Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Омский государственный технический университет»

На правах рукописи

Магазев Алексей Анатольевич

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ И КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НА ГРУППАХ ЛИ И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

01.04.02 — Теоретическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Широков Игорь Викторович

Омск – 2017

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Несмотря на то, что в настоящее время теоретическая физика использует почти весь имеющийся арсенал современной математики, для решения большинства ее актуальных задач основными инструментами продолжают оставаться различные приближенные методы. Применение этих методов, однако, не всегда позволяет получать исчерпывающую информацию о свойствах изучаемой физической системы. В качестве иллюстрации отметим текущее состояние квантовой теории поля в искривленном пространстве – времени, где разрешение многих интересных и важных проблем упирается в отсутствие конструктивных способов построения точных решений квантово-полевых уравнений. Например, такие квантовые эффекты как поляризация вакуума и рождение частиц во внешних интенсивных полях не могут быть исчерпывающе описаны в рамках теории возмущений, поэтому знание точных решений квантово-полевых уравнений в этих случаях особенно необходимо [1]. Не меньшую важность представляет и задача интегрирования уравнений движения классических частиц во внешних полях. Точные решения этих уравнений не только представляют самостоятельную ценность, но и полезны в квантовой теории, например, при интерпретации интегралов движения.

Основная цель настоящего исследования — это разработка новых методов точного интегрирования классических и квантовых уравнений теоретической физики, а также получение условий, при которых подобное интегрирование возможно. Следует заметить, что в настоящий момент свойство интегрируемости дифференциального уравнения не имеет четкого определения, и понимается специалистами по разному, в зависимости от контекста рассматриваемой задачи. Например, под интегрируемостью систем обыкновенных дифференциальных уравнений традиционно понимается возможность получения их решений в квадратурах. Напротив, для линейных дифференциальных уравнений в частных производных интегрируемость — это способность их сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; именно в таком смысле трактуется термин «интегрируемость» в рамках метода разделения переменных. В свою очередь, для нелинейных дифференциальных уравнений интегрируемость означает возможность их редукции к системе линейных уравнений. Отметим, тем не менее, что все существующие значения термина «интегрируемость» объединяет одно — наличие симметрии уравнения, позволяющей сводить исходную сложную задачу к более простой. Таким образом, интегрируемость дифференциального уравнения неразрывно связана со свойствами симметрии описываемой им задачи.

С математической точки зрения симметрия дифференциального уравнения реализуется некоторым набором преобразований, оставляющих инвариантным множество решений уравнения. В подавляющем большинстве случаев указанное множество преобразований может быть наделено алгебраической структурой группы (как правило, группы Ли); в этом случае говорят о группе симметрии уравнения. Таким образом, исследование групп симметрии дифференциальных уравнений и разработка с их помощью методов интегрирования представляет собой первостепенную задачу теоретической и математической физики.

Не смотря на то, что основы теоретико-группового подхода к проблеме интегрирования дифференциальных уравнений были заложены еще Софусом Ли в конце XIX века, активность специалистов в данной области не ослабевает и по сей день. Это объясняется тем, что каждый очередной этап в развитии данного направления открывает новые, все более перспективные и многообещающие области исследований, о чем можно судить по непрекращающемуся росту научных публикаций. Для общей ориентации мы приведем здесь ссылки на классические монографии [2–5], в которых приведен обширный список литературы, а также отметим более свежие обзорные работы [6–8].

В рамках теоретико-группового подхода к проблеме интегрируемости дифференциальных уравнений интерес представляют две задачи. Первая задача — это нахождение полной или частичной группы симметрии некоторого заданного уравнения, актуального в той или иной физической теории. К настоящему моменту в контексте данной задачи накоплено огромное количество результатов; в частности, группы симметрии большинства физически интересных дифференциальных уравнений известны. Вторая задача, являющаяся более сложной, а поэтому и более насущная, состоит в построении классов дифференциальных уравнений, допускающих в качестве группы симметрии данную конкретную группу, реализованную, как правило, некоторым набором инфинитезимальных генераторов (операторов симметрии). Решение этой по сути классификационной задачи несомненно представляется более актуальным, так как в конечном счете приводит к возможности выделения классов точно интегрируемых моделей физических теорий.

Наряду с отмеченными выше задачами следует выделить еще одно важное направление исследований, существующее в рамках симметрийного подхода к проблеме интегрируемости. Речь идет о процедуре «включения» внешних полей в рассматриваемые уравнения, и о влиянии этой процедуры на их симметрийные свойства. Подобная проблема важна, например, в квантовой теории поля, где наиболее интересные эффекты проявляются в случае взаимодействия квантованных полей с внешним калибровочным полем. Ясно, что в общем случае «включение» внешнего поля приводит к полной или частичной потере всех имеющихся у физической системы симметрий. Следовательно, даже если описываемые данную систему дифференциальные уравнения были интегрируемы тем или иным методом, для построения их решений во внешнем поле оставшихся симметрий может не хватить. В этой связи интерес представляет проблема выделения классов внешних полей, «включение» которых либо сохраняет структуру исходной алгебры симметрии, либо деформирует ее таким образом, чтобы задача об интегрируемости рассматриваемого уравнения оставалась бы содержательной.

Наиболее естественным образом симметрии дифференциальных уравнений физических теорий возникают как следствия имеющихся геометрических симметрий конфигурационных пространств используемых моделей. Отметим, что практически все точно интегрируемые модели общей теории относительности связаны с (псевдо)римановыми многообразиями, допускающими действие различных групп преобразований. Например, в качестве популярных космологических моделей часто выступают однородные изотропные пространства Робертсона – Уокера [9]. Метрика пространства Робертсона – Уокера является простейшим обобщением метрики пространства Минковского, что дает возможность использовать вычислительные методы квантовой теории поля, развитые для случая плоского пространства – времени. Не смотря на это, уже на примере этой простейшей модели было продемонстрировано существование некоторых нетривиальных квантовых эффектов, не имеющих места в пространстве – времени Минковского [10–13]. Кроме пространств Робертсона – Уокера, особое внимание специалистов также привлекает пространство де Ситтера, которое является максимально симметрическим вакуумным решением уравнений Эйнштейна с положительной космологической постоянной [14]. Так же как и пространство – время Минковского, пространство де Ситтера обладает 10-параметрической группой преобразований, что весьма облегчает аналитические расчеты, осуществляемые в рамках данной модели.

Вышеуказанные модельные примеры, а также ряд анизотропных космологических моделей [15], использующихся в квантовой теории поля и общей теории относительности, тем не менее носят ограниченный характер. Подобные пространства обладают относительно богатыми группами симметрии, что дает возможность сравнительно легко осуществлять процедуру построения точных решений классических и квантовых уравнений. С другой стороны, наличие большого числа симметрий устанавливает, как известно, довольно жесткие ограничения на возможность проявления различных квантовых эффектов в рамках подобных моделей. В связи с этим интерес представляет рассмотрение более общего класса псевдоримановых многообразий, обладающих группами симметрии с меньшим числом параметров, но в которых, тем не менее, возможно осуществление точного интегрирования соответствующих уравнений. В частности, актуальными представляются классы моделей, имеющих «скрытые» симметрии, то есть симметрии, не сводящиеся к группам движений псевдоримановых многообразий.

Степень разработанности темы исследования. Методам точного интегрирования уравнений теоретической и математической физики посвящена обширная литература. При этом подходы, применяемые к решению классических и квантовых дифференциальных уравнений, как правило, могут сильно отличаться друг от друга. Например, традиционные способы интегрирования конечномерных гамильтоновых систем уравнений базируются на хорошо известной теореме Лиувилля [16], либо на ее некоммутативном обобщении, предложенном А. Т. Фоменко и А. С. Мищенко [17, 18]. В то же время классические подходы к интегрированию квантово-полевых уравнений, таких как уравнение Клейна – Гордона, Дирака, Прока и т.д., обычно реализуются в рамках полного или частичного *разделения переменных*. Отметим, что метод разделения переменных, получивший первоначальное развитие еще в работах К. Якоби, П. Штеккеля и Т. Леви-Чивиты, в настоящее время является, пожалуй, одним из самых эффективных методов построения точных решений дифференциальных уравнений. Хорошо известно, что возможность разделения переменных в дифференциальном уравнении тесно связана с существованием его некоторой коммутативной алгебры симметрии. (Впервые, по-видимому, на это обстоятельство обратили внимание П. Винтерниц и И. Фриш [19]). В дальнейшем указанная связь между разделением переменных и коммутативными алгебрами симметрии исследовалась многими авторами; определенный итог этим исследованиям был подведен в монографии У. Миллера [20]. Следует отметить, что в настоящий момент теория разделения переменных является полностью завершенной для геодезического уравнения Гамильтона – Якоби, а также для линейного скалярного дифференциального уравнения второго порядка, в том числе для уравнения Клейна – Гордона и волнового уравнения. Это оказалось возможным благодаря теореме о необходимых и достаточных условиях разделения переменных, доказанной В. Н. Шаповаловым [21, 22], и сводящей задачу разделения переменных к задаче построения так называемых *полных наборов* операторов симметрии. Имея огромное теоретическое значение, данная теорема также позволила провести систематизацию практически всех известных точных решений уравнений квантовой механики с внешними полями, а также найти обширные классы новых полей и соответствующих им точных решений (см. [23, 24] и цитируемую там литературу).

Проблема поиска новых классов псевдоримановых многообразий и внешних полей на них, допускающих разделение переменных в соответствующих квантово-полевых уравнениях, на фоне выполненных исследований представляется в значительной мере исчерпанной (по крайней мере, в рамках традиционного метода разделения переменных). В этой связи приобретает интерес разработка новых методов и подходов точного интегрирования дифференциальных уравнений, отличающихся от методов теории разделения переменных.

В 90-ых годах прошлого века появилась серия работ, посвященных новому эффективному методу построения точных решений линейных дифференциальных уравнений, выходящему за рамки разделения переменных [25–29]. Являясь нетривиальным обобщением метода некоммутативного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем, указанный метод продемонстрировал весьма широкие возможности применения к проблеме точного интегрирования уравнений квантовой механики [30–35]. Позже была выяснена глубокая связь этого метода с методом орбит А. А. Кириллова, устанавливающим, как известно, соответствие между неприводимыми унитарными представлениями групп Ли и их орбитами коприсоединенного представления [36–38]. Это, в свою очередь, послужило толчком к появлению целой серии публикаций, посвященных применению метода орбит к различным задачам теоретической физики [39–45].

Также нельзя не отметить тот факт, что обладая бесспорной практической ценностью, метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений имеет и определенное методологическое значение. В частности, так же как и в методе разделения переменных здесь прослеживается общность алгебраических конструкций, связанных с симметрийными свойствами интегрируемых квантовых уравнений и соответствующих им классических гамильтоновых систем. Отметим, что детальное понимание такой взаимосвязи позволяет использовать весь накопленный опыт интегрирования и качественного анализа уравнений классической механики к проблеме построения точных и приближенных решений квантовых уравнений.

Цели и задачи исследования. Целью настоящей диссертационной работы является развитие методов точного интегрирования классических и квантовых уравнений на многообразиях, допускающих действие групп Ли преобразований. Основные решаемые при этом задачи могут быть сформулированы следующим образом.

1) Разработать эффективный алгоритм координатной реализации транзитивных действий произвольной группы Ли по ее алгебре Ли.

2) Построить специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли к задаче интегрирования гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления и, как следствие, получить соответствующий алгебраический критерий интегрируемости. Получить явную формулу для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

3) Исследовать связь между специальным каноническим преобразованием и неприво-

димыми унитарными представлениями группы Ли. Распространить метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли на их квантовые аналоги.

4) Разработать конструктивный метод интегрирования в квадратурах гамильтоновых потоков на однородных пространствах групп Ли. Получить необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик и метрик субмерсии на однородных пространствах.

5) Исследовать проблему интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получить критерии интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

6) Предложить когомологический подход к описанию внешних электромагнитных полей на псевдоримановых многообразиях. Решить проблему интегрируемости в квадратурах магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Исследовать возможность некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

7) Построить общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными алгебрами симметрии во внешних электромагнитных полях.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые решен ряд важных научных задач и получен ряд новых результатов.

Предложен эффективный алгоритм восстановления транзитивных действий групп Ли, использующий только структурные константы соответствующих алгебр Ли. Впервые показано, что в локальных координатах транзитивное действие группы Ли всегда может быть построено в квадратурах.

Введено и исследовано специальное каноническое преобразование в пространстве кокасательного расслоения группы Ли, сводящее задачу интегрирования лево- или правоинвариантных гамильтонвых потоков к задаче интегрирования канонических гамильтоновых систем на коприсоединенных орбитах. Доказано, что производящая функция специального канонического преобразования может быть построена в квадратурах. Впервые получена явная общая формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группе Ли.

Установлена связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями группы Ли, которая позволила распространить метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на их квантовые аналоги. На основе этой связи предложен конструктивный алгоритм построения обобщенных матричных элементов неприводимых унитарных представлений.

Специальное каноническое преобразование обобщено на случай однородного пространства, что позволило предложить новый эффективный метод интегрирования геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях с транзитивными группами преобразований. Как следствие, впервые получены необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах геодезических потоков для двух классов псевдоримановых метрик на однородных пространствах: инвариантных метрик и метрик субмерсии. Исчерпывающим образом исследована проблема интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик на трех- и четырехмерных псевдоримановых однородных пространствах.

Впервые поставлена и решена задача об интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах. В частности, показано, что интегрируемость уравнения Якоби является следствием интегрируемости соответствующего уравнения геодезических.

Установлено биективное соответствие между когомологиями алгебр Ли и классами внешних электромагнитных полей, допускающих симметрию уравнений движения классических заряженных частиц. Но основе этого соответствия предложен оригинальный классификационный подход к описанию электромагнитных полей на произвольных псевдоримановых многообразиях. Полностью решена проблема интегрируемости в квадратурах инвариантных магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Впервые удалось доказать, что магнитный геодезический поток на произвольном четырехмерном псевдоримановом многообразии с нетривиальной группой изотропии всегда интегрируем в квадратурах. Описана общая структура алгебры линейных интегралов движения уравнений Вонга и исследована возможность ее применения к некоммутативному интегрированию этих уравнений.

Исследована структура киллинговой алгебры симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на произвольном псевдоримановом многообразии. Развит метод интегрирования этих уравнений на группах Ли, и получен соответствующий алгебраический критерий их интегрируемости. Предложена общая схема построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях.

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, представляют интерес с точки зрения дальнейшего прогресса в квантовой теории поля в искривленном пространстве – времени. В частности, методы и подходы, развитые в настоящем исследовании, будут полезны при изучении квантовых эффектов, которые не могут быть последовательно описаны в рамках теории возмущений. Полученные в диссертации критерии интегрируемости также могут быть полезны при выборе математических моделей общей теории относительности и гравитации, в рамках которых возможно точное аналитическое исследование квантовых и классических уравнений. Кроме того, результаты настоящего диссертационного исследования имеют несомненную методологическую ценность, демонстрируя, в частности, возможность использования единого теоретико-группового подхода к решению проблем интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих динамику квантовых и соответствующих им классических систем. Часть результатов диссертации также может быть использована в учебном процессе, например, при обучении студентов современным методам математической физики.

Методология и методы исследования. Построение точных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику классических и квантовых систем, является нетривиальной задачей и требует привлечения аппарата теории групп и алгебр Ли, теории представлений и дифференциальной геометрии. В настоящей диссертационной работе при исследовании проблем интегрируемости классических и квантовых уравнений мы существенно используем два метода: метод орбит и метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод орбит, развитый в работах А. А. Кириллова [46, 47], Б. Костанта [48], Л. Ауслангдера [49] и Л. Пуканского [50], принадлежит к теориям, которые дают возможность изучать вопросы симметрии и интегрирования дифференциальных уравнений алгебраическими методами. В свою очередь, метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений, разработанный относительно недавно А. А. Шаповаловым и И. В. Широковым [25, 28], представляет собой серьезную альтернативу методу разделения переменных и позволяет конструктивно строить точные решения релятивистских волновых уравнений с использованием их некоммутативных алгебр симметрии. При исследовании интегрируемых геодезических на однородных пространствах мы широко используем некоторые современные результаты дифференциальной геометрии, в особенности метод псевдоримановых субмерсий, впервые изложенный в работе Б. О'Нейла [51]. Кроме того, симметрия классических и квантовых уравнений движения изучается нами с позиций теории когомологий групп и алгебр Ли, последовательное изложений которой можно найти в монографиях [52–54].

Положения, выносимые на защиту.

1) Представлен конструктивный алгоритм восстановления в локальных координатах транзитивных действий группы Ли по ее алгебре Ли.

2) Предложено специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых потоков на кокасательных расслоениях групп Ли к задаче интегрирования канонических гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления. Как следствие, получены алгебраические условия интегрируемости гамильтоновых потоков на группах Ли.

3) Получена явная общая формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

4) Установлена связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями групп Ли, которая позволяет распространить метод интегрирования классических гамильтоновых систем на группах Ли на их квантовые аналоги.

5) Специальное каноническое преобразование обобщено на случай интегрирования гамильтоновых потоков на однородных пространствах. Разработан конструктивный метод интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии; получены необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков указанных метрик.

6) Исследована проблема интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получены условия интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

7) Установлено биективное соответствие между когомологиями алгебр Ли групп движений и классами электромагнитных полей, допускающих симметрию уравнений движения классической заряженной частицы.

8) Получены алгебраические условия интегрируемости магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах, и предложен конструктивный метод их интегрирования в квадратурах.

9) Исследована структура алгебры линейных интегралов движения уравнений Вонга. В терминах этой алгебры сформулированы условия некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

10) Развит метод интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на группах Ли, и получен соответствующий алгебраический критерий их интегрируемости. Построен общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными симметриями во внешних электромагнитных полях.

Степень достоверности и апробация результатов. Все представленные в диссертационной работе результаты снабжены строгими математическими доказательствами. Достоверность результатов подтверждается рядом нетривиальных примеров, а также сравнением с частными результатами других авторов.

Основные результаты диссертации докладывались на Всероссийской конференции «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченной к 85-летию академика Л. В. Овсянникова (Новосибирск, 2004 г.); XVI Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга'16-2004» (Казань, 2004 г.); XIX Международной летней школе-семинаре по современным проблемам теоретической и математической физики «Волга'19-2007» (Казань, 2007 г.); Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008 г.); Международной конференции "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"(Казань, 2010 г.); Третьей Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2012 г.); Международной конференции «Quantum Field Theory and Gravity (QFTG'14)» (Томск, 2014 г.); XVI Международной концеренции "Symmetry Methods in Physics (SYMPHYS-2014)" (Дубна, 2014 г.); Международной конференции "Quantum Field Theory and Gravity" (Томск, 2016), научных семинарах кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета (Томск), объединенном семинаре физического факультета Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского (Омск), семинарах Омского филиала Института математики им. С. М. Соболева СО РАН (Омск).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 24 научные работы [44, 55–77], в том числе 13 статей в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (из них 1 статья в ведущем международном научном журнале, индексируемом Web of Science, 8 статей в российских научных журналах, переводные версии которых индексируются Web of Science), 1 монография (в соавторстве), 1 статья в сборнике научных трудов, 3 статьи в научных журналах, 6 публикаций в сборниках материалов международных научных конференций и международных летних школ-семинаров.

Все основные результаты получены лично автором. При выполнении всех работ автор принимал определяющее участие как в постановке, так и в решении задач.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, двух приложений и списка литературы, включающего 237 источников. Диссертация изложена на 296 страницах машинописного текста, содержит 4 таблицы, 2 рисунка.

Во ***введении*** обоснована актуальность темы исследования и описана степень ее разработанности, сформулированы основные цели и задачи работы, отмечена новизна полученных результатов и их теоретическая значимость, выделены основные положения, выносимые на защиту.

В ***первой главе*** рассмотрены проблемы координатной реализации транзитивных действий групп и алгебр Ли. Более конкретно, мы рассматриваем проблему реализации данной конечномерной алгебры Ли векторными полями или, более общо, неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, заданными на однородном пространстве соответствующей группы Ли, а также задачу восстановления транзитивного действия группы Ли по ее алгебре Ли. Отметим, что полученные в этой главе результаты существенно используются в последующих главах диссертационной работы.

В **§ *1.1*** дан краткий обзор основных понятий теории групп и алгебр Ли. Приведены формулы для вычисления лево- и правоинвариантных векторных полей и дуальных им 1-форм, отмечена выделенная роль канонических координат на группе, дан краткий обзор существующих подходов к восстановлению закона группового умножения (функции композиции) по известному закону коммутации в соответствующей алгебре Ли. В заключение параграфа приведены основные сведения о действиях групп Ли на гладких многообразиях.

В **§ *1.2*** следуя работам [64, 78] описан эффективный алгоритм реализации данной конечномерной алгебры Ли векторными полями, являющимися инфинитезимальными генераторами транзитивного действия соответствующей группы Ли. Отметим, что решение проблемы реализации алгебр Ли векторными полями представляется актуальным с точки зрения теоретико-группового подхода к классификации дифференциальных уравнений в частных производных [79,80], а также с точки зрения задачи классификации псевдоримановых метрик на многообразиях с группами движений [81–84]. Кроме того, реализация алгебр Ли векторными полями представляет собой важный этап в решении задачи построения релятивистских волновых уравнений во внешних полях с заданной группой симметрии [85,86].

§ *1.3* посвящен проблеме восстановления транзитивных действий группы Ли по ее алгебре Ли. Доказаны утверждения, из которых следует, что локальный закон группового умножения (функция композиции) в любых канонических координатах на группе может быть восстановлен по структурным константам соответствующей алгебры Ли с помощью квадратур. На основе этого результата представлен конструктивный алгоритм восстановления транзитивных действий заданной группы Ли. В отличие от традиционного подхода, основанного на известных теоремах Ли, описанный алгоритм сводится не к интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных, а к вычислению квадратур и нахождению матричных экспонент. В качестве иллюстрирующего примера построена функция композиции шестимерной неразрешимой группы $St(1,\mathbb{R})$, имеющей нетривиальный центр, а также найдена функция действия этой группы на ее четырехмерном однородном пространстве.

В **§ *1.4*** рассматривается более общая задача о реализации конечномерных алгебр Ли неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, то есть задача построения деформаций алгебр векторных полей. Эта задача естественным образом возникает в теории проективных представлений групп Ли [87], а также в проблеме построения λ-представлений алгебр Ли [38]. Кроме того, важное прикладное значение данная задача находит в квантовой механике, в частности, при алгебраическом подходе к теории рассеяния [88], а также в задаче классификации операторов Шредингера, принадлежащих универсальным обертывающим алгебр Ли (проблема Левина) [89]. В указанном параграфе, следуя работам [38, 90, 91], приводятся основные положения теории деформаций алгебр Ли векторных полей. Кроме того, отмечается связь деформаций с когомологиями групп и алгебр Ли, а также доказывается ряд технических утверждений, которые будут существенно использованы в главе 2 при построении специального канонического преобразования в пространстве кокасательного расслоения группы Ли.

Во ***второй главе*** исследуется проблема интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем на многообразиях групп Ли. Наиболее известный пример подобной системы — уравнения движения свободного ассиметрического волчка, которые, как известно, могут быть интерпретированы как уравнения геодезического потока на группе $SO(3)$, снабженной односторонне инвариантной римановой метрикой [16].

Не смотря на то, что интегрируемые геодезические потоки на группах Ли представляют собой популярный объект исследования в дифференциальной геометрии и механике, большинство значимых результатов здесь получено лишь для риманова случая, то есть для случая положительно-определенных метрик. Напротив, с точки зрения возможных приложений в теоретической физике геодезические индефинитных метрик на группах Ли представляют больший интерес, например, в общей теории относительности и космологии. Кроме того, исследование проблемы интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли представляет также интерес и с квантовой точки зрения, так как ряд важных свойств таких систем в определенном смысле переносится и на их соответствующие квантовые аналоги.

В ***§ 2.1*** описывается класс гамильтоновых систем на T^*G, функции Гамильтона которых инвариантны относительно правого действия группы Ли G. Показано, что произвольная правоинвариантная гамильтонова система может быть сведена к гамильтоновой системе на орбите коприсоединенного представления группы G и к некоторой дополнительной неавтономной системе дифференциальных уравнений первого порядка. В конце параграфа анализируются возможные подходы к интегрированию правоинвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли.

Как известно, всякая коприсоединенная орбита является симплектическим многообразием, в силу чего любая гамильтонова система на ней может быть записана в канонической форме путем введения канонических координат, существование которых утверждается известной теоремой Дарбу. В **§ *2.2*** излагается алгебраический метод построения специального класса канонических координат, которые оказываются тесно связаны с инвариантными поляризациями коприсоединенных орбит [38, 92]. Заметим, что с классической (не квантовой) точки зрения подобные канонические координаты выглядят не совсем естественно; в ряде случаев введение данных координат сопряжено с «выходом» в комплексную область. Тем не менее, описанный нами класс канонических координат оказывается исключительно удобен при построении специального канонического преобразования, составляющего основу метода интегрирования гамильтоновых систем на группах Ли.

§ *2.3* посвящен центральной конструкции второй главы — специальному каноническому преобразованию, с помощью которого осуществляется редукция произвольной правоинвариантной гамильтоновой системы на T^*G к канонической гамильтоновой системе на регулярных орбитах коприсоединенного представления группы Ли G. Приводится явная формула для производящей функции этого канонического преобразования и исследуются ее простейшие свойства. Рассматриваются примеры построения специального канонического преобразования на трехмерных вещественных группах $E(2)$, $SO(3)$ и $SL(2,\mathbb{R})$. Излагается основанный на применении специального канонического преобразования оригинальный метод интегрирования правоинвариантных гамильтоновых потоков на произвольных группах Ли. В частности, приводится условие интегрируемости указанных потоков, выраженное через инвариантную характеристику алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G — ее индекс $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$. В заключение параграфа обсуждается интегрируемость правоинвариантных гамильтоновых потоков на трех- и четырехмерных группах Ли.

Классу правоинвариантных гамильтоновых систем принадлежат, в частности, геодезические потоки правоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли. Имея в виду важные приложения геодезических потоков в дифференциальной геометрии, а также в теоретической и математической физике, данный случай рассмотрен более подробно в **§ *2.4***. Наряду с некоторыми общими результатами, в параграфе также приведен пример интегрирования геодезического потока метрики Мак-Леннана – Тарига – Таппера, являющейся решением системы Эйнштейна – Максвелла с тензором электромагнитного поля, не обладающего симметриями пространства – времени [93, 94]. Данная метрика имеет тип I по Петрову и является нештеккелевой, то есть не допускающей разделение переменных в соответствующем уравнении Гамильтона – Якоби.

В **§ *2.5*** обсуждается задача построения полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли с произвольными правоинвариантными функциями Гамильтона. Общеизвестно, что традиционный способ решения этой задачи состоит в использовании метода разделения переменных, который не применим, по крайней мере в классическом варианте, в случае псевдоримановых многообразий нештеккелева типа. В этой связи особо актуальны альтернативные подходы, позволяющие получать полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби вне рамок разделения переменных. Один из таких подходов развивается в **§ *2.5***. Показано, что задача интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби с произвольной правоинвариантной функцией Гамильтона редуцируется к аналогичной задаче на многообразии Q, размерность которого равна $\dim Q = (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Кроме того, получена явная формула, позволяющая в квадратурах восстанавливать полный интеграл исходного уравнения Гамильтона – Якоби по известному полному интегралу редуцированного уравнения Гамильтона – Якоби. В качестве иллюстрации построен полный интеграл геодезического уравнения Гамильтона – Якоби для метрики МакЛеннона – Тарига – Таппера, рассмотренной выше в **§ *2.4***.

В ***третьей главе*** вводится класс линейных дифференциальных уравнений на группах Ли, являющихся естественными квантовыми аналогами конечномерных гамильтоновых систем, рассмотренных нами в предыдущей главе. Описывается метод построения точных решений этих уравнений, основанный на теории гармонического анализа на группах Ли, и представляющий собой альтернативу методу разделения переменных. Исследуется связь некоторых конструкций этого метода со специальным каноническим преобразованием, построенным нами в **§ *2.3***.

В **§ *3.1*** рассматриваются классы лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов на группе Ли G. Дается их описание в терминах инвариантных векторных полей на группе, а также в терминах пуассоновой полиномиальной алгебры на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Формулируется общее определение квантового уравнения на группе Ли, и в качестве примера подобного уравнения рассматривается уравнение Клейна – Гордона относительно произвольной правоинвариантной псевдоримановой метрики.

§ *3.2* посвящен ключевой конструкции излагаемого далее метода интегрирования квантовых уравнений на группах Ли — λ-представлению алгебр Ли. Впервые введенное И. В. Широковым в рамках метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [25], λ-представление оказалось чрезвычайно эффективным инструментом построения точных решений релятивистских волновых уравнений [30–34, 95]. В рассматриваемом параграфе описывается метод построения λ-представлений, основанный на известной процедуре индуцирования представлений с подалгебр. Отмечается связь λ-представлений с каноническими координатами на поляризованных орбитах коприсоединенного представления, а также рассматриваются примеры λ-представлений алгебр $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Использование λ-представлений алгебр Ли позволяет проводить эффективную процедуру гармонического анализа на многообразиях соответствующих групп Ли. Эта процедура подробно описана в **§ *3.3***, следуя, в основном, работам [44, 96, 97]. В частности, рассматриваются «матричные элементы» $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ представления группы G, являющегося поднятием λ-представления соответствующей алгебры Ли. Являясь обобщенными функциями, указанные «матричные элементы» образуют полное и ортогональное семейство, что дает возможность построить прямое и обратное преобразования Фурье на группе G. Отметим, что обычно матричные элементы неприводимых бесконечномерных унитарных представлений определяются как собственные функции $\dim G$-мерного коммутативного набора операторов из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G)) \times U(\mathfrak{g}_L(G))$, где посредством $\mathfrak{g}_R(G)$ и $\mathfrak{g}_L(G)$ обозначены право- и левоинвариантные обертывающие алгебры соответственно (см., например, [98]). С точки зрения приложений к проблеме интегрирования дифференциальных уравнений, изложенный в **§ *3.3*** подход предпочтителен по следующим причинам. Во-первых, задача на собственные значения для совокупности коммутирующих между собой дифференциальных операторов не всегда может быть явно решена, в то время как обобщенные функции $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ всегда могут быть найдены в квадратурах. Во-вторых, после обобщенного преобразования Фурье, определяемого «матричными элементами» $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$, образы лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов на группе G снова будут являться дифференциальными операторами того же порядка, но с меньшим числом независимых переменных.

Между неприводимыми унитарными представлениями группы Ли G и специальным каноническим преобразованием в T^*G, описанным в **§ *2.3***, имеется тесная связь. Эта связь обсуждается в **§ *3.4***, и выражается формулой, связывающей «матричные элементы» унитарных представлений с производящей функцией специального канонического преобразования. Представляя собой удобный рецепт явного вычисления «матричных элементов», данная формула также является еще одним подтверждением глубокой фундаментальной концепции о связи между коприсоединенными орбитами и неприводимыми представлениями групп Ли. Напомним, что последовательное продвижение данной идеи легло в основу серии работ А. А. Кириллова, результатом которых явился известный метод орбит [47], хорошо зарекомендовавший себя в теории представлений групп и алгебр Ли, а также в теории геометрического квантования. В своем исследовании, однако, мы нацелены скорее на чисто конструктивный аспект, в связи с чем полученный результат интересует нас в первую очередь как основа *единого подхода* к интегрированию классических и квантовых дифференциальных уравнений на группах Ли. В заключение **§ *3.3*** мы иллюстрируем описанную связь на примерах групп $SO(3)$, $E(2)$ и $SL(2,\mathbb{R})$.

В ***§ 3.5*** в качестве иллюстрации применения описанных выше конструкций изложен метод построения точных решений квантовых уравнений на группах Ли. Как следствие, получено алгебраическое условие интегрируемости квантового уравнения на произвольной группе Ли G, совпадающее с условием интегрируемости соответствующей классической гамильтоновой системы. Данный результат является логическим следствием отмеченной в предыдущем параграфе общности подходов к интегрированию классических и квантовых дифференциальных уравнений на группах Ли. В заключение параграфа приведен пример интегрирования уравнения Клейна – Гордона в нештеккелевой метрике МакЛеннона – Тарига – Таппера.

Четвертая глава диссертационной работы посвящена задаче интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах. Отметим, что проблема интегрируемости геодезических потоков является, пожалуй, одной из наиболее значимых проблем в дифференциальной геометрии. Огромный интерес решение данной задачи представляет также и в теоретической физике, в частности, в общей теории относительности и космологии.

К настоящему моменту проблема описания псевдоримановых многообразий, допускающих интегрируемые геодезические потоки, довольно далека до своего окончательного решения. Известны лишь сравнительно небольшие классы многообразий, на которых удается явным образом сконструировать интегрируемые геодезические потоки: компактные группы Ли [16,99], симметрические пространства [100–104], n-симметрические пространства [105], а также компактные однородные пространства с биинвариантными метриками [106]. Отметим, что все перечисленные серии многообразий относятся к классу однородных пространств групп Ли. Не менее значимой является и проблема получения удобных критериев интегрируемости геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях; для однородных пространств с инвариантными метриками эта проблема исследовалась в работах [107–109].

В ***§ 4.1*** следуя работам [38, 110] излагается классификационный подход к описанию орбит коприсоединенного представления групп Ли. Основным результатом данной классификации является декомпозиция дуального пространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на непересекающиеся G-инвариантные алгебраические поверхности $M_{(s)}$, каждая из которых является объединением коприсоединенных орбит размерности $\dim\mathfrak{g}-\operatorname{ind}\mathfrak{g}-2s$. Здесь $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$, s — целое неотрицательное число, называемое степенью сингулярности орбиты.

Далее мы детально разбираем специфическую ситуацию, когда функции Казимира алгебры Ли являются многозначными функциями своих аргументов и представляют собой лишь локальные инварианты коприсоединенного действия. Показано, что пространство коприсоединенных орбит в этом случае не является полуотделимым (относительно фактор-топологии, индуцируемой обычной топологией в $\mathfrak{g}^*$), следовательно группы Ли с подобными функциями Казимира относятся к классу так называемых *диких* групп. Отметим, что дикие группы представляют значительный интерес, в первую очередь в теории представлений. Например, для диких групп может иметься неоднозначность разложения унитарных представлений, а также может отсутствовать характер представления. Имея в виду специфику таких ситуаций, мы провели исследование с целью выявить подобные случаи среди алгебр Ли малых размерностей. Для этого были явно построены инвариантны коприсоединенного представления всех вещественных алгебр Ли размерности меньше шести (см. Приложение A), и на основе полученных результатов найдены две алгебры с не полуотделимым пространством орбит.

В заключение **§ *4.1*** показано, что метод орбит может быть эффективно применен к исследованию однородных пространств групп Ли. В частности, каждому однородному пространству $M = H \setminus G$ поставлены в соответствие три целых неотрицательных числа — индекс i_M, степень сингулярности s_M и дефект d_M. Индекс i_M — это число функционально независимых тождеств, то есть функциональных соотношений между гамильтонианами действия однопараметрических подгрупп группы G на T^*M. Степень сингулярности s_M определяет размерность орбит коприсоединенного представления s_M-типа, являющихся образами G-орбит в T^*M при соответствующем отображении момента. Наконец, дефект d_M однородного пространства тесно связан с пуассоновой алгеброй $\mathscr{F}$ функций из $C^\infty(T^*M)$, инвариантных относительно действия группы G; в определенном смысле дефект — это «степень некоммутативности» этой алгебры. Например, для симметрических или, более общо, коммутативных однородных пространств дефект равен нулю. Отметим, что числа i_M, s_M и d_M представляют собой важные характеристики однородного пространства и могут быть посчитаны с помощью структурных констант алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ групп G и H соответственно.

В **§ *4.2*** описываются два естественных класса псевдоримановых метрик на однородных пространствах — инвариантные метрики и метрики субмерсии. Инвариантные метрики на однородных пространствах являются класическим объектом исследования дифференциальной геометрии, а также теории групп и алгебр Ли. На сегодняшний день геометрия таких метрик хорошо изучена и, кроме того, получены достаточно обширные классификационные результаты. Напротив, понятие *псевдоримановой субмерсии* сформировалось относительно недавно. Локальная дифференциальная геометрия субмерсий впервые была изложена в работе [51]. В настоящее время метрики субмерсии являются довольно популярным объектом исследования в математической и теоретической физике. Так, например, теория (псевдо)римановых субмерсий довольно интенсивно применяется к изучению эйнштейновых многообразий; в рамках этого подхода уже получены довольно обширные классификационные результаты, обзор которых можно найти в монографии [111]. Римановы субмерсии также представляют немалый интерес в теоретической физике и имеют приложения в теории Янга – Миллса [112, 113], теории Калуцы – Клейна [114, 115], а также в супергравитации и теории струн [116].

§ *4.3* посвящен построению специального канонического преобразования в пространстве кокасательного расслоения T^*M однородного пространства $M = H \setminus G$. Указанное преобразование сводится к переходу от обычных фазовых переменных (x, p) на T^*M к новому набору переменных, в состав которого входят:

- переменные (u, v), которые являются каноническими координатами на орбитах коприсоединенного представления s_M-типа;
- переменные (u', v'), которые представляют собой канонические координаты на симплектических листах пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$ инвариантных функций;
- переменные (J, τ), где J представляют собой локальные координаты в пространстве коприсоединенных орбит s_M-типа, а τ — канонически сопряженные с ними величины.

Данное преобразование является обобщением специального канонического преобразования, рассмотренного в **§ *2.3***, и служит основой для описываемого в следующем параграфе оригинального метода интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах.

В **§ *4.4*** построенное выше специальное каноническое преобразование в T^*M применяется к решению задачи интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии. Как следствие, сформулированы необходимые и достаточные условия интегрируемости указанных геодезических потоков в квадратурах.

В первом пункте **§ *4.4*** показано, что после применения специального канонического преобразования, гамильтонова система геодезического потока инвариантной метрики преобразуется к канонической гамильтоновой системе, для которой координаты u, v и J являются интегралами движения. Тем самым интегрируемость исходной гамильтоновой системы определяется только числом канонических переменных (u', v'), равным удвоенному дефекту d_M однородного пространства. В качестве примера, иллюстрирующего полученный результат, в квадратурах проинтегрирован геодезический поток инвариантной нештеккелевой метрики на четырехмерном однородном пространстве с пятимерной неразрешимой группой преобразований $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$. Кроме того, исследована проблема интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик на трех- и четырехмерных однородных пространствах с нетривиальными подгруппами изотропии; в частности, показано, что все такие геодезические потоки интегрируемы в квадратурах.

Во втором пункте **§ *4.4*** показано, что в случае метрик субмерсии преобразованная гамильтонова система геодезического потока включает переменные u', v' и J как интегралы движения. Следовательно, интегрируемость в этой ситуации определяется только числом канонических переменных (u, v), то есть размерностью коприсоединенных орбит s_M-типа. В качестве примера рассмотрена задача интегрирования в квадратурах геодезического потока метрики субмерсии на четырехмерном однородном пространстве с пятимерной дикой группой преобразований (группой Маутнера). Отметим, что использование специального канонического преобразования в этом случае является единственной альтернативой, так как имеющийся в задаче коммутативный набор интегралов движения содержит многозначную функцию, и поэтому стандартная техника ограничения гамильтоновой системы на совместную поверхность уровня этих интегралов не применима. В конце **§ *4.4*** обсуждается проблема классификации однородных пространств с интегрируемыми геодезическими потоками метрик субмерсии, а также приводятся некоторые замечания об интегрируемости геодезических потоков биинвариантных метрик.

Пятая глава настоящей диссертационной работы посвящена исследованию интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях, то есть систем дифференциальных уравнений, являющихся результатом линеаризации гамильтоновых систем на пуассоновых многообразиях. В частности, подробно изучается вариация геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях, приводящая к известному уравнению Якоби — дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему отклонения геодезических при малых возмущениях начальных условий. Данное уравнение играет важную роль в вопросах устойчивости геодезических на римановых и псведоримановых многообразиях [16, 117–119], а также представляет большой интерес в общей теории относительности [120–123].

В **§ *5.1*** показано, что на касательном расслоении произвольного пуассонова многообразия имеется пуассонова структура, с помощью которой всякая гамильтонова система вместе со своей системой в вариациях может быть снова представлена в гамильтоновой форме. Описаны простейшие свойства данной пуассоновой структуры и рассмотрены некоторые простейшие примеры.

§ *5.2* содержит исследование системы в вариациях геодезического потока на произвольном псевдоримановом многообразии (M, g). Показано, что уравнение Якоби — уравнение, описывающее отклонения геодезических при малых возмущениях начальных условий, – можно переписать в виде гамильтоновой системы некоторого расширенного геодезического потока на многообразии $T^*(TM)$. Доказано утверждение, согласно которому интегрируемость по Лиуввилю этого расширенного геодезического потока является следствием интегрируемости по Лиувиллю исходного геодезического потока на T^*M.

В ***§ 5.3*** доказано, что касательное расслоение TM всякого однородного пространства $M = H \setminus G$ снабжается естественной структурой однородного пространства с группой преобразований, являющейся прямым произведением группы G на абелеву группу $\mathbb{R}^{\dim G}$. В качестве следствия этого результата показано, что гамильтонова система в вариациях геодезического потока инвариантной метрики (метрики субмерсии) на M является геодезическим потоком относительно некоторой инвариантной метрики (метрики субмерсии) на однородном пространстве TM. Эти факты позволили обобщить изложенный в предыдущей главе метод интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах на случай интегрирования соответствующих уравнений Якоби.

Применение изложенного в предыдущем параграфе метода проиллюстрировано в ***§ 5.4*** на примере интегрирования уравнения Якоби на двумерной плоскости Лобачевского, являющейся симметрическим пространством отрицательной кривизны.

Нахождение точных решений уравнений движения заряженных частиц во внешних полях представляет собой следующий, более сложный этап в решении общей проблемы интегрирования классических уравнений теоретической физики. В то время как теория интегрирования геодезических потоков на настоящий день хорошо развита, аналогичная ей теория для конечномерных гамильтоновых систем, определяющих динамику заряженных частиц во внешних полях, находится еще в стадии развития. Отметим, что в настоящее время наибольшая исследовательская активность наблюдается по отношению к интегрируемым *магнитным геодезическим потокам*, то есть гамильтоновым потокам, описывающим движение заряженных частиц во внешних электромагнитных полях. Помимо исследования проблемы интегрируемости этих динамических систем [124–129], внимание специалистов также привлекает целый круг вопросов, связанных с их различными топологическими особенностями [130–133].

Шестая глава посвящена проблеме интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Также в данной главе обсуждается проблема некоммутативной интегрируемости системы уравнений Вонга, описывающих движение классической заряженной частицы с изоспином во внешнем калибровочном поле [134].

