\frac{t_{\text{Sonne}}}{c^2} = 40\text{ s}.$$

***8/38**: Um wieviel müßte aufgrund der Erddrehung eine Uhr am Äquator im Vergleich zu einer Uhr am Pol nach einem Jahr nachgehen? Könnte man diese Zeitdifferenz mit Atomuhren messen (siehe *Aufgabe 8/12*)?
(Anmerkung: Tatsächlich kann man diese Zeitdifferenz nicht messen. Der relativistische Effekt der Geschwindigkeit wird nämlich durch einen anderen relativistischen Effekt, deu der Gravitation, gerade aufgehoben. In einem höheren Gravitationspotential gehen Uhren langsamer. Das ist am Pol aufgrund der Abflachung der Erde der Fall, so daß sich die beiden relativistischen Effekte etwa gerade aufheben).

Lösung:
Der relative Zeitunterschied von $\Delta t/t = 1{,}19 \cdot 10^{-12} \gg 10^{-14}$ ließe sich gut mit Atomuhren messen; in einem Jahr würde der Zeitunterschied $t_{\text{pol}} - t_{\text{Äq}} = 37{,}6\ \mu$s betragen:

$$\frac{t_{\text{Pol}} - t_{\text{Äq}}}{t_{\text{Pol}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{463\text{ m/s}}{3 \cdot 10^8\text{ m/s}}\right)^2 = 1{,}19 \cdot 10^{-12}.$$

***8/39:** Werden Uhren bewegt, so gehen sie langsamer und zeigen daher im Vergleich zu ruhenden Uhren eine andere Zeit an. Man könnte daher annehmen, daß der Uhrentransport zur Synchronisation entfernter Uhren eine ungeeignete Methode ist. Tatsächlich werden aber transportable Atomuhren zur Herstellung der internationalen Atomzeitskala von den nationalen Zeitinstituten nach Paris zum BIH (Bureau International de l'Heure) gebracht. Zeigen Sie, daß die dabei auftretende Zeitabweichung kleiner als jeder vorgegebene Wert gemacht werden kann, wenn der Uhrentransport nur genügend langsam erfolgt. (Benutzen Sie die Näherung $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - v^2/2c^2$).
Mit welcher Geschwindigkeit darf demnach höchstens eine Uhr von Tokio nach Paris transportiert werden (Entfernung ca. 12000 km), wenn der dabei auftretende Zeitfehler kleiner als 10^{-8} Sekunden sein soll.

Lösung:
Der Zeitfehler soll kleiner als 10^{-8} Sekunden sein! Die Uhr darf dann höchstens mit einer Geschwindigkeit von 540 km/h transportiert werden:

Aus $t = t_R\,(1 - v^2/2\,c^2)$ folgt $t_R - t = t_R \dfrac{v^2}{2c^2} = \dfrac{s}{v}\,\dfrac{v^2}{2c^2} < 10^{-8}$ s;

damit $v \leqq \dfrac{2c^2}{s} \cdot 10^{-8}\text{ s} = \dfrac{2\,(3 \cdot 10^8\text{ m/s})^2}{1{,}2 \cdot 10^7\text{ m}}\ 10^{-8}\text{ s} = 150\text{ m/s} = 540\text{ km/h}.$

***8/40:** In einem Linearbeschleuniger wird ein Elektron auf die Geschwindigkeit $v = 0{,}6\,c$ beschleunigt. Anschließend durchfliegt es mit konstanter Geschwindigkeit eine Strecke AB von 9 m Länge.
a) Wie lange braucht das Elektron, um diese Strecke zu durchfliegen?
b) Wie lang ist die Strecke im Ruhsystem des Elektrons?
c) Welche Zeit vergeht im Ruhsystem des Elektrons, bis die Strecke durchflogen ist?

Lösung:
a) $t_R = \dfrac{s}{v} = \dfrac{9\text{ m}}{0{,}6 \cdot 3 \cdot 10^8\text{ m/s}} = 5 \cdot 10^{-8}\text{ s} = 50\text{ ns}.$

b) $l = l_R\sqrt{1 - v^2/c^2} = 9\text{ m}\sqrt{1 - 0{,}36} = 7{,}2\text{ m}.$

c) $t = t_R\sqrt{1 - v^2/c^2} = 40\text{ ns}$ oder $t = \dfrac{l}{v} = \dfrac{7{,}2\text{ m}}{0{,}6\text{ c}} = 40\text{ ns}.$

***8/41:** Ein Raumschiff der Eigenlänge $l_0 = 100$ m fliegt mit $v = 0{,}6\,c$ an einer interplanetaren Station vorbei. Als die Spitze des Raumschiffs einen Sendemast der Raumstation passiert, wird ein Radiosignal ausgesandt.
a) Nach welcher Zeit erreicht das Signal das Heck des Raumschiffs?
b) Nach welcher Zeit passiert das Heck des Raumschiffs den Sendemast?
Geben Sie die Zeiten jeweils in Raumschiffszeit und Stationszeit an. Lösen Sie rechnerisch und zeichnerisch mit einem Minkowski-Diagramm.

Lösung:
Die Spitze des Raumschiffs soll zur Zeit $t = t' = 0$ s den Sendemast passieren. Im Ruhsystem I' des Raumschiffs braucht das Signal bis zum Heck die Zeit $t'_a = 100\text{ m} : c = 333$ ns; die Raumstation braucht die Zeit $t'_b = 100\text{ m} : 0{,}6\,c = 556$ ns. Im relativ dazu bewegten System I der Raumstation vergeht die Zeit langsamer, so daß sich die Zeiten $t_a = 267$ ns und $t_b = 444$ ns ergeben.

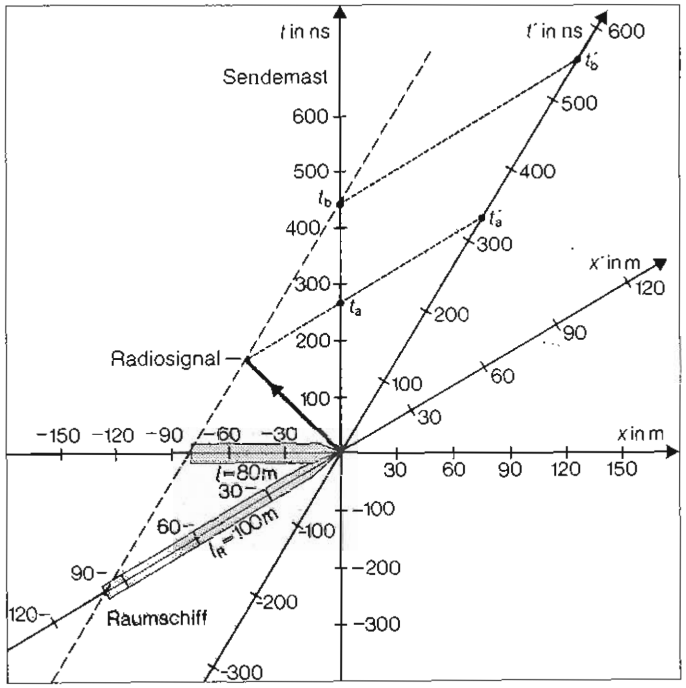

Abb. 74

***8/42:** Um 8.00 Uhr passiert ein Raumschiff mit $v = 0{,}8\,c$ die Erde. Dabei wird auch die Raumschiffsuhr auf 8.00 Uhr gestellt. Um 9.30 Uhr fliegt das Raumschiff an einer Raumstation vorbei, die konstanten Abstand zur Erde hat. Die Uhren in der Station zeigen Erdzeit an.
a) Wieviel Uhr ist es während des Vorbeiflugs im Raumschiff?
b) Welche Entfernung hat die Raumstation von der Erde für einen Beobachter auf der Erde?
Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm.

Lösung:
a) Im Raumschiff vergeht die Zeitspanne $\Delta t' = 90\text{ min}\sqrt{1 - 0{,}8^2} = 54$ min; beim Vorbeiflug an der Station ist es also 8.54 Uhr im Raumschiff.
b) Die Station hat von der Erde die Entfernung $\Delta x = 90\text{ min} \cdot 0{,}8\,c = 72$ Lmin.

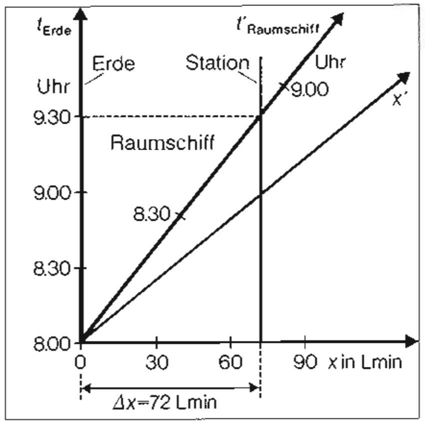

Abb. 75

***8/43:** Ist es möglich, mit einem 15 m langen Panzer einen 10 m breiten Graben mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}8\,c$ zu überqueren? Aus der Sicht des Panzerfahrers ist der Graben auf 6 m kontrahiert, und die Mitte des Panzers, dort sei der Schwerpunkt, steht noch fest auf der einen Seite, wenn die Vorderkante des Panzers die andere Grabenseite erreicht. Aus der Sicht der Verteidiger ist der Panzer auf 9 m kontrahiert. Er schwebt also einen Moment frei in der Luft und müßte in den Graben fallen! Wie löst sich dieser Widerspruch?

Lösung:

Dieses Problem wurde von W. Rindler 1961 aufgeworfen (Am. J. Phys. 29, 365 (1961)). Natürlich fällt der Panzer in den Graben, da er aus der Sicht der Verteidiger für einen Moment frei schwebt. Wie erklärt sich dieser Sachverhalt aus der Sicht des Panzerfahrers? Mit der Lorentz-Transformation zeigt Rindler, daß sich der Panzer in dem kontrahierten Panzer biegt. Anschaulich hilft hier ein Minkowski-Diagramm. In der Abbildung sind das Ruhsystem I des Panzers und das relativ dazu nach links bewegte System I' des Grabens gezeichnet. Wir betrachten das Ereignis E ($t = 0$; die Panzerspitze fährt über den Grabenrand) und nehmen an, die zwischenmolekularen Kräfte im Panzer übertragen sich mit Lichtgeschwindigkeit. Nach 16 2/3 Sekunden hat erst ein Drittel des Panzers Kenntnis von dem Ereignis E und nur dieses Drittel kann demnach Kräfte ausüben und den über dem Graben befindlichen Teil halten. Das Diagramm zeigt, daß sich bereits 80% dieses Drittels über dem Graben befindet. Der Panzer kann demnach nicht starr bleiben, sondern biegt sich von Anfang an (parabelförmig) in den Graben.

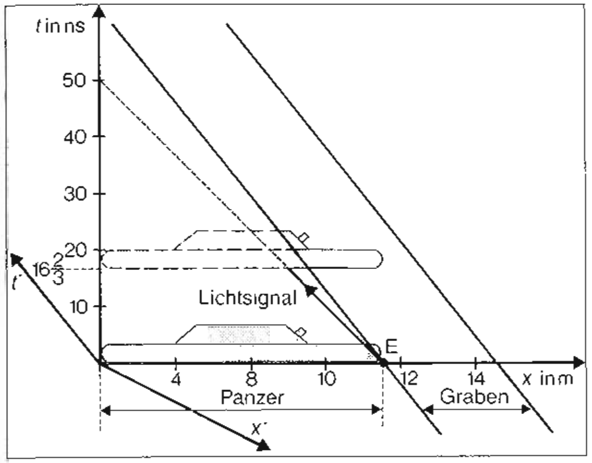

Abb. 76

***8/44:** Ein Raumschiff startet am Neujahrstag des Jahres 1995 und fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}8\,c$ zu dem erdnächsten Stern Alpha Centauri, der etwa 4 Lichtjahre von uns entfernt ist. Nach einem Aufenthalt von 2 Jahren kehrt das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6\,c$ zur Erde zurück. Jeweils zur Jahreswende sollen von der Erde und vom Raumschiff Neujahrsgrüße per Funk ausgesendet werden. Zeichnen Sie in einem Minkowski-Diagramm den Verlauf der Weltraumreise. Tragen Sie auch die Funksprüche in das Diagramm ein. In welchem Jahr kehrt das Raumschiff zur Erde zurück? Wieviel Botschaften wurden ausgetauscht? Deuten Sie das Ergebnis mit Hilfe des Doppler-Effekts.