В ***§ 6.1*** рассматриваются магнитные геодезические потоки на произвольных псевдоримановых многообразиях, а также исследуется алгебра их интегралов движения, линейных по импульсным переменным. Показано, что в общем случае эта алгебра представляет собой некоторое центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, образованной векторами Киллинга, сохраняющими 2-форму внешнего поля. Как известно, множество неэквивалентных центральных расширений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ находится во взаимо однозначном соответствии с элементами группы 2-когомологий $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Это обстоятельство позволило предложить оригинальный подход к классификации внешних электромагнитных полей на данном псевдоримановом многообразии, сопоставляя каждому полю отвечающую ему 2-когомологию из $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. В заключение **§ *6.1*** приводится пример когомологической классификации электромагнитных полей на трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

§ *6.2* затрагивает вопрос об интегрируемости односторонне инвариантных магнитных геодезических на группах Ли. Несмотря на то что группы Ли представляют собой частный случай однородных пространств, класс интегрируемых магнитных геодезических потоков на них оказывается весьма широким. В указанном параграфе рассматриваются произвольные замкнутые правоинвариантные 2-формы на группах Ли, ассоциированные с 2-коциклами соответствующих алгебр Ли. Частным случаем предлагаемой нами теории являются магнитные геодезические потоки, связанные с тривиальными 2-коциклами (2-кограницами). До настоящего времени в большинстве работ по данной тематике рассматривались именно такие случаи (см., например, [124–127]), хотя нетривиальные 2-коциклы представляют с точки зрения интегрирования гораздо больший интерес. В частности, показано, что для произвольной алгебры Ли и некоторого ее 2-коцикла можно ввести так называемый когомологический индекс, обобщающий понятие обычного индекса алгебры Ли и позволяющий сформулировать критерий интегрируемости магнитных геодезических потоков в удобной алгебраической форме. С использованием данного критерия показано, что правоинвариантные магнитные геодезические потоки интегрируемы в квадратурах на любой трехмерной группе Ли. В четырехмерном случае возможны как интегрируемые, так и неинтегрируемые случаи; на основе классификации 2-коциклов четырехмерных алгебр Ли, приведенной в Приложении B, явно перечислены все интегрируемые случаи.

Изложенный в **§ *6.2*** метод интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли может быть обобщен на случай однородных пространств; соответствующие результаты изложены в **§ *6.3***. Отдельно исследована проблема *магнитных тождеств*, то есть функциональных соотношений между интегралами движения магнитных геодезических потоков. В частности, доказано, что число функционально независимых магнитных тождеств совпадает с числом обычных (не магнитных) тождеств, то есть равно индексу однородного пространства. Кроме того, введено понятие *магнитного дефекта*, обобщающее определение обычного дефекта однородного пространства и позволяющее сформулировать критерий интегрируемости инвариантных магнитных геодезических потоков на однородных пространствах. В качестве иллюстрации рассмотрен пример интегрирования в квадратурах магнитного геодезического потока на четырехмерном однородном пространстве с нештеккелевой метрикой, допускающей в качестве группы движений пятимерную неразрешимую группу $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$. В заключение параграфа сформулировано важное следствие полученных результатов: на любом четырехмерном однородном пространстве с нетривиальной подгруппой изотропии, снабженном инвариантной метрикой и инвариантной замкнутой 2-формой, магнитный геодезический поток интегрируем в квадратурах.

В **§ *6.4*** рассматриваются уравнения Вонга, описывающие движение классической заряженной частицы с изоспином во внешнем калибровочном поле. Важно заметить, что с точки зрения физических приложений задача точного интегрирования этих уравнений представляет определенный интерес. Действительно, не смотря на то, что движение изоспиновой частицы как правило ограничено малыми масштабами (порядка размера нуклонов), в ряде квантовых эффектов приходится использовать точные решения классических уравнений движения. Например, хорошо известно, что в рамках квазиклассического метода описания квантовых систем используется понятие классической траектории [194]. Отметим, что в настоящее время точные решения уравнений Вонга найдены лишь для сравнительно небольшого класса калибровочных полей (в основном, это поля с калибровочной группой $SU(2)$). В частности, известны примеры решений уравнений Вонга в простейших случаях однородных полей [135], в постоянном хромоэлектромагнитном поле [136], а также в сферически-симметричных монопольных решениях уравнений Янга – Миллса [137].

В первом пункте **§ *6.4*** коротко приводится известный результат Стернберга и Вейнстейна, позволяющий рассматривать уравнения Вонга как гамильтонову систему относительно некоторой пуассоновой структуры [138, 139]. Во втором пункте показано, что алгебра линейных интегралов движения уравнений Вонга является расширением некоторой подалгебры алгебры векторов Киллинга пространства – времени. При этом ядром данного расширения выступает некоторая подалгебра алгебры Ли калибровочной группы. Отметим, что определяющие уравнения для полиномиальных по импульсам интегралов движения уравнений Вонга были получены в работе [140], однако структура возникающей при этом пуассоновой алгебры не исследовалась. В третьем пункте изучается возможность использования алгебры линейных интегралов движения для интегрирования уравнений Вонга путем некоммутативной редукции. Для этого мы применяем известную теорему некоммутативной редукции произвольных гамильтоновых систем [18], и с ее помощью получаем алгебраическое условие интегрируемости уравнения Вонга. В заключение параграфа рассмотрено несколько конкретных примеров, представляющих физический интерес.

В ***седьмой главе*** настоящей диссертационной работы рассматривается проблема построения точных решений релятивистских волновых уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешних электромагнитных полях.

§ 7.1 затрагивает вопрос о киллинговых алгебрах симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле. Доказаны теоремы о том, что эти алгебры изоморфны и являются одномерными центральными расширениями подалгебры векторов Киллинга, сохраняющих 2-форму внешнего поля. Обсуждаются некоторые частные случаи. В качестве примеров найдены киллинговы алгебры симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака на фоне решения Бертотти – Робинсона, а также для плоско-симметрической конфигурации гравитационного и электромагнитного полей.

В ***§ 7.2*** излагается метод построения точных решений уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле на псевдоримановых многообразиях с просто-транзитивными группами изометрий. Подобные многообразия находятся во взаимо однозначном соответствии с элементами группы преобразований, поэтому фактически мы рассматриваем задачу интегрирования релятивистских волновых уравнений на группах Ли. Для решения этой задачи используется техника, представляющая собой обобщение гармонического анализа на группах Ли, изложенного в ***§ 3.3***. В заключение параграфа рассматривается пример интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака на четырехмерной группе Ли $G = E(2) \times \mathbb{R}$. Интересная качественная особенность этого примера состоит в возможности разделения переменных в свободном уравнении Клейна – Гордона, и невозможности сделать это при включении внешнего электромагнитного поля ввиду нарушения необходимых и достаточных условия разделения переменных.

§ 7.3 содержит описание общей схемы построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях. Данная схема основана на использовании некоммутативной алгебры симметрии уравнения для осуществления процедуры его редукции к дифференциальному уравнению с минимально возможным числом независимых переменных. Описанный подход обобщает развитый в работах [31–33] метод интегрирования релятивитских волновых уравнений на случай включения в уравнения внешнего электромагнитного поля. В конце параграфа рассматривается пример интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака на нештеккелевом псевдоримановом многообразии с пятимерной неразрешимой группой движений, оставляющей инвариантной 2-форму электромагнитного поля.

В ***заключении*** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

В ***Приложении А*** приводятся функции Казимира для всех некоммутативных вещественных алгебр Ли размерности меньше шести. Классификации вещественных алгебр Ли порядка 2, 3 и 4 взяты из монографии [81], а классификация всех вещественных пятимерных алгебр Ли дана в работе [141].

В ***Приложении Б*** содержится классификация канонических форм 2-коциклов всех вещественных четырехмерных алгебр Ли. Кроме того, в данном приложении выделены случаи, допускающие интегрируемость правоинвариантных магнитных геодезических потоков на соответствующих группах Ли.

ГЛАВА 1. ТРАНЗИТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ И ИХ КООРДИНАТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

§ 1.1 Предварительные сведения из теории групп и алгебр Ли

Чтобы сделать изложение замкнутым, а также с целью зафиксировать употребляемые нами в работе обозначения, в настоящем параграфе мы приводим некоторые известные факты из теории групп и алгебр Ли следуя, в основном, классическим монографиям [142–147].

Пусть G_e — открытая окрестность единицы n-мерной вещественной группы Ли G, $\psi : G_e \to U$ — гомеоморфизм окрестности G_e на открытое множество U евклидового пространства $\mathbb{R}^n$. Другими словами, пара (G_e, ψ) есть некоторая карта на G, содержащая единицу группы. Каждый элемент группы из области G_e однозначно определяется своими координатами. Эту зависимость будем указывать в явном виде:

$$g_x = \psi^{-1}(x) \in G_e, \quad x = (x^1, \dots, x^n) \in U.$$

При необходимости сужая окрестность G_e, для произведения элементов из этой окрестности мы можем записать:

$$g_x g_y = g_z, \quad z^i = \Phi^i(x, y), \quad g_x, g_y, g_z \in G_e. \tag{1.1}$$

Здесь $\Phi\colon U \times U \to \mathbb{R}^n$ — векторнозначная функция, называемая *функцией композиции* группы G. В силу ассоциативности операции умножения, функция композиции удовлетворяет тождеству

$$\Phi(x, \Phi(y, z)) = \Phi(\Phi(x, y), z), \quad x, y, z \in U. \tag{1.2}$$

Далее без потери общности будем считать, что единице группы соответствуют нулевые значения координат, т. е. $\psi(e) = 0$. В этом случае функция композиции удовлетворяет «начальным условиям»

$$\Phi(x, 0) = \Phi(0, x) = x, \quad x \in U. \tag{1.3}$$

Координаты элемента группы, обратного элементу g_x, будем обозначать через $\kappa(x)$: $g_x^{-1} = g_{\kappa(x)}$. Для функции $\kappa\colon U \to \mathbb{R}^n$ очевидны следующие равенства

$$\Phi(\kappa(x), x) = \Phi(x, \kappa(x)) = 0, \quad \frac{\partial \kappa^i(x)}{\partial x^j}\Big|_{x=0} = -\delta^i_j.$$

Здесь δ^i_j — символ Кронекера, $i, j = 1, \dots, n$. Отметим, что следуя общепринятой терминологии, пару (U, ψ^{-1}) называют *локальной группой Ли*, ассоциированной с группой Ли G.

Касательные векторы $\partial_{x^i} \equiv \partial/\partial x^i$, рассматриваемые в точке $x \in U$, образуют базис касательного пространства $T_x\mathbb{R}^n$ в этой точке. Соответствующие им касательные векторы $(\psi^{-1})_*\,\partial_{x^i} \equiv \partial_{x^i}\,g_x \in T_{g_x}G$ образуют базис касательного пространства к группе G в точке g_x. В частности векторы $e_i \equiv \partial_{x^i}\,g_x|_{x=0}$ порождают базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Коммутационное правило в алгебре $\mathfrak{g}$ задается соотношениями

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k\, e_k,$$

где C_{ij}^k — постоянные величины, называемые *структурными константами* алгебры $\mathfrak{g}$. Структурные константы определяются с помощью функции композиции согласно равенству

$$C_{ij}^k = \left(\frac{\partial^2\Phi^k(x,y)}{\partial x^i\partial y^j} - \frac{\partial^2\Phi^k(x,y)}{\partial y^i\partial x^j}\right)\bigg|_{x=y=0}. \tag{1.4}$$

Отметим, что тождество Якоби в алгебре $\mathfrak{g}$, записанное в терминах структурных констант

$$C_{ij}^l C_{lk}^p + C_{jk}^l C_{li}^p + C_{ki}^l C_{lj}^p = 0,$$

является следствием соотношения (1.2).

Группа G действует сама на себе с помощью правых $R_g\colon G \to G$ и левых $L_g\colon G \to G$ сдвигов:

$$R_g(h) = hg, \quad L_g(h) = gh, \quad g, h \in G. \tag{1.5}$$

Инфинитезимальными генераторами этих действий являются *левоинвариантные* и *правоинвариантные* векторные поля соответственно:

$$\xi_i(g) = (L_g)_*\, e_i, \quad \eta_i(g) = -(R_g)_*\, e_i, \quad g \in G. \tag{1.6}$$

В области действия карты (G_e, ψ) будем иметь

$$\xi_i(x) \equiv \psi_*\,\xi_i(g_x) = \xi_i^j(x)\partial_{x^j}, \quad \eta_i(x) \equiv \psi_*\,\eta_i(g_x) = \eta_i^j(x)\partial_{x^j}, \quad x \in U,$$

где функции $\xi_i^j(x)$ и $\eta_i^j(x)$ определяются равенствами

$$\xi_i^j(x) = \frac{\partial\Phi^j(x,y)}{\partial y^i}\bigg|_{y=0}, \quad \eta_i^j(x) = -\frac{\partial\Phi^j(y,x)}{\partial y^i}\bigg|_{y=0}. \tag{1.7}$$

Матрицы, образованные элементами $\xi_i^j(x)$ и $\eta_i^j(x)$, мы будем обозначать через $\|\xi(x)\|$ и $\|\eta(x)\|$ соответственно.

Лево- и правоинвариантные векторные поля ξ_i и η_i, рассматриваемые как дифференциальные операторы на группе, удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k\,\xi_k, \quad [\eta_i, \eta_j] = C_{ij}^k\,\eta_k, \quad [\xi_i, \eta_j] = 0. \tag{1.8}$$

Отсюда вытекает, что лево- и правоинвариантные векторные поля относительно обычного коммутатора векторных полей образуют алгебры Ли, изоморфные алгебре $\mathfrak{g}$. Лево- и правоинвариантные алгебры векторных полей мы будем обозначать как $\mathfrak{g}_L(G)$ и $\mathfrak{g}_R(G)$ соответственно.

Пусть $\{\omega^i\}$ — набор 1-форм на группе G, дуальных левоинвариантным векторным полям $\xi_i : \langle\omega^i, \xi_j\rangle = \delta^i_j$. Ясно, что 1-формы ω^i являются инвариантными относительно левых сдвигов. Аналогично рассмотрим набор правоинвариантных 1-форм $\{\sigma^i\}$: $\langle\sigma^i, \eta_j\rangle = \delta^i_j$. В координатной карте (G_e, ψ) указанные 1-формы записываются в виде

$$\omega^i(x) \equiv (\psi^{-1})^*\,\omega^i(g_x) = \omega^i_j(x)dx^j, \quad \sigma^i(x) \equiv (\psi^{-1})^*\,\sigma^i(g_x) = \sigma^i_j(x)dx^j.$$

Здесь компоненты $\omega^i_j(x)$ и $\sigma^i_j(x)$ определяются с помощью матриц лево- и правоинвариантных векторных полей:

$$\omega^i_j(x) = (\|\xi(x)\|^{-1})^i_j, \quad \sigma^i_j(x) = (\|\eta(x)\|^{-1})^i_j. \tag{1.9}$$

Нетрудно проверить, что первые два равенства из (1.8), переписанные в терминах инвариантных 1-форм, принимают вид

$$d\omega^k(x) = -\frac{1}{2}\,C^k_{ij}\;\omega^i(x)\wedge\omega^j(x), \quad d\sigma^k(x) = -\frac{1}{2}\,C^k_{ij}\;\sigma^i(x)\wedge\sigma^j(x). \tag{1.10}$$

Данные соотношения известны как *уравнения Маурера – Картана*.

Каждый элемент $g \in G$ порождает внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{Ad}_g\, e_i \equiv (L_g)_*\,(R_{g^{-1}})_*\,e_i = \|\mathrm{Ad}_g\|^j_i e_j. \tag{1.11}$$

Возникающий при этом гомоморфизм $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ называется *присоединенным представлением* группы G. Матрица $\|\mathrm{Ad}_{g_x}\|$ присоединенного представления может быть выражена через компоненты инвариантных полей и 1-форм в виде:

$$\|\mathrm{Ad}_{g_x}\|^i_j = -\sigma^i_k(x)\xi^k_j(x). \tag{1.12}$$

Дифференциал $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ присоединенного представления, вычисленный в единице группы, называется *присоединенным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Компоненты матрицы $\|\mathrm{ad}_{e_i}\|$ выражаются через структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ по формуле:

$$\|\mathrm{ad}_{e_i}\|^k_j = \frac{\partial}{\partial x^i}\,\|\mathrm{Ad}_{g_x}\|^k_j\Big|_{x=0} = C^k_{ij}.$$

Несложно проверить справедливость следующих матричных тождеств:

$$\xi_i(x)\cdot\|\mathrm{Ad}_{g_x}\| = \|\mathrm{Ad}_{g_x}\|\cdot\|\mathrm{ad}_{e_i}\|, \quad \eta_i(x)\cdot\|\mathrm{Ad}_{g_x}\| = -\|\mathrm{ad}_{e_i}\|\cdot\|\mathrm{Ad}_{g_x}\|. \tag{1.13}$$

Используя определения лево- и правоинвариантных векторных полей и 1-форм, можно получить различные определяющие уравнения на функцию композиции $\Phi(x,y)$. Например, условие инвариантности векторных полей $\xi_i(x)$ относительно левых сдвигов приводит к уравнению

$$\frac{\partial \Phi^k(x,y)}{\partial y^i} = \xi^k_j(\Phi(x,y))\omega^j_i(y). \tag{1.14}$$

Аналогичным образом, используя условие правой инвариантности векторных полей $\eta_i(x)$, получаем

$$\frac{\partial \Phi^k(x,y)}{\partial x^i} = \eta^k_j(\Phi(x,y))\sigma^j_i(x). \tag{1.15}$$

Вместе с «начальными условиями» (1.3) системы уравнений (1.14) или (1.15) определяют функцию композиции однозначно.

Отметим, что все приведенные выше соотношения справедливы в произвольных локальных координатах на группе Ли. Рассмотрим теперь специальные классы локальных координат. Пусть линейное пространство алгебры Ли $\mathfrak{g}$ разложено в прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m. \tag{1.16}$$

Определим отображение $\phi\colon \mathfrak{g} \to G$, полагая, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ выполняется условие

$$\phi(X) = \prod_{\alpha=1}^{m} \exp(X_\alpha) = \exp(X_1)\exp(X_2)\ldots\exp(X_m).$$

Здесь $\exp : \mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение, X_α — компонента вектора X, отвечающая слагаемому $\mathfrak{g}_\alpha$ в разложении (1.16). Так как отображение ϕ в точке $0 \in \mathfrak{g}$ является диффеоморфизмом, найдется окрестность U этой точки, диффеоморфно отображаемая в некоторую окрестность G_e единицы группы. Отсюда следует, что пара (G_e, ψ), где $\psi = \phi^{-1}$, образует некоторую карту на G. Данная карта называется *канонической*, а соответствующие ей локальные координаты $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ на группе называются *каноническими координатами* [145].

Наиболее часто используются канонические координаты двух типов [144, 147]. Пусть в разложении (1.16) $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, $\alpha = 2, \ldots, m$. Если $X = x^i e_i$ — разложение вектора $X \in \mathfrak{g}$ по базису $e_1, \ldots, e_n$, то

$$g_x = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) = \exp(x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n).$$

В этом случае канонические координаты называются *каноническими координатами первого рода*. Напротив, в случае, когда все пространства $\mathfrak{g}_\alpha$ одномерны, имеют место *канонические координаты второго рода*:

$$g_x = \prod_{i=1}^{n} \exp(x^i e_i) = \exp(x^1 e_1)\ldots\exp(x^n e_n).$$

Отметим, что выбор типа используемых канонических координат на группе Ли прежде всего диктуется особенностями решаемой задачи.

Одной из классических задач теории групп Ли является задача о построении локального закона умножения в группе по известным структурным константам ее алгебры Ли. Традиционный вариант решения этой задачи согласно известным теоремам Ли осуществляется в два этапа [144]. На первом этапе решаются уравнения Маурера–Картана (1.10) (для определенности можно выбрать первое уравнение), в которых в качестве неизвестных выступают компоненты $\omega_i^j(x)$ левоинвариантных 1-форм. Следует заметить, что очевидное «начальное условие» $\omega_i^j(0) = \delta_i^j$, вообще говоря, не гарантирует единственность решения указанной задачи. Поэтому на данном этапе дополнительно фиксируют какую-либо систему канонических координат на группе. Например, в канонических координатах первого рода справедливо равенство $\omega_j^i(x)x^j = x^i$, используя которое нетрудно выписать решение уравнений (1.10) в явном виде:

$$\|\omega(x)\| = \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}_X}}{\mathrm{ad}_X}, \quad X = x^i e_i. \tag{1.17}$$

На втором этапе производится построение функции композиции $\Phi(x, y)$ с помощью интегрирования системы уравнений (1.14), дополненной условиями (1.3).

Другой возможный способ построения функции композиции группы Ли по структурным константам ее алгебры Ли заключается в использовании явной формулы для элемента $Z = \ln(e^X e^Y)$ [148]:

$$Z = Y + \int\limits_0^1 \theta(e^{t\,\mathrm{ad}_X} e^{\mathrm{ad}_Y}) X dt. \tag{1.18}$$

Здесь $\theta(\tau) = \ln\tau/(\tau - 1)$, $X = X^i e_i$, $Y = Y^i e_i$, причем предполагается, что векторы X и Y принадлежат достаточно малой окрестности нулевого элемента алгебры $\mathfrak{g}$. Компоненты вектора Z, вычисленные согласно (1.18), представляют собой компоненты искомой функции композиции $\Phi(x, y)$ в канонических координатах первого рода. Полезным следствием формулы (1.18) является известный ряд Кэмпбелла–Хаусдорфа–Дынкина, получаемый с помощью разложения функции $\theta(\tau)$ в степенной ряд в окрестности точки $\tau = 1$.

Не смотря на то, что указанные нами способы построения функции композиции показывают принципиальную возможность восстановления локальной группы Ли по закону коммутации в соответствующей алгебре Ли, они не очень удобны на практике. Первый способ, основанный на теоремах Ли, сводится к интегрированию систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, что даже для алгебр Ли малых порядков представляет из себя весьма трудоемкую задачу. Использование формулы (1.18) так же сопряжено с рядом вычислительных трудностей, связанных с вычислением функций от матричных аргументов (детали мы обсудим ниже).

Укажем еще один возможный метод построения функции композиции. Рассмотрим некоторое точное конечномерное представление τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в m-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $G'_e \subset G$ некоторую окрестность единичного элемента в группе G, а через V — окрестность нулевого элемента в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, гомеоморфно отображаемую на G'_e при экспоненциальном отображении. Тогда отображение T, определяемое формулой

$$T(\exp X) = \exp(\tau(X)), \quad X \in V,$$

задает *локально гомоморфное* отображение группы Ли G в матричную группу $GL(m, \mathbb{R})$ [147]. Это означает, что найдется окрестность единицы $G_e \subset G'_e$ такая, что $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G_e$. Заменим в формуле (1.1) элементы группы на их представление: $g \to T(g)$. Тем самым мы получаем матричное равенство из которого, в силу точности представления τ, можно определить все компоненты функции композиции, т.е. выразить $z^i = \Phi^i(x, y)$. Например, в канонических координатах первого и второго рода имеем матричные равенства:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \tau(e_i)\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} y^j \tau(e_j)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} z^k \tau(e_k)\right),$$

$$\prod_{i=1}^{n} \exp\left(x^i \tau(e_i)\right) \prod_{j=1}^{n} \exp\left(y^j \tau(e_j)\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(z^k \tau(e_k)\right).$$

К сожалению, основным недостатком этого метода является отсутствие на сегодняшний день простого алгоритма построения точного представления произвольной алгебры Ли, который мог бы быть легко применим в практическом плане. Тем не менее, в этом направлении ведутся некоторые исследования [149].

В заключение настоящего параграфа приведем некоторые важные факты, касающиеся действий групп Ли на гладких многообразиях.

Пусть $T\colon M \times G \to M$ — (правое) действие группы Ли G на гладком m-мерном многообразии M. Иными словами, всякому элементу $g \in G$ поставлен в соответствие диффеоморфизм $T_g : q \mapsto T_g(q) \equiv qg$, $q \in M$. Пусть V' — открытое множество в M. Для любой фиксированной точки $q_0 \in V'$ существует окрестность $U \subset G$, содержащая единицу группы, и окрестность V точки q_0 в V' такие, что $T(V \times U) \subset V'$. Будем считать, что в U и V определены локальные системы координат $x^1, \ldots, x^n$ и $q^1, \ldots, q^m$ соответственно, причем $e \in U$ имеет нулевые координаты. Тогда действие T, ограниченное на $V \times U$, представляется функциями

$$q'^a = \Psi^a(q^1, \ldots, q^m; x^1, \ldots, x^n) = \Psi^a(q, x), \quad a = 1, \ldots, m,$$

где q'^a — координаты точки $q' = qg$. Функция $\Psi : V \times U \to V'$ называется *функцией действия* группы G на многообразии M.

Из определения правого действия группы G на M вытекают следующие свойства функции $\Psi(x, q)$:

$$\Psi(\Psi(q, x), y) = \Psi(q, \Phi(x, y)), \tag{1.19}$$

$$\Psi(q, 0) = q. \tag{1.20}$$

При этом (1.19) предполагается выполненным для всех $q \in V$, $g_x, g_y \in U$, для которых обе части этого равенства определены.

Обратно, если для некоторого открытого множества $W \subset M \times G$, содержащего $M \times \{e\}$, найдется гладкое отображение $\Psi : W \to M$, удовлетворяющее свойствам (1.19) и (1.20), говорят, что задано *локальное действие* группы G на M.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, действующей на многообразии M, $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис в $\mathfrak{g}$. Каждому базисному вектору e_i мы можем сопоставить векторное поле $\zeta_i \in \mathrm{Vect}(M)$ по следующему правилу:

$$(\zeta_i\, \varphi)(q) = \frac{d}{dt}\, \varphi\, (q \exp(te_i))\Big|_{t=0}, \quad \varphi \in C^\infty(M).$$

В локальных координатах $q^1, \ldots, q^m$, заданных в области $V \subset M$, имеем $\zeta_i(q) = \zeta_i^a(q) \partial_{q^a}$, где

$$\zeta_i^a(q) = \frac{\partial \Psi^a(q, x)}{\partial x^i}\Big|_{x=0}. \tag{1.21}$$

Векторные поля $\zeta_i(q)$ называются *инфинитезимальными генераторами* или *фундаментальными векторными полями* действия группы G на многообразии M. Отметим, что инфинитезимальными генераторами правого действия группы G на себе являются левоинвариантные векторные поля.

Следствием равенства (1.19) являются коммутационные соотношения

$$[\zeta_i, \zeta_j] = C_{ij}^k\, \zeta_k, \tag{1.22}$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые формулой (1.4). Таким образом, линейная оболочка набора векторных полей ζ_i образует подалгебру в алгебре Ли $\mathrm{Vect}(M)$, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$. Далее мы будем обозначать эту подалгебру как $\mathfrak{g}(M)$.

Рассмотрим случай транзитивного действия. Напомним, что действие группы G на многообразии M называется *транзитивным*, если для всякой пары точек $q_1, q_2 \in M$ найдется групповой элемент $g \in G$ такой, что $q_2 = q_1 g$. Многообразие M, на котором задано транзитивное действие некоторой группы Ли, называется *однородным пространством*.

Однородные пространства могут быть описаны в терминах так называемой *групповой модели*. Напомним способ ее построения [146, 150].

Зафиксируем некоторую точку $q_0 \in M$ и рассмотрим замкнутую подгруппу $H \subset G$, образованную групповыми элементами, оставляющими данную точку неподвижной: $H = \{g \in G \,|\, q_0 g = q_0\}$. Подгруппа H называется *подгруппой изотропии* или *группой стационарности* точки q_0. Заметим, что выбор точки q_0 в некотором смысле не существенен, так как группы стационарности различных точек многообразия M сопряжены в G.

Пусть $H \setminus G = \{Hg \,|\, g \in G\}$ — пространство правых смежных классов группы G по подгруппе H. Известно, что $H \setminus G$ снабжается естественной структурой гладкого многообразия, причем эта структура единственна [146]. Основной результат заключается в следующем: имеет место G-эквивариантный диффеоморфизм между точками многообразия M и точками пространства $H \setminus G$. Данный диффеоморфизм имеет вид $q_0 g \mapsto Hg$, $g \in G$.

Указанное соответствие позволяет свести изучение транзитивных действий к изучению пар вида (G, H), где G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа. В свою очередь, локальные транзитивные действия группы G могут быть интерпретированы в терминах алгебр Ли. Действительно, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — ее произвольная подалгебра. Можно построить соответствующие этим алгебрам локальные группы G и H, а затем и область $M \subset \mathbb{R}^m$, $m = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}$, с заданным на ней действием группы G, определив ее как пространство правых смежных классов $H \setminus G$ [144]. При этом подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ алгебры $\mathfrak{g}$, связанные внутренним автоморфизмом, будут приводить к эквивалентным действиям локальной группы G, в силу того, что соответствующие им фактор-пространства $H \setminus G$ и $H' \setminus G$ являются эквивариантно диффеоморфными.

Замечание 1.1. В общем случае действие группы G на пространстве правых смежных классов $H \setminus G$ может быть не эффективным, т.е. может существовать такой $g \in G$, что $qg = q$ для всех $q \in H \setminus G$. Многие авторы обычно ограничиваются рассмотрением только эффективных действий групп преобразований, что не является потерей общности. Действительно, если G действует на $H \setminus G$ не эффективно, мы всегда можем рассмотреть на данном однородном пространстве эффективное действие фактор–группы G/N, где N — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H [150]. Не смотря на сказанное, в нашем исследовании мы не будем ограничиваться только эффективными действиями, а будем считать, что подгруппа H может содержать не тривиальные нормальные подгруппы группы G. На языке алгебр Ли это означает, что подалгебра $\mathfrak{h}$ может содержать ненулевые идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Между левоинвариантными векторными полями группы G и инфинитезимальными генераторами ее правых транзитивных действий имеется естественная связь.

Пусть $M = H \setminus G$ — однородное пространство, $\pi : G \to H \setminus G$ — проекция, сопоставляющая элементу $g \in G$ правый смежный класс $\pi(g) = Hg \in H \setminus G$, $s : G \to M$ — отображение такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$. (Отметим, что отображение s можно выбрать почти всюду гладким на M). Тогда произвольный элемент группы G однозначно записывается в виде

$$g = h\, s(q), \quad q \in M, \ h \in H,$$

и тем самым G отождествляется с $H \times M$. Пусть $q^1, \ldots, q^m$ — локальные координаты в некоторой области $V \subset M$, содержащей точку $q_0 = \pi(e)$, $h^1, \ldots, h^{n-m}$ — локальные координаты в окрестности единицы U группы H. В этом случае в качестве локальных координат $x = (x^1, \ldots, x^n)$ элемента $g = h\, s(q)$ можно выбрать величины:

$$x = (q, y); \quad x^a = q^a, \ a = 1, \ldots, m; \quad x^{m+\alpha} = h^\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, n-m. \tag{1.23}$$

В частности, элемент $s(q) \in s(V)$ будет иметь координаты $x = (q, 0)$.

Замечание 1.2. Далее всюду в данной работе мы будем использовать следующее соглашение: начальные строчные буквы латинского алфавита $a, b, c, \ldots$ будут обозначать координатные индексы на однородном пространстве, а начальные строчные буквы греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ будут использоваться для обозначения координатных индексов подгруппы изотропии. Если же подобное разделение нам будет не нужно, мы будем нумеровать индексы строчными буквами из середины латинского алфавита: $i, j, k, \ldots$.

Действие группы G на однородном пространстве $M = H \setminus G$ сводится к преобразованию представителей смежных классов:

$$s(q)g = h(q, g)s(qg), \quad q \in M, \ g \in G. \tag{1.24}$$

Здесь функция $h : M \times G \to H$ называется *фактором* однородного пространства. Приведем очевидные свойства фактора:

$$h(q, e) = e, \quad q \in M;$$

$$h(q, gg') = h(q, g)h(qg, g'), \quad q \in M, \ g, g' \in G.$$

Отметим также, что фактор зависит от выбора отображения s. Действительно, любые два отображения $s, s' : M \to G$ такие, что $\pi \circ s = \pi \circ s' = \mathrm{id}$, будут связаны соотношением $s'(q) = \phi(q)s(q)$, где ϕ — некоторая функция на M, принимающая значения в подгруппе H. При этом факторы $h(q, g)$ и $h'(q, g)$, отвечающее данным отображениям, будут удовлетворять равенству

$$h'(q, g) = \phi(q)h(q, g)\phi^{-1}(qg). \tag{1.25}$$

Обозначим через $h^\alpha(q,z)$ локальные координаты фактора $h(q,g_z)$, $\alpha=1,\dots,\dim H$. Из равенства (1.24) непосредственно следует, что

$$\Psi^a(q,z)=\Phi^a((q,0),z),\quad a=1,\dots,m. \tag{1.26}$$

$$h^\alpha(q,z)=\Phi^\alpha((q,0),z),\quad \alpha=1,\dots,n-m. \tag{1.27}$$

Данные равенства позволяют найти явный вид функций $\Psi^a(q,z)$ и $h^\alpha(q,z)$, если известен вид функции композиции группы G в «расщепленных» координатах (q^a,h^α).

Используя равенство (1.26), а также формулы (1.7) и (1.21), легко установить связь между левоинвариантными векторными полями ξ_i на группе G, заданными в координатах $x=(q,h)$, и соответствующими генераторами ζ_i действия группы G на однородном пространстве $M=H\setminus G$:

$$\xi_i(q,h)=\xi_i^a(q)\partial_{q^a}+\xi_i^\beta(q,h)\partial_{h^\beta}; \tag{1.28}$$

$$\zeta_i(q)=\xi_i^a(q)\partial_{q^a}. \tag{1.29}$$

Таким образом, в локальных координатах (q,h) векторные поля $\zeta_i(q)$ получаются из левоинвариантных векторных полей $\xi_i(q,h)$ формальной подстановкой $\partial_{h^\beta}\to 0$.

§ 1.2 Реализация алгебр Ли векторными полями

Многие исследователи в области теоретической и математической физики, использующие в своей работе методы теории групп и алгебр Ли, сталкиваются со следующей проблемой: как реализовать данную конечномерную алгебру Ли векторными полями, заданными в некоторой области евклидового пространства? Указанная задача является актуальной, например, в теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [151–153], а также в задачах групповой классификации дифференциальных уравнений в частных производных [79, 80]. Кроме того, задача построения алгебр Ли векторных полей возникает в проблемах классификации псевдоримановых метрик на многообразиях с группами движений [81–84], а также в задачах построения релятивистских волновых уравнений во внешних полях с заданной группой симметрии [85].

Не смотря на то, что проблему реализации алгебр Ли векторными полями рассматривал еще С. Ли, исследования в данном направлении не прекращаются до сих пор. При этом подходы, которые специалисты используют для ее решения, весьма различаются между собой, т.к. их выбор напрямую зависит от характера возможных приложений рассматриваемой задачи. Как следствие, число работ по данной тематике на сегодняшний день довольно велико; отметим те из них, которые, на наш взгляд, содержат наиболее существенные результаты.

Безусловно, что наиболее значимыми в идейном плане являются результаты, полученные самим С. Ли. Например, он перечислил все возможные реализации (конечномерных) алгебр Ли векторными полями на одномерной вещественной или комплексной прямой, а затем получил аналогичный результат для случая комплексной плоскости [154]. По прошествии довольно большого промежутка времени его результаты были дополнены классификацией алгебр Ли векторных полей на вещественной двумерной плоскости [155].

Дальнейшие усилия исследователей были сосредоточены в направлении реализации алгебр Ли фиксированной, как правило, малой размерности. Отметим, в связи с этим, содержательную работу [156], в которой с помощью техники *мегаидеалов* были перечислены реализации всех вещественных маломерных алгебр Ли (до размерности четыре включительно) векторными полями на произвольных конечномерных пространствах. (В этой же статье приведен весьма полный обзор литературы, касающийся предмета обсуждения). Параллельно с этим рядом исследователей были классифицированы неэквивалентные представления для физически интересных алгебр Ли, в частности, для алгебр Ли евклидовой группы $E(3)$ и группы Пуанкаре $P(1,3)$ (см. [157] и цитируемую там литературу). Определенные результаты получены также для некоторых бесконечных серий алгебр и групп Ли. Например, в [158] приведен алгоритм построения вложения произвольной $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры Ли в алгебру Ли полиномиальных векторных полей над полем произвольной характеристики. Отметим также обзорную статью [159], в которой автором рассмотрена проблема реализации транзитивных алгебр Ли формальных векторных полей.

В настоящем параграфе мы, следуя работам [78] и [64], опишем эффективный метод, позволяющий по структурным константам конечномерной алгебры Ли получить ее явную реализацию лево- или правоинвариантными векторными полями на соответствующей (локальной) группе Ли. Как будет показано ниже, данная задача решается исключительно алгебраическими методами, так как фактически сводится только к обращению матриц и вычислению матричных экспонент. Кроме того, описываемый ниже метод естественно обобщается на случай построения генераторов транзитивных действий групп Ли.

Практическое вычисление компонентов инвариантных векторных полей на группах Ли в канонических координатах первого рода в общем случае является трудоемким даже для маломерных групп Ли. Действительно, применение формул (1.17) или (1.18) для решения этой задачи требует вычисления функций от матриц ad_X или $\exp(t\mathrm{ad}_X)\exp(\mathrm{ad}_Y)$, что сводится к задаче приведения матриц к жордановой форме. Матрицы ad_X, $\exp(t\mathrm{ad}_X)\exp(\mathrm{ad}_Y)$ в канонических координатах первого рода содержат n и n^2+1 символьных переменных x^i, y^j, t, что делает указанную задачу далеко не тривиальной. Кроме того, даже если нам удастся вычислить соответствующие жордановы формы, результат получается весьма громоздким и, как следствие, малополезным в практическом плане. В противоположность этому, в канонических координатах второго рода компоненты лево- или правоинвариантных векторных полей имеют относительно простой вид и могут быть элементарно вычислены.

Подействуем дифференциалом левого сдвига $(L_{g_x})_*$ на базисный вектор e_k алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда, используя определение (1.7) для компонент $\xi_i^j(x)$, получим

$$(L_{g_x})_* e_k = (L_{g_x})_* \partial_{y^k} g_y\big|_{y=0} = \partial_{y^k}(g_x g_y)\big|_{y=0} = \partial_{y^k} g_{\Phi(x,y)}\big|_{y=0} = \\ = \left.\frac{\partial \Phi^i(x,y)}{\partial y^k}\right|_{y=0} \partial_{x^i} g_x = \xi_k^i(x)\partial_{x^i} g_x,$$

что эквивалентно равенству

$$\omega_k^i(x) e_i = \left(L_{g_x^{-1}}\right)_* \partial_{x^k} g_x. \tag{1.30}$$

Выберем в качестве локальных координат в группе G канонические координаты второго рода:

$$g_x = g_n(x^n)\dots g_1(x^1); \quad g_i(t) \equiv \exp(te_i). \tag{1.31}$$

Учитывая, что $\partial_t g_k(t)|_{t=0} = e_k$, получаем: $\partial_{x^1} g_x = (L_{g_x})_* e_1$. Для $k > 1$ имеем $\partial_{x^k} g_x = (L_{g_n})_* \dots (L_{g_k})_* (R_{g_1})_* \dots \left(R_{g_{k-1}}\right)_* e_k$. В выбранных нами координатах

$$(L_{g_x^{-1}})_* = (L_{g_1^{-1}})_* (L_{g_2^{-1}})_* \dots (L_{g_n^{-1}})_*.$$

Используя свойство коммутативности правых и левых сдвигов, перепишем формулу (1.30):

$$\omega_k^i(x) e_i = \left[(L_{g_1^{-1}})_* (R_{g_1})_*\right] \left[(L_{g_2^{-1}})_* (R_{g_2})_*\right] \dots \left[(L_{g_{k-1}^{-1}})_* (R_{g_{k-1}})_*\right] e_k.$$

С учетом определения (1.11) последнее равенство можно переписать в виде:

$$\omega_k^i(x) e_i = \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} \mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} \dots \mathrm{Ad}_{g_{k-1}^{-1}} e_k.$$

Таким образом, компоненты левоинвариантных 1-форм в канонических координатах второго рода вычисляются по формулам

$$\omega_1^i(x) = \delta_1^i, \tag{1.32}$$

$$\omega_k^i(x) = \|\exp\left(-x^1 \mathrm{ad}_{e_1}\right) \exp\left(-x^2 \mathrm{ad}_{e_2}\right) \dots \exp\left(-x^{k-1} \mathrm{ad}_{e_{k-1}}\right)\|_k^i, \tag{1.33}$$

где $i = 1, \dots, n$, $k = 2, \dots, n$.

Далее, используя первую из формул (1.9), можно получить компоненты $\xi_i^j(x)$ левоинвариантных векторных полей в канонических координатах второго рода. Применяя после этого равенство (1.12), можно найти в данных координатах компоненты правоинвариантных 1-форм σ^i, а затем и компоненты правоинвариантных векторных полей η_i.

Из (1.32) и (1.33) следует, что левоинвариантные 1-формы в координатах второго рода имеют следующую структуру

$$\omega^i(x) = \delta^i_1\, dx^1 + \omega^i_2(x^1)\, dx^2 + \omega^i_3(x^1, x^2)\, dx^3 + \ldots + \omega^i_n(x^1, \ldots, x^{n-1})\, dx^n.$$

Очевидно, что $\xi_1 = \partial_{x^1}$ (и, если $[e_1, e_2] = 0$, то $\xi_2 = \partial_{x^2}$ и т. д.); все функции ξ^j_i не зависят от x^n (а при условии $[e_n, e_{n-1}] = 0$ и от x^{n-1} и т. д.).

Замечание 1.3. Описанный метод тривиальным образом обобщается на произвольную систему координат второго рода. Например, можно выбрать произвольный порядок следования экспонент в формуле (1.31): $g_x = g_{s(n)}(x^{s(n)})\ \ldots\ g_{s(1)}(x^{s(1)})$ (здесь $s \in S_n$ — некоторая перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$). В этом случае левоинвариантное поле $\xi_{s(1)}$ примет диагональный вид $\xi_{s(1)} = \partial_{x^{s(1)}}$. Таким образом, совершая замену базиса в алгебре Ли можно диагонализовать левоинвариантное поле вдоль любого выбранного направления.

Канонические координаты второго рода особенно удобны для координатной реализации генераторов действия группы на однородном пространстве. Действительно, пусть M — однородное пространство группы G, эквивариантное пространству правых смежных классов $H \setminus G$. Здесь H — некоторая замкнутая подгруппа группы G. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H с базисом $\{e_\beta\}$, $\mathfrak{m} = \{e_a\}$ — дополнительное к $\mathfrak{h}$ линейное подпространство в пространстве $\mathfrak{g}$. Выберем в группе G канонические координаты второго рода

$$g = \prod_{\beta=1}^{\dim \mathfrak{h}} \exp\left(h^\beta e_\beta\right) \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp\left(q^a e_a\right). \tag{1.34}$$

Тогда левоинвариантные векторные поля и генераторы группы преобразований в этих координатах будут иметь вид (1.28) и (1.29) соответственно.