Lösung:

Das Raumschiff kehrt nach 13 2/3 Jahren im Jahre 2008 zur Erde zurück. Für die Astronauten sind nur 10 1/3 Jahre vergangen.

Für die Neujahrsgrüße per Funk ergeben sich mit der Formel für den Doppler-Effekt die folgenden Zeitabstände T_E, die für die Empfänger zwischen zwei aufeinanderfolgenden Funksprüchen vergehen:

$$T_E = 1\,\mathrm{a}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

v/c	+0,8	0	−0,6
T_E	3 a	1 a	$\frac{1}{2}$ a

Die beiden Minkowski-Diagramme, in die links die Funksprüche von der Erde zum Raumschiff und rechts vom Raumschiff zur Erde eingezeichnet sind, bestätigen dieses Ergebnis.

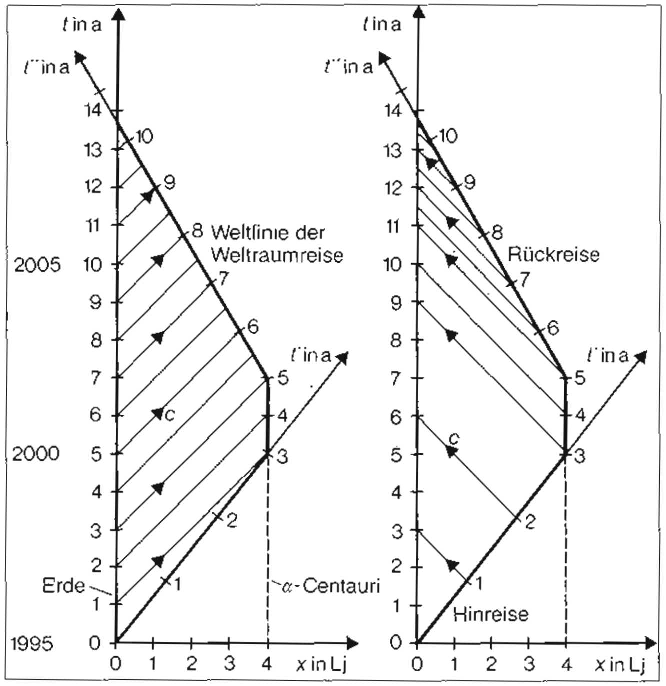

Abb. 77

***8/45:** Zeichnen Sie den Graphen für die Rotverschiebung der Lichtwellenlänge $v/c \to \lambda_E/\lambda_s$. Bis zu welchen Werten v/c darf man die klassische Formel für den Doppler-Effekt $\lambda_E = \lambda_s\,(1 + v/c)$ verwenden? Tragen Sie diese Funktion ebenfalls in das Diagramm ein.

Lösung:
Mit der Näherungsformel läßt sich bis 30% der Lichtgeschwindigkeit rechnen; dann ist der Fehler kleiner als 5%.

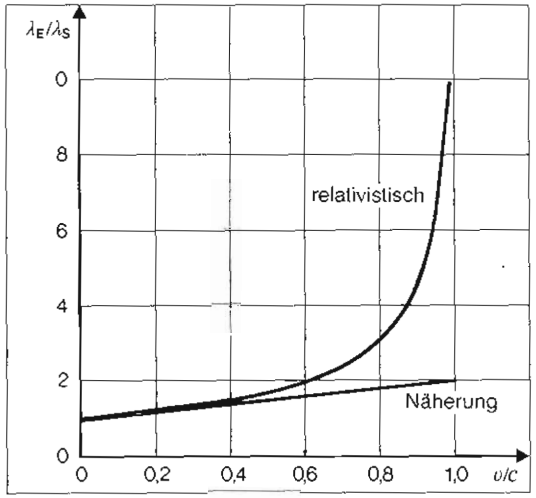

Abb. 78

***8/46:** Ein Raumschiff fliegt mit 0,2 c durch die Milchstraße, als es von einer gegnerischen Rakete überholt wird, die mit 0,8 c die Galaxie durchquert. Sofort löst der Kommandant des Raumschiffs ein 0,7 c-Geschoß aus, das die Rakete kurze Zeit später einholt und zerstört. – Prüfen Sie im Inertialsystem „Galaxie“ und im System „Raumschiff“, ob diese Geschichte wahr sein kann.

Lösung:
Das Geschoß holt die Rakete nicht ein. Im galaktischen System hat das Geschoß die Geschwindigkeit $v = \dfrac{0{,}2\,c + 0{,}7\,c}{1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}79\,c < 0{,}8\,c$; im Ruhsystem des Raumschiffs hat die Rakete die Geschwindigkeit $u = \dfrac{0{,}8\,c - 0{,}2\,c}{1 - 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 0{,}71\,c > 0{,}7\,c$.

***8/47:** Im Jahre 1995 startet ein 20jähriger Astronaut zu einer Weltraumreise. Da seine Rakete mit $v = \dfrac{60}{61}\,c$ fliegt und damit fast Lichtgeschwindigkeit erreicht, kann er während seiner 33 Jahre dauernden Reise auch den 9,7 Lichtjahre entfernten Sirius besuchen.

a) Welches Jahr schreibt man auf der Erde, wenn der Astronaut als 53jähriger zurückkehrt?
b) Wie alt ist der Astronaut, wenn er auf seinem direkten Flug zu Sirius diesen Stern passiert?
c) Wie schnell hätte der Astronaut fliegeu müssen, um während seiner 33 Jahre dauerndeu Weltraumreise den 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromedanebel zu besuchen?

Lösung:

a) Auf der Erde sind 183 Jahre vergangen; man schreibt das Jahr 2178:

$$\Delta t_R = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{33\,\text{a}}{\sqrt{1-(60/61)^2}} = 183\,\text{a}.$$

b) In Erdzeit vergehen für die Reise zum Sirius $\Delta t_R = 9{,}7$ Lj : $(60\,c/61) = 9{,}86$a; für den Astronanten vergehen jedoch nnr $\Delta t = 9{,}86\,\text{a}\,\sqrt{1-(60/61)^2} = 1{,}78$a; als Einundzwanzigjähriger kommt er am Sirius vorbei.

c) Ans $\Delta t = \Delta t_R \sqrt{1 - v^2/c^2}$ folgt mit $\Delta t = 33$a und $\Delta t_R = 2\,e/v$ ($e = 2$ Mio Lj $= 2 \cdot 10^6$ ca):

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{33}{4 \cdot 10^6}\right)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{33}{4 \cdot 10^6}\right)^2 = 1 - \frac{34}{10^{12}}.$$

Auf 34 Billionstel von c mnß sich die Geschwindigkeit des Raumschiffs der Lichtgeschwindigkeit nähern.

***8/48:** Ein mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}6\,c$ fliegendes K-Meson zerfällt in zwei Pi-Mesonen. Im Rnhsystem des K-Mesons haben die Pi-Mesonen eine Geschwindigkeit von $0{,}85\,c$. Welche Geschwindigkeit haben die Pi-Mesonen maximal uud minimal im Laborsystem?

Lösung:

In der Flngrichtung des K-Mesons haben die Pi-Mesonen die größte Geschwindigkeit mit $v = \dfrac{0{,}6\,c + 0{,}85\,c}{1 + 0{,}6\;0{,}85} = 0{,}96\,c$; die entgegen der Flugrichtung ansgesandten Pi-Mesonen haben die Geschwindigkeit $u = \dfrac{0{,}6\,c - 0{,}85\,c}{1 - 0{,}6\;0{,}85} = -0{,}51\,c$; sie fliegen uach hinten mit $0{,}51\,c$.

***8/49:** Leiten Sie aus den Lorentz-Transformationsgleichungen das Additionstheorem der Geschwindigkeiten her.

Lösung:

Im Inertialsystem I soll die Strecke $\Delta x = x_2 - x_1$ in der Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$ zurückgelegt werden. Für die Geschwindigkeit u in diesem System folgt dann:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}; \quad \text{mit den Transformationsgleichungen folgt:}$$

$$u = \frac{k\,(x'_2 + v t'_2) - k\,(x'_1 + v t'_1)}{k\left(t'_2 + \frac{v}{c^2}\,x'_2\right) - k\left(t'_1 + \frac{v}{c^2}\,x'_1\right)} = \frac{\Delta x' + v\,\Delta t'}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\,\Delta x'}$$

mit $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ und $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Kürzt man den Bruch mit $\Delta t'$ und setzt $u' = \Delta x'/\Delta t'$, so erhält man das Additionstheorem.

***8/50:** Den Ausdruck $\Delta s = \sqrt{c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2}$ bezeichnet man als raum-zeitlichen Abstand. Zeigen Sie, daß dieser Ausdruck invariant gegenüber Lorentz-Transformationen ist.

Lösung:

Aus $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$ folgt

$$\Delta s^2 = c^2 k^2 \left(t'_2 + \frac{v}{c^2}\,x'_2 - t'_1 - \frac{v}{c^2}\,x'_1\right)^2 - k^2\,(x'_2 + v t'_2 - x'_1 - v t'_1)^2$$

$$= k^2 \left(\left(c\,\Delta t' + \frac{v}{c}\,\Delta x'\right)^2 - (\Delta x' + v\,\Delta t')^2\right).$$

Nach dem Auflösen der Klammern heben sich die gemischten Terme weg und es ergibt sich

$$\Delta s^2 = k^2\,(\Delta t'^2\,(c^2 - v^2) - \Delta x'^2\,(1 - v^2/c^2)).$$

Da $k^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ ist, folgt

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta s'^2.$$

***8/51:** Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ wird im gemeinsamen Ursprung zweier Inertialsysteme I und I' ein Lichtsigual ausgelöst. Nach der Zeit t erreicht das Licht im Inertialsystem I eine Kugelfläche mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. Zeigen Sie durch Anwenden der Transformationsgleichungen, daß auch in I' das Licht eine Kugelfläche erreicht, in deren Mittelpunkt der Ursprung des Systems I' liegt.

Lösung:

Aus $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ folgt $y^2 + z^2 = c^2 t^2 - x^2$; die rechte Seite der Gleichung ist invariant, wie wir in *Aufgabe 8/50* gezeigt haben. Also gilt
$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$.
Mit $y = y'$ und $z = z'$ ergibt sich aus obiger Gleichung $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$.

Zu 8.3.1, *Seite 354*

8/52: Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man bei einer Geschwindigkeit von 10% der Lichtgeschwindigkeit die relativistische Massenzunahme nicht berücksichtigt?

Lösung:

Der prozentuale Fehler berechnet sich zu

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{m}{m_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 = 0{,}005 = 0{,}5\%$$

für $v/c = 0{,}1$.

Weitere Werte:

v/c	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,99
Fehler	2,1%	9,1%	25%	67%	129%	609%

8/53: Berechnen Sie die Massenzunahme eines Satelliten ($m_0 = 1000$ kg), der auf seiner Erdumlaufbahn eine Geschwindigkeit von 28000 km/h hat. Da auch hier noch $v \ll c$ ist, darf man die Näherung $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 + v^2/2\,c^2$ benutzen.

Lösung:
Die Massenzunahme beträgt nur 0,34 Milligramm:

Aus $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx m_0 \left(1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right)$ folgt

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 m_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{7{,}8\ \text{km/s}}{300000\ \text{km/s}}\right)^2 \cdot 1000\ \text{kg} = 3{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{kg}.$$

8/54: Im deutschen Elektronensynchrotron DESY bei Hamburg werden Elektronen auf eine Geschwindigkeit von $v = 0{,}999999997\,c$ beschleunigt. Wievielmal größer ist dann ihre dynamische Masse im Vergleich zur Ruhmasse?