Замечание 1.4. Исследователь, решающий задачу реализации алгебры Ли векторными полями, может руководствоваться лишь коммутационными соотношениями (это возможно в случае маломерных алгебр). Например, положить $\zeta_1 = \partial_{q^1}$, а также выбрать диагональный вид для всех полей с ним коммутирующих. Далее включить в уже построенную систему векторных полей поле с неизвестными коэффициентами и из коммутационных соотношений получить переопределенную систему дифференциальных уравнений на неизвестные коэффициенты. Проинтегрировав эту систему и действуя далее подобным образом, решить поставленную перед собой задачу. Можно показать, что полученные такой процедурой векторные поля будут совпадать с векторными полями, построенными в канонических координатах второго рода (с точностью до очевидных и тривиальных координатных преобразований). Иначе говоря, «наиболее простая» реализация алгебры Ли векторными полями есть реализация в канонических координатах второго рода, и в этом смысле эти координаты являются привилегированными.

Пример 1.1. Пусть $Sp(2,\mathbb{R})$ — симплектическая группа двумерного вещественного пространства, $G = St(1,\mathbb{R})$ — ее подгруппа, сохраняющая ненулевой вектор в $\mathbb{R}^2$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{st}(1,\mathbb{R})$ этой группы является шестимерной неразрешимой алгеброй Ли с одномерным центром. Ненулевые коммутационные соотношения этой алгебры могут быть записаны в виде

$$[e_1, e_2] = e_6, \quad [e_1, e_4] = -e_1, \quad [e_1, e_5] = e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$

$$[e_3, e_4] = -2e_3, \quad [e_3, e_5] = e_4, \quad [e_4, e_5] = -2e_5.$$

Данная алгебра Ли представляет собой полупрямое произведение нильпотентной трехмерной алгебры $\mathfrak{n}_3 = \{e_1, e_2, e_6\}$ и простой трехмерной алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \simeq \{e_3, e_4, e_5\}$.

В окрестности единицы группы $G = St(1,\mathbb{R})$ введем канонические координаты второго рода: $g_x = \exp(x_6\, e_6) \dots \exp(x_1\, e_1)$. Вычисляя согласно формуле (1.33) матричные экспоненты $\exp(-x_i \operatorname{ad}_{e_i})$, получаем следующее координатное представление базисных левоинвариантных 1-форм:

$$\omega^1 = dx_1 - x_2\, dx_3 + (x_1 - 2x_2x_3)\, dx_4 + x_3\, e^{2x_4}(x_2x_3 - x_1)\, dx_5,$$

$$\omega^2 = dx_2 - x_2\, dx_4 + e^{2x_4}(x_2x_3 - x_1)\, dx_5, \quad \omega^3 = dx_3 + 2x_3\, dx_4 - x_3^2\, e^{2x_4}\, dx_5, \quad \omega^4 = dx_4 - x_3 e^{2x_4}\, dx_5,$$

$$\omega^5 = e^{2x_4}\, dx_5, \quad \omega^6 = dx_6 - x_1 dx_2 - \frac{1}{2}\, x_2^2\, dx_3 + x_2(x_1 - x_2x_3)\, dx_4 + \frac{1}{2}\, e^{2x_4}(x_1 - x_2x_3)^2\, dx_5.$$

Перемножив в заданном порядке (в данном случае, по убыванию номеров) полученные ранее матричные экспоненты $\exp(-x_i \operatorname{ad}_{e_i})$, вычислим матрицу $\operatorname{Ad}_{g_x^{-1}}$, а затем обратную к ней матрицу Ad_{g_x} (мы не приводим здесь явный вид этих матриц ввиду их громоздкости). Согласно равенству (1.12) коэффициенты правоинвариантных базисных 1-форм находятся по формуле $\|\sigma(x)\| = -\operatorname{Ad}_{g_x} \cdot \|\omega(x)\|$, а матрицы коэффициентов инвариантных векторных полей вычисляются путем обращений соответствующих матриц 1-форм $\|\sigma(x)\|$, $\|\omega(x)\|$. Приведем окончательный координатный вид лево- и правоинвариантных векторных полей, полученный описанным способом:

$$\xi_1 = \partial_{x_1}, \quad \xi_2 = \partial_{x_2} + x_1\partial_{x_6}, \quad \xi_3 = x_2\partial_{x_1} + \partial_{x_3} + \frac{1}{2}\, x_2^2\, \partial_{x_6}, \tag{1.35}$$

$$\xi_4 = -x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} - 2x_3\partial_{x_3} + \partial_{x_4}, \quad \xi_5 = x_1\partial_{x_2} - x_3^2\partial_{x_3} + x_3\partial_{x_4} + e^{-2x_4}\partial_{x_5} + \frac{1}{2}\, x_1^2\, \partial_{x_6}, \tag{1.36}$$

$$\xi_6 = \partial_{x_6}; \tag{1.37}$$

$$\eta_1 = -(e^{-x_4} + x_3x_5e^{x_4})\partial_{x_1} - x_5e^{x_4}\partial_{x_2} - x_2(e^{-x_4} + x_3x_5e^{x_4})\partial_{x_6},$$

$$\eta_2 = -e^{x_4}(x_3\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + x_2x_3\partial_{x_6}), \quad \eta_3 = -e^{-2x_4}\partial_{x_3} - x_5\partial_{x_4} + x_5^2\partial_{x_5}, \quad \eta_4 = -\partial_{x_4} + 2x_5\partial_{x_5},$$

$$\eta_5 = -\partial_{x_5}, \quad \eta_6 = -\partial_{x_6}.$$

Пусть H — связная подгруппа в группе G, отвечающая подалгебре $\mathfrak{h} = \{e_4, e_5\}$. Рассмотрим четырехмерное однородное пространство $M = H \setminus G$. Так как базисный вектор e_6 порождает центр алгебры $\mathfrak{g}$, элемент $g_6(x_6)$ перестановочен с любыми элементами группы: $g_6(x_6)g_5(x_5)\ldots g_1(x_1) = g_5(x_5)\ldots g_1(x_1)g_6(x_6)$. После формальной замены $x_1 \to q_1$, $x_2 \to q_2$, $x_3 \to q_3$, $x_4 \to h_1$, $x_5 \to h_2$, $x_6 \to q_4$, для группового элемента g_x в выбранных канонических координатах второго рода имеет место разложение (1.34). Таким образом, инфинитезимальные генераторы ζ_i действия группы G на однородном пространстве M получаются из левоинвариантных полей (1.35) – (1.37) с помощью подстановки $\partial_{x_1} \to \partial_{q_1}$, $\partial_{x_2} \to \partial_{q_2}$, $\partial_{x_3} \to \partial_{q_3}$, $\partial_{x_4} \to 0$, $\partial_{x_5} \to 0$ и $\partial_{x_6} \to \partial_{q_4}$:

$$\zeta_1 = \partial_{q_1}, \quad \zeta_2 = \partial_{q_2} + q_1\partial_{q_4}, \quad \zeta_3 = q_2\partial_{q_1} + \partial_{q_3} + \frac{1}{2}\, q_2^2\, \partial_{q_4}, \quad \zeta_4 = -q_1\partial_{q_1} + q_2\partial_{q_2} - 2q_3\partial_{q_3},$$

$$\zeta_5 = q_1\partial_{q_2} - q_3^2\, \partial_{q_3} + \frac{1}{2}\, q_1^2\, \partial_{q_4}, \quad \zeta_6 = \partial_{q_4}.$$

Часто в приложениях требуется реализовать векторными полями алгебру Ли, структурные константы которой зависят от произвольных параметров. Кроме того, подалгебра изотропии также может содержать произвольные параметры. Описанный метод не доставляет трудностей и в этом случае. Чтобы проиллюстрировать данную ситуацию, приведем простейший пример.

Пример 1.2. Группа Пуанкаре $P(1,3)$ определяется как группа движений псевдоевклидового пространства $\mathbb{R}^{1,3}$. Генераторы действия $P(1,3)$ на $\mathbb{R}^{1,3}$

$$P_i = \partial_{x^i}, \quad J_{ij} = x_i\partial_{x^j} - x_j\partial_{x^i}, \quad i,j = 0,1,2,3,$$

задают представление алгебры Ли $\mathfrak{p}(1,3)$ группы Пуанкаре:

$$[P_i, P_j] = 0, \quad [P_i, J_{jk}] = g_{ik}P_j - g_{ij}P_k, \quad [J_{ij}, J_{kl}] = g_{ik}J_{jl} + g_{jl}J_{ik} - g_{jk}J_{il} - g_{il}J_{jk}.$$

Здесь $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ и $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

В монографии [160] приведены всевозможные подалгебры алгебры $\mathfrak{p}(1,3)$ с точностью до сопряжений. Рассмотрим четырехмерную подалгебру $\mathfrak{g}$ из указанной классификации, порождаемую генераторами P_1, P_2, $J_{12} + \omega J_{03}$, $P_0 + P_3$, $\omega > 0$. Базисные элементы этой алгебры образуют ненулевые коммутационные соотношения

$$[e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1, \quad [e_3, e_4] = -\omega e_4,$$

где $e_1 = P_1,\ e_2 = P_2,\ e_3 = J_{12} + \omega J_{03},\ e_4 = P_0 + P_3$.

Пусть (h, q_1, q_2, q_3) — канонические координаты второго рода, в которых произвольный элемент из окрестности единицы группы Ли, ассоциированной с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, представляется в виде

$$g_x = e^{h(e_3+e_4/\rho)} e^{q_3 e_3} e^{q_2 e_2} e^{q_1 e_1}, \quad \rho > 0.$$

Согласно (1.33) найдем матрицу коэффициентов левоинвариантных форм ω^i_j. Далее, используя формулы (1.9) и (1.12), выпишем право- и левоинвариантные векторные поля в выбранных координатах:

$$\xi_1 = \partial_{q_1},\ \xi_2 = \partial_{q_2},\ \xi_3 = -q_2\,\partial_{q_1} + q_1\,\partial_{q_2} + \partial_{q_3},\ \xi_4 = \rho e^{-\omega q_3}(\partial_h - \partial_{q_3}),$$
$$\eta_1 = -\cos(q_3+h)\partial_{q_1} - \sin(q_3+h)\partial_{q_2},\ \eta_2 = \sin(q_3+h)\partial_{q_1} - \cos(q_3+h)\partial_{q_2},$$
$$\eta_3 = (e^{\omega h} - 1)\partial_h - e^{\omega h}\partial_{q_3},\ \eta_4 = \rho e^{\omega h}(\partial_{q_3} - \partial_h).$$

Приведем также вид инфинитезимальных генераторов действия этой группы преобразований, действующей на однородном пространстве с подалгеброй изотропии $\mathfrak{h} = \{e_3 + e_4/\rho\}$. Как уже говорилось выше, для этого достаточно ограничить левоинвариантные векторные поля на пространство функций, не зависящих от переменной h, т. е. в выражениях для векторных полей ξ_i считать, что $\partial_h = 0$:

$$\zeta_1 = \partial_{q_1},\ \zeta_2 = \partial_{q_2},\ \zeta_3 = -q_2\,\partial_{q_1} + q_1\,\partial_{q_2} + \partial_{q_3},\ \zeta_4 = -\rho^{-1} e^{-\omega q_3}\partial_{q_3}.$$

Рассмотренные примеры демонстрируют эффективность изложенного метода построения лево- и правоинвариантных векторных полей, по крайней мере, для алгебр Ли небольших размерностей. В частности, отметим здесь большое практическое значение данного метода для разного рода классификационных задач, связанных с построением неэквивалентных реализаций алгебр Ли. В качестве примера укажем работу [161], в которой с помощью описанного алгоритма были найдены новые реализации алгебры Пуанкаре $P(1,3)$, а также работу [162], где были найдены все неэквивалентные реализации маломерных алгебр Галилея.

§ 1.3 Функция композиции групп Ли в канонических координатах

Ранее мы уже указывали на возможность построения функции композиции группы Ли с помощью некоторого заданного точного представления соответствующей алгебры Ли. К сожалению, хорошо известная теорема Адо утверждает лишь существование точного представления для всякой конечномерной алгебры Ли, но при этом не имеет конструктивного характера [142–144]. Цель этого параграфа — показать, что в канонических координатах функции композиции группы Ли могут быть построены в квадратурах.

1.3.1 Построение функции композиции в канонических координатах второго рода

В нашем распоряжении всегда имеется одно специальное представление алгебры $\mathfrak{g}$ — ее присоединенное представление. Конечно, в общем случае данное представление не является точным; ядро $\mathfrak{z} = \ker \mathrm{ad}$ присоединенного представления совпадает с центром алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\{e_\mu\}$ — базис в центре $\mathfrak{z}$, $\{e_a\}$ — базис подпространства $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, дополнительного к подпространству $\mathfrak{z}$. Зафиксируем какую-нибудь каноническую систему координат на группе G, связанную с базисом $\{e_a\} \cup \{e_\mu\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Из матричного равенства

$$\mathrm{Ad}_{g_x}\mathrm{Ad}_{g_y} = \mathrm{Ad}_{g_z}, \quad z = \Phi(x,y), \tag{1.38}$$

мы можем найти функции $\Phi^a(x,y)$, $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{m}$, являющиеся компонентами функции композиции фактор-группы $\bar{G} = G/\exp(\mathfrak{z})$. Следовательно, задача нахождения функции композиции $\Phi(x,y) = (\Phi^a(x,y), \Phi^\mu(x,y))$ группы G сводится к решению уравнений (1.38) на неизвестные переменные $z^a = \Phi^a(x,y)$ и, руководствуясь какими-то другими соображениями, вычислению функций $\Phi^\mu(x,y)$, относящихся к центру. В этом параграфе мы покажем, что функции $\Phi^\mu(x,y)$ могут быть найдены в квадратурах.

В силу того, что элементы из $\exp(\mathfrak{z})$ перестановочны с любыми элементами группы G, в координатах второго рода получаем:

$$\begin{aligned} g_x g_y = \left(\prod_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{z}} \exp(x^\mu e_\mu) \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(x^a e_a)\right)\left(\prod_{\nu=1}^{\dim \mathfrak{z}} \exp(y^\nu e_\nu) \prod_{b=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(y^b e_b)\right) = \\ = \prod_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{z}} \exp((x^\mu + y^\mu)e_\mu)\left(\prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(x^a e_a) \prod_{b=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(y^b e_b)\right). \end{aligned} \tag{1.39}$$

Подпространство $\mathfrak{m}$ в общем случае не является подалгеброй, поэтому выражение в правой части формулы (1.39), заключенное в скобках, можно представить как

$$\prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(x^a e_a) \prod_{b=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(y^b e_b) = \prod_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{z}} \exp(\Theta^\mu(x,y)e_\mu) \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(\bar{\Phi}^a(x,y)e_a). \tag{1.40}$$

Последнее равенство следует рассматривать как определение функций $\Theta^\mu(x,y)$ и $\bar{\Phi}^a(x,y)$. Важно отметить, что эти функции являются функциями только от координат x^a и y^a, отвечающих подпространству $\mathfrak{m}$.

Далее, подставляя (1.40) в (1.39), получаем

$$g_x g_y = \prod_{\mu=1}^{\dim \mathfrak{z}} \exp\left((x^\mu + y^\mu + \Theta^\mu(x,y))e_\mu\right) \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(\bar{\Phi}^a(x,y)e_a). \tag{1.41}$$

Таким образом, функция композиции $\Phi(x,y)$ в системе канонических координатах второго рода, отвечающей разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$, будет иметь вид:

$$\Phi^\mu(x,y) = x^\mu + y^\mu + \Theta^\mu(x,y), \quad \Phi^a(x,y) = \bar{\Phi}^a(x,y). \tag{1.42}$$

Замечание 1.5. Подпространство $\mathfrak{m}$ в разложении $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{m}$ может быть выбрано различными способами. Данная неоднозначность состоит в возможности произвести следующую замену базиса в алгебре Ли $\mathfrak{g}$: $e_\mu \to e_\mu$, $e_a \to e_a + \lambda_a^\mu e_\mu$, где λ_a^μ — произвольная матрица. Опуская несложное доказательство отметим, что при указанной замене базиса функции Θ^μ и $\bar{\Phi}^a$, определенные выражением (1.40), преобразуются следующим образом:

$$\Theta^\mu(x,y) \to \Theta^\mu(x,y) + (x^a + y^a - \bar{\Phi}^a(x,y))\lambda_a^\mu, \quad \bar{\Phi}^a(x,y) \to \bar{\Phi}^a(x,y).$$

Утверждение 1.1. *Функция композиции $\Phi(x,y)$ в канонических координатах второго рода может быть вычислена в квадратурах.*

Доказательство. Мы докажем данное утверждение, предложив алгоритм нахождения функций $\bar{\Phi}^a(x,y)$ и $\Theta^\mu(x,y)$, входящих в выражение (1.42) для функции композиции группы G.

Ввиду того, что $\mathrm{ad}_{e_\mu} = 0$, матрица присоединенного представления Ad_{g_x} в координатах второго рода будет зависеть только от координат x^a:

$$\mathrm{Ad}_{g_x} = \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(x^a \mathrm{ad}_{e_a}). \tag{1.43}$$

Отсюда, с учетом формул (1.38) и (1.42), получаем:

$$\prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(x^a \mathrm{ad}_{e_a}) \prod_{b=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(y^b \mathrm{ad}_{e_b}) = \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{m}} \exp(\bar{\Phi}^a(x,y)\, \mathrm{ad}_{e_a}).$$

Примем координаты x^a в качестве координат в фактор-группе $G/\exp(\mathfrak{z})$. Матрицы (1.43), являясь матрицами присоединенного представления группы G, в то же время реализуют *точное* представление фактор-группы $G/\exp(\mathfrak{z})$, действующее в линейном пространстве $\mathfrak{g}$. В силу этого, матричное соотношение (1.38) позволяет однозначно определить функции $\bar{\Phi}^a(x,y)$, представляющие собой функции композиции фактор-группы $G/\exp(\mathfrak{z})$. Таким образом, задача о построении функции композиции сводится к нахождению недостающих функций $\Theta^\mu(x,y)$.

Пусть $\xi_i(x) = \xi_i^j(x)\partial_{x^j}$ — левоинвариантные векторные поля на группе G, записанные в канонических координатах второго рода, $\omega^i(x) = \omega_j^i(x)dx^j$ — дуальные им 1-формы. Как было показано в предыдущем параграфе, построение векторных полей ξ_i и 1-форм ω^i представляет собой алгебраическую задачу, сводящуюся к вычислению матричных экспонент. Отметим, что соответствующие компоненты $\xi_i^j(x)$ и $\omega_j^i(x)$ являются функциями только координат x^a, т.е. не зависят от координат центра $\exp(\mathfrak{z})$ (см. разложение (1.42) для функции композиции).

В уравнении (1.14) положим $i = a$, $k = \mu$. Тогда с учетом (1.42) получаем систему дифференциальных уравнений на неизвестные функции $\Theta^\mu(x,y)$, в которой координаты x^a

являются параметрами:

$$\frac{\partial \Theta^\mu(x,y)}{\partial y^a} = \xi^\mu_j(\bar\Phi(x,y))\omega^j_a(y).$$

В силу того, что 1-формы $\theta^\mu(y;x) = \xi^\mu_j(\bar\Phi(x,y))\omega^j_a(y)dy^a$ замкнуты, данная система уравнений интегрируема. Ее решение, удовлетворяющее условию $\Theta^\mu(x,0)=0$, дается следующим интегралом:

$$\Theta^\mu(x,y) = \int\limits_0^y \xi^\mu_j(\bar\Phi(x,z))\,\omega^j_a(z)dz^a. \tag{1.44}$$

Утверждение доказано. $\square$

Полученный результат может быть использован для вычисления функций композиции групп Ли с использованием одних лишь квадратур по известным левоинвариантным векторным полям. Не составляет никакого труда обобщить предложенный метод и для вычисления функции $\Psi(q,x)$ действия группы G на однородном пространстве $M = H\setminus G$. Для этого, используя канонические координаты второго рода (1.34), достаточно применить формулу (1.26).

Пример 1.3. В качестве примера построим функцию композиции односвязной группы G, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой была рассмотрена в примере 1.1. Из коммутационных соотношений данной алгебры следует, что ее центр одномерен: $\mathfrak{z} = \{e_6\}$. В качестве линейного дополнения к $\mathfrak{z}$ выберем подпространство $\mathfrak{m} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Вычислим матричные экспоненты $\exp(x_i \operatorname{ad}_{e_i})$ и подставим их в матричное равенство (1.38). Тем самым мы получим систему алгебраических уравнений на неизвестные функции $\bar\Phi^a(x,y)$, решая которую находим:

$$\Phi_1(x,y) = x_1e^{-y_4} + y_1 + y_3e^{y_4}(x_2+x_1y_5), \quad \Phi_2(x,y) = e^{y_4}(x_2+x_1y_5)+y_2, \tag{1.45}$$

$$\Phi_3(x,y) = \frac{e^{-2y_4}x_3 + y_3(1+x_3y_5)}{1+x_3y_5}, \quad \Phi_4(x,y) = x_4+y_4+\ln(1+x_3y_5), \tag{1.46}$$

$$\Phi_5(x,y) = \frac{x_5 + e^{-2x_4}y_5 + x_3x_5y_5}{1+x_3y_5}. \tag{1.47}$$

Используя найденные функции, а также полученные в примере 1.1 левоинвариантные векторные поля и 1-формы, после интегрирования по формуле (1.44) получаем:

$$\Phi_6(x,y) = x_6 + y_6 + \frac{1}{2}\,x_1^2y_5 + y_2y_3e^{y_4}(x_1y_5+x_2) + x_1y_2e^{-y_4} + \frac{1}{2}\,y_3e^{2y_4}(x_1y_5+x_2)^2.$$

Тем самым мы нашли локальный закон композиции на группе G в канонических координатах второго рода.

Выпишем теперь компоненты функции $\Psi(q,z)$, задающей действие группы G на однородном пространстве $H\setminus G$, где H — связная подгруппа группы G с алгеброй $\mathfrak{h}=\{e_4,e_5\}$. Согласно (1.26) в локальных координатах $q_1=x_1,\ q_2=x_2,\ q_3=x_3,\ q_4=x_6$ будем иметь:

$$\Psi_1(q,z)=q_1e^{-z_4}+z_1+z_3e^{z_4}(q_2+q_1z_5),\quad \Psi_2(q,z)=e^{z_4}(q_2+q_1z_5)+z_2,$$

$$\Psi_3(q,z)=\frac{e^{-2z_4}q_3+z_3(1+q_3z_5)}{1+q_3z_5},$$

$$\Psi_4(q,z)=q_4+z_6+\frac{1}{2}\,q_1^2z_5+z_2z_3e^{z_4}(q_1z_5+q_2)+q_1z_2e^{-z_4}+\frac{1}{2}\,z_3e^{2z_4}(q_1z_5+q_2)^2.$$

1.3.2 О переходе к каноническим координатам первого рода

Не смотря на то, что изложенный нами метод существенно использует канонические координаты второго рода, результат утверждения 1.1 остается верным для любой канонической системы координат. Чтобы показать это, предварительно отметим привилегированный характер канонических координат первого рода. Действительно, с помощью функции композиции, записанной в координатах первого рода, можно получить явное выражение для функции композиции в любой канонической системе координат.

Пусть $g_y^{(\mathrm{I})}$ — элемент группы G с координатами первого рода y^i, $g_x^{(\mathrm{II})}$ — этот же элемент, представленный в координатах x^i второго рода. Связь между координатами первого и второго рода $y^i=Y^i(x)$, $x^i=X^i(y)$, $X=Y^{-1}$, следует из равенства

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n}y^ie_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\exp\left(x^ie_i\right). \tag{1.48}$$

Перемножая экспоненты получаем

$$Y^i(x)=\Phi^i(X_1,\Phi(X_2,\ldots)\ldots),$$

где $X_1=(x^1,0,\ldots,),\ X_2=(0,x^2,0,\ldots),\ \ldots,\ X_n=(0,\ldots,0,x^n)$. Пусть $\Phi^{(\mathrm{I})}$ — функция композиции в канонических координатах первого рода. Тогда эта же функция в координатах второго рода

$$\Phi^{(\mathrm{II})}(x,\tilde{x})=X\left(\Phi^{(\mathrm{I})}(Y(x),Y(\tilde{x}))\right).$$

Нашей ближайшей целью является получение связи между координатами первого и второго рода, при условии, что нам неизвестна функция композиции ни в одной из указанных координатных систем.

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу

$$\exp\left(tY\right)=g_{y_t}^{(\mathrm{I})}=g_{x_t}^{(\mathrm{II})},\quad Y=\sum_{i=1}^{n}y^ie_i.$$

В координатах первого рода уравнение однопараметрической подгруппы имеет достаточно простой вид: $y^i_t = ty^i$. Пусть $x_t = X(y_t) = X(ty) = \alpha(t)$ — уравнение этой же кривой в координатах второго рода. Поскольку единице группы соответствуют нулевые значения координат, то

$$x_t|_{t=0} = \alpha(0) = 0. \tag{1.49}$$

По определению x и y — координаты одного и того же группового элемента, что эквивалентно условию

$$x_t|_{t=1} = \alpha(1) = x. \tag{1.50}$$

Известно, что любая однопараметрическая подгруппа, рассматриваемая как кривая на группе, является интегральной траекторией некоторого левоинвариантного и, одновременно, некоторого правоинвариантного векторного поля. Построим лево- и правоивариантное векторное поле вдоль заданного направления $Y = y^i e_i \in \mathfrak{g}$ в единице группы: $\xi(x) = y^i \xi_i(x)$, $\eta(x) = -y^i \eta_i(x)$. Так как траектория векторного поля однозначно определяется начальной точкой и направлением, то уравнение однопараметрической подгруппы с учетом начального условия (1.49) может быть найдена как решение одной из двух систем уравнений

$$\frac{dx_t}{dt} = \xi(x_t), \tag{1.51}$$
$$\frac{dx_t}{dt} = \eta(x_t). \tag{1.52}$$

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.51) и (1.52) зависит параметрическим образом от переменных y^i: $x_t = \alpha(t, y) = \alpha(1, ty)$. С учетом условия (1.50), получаем искомое соотношение между координатами первого и второго рода: $x = X(y) = \alpha(1, y)$.

Вычитая из левой и правой частей равенства (1.51) соответствующую левую и правую части равенства (1.52), получим интегралы движения:

$$y^i \left(\xi^k_i(x_t) + \eta^k_i(x_t)\right) = 0.$$

Последнее равенство с помощью формулы (1.12) переписывается в виде

$$\mathrm{Ad}_{g^{(\mathrm{II})}_{x_t}} Y = Y.$$

Указанные интегралы движения облегчают интегрирование системы (1.51) или (1.52), но не позволяют получить все функции $\alpha^i(t, y)$. Покажем, что эта задача решается в квадратурах, т.е. не требует интегрирования дифференциальных уравнений.

Утверждение 1.2. *Функции $x = X(y)$, связывающие канонические координаты первого и второго рода, находятся в квадратурах.*

Доказательство. Совершим в формуле (1.48) замену базисных элементов алгебры Ли соответствующими матрицами присоединенного представления $e_i \to \mathrm{ad}_{e_i}$ и получим, таким образом, матричное равенство

$$\mathrm{Ad}_{g_y^{(\mathrm{I})}} = \mathrm{Ad}_{g_x^{(\mathrm{II})}}. \tag{1.53}$$

Пусть $\mathfrak{z}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$, являющийся ядром присоединенного представления, (y^μ), (x^μ) — координаты первого и второго рода подгруппы $\exp(\mathfrak{z})$, (y^a), (x^a) — координаты в фактор–группе $G/\exp(\mathfrak{z})$. Так как для любого элемента центра $Z \in \mathfrak{z}$ матрицы ad_Z — нулевые, то координаты y^μ, x^μ в формуле (1.53) не участвуют. Уравнение (1.53) дает связь $x^a = X^a(y)$ координат на фактор–группе $G/\exp(\mathfrak{z})$. Очевидно, что функции $X^a(y)$ являются компонентами искомой n–компонентной функции $X(y)$. Таким образом, если алгебра Ли не имеет центра, то матричное равенство (1.53) дает решение задачи. При наличии центра остается определить недостающие компоненты $X^\mu(y)$.

Легко показать, что в любых канонических координатах все компоненты инвариантных векторных полей и форм не зависят от координат x^μ на центре. Будем считать, что из формулы (1.53) мы получили функции $X^a(y)$ и вычислили в координатах второго рода компоненты левоинвариантных векторных полей. Последнее, как показано в предыдущем параграфе, сводится к вычислению матричных экспонент. Тогда подсистема уравнений системы (1.51), соответствующая центру, элементарно интегрируется:

$$x_t^\mu = X^\mu(ty) = \int\limits_0^t \xi^\mu(X(ty))\,dt = \int\limits_0^t y^i \xi_i^\mu(X(ty))\,dt.$$

($\xi_i^\mu(X)$ — не зависят от переменных X^μ). Учитывая условие (1.50), получаем искомую формулу

$$x^\mu = X^\mu(y) = \int\limits_0^1 y^i \xi_i^\mu(X(ty))\,dt. \tag{1.54}$$

□

Пример 1.4. Проиллюстрируем данное утверждение на примере шестимерной алгебры Ли, рассмотренной нами выше в примерах 1.1 и 1.3. Как уже говорилось, указанная алгебра имеет нетривиальный центр $\mathfrak{z} = \{e_6\}$, поэтому матричное равенство (1.53) дает связь между координатами первого и второго рода на фактор–группе $G/\exp(\mathfrak{z})$:

$$x_1 = J^{-1} y_1 \operatorname{sh} J + 2J^{-2}(y_2 y_3 - y_1 y_4) \operatorname{sh}^2 \frac{J}{2}, \quad x_2 = J^{-1} y_2 \operatorname{sh} J + 2J^{-2}(y_2 y_3 + y_1 y_5) \operatorname{sh}^2 \frac{J}{2},$$

$$x_3 = y_3 \left(\operatorname{ch} J + J^{-1} y_4 \operatorname{sh} J\right)^{-2} \left(\frac{1}{2} J^{-1} \operatorname{sh}(2J) + J^{-2} y_4 \operatorname{sh}^2 J\right),$$

$$x_4 = \ln\left(\operatorname{ch} J + J^{-1} y_4 \operatorname{sh} J\right), \quad x_5 = y_5 \operatorname{sh} J \left(J \operatorname{ch} J + y_4 \operatorname{sh} J\right)^{-1},$$

где $J = \sqrt{y_4^2 + y_3 y_5}$.

Используя полученные ранее выражения для левоинвариантных полей (1.35) – (1.37), выпишем подынтегральную функцию в формуле (1.54):

$$y^i \xi_i^6(X(ty)) = y_2 X^1(ty) + \frac{1}{2} y_3 X^2(ty) + \frac{1}{2} y_5 \left(X^1(ty)\right)^2 + y_6,$$

где

$$X^1(ty) = J^{-1} y_1 \operatorname{sh}(tJ) + 2J^{-2}(y_2 y_3 - y_1 y_4) \operatorname{sh}^2(tJ/2),$$
$$X^2(ty) = J^{-1} y_2 \operatorname{sh}(tJ) + 2J^{-2}(y_2 y_3 + y_1 y_5) \operatorname{sh}^2(tJ/2).$$

Вычисляя интеграл согласно формуле (1.54), окончательно получаем

$$\begin{aligned} x_6 = y_6 + J^{-2} &\left(y_1 y_2 \operatorname{ch} J - y_1 y_2 - y_2^2 y_3/2 + y_1^2 y_5/2 + y_1 y_2 y_4\right) + \\ &+ J^{-3} \left(\operatorname{sh}(2J)(y_2^2 y_3 + y_1^2 y_5)/4 - \operatorname{sh} J (y_1 y_2 y_4 + y_1^2 y_5)\right) + \\ &+ J^{-4} \left((-2 y_1 y_2 y_3 y_5 - y_2^2 y_3 y_4 + y_1^2 y_4 y_5)(\operatorname{ch} J - \operatorname{ch}(2J)/4 - 3/4)\right). \end{aligned}$$

Отметим, что полученную связь $x = X(y)$ можно обратить, т.е. получить обратное отображение $y = Y(x)$ в элементарных функциях.

§ 1.4 Деформации алгебр Ли векторных полей

В § 1.2 мы описали метод реализации заданной конечномерной алгебры Ли векторными полями на однородном пространстве соответствующей группы Ли. Однако, не меньший интерес представляет также и более общая задача реализации алгебр Ли неоднородными дифференциальными операторами первого порядка. Например, эта задача естественным образом возникает в теории проективных представлений групп Ли [87]. Важное прикладное значение данная задача находит также в квантовой механике, в частности, в рамках алгебраического подхода к теории рассеяния [88], а также в задаче классификации операторов Шредингера, принадлежащих универсальным обертывающим конечномерных алгебр Ли (проблема Левина) [89]. Кроме того, построение алгебр операторов первого порядка и исследование их свойств играют ключевую роль в проблеме построения λ-*представлений* алгебр Ли [25, 28, 38].

По видимому, одной из первых работ, посвященных обсуждаемой проблеме, является работа [163], где на основе классификационных результатов С. Ли были найдены все неэквивалентные реализации алгебр Ли операторами первого порядка на комплексной плоскости. В последствии, используемый в указанной работе метод был обобщен на случай транзитивного действия группы Ли [164, 165], а также для полупростых алгебр Ли [166].

В работе [90] авторами была поставлена и решена еще более общая задача о реализациях алгебр Ли матричнозначными дифференциальными операторами первого порядка. Подобные операторы встречаются в теоретической физике в качестве, например, симметрий уравнения Дирака и его обобщений для искривленных пространств и высших спинов [167].

В настоящем параграфе мы коротко обсудим проблему реализации алгебр Ли дифференциальными операторами первого порядка с позиций теории когомологий групп и алгебр Ли. В частности, мы напомним основные определения, а также докажем несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся нам в последующих главах.

Пусть M — гладкое многообразие на котором (справа) действует вещественная группа Ли G, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Инфинитезимальный генератор ζ_X данного действия, отвечающий вектору $X \in \mathfrak{g}$, определяются согласно правилу $(\zeta_X\varphi)(q) = \frac{d}{dt}\varphi\left(qe^{tX}\right)|_{t=0}$, где $\varphi \in C^\infty(M)$. Относительно коммутатора векторных полей инфинитезимальные генераторы образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}(M)$, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$:

$$[\zeta_X, \zeta_Y] = \zeta_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Пусть V — конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $GL(V)$ — группа преобразований пространства V, $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли группы $GL(V)$. Обозначим посредством $C^\infty(M, V)$ и $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(V))$ пространства гладких функций на многообразии M со значениями в пространстве V и алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ соответственно.

Определение 1.1. Линейное отображение $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M, \mathfrak{gl}(V))$ называется *деформацией* алгебры $\mathfrak{g}(M)$, если $\mathfrak{gl}(V)$-значные дифференциальные операторы

$$\hat{\zeta}_X \equiv \zeta_X + \chi(X), \quad X \in \mathfrak{g}, \tag{1.55}$$

действующие в $C^\infty(M, V)$, удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и векторные поля ζ_X:

$$[\hat{\zeta}_X, \hat{\zeta}_Y] = \hat{\zeta}_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.56}$$

Используя формулы (1.55) и (1.56), нетрудно получить условие, которому должно удовлетворять отображение χ:

$$\zeta_X \cdot \chi(Y) - \zeta_Y \cdot \chi(X) + [\chi(X), \chi(Y)] = \chi([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.57}$$

Зафиксируем в алгебре $\mathfrak{g}$ некоторый базис $\{e_i\}$ и введем обозначения: $\zeta_i \equiv \zeta_{e_i}$, $\chi_i \equiv \chi(e_i)$. Тогда условие (1.57) примет вид следующей системы равенств:

$$\zeta_i^a \frac{\partial \chi_j}{\partial q^a} - \zeta_j^a \frac{\partial \chi_i}{\partial q^a} + [\chi_i, \chi_j] = C_{ij}^k \chi_k. \tag{1.58}$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, вычисленные относительно базиса $\{e_i\}$.

Пусть χ является деформацией алгебры $\mathfrak{g}(M)$, и пусть $A : M \to GL(V)$ — гладкая $GL(V)$-значная функция, заданная на многообразии M. Используя (1.57) несложно проверить, что отображение $\chi' : \mathfrak{g} \to C^\infty(M, \mathfrak{gl}(V))$, определяемое как

$$\chi'(X) = A^{-1}\,\chi(X)\,A + A^{-1}(\zeta_X A), \quad X \in \mathfrak{g}, \tag{1.59}$$

также является $\mathfrak{gl}(V)$-деформацией алгебры векторных полей $\mathfrak{g}(M)$. Указанный факт позволяет ввести следующее соотношение эквивалентности.

Определение 1.2. Деформации χ и χ' называются *эквивалентными*, если найдется гладкая функция $A : M \to GL(V)$ такая, что выполняется соотношение (1.59).

Простейшим решением системы уравнений (1.57) является нулевое решение $\chi = 0$. Применяя к этому решению условие эквивалентности (1.59), получаем

$$\chi'(X) = A^{-1}(\zeta_X A).$$

Таким образом, класс эквивалентности, соответствующий нулевому решению системы (1.57), содержит некоторые ненулевые решения. Этот особый класс эквивалентности играет важную роль в построении деформаций алгебр Ли векторных полей, поэтому мы выделим этот класс особо, введя следующее

Определение 1.3. Деформацию алгебры $\mathfrak{g}(M)$, эквивалентную нулевой, будем называть *тривиальной*.

Случай одномерного пространства V будет играть исключительно важную роль в настоящем исследовании, поэтому мы обсудим его более подробно. Для простоты мы всюду далее будем полагать, что $V = \mathbb{R}$, хотя все приводимые нами ниже факты с небольшими оговорками остаются верными и для случая $V = \mathbb{C}$.

Условие (1.57) в случае $V = \mathbb{R}$ имеет вид

$$\zeta_X \cdot \chi(Y) - \zeta_Y \cdot \chi(X) = \chi([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.60}$$

В фиксированном базисе $\{e_i\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равенство (1.60) представляет собой систему уравнений на неизвестные скалярные функции $\chi_i = \chi(e_i)$:

$$\zeta_i^a \frac{\partial \chi_j}{\partial q^a} - \zeta_j^a \frac{\partial \chi_i}{\partial q^a} = C_{ij}^k\,\chi_k. \tag{1.61}$$

В силу линейности данных уравнений, множество одномерных деформаций алгебры $\mathfrak{g}(M)$ образует линейное пространство, которые мы будем обозначать через $\operatorname{Def}\mathfrak{g}(M)$.

Для одномерных деформаций соотношение эквивалентности (1.59) при помощи подстановки $A = e^f$ приводится к виду

$$\chi'(X) = \chi(X) + \zeta_X f, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Здесь $f \in C^\infty(M)$ — произвольная гладкая функция на M. Отсюда видно, что деформация $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ является тривиальной, если найдется функция $f \in C^\infty(M)$ такая, что $\chi(X) = \zeta_X f$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Подпространство всех тривиальных одномерных деформаций алгебры $\mathfrak{g}(M)$ обозначим $\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M)$. Естественно, что нас будут интересовать в основном нетривиальные деформации алгебры $\mathfrak{g}(M)$ или, более строго, элементы фактор-пространства $\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M)$.

Пример 1.5. Пусть связная n-мерная коммутативная группа Ли G транзитивно действует на гладком n-мерном многообразии M. Не ограничивая общности, выберем локальные координаты $\{q^i\}$ на M так, что $\zeta_i = \partial_{q^i}$. Уравнения (1.61) в данном случае принимают вид

$$\frac{\partial \chi_j}{\partial q^i} - \frac{\partial \chi_i}{\partial q^j} = 0.$$

Таким образом, n-компонентная функция χ тогда и только тогда является деформацией алгебры $\mathfrak{g}(M)$, когда соответствующая ей 1-форма $\chi_i\, dq^i$ является замкнутой на M. Очевидно, что тривиальным деформациям будут отвечать 1-формы вида $\chi = df$, где $f \in C^\infty(M)$. Следовательно, в рассматриваемом случае имеет место изоморфизм $\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M) \simeq H^1_{dR}(M)$, где $H^1_{dR}(M)$ — одномерная группа когомологий де Рама многообразия M.

Данный пример допускает следующее полезное обобщение.

Утверждение 1.3. *Пусть $\mathfrak{g}_L(G)$ — алгебра левоинвариантных векторных полей на группе G. Имеет место изоморфизм* $\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}_L(G)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}_L(G) \simeq H^1_{dR}(G)$.

Пусть $\chi \in \mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)$ — произвольная деформация алгебры $\mathfrak{g}(M)$, $\chi_i = \chi(e_i)$ — компоненты отображения χ относительно базиса $\{e_i\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Рассмотрим на группе G семейство дифференциальных 1-форм, гладко параметризованных точками многообразия M:

$$\theta(g; q) = \chi_i(qg)\omega^i(g), \tag{1.62}$$

Здесь $\omega^i(g)$ — левоинвариантные 1-формы на группе G. Покажем, что 1-форма $\theta(g; q)$ замкнута при любом значении параметра $q \in M$. Так как группа G действует сама на себе просто транзитивно, для этого достаточно доказать, что $d\theta(\xi_i, \xi_j) = 0$ для любых левоинвариантных векторных полей $\xi_i, \xi_j \in \mathfrak{g}_L(G)$.

Согласно определению внешнего дифференциала, для 2-формы $d\theta$ в точке $g \in G$ имеем

$$d\theta(\xi_i, \xi_j) = \xi_i\, \theta(\xi_j) - \xi_j\, \theta(\xi_i) - \theta([\xi_i, \xi_j]).$$

Используя формулу (1.62), получаем $\theta(\xi_j) = \chi_j(qg)$. Действие векторного поля $\xi_i(g)$ на функцию $\chi_j(qg)$ можно заменить действием на эту функцию генератора $\zeta_i(qg)$:

$$\xi_i(g)\,\chi_j(qg) = \frac{d}{dt}\,\chi_j\left(qg\exp(te_i)\right)\Big|_{t=0} = \zeta_i(qg)\,\chi_j(qg).$$

Отсюда с учетом коммутационных соотношений (1.8), получаем:

$$d\theta(\xi_i,\xi_j) = \zeta_i(qg)\chi_j(qg) - \zeta_j(qg)\chi_i(qg) - C_{ij}^k\,\chi_k(qg).$$

Правая часть полученного выражения будет равной нулю, если функции χ_i удовлетворяют системе уравнений (1.61). Таким образом, 1-форма $\theta(g;q)$ является замкнутой.