Lösung:
Die dynamische Masse der Elektronen ist nahezu 13000 mal größer als ihre Ruhmasse:

Aus $v/c = 1 - 3 \cdot 10^{-9}$ folgt $(v/c)^2 \approx 1 - 6 \cdot 10^{-9}$;

also $m/m_0 = 1/\sqrt{6 \cdot 10^{-9}} = 12910$.

8/55: Auf welche Geschwindigkeit muß ein Elementarteilchen beschleunigt werden, damit sich seine Masse verdoppelt, verzehnfacht, verhundertfacht?

Lösung:
Aus $m/m_0 = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ folgt $v/c = \sqrt{1 - (m_0/m)^2}$:

m/m_0	2	10	100
v/c	0,866	0,995	0,99995

8/56: Ein Elektron hat eine Geschwindigkeit von 99,997% der Lichtgeschwindigkeit. Wie groß ist sein Impuls? Geben Sie den Impuls in kgm/s und in GeV/c an.

Lösung:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, v = 3{,}53 \cdot 10^{-20}\ \text{kg m/s}.$$

Multipliziert man mit $\dfrac{e}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{As}} \cdot \dfrac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{c} = 1$,

so erhält man $p = 66{,}0\ \text{MeV}/c = 0{,}066\ \text{GeV}/c$.
Der Vorteil der Impulseinheiten MeV/c bzw. GeV/c wird sich beim Rechnen mit der Energie-Impuls-Invarianten (*8.3.3*) zeigen.

8/57: Ein Proton hat einen Impuls von 6 GeV/c. Wie groß ist seine Geschwindigkeit?

Lösung:

Aus $p = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, v$ folgt $\dfrac{v}{c} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{m_0\, c^2}{pc}\right)^2}}$.

Mit der Ruhmasse des Protons von 938 MeV $= m_0\, c^2$ erhält man

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{938\ \text{MeV}}{6\ \text{GeV}}\right)^2}} = 0{,}988.$$

Zu 8.3.2, *Seite 356*

8/58: Wie groß ist die Ruheenergie eines Elektrons? Auf welche Geschwindigkeit muß man das Elektron beschleunigen, um seine Energie zu verdoppeln?

Lösung:
$E = m_0\, c^2 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (2{,}9979\ 10^8\ \text{m/s})^2 = 8{,}187 \cdot 10^{-14}$ J
$= 511$ keV $= 0{,}511$ MeV.
In *Aufgabe 8/55* hatten wir gezeigt, daß man ein Elementarteilchen auf $v = 0{,}866\,c$ beschleunigen muß, damit sich seine Masse verdoppelt; das gleiche gilt für die Energie.

8/59: Wie groß ist die dynamische Masse der Elektronen, wenn sie im Stanford-Beschleuniger eine Energie von 20,5 GeV erhalten haben?

Lösung:
Die Elektronen haben mehr als die 40000fache Ruhmasse:

$$\frac{m}{m_0} = \frac{E_0 + E_{kin}}{m_0\,c^2} = 1 + \frac{E_{kin}}{m_0\,c^2} = 1 + \frac{20{,}5\ \text{GeV}}{511\ \text{keV}} = 40118.$$

8/60: Um wieviel schwerer wird 1 kg Eis, wenn es schmilzt? Kann man diese Massenzunahme messen?

Lösung:
Die Schmelzwärme von Eis beträgt 335 kJ/kg. Damit nimmt 1 kg Eis beim Schmelzen um folgende Masse zu:

$$m = 335\ \text{kJ}/(3\cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 3{,}7\cdot 10^{-9}\ \text{g} = 3{,}7\ \text{ng}$$

3,7 Nanogramm lassen sieh nicht messen.

8/61: Zeigen Sie, daß für kleine Geschwindigkeiten die relativistische Formel fur die kinetische Energie in die klassische Formel übergeht!

Lösung:

$$E_{kin} = m_0\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \approx m_0\,c^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\,m_0\,v^2.$$

8/62: Im deutschen Elektronensynchrotron DESY in Hamburg können Elektronen auf eine Energie von 7,5 GeV beschleunigt werden.

a) Wie schnell sind dann die Elektronen?
b) Wie lang ist der Beschleunigungstunnel für die Elektronen? (Der ringförmige Beschleuniger hat einen Durchmesser von 100 m).

Lösung:

a) Aus $E = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,c^2 = E_0 + E_{kin}$ folgt

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(1 + E_{kin}/E_0)^2} \approx 1 - \left(\frac{E_0}{E_{kin}}\right)^2, \text{ da } E_{kin} \gg E_0\,.$$

$$\frac{v}{c} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{E_{kin}}\right)^2 \doteq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{511\ \text{keV}}{7{,}5\ \text{GeV}}\right)^2 = 0{,}999999998\,.$$

b) $$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx l_0\sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{E_0}{E_{kin}}\right)^2\right)} = l_0\,\frac{E_0}{E_{kin}}$$

$$= 100\ \text{m}\cdot\pi\,\frac{511\ \text{keV}}{7{,}5\ \text{GeV}} = 21\ \text{mm}\ ;$$ für die Elektronen ist der Beschleuniger nur 21 mm statt 314 m lang.

***8/63:** Zwei Teilchen gleicher Ruhmasse m_0 und gleicher kinetischer Energie $E_k = 2\,m_0\,c^2$ stoßen zentral zusammen und bilden ein neues Teilchen.
Wie groß ist die Rnhmasse M_0 des neuen Teilchens?

Lösung:
Das neu gebildete Teilchen hat die Ruhmasse $M_0 = 6\,m_0$, da die gesamte kinetische Energie in Ruhenergie umgesetzt wird.

Zu 8.3.3, *Seite 358*

***8/64:** Wie groß ist der Impuls eines Teilchens, dessen Energie dreimal so groß wie seine Ruhenergie ist?

Lösung:

Ans $E^2 - (pc)^2 = E_0^2$ folgt $p = \dfrac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c} = \dfrac{\sqrt{(3E_0)^2 - E_0^2}}{c} = 2\sqrt{2}\,\dfrac{E_0}{c}\,.$

***8/65:** Ein Teilchen hat eine Energie von 5600 MeV und einen Impuls von 5520,6 MeV/c. Kann es sich bei dem Teilchen um ein Neutron handeln?

Lösung:
Das Teilchen hat die Ruhenergie des Neutrons:

$$E_0 = \sqrt{E^2 - (pc)^2} = \sqrt{(5600\ \text{MeV})^2 - (5520{,}6\ \text{MeV})^2} = 940\ \text{Mev}\,.$$

***8/66:** Im Superprotonensynchroton des europäischen Kernforschungszentrums CERN können Protonen auf eine maximale kinetische Energie von 400 GeV beschleunigt werden; die Ruhenergie des Protons beträgt 938 MeV. Bei dem Stoß eines beschleunigten Protons (p) gegen ein ruhendes Proton (p) soll ein neues Teilchen X erzeugt werden:

$$\text{p} + \text{p} \rightarrow \text{p} + \text{p} + \text{X}\,.$$

Wie groß kann maximal die Ruhenergie M_0 des neuen Teilchens X sein?

Lösung:

Die Ruhenergie des Protons sei E_0, die Energie des stoßenden Protons E_1, dessen Impuls p_1 und die Ruhenergie des erzeugten Teilchens sei E_{X0}.

Das erzeugte Teilchen hat dann die größte Ruhmasse, wenn die drei Teilchen nach dem Stoß nicht auseinanderfliegen. Die Energie-Impuls-Invariante läßt sich dann vor dem Stoß im Laborsystem und nach dem Stoß im Schwerpunktsystem aufschreiben und gleichsetzen:

$$(E_1 + E_0)^2 - (cp_1)^2 = (2E_0 + E_{X0})^2 .$$

Mit $E_1 = E_0 + E_{kin}$, wobei $E_{kin} = 400$ GeV ist, und $(cp_1)^2 = E_1^2 - E_0^2 = E_{kin}^2 + 2E_{kin}E_0$ folgt aus obiger Gleichung

$$E_{X0} = 2E_0\left(\sqrt{1 + \frac{E_{kin}}{2E_0}} - 1\right)$$

$$= 2E_0\left(\sqrt{1 + \frac{400\ \text{GeV}}{2 \cdot 938\ \text{MeV}}} - 1\right) = 27{,}3\,E_0 = 25{,}6\ \text{GeV} .$$

Nur 25,6 GeV können maximal in Ruhenergie umgesetzt werden, der Rest (400 − 25,6) GeV tritt als kinetische Energie auf.

8/67: In einer Röhre werden Elektronen mit einer Spannung $U = 20$ kV beschleunigt. Wie groß ist der prozentuale Fehler bei der Berechnung der Endgeschwindigkeit, wenn man die relativistische Massenzunahme nicht berücksichtigt?

Lösung:

Mit $E_{kin} = eU = 20$ keV berechnet man klassisch aus $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} = 8{,}38 \cdot 10^7\ \text{m/s} = 0{,}279\,c ;$$

relativistisch aus der Formel für die kinetische Energie

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{E_{kin}}{m_0c^2}\right)^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{20\ \text{keV}}{511\ \text{keV}}\right)^2}} = 0{,}272 .$$

Der Fehler beträgt 2,6%.

Weitere Werte:

U in kV		2,5	10	40	100	1000
v/c	klassisch	0,099	0,198	0,395	0,625	1,976
	relativistisch	0,099	0,195	0,374	0,548	0,941

8/68: Ein Elementarteilchen hat bei einer Geschwindigkeit von $2{,}996 \cdot 10^8$ m/s eine Masse von 28,1155 atomaren Masseneinheiten. Um welches Teilchen handelt es sich?

Lösung:

Die Ruhmasse berechnet sich zu

$$m_0 = m\sqrt{1 - v^2/c^2} = 28{,}1155\,\text{u}\sqrt{1 - \left(\frac{2{,}996}{2{,}997925}\right)^2} = 1{,}0073\,\text{u} .$$

Das ist die Ruhmasse des Protons.

***8/69:** Ein Photon der Energie $E = 2\,m_0c^2$ trifft auf ein ruhendes Teilchen der Ruhmasse m_0 und wird von ihm absorbiert.
Wie groß ist die Geschwindigkeit des Teilchens nachher?

Lösung:

Durch die Absorption des Photons entsteht ein neues „angeregtes" Teilchen, das eine größere Ruhenergie E_0' im Vergleich zur Ruhenergie E_0 des Teilchens zuvor hat:
Mit der Energie-Impuls-Invarianten berechnet man

$$E_0' = \sqrt{E'^2 - (cp')^2} .$$

Für die Energie E' und den Impuls p' des angeregten Teilchens gilt

$$E' = E_{Ph} + E_0 = 3\,m_0c^2 ; \quad p' = p_{Ph} = 2\,m_0c .$$

Damit wird

$$E_0' = \sqrt{(3\,m_0c^2)^2 - (2\,m_0c^2)^2} = \sqrt{5}\,m_0c^2 .$$

Für die Geschwindigkeit erhält man *(s. Aufg. 8/55)*:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0'}{m'}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} .$$

***8/70:** In der kosmischen Strahlung hat man Protonen mit Energiewerten bis zu 10^{21} eV entdeckt (Ruhenergie des Protons $0{,}938 \cdot 10^9$ eV).

a) Wie dick ist für ein Proton mit dieser Energie die Erde?

b) Wie alt ist die Erde für dieses Proton?

c) Unsere Galaxis hat einen Durchmesser von 10^5 Lichtjahren. Wie lange braucht ein solches Proton, um die Milchstraße zu durchfliegen (in Erdzeit und in Eigenzeit des Protons)?