В силу известной леммы Пуанкаре в некоторой окрестности G_e единицы группы определена функция $\Theta(g;q)$, гладко зависящая от точки $q \in M$ как от параметра, такая, что $d\Theta(g;q) = \chi_i(qg)\omega^i(g)$. Последнее равенство эквивалентно условию

$$\xi_i(g)\,\Theta(g;q) = \chi_i(qg), \tag{1.63}$$

где $\xi_i(g)\Theta(g;q)$ — результат действия левоинвариантного векторного поля ξ_i на функцию Θ. Полагая в данной формуле $g = e$, получаем

$$\frac{d}{dt}\,\Theta\left(\exp(te_i);q\right)\Big|_{t=0} = \chi_i(q). \tag{1.64}$$

Определение 1.4. Функцию $\Theta(g;q)$, удовлетворяющую равенству (1.64), будем называть *производящей функцией* деформации $\chi \in \operatorname{Def}\mathfrak{g}(M)$.

Ясно, что соотношение (1.64) определяет производящую функцию с точностью до произвольной гладкой функции из $C^\infty(M)$. Данная неопределенность может быть устранена (по крайней мере, локально) требованием $\Theta(e;q) = 0$, где e — единичный элемент группы G. В этом случае в некоторой окрестности единицы $G_e \subset G$ функция $\Theta(g;q)$ может быть представлена в виде интеграла

$$\Theta(g;q) = \int\limits_e^g \chi_i(qg)\,\omega^i(g). \tag{1.65}$$

Далее, не оговаривая это особо, мы будем предполагать условие $\Theta(e;q) = 0$ выполненным.

Отметим, что для тривиальной деформации $\chi_i(q) = (\zeta_i\,f)(q)$, где $f \in C^\infty(M)$, производящая функция может быть определена глобально на всей группе G:

$$\Theta(g;q) = f(qg) - f(q). \tag{1.66}$$

Пусть $G'_e \subset G_e$ — окрестность единицы группы G такая, что $G'_e \cdot G'_e \subset G_e$ и $(G'_e)^{-1} \subset G_e$. Тогда согласно (1.65) для любых $g_1, g_2 \in G'_e$ имеем

$$\Theta(g_1g_2;q) = \int\limits_e^{g_1g_2} \chi_i(qg)\omega^i(g) = \int\limits_e^{g_1} \chi_i(qg)\omega^i(g) + \int\limits_{g_1}^{g_1g_2} \chi_i(qg)\omega^i(g) = \Theta(g_1;q) + \int\limits_{g_1}^{g_1g_2} \chi_i(qg)\omega^i(g).$$

В последнем интеграле произведем замену переменной $g' = g_1^{-1} g$ и преобразуем его с учетом инвариантности 1-форм ω^i относительно левых сдвигов:

$$\int\limits_{g_1}^{g_1 g_2} \chi_i(qg)\omega^i(g) = \int\limits_{e}^{g_2} \chi_i(qg_1 g')\omega^i(g_1 g') = \int\limits_{e}^{g_2} \chi_i(qg_1 g')\omega^i(g').$$

Отсюда получаем

$$\Theta(g_1 g_2; q) = \Theta(g_1; q) + \Theta(g_2; qg_1). \tag{1.67}$$

Обратно, допустим, что на группе G задана функция $\Theta(g; q)$, удовлетворяющая равенству (1.67). Покажем, что отображение $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, определенное формулой (1.64), есть некоторая деформация алгебры $\mathfrak{g}(M)$. Действительно, согласно (1.64)

$$(\zeta_i\, \chi_j)\,(q) = \frac{d^2}{dt\, ds}\,\Theta(\exp(se_j); q\exp(te_i))\big|_{t=s=0},$$

откуда с помощью (1.67) получаем

$$(\zeta_i\, \chi_j)\,(q) = \frac{d^2}{dt\, ds}\,\Theta(\exp(tX)\exp(sY); q)\big|_{t=s=0}.$$

Далее, имеет место формула (см., например, [168], стр. 112):

$$\frac{d^2}{dt\, ds}\,\phi(\exp(tX)\exp(sY))\big|_{t=s=0} = (\xi_X \xi_Y \phi)\,(e), \quad \phi \in C^\infty(G).$$

Здесь ξ_X, ξ_Y — левоинвариантные векторные поля, соответствующие векторам $X, Y \in \mathfrak{g}$. Используя данную формулу будем иметь

$$(\zeta_i\, \chi_j)\,(q) - (\zeta_j\, \chi_i)\,(q) = [\xi_i, \xi_j](g)\,\Theta(g; q)\big|_{g=e} = C_{ij}^k\, \xi_k(g\,)\Theta(g; q)\big|_{g=e} =$$
$$= C_{ij}^k\, \frac{d}{dt}\,\Theta(\exp(te_k); q)\big|_{t=0} = C_{ij}^k\, \chi_k(q).$$

Следовательно, функция $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ есть деформация алгебры $\mathfrak{g}(M)$.

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 1.4. *Всякая функция $\Theta(g; q)$, удовлетворяющая условию* (1.67)*, является производящей функцией некоторой деформации алгебры $\mathfrak{g}(M)$. Обратно, производящая функция $\Theta(g; q)$ всякой деформации $\chi \in \operatorname{Def}\mathfrak{g}(M)$, определенная, возможно, локально на G, удовлетворяет равенству* (1.67).

Докажем теперь одно техническое утверждение, которое понадобится нам в последующих главах.

Утверждение 1.5. *Пусть χ — деформация алгебры $\mathfrak{g}(M)$, $\Theta(g; q)$ — ее производящая функция. Имеет место равенство*

$$(\mathrm{Ad}_{g^{-1}})_i^j\, \chi_j(qg) = \chi_i(q) + \zeta_i(q)\Theta(g; q), \quad g \in G. \tag{1.68}$$

Доказательство. Используя формулы (1.63) и (1.12), а также определение правоинвариантных векторных полей, получаем

$$\chi_j(qg) = \xi_j(g)\Theta(g;q) = -(\mathrm{Ad}_g)_j^k\,\eta_k(g)\Theta(g;q) = (\mathrm{Ad}_g)_j^k\,\frac{d}{dt}\,\Theta(\exp(te_k)g;q)\big|_{t=0}.$$

Далее, с учетом равенства (1.67) будем иметь:

$$\chi_j(qg) = (\mathrm{Ad}_g)_j^k\,\frac{d}{dt}\,\left(\Theta(\exp(te_k);q) + \Theta(g;q\exp(te_k))\right)\big|_{t=0} = (\mathrm{Ad}_g)_j^k\,\left(\chi_k(q) + \zeta_k(q)\Theta(g;q)\right).$$

Умножая полученное равенство на $(\mathrm{Ad}_{g^{-1}})_i^j$ после очевидных преобразований получаем (1.68). $\square$

Следствие 1.1. *Пусть χ — деформация алгебры $\mathfrak{g}(M)$, $g \in G$. Тогда отображение χ' : $\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ такое, что $\chi'(X)(q) = \chi(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}X)(qg)$, $X \in \mathfrak{g}$, будет являться деформацией алгебры $\mathfrak{g}(M)$, эквивалентной деформации χ.*

Рассмотренные выше конструкции допускают естественную интерпретацию в терминах когомологий групп и алгебр Ли. Предварительно напомним определения этих когомологий [52–54].

Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Иными словами, задано представление $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(V)$ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Под *k-коцепью алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в V* понимается любое кососимметрическое k-линейное отображение $c : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \to V$. Пространство всех k-коцепей обозначается через $\mathbf{C}^k(\mathfrak{g};V)$.

Рассмотрим оператор $\delta : \mathbf{C}^k(\mathfrak{g};V) \to \mathbf{C}^{k+1}(\mathfrak{g};V)$, преобразующий произвольную k-коцепь c в $(k+1)$-коцепь δc согласно формуле

$$(\delta c)(X_1,\dots,X_{k+1}) = \sum_{1\le i<j\le k+1} (-1)^{i+j-1} c([X_i,X_j]),X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1}) + \\ + \sum_{1\le i\le k+1} (-1)^i \rho(X_i) c(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{k+1}). \quad (1.69)$$

(Здесь знак $\hat{}$ означает отсутствие стоящего под ним аргумента.) Данный оператор обладает следующим важным свойством: $\delta^2 \equiv \delta\circ\delta = 0$.

k-Коцепь $c \in \mathbf{C}^k(\mathfrak{g};V)$ называется *k-коциклом алгебры* $\mathfrak{g}$ (с коэффициентами в V), если $\delta c = 0$. Множество всех k-коциклов образует подпространство в $\mathbf{C}^k(\mathfrak{g};V)$, обозначаемое как $\mathbf{Z}^k(\mathfrak{g};V)$. Коциклы из $\mathbf{Z}^k(\mathfrak{g};V)$, которые имеют вид δc, где $c \in \mathbf{C}^{k-1}(\mathfrak{g};V)$, называются *$k$-кограницами алгебры* $\mathfrak{g}$; они образуют некоторое подпространство $\mathbf{B}^k(\mathfrak{g};V)$ в пространстве $\mathbf{Z}^k(\mathfrak{g};V)$. Соответствующее фактор-пространство $\mathbf{H}^k(\mathfrak{g};V) = \mathbf{Z}^k(\mathfrak{g};V)/\mathbf{B}^k(\mathfrak{g};V)$ называется пространством *k-когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в V*.

Генераторы ζ_X действия группы преобразований G многообразия M задают естественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в пространстве $C^\infty(M)$: $\rho(X)\phi = \zeta_X\phi$, $X \in \mathfrak{g}$, $\phi \in C^\infty(M)$. Нетрудно видеть, что условие (1.60) в терминах оператора δ можно записать как $\delta\chi = 0$, где χ — 1-коцепь алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathfrak{g}$-модуле $C^\infty(M)$. Таким образом, деформации алгебры $\mathfrak{g}(M)$ суть 1-коциклы алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в $C^\infty(M)$. Ясно, что тривиальные деформации — это 1-кограницы алгебры $\mathfrak{g}$. Тем самым мы получаем следующий изоморфизм:

$$\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M) \simeq \mathbf{H}^1(\mathfrak{g}; C^\infty(M)).$$

Напомним теперь определение когомологий групп. Пусть задано некоторое представление T группы G в пространстве V. Произвольная функция $\mu : \underbrace{G \times \cdots \times G}_{k} \to V$ называется *k-коцепью группы G с коэффициентами в V*. Множество все k-коцепей группы G относительно сложения в V образует абелеву группу, обозначаемую через $C^k(G;V)$.

Пусть $\mu \in C^k(G;V)$. Рассмотрим оператор $\delta : C^k(G;V) \to C^{k+1}(G;V)$, задаваемый с помощью правила

$$(\delta\mu)(g_1,\ldots,g_{k+1}) = T(g_1)\mu(g_2,\ldots,g_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\mu(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{k+1}) + \\ + (-1)^{k+1}\mu(g_1,\ldots,g_k), \quad (1.70)$$

и удовлетворяющий также как и в случае алгебр Ли условию $\delta^2 = 0$. С помощью данного оператора можно определить два подпространства в $C^k(G;V)$ — подпространство *k-коциклов*

$$Z^k(G;V) = \ker\left[\delta : C^k(G;V) \to C^{k+1}(G;V)\right],$$

и подпространство *k-кограниц* группы G:

$$B^k(G;V) = \mathrm{Im}\left[\delta : C^{k-1}(G;V) \to C^k(G;V)\right].$$

Соответствующее фактор-пространство $H^k(G;V) = Z^k(G;V)/B^k(G;V)$ называется пространством *k-когомологий группы G с коэффициентами в V*.

Действие группы Ли G на гладком многообразии M индуцирует представление G в пространстве $C^\infty(M)$: $T(g)\phi(q) = \phi(qg)$, $q \in M$, $g \in G$. Всякая функция $\Theta(g;q)$ на G, гладко зависящая от точки многообразия M, может быть интерпретирована как 1-коцепь группы G с коэффициентами в пространстве $C^\infty(M)$. Очевидно, что условие (1.67) в терминах оператора δ принимает вид $\delta\Theta = 0$, т.е. функции, выделенные данным условием, являются 1-коциклами группы G с коэффициентами в $C^\infty(M)$. При этом 1-коциклы вида (1.66) представляют собой 1-кограницы группы G.

Осталось заметить, что формула (1.64), связывающая деформации и их производящие функции, есть ни что иное как хорошо известная связь между когомологиями группы Ли G и когомологиями ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что в общем случае соответствие $H^1(G, C^\infty(M)) \to \mathbf{H}^1(\mathfrak{g}, C^\infty(M))$ является гомоморфизмом, но не изоморфизмом (детали см., например, в [53]).

Рассмотрим случай транзитивного действия группы G на многообразии M, то есть $M = H \setminus G$, где H — группа стационарности выделенной точки $q_0 \in M$. В работе [90] показано, что в этом случае все неэквивалентные одномерные деформации алгебры $\mathfrak{g}(M)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными неэквивалентными представлениями алгебры $\mathfrak{h}$ группы H. Отметим, что одномерные представления алгебры $\mathfrak{h}$ — это элементы $\lambda \subset \mathfrak{h}^*$, удовлетворяющие требованию

$$\langle \lambda, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle = 0. \tag{1.71}$$

(Напомним, что подалгебра $\mathfrak{h}$, удовлетворяющая условию (1.71), называется *подчиненной* функционалу λ). Как следствие, мы имеем следующий результат, сформулированный в качестве следствия основной теоремы, доказанной в статье [90].

Утверждение 1.6. *Пространство нетривиальных одномерных деформаций алгебры генераторов однородного пространства $M = H \setminus G$ конечномерно и изоморфно фактор-пространству $\mathfrak{h}^*/[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]^*$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H.*

Обозначим через $\pi : G \to H \setminus G$ — естественную проекцию, отображающую элемент $g \in G$ в соответствующий правый смежный класс $q = Hg \in H \setminus G$. Выберем в каждом смежном классе $q = Hg$ по представителю $s(q)$, то есть $s : H \setminus G \to G$ — некоторое сечение главного расслоения $G(M, H, \pi)$. В равенстве (1.67) положим $q = q_0$, $g_1 = h_1$, $g_2 = h_2$, где $h_1, h_2 \in H$. Тогда, вводя обозначение $\Lambda(h) \equiv \exp(\Theta(h; q_0))$, получаем

$$\Lambda(h_1 h_2) = \Lambda(h_1)\Lambda(h_2). \tag{1.72}$$

Другими словами, функция $\Lambda(h)$ есть представление группы H. Отметим, что если производящая функция $\Theta(g; q)$ задана на группе G только локально, функция $\Lambda(h)$ определяет, возможно, лишь *локальное представление* группы H. (Это означает, что соотношение (1.72) выполняется для элементов h_1, h_2, принадлежащих лишь некоторой окрестности $H_e \subset H$ единицы группы H).

Далее, если элемент $g \in G$ переводит точку q_0 в q, то $g = h(g)s(q)$, где $h(g) \in H$. В формуле (1.67) положим $q = q_0$, $g_1 = s(q)$ и $g_2 = g$. Тогда получаем $\Theta(s(q)g; q_0) = \Theta(s(q); q_0) + \Theta(g; q)$, или $\Theta(g; q) = \Theta(s(q)g; q_0) - \Theta(s(q); q_0)$. Представим элемент $s(q)g \in G$ в виде $s(q)g =$

$h(q,g)s(qg)$, где $h : M \times G \to H$ — фактор однородного пространства M. Используя данное разложение получаем

$$\Theta(g;q) = \Theta(h(q,g)s(qg);q_0) - \Theta(s(q);q_0) = \Theta(h(q,g);q_0) + \Theta(s(qg);q_0) - \Theta(s(q);q_0),$$

или окончательно

$$\Theta(g;q) = \ln\Lambda(h(q,g)) + \Theta(s(qg);q_0) - \Theta(s(q);q_0). \tag{1.73}$$

Обсудим полученный результат. Во-первых, видно, что разность $\Theta(s(qg);q_0)-\Theta(s(q);q_0)$ является 1-кограницей группы G. Отсюда вытекает, что функция $\ln\Lambda(h(q,g))$ представляет собой 1-коцикл, принадлежащий тому же классу когомологий, что и $\Theta(g;q)$. Более того, можно показать, что данное утверждение не зависит от выбора сечения на M. Действительно, любое другое сечение $s' : G \to M$ будет связано с сечением s соотношением $s'(q) = \phi(q)s(q)$, где ϕ — некоторая функция на M со значениями в подгруппе H, $q \in M$. В виду того, что факторы $h'(q,g)$ и $h(q,g)$ для данных сечений связаны соотношением (1.25), а также учитывая тот факт, что функция Λ является представлением группы H, получаем

$$\ln\Lambda(h'(q,g)) = \ln\Lambda(h(q,g)) - \ln\Lambda(\phi(qg))\Lambda(\phi(q))^{-1}.$$

Отсюда следует, что $\ln\Lambda(h'(q,g)) - \ln\Lambda(h(q,g)) \in B^2(G, C^\infty(M))$.

Таким образом, мы можем сформулировать следующее

Утверждение 1.7. *Производящие функции неэквивалентных деформаций алгебры $\mathfrak{g}(M)$ находятся во взаимо однозначном соответствии с локальными неэквивалентными одномерными представлениями группы H.*

Представим теперь некоторые из полученных выше результатов в координатной форме, удобной в практических вычислениях.

Пусть $q = (q^a)$ — локальные координаты в некоторой области $V \subset M$, содержащей точку q_0, $h = (h^\alpha)$ — локальные координаты в единичной окрестности H_e группы H. Тогда согласно (1.23) набор (q^a, h^α) представляет собой локальные координаты в некоторой окрестности единицы группы G.

Следствием утверждения 1.7 и формулы (1.73) является тот факт, что всякая производящая функция $\Theta(g;q)$ с точностью до элементов из $B^1(G;C^\infty(M))$ определяется выражением $\Theta(g;q) = \ln\Lambda(h(q,g))$, где $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ — некоторое (локальное) представление группы H. Отсюда нетрудно видеть, что данная производящая функция в локальных координатах может быть представлена как

$$\Theta(x;q) = \lambda_\alpha\, h^\alpha(q,x), \tag{1.74}$$

где $h^\alpha(q,x)$ — функции, являющейся координатами фактора однородного пространства, $\lambda_\alpha \equiv \partial_{h^\alpha}\Lambda(h)\big|_{h=0}$ — генераторы представления Λ.

Дифференцируя выражение (1.74) по координате x^i, при $x=0$ получаем:

$$\frac{\partial\Theta(x;q)}{\partial x^i}\Big|_{x=0} = \lambda_\alpha \frac{\partial h^\alpha(q,x)}{\partial x^i}\Big|_{x=0}. \tag{1.75}$$

Согласно (1.64) левая часть равенства (1.75) — это i-ая компонента функции $\chi(q)$, представляющей собой деформацию алгебры $\mathfrak{g}(M)$, выраженную в локальных координатах. Учитывая теперь формулу (1.27), выражающую $h^\alpha(q,x)$ через функцию композиции группы G, и вспоминая выражение (1.7) для компонент левоинвариантных векторных полей, получаем следующий результат:

$$\chi_i(q) = \lambda_\alpha\, \xi_i^\alpha(q,0). \tag{1.76}$$

Данная формула представляет собой простой способ вычисления деформации $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ по заданному функционалу λ, задающему одномерное представление подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. В свою очередь, производящая функция этой деформации находится согласно формуле (1.74).

Пример 1.6. Приведем классификацию всех неэквивалентных одномерных деформаций алгебры $\mathfrak{g}(M)$, где $M = H \setminus G$ — четырехмерное однородное пространство, рассмотренное в примерах 1.1 и 1.3. Алгебра Ли $\mathfrak{h} = \{e_4, e_5\}$ подгруппы H определяется коммутационными соотношениями

$$[e_4, e_5] = -2e_5.$$

Используя условие (1.71) получаем, что все одномерные представления этой алгебры исчерпываются элементами λ дуального пространства $\mathfrak{h}^*$ такими, что $\lambda_4 \equiv \lambda(e_4) = J$, $\lambda_5 \equiv \lambda(e_5) = 0$, где $J \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M) \simeq \mathbb{R}$.

Левоинвариантные векторные поля на группе G в канонических координатах второго рода $g_x = \exp(x_6e_6)\dots\exp(x_1e_1)$ имеют вид (1.35) – (1.37). Принимая в качестве локальных координат в подгруппе H величины $h_1 = x_4$, $h_2 = x_5$, а в качестве координат на однородном пространстве величины $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $q_3 = x_3$, $q_4 = x_4$, с помощью (1.76) будем иметь:

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_6 = 0, \quad \chi_4 = J, \quad \chi_5 = Jq_3. \tag{1.77}$$

Полученное семейство функций $\chi : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$, гладко зависящее от параметра J, — это семейство представителей классов эквивалентности из $\mathrm{Def}\,\mathfrak{g}(M)/\mathrm{Def}_0\,\mathfrak{g}(M)$. Каждый класс эквивалентности определяет соответствующую реализацию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G неоднородными дифференциальными операторами:

$$\hat{\zeta}_1 = \partial_{q_1}, \quad \hat{\zeta}_2 = \partial_{q_2} + q_1\partial_{q_4}, \quad \hat{\zeta}_3 = q_2\partial_{q_1} + \partial_{q_3} + \frac{q_2^2}{2}\,\partial_{q_4},$$

$$\hat{\zeta}_4 = -q_1\partial_{q_1} + q_2\partial_{q_2} - 2q_3\partial_{q_3} + J, \quad \hat{\zeta}_5 = q_1\partial_{q_2} - q_3^2\,\partial_{q_3} + \frac{q_1^2}{2}\,\partial_{q_4} + Jq_3, \quad \hat{\zeta}_6 = \partial_{q_4}.$$

В данном примере подгруппа изотропии H является двумерной связной односвязной группой Ли, изоморфной группе аффинных преобразований вещественной прямой, сохраняющих ориентацию. Все конечномерные представления данной группы находятся во взаимо однозначном соответствии с представлениями ее алгебры Ли. Так как канонические координаты второго рода, определяемые согласно $h = \exp(h_2 e_5)\exp(h_1 e_4)$, покрывают всю группу H, в данных координатах получаем

$$\Lambda(h) = e^{h_2\lambda(e_5)}e^{h_1\lambda(e_4)} = e^{Jh_1}.$$

Двухкомпонентная функция $h(q,x)$, соответствующая фактору однородного пространства M, определяется через функции композиции (1.45) – (1.47) согласно формуле (1.27):

$$h_1(q,x) = \Phi_4((q,0),x) = x_4 + \ln\left(1 + q_3x_5\right), \quad h_2(q,x) = \Phi_5((q,0),x) = \frac{x_5}{1+q_3x_5}.$$

Отсюда с помощью (1.74) легко находим производящую функцию деформации (1.77) алгебры $\mathfrak{g}(M)$:

$$\Theta(x;q) = J\left(x_4 + \ln(1+q_3x_5)\right).$$

Нетрудно проверить, что для полученной функции выполняются равенства $(\partial\Theta(x;q)/\partial x^i)|_{x=0} = \chi_i(q)$, где функции $\chi_i(q)$ задаются выражениями (1.77).

ГЛАВА 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА ГРУППАХ ЛИ

В настоящей главе исследуется проблема интегрируемости односторонне инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли. Наиболее известный пример подобной системы — это уравнения движения свободного ассиметрического волчка, которые, как известно, могут быть интерпретированы как уравнения геодезического потока на группе $SO(3)$, снабженной лево- или правоинвариантной римановой метрикой [16].

Не смотря на то, что интегрируемые геодезические потоки на группах Ли представляют собой популярный объект исследования в дифференциальной геометрии и механике, большинство значимых результатов здесь получено лишь для риманова случая, то есть для случая положительно-определенных метрик. С другой стороны, с точки зрения возможных приложений в теоретической физике геодезические индефинитных метрик на группах Ли представляют больший интерес, в частности, в задачах общей теории относительности и космологии. Кроме того, исследование проблемы интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли представляет также интерес и с квантовой точки зрения, так как ряд важных свойств таких систем в определенном смысле переносится и на их соответствующие квантовые аналоги.

§ 2.1 Инвариантные гамильтоновы системы на группах Ли

В настоящем параграфе мы опишем класс гамильтоновых систем на многообразиях групп Ли, функции Гамильтона которых инвариантны относительно (правого) действия на кокасательном расслоении группы. В частности, мы отметим связь таких систем с гамильтоновыми системами на дуальных пространствах алгебр Ли. Мы также обсудим основные подходы к интегрированию указанных систем дифференциальных уравнений. Более подробное изложение обсуждаемых в настоящем параграфе вопросов можно найти в классических монографиях [16, 169].

Пусть G — связная вещественная n-мерная группа Ли, T^*G — пространство ее кокасательного расслоения, снабженное стандартной симплектической структурой. В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ на T^*G эта структура имеет вид

$$\omega = d\theta = dp_i \wedge dx^i, \quad \theta = p_i dx^i.$$

Согласно общепринятой терминологии, 1-форма θ называется *канонической* или *тавтоло-*

гической 1-формой.

Произвольной гладкой функции H на T^*G поставим в соответствие векторное поле $\operatorname{sgrad} H \in \operatorname{Vect}(T^*G)$, определяемое с помощью следующего правила:

$$\omega(\operatorname{sgrad} H, \cdot\,) = -dH(\cdot). \tag{2.1}$$

Векторное поле $\operatorname{sgrad} H$ называется *гамильтоновым*. В локальных координатах это векторное поле записывается в виде

$$\operatorname{sgrad} H = \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Множество всех гамильтоновых векторных полей на T^*G обозначим $\operatorname{Ham}(T^*G)$. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ham}(T^*M)$ есть подпространство в $\operatorname{Vect}(T^*G)$, замкнутое относительно обычного коммутатора векторных полей. Таким образом, гамильтоновы векторные поля образуют некоторую подалгебру в бесконечномерной алгебре Ли всех векторных полей на T^*G.

Рассмотрим фазовый поток гамильтонового векторного поля $\operatorname{sgrad} H$. В локальных координатах этот поток описывается следующей системой уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}. \tag{2.2}$$

Здесь точкой обозначена производная по некоторому вещественному параметру, параметризующему интегральные траектории указанной системы. Данная система уравнений называется *гамильтоновой*, а функция H — ее *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*. Напомним, что всякая функция из $C^\infty(T^*M)$, постоянная на интегральных траекториях системы (2.2), называется ее *интегралом движения*.

Другой возможный способ описания гамильтоновых потоков на T^*G состоит в использовании скобки Пуассона. Согласно определению *скобка Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}$, отвечающая симплектической форме ω, задается правилом

$$\{H, F\} \equiv \omega(\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial F}{\partial p_i}. \tag{2.3}$$

С помощью этой скобки гамильтонова система (2.2) может быть представлена в следующей форме:

$$\dot{x}^i = \{H, x^i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}.$$

При этом функция $F \in C^\infty(T^*G)$ тогда и только тогда будет являться интегралом движения, когда ее скобка Пуассона с гамильтонианом H равна нулю: $\{H, F\} = 0$.

Пусть $H, F \in C^\infty(T^*G)$ — произвольные функции. Из формул (2.1) и (2.3) следуют очевидные равенства: $\operatorname{sgrad} H(F) = -\operatorname{sgrad} F(H) = \{H, F\}$. Используя эти равенства, а также тождество Якоби для скобки Пуассона, получаем:

$$[\operatorname{sgrad} H, \operatorname{sgrad} F] = \operatorname{sgrad}\{H, F\}.$$

Таким образом, линейное отображение $\operatorname{sgrad} : C^\infty(T^*G) \to \operatorname{Ham}(T^*G)$ является гомоморфизмом алгебр Ли. Ядро этого гомоморфизма образовано функциями, постоянными на T^*G.

Правые и левые сдвиги (1.5) естественным образом поднимаются до правого $\tilde{R}_g$ и левого $\tilde{L}_g$ действий группы G на кокасательном расслоении T^*G:

$$\tilde{R}_g(x,p) = (xg, (R_{g^{-1}})^* p), \quad \tilde{L}_g(x,p) = (gx, (L_{g^{-1}})^* p), \quad p \in T^*_x G, \ x, g \in G. \tag{2.4}$$

По построению эти действия сохраняют каноническую 1-форму θ, а следовательно, и стандартную симплектическую форму ω. Другими словами, действия (2.4) являются симплектоморфизмами симплектического многообразия (T^*G, ω).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис в $\mathfrak{g}$, $\xi_i(x) = (L_x)_* e_i$, $\eta_i(x) = -(R_x) e_i$ — лево- и правоинвариантные векторные поля соответственно. Нетрудно видеть, что инфинитезимальными генераторами правого действия $\tilde{R}_g : T^*G \to T^*G$ являются гамильтоновые векторные поля $\operatorname{sgrad} X_i$, где функции $X_i \in C^\infty(T^*G)$ определяются равенством

$$X_i(x,p) \equiv \langle p, \xi_i(x) \rangle = \xi_i^j(x) p_j, \quad p \in T^*_x G. \tag{2.5}$$

Так как алгебра $\mathfrak{g}_L(G)$ левоинвариантных векторных полей изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$, имеем

$$\{X_i, X_j\} = C^k_{ij} X_k, \tag{2.6}$$

где C^k_{ij} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в выбранном базисе. Таким образом, соответствие $e_i \to X_i$, продолженное по линейности на всю алгебру $\mathfrak{g}$, есть гомоморфизмом последней в пуассонову алгебру $C^\infty(T^*G)$.

Аналогично, генераторы левого действия $\tilde{L}_g : T^*G \to T^*G$ — это гамильтоновы векторные поля $\operatorname{sgrad} Y_i$, где

$$Y_i(x,p) \equiv \langle p, \eta_i(x) \rangle = \eta_i^j(x) p_j, \quad p \in T^*_x G. \tag{2.7}$$

Здесь как и в случае правых сдвигов соответствие $e_i \to Y_i$ является гомоморфизмом алгебр Ли:

$$\{Y_i, Y_j\} = C^k_{ij} Y_k. \tag{2.8}$$

Отметим также, что в силу того, что лево- и правоинвариантные векторные поля между собой коммутируют, имеют место равенства

$$\{X_i, Y_j\} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Обозначим через $\mathfrak{g}^*$ дуальное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то есть пространство всех линейных функционалов на $\mathfrak{g}$. В пространстве $\mathfrak{g}^*$ введем базис $e^1, \ldots, e^n$, дуальный к базису $e_1, \ldots, e_n$ в алгебре $\mathfrak{g}$: $\langle e^i, e_j \rangle = \delta^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — естественное спаривание пространств $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Для правого и левого действий группы G на T^*G определены соответственно правое $\mu_r : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ и левое $\mu_l : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ *отображения момента*:

$$\langle \mu_r(x,p), e_i \rangle = X_i(x,p), \quad \langle \mu_l(x,p), e_i \rangle = Y_i(x,p). \tag{2.10}$$

Эквивалентное определение отображений момента может быть дано в следующем виде:

$$\mu_r(x,p) = (L_x)^* \, p, \quad \mu_l(x,p) = -(R_x)^* \, p, \quad p \in T^*_x G. \tag{2.11}$$

Нетрудно видеть, что данные отображения — пуассоновые. Действительно, следствиями равенств (2.6) и (2.8) являются соотношения

$$\{\mu_r^* \varphi, \mu_r^* \psi\} = \mu_r^* \{\varphi, \psi\}_{\mathfrak{g}}, \quad \{\mu_l^* \varphi, \mu_l^* \psi\} = \mu_l^* \{\varphi, \psi\}_{\mathfrak{g}},$$

справедливые для любых функций $\varphi, \psi \in C^\infty(T^*G)$. При этом скобка $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$, в которую переходит скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ при отображениях момента, — это известная *скобка Ли–Пуассона*, впервые введенная С. Ли и позже переоткрытая Ф. А. Березиным [170] и Ж. Сурье [171]. Ее инвариантное определение дается выражением

$$\{\varphi, \psi\}_{\mathfrak{g}}(f) = \langle f, [d\varphi(f), d\psi(f)] \rangle, \quad f \in \mathfrak{g}^*. \tag{2.12}$$

(Здесь предполагается, что $d\varphi(f), d\psi(f) \in (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$). В дальнейшем нам также понадобится выражение для данной скобки, записанное в координатном виде:

$$\{\varphi, \psi\}_{\mathfrak{g}}(f) = C^k_{ij} \, f_k \, \frac{\partial \varphi(f)}{\partial f_i} \, \frac{\partial \psi(f)}{\partial f_j}. \tag{2.13}$$

Скобка Ли – Пуассона задает в функциональном пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ структуру (бесконечномерной) алгебры Ли.

Пусть $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ — представление, дуальное присоединенному представлению группы G. По определению

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g f, X \rangle = \langle f, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} X \rangle, \quad f \in \mathfrak{g}^*, \; X \in \mathfrak{g}, \; g \in G. \tag{2.14}$$

Представление Ad^* называют *коприсоединенным представлением* группы G. Заметим, что из равенства (2.14) и определения представления Ad следует, что

$$\mathrm{Ad}^*_g = (R_g)^* (L_{g^{-1}})^*. \tag{2.15}$$

Используя эту формулу, а также равенства (2.11), можно показать, что правое (левое) действие группы G на пространстве T^*G при правом (левом) отображении момента переходит в коприсоединенное действие G на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$:

$$\mu_r \circ \tilde{R}_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ \mu_r, \quad \mu_l \circ \tilde{L}_g = \mathrm{Ad}^*_g \circ \mu_l.$$

Таким образом, отображения моментов (2.10) являются G-эквивариантными отображениями.

Рассмотрим в $C^\infty(T^*G)$ функциональное подпространство $\mathscr{F}_l \equiv \mu_l^* C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Очевидно, что $\mathscr{F}_l$ — подалгебра в пуассоновой алгебре $(C^\infty(T^*G), \{\cdot,\cdot\})$. Пусть $H \in \mathscr{F}_l$. Из определения отображения μ_l следует, что функция H является инвариантной относительно правого действия G на T^*G. Обратно, пусть функция $H \in T^*G$ правоинвариантна. Действие группы G на себе правыми (как, впрочем, и левыми) сдвигами является свободным, поэтому мы можем записать $H(x,p) = H(e,(R_x)^* p) = \mathscr{H}(\mu_l(x,p))$ для некоторой функции $\mathscr{H} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Но это означает, что $H \in \mathscr{F}_l$. Таким образом, подпространство $\mathscr{F}_l$ совпадает с множеством правоинвариантных функций на T^*G.

Аналогичным образом можно показать, что инвариантность функции $H \in C^\infty(T^*G)$ относительно левых сдвигов равносильна условию $H \in \mathscr{F}_r \equiv \mu_r^* C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Отметим, что преобразование инверсии $x \to x^{-1}$, поднятое на T^*G, переводит правые действия в левые и наоборот, поэтому рассмотрение право- и левоинвариантных функций на T^*G по существу приводит к эквивалентным картинам. Имея это в виду, далее мы ограничимся только правоинвариантными гамильтонианами и соответствующими им гамильтоновыми потоками.

Замечание 2.1. Отметим, что в силу связности группы G, подалгебра $\mathscr{F}_l$ совпадает с централизатором подалгебры $\mathscr{F}_r$ в $C^\infty(T^*G)$. Естественно, что верно и обратное: подалгебра $\mathscr{F}_r$ есть централизатор $\mathscr{F}_l$ в алгебре $C^\infty(T^*G)$. Другими словами, следуя терминологии А. Вейнстейна, отображения моментов μ_r и μ_l образуют *дуальную пару* [172].

Особое место среди функций из $\mathscr{F}_l$ (или $\mathscr{F}_r$) занимают функции, инвариантные одновременно относительно правого и левого действий группы на T^*G, то есть функции, принадлежащие пересечению $\mathscr{F}_{inv} \equiv \mathscr{F}_r \cap \mathscr{F}_l$. Опишем это функциональное пространство более подробно.

Предположим, что $K \in \mathscr{F}_{inv}$. Тогда, как нетрудно видеть, существует функция $\mathscr{K} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ такая, что

$$K(x,p) = \mathscr{K}(\mu_r(x,p)) = \mathscr{K}(-\mu_l(x,p)). \tag{2.16}$$

Следствием равенств (2.11) и формулы (2.15) является связь между правым и левым отображениями момента:

$$\mu_l(x,p) = -\mathrm{Ad}^*_x\, \mu_r(x,p). \tag{2.17}$$

Используя эту связь, из (2.16) получаем, что $\mathscr{K} \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)^G$, где $C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)^G$ — множество функций на $\mathfrak{g}^*$, инвариантных относительно коприсоединенного представления группы G. Очевидно и обратное утверждение: всякой функции из $C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)^G$ будет соответствовать некоторая функция из пространства $\mathscr{F}_{inv}$.

Инфинитезимальным аналогом условия $\mathscr{K}(\mathrm{Ad}^*_x f) = \mathscr{K}(f)$, $x \in G$, является равенство

$$C^k_{ij}\, f_k \frac{\partial \mathscr{K}(f)}{\partial f_j} = 0,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно требованию

$$\{\mathscr{K}, \varphi\}_{\mathfrak{g}}(f) = 0, \quad \forall\, \varphi \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*).$$

Это означает, что всякая G-инвариантная функция на $\mathfrak{g}^*$ принадлежит центру пуассоновой алгебры $(C^{\infty}(\mathfrak{g}^*), \{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}})$, то есть является *функцией Казимира* скобки Ли – Пуассона. Таким образом, функциональное пространство $\mathscr{F}_{inv}$ порождается функциями Казимира скобки $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$, причем для связной группы G указанное соответствие обратимо. Далее для сокращения терминологии мы будем называть функции Казимира скобки Ли – Пуассона *функциями Казимира алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Вернемся к общему случаю. Пусть $H(x,p) = \mathscr{H}(\mu_l(x,p))$ — правоинвариантная функция, порожденная функцией $\mathscr{H} \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$. Используя определение левого отображения момента мы можем записать

$$H(x,p) = \mathscr{H}(Y_1(x,p), \dots, Y_n(x,p)), \tag{2.18}$$

то есть $H(x,p)$ является некоторой функцией от функций $Y_i(x,p)$, $i = 1, \dots, n$. Вместо переменных p_i перейдем к новым переменным $f_i = Y_i(x,p)$. Путем несложных преобразований гамильтонова система (2.2), отвечающая данному гамильтониану, может быть приведена к треугольному виду

$$\dot{f}_i = \{\mathscr{H}(f), f_i\}_{\mathfrak{g}} = -C^k_{ij}\, f_k \frac{\partial \mathscr{H}(f)}{\partial f_j}, \tag{2.19}$$

$$\dot{x}^i = \frac{\partial \mathscr{H}(f)}{\partial f_j}\, \eta^i_j(x). \tag{2.20}$$

Обсудим возможные подходы к интегрированию системы (2.19), (2.20).

Наиболее очевидный способ решения полученной системы уравнений состоит в следующем. На первом шаге необходимо проинтегрировать подсистему (2.19), являющуюся гамильтоновой системой на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, после чего второй шаг будет заключаться в решении неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.20).

Как известно, в общем случае скобка Ли–Пуассона (2.12) является вырожденной, поэтому дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ допускает стратификацию на симплектические листы, ограничение пуассоновой структуры на которые уже невырождено. Как показал С. Ли, а позже А. А. Кириллов [47] и Б. Костант [48], эти симплектические листы суть в точности орбиты коприсоединенного представления группы G, так что указанная стратификация фактически является разбиением пространства $\mathfrak{g}^*$ на коприсоединенные орбиты. Рассмотрим гамильтонову систему (2.19) с начальным условием $f(0) = \lambda$, где $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ — фиксированный ковектор. Ограничивая данную систему на орбиту $\mathcal{O}_\lambda = \mathrm{Ad}^*_G \lambda$, мы получим гамильтонову систему, число фазовых переменных в которой может быть меньшим, чем в исходной системе. Следовательно, нахождение решений системы (2.19) фактически сводится к интегрированию гамильтоновых систем на орбитах коприсоединенного представления группы G.

Тем не менее, даже если нам удастся проинтегрировать гамильтонову систему на соответствующей коприсоединенной орбите, решение неавтономной системы (2.20) может вызвать определенные затруднения. Ясно, что в силу произвольности функции $\mathscr{H}$ симметрии данной системы исчерпываются левоинвариантными векторными полями, которые образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$. Но согласно известной теореме Ли (см., например, [4, 17]) n-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений является интегрируемой в квадратурах, если ее алгебра симметрии разрешима, что в общем случае, конечно, не выполняется.

Укажем теперь более эффективный способ интегрирования гамильтоновых систем с правоинвариантными гамильтонианами. Из соотношений (2.9) следует, что функции $X_i(x,p) = \xi_i^j(x)p_j$ являются интегралами движения гамильтоновой системы со всяким гамильтонианом вида (2.18). Не ограничивая общности, выберем начальное условие для данной системы в виде $x(0) = e$, $p(0) = \lambda \in \mathfrak{g}^*$. Нетрудно видеть, что в этом случае соответствующая интегральная траектория будет принадлежать поверхности уровня

$$M_\lambda = \{(x,p) \in T^*G \,|\, X_i(x,p) = \lambda_i,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Отметим, что естественная проекция $\pi : T^*G \to G$ устанавливает диффеоморфизм между точками поверхности M_λ и элементами группы G. Имея это в виду, ограничим гамильтонову систему (2.2) с гамильтонианом (2.18) на M_λ (данное ограничение корректно, так как функции $X_i(x,p)$ являются интегралами движения). В результате мы получим n-мерную автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}^i = \varphi^j(x;\lambda)\eta^i_j(x), \quad \varphi^j(x;\lambda) \equiv \frac{\partial \mathscr{H}(f)}{\partial f_j}\Big|_{f=-\mathrm{Ad}^*_x \lambda}. \tag{2.21}$$

Не смотря на то, что при ограничении исходной гамильтоновой системы на M_λ мы уже фактически использовали алгебру интегралов движения $X_i(x,p)$, система уравнений (2.21) все еще может допускать некоторые симметрии, не зависящие от конкретного вида функции $\mathscr{H}$. Чтобы показать это, отметим одно полезное соотношение, вытекающее из формул (1.13):

$$\xi_i(x)\,\mathrm{Ad}^*_x\lambda = -\mathrm{Ad}^*_x\left(\mathrm{ad}^*_{e_i}\lambda\right). \tag{2.22}$$

Здесь $\mathrm{ad}^*:\mathfrak{g}\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ — дифференциал коприсоединенного представления Ad^*, называемый *коприсоединенным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$:

$$\langle \mathrm{ad}^*_{Z_1} f, Z_2\rangle = -\langle f,[Z_1,Z_2]\rangle,\quad f\in\mathfrak{g}^*,\quad Z_1,Z_2\in\mathfrak{g}.$$

С помощью соотношения (2.22) нетрудно показать, что левоинвариантное векторное поле $\xi_Z(x)=Z^i\xi_i(x)$ тогда и только тогда будет коммутировать с векторным полем $\varphi^j(x;\lambda)\eta_j(x)$, когда элемент $Z=Z^ie_i\in\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $\mathrm{ad}^*_Z\lambda=0$. Отметим, что множество векторов

$$\mathfrak{g}^\lambda=\{Z\in\mathfrak{g}\,|\,\mathrm{ad}^*_Z\lambda=0\}$$

образует подалгебру в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которая называется *аннулятором* ковектора λ. Таким образом, система уравнений (2.21) допускает алгебру симметрии, изоморфную аннулятору $\mathfrak{g}^\lambda$.