Lösung:

Mit $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_0}{m} = \frac{E_0}{E} = \frac{0{,}938 \cdot 10^9\ \text{eV}}{10^{21}\ \text{eV}} = 9{,}38 \cdot 10^{-13}$ folgt:

a) $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} = 12740\ \text{km} \cdot 9{,}38 \cdot 10^{-13} = 12\ \mu\text{m}$.

b) $T = T_R \sqrt{1 - v^2/c^2} = 4{,}5$ Mrd. Jahre $\cdot\ 9{,}38 \cdot 10^{-13} = 1{,}5$ Tage .
c) Für uns braucht das Proton 100000 Jahre; für das Proton vergehen jedoch nur $t = 100000\ \mathrm{a} \cdot 9{,}38 \cdot 10^{-13} = 3$ Sekunden!

***8/71:** Zum Präzisionsexperiment zur relativistischen Massenzunahme *(Abb. 8-26)*.

a) Erklären Sie, warum die Elektronen in beiden Feldern auf Kreisbahnen fliegen.
b) Der Versuch wurde so durchgeführt, daß zunächst das Magnetfeld auf genau B = 20 mT eingestellt wurde. Dann wurde die Beschleunigungsspannung so eingeregelt, daß die Elektronen auf dem Sollkreis durch das Magnetfeld flogen, und anschließend wurde das elektrische Feld so eingestellt, daß die Elektronen auch auf ihrem Sollkreis im elektrischen Feld flogen; das elektrische Feld hatte dann den Wert $E = 2{,}95529 \cdot 10^6\ \mathrm{NA^{-1}\,s^{-1}}$. Berechnen Sie die dynamische Masse der Elektronen und ihre Geschwindigkeit. Rechnen Sie mit den genauen Werten für die Naturkonstanten!
c) Zeigen Sie mit einer Formel, daß nur Elektronen mit einem ganz bestimmten Impuls auf der vorgegebenen Kreisbahn durch das auf B = 20 mT eingestellte Magnetfeld fliegen können. Berechnen Sie diesen Impuls.
d) Berechnen Sie mit der dynamischen Masse die Gesamtenergie und mit (*c*) die Ruhenergie der Elektronen. Berechnen Sie damit die Ruhmasse.
e) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus (*b*) und (*d*), daß die Formel für die relativistische Massenzunahme erfüllt ist.
f) Berechnen Sie die kinetische Energie und daraus die Beschleunigungsspannung.

Lösung:

a) Wirkt in jedem Moment eine dem Betrage nach konstante Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung auf das Elektron, so bewegt es sich auf einer Kreisbahn. Eine solche Kraft ist im homogenen magnetischen Feld durch die Lorentzkraft und im zylindersymmetrischen elektrischen Feld durch die Coulomb-Kraft gegeben, wenn das Elektron jeweils senkrecht zum Feld eingeschossen wird.
b) Mit der im Lehrbuch hergeleiteten Formel berechnet man aus den Versuchsdaten die folgende dynamische Masse:

$$m = \frac{B^2 R_m^2}{E R_e}\, e = \frac{(20 \cdot 10^{-3}\ T)^2 \cdot (0{,}5\ \mathrm{m})^2}{2{,}95529 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m}}\ 1{,}602177 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}$$

$$= 5{,}421386 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}\ .$$

Nimmt man den Wert für die Ruhmasse des Elektrons, den allerdings erst die weitere Versuchsauswertung liefern soll, vorweg, so berechnet man $m = 5{,}95\ m_0$ und daraus $v = 0{,}985\ c$.
c) Aus der Gleichsetzung der Lorentzkraft mit der Zentripetalkraft ergibt sich

$$evB = m\frac{v^2}{R_m} \quad \text{und daraus} \quad p = mv = eR_m B\ ;$$

$$p = eR_m B = 1{,}602177 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} \cdot 20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$
$$= 1{,}602177 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{kgm/s}$$
$$= 2{,}997925\ \mathrm{MeV}/c\ .$$

d) Aus der dynamischen Masse m bzw. der Gesamtenergie E und dem Impuls p läßt sich mit der Energie-Impuls-Invarianten die Ruhenergie berechnen:

$$E_0 = \sqrt{E^2 - (cp)^2} = \sqrt{(5{,}421386 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg} \cdot c^2)^2 - (2{,}997925\ \mathrm{MeV})^2}$$
$$= \sqrt{(3{,}041174\ \mathrm{MeV})^2 - (2{,}997925\ \mathrm{MeV})^2}$$

oder $E_0 = 0{,}511066$ MeV .
e) Dieser Wert weicht um weniger als 0,5 Promille vom Literaturwert für die Ruhenergie des Elektrons ab.
Damit ist die Formel für die relativistische Massenzunahme bestätigt, denn dieses Gesetz ist in der soeben benutzten Energie-Impuls-Invarianten enthalten:

Aus $E^2 - (cp)^2 = E_0^2$ folgt mit $E = mc^2$, $E_0 = m_0 c^2$ und $p = mv$

$$(mc^2)^2 - (cmv)^2 = (m_0 c^2)^2\ ; \quad \text{dividiert durch } c^4 \text{ ergibt}$$

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2\ ;$$ aufgelöst nach m erhält man die Formel für die relativistische Massenzunahme.
f) $E_{kin} = E - E_0 = 3{,}0412\ \mathrm{MeV} - 0{,}5111\ \mathrm{MeV} = 2{,}530\ \mathrm{MeV} = eU$.
Die Beschleunigungsspannung betrug $U = 2{,}530 \cdot 10^6$ V. (Der Versuch wurde bei verschiedenen Spannungen bis maximal 5,5 Mio Volt durchgeführt.)

***8/72:** Ein K-Meson zerfällt in zwei Pi-Mesonen. Ein Pi-Meson ist nach dem Zerfall in Ruhe, d. h., das andere Pi-Meson übernimmt den gesamten Impuls des K-Mesons. Berechnen Sie die Energie des K-Mesons und des davonfliegenden Pi-Mesons (Ruhmasse des K-Mesons = 494 MeV; Ruhmasse des Pi-Mesons 137 MeV).