Замечание 2.2. Можно доказать, что для ковекторов, находящихся в $\mathfrak{g}^*$ в общем положении, аннулятор всегда коммутативен. Это утверждение составляет основное содержание теоремы М. Верньь [173]. В более общем случае структура аннулятора $\mathfrak{g}^\lambda$ может быть весьма сложной. Например, известно, что аннулятор является расширением некоторой коммутативной алгебры Ли и, в частности, может быть неразрешимой подалгеброй [38].

Остаточная алгебра симметрии $\mathfrak{g}^\lambda$ позволяет понизить порядок системы уравнений (2.21) еще на $\dim\mathfrak{g}^\lambda$ единиц. При этом весьма нетривиальным результатом является тот факт, что получаемая в результате система, называемая *приведенной*, оказывается гамильтоновой относительно некоторой новой симплектической структуры. Не вдаваясь здесь в подробности, отметим, что пространство фазовых переменных приведенной гамильтоновой системы фактически совпадает с коприсоединенной орбитой $\mathcal{O}_\lambda$, а соответствующая симплектическая структура индуцируется ограничением на эту орбиту скобки Ли – Пуассона. Таким образом, исходная $2\dim\mathfrak{g}$-мерная правоинвариантная гамильтоновая система редуцируется к приведенной гамильтоновой системе с $\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{g}^\lambda$ фазовыми переменными. При этом, если алгебра $\mathfrak{g}^\lambda$ разрешима, а размерность приведенной гамильтоновой системы оказывается меньшей или равной двум, последнюю можно проинтегрировать в квадратурах, и затем с помощью полученного решения можно восстановить интегральные траектории исходной системы.

Описанный метод редукции гамильтоновых систем хорошо известен и называется *симплектической редукцией* или *редукцией Марсдена – Веинстейна*. Этот метод использовался еще С. Ли, который, в свою очередь, исходил из работ классиков (в частности, Л. Эйлера и К. Якоби). Современное геометризованное изложение метода было дано Дж. Марседном и А. Вейнстейном [174]. Применение этого метода к интегрированию гамильтоновых систем, обладающих некоммутативными алгебрами интегралов движения, было осуществлено А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [18], а также В. В. Козловым [175].

Тем не менее следует отметить, что прямое использование метода симплектической редукции к интегрированию правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли обладает рядом недостатков. Во-первых, алгебра $\mathfrak{g}^{\lambda}$ остаточных симметрий системы (2.21) может быть неразрешимой, следствием чего является невозможность восстановления в квадратурах решения исходной гамильтоновой системы по имеющимся решениям приведенной системы (обсуждение этой проблемы см. в [4]). Во-вторых, даже если алгебра $\mathfrak{g}^{\lambda}$ является разрешимой, необходимые алгебраические преобразования могут оказаться чересчур сложными с вычислительной точки зрения. И третья, с нашей точки зрения наиболее значимая, трудность состоит в отсутствии очевидных способов обобщения метода симплектической редукции на случай интегрирования квантовых аналогов правоинвариантных гамильтоновых систем.

§ 2.2 Канонические координаты на поляризованных коприсоединенных орбитах

В предыдущем параграфе мы указывали на тесную связь между (право)инвариантными гамильтоновыми системами на кокасательных расслоениях групп Ли и гамильтоновыми системами на соответствующих орбитах коприсоединенного представления. В силу того, что любая коприсоединенная орбита является симплектическим многообразием, всякая гамильтонова система на ней может быть представлена в канонической форме путем введения локальных канонических координат, существование которых утверждается известной теоремой Дарбу. Далее, однако, нас будет интересовать специальный класс канонических координат, построение которых фактически сводится к построению инвариантных поляризаций на орбитах коприсоединенного представления. Заметим, что с классической (не квантовой) точки зрения подобные канонические координаты выглядят не совсем естественно; в частности, в ряде случаев введение данных координат будет сопряжено с «выходом» в комплексную область. Тем не менее, специальный класс канонических координат, обсуждаемый ниже, оказывается исключительно удобным при переходе к соответствующим квантовым аналогам рассматриваемых нами гамильтоновых систем. В частности, введение этих координат позволит нам разработать *единый подход* к интегрированию классических и квантовых уравнений движения на группах Ли.

Отметим, что интерес специалистов к задаче построения канонических координат на орбитах коприсоединенного представления возник сразу же, как только А. А. Кириллов доказал, что на всякой коприсоединенной орбите существует инвариантная симплектическая 2-форма [47]. Первоначальные результаты, полученные в рамках данной проблемы, в основном касались нильпотентных или, более общо, разрешимых групп Ли [173, 176]. В последствии число работ, посвященных указанной задаче, с каждым годом заметно увеличивалось. Наиболее существенные результаты здесь были получены С. А. Камалиным и А. М. Переломовым [92], В. В. Трофимовым [177], а также М. Адамсом, Д. Харнадом и Д. Хуртубисом [178, 179].

В настоящем параграфе мы изложим алгебраический метод построения канонических координат на коприсоединенных орбитах, предложенный И. В. Широковым в работе [38], и основанный на описанном в предыдущей главе методе реализации алгебр Ли неоднородными дифференциальными операторами первого порядка. Кроме того, мы обсудим геометрический смысл построенных данным методом канонических координат в контексте геометрического квантования симплектических многообразий.

2.2.1 Алгебраический метод построения канонических координат на поляризованных орбитах

Как уже было сказано, коприсоединенное представление $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ расслаивает дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ на орбиты, являющиеся симплектическими листами скобки Ли–Пуассона (2.12). Геометрически коприсоединенная орбита $\mathcal{O}_\lambda$, проходящая через элемент $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, является однородным G–пространством. Это означает, что имеет место диффеоморфизм $\mathcal{O}_\lambda = G^\lambda \setminus G$, где $G^\lambda = \{g \in G \,|\, \mathrm{Ad}^*_g \lambda = \lambda\}$ — группа стационарности элемента λ. Нетрудно видеть, что алгебра Ли группы G^λ — это в точности аннулятор $\mathfrak{g}^\lambda$. Отсюда для размерности орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ получаем

$$\dim \mathcal{O}_\lambda = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^\lambda. \tag{2.23}$$

Коприсоединенную орбиту будем называть *регулярной*, если она имеет в $\mathfrak{g}^*$ максимально возможную размерность. Соответственно элемент $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ будем называть *регулярным*, если он принадлежит регулярной орбите. Орбиты коприсоединенного представления и ковекторы, не являющиеся регулярными, будем называть *сингулярными*. Ясно, что регулярные ковекторы находятся в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ в общем положении, то есть совокупность сингулярных элементов в $\mathfrak{g}^*$ образует множество меры ноль.

По определению аннуляторы регулярных в $\mathfrak{g}^*$ элементов имеют минимально возможную размерность. Эта размерность называется *индексом* $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{ind}\mathfrak{g} \equiv \inf_{\lambda\in\mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^\lambda = \dim\mathfrak{g} - \sup_{\lambda\in\mathfrak{g}^*} \operatorname{rank} \|C_{ij}^k\,\lambda_k\|. \tag{2.24}$$

С помощью индекса $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ для размерности произвольной регулярной орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ можно записать

$$\dim \mathcal{O}_\lambda = \dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}.$$

Всякая коприсоединенная орбита $\mathcal{O}_\lambda$ каноническим образом наделяется G-инвариантной симплектической структурой, задаваемой так называемой *формой Кириллова – Костанта* [47, 48]. Напомним способ ее построения.

Обозначим через π естественную проекцию группы G в пространство смежных классов $G^\lambda \setminus G$. Имея в виду диффеоморфизм $G^\lambda \setminus G \simeq \mathcal{O}_\lambda$, получаем $\pi(g) = \operatorname{Ad}_g^*\lambda$, $g\in G$. Дифференциал $\pi_*(e)$ этой проекции в единице группы — это сюръективное линейное отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в касательное пространство $T_\lambda\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda$, поэтому всякий вектор из $T_\lambda\mathcal{O}_\lambda$ может быть представлен в виде $\operatorname{ad}_X^*\lambda$, где $X\in\mathfrak{g}$. Положим теперь по определению

$$\omega_\lambda(\operatorname{ad}_X^*\lambda, \operatorname{ad}_Y^*\lambda) \equiv \langle\lambda, [X,Y]\rangle, \quad X, Y\in\mathfrak{g}. \tag{2.25}$$

В силу того, что величина $\langle\lambda,[X,Y]\rangle$ зависит только от образов X и Y в фактор-пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda$, данная формула определяет некоторую 2-форму на касательном пространстве $T_\lambda\mathcal{O}_\lambda$. При этом, так как для всякого $h\in G^\lambda$ имеет место равенство $\langle\lambda,[\operatorname{Ad}_h X, \operatorname{Ad}_h Y]\rangle = \langle\lambda,[X,Y]\rangle$, 2-форма (2.25) может быть корректно «разнесена» на всю орбиту $\mathcal{O}_\lambda$ с помощью коприсоединенного действия группы G. Полученная подобным образом G-инвариантная 2-форма ω_λ на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ автоматически оказывается замкнутой.

Замечание 2.3. Отметим, что имеется альтернативный способ построения формы Кириллова – Костанта на коприсоединенных орбитах, использующий пуассонову структуру в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ [180]. Согласно этому способу, симплектическая форма ω_λ индуцируется ограничением на орбиту $\mathcal{O}_\lambda$ скобки Ли – Пуассона (2.12). По существу, данный подход к построению формы Кириллова – Костанта эквивалентен предыдущему, однако, нам будет полезно иметь в виду эту конструкцию в дальнейшем.

Следствием существования формы Кириллова – Константа является тот факт, что любая коприсоединенная орбита есть G-однородное симплектическое многообразие; в частности, все орбиты имеют четную размерность. Отсюда следует, что согласно известной теореме Дарбу на всякой орбите $\mathcal{O}_\lambda$ можно ввести локальные координаты (u_a, v^a), в которых форма ω_λ будет иметь наиболее простой вид

$$\omega_\lambda = du_a \wedge dv^a, \quad a = 1, \dots, \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda.$$

Координаты (u, v) называются *каноническими координатами* или *координатами Дарбу*.

Любая коприсоединенная орбита $\mathcal{O}_\lambda$ является погруженным подмногообразием в $\mathfrak{g}^*$. Действительно, отображение $f : G^\lambda \setminus G \to \mathfrak{g}^*$, определяемое как $f(G^\lambda \cdot g) = \mathrm{Ad}_g^* \lambda$, $g \in G$, является гладким отображением, дифференциал df которого всюду инъективен (см., например, [150], стр. 113). Отметим, что образ $f(\mathcal{O}_\lambda) \subset \mathfrak{g}^*$ не обязательно замкнут, то есть погружение $f : \mathcal{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$ в общем случае не является вложением.

Пусть $U \subset \mathcal{O}_\lambda$ — некоторая окрестность элемента λ, в которой заданы канонические координаты (u, v). Тогда ограничение отображения $f : \mathcal{O}_\lambda \to \mathfrak{g}^*$ на окрестность U определяется функциями $f_i(u, v; \lambda)$ такими, что

$$\mathrm{rank} \left\| \frac{\partial f_i(u, v; \lambda)}{\partial u_a}, \frac{\partial f_i(u, v; \lambda)}{\partial v^a} \right\| = \dim \mathcal{O}_\lambda. \tag{2.26}$$

При этом без ограничения общности можно положить, что

$$f_i(0, 0; \lambda) = \lambda_i. \tag{2.27}$$

В силу того, что форма Кириллова – Костанта индуцирована ограничением скобки Ли – Пуассона на орбиту $\mathcal{O}_\lambda$, для функций $f_i(u, v; \lambda)$ должны выполняться соотношения (см. формулу (2.13)):

$$\frac{\partial f_i(u, v; \lambda)}{\partial u_a} \frac{\partial f_j(u, v; \lambda)}{\partial v^a} - \frac{\partial f_j(u, v; \lambda)}{\partial v^a} \frac{\partial f_i(u, v; \lambda)}{\partial u_a} = C_{ij}^k \, f_k(u, v; \lambda). \tag{2.28}$$

Обратно, если в некоторой окрестности $U \subset \mathcal{O}_\lambda$ элемента λ задана совокупность функций $f_i(u, v; \lambda)$, удовлетворяющих условиям (2.26) – (2.28), данные функции определяют (локально) погружение орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ в $\mathfrak{g}^*$, а координаты (u_a, v^a) являются координатами Дарбу для симплектической формы ω_λ. Далее мы будем говорить, что функции $f_i(u, v; \lambda)$, удовлетворяющие вышеназванным условиям, задают *переход к каноническим координатам* на орбите $\mathcal{O}_\lambda$.

Выделим специальный класс канонических координат, для которых функции $f_i(u, v; \lambda)$ являются линейными по «импульсным» координатам u_a:

$$f_i(u, v; \lambda) = \zeta_i^a(v) \, u_a + \chi_i(v; \lambda), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.29}$$

Соответствующий переход к координатам Дарбу будем называть *линейным*. Конечно, в общем случае линейный переход к каноническим координатам на $\mathcal{O}_\lambda$ не существует. Но если мы допустим, что функции $\zeta_i^a(v)$ и $\chi_i(v;\lambda)$ являются голоморфными функциями от комплексных переменных v^a, то тем самым мы значительно расширим класс групп Ли и их коприсоединенных орбит, для которых этот переход может быть построен.

Распишем подробнее равенство (2.28) с учетом (2.29). В результате получим

$$\zeta_i^a(v)\,\frac{\partial\zeta_j^b(v)}{\partial v^a} - \zeta_j^a(v)\,\frac{\partial\zeta_i^b(v)}{\partial v^a} = C_{ij}^k\,\zeta_k^b(v), \tag{2.30}$$

$$\zeta_i^a(v)\,\frac{\partial\chi_j(v;\lambda)}{\partial v^a} - \zeta_j^a(v)\,\frac{\partial\chi_i(v;\lambda)}{\partial v^a} = C_{ij}^k\,\chi_k(v;\lambda). \tag{2.31}$$

При этом условие (2.26) запишется в виде

$$\operatorname{rank}\|\zeta_i^a(v)\| = \frac{1}{2}\,\dim\mathcal{O}_\lambda. \tag{2.32}$$

Кроме этого, из (2.27) следует система равенств $\chi_i(0;\lambda) = \lambda_i$, которую можно рассматривать как начальное условие для системы уравнений (2.31).

Рассмотрим векторные поля $\zeta_i(v) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a}$, заданные в области V, являющейся областью определения локальных координат v^a. Нетрудно видеть, что соотношение (2.30) эквивалентно выражению $[\zeta_i,\zeta_j] = C_{ij}^k\,\zeta_k$, которое означает, что векторные поля $\zeta_i(v)$ являются инфинитезимальными генераторами локального действия группы G в области V. При этом из (2.32) следует, что данное действие является транзитивным. Таким образом, если существуют решения системы (2.30), удовлетворяющие (2.32), то существует алгебра изотропии $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ точки $v_0 = 0$, размерность которой равна

$$\dim\mathfrak{n} = \dim\mathfrak{g} - \frac{1}{2}\,\dim\mathcal{O}_\lambda. \tag{2.33}$$

Очевидно, что верно и обратное: наличие подалгебры $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющей требованию (2.33), достаточно для существования решений системы (2.30).

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений (2.31). Нетрудно видеть, что интересующее нас решение данной системы — это деформация алгебры векторных полей $\zeta_i(v)$, удовлетворяющая начальному условию $\chi(0) = \lambda$. Из результатов, изложенных в § 1.4, следует, что существование указанного решения равносильно условию подчиненности алгебры $\mathfrak{n}$ ковектору λ, то есть последний должен образовывать представление алгебры $\mathfrak{n}$:

$$\langle\lambda,[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\rangle = 0. \tag{2.34}$$

Подалгебра $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющая условиям (2.33) и (2.34) называется *поляризацией ковектора* λ. (Считаем, что функционалы из $\mathfrak{g}^*$ продолжаются на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ по линейности).

С учетом этого определения сформулируем критерий существования линейного перехода к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_\lambda$.

Теорема 2.1. *Линейный переход к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ существует тогда и только тогда, когда для линейного функционала λ существует поляризация $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

В работе [38] приведено доказательство данной теоремы при дополнительном предположении о нормальности поляризации (см. также [92]). Напомним, что поляризация $\mathfrak{n}$ называется *нормальной*, если

$$\lambda + \mathfrak{n}^{\perp} \subset \mathcal{O}_\lambda, \tag{2.35}$$

где $\mathfrak{n}^{\perp}$ — аннулятор подалгебры $\mathfrak{n}$ в пространстве, дуальном к алгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Условие (2.35) называют также *условием Пуканского*. Позднее, однако, было выяснено, что всякая поляризация автоматически является нормальной, поэтому требование (2.35) оказывается излишним [91].

Теорема 2.1 сводит вопрос о существовании линейного перехода к каноническим координатам на коприсоединенных орбитах к чисто алгебраической проблеме о существовании поляризаций в алгебрах Ли. В настоящее время данная проблема является хорошо изученной; довольно полный обзор результатов в данной области приведен в монографии [181]. Отметим, что вещественные поляризации всегда существуют для нильпотентных и вполне разрешимых алгебр Ли, а комплексные поляризации всегда существуют для разрешимых алгебр Ли. Кроме того, для всякого регулярного ковектора произвольной алгебры Ли всегда существует (комплексная) поляризация, причем разрешимая.

Замечание 2.4. Отметим, что если для данного функционала поляризация не существует, то переход к координатам Дарбу (нелинейный по переменным u_a) все равно может быть построен. Таким образом, наличие поляризации — полезное свойство, но вовсе не обязательное для построения методов интегрирования гамильтоновых систем на группах Ли.

В общем случае ковектор λ может иметь несколько неэквивалентных поляризаций. Тем не менее, легко проверить, что имеет место следующее

Утверждение 2.1. *Пусть для данного ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ существует поляризация $\mathfrak{n}$, тогда $\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{n}$.*

Таким образом, любая поляризация ковектора λ всегда содержит вещественную подалгебру — аннулятор $\mathfrak{g}^\lambda$.

2.2.2 Связь с геометрическим квантованием

Обсудим теперь геометрический смысл линейного перехода к каноническим координатам на коприсоединенных орбитах.

Напомним вначале одно определение, играющее центральную роль в общей схеме геометрического квантования симплектических многообразий [182, 183]. Пусть (M,ω) — гладкое вещественное симплектическое многообразие. Интегрируемое подрасслоение $\mathscr{P}$ касательного расслоения TM такое, что каждый слой $\mathscr{P}(x)$ является лагранжевым подпространством симплектического пространства $(T_xM,\omega(x))$, называется *поляризацией* симплектического многообразия (M,ω). Имеет место также комплексный аналог поляризаций. А именно, *комплексная поляризация* симплектического многообразия (M,ω) определяется как интегрируемое подрасслоение $\mathscr{P}$ комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ такое, что каждый слой $\mathscr{P}(x)$ является лагранжевым подпространством симплектического комплексного пространства $(T_x^{\mathbb{C}}M,\omega^{\mathbb{C}}(x))$. (Здесь интегрируемость понимается в смысле критерия Фробениуса).

Как и раньше, обозначим через π проекцию группы G на орбиту $\mathcal{O}_\lambda$, определенную формулой $\pi(g)=\mathrm{Ad}_g^*\lambda$, $g\in G$. Производная $\pi_*(e)$ этой проекции в единице группы отображает алгебру $\mathfrak{g}$ на касательное пространство $T_\lambda\mathcal{O}_\lambda$. Пусть $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}$ — вещественная поляризация ковектора λ. Рассмотрим подпространство $\mathscr{P}(\lambda)\subset T_\lambda\mathcal{O}_\lambda$, являющееся образом подалгебры $\mathfrak{n}$ при отображении $\pi_*(e)$: $\mathscr{P}(\lambda)\equiv\pi_*(e)(\mathfrak{n})$. Так как ядро отображения $\pi_*(e)$ совпадает с аннулятором $\mathfrak{g}^\lambda\subset\mathfrak{n}$, для размерности подпространства $\mathscr{P}(\lambda)$ получаем

$$\dim\mathscr{P}(\lambda)=\dim\mathfrak{n}-\dim\mathfrak{g}^\lambda=\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}_\lambda.$$

Кроме того, из определений формы ω_λ и поляризации $\mathfrak{n}$ следует, что для любых $X,Y\in\mathfrak{n}$ выполняется условие

$$\omega_\lambda(\pi_*(e)X,\pi_*(e)Y)=\langle\lambda,[X,Y]\rangle=0,$$

то есть ограничение ω_λ на подпространство $\mathscr{P}(\lambda)$ равно нулю. Следовательно, $\mathscr{P}(\lambda)$ — лагранжево подпространство симплектического пространства $(T_\lambda\mathcal{O}_\lambda,\omega_\lambda)$.

Допустим теперь дополнительно, что поляризация $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{g}$ является G^λ-инвариантной подалгеброй, то есть $G^\lambda\cdot\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n}$. В этом случае с помощью коприсоединенного действия группы G подпространство $\mathscr{P}(\lambda)$ может быть корректно «разнесено» на всю орбиту. Тем самым мы получаем G-инвариантное подрасслоение $\mathscr{P}\subset T\mathcal{O}_\lambda$, каждый слой которого является лагранжевым. В следствии того, что $\mathfrak{n}$ — подалгебра, построенное описанным способом распределение оказывается интегрируемым. Таким образом, вещественная поляризация $\mathfrak{n}$

ковектора λ однозначно определяет некоторую вещественную G-инвариантную поляризацию конрисоединенной орбиты $\mathcal{O}_\lambda$. Нетрудно видеть, что указанное соответствие обратимо: всякой вещественной G-инвариантной поляризации $\mathscr{P}$ орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ отвечает подалгебра $\mathfrak{n} = \pi_*(e)^{-1}\mathscr{P}(\lambda) \subset \mathfrak{g}$, являющаяся поляризацией элемента λ.

Замечание 2.5. В общем случае условие $G^\lambda{\cdot}\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$ может не выполняться. Тем не менее, из утверждения 2.1 следует, что данное условие всегда выполняется локально; в частности, оно имеет место для элементов из подгруппы $G^\lambda_e \subset G^\lambda$, где G^λ_e — связная компонента единицы группы G^λ. Это означает, что G-инвариантная поляризация орбиты всегда может быть построена, по крайней мере, в некоторой окрестности ковектора λ.

Полезно привести явную конструкцию подпространств $\mathscr{P}(f) \subset T_f\mathcal{O}_\lambda$, порождающих поляризацию коприсоединенной орбиты $\mathcal{O}_\lambda$:

$$\mathscr{P}(\pi(g)) = \{\pi_*(g)\,(\eta_X(g)) \mid X \in \mathfrak{n}\}.$$

Здесь $\pi_*(g) : T_gG \to T_{\pi(g)}\mathcal{O}_\lambda$ — производная отображения π в точке $g \in G$, η_X — правоинвариантное векторное поле на G, отвечающее вектору $X \in \mathfrak{n}$.

Интегрируемость вещественной G-инвариантной поляризации $\mathscr{P} \subset T\mathcal{O}_\lambda$ означает, что существует слоение орбиты $\mathcal{O}_\lambda$ такое, что касательное пространство к слою в точке $f \in \mathcal{O}_\lambda$ совпадает с подпространством $\mathscr{P}(f)$. Нетрудно видеть, что слои этого слоения будут иметь вид $\mathrm{Ad}^*_{gN}\lambda$, где $N = \exp(\mathfrak{n})$. В частности, слой, проходящий через точку λ, является орбитой коприсоединенного действия группы N.

Как правило, на практике встречаются ситуации, когда слоение орбиты, порождаемое поляризацией $\mathscr{P}$, является расслоением. В этом случае множество слоев V само является гладким многообразием так, что $\mathcal{O}_\lambda$ является расслоеным пространством над V. Так как слои этого расслоения являются подмногообразиями, инвариантными относительно коприсоединенного действия группы G, мы имеем индуцированное действие G на многообразии V, причем это действие — транзитивное. Нетрудно также видеть, что группой стационарности точки $v_0 \in V$, соответствующей слою, проходящему через элемент λ, является группа $N = \exp(\mathfrak{n})$, в силу чего получаем $V = N \setminus G$.

В описанном нами методе построения канонических координат на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$ величины v^a представляют собой координаты в некоторой области, на которой транзитивно действует группа G. При этом алгеброй изотропии точки $v_0 = 0$ является поляризация $\mathfrak{n}$ ковектора λ. Отсюда ясен геометрический смысл этих координат, а именно: величины v^a — это локальные координаты на базе расслоения, определяемого G-инвариантной поляризацией орбиты $\mathcal{O}_\lambda$, соответствующей поляризации $\mathfrak{n}$. Нетрудно также видеть, что канонически сопряженные им координаты u_a суть локальные координаты в слое указанного расслоения. В частности, локальный базис распределения $\mathscr{P} \subset T\mathcal{O}_\lambda$ задается векторными полями ∂_{u_a}, $a = 1, \ldots, (1/2)\dim\mathcal{O}_\lambda$.

Можно показать, что соответствие между поляризациями в алгебрах Ли и инвариантными поляризациями соответствующих коприсоединенных орбит будет иметь место и в комплексном случае. Говоря более строго, существует биекция между множеством всех G-инвариантных комплексных поляризаций $\mathscr{P}$ орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$ и множеством комплексных поляризаций $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ данного ковектора λ. При этом поляризации $\mathscr{P} \subset T^{\mathbb{C}}\mathcal{O}_\lambda$ будет отвечать подалгебра $\mathfrak{n} = \pi_*(e)^{-1}\mathscr{P}(\lambda)$ [180].

2.2.3 Примеры

Проиллюстрируем метод построения канонических координат на коприсоединенных орбитах несколькими примерами, связанными с трехмерными группами Ли.

Пример 2.1. Рассмотрим группу $E(2)$, являющуюся группой движений плоскости. Данная группа естественно изоморфна группе матриц вида

$$g_x = \begin{pmatrix} \cos x_3 & -\sin x_3 & x_1 \\ \sin x_3 & \cos x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \in [0, 2\pi). \tag{2.36}$$

Матрицы $e_i \equiv (\partial g_x/\partial x_i)|_{x=0}$ образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{e}(2)$ группы $E(2)$ и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Коприсоединенное действие группы $E(2)$ на дуальном пространстве $\mathfrak{e}(2)^*$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} &(\mathrm{Ad}^*_x f)_1 = \cos x_3 f_1 - \sin x_3 f_2, \\ &(\mathrm{Ad}^*_x f)_2 = \sin x_3 f_1 + \cos x_3 f_2, \\ &(\mathrm{Ad}^*_x f)_3 = (x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3) f_1 + (x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3) f_2 + f_3, \end{aligned}$$

где f_i — компоненты ковектора $f \in \mathfrak{e}(2)^*$ в базисе, дуальном к базису $\{e_i\}$. Отсюда нетрудно видеть, что коприсоединенные орбиты рассматриваемой группы бывают двух типов: сингулярные, являющиеся точками прямой $f_1 = f_2 = 0$, и регулярные, представляющие собой двумерные цилиндры

$$\mathcal{O}_{\lambda(J)} = \{f \in \mathfrak{g}^* \,|\, f_1^2 + f_2^2 = J^2\}, \quad \lambda(J) = (J, 0, 0), \quad J \in (0, +\infty).$$

Построим канонические координаты на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$. Как было сказано выше, линейный переход к координатам Дарбу определяется поляризацией ковектора $\lambda(J)$. В данном случае поляризация — это двумерная подалгебра, удовлетворяющая условию (2.34). Нетрудно видеть, что в качестве такой подалгебры может быть выбрана коммутативная подалгебра $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2\}$. Заметим также, что аннулятор элемента $\lambda(J)$ одномерен и натянут на базисный вектор e_1.

Используя алгоритмы, изложенные в предыдущей главе, реализуем алгебру $\mathfrak{e}(2)$ генераторами действия группы $E(2)$ на однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus E(2)$: $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, $\zeta_3 = \partial_v$. Деформация этой алгебры векторных полей, удовлетворяющая начальному условию $\chi(0) = \lambda(J)$, также легко может быть найдена: $\chi_1 = J\cos v$, $\chi_2 = -J\sin v$, $\chi_3 = 0$. В результате функции $f_i(u, v; \lambda(J))$, определяющие линейный переход к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, имеют вид

$$f_1 = J\cos v, \quad f_2 = -J\sin v, \quad f_3 = u. \tag{2.37}$$

Здесь $v \in (-\pi, \pi)$, $u \in \mathbb{R}$. Отметим, что построенные канонические координаты являются почти глобальными на орбите, то есть соответствующая координатная карта покрывает всю коприсоединенную орбиту за исключением множества меры ноль.

Инвариантная поляризация $\mathscr{P}$ орбиты $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, отвечающая поляризации $\mathfrak{n}$, порождается векторным полем ∂_u. Слои этой поляризации — это прямые, являющиеся образующими цилиндра $f_1^2 + f_2^2 = J^2$. Все такие прямые гладким образом параметризуются точками окружности, заданной уравнениями $f_1 = J\cos v$, $f_2 = -J\sin v$, $f_3 = 0$. Таким образом, поляризация $\mathscr{P}$ определяет на орбите структуру расслоения с базой $V \simeq S^1$ и слоем, диффеоморфным $\mathbb{R}$. Отметим, что указанное расслоение является тривиальным: $\mathcal{O}_{\lambda(J)} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. В общем случае данный факт, конечно же, не будет иметь место: препятствием к этому являются нетривиальные топологические свойства коприсоединенных орбит.

Пример 2.2. Пусть $G = SO(3)$ — группа вращений трехмерного вещественного пространства $\mathbb{R}^3$. Данная группа является трехмерной компактной простой группой Ли. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ этой группы естественным образом отождествляется с алгеброй всех кососимметрических вещественных матриц третьего порядка. В базисе

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

коммутационные соотношения алгебры $\mathfrak{g}$ принимают вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_3] = -e_2. \tag{2.38}$$

Точка $f=0$ является единственной сингулярной орбитой коприсоединенного представления группы G. Каждая регулярная орбита проходит через ковектор $\lambda(J)=(0,0,-J)$ и представляет собой сферу радиуса J:

$$\mathcal{O}_{\lambda(J)}=\{f\in\mathfrak{g}^*\,|\,f_1^2+f_2^2+f_3^2=J^2\},\quad J\in(0,+\infty).$$

Построим канонические координаты на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$. Как известно, алгебра $\mathfrak{so}(3)$ не содержит двумерных подалгебр, поэтому вещественных поляризаций в данном случае нет. В качестве комплексной поляризации ковектора $\lambda(J)$ выберем комплексную двумерную подалгебру $\mathfrak{n}=\{e_1+ie_2,e_3\}\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Функции линейного перехода к координатам Дарбу, соответствующие данной поляризации, имеют вид:

$$f_1=\frac{i}{2}\left(1-v^2\right)u+Jv,\quad f_2=-\frac{1}{2}\left(1+v^2\right)u-iJv,\quad f_1=-iuv+J. \tag{2.39}$$

Выясним области определения координат u и v. Из соотношений (2.39) получаем

$$\frac{f_1+if_2}{J+f_3}=v,\quad f_1-if_2=iu. \tag{2.40}$$

Отсюда видно, что координата v представляет собой образ точки $f=(f_1,f_2,f_3)$ при стереографической проекции на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, в то время как координата u удовлетворяет условию $|u|\le J$, то область ее определения есть замкнутый круг в $\mathbb{C}$ радиуса J с центром в начале координат.

В сферических координатах (φ,θ) сфера $f_1^2+f_2^2+f_3^2=J^2$ задается уравнениями

$$f_1=J\cos\varphi\sin\theta,\quad f_2=J\sin\varphi\sin\theta,\quad f_3=J\cos\theta,$$

где $\varphi\in[0,2\pi)$, $\theta\in[0,\pi)$. Из соотношений (2.40) получаем, что канонические координаты (u,v) связаны со сферическими координатами (φ,θ) равенствами

$$v=e^{i\varphi}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},\quad u=-iJe^{-i\varphi}\sin\theta. \tag{2.41}$$

Отсюда нетрудно видеть, что в координатах (φ,θ) форма Кириллова – Костанта имеет вид

$$\omega_{\lambda(J)}=J\sin\theta\,d\theta\wedge d\varphi,$$

и совпадает с формой площади на двумерной сфере. Комплексная инвариантная поляризация $\mathscr{P}\subset T^{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, отвечающая поляризации $\mathfrak{n}=\{e_1+ie_2,e_3\}$, в координатах (u,v) по построению задается векторным полем ∂_u. С помощью (2.41) нетрудно получить вид этой поляризации в сферических координатах:

$$\partial_u=\frac{e^{i\varphi}}{J(1+\cos\theta)}\left(i\partial_\theta-\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\right).$$

Пример 2.3. В качестве еще одного примера рассмотрим трехмерную простую группу $SL(2,\mathbb{R})$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ этой группы состоит из всех вещественных 2×2-матриц с нулевым следом. Выберем в этой алгебре базис

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда коммутационные соотношения между данными базисными элементами запишутся как

$$[e_1,e_2] = -e_3, \quad [e_1,e_3] = -e_2, \quad [e_2,e_3] = e_1.$$

Рассмотрим коприсоединенные орбиты группы $SL(2,\mathbb{R})$. Единственная сингулярная орбита — это точка $f=0$. Всякая регулярная орбита в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})^*$ является поверхностью уровня функции Казимира $\mathscr{K}(f) = f_1^2+f_2^2-f_3^2$, в связи с чем имеется три различных типа орбит, в зависимости от выполнения следующих условий:

1) $\mathscr{K}(f)>0$ — однополостные гиперболоиды (тип A);

2) $\mathscr{K}(f)<0$ — двуполостные гиперболоиды, в которых каждая из пол является отдельной орбитой (тип B);

3) $\mathscr{K}(f)=0$ — конус, который после удаления начала координат распадается на две орбиты (тип C).

С точки зрения построения канонических координат наиболее интересны первые два типа, поэтому ниже мы исследуем именно эти случаи.

1. *Тип A*. В этом случае каждая орбита проходит через ковектор $\lambda(J)=(J,0,0)$, где $J\in(0,+\infty)$. Как нетрудно видеть, данный ковектор обладает вещественной поляризацией $\mathfrak{n}=\{e_1,e_2+e_3\}$. Соответствующий линейный переход к координатам Дарбу имеет вид

$$f_1 = -u\sin v + J\cos v, \quad f_2 = -u\cos v - J\sin v, \quad f_3 = u, \tag{2.42}$$

где $v\in(-\pi,\pi)$, $u\in\mathbb{R}$. Слои соответствующей инвариантной поляризации $\mathscr{P}\subset T\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ — это семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $f_1^2+f_2^2-f_3^2=J^2$.

2. *Тип B*. Орбиты этого типа могут быть параметризованы следующим образом: $\lambda(J)=(0,0,J)$, $J\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. (Знак параметра J отвечает выбору верхней или нижней пол двуполосного гиперболоида). Ковектор $\lambda(J)$ не допускает вещественных поляризаций. В качестве комплексной поляризации выберем подалгебру $\mathfrak{n}=\{e_1-ie_2,e_3\}$. Функции линейного канонического перехода, соответствующие данной поляризации, будут иметь вид:

$$f_1 = -\frac{i}{2}\left(1+v^2\right)u - Jv, \quad f_2 = -\frac{1}{2}\left(1-v^2\right)u - iJv, \quad f_3 = iuv + J. \tag{2.43}$$

Из равенств (2.43) следуют соотношения

$$\frac{if_2 - f_1}{J + f_3} = v, \quad f_1 + if_2 = -iu, \tag{2.44}$$

используя которые нетрудно выяснить, что область определения координаты v — это открытый круг единичного радиуса $D_1 = \{v \in \mathbb{C} \colon |v| < 1\}$, в то время как область определения координаты u — вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Действительно, введем на гиперболоиде $f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 = -J^2$ псевдосферические координаты χ и φ:

$$f_1 = J \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \quad f_2 = J \operatorname{sh} \chi \sin \varphi, \quad f_3 = J \operatorname{ch} \chi,$$

где $\chi \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Тогда из формул (2.44) следует

$$v = -e^{-i\varphi} \operatorname{th} \frac{\chi}{2}, \quad u = Je^{i\varphi} \operatorname{sh} \chi,$$

откуда, в частности, получаем $|v| = |\operatorname{th} \chi/2| < 1$.

Приведем вид формы Кириллова – Костанта на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, выраженной в псевдосферических координатах χ и φ:

$$\omega_{\lambda(J)} = J \operatorname{sh} \chi \, d\varphi \wedge d\chi.$$

В свою очередь комплексная инвариантная поляризация $\mathscr{P} \subset T^{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, отвечающая подалгебре $\mathfrak{n} = \{e_1 - ie_2, e_3\}$, в этих координатах задается векторным полем:

$$\partial_u = \frac{e^{-i\varphi}}{J(1 + \operatorname{ch} \chi)} \left(\partial_\chi - \frac{i\partial_\varphi}{\operatorname{sh} \chi} \right).$$

§ 2.3 Специальное каноническое преобразование в T^*G. Интегрирование правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли

В настоящем параграфе мы опишем конструкцию специального канонического преобразования в T^*G, составляющего основу излагаемого далее оригинального метода интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли.

2.3.1 Построение специального канонического преобразования

Пусть $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — поляризация ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $f_i(u, v; \lambda) = \zeta_i^a(v) u_a + \chi_i(v; \lambda)$ — функции, задающие соответствующий линейный переход к координатам Дарбу на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$. Напомним, что векторные поля $\zeta_i(v) = \zeta_i^a(v) \partial_{v^a}$ образуют алгебру генераторов действия группы G на (локальном) однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, а функции $\chi_i(v; \lambda)$ определяют деформацию этой алгебры с начальным условием $\chi_i(0; \lambda) = \lambda_i$.

Коприсоединенное представление группы G, ограниченное на орбиту $\mathcal{O}_\lambda$, определяет действие G на $\mathcal{O}_\lambda$, которое мы для определенности будем считать правым. Пусть (u_a, v^a) — канонические координаты некоторой точки $f \in \mathcal{O}_\lambda$. Групповому элементу $x \in G$ отвечает преобразование, переводящее точку f в элемент $f' = \mathrm{Ad}^*_{x^{-1}} f$, координаты которого мы обозначим (u'_a, v'^a). (Мы, естественно, предполагаем, что x принадлежит достаточно малой окрестности единицы группы так, что f и f' лежат в одной координатной карте). Тогда, очевидно, имеем

$$\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, f_j(u, v; \lambda) = f_i(u', v'; \lambda). \tag{2.45}$$

С помощью соотношения (2.45), выразим переменные v'^a и u'_a как функции от величин v^a и u_a:

$$v'^a = v'^a(u, v, x), \quad u'_a = u'_a(u, v, x). \tag{2.46}$$

Указанные функции задают действие группы G на орбите $\mathcal{O}_\lambda$, выраженное в канонических координатах. Ясно, что так как форма Кириллова – Костанта $\omega_\lambda = du_a \wedge dv^a$ инвариантна относительно этого действия, координатное преобразование (2.46) будет *каноническим* для любого $x \in G$, то есть

$$du'_a \wedge dv'^a = du_a \wedge dv^a. \tag{2.47}$$

Далее действие группы G на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$, записанное в терминах канонических координат, мы будем называть *каноническим*.

Исследуем структуру канонического действия G на $\mathcal{O}_\lambda$ более подробно. В частности, докажем следующее

Утверждение 2.2. *Пусть функции $f_i(u, v; \lambda) = \zeta_i^a(v) u_a + \chi_i(v; \lambda)$ задают линейный переход к каноническим координатам на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$, соответствующий поляризации $\mathfrak{n}$ ковектора $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Тогда каноническое действие группы G на $\mathcal{O}_\lambda$ определяется равенствами*

$$v'^a = \Psi^a(v, x), \tag{2.48}$$

$$u_a = \frac{\partial}{\partial v^a}\left[\Psi^b(v, x)\, u'_b + \int\limits_e^x \chi_i(\Psi(v, x); \lambda)\omega^i(x)\right]. \tag{2.49}$$

Здесь $\Psi : V \times G \to V$ — функция действия группы G на (локальном) однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, $\omega^i(x)$ — левоинвариантные 1-формы на G.

Доказательство. Распишем выражение $\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, f_j(u, v; \lambda)$ более подробно:

$$\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, f_j(u, v; \lambda) = \|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, \zeta_j^a(v) u_a + \|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, \chi_j(v; \lambda). \tag{2.50}$$

В силу того, что векторные поля $\zeta_i(v) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a}$ представляют собой генераторы действия группы G на правом однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, справедливо следующее равенство:

$$\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, \zeta_j^a(v) = \frac{\partial \Psi^a(\tilde{v}, x^{-1})}{\partial \tilde{v}^b}\Big|_{\tilde{v}=\Psi(v,x)} \cdot \zeta_i^b(\Psi(v,x)). \tag{2.51}$$

Далее, с помощью формулы (1.68) утверждения 1.5, получаем

$$\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, \chi_j(v;\lambda) = \chi_i(\Psi(v,x);\lambda) - \|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, \zeta_j^a(v)\, \frac{\partial \Theta(x;v)}{\partial v^a}, \tag{2.52}$$

где $\Theta(x;v)$ — производящая функции деформации $\chi(v;\lambda)$ (см. определение (1.4)). Комбинируя между собой равенства (2.51) и (2.52), и затем подставляя их в (2.50), будем иметь

$$\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\, f_j(u,v;\lambda) = \zeta_i^b(v')u_b' + \chi_i(v';\lambda),$$

где величины v'^a и u_a' определены как

$$v'^a = \Psi^a(v,x), \quad u_b' = \frac{\partial \Psi^a(\tilde{v}, x^{-1})}{\partial \tilde{v}^b}\Big|_{\tilde{v}=\Psi(v,x)} \left(u_a - \frac{\partial \Theta(x;v)}{\partial v^a} \right).$$

С учетом выражения (1.65) для функции $\Theta(x;v)$, последние равенства могут быть переписаны в виде (2.48) и (2.49). $\square$

В некоторой окрестности точки $\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ за независимые координаты можно принять величины v^a и u_a'. Действительно, как следует из соотношений (2.48) и (2.49), якобиан преобразования $v'^a = v'^a(u',v,x)$, $u_a = u_a(u',v,x)$ в точке λ отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial(u,v')}{\partial(u',v)} \right\| \Big|_{u'=v=0} = \det \left\| \frac{\partial \Psi(v,x)}{\partial v} \right\|^2 \Big|_{v=0} \neq 0.$$

Далее, равенство (2.47) означает, что 1-форма $v'^a du_a' + u_a\, dv^a$ есть полный дифференциал:

$$v'^a(u',v,x)du_a' + u_a(u',v,x)dv^a = dS_\lambda(u',v,x). \tag{2.53}$$

Определение 2.1. Функцию $S_\lambda(u',v,x)$, определяемую равенством (2.53), будем называть *производящей функцией* канонического действия группы G на орбите коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$.

С использованием соотношений (2.48) и (2.49), для производящей функции $S_\lambda(u',v,x)$ получаем

$$\frac{\partial S_\lambda(u',v,x)}{\partial u_a'} = \Psi^a(v,x), \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial S_\lambda(u',v,x)}{\partial v^a} = \frac{\partial}{\partial v^a}\left[\Psi^b(v,x)\, u_b' + \int \chi_i(\Psi(v,x);\lambda)\omega^i(x) \right]. \tag{2.55}$$

Элементарное интегрирование полученной системы уравнений с учетом очевидного начального условия $S_\lambda(u', v, e) = u'_a\, v^a$ дает:

$$S_\lambda(u', v, x) = u'_a \Psi^a(v, x) + \int\limits_e^x \chi_i(\Psi(v, x); \lambda)\omega^i(x). \tag{2.56}$$

Формула (2.56) представляет собой явное выражение для производящей функции канонического действия группы G на орбите коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$. Напомним, что построение канонических координат на поляризованных коприсоединенных орбитах осуществляется алгебраическими методами. Функция $\Psi(v, x)$, определяющая действие группы G на однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, также может быть найдена путем решения системы алгебраических уравнений (2.45). Отсюда мы делаем следующий вывод: производящая функция $S_\lambda(u', v, x)$ может быть вычислена в квадратурах, то есть ее нахождение сводится к решению алгебраических уравнений и взятию интегралов.

Замечание 2.6. При доказательстве утверждения 2.2 мы использовали тот факт, что интеграл в равенстве (2.56) представляет собой производящую функцию деформации $\chi(v; \lambda)$ алгебры векторных полей $\zeta_i(v)$. Применяя для указанной производящей функции формулу (1.74), мы можем записать для $S_\lambda(u', v, x)$ альтернативное выражение:

$$S_\lambda(u', v, x) = u'_a\, \Psi^a(v, x) + \lambda_\alpha\, h^\alpha(v, x). \tag{2.57}$$

Здесь $\lambda_\alpha = \lambda(e_\alpha)$, где $\{e_\alpha\}$ — базис в подалгебре $\mathfrak{n}$, $h^\alpha(v, x)$ — координатные компоненты фактора однородного пространства $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, ассоциированные с выбранным базисом.

Пусть $\xi_i(x) = (L_x)_*\, e_i$, $\eta_i(x) = -(R_x)_*\, e_i$ — лево- и правоинвариантные векторные поля на группе G соответственно. Докажем два важных соотношения, которым удовлетворяет производящая функция (2.56).

Утверждение 2.3. *Производящая функция канонического действия группы G на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ удовлетворяет следующим соотношениям*

$$\xi_i(x)\, S_\lambda(u', v, x) = f_i\left(u', \frac{\partial S_\lambda}{\partial u'}; \lambda\right), \tag{2.58}$$

$$\eta_i(x)\, S_\lambda(u', v, x) = -f_i\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial v}, v; \lambda\right). \tag{2.59}$$

Доказательство. Так как $\Psi(v, x)$ является функцией действия группы G на правом однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$, а векторные поля $\zeta_i(v) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a}$ представляют собой генераторы этого действия, имеют место следующие соотношения:

$$\xi_i(x)\Psi^a(v, x) = \zeta_i^a(\Psi(v, x)), \quad \eta_i(x)\Psi^a(v, x) = -\frac{\partial \Psi^a(v, x)}{\partial v^b}\, \zeta_i^b(v). \tag{2.60}$$

Подействуем левоинвариантным векторным полем $\xi_i(x)$ на функцию $S_\lambda(u', v, x)$. В результате получаем

$$\xi_i(x)S_\lambda(u', v, x) = \xi_i(x)\Psi^a(v, x)u'_a + \xi_i(x)\int \chi_k(\Psi(v, x); \lambda)\omega^k(x) =$$
$$= \zeta_i^a(\Psi(v, x))u'_a + \xi_i^j(x)\omega_j^k(x)\chi_k(\Psi(v, x); \lambda) = \zeta_i^a(\Psi(v, x))u_a + \chi_i(\Psi(v, x); \lambda).$$

Отсюда в силу равенства (2.54) следует (2.58).

Рассмотрим теперь результат действия на функцию $S_\lambda(u', v, x)$ правоинвариантного векторного поля $\eta_i(x)$:

$$\eta_i(x)S_\lambda(u', v, x) = \eta_i(x)\Psi^a(v, x)u'_a + \eta_i(x)\int \chi_k(\Psi(v, x); \lambda)\omega^k(x) =$$
$$= -\frac{\partial\Psi^a(v, x)}{\partial v^b}\,\zeta_i^b(v)p'_a + \eta_i^j(x)\omega_j^k(x)\chi_k(\Psi(v, x); \lambda) =$$
$$= -\frac{\partial\Psi^a(v, x)}{\partial v^b}\,\zeta_i^b(v)u'_a - \|\mathrm{Ad}_{x^{-1}}\|_i^k\chi_k(\Psi(v, x); \lambda). \quad (2.61)$$

Здесь мы использовали соотношение $\|\mathrm{Ad}_{x^{-1}}\|_i^k = \eta_i^j(x)\omega_j^k(x)$, являющееся простым следствием формулы (1.12). Применяя к правой части выражения (2.61) равенство (1.68), путем несложных преобразований получаем:

$$\eta_i(x)S_\lambda(u', v, x) = -\zeta_i^b(v)\,\frac{\partial}{\partial v^b}\left[\Psi^a(v, x)\,u'_a + \int \chi_k(\Psi(v, x))\omega^k(x)\right] - \chi_i(v; \lambda).$$

Имея теперь в виду равенство (2.55), нетрудно убедиться в справедливости соотношения (2.59). □

В дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ зафиксируем некоторый регулярный ковектор λ_0. Так как элемент λ_0 находится в общем положении, коприсоединенные орбиты, близкие к орбите $\mathcal{O}_{\lambda_0}$, диффеоморфны ей и можно считать, что достаточно малая окрестность $U \subset \mathfrak{g}^*$ точки λ_0 расслоена на гомеоморфные слои. Рассмотрим фактор-пространство U/G, являющееся базой указанного расслоения. Очевидно, что $\dim U/G = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$, где $\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Введем в U/G локальную систему координат $J = (J_1, \dots, J_{\mathrm{ind}\,\mathfrak{g}})$ и обозначим с помощью $\lambda(J)$ некоторое гладкое локальное сечение расслоения $U \to U/G$. Тогда соответствие $J \to \mathcal{O}_{\lambda(J)}$ задает гладкую параметризацию орбит в окрестности регулярного элемента λ_0.

Пусть (u, v) — канонические координаты на орбите коприсоединенного представления $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$. Нетрудно видеть, что набор величин (u, v, J) образует локальную систему координат на $\mathfrak{g}^*$, заданную в окрестности регулярного элемента λ_0. В явном виде переход к данным координатам определяется равенствами $f_i = f_i(u, v; \lambda(J))$, причем из соотношений (2.28) вытекает, что в указанных локальных координатах скобка Ли – Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{g}}$

примет следующий вид:

$$\{v^a, v^b\}_{\mathfrak{g}} = \{u_a, u_b\}_{\mathfrak{g}} = \{v^a, J_\mu\}_{\mathfrak{g}} = \{u_a, J_\mu\}_{\mathfrak{g}} = \{J_\mu, J_\nu\}_{\mathfrak{g}} = 0, \quad \{u_a, v^b\}_{\mathfrak{g}} = \delta_a^b. \tag{2.62}$$

Здесь $a, b = 1, \ldots, (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$, $\mu, \nu = 1, \ldots, \operatorname{ind} \mathfrak{g}$.

Замечание 2.7. Необходимо отметить, что локальные координаты (u, v, J), в которых скобка Ли – Пуассона имеет вид (2.62), согласно обобщенной теореме Дарбу существуют всегда [172]. Здесь, однако, для нас представляет интерес несколько иной результат. А именно, как следует из вышеизложенных соображений, в окрестности регулярного ковектора подобные координаты могут быть построены исключительно алгебраическими методами.

Пусть $S_{\lambda(J)}(u', v, x)$ — семейство производящих функций канонического действия группы G на орбитах $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$. Рассматривая $S_{\lambda(J)}(u', v, x)$ как функцию от переменных v^a, u'_a, J_μ и x^i, нетрудно видеть, что ее областью определения является некоторая окрестность в $G \times \mathfrak{g}^*$, содержащая точку (e, λ_0). Из соотношения

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S_{\lambda(J)}(u', v, x)}{\partial x \, \partial(u', v, J)} \right\| \Big|_{e, \lambda_0} \neq 0, \tag{2.63}$$

следует, что функция $S_{\lambda(J)}(u', v, x)$ является *производящей функцией* некоторого канонического преобразования, заданного в окрестности точки $(e, \lambda_0) \in T^*G$. Действительно, определим дополнительные переменные p_i и τ^μ с помощью следующих равенств:

$$p_i = \frac{\partial S_{\lambda(J)}(u', v, x)}{\partial x^i}, \quad \tau^\mu = \frac{\partial S_{\lambda(J)}(u', v, x)}{\partial J_\mu}. \tag{2.64}$$

Комбинируя между собой формулы (2.48), (2.49) и (2.54), (2.55), получаем

$$v'^a = \frac{\partial S_{\lambda(J)}(u', v, x)}{\partial u'_a}, \quad u_a = \frac{\partial S_{\lambda(J)}(u', v, x)}{\partial v^a}. \tag{2.65}$$

Таким образом, полный дифференциал функции $S_{\lambda(J)}(u', v, x)$ (относительной всей совокупности переменных) может быть записан в виде

$$dS_{\lambda(J)}(u', v, x) = p_i dx^i + u_a dv^a + v'^a du'_a + \tau^\mu dJ_\mu,$$

откуда немедленно получаем

$$dp_i \wedge dx^i = -du_a \wedge dv^a + du'_a \wedge dv'^a + dJ_\mu \wedge d\tau^\mu.$$

Осталось заметить, что ввиду условия (2.63), система уравнений (2.64), (2.65) однозначно разрешима относительно переменных (x^i, p_i). Выражая величины v^a, u_a, v'^a, u'_a, J_μ и τ_μ как функции от координат x^i и p_i, мы получаем локальное взаимооднозначное отображение в T^*G, которое по построению является каноническим.

Подводя итог изложенным здесь результатам, сформулируем их в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda(J)$ — *локальное гладкое сечение расслоения* $U \to U/G$, *где* U — *некоторая окрестность регулярного элемента* $\lambda_0 \in \mathfrak{g}^*$. *Пусть* $f_i(u,v;\lambda(J)) = \zeta_i^a(v)u_a + \chi_i(v;\lambda(J))$ — *функции, задающие линейный переход к каноническим координатам на орбите* $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, $S_{\lambda(J)}(u',v,x)$ — *производящая функция канонического действия группы* G *на орбите* $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, *определяемая формулой* (2.56). *Тогда соотношения* (2.64), (2.65) *задают локальное каноническое преобразование, определенное в некоторой окрестности точки* $(e,\lambda_0) \in T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$.

Определение 2.2. Локальное каноническое преобразование в T^*G, заданное формулами (2.64), (2.65), мы будем называть *специальным*.

2.3.2 Примеры

Приведем примеры построения специального канонического преобразования на кокасательных расслоениях некоторых трехмерных групп Ли.

Пример 2.4. Пусть $E(2)$ — группа движений плоскости, рассмотренная нами в примере 2.1. Используя для элементов этой группы матричное представление (2.36), выпишем явный вид соответствующих левоинвариантных базисных 1-форм $\omega^i(x)$:

$$\omega^1 = \cos x_3\, dx_1 + \sin x_3\, dx_2, \quad \omega^2 = -\sin x_3\, dx_1 + \cos x_3\, dx_2, \quad \omega^3 = dx_3. \tag{2.66}$$

Как уже было отмечено, семейство ковекторов $\lambda(J) = (J,0,0)$, параметризованное вещественным параметром $J \in (0,+\infty)$, определяет гладкую параметризацию регулярных коприсоединенных орбит в пространстве $\mathfrak{e}(2)^*$. Функции $f_i(u,v;\lambda(J))$, задающие линейный переход к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, даются формулами (2.37). Решая систему алгебраических уравнений (2.45) относительно переменных u' и v', находим

$$v' = v + x_3, \quad u' = u + J\,(x_1 \sin v + x_2 \cos v)\,. \tag{2.67}$$

Формулы (2.67) задают каноническое действие группы $E(2)$ на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ в координатном виде. При этом функция $\Psi(v,x) = v + x_3$ определяет групповое действие на однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus E(2)$, диффеоморфном окружности S^1.

Вычисляя согласно (2.56) функцию $S_{\lambda(J)}(u',v,x)$, получаем

$$S_{\lambda(J)}(u',v,x) = u'(v + x_3) + J\,(x_1 \cos v - x_2 \sin v)\,. \tag{2.68}$$

Используя эту функцию, выпишем равенства (2.64) и (2.65):

$$p_1 = J\cos v, \quad p_2 = -J\sin v, \quad p_3 = u,$$

$$v' = v + x_3, \quad u = u' - J\left(x_1 \sin v + x_2 \cos v\right), \quad \tau = x_1 \cos v - x_2 \sin v.$$

Полученные соотношения (неявно) определяют искомое каноническое преобразование в $T^*E(2)$. Например, выражая с помощью этих соотношений величины v, u, v', u', J и τ, получаем

$$v = -\operatorname{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \quad u = p_3, \quad v' = x_3 - \operatorname{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \quad u' = -x_2 p_1 + x_1 p_2 + p_3,$$

$$J = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad \tau = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}.$$

Прямой проверкой легко убедиться, что полученное преобразование — каноническое.

Пример 2.5. Рассмотрим группу $G = SO(3)$ (см. пример 2.2). Введем параметризацию этой группы с помощью углов Эйлера φ, θ и ψ:

$$g_{\varphi,\theta,\psi} = g_z(\varphi) g_x(\theta) g_z(\psi), \quad \varphi, \psi \in [0, 2\pi), \ \theta \in [0, \pi).$$

Здесь матрицы $g_z(t)$ и $g_x(t)$ описывают повороты на угол t вокруг осей Oz и Ox соответственно:

$$g_z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Яный вид левоинвариантных векторных полей на группе $SO(3)$ в координатах (φ, θ, ψ) приведен, например, в книге [184] на стр. 146 – 147:

$$\xi_1 = \cos\psi\, \partial_\theta + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, \partial_\varphi - \operatorname{ctg}\theta \sin\psi\, \partial_\psi, \quad \xi_2 = -\sin\psi\, \partial_\theta + \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, \partial_\varphi - \operatorname{ctg}\theta \cos\psi\, \partial_\psi, \quad \xi_3 = \partial_\psi.$$

Левоинвариантные 1-формы, дуальные этим векторным полям, имеют следующий вид:

$$\omega^1 = \sin\theta \sin\psi\, d\varphi + \cos\psi\, d\theta, \quad \omega^2 = \sin\theta \cos\psi\, d\varphi - \sin\psi\, d\theta, \quad \omega^3 = \cos\theta\, d\varphi + d\psi.$$

Напомним, что регулярные коприсоединенные орбиты группы $SO(3)$ — это двумерные сферы с общим центром в точке $f = 0$. При этом семейство ковекторов $\lambda(J) = (0, 0, -J)$, где $J \in (0, +\infty)$, задает гладкую параметризацию регулярных орбит в $\mathfrak{g}^*$. Используя функции линейного перехода к координатам Дарбу на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, которые в данном случае имеют вид (2.39), решим систему уравнений (2.45) относительно неизвестных u' и v'. В результате получаем

$$v' = \frac{\alpha v + \beta}{-\bar{\beta} v + \bar{\alpha}}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} & i e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \\ i e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{2.69}$$

$$u' = e^{-i(\varphi-\psi)} \left\{ \left(e^{i\varphi} \cos\frac{\theta}{2} + iv \sin\frac{\theta}{2} \right)^2 u + J\left(e^{i\varphi} \sin\theta + (1 - \cos\theta) iv \right) \right\}. \tag{2.70}$$

Таким образом, каноническое действие группы G на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ задается функциями (2.69) и (2.70). Производящая функция этого действия вычисляется согласно формуле (2.56) и имеет вид:

$$S_{\lambda(J)}(u',v,x) = \frac{e^{-i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,v + ie^{i\,\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{ie^{-i\,\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,v + e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}\,u' -$$
$$- 2iJ\ln\left(ie^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} - v\sin\frac{\theta}{2}\right) - J(\varphi-\psi+\pi). \quad (2.71)$$

Специальное каноническое преобразование в T^*G неявно определяется равенствами (2.64) и (2.65), которые в данном случае имеют вид:

$$p_\varphi = \frac{ie^{i(\varphi-\psi)}v\,u'}{\left(ie^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} - v\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} + J\,\frac{ie^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + v\sin\frac{\theta}{2}}{ie^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} - v\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$p_\theta = \frac{ie^{-i\psi}\left(e^{2i\varphi} - v^2\right)u'}{2\left(e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + iv\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} + J\,\frac{v\cos\frac{\theta}{2} + ie^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + iv\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$p_\psi = \frac{e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2} - iv\cos\frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + iv\sin\frac{\theta}{2}}\,e^{-i\psi}u' + J, \quad v' = \frac{e^{-i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\,v + ie^{i\,\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}}{ie^{-i\,\frac{\varphi-\psi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\,v + e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}},$$

$$u = \frac{e^{i(\varphi-\psi)}u'}{\left(e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + iv\sin\frac{\theta}{2}\right)^2} + \frac{2J\sin\frac{\theta}{2}}{e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2} + iv\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\tau = 2i\ln\left(v\sin\frac{\theta}{2} - ie^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\right) + \psi - \varphi.$$

Непосредственно проверяется, что построенное преобразование является каноническим.

Пример 2.6. Найдем производящую функцию специального канонического преобразования в T^*G, где $G = SL(2,\mathbb{R})$ (см. пример 2.3, рассмотренный выше).

В соответствие с разложением Ивасавы (см., например, [185]) произвольный элемент группы $SL(2,\mathbb{R})$ допускает однозначное представление в виде $g_{t,x,\theta} = e^{-te_1}e^{x(e_2+e_3)}e^{\theta e_3}$ или в явной матричной форме

$$g_{t,x,\theta} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

где $t, x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 4\pi)$. Левоинвариантные 1-формы на $SL(2,\mathbb{R})$, выраженные в координатах t, x и θ, имеют вид:

$$\omega^1 = (x\sin\theta - \cos\theta)\,dt + \sin\theta\,dx, \quad \omega^2 = (x\cos\theta + \sin\theta)\,dt + \cos\theta\,dx,$$

$$\omega^3 = xdt + dx + d\theta.$$

Группа $SL(2,\mathbb{R})$ допускает два различных специальных канонических преобразования, которые соответствуют коприсоединенным орбитам типов A и B. Исследуем эти случаи по отдельности.

1. *Тип A*. Как мы отмечали выше, орбиты этого типа представляют собой однополостные гиперболоиды, параметризованные семейством ковекторов $\lambda(J) = (J, 0, 0)$, где $J \in (0, +\infty)$. Используя функции (2.42), определяющие линейный переход к координатам Дарбу на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, из системы уравнений (2.45) находим:

$$v' = 2\,\mathrm{arcctg}\left(e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2} - x\right) + \theta, \tag{2.73}$$

$$u' = \left(\mathrm{ch}\,t - x\sin v - \cos v\;\mathrm{sh}\,t + \frac{1}{2}\,e^t x^2(1-\cos v)\right)u+ \\ + J\left(x\cos v - \sin v\;\mathrm{sh}\,t - \frac{1}{2}\,e^t x^2\sin v\right). \tag{2.74}$$

Равенства (2.73), (2.74) в явном виде задают каноническое действие группы $SL(2,\mathbb{R})$ на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$.

Используя формулу (2.56) вычислим производящую функцию специального канонического преобразования в $T^*SL(2,\mathbb{R})$, соответствующего коприсоединенным орбитам типа A:

$$S_{\lambda(J)}(u', v, x) = 2\,\mathrm{arcctg}\left(e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2} - x\right)u' + \theta\,u' + Jt + J\ln\left[\frac{1 + (e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2} - x)^2}{1 + \mathrm{ctg}^2\,\frac{v}{2}}\right]. \tag{2.75}$$

Согласно (2.64) и (2.65) каноническое преобразование в $T^*SL(2,\mathbb{R})$, отвечающее данной производящей функции, неявно задается равенствами:

$$p_t = J + \frac{2e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\left(Jx + u' - Je^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right)}{1 + \left(x - e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right)^2}, \quad p_x = \frac{2\left(Jx + u' - Je^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right)}{1 + \left(x - e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right)^2},$$

$$p_\theta = u', \quad u = \frac{e^{-t}}{\sin^2\frac{v}{2}}\,\frac{u' - Jx\cos v + J\left(\frac{1}{2}\,e^t x^2 + \mathrm{sh}\,t\right)\sin v}{1 + \left(x - e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right)^2},$$

$$v' = \theta - 2\,\mathrm{arcctg}\left(x - e^{-t}\,\mathrm{ctg}\,\frac{v}{2}\right), \quad \tau = t + \ln\left(\sin^2\frac{v}{2} + \left(e^{-t}\cos\frac{v}{2} - x\sin\frac{v}{2}\right)^2\right).$$

2. *Тип B*. Коприсоединенные орбиты представляют собой отдельные полы двухполостных гиперболоидов, заданных уравнением $f_1^2 + f_2^2 - f_3^2 = -J^2$. Семейство ковекторов $\lambda(J) = (0, 0, J)$, где $J \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, параметризует все орбиты данного типа, а соответствующие функции линейного перехода к каноническим координатам задаются в виде (2.43).

Решая систему уравнений (2.45) относительно неизвестных v' и u', получаем:

$$v' = \frac{\alpha v + \beta}{\bar\beta v + \bar\alpha}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,e^{\frac{-t+i\theta}{2}}\left(1 + e^t(1+ix)\right) & \frac{1}{2}\,e^{\frac{-t+i\theta}{2}}\left(i + e^t(x-i)\right) \\ \frac{1}{2}\,e^{\frac{-t-i\theta}{2}}\left(-i + e^t(x+i)\right) & -\frac{1}{2}\,e^{\frac{-t-i\theta}{2}}\left(1 + e^t(1-ix)\right) \end{pmatrix},$$

$$u' = \frac{1}{4}\,e^{-t-i\theta}\left(e^t(v+i)(x+i) - iv - 1\right)\left(e^t(x+i)((v+i)u - 2iJ) - 2J - iuv - u\right).$$

Производящая функция специального канонического преобразования, отвечающая рассматриваемому типу орбит, имеет вид:

$$S_{\lambda(J)}(u', v, x) = \frac{e^{i\theta}\left(e^t(v+i)(x-i) - iv - 1\right)}{ie^t(v+i)(x+i) + v - i}\, u' + J(\theta + 2\pi) - iJt - 2\,iJ\ln 2 + \\ + 2\,iJ\ln\left[\left(ie^t + e^t x - i\right)v + ie^t x - e^t - 1\right]. \quad (2.76)$$

С помощью формул (2.64) и (2.65) получаем соотношения, неявно определяющие специальное каноническое преобразование в локальных координатах:

$$p_t = \frac{2ie^{t+i\theta}(1+v^2)u'}{\left(1 + iv - e^t(x+i)(v+i)\right)^2} + \frac{J\left(e^t(x+i)(v+i) + 1 + iv\right)}{i - v + e^t(1-ix)(v+i)},$$

$$p_x = \frac{2e^{2t+i\theta}(i+v)^2 u'}{\left(1 + iv - e^t(x+i)(v+i)\right)^2} + \frac{2Je^t(i+v)}{i - v + e^t(1-ix)(v+i) + (1+iv))},$$

$$p_\theta = \frac{1 + iv - e^t(x-i)(v+i)}{1 + iv - e^t(x+i)(v+i)}\, e^{i\theta}\, u' + J,$$

$$u = \frac{4\, e^{t+i\theta}\, u'}{\left(1 + iv - e^t(x+i)(v+i)\right)^2} - \frac{2J\left(i - e^t(x+i)\right)}{i - v + e^t(1-ix)(v+i)},$$

$$v' = \frac{e^{i\theta}\left(e^t(v+i)(x-i) - iv - 1\right)}{ie^t(v+i)(x+i) + v - i},$$

$$\tau = \theta + 2\pi - it - 2\,i\ln 2\, + 2\,i\ln\left[\left(ie^t + e^t x - i\right)v + ie^t x - e^t - 1\right].$$

2.3.3 Метод интегрирования правоинвариантных гамильтоновых систем

Опишем теперь метод интегрирования в квадратурах правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли, основанный на применении специального канонического преобразования в T^*G.

Пусть $X_i(x,p) = \xi_i^j(x)p_j$ и $Y_i(x,p) = \eta_i^j(x)p_j$ — лево- и правоинвариантные функции на T^*G, соответствующие векторным полям ξ_i и η_i (см. формулы (2.5) и (2.7)). Следствием соотношений (2.58) и (2.59) являются равенства

$$X_i(x,p) = f_i(u', v'; \lambda(J)), \quad Y_i(x,p) = -f_i(u, v; \lambda(J)), \qquad (2.77)$$

в которых предполагается, что переменные (x,p) и (v, u, v', u', J, τ) связаны каноническим преобразованием (2.64), (2.65). В § 2.1 мы показали, что всякая правоинвариантная функция $H(x,p)$ на T^*G представима в виде $H(x,p) = \mathscr{H}(Y(x,p))$, где $\mathscr{H} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Из равенств (2.77) следует, что после специального канонического преобразования функция $H(x,p)$ перейдет в функцию

$$\tilde{H}(u, v; J) \equiv \mathscr{H}(-f(u, v; \lambda(J))),$$

зависящую только от переменных v^a, u_a и J_μ. При этом исходная гамильтонова система (2.2), отвечающая правоинвариантному гамильтониану $H(x,p)$, в новых переменных примет следующий «треугольный» вид:

$$\dot{v}^a = -\frac{\partial \tilde{H}(u,v;J)}{\partial u_a}, \quad \dot{u}_a = \frac{\partial \tilde{H}(u,v;J)}{\partial v^a}, \tag{2.78}$$

$$\dot{\tau}^\mu = \frac{\partial \tilde{H}(u,v;J)}{\partial J_\mu}, \quad \dot{J}_\mu = \dot{v}'^a = \dot{u}'_a = 0. \tag{2.79}$$

Очевидно, что система уравнений (2.79) элементарно интегрируется, если известно решение гамильтоновой системы уравнений (2.78). Таким образом, интегрируемость системы (2.78), (2.79) эквивалентна интегрируемости ее подсистемы (2.78).

Нетрудно видеть, что гамильтонова система (2.78) есть результат редукции исходной гамильтоновой системы (2.2) на орбиту коприсоединенного представления $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$. Напомним, что размерность регулярной орбиты равна $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, где $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$, который вычисляется по формуле (2.24). При $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g} = 0$, что соответствует случаю коммутативной группы Ли, переменные v^a и u_a будут отсутствовать, как и подсистема (2.78). Гамильтонова система (2.78) будет интегрируемой также при $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g} = 2$. Действительно, используя функцию $\tilde{H}(u,v,J)$ в качестве интеграла движения, нетрудно получить решение указанной системы в квадратурах. Наконец, при $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g} > 2$ система (2.78) в общем случае не интегрируема.

Ввиду того, что построение канонических переменных на коприсоединенных орбитах является алгебраической задачей, а нахождение производящей функции канонического действия может быть осуществлено в квадратурах, мы приходим к следующему критерию интегрируемости.

Теорема 2.3. *Гамильтонова система* (2.2) *на* T^*G *с произвольным правоинвариантным гамильтонианом редуцируется к* $(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g})$*-мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах, если и только если*

$$\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}) < 2. \tag{2.80}$$

С точки зрения возможных физических приложений случаи $\dim\mathfrak{g} = 3, 4$ представляют особый интерес. Всякая некоммутативная трехмерная алгебра Ли имеет одну функцию Казимира так, что $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 1$ (см. таблицу A.2 из приложения A). Таким образом, согласно доказанной теореме всякая правоинвариантная гамильтонова система на трехмерной группе Ли интегрируема в квадратурах. Для $\dim\mathfrak{g} = 4$ неравенство (2.80) имеет место, если только $\operatorname{ind}\mathfrak{g} > 0$. Это означает, что на четырехмерных группах Ли правоинвариантные гамильтоновы системы являются интегрируемыми в квадратурах, если и только если индекс соответствующей алгебры Ли отличен от нуля.

Следствие 2.1. *Всякая правоинвариантная гамильтонова система на трехмерной группе Ли интегрируема в квадратурах. Произвольная правоинвариантная гамильтонова система на четырехмерной группе Ли является интегрируемой в квадратурах тогда и только тогда, когда индекс соответствующей алгебры Ли не равен нулю.*

Рассмотрим теперь еще один частный случай. Пусть $H \in \mathscr{F}_{inv}$, то есть функция $H(x,p)$ является одновременно инвариантной относительно правого и левого действий группы G на T^*G. Как было показано в § 2.1, это означает, что $H(x,p) = \mathscr{K}(-Y(x,p))$, где $\mathscr{K}$ — функция Казимира алгебры $\mathfrak{g}$. В силу того, что всякая функция Казимира является постоянной на орбитах коприсоединенного представления, получаем, что после специального канонического преобразования функция $H(x,p)$ примет вид

$$\tilde{H}(J) = \mathscr{K}(f(u,v;\lambda(J))) = \mathscr{K}(\lambda(J)).$$

Отсюда мы имеем, что гамильтонова система (2.78), (2.79) с данным гамильтонианом запишется в виде

$$\dot{v}^a = 0, \quad \dot{u}_a = 0, \tag{2.81}$$

$$\dot{\tau}^\mu = \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J_\mu}, \quad \dot{J}_\mu = \dot{v}'^a = \dot{u}'_a = 0. \tag{2.82}$$

Очевидно, что указанная система элементарно интегрируется, причем зависимость от времени имеет место только для координат τ^μ, а остальные фазовые переменные являются интегралами движения. Таким образом, в качестве следствия теоремы 2.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Гамильтонова система* (2.2) *с гамильтонианом, инвариантным относительно левого и правого действий G на T^*G, интегрируется в квадратурах.*

§ 2.4 Инвариантные геодезические потоки на группах Ли

Классу правоинвариантных гамильтоновых систем принадлежат, в частности, геодезические потоки правоинвариантных псевдоримановых метрик на группах Ли. Имея в виду важные приложения геодезических потоков в геометрии и теоретической физике, рассмотрим этот случай более подробно.

Пусть на группе Ли G задана псевдориманова метрика g. В локальной системе координат метрика полностью определяется ковариантным симметрическим тензором $g_{ij} \equiv g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$, где ∂_{x^i} — базисные касательные векторы, заданные в точке $x = (x^1, \ldots, x^n) \in G$.

Наличие метрики позволяет рассмотреть на группе G уравнение геодезических линий

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \tag{2.83}$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля, определяющие согласованную с метрикой связность:

$$\Gamma^k_{ij} \equiv g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Здесь g^{ij} — компоненты тензора, обратного к метрическому тензору g_{ij}.

Используя *преобразование Лежандра* $p_i = g_{ij}\dot{x}^j$ уравнения (2.83) можно представить в виде гамильтоновой системы (2.2), функция Гамильтона которой является квадратичной по импульсным переменным p_i:

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\,g^{ij}(x)p_ip_j. \tag{2.84}$$

Поток соответствующего гамильтонового векторного поля $\operatorname{sgrad} H$ называется *геодезическим потоком*. Используя (2.84), для гамильтоновой системы геодезического потока получаем

$$\dot{x}^i = g^{ij}p_j, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\,p_jp_k.$$

Допустим, что метрика на группе является инвариантной относительно правых сдвигов. Это означает, что имеет место условие

$$g((R_y)_*\,\zeta_1,(R_y)_*\,\zeta_2) = g(\zeta_1,\zeta_2), \quad y\in G,$$

выполняющееся для произвольных касательных векторов $\zeta_1,\zeta_2 \in T_xG$. Используя данное условие, мы можем записать

$$g(\zeta_1,\zeta_2) = \mathbf{G}((R_{x^{-1}})_*\,\zeta_1,(R_{x^{-1}})_*\,\zeta_2), \tag{2.85}$$

где билинейная форма $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$ представляет собой метрику, ограниченную на касательное пространство $T_eG \simeq \mathfrak{g}$. Обратно, любой невырожденной симметрической форме $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$, заданной на алгебре $\mathfrak{g}$, однозначно соответствует правоинвариантная псевдориманова метрика на группе, определяемая равенством (2.85). Таким образом, множество правоинвариантных метрик на G находится во взаимо однозначном соответствии с множеством невырожденных билинейных симметрических форм на соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\eta_i(x) = -(R_x)_*\,e_i$ — правоинвариантное векторное поле, отвечающее базисному вектору $e_i\in\mathfrak{g}$. Легко видеть, что условие (2.85) равносильно системе равенств

$$g(\eta_i,\eta_j) = \mathbf{G}_{ij}, \tag{2.86}$$

где $\mathbf{G}_{ij} = \mathbf{G}(e_i, e_j)$ — компоненты формы $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$, вычисленные относительно базиса $\{e_i\}$. Используя формулу (2.86) нетрудно видеть, что метрический тензор правоинвариантной метрики имеет вид

$$g_{ij}(x) = \mathbf{G}_{kl}\,\sigma^k_i(x)\sigma^l_j(x). \tag{2.87}$$

Здесь $\sigma^i = \sigma^i_j(x)dx^j$ — правоинвариантные 1-формы на группе G, дуальные векторным полям $\eta_i(x)$. Имея в виду равенство (2.87), для гамильтониана (2.84) геодезического потока правоинвариантной метрики получаем

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}\eta^k_i(x)\eta^l_j(x)p_kp_l = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}Y_i(x,p)Y_j(x,p). \tag{2.88}$$

В частности, отсюда следует, что $H(x,p) = \mathscr{H}(Y(x,p))$, где функция $\mathscr{H}(f) = \mathbf{G}^{ij}f_if_j/2$ представляет собой однородный квадратичный полином на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Так как гамильтонианы геодезических потоков правоинвариантных метрик лежат в функциональном пространстве $\mathscr{F}_r \subset C^\infty(T^*G)$, для интегрирования соответствующих гамильтоновых систем применим метод, описанный нами в предыдущем параграфе. В частности, специальное каноническое преобразование (2.64) и (2.65) переводит гамильтониан (2.88) в функцию

$$\tilde{H}(u,v;J) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}f_i(u,v;\lambda(J))f_j(u,v;\lambda(J)),$$

которая в силу u-линейности функций $f_i(u,v;\lambda(J))$ будет являться квадратичной функцией от переменных u_a. Как следствие, условие интегрируемости правоинвариантных геодезических потоков на группе G дается теоремой 2.3.

Важный класс правоинвариантных метрик на группах Ли составляют так называемые *биинвариантные метрики*. Напомним, что псевдориманова метрика на группе G называется *биинвариантной*, если она одновременно инвариантна относительно как правых, так и левых сдвигов. Можно показать, что условие инвариантности метрики (2.85) относительно левых сдвигов равносильно требованию

$$\mathbf{G}(\mathrm{Ad}_x\cdot, \mathrm{Ad}_x\cdot) = \mathbf{G}(\cdot,\cdot), \quad x \in G, \tag{2.89}$$

откуда следует, что существует биекция между множеством биинвариантных псевдоримановых метрик на группе G и множеством G-инвариантных билинейных невырожденных симметрических форм на алгебре $\mathfrak{g}$.

Из соотношения (2.89) вытекает, что гамильтониан $H(x,p)$ биинвариантной псевдоримановой метрики имеет вид $H(x,p) = \mathscr{K}(-Y(x,p))$, где $\mathscr{K}$ — функция Казимира на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Другими словами, функция $H(x,p)$ принадлежит функциональному подпространству $\mathscr{F}_{inv} \subset C^\infty(T^*G)$. Используя специальное каноническое преобразование в T^*G, гамильтонова система геодезического потока биинвариантной метрики может быть преобразована к системе вида (2.81), (2.82), и как следствие, является интегрируемой в квадратурах.

Отметим, что с тех пор как В. И. Арнольд показал, что движение свободного твердого тела можно описать как движение по геодезическим на группе $SO(3)$, снабженной левоинвариантной римановой метрикой [16], инвариантные геодезические потоки на группах Ли стали весьма популярным объектом исследования. Многие важные результаты в этой области были получены А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [18,99], В. В. Трофимовым [186,187] и А. Тиммом [100]. В частности, в отмеченных работах были построены довольно обширные классы инвариантных метрик на группах Ли, допускающих интегрируемость соответствующих геодезических потоков. Применяемые при этом методы, как правило, сводились к конструированию некоторых наборов функций, находящихся в инволюции на T^*G и интерпретируемых как интегралы движения геодезических потоков рассматриваемых метрик (метод сдвига аргумента, метод цепочек Тимма).

Не смотря на то, что интегрирование геодезических потоков на группах Ли — популярная исследовательская задача в дифференциальной геометрии и механике, интерес к ней со стороны специалистов в области теоретической физики неоправданно мал. Отчасти, это связано с довольно абстрактным характером результатов, получаемых геометрами: доказать, что геодезический поток для данного класса метрик интегрируем с точки зрения существования соответствующего функционального набора интегралов движения. Напротив, для физиков-теоретиков более актуальным является явное построение фазовых траекторий геодезического потока (например, в квадратурах), либо их качественное исследование при невозможности точного интегрирования. Подобный акцент, например, имеет место в общей теории относительности, где весьма важной является задача исследования геодезического движения в гравитационных полях той или иной конфигурации.

Как модельные пространства ОТО, группы Ли наиболее часто возникают в случаях просто транзитивных действий групп преобразований. Согласно определению, группа G действует на многообразии M *просто транзитивно*, если для любых точек $x, x' \in M$ существует ровно один элемент $g \in G$, переводящий x в x': $x' = xg$ (действие считаем правым). Если мы зафиксируем некоторую точку $x_0 \in M$, то соответствие $g \to x = x_0 g$ задает G-эквивариантный диффеоморфизм $M \simeq G$, отождествляющий точки многообразия M с элементами группы G и переводящий действие группы G на M в правое действие группы G на себе. Таким образом, образы любых G-инвариантных геометрических объектов на M (метрик, связностей и т.д.) при данном диффеоморфизме будут представлять собой аналогичные геометрические объекты на группе G, инвариантные относительно правых сдвигов. Кроме того, векторы Киллинга всякой G-инвариантной на M метрики будут изображаться левоинвариантными векторными полями на G.

С точки зрения физических приложений, наибольший интерес представляют псевдоримановы многообразия, метрика которых удовлетворяет уравнению Эйнштейна. Наиболее полный перечень известных на сегодняшний день точных решений уравнения Эйнштейна приведен в известной монографии [188]. Среди описанных в ней решений имеется несколько метрик, допускающих в качестве максимальной группы изометрий четырехмерную группу Ли, действующую просто транзитивно. Это — вакуумная метрика, найденная А. З. Петровым [189], три однородных решения с идеальной жидкостью, исследованные И. Ожватом [190, 191], а также решение с Λ-членом, полученное В. Р. Кайгородовым [192]. Отметим, что все указанные метрики являются *штеккелевыми*, то есть допускающими полное разделение переменных в соответствующем уравнении Гамильтона – Якоби (см. следующий параграф).

Помимо перечисленных выше решений уравнения Эйнштейна, имеется еще одна метрика, группа движений которой действует просто транзитивно. Р. Мак-Леннан и Н. Тариг [93], а также Таппер [94] получили решение системы уравнений Эйнштейна – Максвелла с тензором напряженности электромагнитного поля, не обладающего симметриями пространства – времени. Эта метрика имеет тип I по Петрову и является нештеккелевой, то есть не допускающей разделение переменных в соответствующем уравнении Гамильтона – Якоби. Применим описанный выше метод для интегрирования геодезического потока данной метрики.

Пример 2.7. С точностью до замены переменных квадрат элемента длины пространства Мак-Леннана – Тарига – Таппера имеет вид (см. [188], стр. 176):

$$ds^2 = dx_0^2 - 4x_2dx_0dx_3 - a^2dx_1^2 - a^2e^{-2x_1}dx_2^2 - (e^{2x_1} - 4x_2^2)dx_3^2, \tag{2.90}$$

где $a > 0$ — вещественный параметр. Симметрии этой метрики определяются векторами Киллинга

$$\xi_1 = \partial_0, \quad \xi_2 = \partial_1 + x_2\partial_2 - x_3\partial_3, \quad \xi_3 = 2x_3\partial_0 + \partial_2, \quad \xi_4 = \partial_3. \tag{2.91}$$

которые образуют четырехмерную разрешимую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[\xi_2, \xi_3] = -\xi_3, \quad [\xi_2, \xi_4] = \xi_4, \quad [\xi_3, \xi_4] = -2\xi_1. \tag{2.92}$$

Пусть G — связная односвязная группа Ли с алгеброй $\mathfrak{g}$. Условие $\operatorname{rank}\|\xi_i^j(x)\| = 4$, выполняющееся для любых значений координат, означает, что действие группы G на пространстве – времени является просто транзитивным. Пусть $x_0 = 0$ — точка с нулевыми значениями координат. Считая действие группы правым, рассмотрим диффеоморфизм $g \to x_0 g$, $g \in G$, устанавливающий соответствие между точками пространства – времени и элементами группы G. Имея в виду этот диффеоморфизм, мы можем считать метрику (2.90) правоинвариантной метрикой на группе G, а векторные поля Киллинга (2.91) — левоинвариантными векторными полями на G.