Lösung:
Mit $E_K = E_{K_0} + E_{K_{kin}}$ und $E_\pi = E_{\pi_0} + E_{\pi_{kin}}$ folgt aus dem Energieerhaltungssatz die Gleichung

$$\begin{aligned} E_K &= E_{\pi_0} + E_\pi \\ E_{K_{kin}} + E_{K_0} &= 2E_{\pi_0} + E_{\pi_{kin}} \\ E_{\pi_{kin}} - E_{K_{kin}} &= E_{K_0} - 2E_{\pi_0} = 220\ \mathrm{MeV} \qquad (1) \end{aligned}$$

Aus der Gleichheit der Impulse $p_K = p_\pi$ folgt mit der Energie-Impuls-Invarianten

$$\begin{aligned} (cp_K)^2 &= (cp_\pi)^2 \\ E_K^2 - E_{K_0}^2 &= E_\pi^2 - E_{\pi_0}^2 \\ 2E_{K_0}E_{K_{kin}} + E_{K_{kin}}^2 &= 2E_{\pi_0}E_{\pi_{kin}} + E_{\pi_{kin}}^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) erhält man die Werte für die kinetische Energie des K-Mesons $E_{K_{kin}} = 396$ MeV und für das Pi-Meson $E_{\pi_{kin}} = 616$ MeV.

***8/73:** Stößt ein Proton, dessen Geschwindigkeit kleiner als ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit ist, gegen ein ruhendes Proton, so fliegen die beiden Protonen unter einem Winkel von 90° auseinander. Zeigen Sie dies mit den klassischen Erhaltungssätzen für den Impuls und für die kinetische Energie. Ist das stoßende Proton relativistisch, so ist der Winkel kleiner als 90°. Erklären Sie dies qualitativ.

Lösung:
Für die Impulse $\vec{p}_1$ des stoßenden Protons vor dem Stoß und $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ der Protonen nach dem Stoß führt das Vektordreieck der Impulserhaltung klassisch nur dann auf den Erhaltungssatz der kinetischen Energie $\frac{1}{2m}p_1^2 = \frac{1}{2m}p_1'^2 + \frac{1}{2m}p_2'^2$, wenn der Winkel α, den die Impulse $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$ einschließen, ein Rechter ist.

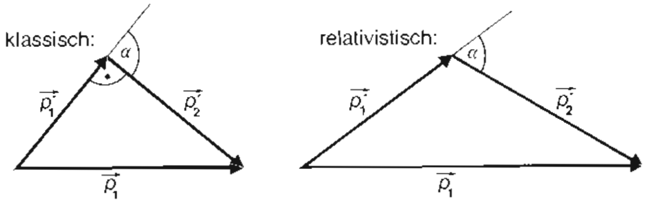

Abb. 79

Werden die Geschwindigkeiten relativistisch, so wächst der Impuls $\vec{p}_1$ stärker an als die Impulse $\vec{p}_1'$ und $\vec{p}_2'$, weil zu ihm die größere Geschwindigkeit und damit auch die größere Massenzunahme gehört. Das Vektordreieck wird stumpfwinklig und der Winkel α wird kleiner als 90°.

9 Einführung in die Quantenphysik

Einleitende Betrachtungen

In diesem Kapitel wird an den Beispielen des Lichts und der Elektronen der Übergang von der klassischen Physik zur Quantenphysik dargestellt. Auf der Grundlage weniger Experimente werden die wesentlichen Aussagen gemacht, so daß die Grundprinzipien der Quantenphysik bei der Behandlung der Atom- und Kernphysik zur Verfügung stehen.
Es ist das wesentliche Ziel dieses Kapitels, zu zeigen, daß die der klassischen Physik entstammenden Begriffsbildungen Welle und Teilchen nicht geeignet sind, Wechselwirkungen von Strahlung und Materie und Phänomene der Atom- und Kernphysik in einer geschlossenen Theorie zu beschreiben. Am Beispiel des Doppelspaltversuchs wird eine Verbindung der Vorstellungsbilder Teilchen und Welle hergestellt. Die experimentellen Erkenntnisse werden durch Einführung der Wellenfunktion, deren Amplitude in der von Born gegebenen Weise statistisch gedeutet wird, in einer neuen Theorie zusammengefaßt, wobei die Aussagen über Teilchen- und Welleneigenschaften eine entsprechende Einschränkung erfahren.
Durch eine Darstellung der historischen Entwicklung der Quantenphysik kann man den Schülern zeigen, wie schwer es auch Physikern wie Schrödinger und Einstein gefallen ist, sich von gewohnten Denkvorstellungen zu lösen und wie in einer ununterbrochenen heftigen Diskussion um eine Deutung der zunächst vorhandenen Formalismen der Schrödingergleichung und der Matrizenmechanik von Heisenberg gerungen wurde. Einen lebendigen Einblick, auch in das persönliche Engagement der Physiker bietet z. B. das Buch von *Hermann: Die Jahrhundertwissenschaft.* (8) Die wesentlichen Elemente der sich als Standardinterpretation durchsetzenden „Kopenhagener Deutung" (9) sind

1. Welle und Teilchen sind komplementäre Bilder, welche verschiedenen, einander ausschließenden Fragestellungen entsprechen.
2. Das Quadrat der Wellenfunktion gibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen an (Bornsche Deutung) und stellt damit den Zusammenhang zwischen Welle und Teilchen her.
3. Ort und Impuls eines Teilchens genügen der Unschärferelation. Es ist also nicht möglich, Ort und Impuls gleichzeitig scharf zu messen.
4. Das Unschärfeprinzip hängt eng mit der Untrennbarkeit von Subjekt und Objekt zusammen. Jede Beobachtung ist ein Eingriff, der das Meßobjekt in unkontrollierbarer Weise stört und – wie das bekannte Heisenberg-Mikroskop zeigt – die Unschärfen hervorruft.
5. Die Bewegungsgleichung für die Wellenfunktion ist die Schrödingergleichung. Sie gibt die zeitliche Veränderung der Wellenfunktion in fast allen Fällen an. Ausgenommen ist der Meßvorgang, bei dem sich die Wellenfunktion sprunghaft ändert (Reduktion des Wellenpaketes).