Используя формулу (1.12), найдем явный вид правоинвариантных векторных полей на группе G

$$\eta_1 = -\partial_0, \quad \eta_2 = -\partial_1, \quad \eta_3 = -e^{x_1}\partial_2, \quad \eta_4 = -e^{-x_1}\left(2x_2\partial_0 + \partial_3\right); \tag{2.93}$$

а также вид отвечающих им дуальных 1-форм:

$$\sigma^1 = -dx_0 + 2x_2 dx_3, \quad \sigma^2 = -dx_1, \quad \sigma^3 = -e^{-x_1}dx_2, \quad \sigma^4 = -e^{x_1}dx_3. \tag{2.94}$$

Значения метрики (2.90) на правоинвариантных векторных полях (2.93) образуют постоянную матрицу

$$\|\mathbf{G}_{ij}\| \equiv \|g(\eta_i, \eta_j)\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что для квадрата элемента длины пространства Мак-Леннона–Тарига – Таппера мы можем записать

$$ds^2 = \mathbf{G}_{ij}\,\sigma^i\sigma^j = (\sigma^1)^2 - a^2(\sigma^2)^2 - a^2(\sigma^3)^3 - (\sigma^4)^2.$$

Геодезический поток метрики Мак-Леннона–Тарига – Таппера задается канонической гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H(x,p) = \frac{1}{2}\,g^{ij}(x)p_i p_j = \frac{1}{2}\left(1 - 4e^{-2x_1}x_2^2\right)p_0^2 - \\ - 2e^{-2x_1}x_2 p_0 p_3 - \frac{1}{2}\,a^{-2}p_1^2 - \frac{1}{2}\,a^{-2}e^{2x_1}p_2^2 - \frac{1}{2}\,e^{-2x_1}p_3^2. \end{aligned} \tag{2.95}$$

В явном виде данная система уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = p_0 - 2e^{-2x_1}x_2\left(2x_2p_0 + p_3\right) && \dot{p}_0 = 0 \\ &\dot{x}_1 = -a^{-2}p_1, && \dot{p}_1 = a^{-2}e^{2x_1}p_2^2 - e^{-2x_1}\left(2x_2p_0 + p_3\right)^2 \\ &\dot{x}_2 = -a^{-2}e^{2x_1}p_2 && \dot{p}_2 = 2e^{-2x_1}p_0\left(2x_2p_0 + p_3\right), \\ &\dot{x}_3 = -e^{-2x_1}\left(2x_2p_0 + p_3\right), && \dot{p}_3 = 0. \end{aligned}$$

Введем функции $Y_i(x,p) = \eta_i^j(x)p_j$:

$$Y_1 = -p_0, \quad Y_2 = -p_1, \quad Y_3 = -e^{x_1}p_2, \quad Y_4 = -e^{-x_1}\left(2x_2p_0 + p_3\right).$$

Тогда гамильтониан (2.95) можно представить в следующем виде

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}Y_i(x,p)Y_j(x,p) = \frac{1}{2}\,Y_1^2(x,p) - \frac{1}{2a^2}\left(Y_2^2(x,p) + Y_3^2(x,p)\right) - \frac{1}{2}\,Y_4^2(x,p). \tag{2.96}$$

По построению функции $X_i(x,p) = \xi_i^j(x)p_j$ являются интегралами движения геодезического потока с гамильтонианом (2.95) и в явном виде записываются как

$$X_1 = p_0, \quad X_1 = p_1 + x_2p_2 - x_3p_3, \quad X_1 = 2x_3p_0 + p_2, \quad X_1 = p_3.$$

Легко проверить, что относительно канонической скобки Пуассона эти интегралы движения образуют алгебру, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Из коммутационных соотношений (2.92) следует, что $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 2$, поэтому в соответствии с теоремой 2.3 геодезический поток метрики (2.90) интегрируется в квадратурах. Проинтегрируем этот геодезический поток с помощью метода, изложенного в предыдущем параграфе. Для этого мы построим специальное каноническое преобразование в пространстве кокасательного расслоения T^*G.

Сингулярные коприсоединенные орбиты группы G — это точки прямой $f_1 = f_3 = f_4 = 0$. Регулярные орбиты коприсоединенного представления имеют три типа. Это — гиперболические параболоиды

$$\mathcal{O}_{\omega_1,\omega_2} = \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f_1 = \omega_1, 2f_1f_2 + f_3f_4 = \omega_2\}, \quad \omega_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ \omega_2 \in \mathbb{R}, \tag{2.97}$$

гиперболические цилиндры

$$\mathcal{O}_{\omega} = \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f_1 = 0, f_3f_4 = \omega\}, \quad \omega \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

а также четыре плоские области

$$\mathcal{O}^{(1)}_{\lesseqgtr} = \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f_1 = f_3 = 0, f_4 \lesseqgtr 0\}, \quad \mathcal{O}^{(2)}_{\lesseqgtr} = \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f_1 = f_4 = 0, f_3 \lesseqgtr 0\}.$$

Чтобы конкретизировать задачу, будем рассматривать интегральные траектории гамильтоновой системы геодезического потока, удовлетворяющие условию $p_0 \neq 0$. Нетрудно видеть, что в этом случае специальное каноническое преобразование требуется строить в окрестности точки $(e,\lambda) \in T_e^*G$ такой, что $\lambda_1 \neq 0$. Отсюда следует, что достаточно рассмотреть только коприсоединенные орбиты типа (2.97).

Множество регулярных орбит (2.97) допускает параметризацию вида $\lambda(J) = (J_1, J_2, 0, 0)$, где $J_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $J_2 \in \mathbb{R}$. В качестве вещественной поляризации ковектора $\lambda(J)$ может быть выбрана подалгебра $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Соответствующие функции линейного перехода к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ имеют вид:

$$f_1 = J_1, \quad f_2 = -uv + J_2, \quad f_3 = 2J_1 v, \quad f_4 = u, \tag{2.98}$$

где $u, v \in \mathbb{R}$.

Решая систему алгебраических уравнений (2.45) относительно переменных v' и u', получаем

$$v' = \Psi(v, x) = e^{-x_1} v + x_3, \quad u' = e^{x_1} u - 2J_1 x_2. \tag{2.99}$$

Данные равенства задают каноническое действие группы G на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$.

Перед тем как вычислить производящую функцию специального канонического преобразования, выпишем явный вид 1-форм ω^i на группе G, дуальных левоинвариантным векторным полям (2.91):

$$\omega^1 = dx_0 + 2x_3(x_2 dx_1 - dx_2), \quad \omega^2 = dx_1, \quad \omega^3 = -x_2 dx_1 + dx_2, \quad \omega^4 = x_3 dx_1 + dx_3.$$

Используя теперь формулу (2.56), находим

$$S_{\lambda(J)}(u', v, x) = \left(e^{-x_1} v + x_3\right) u' + J_1 \left(x_0 + 2v x_2 e^{-x_1}\right) + J_2 x_1.$$

Согласно (2.64) и (2.65) специальное каноническое преобразование в T^*G неявно определяется уравнениями:

$$\begin{gathered} p_0 = J_1, \quad p_1 = J_2 - e^{-x_1} v \left(u' + 2J_1 x_2\right), \quad p_2 = 2J_1 e^{-x_1} v, \quad p_3 = p', \\ v' = e^{-x_1} v + x_3, \quad p = e^{-x_1} \left(u' + 2J_1 x_2\right), \quad \tau^1 = x_0 + 2e^{-x_1} v x_2, \quad \tau^2 = x_1. \end{gathered}$$

В новых фазовых переменных $(u, v, u', v', J_1, J_2, \tau^1, \tau^2)$ гамильтониан (2.95) принимает вид

$$\tilde{H}(u, v, J) = \frac{1}{2}\left(J_1^2 - u^2\right) - \frac{1}{2a^2}\left((J_2 - uv)^2 + 4J_1^2 v^2\right), \tag{2.100}$$

а соответствующая гамильтонова система записывается как

$$\begin{aligned} &\dot{v} = u - a^{-2} v \left(J_2 - uv\right), && \dot{u} = a^{-2}\left(uJ_2 - u^2 v - 4J_1^2 v\right), \\ &\dot{\tau}^1 = a^{-2} J_1 \left(a^2 - 4v^2\right), && \dot{J}_1 = 0, \\ &\dot{\tau}^2 = a^{-2}\left(uv - J_2\right), && \dot{J}_2 = 0, \\ &\dot{v}' = 0, && \dot{u}' = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что данная система интегрируется в квадратурах. Действительно, переменные v', u', J_1 и J_2 являются постоянными величинами, в то время как зависимость переменных v

и u от параметра интегрирования s находится с помощью интеграла движения (2.100). Выражая из уравнения $\tilde{H}(u,v,J)=E$ переменную u как функцию v, и интегрируя полученное выражение по v, получаем

$$s=\int\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)^{-1}\left[\frac{J_2v}{a^2}\pm\sqrt{\left(\frac{J_2v}{a^2}\right)^2+\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\left(J_1^2-2E-\frac{4v^2J_1^2+J_2^2}{a^2}\right)}\right]dv. \qquad (2.101)$$

Равенство (2.101) позволяет найти явное выражение для $v(s)$ и $u(s)$ через эллиптические интегралы. Кроме того, зависимость переменных τ^1 и τ^2 от параметра s определяется интегралами

$$\tau^1(s)=\int\frac{\tilde{H}(u(s),v(s),J)}{\partial J_1}\,ds=J_1s-\frac{4J_1}{a^2}\int v^2(s)ds,$$
$$\tau^2(s)=\int\frac{\tilde{H}(u(s),v(s),J)}{\partial J_2}\,ds=-\frac{J_2s}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int u(s)v(s)ds.$$

§ 2.5 Замечание о построении полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли

Пусть $H(x,p)=H(x^1,\dots,x^n,p_1,\dots,p_n)$ — гладкая функция, заданная на пространстве кокасательного расслоения n-мерной вещественной группы Ли G. Дифференциальное уравнение вида

$$H\left(x^1,\dots,x^n,\frac{\partial S}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial S}{\partial x^n}\right)=E, \qquad (2.102)$$

где E — вещественный параметр, а $S(x)=S(x^1,\dots,x^n)$ — функция на группе G, называется (стационарным) *уравнением Гамильтона – Якоби.*

Замечание 2.8. Решения уравнения Гамильтона – Якоби имеют следующий геометрический смысл [17]. Пусть $S(x)$ — некоторое решение уравнения (2.102). Тогда равенства

$$p_i=\frac{\partial S(x)}{\partial x^i},\quad i=1,\dots,n,$$

определяют в T^*G некоторую n-мерную поверхность, являющуюся лагранжевым подмногообразием относительно стандартной симплектической структуры $\omega=dp_i\wedge dx^i$. Таким образом, решения уравнения (2.102) — это лагранжевы подмногообразия, принадлежащие гиперповерхности $H(x,p)=E$ и однозначно проектирующиеся на G.

Функция $S(x;\alpha)=S(x^1,\dots,x^n;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, зависящая от n параметров $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона – Якоби (2.102), если она является решением этого уравнения и удовлетворяет требованию

$$\det\left\|\frac{\partial^2S(x;\alpha)}{\partial x^i\,\partial\alpha_j}\right\|\neq 0. \qquad (2.103)$$

Замечание 2.9. Обычно параметры α_i, от которых зависит полный интеграл уравнения (2.102), полагаются вещественными. Мы, однако, не будем накладывать указанное требование, и будем полагать, что полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби может зависеть как от вещественных, так и от комплексных параметров. В последнем случае мы, естественно, предполагаем голоморфность функции $S(x;\alpha)$ от соответствующих переменных.

Хорошо известно, что нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби составляет основу так называемого *метода Гамильтона – Якоби* интегрирования гамильтоновых систем уравнений. Суть этого метода состоит в отыскании такого канонического преобразования, после которого гамильтониан системы принимает наиболее простой вид, такой, что соответствующая ему гамильтонова система может быть непосредственно проинтегрирована. При этом полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби фактически является производящей функцией искомого канонического преобразования (см., например, [16]).

Помимо использования для интегрирования гамильтоновых систем, уравнение Гамильтона – Якоби также представляет определенный и самостоятельный интерес. Важную роль, например, данное уравнение играет в оптике и квантовой механике; в частности, к интегрированию уравнения Гамильтона – Якоби сводится построение нулевого приближения решений уравнений квантовой механики в рамках квазиклассического приближения [193]. Полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби играет также чрезвычайно важную роль в фейнмановской формулировке квантовой механики в терминах континульного интегрирования [194]. Все сказанное позволяет утверждать, что задача интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби является весьма актуальной.

На сегодняшний день наиболее традиционный способ построения полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби состоит в применении *метода разделения переменных*, развитого в работах К. Якоби, П. Штекеля и Т. Леви-Чивиты. Естественно, что особое внимание специалистов отводилось частному случаю, когда функция $H(x,p)$ представляет собой квадратичный полином от «импульсных» переменных p_i, поэтому наиболее содержательные результаты по разделению переменных в уравнении Гамильтона – Якоби были получены именно для этой ситуации. В определенном смысле теория разделения переменных для указанных классов гамильтонианов на сегодняшний день считается завершенной; в частности, В. Н. Шаповаловым доказана теорема о необходимых и достаточных условиях разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби, которое отвечает гамильтониану геодезического потока произвольной псевдоримановой метрики [21]. Примечательно, что эти условия были сформулированы им в ковариантном виде и сводились к проверке совместности некоторой системы алгебраических уравнений. Таким образом, возможность разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби, отвечающем геодезическому гамильтониану, — это инвариантная характеристика самого псевдориманова пространства; пространства, обладающие этим свойством, принято называть *штеккелевыми*.

Для нештеккелевых псевдоримановых многообразий построение полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби методом разделения переменных, по крайней мере в его классическом варианте, невозможно. Существуют различные способы обобщить стандартный подход к разделению переменных, например, вместо класса преобразований конфигурационного пространства можно рассматривать более общие канонические преобразования всего фазового пространства (обзор современных подходов к различным обобщениям метода разделения переменных можно найти в монографии [195]). Отметим, что в рамках существующих обобщений для разделения переменных не существует универсальных методов. Все известные нетривиальные примеры такого разделения переменных были получены с использованием весьма специальных приемов, для выбора которых *априори* нет никаких правил.

В настоящем параграфе мы развиваем альтернативную технику построения полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби, отличную от той, что основана на методе разделения переменных. Для класса правоинвариантных гамильтонианов на группах Ли мы предлагаем метод нахождения полного интеграла уравнения (2.102), основанный на построении канонических координат на орбитах коприсоединенного представления, и сводящий исходную задачу к задаче интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби на коприсоединенных орбитах.

Пусть функция $H \in C^\infty(T^*G)$ является инвариантной относительно правого действия группы G на пространстве кокасательного расслоения T^*G. Это означает, что данная функция может быть записана в виде $H(x,p) = \mathscr{H}(Y_1(x,p),\dots,Y_n(x,p))$, где $\mathscr{H}(f) = \mathscr{H}(f_1,\dots,f_n)$ — некоторая функция на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, $Y_i(x,p)$ — правоинвариантные функции на T^*G, определяемые равенством (2.7) (см. § 2.1). Пусть $S(x)$ — функция на группе G. В силу того, что

$$Y_i\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \eta_i^j(x)\frac{\partial S}{\partial x^j} = \eta_i\, S,$$

уравнение (2.102) для правоинвариантного гамильтониана $H(x,p)$ записывается в виде

$$\mathscr{H}\left(\eta_1 S,\dots,\eta_n S\right) = E. \tag{2.104}$$

Далее уравнение (2.104) мы будем называть *уравнением Гамильтона – Якоби на группе Ли*.

Покажем, что построение полного интеграла уравнения (2.104) сводится к аналогичной задаче на орбитах коприсоединенного представления группы G. Для этого мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.4. *Пусть* $\lambda(J)=\lambda(J_1,\ldots,J_{\operatorname{ind}\mathfrak{g}})$ *— гладкая (локальная) параметризация регулярных орбит householder коприсоединенного представления в пространстве* $\mathfrak{g}^*$, $f_i(u,v;\lambda(J))=\zeta_i^a(v)u_a+\chi_i(v;\lambda(J))$ *— функции линейного перехода к каноническим координатам на орбите* $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, *соответствующие поляризации* $\mathfrak{n}$ *ковектора* $\lambda(J)$. *Рассмотрим на* $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ *уравнение Гамильтона – Якоби*

$$\mathscr{H}\left(f_1\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial v},v;\lambda(J)\right),\ldots,f_n\left(\frac{\partial\tilde{S}}{\partial v},v;\lambda(J)\right)\right)=E, \tag{2.105}$$

и обозначим через $\tilde{S}_{\lambda(J)}(v;\beta)$ *его полный интеграл, зависящий от набора параметров* $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{\dim\mathcal{O}_\lambda/2})$. *Тогда в качестве полного интеграла уравнения* (2.104) *может быть выбрана функция*

$$S(x;\alpha)=\tilde{S}_{\lambda(J)}(\Psi(v,x^{-1});\beta)+\int\chi_k(\Psi(v,x^{-1});\lambda(J))\sigma^k(x), \tag{2.106}$$

где $\alpha=(v,J,\beta)$ *— совокупный набор* n *параметров,* $\Psi(v,x)$ *— функция действия группы* G *на локальном однородном пространстве* $V=\exp(\mathfrak{n})\setminus G$, $\sigma^k(x)$ *— правоинвариантные 1-формы на* G.

Доказательство. Во-первых, покажем, что функция (2.106) удовлетворяет уравнению (2.104). Предварительно отметим, что, так как векторные поля $\zeta_i(v)=\zeta_i^a(v)\partial_{v^a}$ есть генераторы действия группы G на правом однородном пространстве V, имеет место легко доказываемое соотношение:

$$\eta_i^j(x)\,\frac{\partial\Psi^a(v,x^{-1})}{\partial x^j}=\zeta_i^a(\Psi(v,x^{-1})).$$

Учитывая это соотношение, подействуем правоинвариантным векторным полем $\eta_i(x)$ на функцию (2.106):

$$\begin{aligned}\eta_i^j(x)\,\frac{\partial S(x;\alpha)}{\partial x^j}&=\eta_i^j(x)\,\frac{\partial\Psi^a(v,x^{-1})}{\partial x^j}\,\frac{\partial\tilde{S}_{\lambda(J)}(\Psi(v,x^{-1}))}{\partial\Psi^a(v,x^{-1})}+\chi_k(\Psi(v,x^{-1});\lambda(J))\sigma_j^k(x)\eta_i^j(x)=\\&=\zeta_i^a(\Psi(v,x^{-1}))\frac{\partial\tilde{S}_{\lambda(J)}(\Psi(v,x^{-1}))}{\partial\Psi^a(v,x^{-1})}+\chi_i(\Psi(v,x^{-1});\lambda(J))=\\&=f_i\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\lambda(J)}(v';\beta)}{\partial v'},v';\lambda(J)\right)\Big|_{v'=\Psi(v,x^{-1})}.\end{aligned} \tag{2.107}$$

Так как функция $\tilde{S}_{\lambda(J)}(v;\beta)$ является решением уравнения (2.105), отсюда следует, что функция (2.106) удовлетворяет уравнению (2.104).

Докажем теперь, что для функции (2.106) выполняется требование (2.103). Введем вспомогательные обозначения:

$$v'^a=\Psi^a(v,x^{-1}),\quad u'_a=\frac{\partial\tilde{S}_{\lambda(J)}(v;\beta)}{\partial v^a}\Big|_{v=\Psi(v,x^{-1})},\quad z=(u',v',J).$$

Используя соотношение (2.107), получаем:

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S(x;\alpha)}{\partial x^i\,\partial\alpha_j}\right\| = \det\left\|\sigma^i_j(x)\right\|\cdot\det\left\|\frac{\partial f_i(z)}{\partial\alpha_j}\right\| = \det\left\|\sigma^i_j(x)\right\|\cdot\det\left\|\frac{\partial f_i(z)}{\partial z_j}\right\|\cdot\det\left\|\frac{\partial z_i}{\partial\alpha_j}\right\|.$$

Ясно, что первые два определителя в правой части полученного равенства не равны нулю. Третий определитель схематически можно представить в виде

$$\det\left\|\frac{\partial z_i}{\partial\alpha_j}\right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Psi(v,x^{-1})}{\partial v} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ * & * & \frac{\partial^2\tilde S_{\lambda(J)}(v;\beta)}{\partial v\,\partial\beta} \end{vmatrix},$$

откуда следует

$$\det\left\|\frac{\partial z_i}{\partial\alpha_j}\right\| = \left\|\frac{\partial\Psi^a(v,x^{-1})}{\partial v^b}\right\|\cdot 1\cdot\left\|\frac{\partial\tilde S_{\lambda(J)}(v;\beta)}{\partial v^a\,\partial\beta_b}\right\|.$$

Но этот определитель также не равен нулю, так как функция $\tilde S_{\lambda(J)}(v;\beta)$ является полным интегралом уравнения Гамильтона – Якоби (2.105). Теорема доказана. □

Еще раз подчеркнем, что доказанная нами теорема сводит задачу нахождения полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли к построению полного интеграла соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби на регулярных орбитах коприсоединенного представления. В частности, если регулярные коприсоединенные орбиты группы имеют размерность меньшую или равную двум, полный интеграл уравнения (2.105) может быть построен в квадратурах. Действительно, в этом случае гамильтониан $\tilde H(u,v,J)\equiv\mathscr{H}\left(f(u,v;\lambda(J))\right)$ зависит только от одной переменной v, поэтому полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (2.105) будет иметь вид

$$\tilde S_{\lambda(J)}(v;E) = \int u(v,J;E)\,dv,$$

где функция $u(v,J;E)$ есть решение уравнения $\tilde H(u,v,J)=E$. Полный интеграл $S(x;\alpha)$ исходного уравнения Гамильтона – Якоби с использованием формулы (2.106) также находится в квадратурах. Рассматривая этот полный интеграл как производящую функцию некоторого канонического преобразования на T^*G, мы можем использовать последнее для интегрирования гамильтоновой системы, отвечающей правоинвариантному гамильтониану $H(x,p)$. Таким образом, полученный здесь результат находится в полном соответствии с теоремой 2.3.

В заключение проиллюстрируем описанный метод интегрирования уравнения Гамильтона – Якоби примером.

Пример 2.8. Пусть $H(x,p)$ — гамильтониан геодезического потока метрики МакЛеннона – Тарига – Таппера (2.90). Рассмотрим соответствующее данному гамильтониану уравнение Гамильтона – Якоби:

$$\left(1-2e^{-2x}y^2\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)^2-2e^{-2x}y\left(\frac{\partial S}{\partial x_0}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)-\\ -a^{-2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2-a^{-2}e^{2x}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2-e^{-2x}\left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2=2E. \quad (2.108)$$

Как мы уже отмечали выше, метрика (2.90) является нештеккелевой, так как для нее не выполняются необходимые и достаточные условия разделения переменных [21]. Построим полный интеграл уравнения (2.108) предложенным нами методом.

В силу того, что четырехмерная группа движений G данного многообразия, ассоциированная с векторами Киллинга (2.91), действует просто транзитивно, псевдориманово многообразие с метрикой (2.90) локально диффеоморфно группе G. В предположении, что данное действие — правое, мы считаем метрику МакЛеннона – Тарига – Таппера правоинвариантной метрикой на G, причем геодезический гамильтониан, отвечающий этой метрике, имеет вид (2.96). Отсюда уравнение Гамильтона – Якоби (2.108) может быть переписано в виде

$$(\eta_1 S)^2-a^{-2}\left[(\eta_2 S)^2+(\eta_3 S)^2\right]-(\eta_4 S)^2=2E, \quad (2.109)$$

где векторные поля η_i даются выражениями (2.93).

В примере 2.8 мы исследовали коприсоединенные орбиты группы G; в частности, мы указали, что регулярные орбиты имеют размерность равную двум. Отсюда следует, что построение полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби (2.108) может быть осуществлено с помощью одних квадратур.

Ограничимся случаем регулярных орбит вида (2.97). Переход к координатам Дарбу на данных орбитах дается функциями (2.98). Уравнение Гамильтона – Якоби (2.105) на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$ получается из уравнения (2.109) с помощью формальной замены $\eta_i S \to f_i\left(\partial_v \tilde{S}_{\lambda(J)}(v), v; \lambda(J)\right)$:

$$J_1^2-a^{-2}\left(J_2-v\,\frac{\partial \tilde{S}_{\lambda(J)}(v)}{\partial v}\right)^2-4a^{-2}J_1^2v^2-\left(\frac{\partial \tilde{S}_{\lambda(J)}(v)}{\partial v}\right)^2=2E.$$

В результате для функции $\tilde{S}_{\lambda(J)}(v;E)$ имеем выражение

$$\tilde{S}_{\lambda(J)}(v;E)=\\ =\int\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)^{-1}\left(\frac{J_2v}{a^2}\pm\sqrt{\left(\frac{J_2v}{a^2}\right)^2+\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\left(J_1^2-2E-\frac{4v^2J_1^2+J_2^2}{a^2}\right)}\right)dv, \quad (2.110)$$

которое может быть представлено через эллиптические интегралы.

Функция действия группы G на однородном пространстве $V = \exp(\mathfrak{n}) \setminus G$ приведена в (2.99), откуда получаем $\Psi(v, x^{-1}) = e^{x_1}(v - x_3)$. Явная координатная реализация правоинвариантных 1-форм σ^i на группе имеет вид (2.94). Используя формулу (2.106) находим, что полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби (2.108) будет иметь вид:

$$S(x; v, J, E) = \tilde{S}_{\lambda(J)} \left(e^{x_1}(v - x_3); E\right) - J_1 x_0 - J_2 x_1 - 2J_1 x_2 \left(v - x_3\right),$$

где функция $\tilde{S}_{\lambda(J)} \left(v; E\right)$ дается интегралом (2.110).

ГЛАВА 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРУППАХ ЛИ

В данной главе мы рассматриваем класс линейных дифференциальных уравнений на группах Ли, являющихся квантовыми аналогами конечномерных гамильтоновых систем, описанных нами в предыдущей главе. Мы также изложим метод интегрирования этих уравнений, основанный на теории гармонического анализа на группах Ли, а также установим связь некоторых его конструкций со специальным каноническим преобразованием, построенным нами в § 2.3.

§ 3.1 Квантовые уравнения на группах Ли

Пусть G — вещественная связная n-мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, в которой зафиксирован некоторый базис $\{e_i\}$. *Правое регулярное представление* T^R группы G действует в пространстве $C^\infty(G)$ согласно правилу:

$$(T_g^R\varphi)(x) \equiv \varphi(xg), \quad \varphi \in C^\infty(G), \ g, x \in G.$$

Нетрудно видеть, что генераторами этого представления являются левоинвариантные векторные поля $\xi_i(x) = (L_x)_* e_i$, рассматриваемые как дифференциальные операторы первого порядка. *Левое регулярное представление* T^L группы G определяется условием

$$(T_g^L\varphi)(x) \equiv \varphi(g^{-1}x), \quad \varphi \in C^\infty(G), \ g, x \in G.$$

Его генераторы — это правоинвариантные векторные поля $\eta_i(x) = -(R_x)_* e_i$.

Пусть $H(x, \partial_x)$ — дифференциальный оператор на группе G, действующий в функциональном пространстве $C^\infty(G)$. Оператор $H(x, \partial_x)$ будем называть *правоинвариантным*, если он перестановочен со всеми операторами правого регулярного представления:

$$H\left(T_g^R\varphi\right) = T_g^R\left(H\varphi\right), \quad \varphi \in C^\infty(G), \ g \in G. \tag{3.1}$$

В силу связности группы G условие правой инвариантности оператора $H(x, \partial_x)$ эквивалентно равенству

$$[H, \xi_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.2}$$

Аналогичным образом мы будем называть оператор $H(x, \partial_x)$ *левоинвариантным*, если он коммутирует со всеми операторами левого регулярного представления

$$H\left(T_g^L\varphi\right) = T_g^L\left(H\varphi\right), \quad \varphi \in C^\infty(G), \ g \in G. \tag{3.3}$$

Инфинитезимальный аналог этого требования имеет вид

$$[H, \eta_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оператор $H(x, \partial_x)$, одновременно удовлетворяющий требованиям (3.1) и (3.3), будем называть *биинвариантным*. Таким образом, оператор $H(x, \partial_x)$ является биинвариантным, если и только если

$$[H, \xi_i] = [H, \eta_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Утверждение 3.1. *Дифференциальный оператор $H(x, \partial_x)$ на группе G является правоинвариантным тогда и только тогда, когда он представляется операторным полиномом от правоинвариантных векторных полей с постоянными коэффициентами:*

$$H(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha \, \eta^\alpha(x). \tag{3.4}$$

Здесь m — целое неотрицательное число, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, A_α — постоянные, $\eta^\alpha(x) \equiv \eta_1^{\alpha_1}(x) \ldots \eta_n^{\alpha_n}(x)$.

Доказательство. Достаточность условия (3.4) очевидна. Докажем его необходимость.

Отметим, что всякий (не обязательно правоинвариантный) дифференциальный оператор $H(x, \partial_x)$ на группе G может быть записан в виде

$$H(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) \, \eta^\alpha(x),$$

где $A_\alpha(x)$ — некоторые гладкие функции из $C^\infty(G)$ (данное утверждение легко доказывается индукцией по m). Допустим, что этот оператор — правоинвариантный. В силу того, что право- и левоинвариантные векторные поля между собой коммутируют, с помощью (3.2) получаем

$$\sum_{|\alpha| \le m} (\xi_i \, A_\alpha)(x) \, \eta^\alpha(x) = 0, \tag{3.5}$$

где через $\xi_i \, A_\alpha$ обозначен результат действия векторного поля ξ_i на функцию A_α. В силу теоремы Пуанкаре – Биркгофа – Витта, упорядоченные мономы $\eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_n^{\alpha_n}$ образуют базис в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_R(G))$, следовательно, равенство (3.5) равносильно условию

$$\xi_i \, A_\alpha = 0, \quad i = 1, \ldots, n; \; |\alpha| \le m.$$

В следствие транзитивности правого действия группы G, это эквивалентно тому, что A_α являются постоянными для всякого α. Таким образом, необходимость утверждения доказана. $\square$

Отметим, что утверждение 3.1 фактически означает, что множество правоинвариантных дифференциальных операторов на группе G совпадает с правоинвариантной универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g}_R(G))$.

Замечание 3.1. Аналогичным образом можно доказать, что множество левоинвариантных дифференциальных операторов на группе G совпадает с левоинвариантной универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g}_L(G))$. В этом можно убедиться непосредственно, повторив для левоинвариантного случая приведенное выше доказательство утверждения 3.1. Можно, однако, данный факт доказать несколько иначе. Введем оператор инверсии I, действующий на функции из $C^\infty(G)$ согласно правилу: $(I\varphi)(x) \equiv \varphi(x^{-1})$, $\varphi \in C^\infty(G)$. Очевидно, что $I^2 = \mathrm{id}$. Кроме того $T^L_g\, I = I\, T^R_g$, откуда получаем $\xi_i = I\, \eta_i\, I^{-1}$. Пусть H — произвольный левоинвариантный дифференциальный оператор на группе G. Очевидно, что тогда оператор $\tilde{H} = I^{-1}\, H\, I$ будет являться правоинвариантным, поэтому для него справедливо представление (3.4):

$$\tilde{H} = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha\, \eta^\alpha(x).$$

Отсюда получаем

$$H = I\, \tilde{H}\, I^{-1} = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha\, I\, \eta^\alpha(x)\, I^{-1} = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha\, \xi^\alpha(x).$$

Следовательно, всякий левоинвариантный дифференциальный оператор является операторным полиномом с постоянными коэффициентами от операторов ξ_i, то есть принадлежит универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_L(G))$.

Право- или левоинвариантные дифференциальные операторы на группе могут быть также описаны в терминах алгебры $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ полиномов на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Пусть $\{e^i\}$ — базис в $\mathfrak{g}^*$, дуальный базису $\{e_i\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, $f = f_i e^i$ — разложение ковектора $f \in \mathfrak{g}^*$ по данному базису. Зададим линейное отображение $\mathrm{Sym} : \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*) \to U(\mathfrak{g}_R(G))$ называемое *симметризацией* и обладающее свойством:

$$\mathrm{Sym}(f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k}) = \eta_{i_1} \circ \eta_{i_2} \circ \dots \circ \eta_{i_k} \equiv \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}\, \eta_{\sigma(i_1)} \eta_{\sigma(i_2)} \dots \eta_{\sigma(i_k)}. \tag{3.6}$$

Здесь k — целое положительное число, S_k — группа перестановок k чисел, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки $\sigma \in S_k$, $1 \le i_1, i_2, \dots, i_k \le n$. Нетрудно видеть, что отображение симметризации является изоморфизмом линейных пространств $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$ и $U(\mathfrak{g}_R(G))$, откуда мы можем заключить, что правоинвариантные операторы на группе G находятся во взаимоднозначном соответствии с полиномами на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Естественно, что данное утверждение будет верным и для левоинвариантных операторов на группе.

Напомним, что скобка Ли – Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g}}$ на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ определяется формулой (2.12). Базисному вектору e_i алгебры $\mathfrak{g}$ поставим в соответствие линейный оператор $\rho(e_i)$ на $\mathrm{Pol}(\mathfrak{g}^*)$, действующий на произвольный моном $f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_k}$ согласно правилу:

$$\rho(e_i)(f_{i_1}\dots f_{i_k}) \equiv \{f_i, f_{i_1}f_{i_2}\dots f_{i_k}\}_{\mathfrak{g}} = \\ = \{f_i, f_{i_1}\}_{\mathfrak{g}} f_{i_2} + f_{i_1}\{f_i, f_{i_2}\}_{\mathfrak{g}}\dots f_{i_k} + \dots + f_{i_1}f_{i_2}\dots\{f_i, f_{i_k}\}_{\mathfrak{g}}.$$

Несложно проверить, что соответствие $e_i \to \rho(e_i)$, продолженное по линейности на всю алгебру $\mathfrak{g}$, является представлением. С другой стороны, на пространстве $U(\mathfrak{g}_R(G))$ определено естественное представление $\tilde\rho$ алгебры $\mathfrak{g}$, задаваемое правилом

$$\tilde\rho(e_i)(\eta_{i_1}\circ\eta_{i_2}\circ\dots\circ\eta_{i_k}) \equiv [\eta_i, \eta_{i_1}\circ\eta_{i_2}\circ\dots\circ\eta_{i_k}] = \\ = [\eta_i,\eta_{i_1}]\circ\eta_{i_2}\circ\dots\circ\eta_{i_k} + \eta_{i_1}\circ[\eta_i,\eta_{i_2}]\circ\dots\circ\eta_{i_k} + \dots + \eta_{i_1}\circ\eta_{i_2}\circ\dots\circ[\eta_i,\eta_{i_k}].$$

Можно показать, что отображение симметризации для этих представлений является сплетающим оператором. Иными словами, отображение Sym является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей (см. [180]).

Пусть $H(x,\partial_x)$ — биинвариантный дифференциальный оператор на группе G. Очевидно, что данный оператор принадлежит центру $Z(\mathfrak{g}_R(G))$ правоинвариантной универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G))$. Верно и обратное: всякий оператор, принадлежащий $Z(\mathfrak{g}_R(G))$, будет являться одновременно лево- и правоинвариантным на группе G. Следующее утверждение, являющееся простым следствием теоремы И. М. Гельфанда [196], дает описание центра $Z(\mathfrak{g}_R(G))$ в терминах G-инвариантных полиномов на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Утверждение 3.2. *Для того, чтобы оператор*

$$H = a_0 + a_1^i\,\eta_i + a_2^{ij}\,\eta_i\circ\eta_j + a_3^{ijk}\,\eta_i\circ\eta_j\circ\eta_k + \dots$$

принадлежал центру правоинвариантной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G))$, необходимо и достаточно, чтобы следующие полиномы

$$\mathscr{K}_1 = a_1^i f_i,\quad \mathscr{K}_2 = a_2^{ij} f_i f_j,\quad \mathscr{K}_3 = a_3^{ijk} f_i f_j f_k,\quad \dots,$$

были функциями Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

С точки зрения физических приложений представляет интерес рассмотрение дифференциальных операторов на группе G, действующих не в пространстве $C^\infty(G)$, а в гильбертовом пространстве $L^2(G, d\mu(x))$, где $d\mu(x)$ — некоторая мера на группе. Соответствующее скалярное произведение в $L^2(G, d\mu(x))$ задается формулой

$$(\varphi_1,\varphi_2)_G = \int\limits_G \overline{\varphi_1(x)}\,\varphi_2(x)d\mu(x).$$

Отметим, что выбор меры $d\mu(x)$ обычно диктуется особенностями решаемой задачи. Например, если на группе задана некоторая псевдориманова метрика $g_{ij}(x)$, то в качестве меры обычно выбирается соответствующая псевдориманова мера $d\mu(x) = \sqrt{\det\|g_{ij}(x)\|}\,dx$, где $dx = dx^1 \wedge \ldots dx^n$ — мера Лебега на группе G. Иногда, однако, предпочтительнее выбрать в качестве меры лево- или правоинвариантную меру Хаара на группе, для которых приняты обозначения $d\mu_R(x)$ и $d\mu_L(x)$ соответственно. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ на группе G эти меры с точностью до произвольного постоянного множителя определяются равенствами:

$$d\mu_R(x) = \det\|\sigma^i_j(x)\|\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad d\mu_L(x) = \det\|\omega^i_j(x)\|\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

где $\|\sigma^i_j(x)\|$ и $\|\omega^i_j(x)\|$ — матрицы право- и левоинвариантных 1-форм. Отметим также, что между право- и левоинвариантной мерами Хаара имеется связь

$$d\mu_R(x) = \Delta(x) d\mu_L(x),$$

где функция $\Delta(x) \equiv \det\|\mathrm{Ad}_x\|$ называется *модулярной функцией* группы G. Напомним, что если $\Delta(x) = 1$, группа называется *унимодулярной*. Таким образом, для унимодулярной группы G лево- и правоинвариантная меры Хаара совпадают.

Дадим теперь центральное определение этого параграфа.

Определение 3.1. Пусть G — связная группа Ли с правоинвариантной (левоинвариантной) мерой $d\mu(x)$. Линейное дифференциальное уравнение

$$H(x, \partial_x)\varphi(x) = 0, \quad \varphi \in L^2(G, d\mu(x)),$$

будем называть *квантовым уравнением* на группе Ли G, если $H(x, \partial_x)$ является правоинвариантным (левоинвариантным) дифференциальным оператором на группе.

Пример 3.1. (Уравнение Клейна – Гордона на группе Ли). Уравнение для скалярного поля φ, взаимодействующего с внешним гравитационным полем с метрикой g_{ij}, может быть записано в виде [1, 197]:

$$H(x, \partial_x)\varphi(x) \equiv \left(\Box + \zeta\, R + m^2\right)\varphi(x) = 0.$$

Здесь оператор $\Box$, называемый оператором Лапласа – Бельтрами, определяется формулой

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{|g|}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad g = \det\|g_{ij}\|, \tag{3.7}$$

где g^{ij} — обратный метрический тензор, R — скалярная кривизна метрики, m — неотрицательный вещественный параметр (масса скалярного поля). Параметр ζ называется *параметром конформной связи* и принимает значения $\zeta = (n-2)/(4(n-1))$ для $m = 0$, и $\zeta = 0$ для $m > 0$, где n — размерность пространства – времени.

Рассмотрим в качестве метрики g_{ij} правоинвариантную псевдориманову метрику на связной группе Ли G. В § 2.3 мы показали, что наиболее общий вид такой метрики дается выражением (2.87). Используя данную формулу нетрудно проверить, что оператор $H(x, \partial_x)$ может быть представлен в виде

$$H(x, \partial_x) = \mathbf{G}^{ij}\eta_i \circ \eta_j + \mathbf{C}^i\eta_i + \zeta R + m^2, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{C}^i = \mathbf{G}^{ij}\,\mathrm{tr}\,\|\mathrm{ad}_{e_j}\|$. Заметим, что скалярная кривизна всякой правоинвариантной метрики является постоянной величиной в силу транзитивности правого действия. Таким образом, оператор (3.8) принадлежит правоинвариантной универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_R(G))$. Стоит также отметить, что мера $\sqrt{|g|}\,dx$, отвечающая правоинвариантной метрике (2.87), отличается от правоинвариантной меры Хаара лишь на постоянный множитель:

$$\sqrt{|g|}\,dx = \mathbf{G}\cdot d\mu_R(x), \quad \mathbf{G} \equiv \det\|\mathbf{G}_{ij}\|.$$

Допустим теперь, что метрика g_{ij} является биинвариантной, то есть соответствующая ей билинейная симметрическая форма $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$ подчиняется условию (2.89). В силу связности группы G указанное условие равносильно требованию

$$\mathbf{G}(\mathrm{ad}_{e_k}e_i, e_j) + \mathbf{G}(e_j, \mathrm{ad}_{e_k}e_j) = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, n,$$

следствием которого является тот факт, что однородный квадратичный полином $\mathscr{K}(f) = \mathbf{G}^{ij}f_if_j$ — это функция Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Нетрудно также показать, что все постоянные $\mathbf{C}^i = \mathbf{G}^{ij}\,\mathrm{tr}\,\|\mathrm{ad}_{e_i}\|$ в этом случае будут тождественно равны нулю. Таким образом, согласно утверждению 3.2 оператор

$$H(x, \partial_x) = \mathbf{G}^{ij}\eta_i \circ \eta_j + \zeta R + m^2$$

соответствующий биинвариантной метрике, будет являться биинвариантным оператором на группе Ли.

§ 3.2 λ-представления алгебр Ли

Ключевой конструкцией излагаемого нами ниже метода интегрирования квантовых уравнений на группах Ли является так называемое *λ-представление* алгебр Ли, впервые введенное И. В. Широковым в рамках метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [25]. Определяемое как операторно неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, реализованное неоднородными дифференциальными операторами первого порядка, действующими в пространстве функций от $(\dim\mathfrak{g} - \mathrm{ind}\,\mathfrak{g})/2$ переменных, λ-представление оказалось чрезвычайно эффективным инструментом построения точных решений релятивистских волновых уравнений [30–34, 95]. Позже была установлена тесная связь между λ-представлениями алгебр Ли и орбитами коприсоединенного представления соответствующих групп Ли [36, 38], что послужило толчком к появлению целой серии публикаций, посвященных применению метода орбит к различным задачам теоретической физики [39–45].

Пусть G — связная вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — пространство, дуальное к алгебре $\mathfrak{g}$. Рассмотрим некоторый ковектор $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ и обозначим через $\mathcal{O}_\lambda$ проходящую через него коприсоединенную орбиту. Кроме того, мы допустим, что ковектор λ обладает поляризацией, то есть подалгеброй $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющей условиям (2.33) и (2.34).

Обозначим через $\xi_Z(x) = (L_x)_* Z$ и $\eta_Z(x) = -(R_x)_* Z$ — лево- и правоинвариантные векторные поля на группе G, соответствующие вектору $Z \in \mathfrak{g}$. Представление $Z \to \eta_Z(x)$ алгебры $\mathfrak{g}$ может быть продолжено по линейности до представления комплексной оболочки $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Подалгебра $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ по определению подчинена функционалу $\lambda \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$, поэтому ковектор λ задает ее одномерное представление $Z \to \langle \lambda, Z \rangle$, $Z \in \mathfrak{n}$. Определим функциональное подпространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ решений системы уравнений

$$\left[\eta_Z(x) + \frac{i}{\hbar} \langle \lambda, Z \rangle\right] \psi(x) = 0, \quad Z \in \mathfrak{n},\ \psi \in C^\infty(G), \tag{3.9}$$

где $\hbar$ — положительный вещественный параметр. Ясно, что подпространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ инвариантно относительно правого регулярного представления группы G.

Перед тем как дать детальное описание пространства $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$, примем некоторые дополнительные предположения. По заданной комплексной поляризации $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ построим вещественное подпространство $\mathfrak{m}$ такое, что $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}}$. Пересечение $\mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}}$ является комплексной подалгеброй в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, совпадающей с комплексной оболочкой $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ вещественной алгебры $\mathfrak{h} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$. Предположим, что

1) существует замкнутая подгруппа $H \subset G$, для которой $\mathfrak{h}$ является является алгеброй Ли;

2) подалгебра $\mathfrak{n}$ является инвариантной относительно присоединенного представления группы H, продолженного на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ по линейности;

3) существует замкнутая подгруппа $M \subset G$ такая, что $H \subset M$, причем алгебра Ли $\mathfrak{m}$ этой подгруппы удовлетворяет условию $\mathfrak{n} + \bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

Оказывается, что при выполнении этих трех условий пространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ может быть интепретировано как пространство функций на некотором G-однородном *смешанном многообразии* [47].

Понятие смешанного многообразия не достаточно широко распространено в литературе, поэтому мы напомним здесь соответствующее определение. Пусть V — хаусдорфово топологическое пространство. Предположим, что для каждой точки $v \in V$ найдется ее некоторая окрестность U, гомеоморфная окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{C}^l$, где k, l — целые неотрицательные числа. Пара (U, ϕ), где ϕ — указанный гомеоморфизм, называется *картой* на V в точке v. Таким образом, каждой точке пространства V соответствует набор k действительных чисел $(v^1, \ldots, v^k) \in \mathbb{R}^k$ и набор l комплексных чисел $(v^{k+1}, \ldots, v^{k+l}) \in \mathbb{C}^l$, которые называются *координатами* в карте (U, ϕ). Множество карт, в совокупности покрывающих все пространство V, называется *атласом*. Две карты (U_1, ϕ_1) и (U_2, ϕ_2) будем называть *согласованными*, если отображения $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ и $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми по вещественным координатам в $\mathbb{R}^k$ и голоморфными (аналитическими) по комплексным координатам в $\mathbb{C}^l$. При этом мы считаем, что две не пересекающиеся карты согласованы по определению. Пространство V называется *смешанным многообразием* типа (k, l), если

1) на нем задан атлас, состоящий из согласованных карт;

2) существует гладкое k-мерное вещественное многообразие S и такое отображение $\pi : V \to S$, что каждый «слой» $\pi^{-1}(v)$, $v \in S$, является l-мерным комплексным многообразием, причем функции перехода на V являются гладкими функциями, голоморфными вдоль каждого слоя.

Вернемся к описанию функционального пространства $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$. Рассмотрим однородное пространство $V = H \backslash G$. Оказывается, что на этом пространстве можно ввести структуру смешанного многообразия. Действительно, положим $S = M \setminus G$ и обозначим через π естественную проекцию V на S, ставящую в соответствие каждому классу $Hg \in V$ содержащий его класс $Mg \in S$. Можно показать, что каждый слой проекции π отождествляется с однородным пространством $U = H \setminus M$, на котором может быть введена комплексная структура. Отметим, что полученное подобным образом смешанное многообразие V имеет тип (k, l), где $k = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{m}$, $l = (\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{h})/2$.

Подсчитаем размерность смешанного многообразия V. По определению $\dim V = k + l$, откуда

$$\dim V = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{m} + \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{m} - \dim \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{2} (\dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{h}) .$$

С другой стороны, $\dim \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = 2 \dim \mathfrak{n} - \dim \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, поэтому $\dim \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} + \dim \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{h} = 2 \dim \mathfrak{n}$. Отсюда получаем

$$\dim V = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n}.$$

Таким образом, размерность смешанного многообразия V в точности равна половине размерности орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$.

В монографии [47] доказывается теорема, которая утверждает, что при указанных выше предположениях имеется изоморфизм $\phi : L(G, \mathfrak{n}, \lambda) \to C^\infty(V)$ между пространством $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ и пространством функций на смешанном многообразии V типа (k, l). Так как пространство $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ инвариантно относительно правого регулярного представления группы G, корректно определены операторы ℓ_X, действующие в пространстве $C^\infty(V)$:

$$\ell_X \equiv \phi \circ \xi_X \circ \phi^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{3.10}$$

Очевидно, что определенные таким образом операторы образуют некоторое представление алгебры $\mathfrak{g}$:

$$[\ell_X, \ell_Y] = \ell_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Определение 3.2. Представление алгебры $\mathfrak{g}$, образованное операторами (3.10), мы будем называть λ-*представлением*.

Замечание 3.2. Отметим, что если подгруппы H и M не замкнуты в G, смешанное многообразие V и соответствующее λ-представление алгебры $\mathfrak{g}$ на нем могут быть определены лишь локально. Более сложной и мало изученной является проблема интерпретации функционального подпространства $L(G, \mathfrak{n}, \lambda)$ в случае, когда подпространство $\mathfrak{m}$ не является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Впрочем, подобные ситуации возникают крайне редко, поэтому мы не будем здесь подробно развивать соответствующую теорию и всюду далее будем считать, что $\mathfrak{m}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\{e_i\}$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Зададим в окрестности единицы группы канонические координаты второго рода $g_x \leftrightarrow (x^1, \dots, x^n)$:

$$g_x = \prod_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \exp(x^i e_i) = \exp(x^1 e_1) \dots \exp(x^n e_n).$$

Обозначим через $\mathfrak{p}$ подпространство в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, дополнительное к поляризации $\mathfrak{n}$, и пусть $\{\tilde{e}_\alpha\}$ и $\{\tilde{e}_a\}$ — базисы в подпространствах $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{n}$ соответственно. Осуществим локальный переход от вещественных координат (x^i) на группе G к комплексным координатам (h^α, v^a) таким, что

$$\prod_{\alpha=1}^{\dim \mathfrak{n}} \exp(h^\alpha \tilde{e}_\alpha) \prod_{a=1}^{\dim \mathfrak{p}} \exp(v^a \tilde{e}_a) = \prod_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \exp\left(x^i e_i\right).$$

В этом случае координаты v^a представляют собой локальные координаты на смешанном многообразии $V = H \setminus G$.

Система уравнений (3.9) в координатах (v^a, h^α) запишется в виде:

$$\left[\eta_\alpha^\beta(h)\partial_{h^\beta} + \frac{i}{\hbar}\langle\lambda, \tilde{e}_\alpha\rangle\right]\psi(v,h) = 0,$$

где правоинвариантные векторные поля $\eta_\alpha(h) = \eta_\alpha^\beta(h)\partial_{h^\beta}$, соответствующие базисным векторам $\tilde{e}_\alpha$, зависят только от переменных h^α и фактически являются правоинвариантными векторными полями на группе N, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{n}$. Нетрудно видеть, что общее решение данной системы может быть представлено в форме

$$\psi(v,h) = \varphi(v)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int\sigma^\lambda(h)}, \tag{3.11}$$

где $\varphi(v)$ — произвольная функция от переменных v^a, $\sigma^\lambda(h) \equiv (R_{h^{-1}})^*\,\lambda|_\mathfrak{n}$ — правоинвариантная 1-форма на группе N, соответствующая ковектору $\lambda|_\mathfrak{n} \in \mathfrak{n}^*$. Отметим, что интеграл в правой части выражения (3.11) определен корректно, так как из уравнений Маурера – Картана и условия подчиненности подалгебры $\mathfrak{n}$ ковектору λ вытекает, что $d\sigma^\lambda = 0$.

Анализируя решение (3.11) нетрудно видеть, что отмеченный нами выше изоморфизм $\phi : L(G, \mathfrak{n}, \lambda) \to C^\infty(V)$ может быть выбран в виде

$$(\phi\psi)(v) = e^{\frac{i}{\hbar}\int\sigma^\lambda(h)}\psi(v,h) = \varphi(v).$$

Левоинвариантное векторное поле ξ_i, отвечающее базисному вектору e_i, в координатах (h^α, v^a) имеет вид (1.28). Используя определение (3.10) после несложных преобразований получаем следующее явное выражение для операторов λ-представления ℓ_i:

$$\ell_i(v, \partial_v; \lambda) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a} + \frac{i}{\hbar}\,\chi_i(v;\lambda), \quad \chi_i(v;\lambda) \equiv \lambda_\alpha\,\xi_i^\alpha(v,0). \tag{3.12}$$

Замечание 3.3. По построению векторные поля $\zeta_i(v) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a}$ являются генераторами действия группы G на однородном смешанном многообразии V и образуют алгебру $\mathfrak{g}(V)$, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$. Вспоминая результаты теории деформаций алгебр векторных полей, изложенной в § 1.4, мы видим, что функции $\chi_i(v;\lambda)$ в правой части равенства (3.12) определяют деформацию алгебры $\mathfrak{g}(V)$, удовлетворяющую условию $\chi_i(0;\lambda) = (i/\hbar)\lambda_i$.

Введем операторы $\hat{u}_a = -i\hbar\partial_{v^a}$, $\hat{v}^a = v^a$. Тогда операторы (3.12) могут быть записаны в виде

$$\ell_i(v, \partial_v; \lambda) = \frac{i}{\hbar}\,f_i(\hat{u}, \hat{v}; \lambda), \tag{3.13}$$

где функции $f_i(u, v; \lambda)$ определены формулой (2.29) и являются функциями, задающими линейный переход к каноническим координатам (u_a, v^a) на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$. Иначе говоря, операторы λ-представления алгебры $\mathfrak{g}$ являются результатом квантования на орбите $\mathcal{O}_\lambda$, то есть функции $f_i(u,v;\lambda)$ служат символами операторов $\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ (с точностью до множителя $i/\hbar$).

Пусть операторам $\hat{A}$ и $\hat{B}$ соответствуют символы $A(u,v)$ и $B(u,v)$. Тогда произведению $\hat{A}\hat{B}$ этих операторов будет соответствовать некоторый символ $A(u,v) * B(u,v)$, называемый *звездным произведением* символов $A(u,v)$ и $B(u,v)$. В частности, для pq-квантования формула звездного произведения приведена в монографии [198]. Коммутатору $(i/\hbar)[\hat{A},\hat{B}]$ операторов будет соответствовать символ

$$\frac{i}{\hbar}\left(A(u,v) * B(u,v) - B(u,v) * A(u,v)\right) = \{A(u,v), B(u,v)\} + O(\hbar), \tag{3.14}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — каноническая скобка Пуассона от фазовых переменных u и v. Отсюда следует, что условие инволютивности символов операторов относительно канонической скобки Пуассона является необходимым для коммутирования соответствующих операторов. Подставив в выражение (3.14) вместо величины $B(u,v)$ символ $f_i(u,v;\lambda)$ оператора $-i\hbar\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ приходим к выводу, что символ $A(u,v)$ оператора, коммутирующего со всеми операторами λ-представления, должен находится в инволюции со всеми функциями $f_i(u,v;\lambda)$. Но в силу условия (2.26) очевидно, что этому условию удовлетворяют лишь константы. Таким образом, со всеми операторами $\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ коммутируют только константы, что эквивалентно *операторной неприводимости* λ-представления.

Замечание 3.4. Отметим, что с учетом приведенных выше рассуждений, λ-представление также может быть определено как операторно неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$, действующее в пространстве функций на смешанном многообразии $V = H \setminus G$.

На однородном смешанном многообразии V введем меру $d\mu(v)$ и скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2)_V = \int_V \overline{\varphi_1(v)}\, \varphi_2(v) d\mu(v), \tag{3.15}$$

относительно которого операторы $\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ являются антиэрмитовыми: $\ell_i^+ = -\ell_i$. В общем случае для этого требуется ввести в операторы $\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ так называемый «квантовый сдвиг» $\lambda \to \lambda + i\hbar\gamma$, где ковектор $\gamma \in (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$ определяется условием:

$$\gamma(X) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\operatorname{ad}_X - \operatorname{tr}\operatorname{ad}_X|_{\mathfrak{m}}\right), \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{3.16}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$ — базис в подалгебре $\mathfrak{m}$, $\{e_a\}$ — базис в подпространстве $\mathfrak{p}$, дополнительном к подалгебре $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Тогда формула (3.16) в базисе $\{e_i\} = \{e_\alpha\} \cup \{e_a\}$ запишется в виде

$$\gamma_i = \frac{1}{2}\, C_{ia}^a, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}.$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в выбранном базисе, при этом индекс a пробегает значения, отвечающие базисным векторам подпространства $\mathfrak{p}$.

Пример 3.2. Рассмотрим группу $E(2)$ (см. пример 2.1). Функции линейного перехода к каноническим координатам на орбитах, соответствующие поляризации $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2\}$ ковектора $\lambda(J) = (J, 0, 0)$, имеют вид (2.37). В случае вещественной поляризации $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, поэтому формула (3.16) дает нулевой «квантовый сдвиг»: $\gamma = 0$. Таким образом, согласно (3.13) получаем

$$\ell_1 = \frac{iJ}{\hbar}\cos v, \quad \ell_2 = -\frac{iJ}{\hbar}\sin v, \quad \ell_3 = \partial_v. \tag{3.17}$$

Нетрудно проверить, что оператор Казимира алгебры $\mathfrak{e}(2)$ в λ-представлении кратен единичному оператору:

$$\hat{\mathscr{K}} = (-i\hbar\ell_1)^2 + (-i\hbar\ell_2)^2 = J^2.$$

Подалгебре $\mathfrak{n}$ отвечает замкнутая подгруппа $N = \mathbb{R}^2 \subset E(2)$, являющаяся группой сдвигов двумерной плоскости. Отсюда следует, что $V = \mathbb{R}^2 \setminus E(2)$ — одномерное гладкое вещественное многообразие, диффеоморфное окружности S^1. Легко видеть, что операторы λ-представления являются антиэрмитовыми относительно обычной лебеговой меры dv.

Пример 3.3. Пусть $G = SO(3)$ (см. пример 2.2). Как было отмечено, регулярные коприсоединенные орбиты данной группы — это семейство концентрических сфер с центром в начале координат. Всякая орбита проходит через ковектор $\lambda(J) = (0, 0, -J)$, допускающий комплексную поляризацию $\mathfrak{n} = \{e_1 + ie_2, e_3\}$. В данном случае $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = \{e_1\}$, так что замкнутая подгруппа H, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{h}$, изоморфна группе $SO(2)$. Таким образом, однородное пространство $V = SO(2) \setminus SO(3)$ как вещественное многообразие диффеоморфно двумерной сфере S^2. Отметим, что двумерная сфера допускает естественную комплексную структуру, превращающую ее в одномерное комплексное многообразие [199].

Формула (3.16), очевидно, приводит к нулевому «квантовому сдвигу». Используя функции (2.39), определяющие линейный переход к каноническим координатам на орбитах, получаем

$$\ell_1 = \frac{i}{2}\left(1 - v^2\right)\partial_v + \frac{iJ}{\hbar}v, \quad \ell_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + v^2\right)\partial_v + \frac{J}{\hbar}v, \quad \ell_3 = -iv\partial_v + \frac{iJ}{\hbar}. \tag{3.18}$$

$$\hat{\mathscr{K}} = (-i\hbar\ell_1)^2 + (-i\hbar\ell_2)^2 + (-i\hbar\ell_3)^2 = J(J + \hbar).$$

Мера на V, относительно которой операторы λ-представления являются антиэрмитовыми, определяется равенством

$$d\mu(v) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{2J}{\hbar} + 1\right)\frac{dv \wedge d\bar{v}}{(1 + |v|^2)^{2\left(\frac{J}{\hbar}+1\right)}}. \tag{3.19}$$

Всякая голоморфная функция $\varphi(v)$, удовлетворяющая условию $(\varphi, \varphi)_V < +\infty$, с необходимостью является полиномом, степень которого ограничена сверху значением $1 + 2J/\hbar$.

При этом пространство указанных полиномов будет инвариантным относительно операторов (3.18), если только неотрицательный параметр J кратен $\hbar$[1]:

$$J = n\hbar, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.20}$$

Таким образом, λ-представление алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ в пространстве $L^2(V, d\mu(v))$ определено лишь для тех значений параметра J, которые удовлетворяют условию квантования (3.20). (Геометрический смысл данного условия квантования в терминах коприсоединенных орбит будет обсуждаться в следующем параграфе).

Пример 3.4. Построим операторы λ-представления алгебры Ли группы $SL(2, \mathbb{R})$ (см. пример 2.3).

1. *Тип A*. Ковектор $\lambda(J) = (J, 0, 0)$, где $J \in (0, +\infty)$, обладает вещественной поляризацией $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2 + e_3\}$, поэтому $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$. Замкнутая в $SL(2, \mathbb{R})$ подгруппа H, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{h}$, изоморфна группе верхних треугольных 2×2-матриц с положительными диагональными элементами. Имея в виду разложение Ивасавы (2.72), нетрудно видеть, что соответствующее однородное пространство $V = H \setminus G$ диффеоморфно окружности S^1.

С помощью формулы (3.16) получаем $\gamma = (1/2, 0, 0)$. Таким образом, операторы λ-представления в этом случае имеют вид:

$$\ell_1 = -\sin v\, \partial_v + \left(\frac{iJ}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\cos v, \quad \ell_2 = -\cos v\, \partial_v - \left(\frac{iJ}{\hbar} - \frac{1}{2}\right)\sin v, \quad \ell_3 = \partial_v.$$

$$\hat{\mathscr{K}} = (-i\hbar\ell_1)^2 + (-i\hbar\ell_2)^2 - (-i\hbar\ell_3)^2 = J^2 + \frac{\hbar^2}{4}.$$

Легко проверяется, что данные операторы антиэрмитовы относительно обычной лебеговой меры dv на $V = S^1$.

2. *Тип B*. Поляризация ковектора $\lambda(J) = (0, 0, J)$, $J \in (0, +\infty)$, является комплексной: $\mathfrak{n} = \{e_1 - ie_2, e_3\}$, причем $\mathfrak{m} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{h} = \{e_3\} \simeq \mathfrak{so}(2)$. Замкнутая подгруппа H, отвечающая алгебре $\mathfrak{h}$, изоморфна группе $SO(2)$, поэтому однородное пространство $V = H \setminus SL(2, \mathbb{R})$ как двумерное вещественное многообразие диффеоморфно одной из полостей двуполостного гиперболоида в $\mathbb{R}^3$, а как одномерное комплексное многообразие оно совпадает с пространством модели Пуанкаре геометрии Лобачевского.

Из формулы (3.16) следует нулевой «квантовый сдвиг», поэтому λ-представление в

[1]Более точно, требование инвариантности рассматриваемого подпространства полиномов относительно операторов λ-представления приводит к более общему условию: $J = n\hbar$, $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$. Мы не рассматриваем здесь полуцелые значения параметра n, в силу того, что соответствующие им λ-представления не могут быть подняты до соответствующих глобальных представлений группы $SO(3)$.

данном случае выглядит следующим образом:

$$\ell_1 = -\frac{i}{2}\left(1+v^2\right)\partial_v - \frac{iJv}{\hbar}, \quad \ell_2 = -\frac{1}{2}\left(1-v^2\right)\partial_v + \frac{Jv}{\hbar}, \quad \ell_3 = iv\partial_v + \frac{iJ}{\hbar}. \tag{3.21}$$

$$\hat{\mathscr{K}} = (-i\hbar\ell_1)^2 + (-i\hbar\ell_2)^2 - (-i\hbar\ell_3)^2 = -J(J-\hbar).$$

Нетрудно проверить, что операторы (3.21) антиэрмитовы относительно скалярного произведения (3.15) с мерой

$$d\mu(v) = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{2J}{\hbar} - 1\right)\left(1 - |v|^2\right)^{2\left(\frac{J}{\hbar}-1\right)} dv \wedge d\bar{v}. \tag{3.22}$$

В данном случае пространство $L^2(V, d\mu(v))$ совпадает с пространством функций $\{\varphi(v)\}$, аналитических в единичном круге и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi(v)\| < +\infty, \quad \|\varphi(v)\| = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{2J}{\hbar} - 1\right)\int\limits_{|v|<1} |\varphi(v)|^2 \left(1 - |v|^2\right)^{2\left(\frac{J}{\hbar}-1\right)} dv \wedge d\bar{v}.$$

Отметим, что пространство $L^2(V, d\mu(v))$ будет ненулевым, только если $J > \hbar/2$.

§ 3.3 Элементы гармонического анализа на группах Ли

Использование λ-представлений алгебр Ли позволяет проводить эффективную процедуру гармонического анализа на многообразиях соответствующих групп Ли. В настоящем параграфе мы опишем эту процедуру следуя, в основном, работам [44, 96, 97]. Всюду ниже мы будем считать группу G вещественной связной унимодулярной группой Ли. Требование унимодулярности наложено нами исключительно для упрощения приводимых ниже выкладок; все изложенные результаты с небольшими техническими изменениями могут быть перенесены и на неунимодулярный случай.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G зафиксируем некоторый базис $\{e_i\}$. Пусть $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ — произвольный ковектор. Обозначим через T^λ поднятие λ-представления алгебры $\mathfrak{g}$ до локального представления ее группы G:

$$\frac{d}{dt} T^\lambda(e^{te_i})\varphi(v)\Big|_{x=e} = \ell_i(v, \partial_v; \lambda)\varphi(v), \quad \varphi \in C^\infty(V). \tag{3.23}$$

По определению линейного оператора

$$T^\lambda(x)\varphi(v) = \int_V \mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v'). \tag{3.24}$$

Семейство функций $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ может быть интерпретировано как набор «матричных элементов» представления T^λ. Из условия $T^\lambda(x_1x_2) = T^\lambda(x_1)T^\lambda(x_2)$ следует соотношение:

$$\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x_1x_2) = \int_V \mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}''}(x_1)\mathscr{D}^\lambda_{v''\bar{v}'}(x_2)d\mu(v'').$$

Обозначим через $\xi_i(x) = (L_x)_* e_i$ и $\eta_i(x) = -(R_x)_* e_i$ — лево- и правоинвариантные векторные поля на группе G, отвечающие базисному вектору $e_i \in \mathfrak{g}$. Имеет место следующее

Утверждение 3.3. *Обобщенные функции $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ удовлетворяют системе уравнений:*

$$[\eta_i(x) + \ell_i(v, \partial_v; \lambda)]\, \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = 0, \tag{3.25}$$

$$\left[\xi_i(x) - \overline{\ell_i^+(v', \partial_{v'}; \lambda)}\right] \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = 0. \tag{3.26}$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^\infty(V)$. Имеем

$$T^\lambda(x_1 x_2)\varphi(v) = T^\lambda(x_1) T^\lambda(x_2)\varphi(v). \tag{3.27}$$

Положим в этом равенстве $x_1 = e^{te_i}$, $x_2 = x$, и продифференцируем полученное выражение по параметру t при $t = 0$:

$$\frac{d}{dt}\, T^\lambda(e^{te_i}x)\varphi(v)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\, T^\lambda(e^{te_i}) T^\lambda(x)\varphi(v)\Big|_{t=0}.$$

Используя формулы (3.23) и (3.24), получаем:

$$\int_V \frac{d}{dt}\, \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(e^{te_i}x)\Big|_{t=0} \varphi(v')d\mu(v') = \ell_i(v, \partial_v; \lambda) \int_V \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v'),$$

или

$$-\int_V \eta_i(x)\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v') = \int_V \ell_i(v, \partial_v; \lambda)\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v').$$

Последнее равенство равносильно уравнению (3.25).

Положим теперь в (3.27) $x_1 = x$ и $x_2 = e^{te_i}$. Дифференцируя полученное равенство по t при $t = 0$, получаем:

$$\frac{d}{dt}\, T^\lambda(xe^{te_i})\varphi(v)\Big|_{t=0} = T^\lambda(x)\, \frac{d}{dt}\, T^\lambda(e^{te_i})\varphi(v)\Big|_{t=0}.$$

С учетом (3.23) и (3.24) будем иметь:

$$\int_V \frac{d}{dt}\, \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(xe^{te_i})\Big|_{t=0} \varphi(v')d\mu(v') = \int_V \mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\left(\ell_i(v', \partial_{v'}; \lambda)\varphi(v')\right) d\mu(v'),$$

или

$$\int_V \xi_i(x)\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\varphi(v')d\mu(v') = \int_V (\overline{\ell_i^+(v', \partial_{v'}; \lambda)}\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x))\varphi(v')d\mu(v').$$

Легко видеть, что полученное выражение эквивалентно уравнению (3.26). □

Система уравнений (3.25), (3.26) определяет обобщенную функцию $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ почти однозначно (с точностью до постоянного множителя). Таким образом, для практического нахождения «матричных элементов» представления T^λ фактически требуется решить систему уравнений (3.25) и (3.26) и зафиксировать неопределенный постоянный множитель, наложив некоторое условие нормировки. Чтобы выяснить вид этого условия, в формуле (3.24) примем $x = e$:

$$T^\lambda(e)\varphi(v) = \varphi(v) = \int_V \mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(e)\varphi(v')d\mu(v').$$

Но отсюда следует, что функция $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(e)$ является дельта-функцией на смешанном многообразии V относительно меры $d\mu(v)$:

$$\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(e) = \delta(v, \bar{v}'). \tag{3.28}$$

Полученное равенство и является условием нормировки, которое в совокупности с уравнениями (3.25) и (3.26) задает «матричные элементы» представления T^λ однозначно.

Замечание 3.5. Отметим, что на самом деле функции $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ однозначно определяются любой из систем уравнений (3.25) или (3.26), дополненной условием (3.28). Иными словами, для построения «матричных элементов» представления $T^\lambda(x)$ достаточно проинтегрировать одну из систем уравнений (3.25) или (3.26), и затем наложить условие (3.28).

Пусть $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ — поляризация ковектора λ, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра, такая что $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{n} \cap \bar{\mathfrak{n}}$. Как следует из предыдущего параграфа, операторы λ-представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действуют в пространстве функций на однородном смешанном многообразии $V = H \setminus G$, где H — замкнутая подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Предположим, что $G^\lambda \subset H$, где G^λ — группа стационарности ковектора λ относительно коприсоединенного действия группы G. Как уже отмечалось, локально данное условие всегда выполнено, так как имеет место включение $\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{g}^\lambda$ — алгебра Ли группы G^λ.

В алгебре $\mathfrak{g}^\lambda$ зафиксируем некоторый базис $\{e_\alpha\}$. Так как H является группой стационарности точки $v_0 = 0$ однородного смешанного многообразия $V = H \setminus G$, а группа G^λ лежит в H, имеет место равенство $\ell_\alpha(0, \partial_v; \lambda) = (i/\hbar)\lambda_\alpha$, где $\alpha = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}^\lambda$. Ограничим систему уравнений (3.25) на подгруппу G^λ и положим $v = v_0$:

$$\left(\eta_\alpha(h) + \frac{i}{\hbar}\lambda_\alpha\right)\mathscr{D}^\lambda_{v_0\bar{v}'}(h) = 0, \quad h \in G^\lambda. \tag{3.29}$$

Решение системы (3.29) с точностью до постоянного множителя может быть представлено в виде:

$$\mathscr{D}^\lambda_{v_0\bar{v}'}(h) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int \sigma^\lambda(h)\right), \tag{3.30}$$

где $\sigma^\lambda(h) = (R_{h^{-1}})^*\lambda|_{\mathfrak{g}^\lambda}$ — правоинвариантная 1-форма на подгруппе G^λ. Подалгебра $\mathfrak{g}^\lambda$ подчинена ковектору λ, поэтому используя уравнения Маурера – Картана нетрудно показать, что 1-форма $\sigma^\lambda(h)$ замкнута на G^λ. Таким образом, интеграл в (3.30) корректно определен.

Ясно, что локальное решение (3.30) может быть продолжено до глобального, если интеграл в правой части формулы (3.30) по любой замкнутой кривой Γ на подгруппе G^λ кратен $2\pi i\hbar$. Отметим, что в силу замкнутости 1-формы $\sigma^\lambda(h)$ значение этого интеграла зависит лишь от гомологического класса, которому принадлежит кривая Γ. Следовательно, для существования глобального решения системы (3.29) необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint\limits_{\Gamma\in H_1(G^\lambda)}\sigma^\lambda(h)=n_\Gamma\in\mathbb{Z}. \tag{3.31}$$

Иными словами, 1-форма $\sigma^\lambda(h)$ должна принадлежать целочисленному классу когомологий из $H^1(G^\lambda,\mathbb{Z})$. В случае односвязной группы G условие (3.31) является эквивалентным *условию целочисленности орбиты* $\mathcal{O}_\lambda$, предложенному А. А. Кирилловым [47]:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{\Gamma\in H^2(\mathcal{O}_\lambda)}\omega_\lambda=n_\Gamma\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, для односвязной группы равенство (3.31) выступает в качестве критерия целочисленности орбиты коприсоединенного представления $\mathcal{O}_\lambda$. В подобном виде данный критерий был получен в работе [48] и носит название *критерий Костанта*.

Описанные нами конструкции позволяют провести процедуру гармонического анализа на группе G. Напомним, что основной целью гармонического анализа на группах Ли является построение некоторого базиса $\{e_k(\lambda,x)\}$ в функциональном пространстве $L^2(G,d\mu(x))$ и плотного подпространства $\Phi\subset L^2(G,d\mu(x))$ такого, что для всякой функции $\varphi\in\Phi$, прямое и обратное преобразования Фурье имеют соответственно вид [98]:

$$\psi_k(\lambda)=(\varphi,e_k(\lambda))_G,\quad \varphi(x)=\int_\Lambda d\mu(\lambda)\sum_k\psi_k(\lambda)e_k(\lambda,x).$$

При этом индекс λ соответствует множеству собственных значений инвариантных операторов группы G, а k соответствует множеству собственных значений остальных операторов, которые вместе с инвариантными операторами образуют максимальное множество коммутирующих операторов в $L^2(G,d\mu(x))$. Отметим, что основной трудностью построения гармонического анализа на группах Ли является тот факт, что максимальное множество коммутирующих операторов в $L^2(G,d\mu(x))$, определяющее базис $e_k(\lambda,x)$, может содержать неограниченные операторы с непрерывными спектрами. Поскольку собственные функции таких операторов не являются элементами функционального пространства $L^2(G,d\mu(x))$, а являются лишь линейными функционалами на плотном множестве $\Phi\subset L^2(G,d\mu(x))$, вводят триплет Гельфанда $\Phi\subset L^2(G,d\mu(x))\subset\Phi'$, где Φ' — пространство, дуальное к пространству Φ.

Как мы уже отмечали, в общем случае «матричные элементы» $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ являются обобщенными функциями, то есть функциями из Φ'. Кроме того, эти функции являются собственными функциями биинвариантных операторов на группе G. Действительно, всякий биинвариантный оператор представляется в виде $K(x,\partial_x) = \mathscr{K}(\eta(x,\partial_x))$, где $\mathscr{K} \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)^G$ — полиномиальная функция Казимира на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, $\eta_i(x,\partial_x)$ — правоинвариантные векторные поля на группе. Используя равенство (3.25), получаем

$$\mathscr{K}(\eta(x,\partial_x))\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = \mathscr{K}(-\ell(v,\partial_v;\lambda))\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x).$$

Но в силу операторной неприводимости λ-представления, оператор $\mathscr{K}(-\ell(v,\partial_v;\lambda))$ должен быть пропорционален единичному так, что $\mathscr{K}(-\ell(v,\partial_v;\lambda)) = \kappa(\lambda)\cdot 1$, где $\kappa(\lambda)$ — скалярная величина. Таким образом,

$$\mathscr{K}(\eta(x,\partial_x))\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = \kappa(\lambda)\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x). \tag{3.32}$$

Рассмотрим функциональное подпространство $\Phi^{\lambda} \subset \Phi$, определяемое как пространство функций вида

$$\varphi_{\lambda}(x) = \int\limits_{V\times V} \psi_{\lambda}(v,v')\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)d\mu(v)d\mu(v'). \tag{3.33}$$

Здесь $\psi_{\lambda}(v,v')$ — произвольная функция, для которой интеграл (3.33) имеет смысл. Из (3.32) непосредственно следует, что линейное пространство Φ^{λ} — это пространство собственных функций биинвариантных операторов на группе G. Очевидно, что пространства Φ^{λ} и $\Phi^{\tilde{\lambda}}$ при $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ ортогональны, то есть

$$(\varphi_{\lambda},\varphi_{\tilde{\lambda}})_G = 0, \quad \varphi_{\lambda} \in \Phi^{\lambda},\ \varphi_{\tilde{\lambda}} \in \Phi^{\tilde{\lambda}}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(\bar{v},v',\tilde{v},\bar{\tilde{v}}',\lambda,\tilde{\lambda}) \equiv \left(\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'},\mathscr{D}^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{v}\bar{\tilde{v}}'}\right)_G = \int\limits_G \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\,\mathscr{D}^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{v}\bar{\tilde{v}}'}(x)d\mu(x).$$

Из уравнений (3.25) и (3.26) следуют равенства

$$\left[\overline{\ell_i(v,\partial_v;\lambda)} - \ell_i^{+}(\tilde{v},\partial_{\tilde{v}};\tilde{\lambda})\right]f = 0, \quad \left[\ell_i^{+}(v',\partial_{v'};\lambda) - \overline{\ell_i(\tilde{v}',\partial_{\tilde{v}'});\tilde{\lambda}}\right]f = 0, \tag{3.34}$$

из которых вытекает, что мы можем положить

$$\int\limits_G \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\,\mathscr{D}^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{v}\bar{\tilde{v}}'}(x)d\mu(x) = \delta(v,\bar{\tilde{v}})\delta(v',\bar{\tilde{v}}')\delta(\lambda,\tilde{\lambda}). \tag{3.35}$$

Полученное соотношение представляет собой *свойство ортогональности* семейства функций $\{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\}$. Рассуждая аналогичным образом можно показать, что набор «матричных элементов» $\{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\}$ удовлетворяет также *свойству полноты*

$$\int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(\tilde{x})d\mu(v)d\mu(v')d\mu(\lambda) = \delta(x,\tilde{x}). \tag{3.36}$$

Здесь $\delta(x,\tilde{x})$ — дельта-функция на группе G, определенная относительно инвариантной меры Хаара $d\mu(x)$, а мера $d\mu(\lambda)$ представляет собой меру на множестве Λ регулярных целочисленных орбит в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Замечание 3.6. На самом деле остается открытым вопрос о единственности решения системы уравнений (3.34), а значит пока нет строгого доказательства соотношений (3.35) и (3.36). Приведенные нами выше рассуждения носят предварительный характер и указывают лишь возможный способ доказательства свойств ортогональности и полноты семейства функций $\{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)\}$. Тем не менее, с практической точки зрения для каждой конкретной группы Ли равенства (3.35) и (3.36) могут быть проверены непосредственно.

Замечание 3.7. Отметим, что равенство (3.35) выступает также как определение меры $d\mu(\lambda)$ на множестве Λ.

Пространство функций $\psi_\lambda(v,\bar{v}')$ от переменных v, $\bar{v}'$ и λ таких, что

$$\psi_\lambda(v,\bar{v}') = \int\limits_{G} \varphi(x)\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)d\mu(x), \quad \varphi\in\Phi, \tag{3.37}$$

будем называть *двойственным* к пространству Φ и обозначать $\hat{\Phi}$. Используя соотношение (3.36) получаем

$$\varphi(x) = \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\psi_\lambda(v,v')d\mu(v)d\mu(v')d\mu(\lambda). \tag{3.38}$$

Равенства (3.37) и (3.38) решают задачи гармонического анализа и синтеза на унимодулярной группе Ли G. В частности, формула (3.37) представляет собой обобщение преобразования Фурье для произвольной связной вещественной унимодулярной группы Ли.

Как правило, матричные элементы неприводимых бесконечномерных унитарных представлений в пространстве $L^2(G,d\mu)$ определяются как собственные функции n-мерного коммутативного набора операторов из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G))\times U(\mathfrak{g}_L(G))$ (см., например, [98]). С точки зрения возможных приложений к проблеме интегрирования дифференциальных уравнений, изложенный выше подход предпочтителен по следующим причинам. Во-первых, задача на собственные значения для совокупности коммутирующих между собой дифференциальных операторов не всегда может быть явно решена, в то время как система уравнений (3.25), (3.26) всегда может быть решена в квадратурах. Во-вторых, при переходе к двойственному пространству $\hat{\Phi}$ образы лево- и правоинвариантных дифференциальных операторов ξ_i и η_i также будут представляться дифференциальными операторами (первого порядка), то есть для функций $\varphi(x)$ и $\psi(v, \bar{v}')$, связанных преобразованиями (3.37) и (3.38), будем иметь

$$\eta_i(x, \partial_x)\varphi(x) \leftrightarrow -\ell_i^+(v, \partial_v; \lambda)\psi_\lambda(v, \bar{v}'), \quad \xi_i(x, \partial_x)\varphi(x) \leftrightarrow -\overline{\ell_i(v', \partial_{v'}; \lambda)}\psi_\lambda(v, \bar{v}').$$

Приведенные соотношения играют ключевую роль при интегрировании квантовых уравнений на группах Ли. Именно, при переходе в двойственное пространство $\hat{\Phi}$ оператор уравнения — элемент правоинвариантной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}_R(G))$ — перейдет в дифференциальный оператор того же порядка от переменных v, число которых меньше чем размерность группового многообразия.

§ 3.4 Связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями групп Ли

Между специальным каноническим преобразованием в T^*G, построенным в § 2.3, и «матричными элементами» $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ неприводимых унитарных представлений группы G существует тесная связь. В настоящем параграфе мы обсудим эту связь и проиллюстрируем ее несколькими примерами.

Пусть $S_\lambda(u', v, x)$ — производящая функция специального канонического преобразования в пространстве T^*G (см. определение в § 2.3). В силу соотношения (2.59) действие на эту функцию правоинвариантного векторного поля $\eta_i(x) = -(R_x)_* e_i$ дает

$$\eta_i(x) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_\lambda(u', v, x)\right] = -\frac{i}{\hbar} f_i\left(-i\hbar\partial_v, v; \lambda\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_\lambda(u', v, x)\right]. \tag{3.39}$$

Здесь $f_i(u, v; \lambda) = \zeta_i^a(v)u_a + \chi_i(v; \lambda)$ — функции, задающие линейный переход к каноническим координатам на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$.

Операторы λ-представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с учетом «квантового сдвига» определяются равенством

$$\ell_i(v, \partial_v; \lambda) = \frac{i}{\hbar} f_i(-i\hbar\partial_v, v; \lambda + i\hbar\gamma),$$

где ковектор γ дается формулой (3.16). Тогда из соотношения (3.39) следует, что параметрическое семейство функций

$$\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(x) \equiv \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{\lambda+i\hbar\gamma}(u', v, x)\right], \tag{3.40}$$

будет удовлетворять системе уравнений

$$[\eta_i(x) + \ell_i(v, \partial_v; \lambda)]\, \mathscr{D}^\lambda_{vu'}(x) = 0.$$

В дальнейшем нам будет удобнее использовать несколько иную форму записи для функций $\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x)$, нежели ту, которая дается формулой (3.40). Чтобы ее получить, применим формулу (2.57) и представим функцию $S_{\lambda+i\hbar\gamma}(u',v,x)$ в виде

$$S_{\lambda+i\hbar\gamma}(u',v,x) = S_{\lambda}(u',v,x) + i\hbar\gamma_{\alpha}\, h^{\alpha}(v,x).$$

Здесь γ_α — значение ковектора γ на базисном векторе e_α подалгебры $\mathfrak{n}$, $h^\alpha(v,x)$ — соответствующая координатная компонента фактора однородного пространства $V = H \setminus G$. В результате получим

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x) = \exp\left[-\gamma_\alpha h^\alpha(v,x)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S_\lambda(u',v,x)\right],$$

Далее, используя для величин γ_α выражение (3.16), имеем

$$\exp\left[-\gamma_\alpha h^\alpha(v,x)\right] = \left[\frac{e^{h^\alpha(v,x)\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{e_\alpha}}}{e^{h^\alpha(v,x)\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{e_\alpha}|_{\mathfrak{m}}}}\right]^{-1/2} = \left[\frac{\det e^{h^\alpha(v,x)\mathrm{ad}_{e_\alpha}}}{\det e^{h^\alpha(v,x)\mathrm{ad}_{e_\alpha}|_{\mathfrak{m}}}}\right]^{-1/2} = \left[\frac{\det \mathrm{Ad}_{h(v,x)}}{\det \mathrm{Ad}_{h(v,x)}|_{\mathfrak{m}}}\right]^{-1/2}.$$

Отсюда окончательно получаем

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(v,x)}} \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S_\lambda(u',v,x)\right], \tag{3.41}$$

где

$$\Delta(v,x) \equiv \frac{\det \mathrm{Ad}_{h(v,x)}}{\det \mathrm{Ad}_{h(v,x)}|_{\mathfrak{m}}}.$$

Матричные элементы $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ представления $T^\lambda(x)$ однозначно определяются как решение системы уравнений (3.25), удовлетворяющее начальному условию (3.28). В силу того, для функций $\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x)$ равенства (3.25) выполняются тождественно, имеем

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = \int \overline{K_\lambda(u',v')}\, \mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x)\, d\mu(u') =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta(v,x)}} \cdot \int \overline{K_\lambda(u',v')}\, \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, S_\lambda(u',v,x)\right] d\mu(u'), \tag{3.42}$$

где ядро $K_\lambda(u,v)$ данного интегрального преобразования и мера $d\mu(u)$ нуждаются в определении. Положим в формуле (3.41) $x = e$. Так как $h^\alpha(v,e) = 0$ и $S_\lambda(u',v,e) = u'_a v^a$, получаем

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(e) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, u'_a v^a\right).$$

Учитывая теперь формулу (3.42), а также условие (3.28), получаем, что ядро $K_\lambda(u,v)$ и мера $d\mu(u)$ должны быть связаны соотношением

$$\int \overline{K_\lambda(u',v')}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, u'_a v^a\right) d\mu(u') = \delta(v,\bar{v}'). \tag{3.43}$$

Замечание 3.8. По-видимому, равенство (3.43) определяет ядро $K_\lambda(u,v)$ интегрального преобразования (3.42) для заданной меры $d\mu(u)$ однозначно. Мы не будем развивать здесь строго доказательства этого утверждения, отметив лишь, что в каждом конкретном примере это может быть проверено непосредственно. Кроме того, следует заметить, что построение меры $d\mu(u)$, а также соответствующей области интегрирования следует проводить с учетом дополнительных условий квантования, которые могут возникнуть в следствие требования глобальности функций $\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(x)$. Ниже мы проиллюстрируем это замечание на конкретных примерах.

Подводя некоторый итог отметим, что мы установили связь между производящей функций $S_\lambda(u',v,x)$ специального канонического преобразования в T^*G, являющегося чисто классической конструкцией, и «матричными элементами» $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ неприводимого унитарного представления $T^\lambda(x)$, которое в определенном смысле представляет собой объект квантового происхождения. Математически эта связь дается соотношением (3.42), где интегральное ядро $K_\lambda(u,v)$ и мера $d\mu(u)$ определяются выражением (3.43).

Замечание 3.9. Указанная нами связь между специальным каноническим преобразованием и представлением T^λ является, по-видимому, еще одним подтверждением глубокой фундаментальной концепции о связи между коприсоединенными орбитами и неприводимыми представлениями групп Ли. Последовательное продвижение данной идеи легло в основу серии работ А. А. Кириллова, результатом которых явился так называемый *метод орбит* [47], хорошо зарекомендовавший себя в теории представлений групп и алгебр Ли, а также в теории геометрического квантования. Отметим, тем не менее, что полученные нами результаты нацелены скорее на чисто конструктивный аспект и в первую очередь служат основой для построения единого метода интегрирования классических и квантовых уравнений движения на группах Ли. Именно поэтому в настоящем исследовании мы не будем интересоваться возможным применением формулы (3.42) для решения актуальных задач теории представлений в рамках метода орбит.

Пример 3.5. Рассмотрим группу $E(2)$ (см. примеры 2.1, 2.4, 3.2). Нетрудно видеть, что для данной группы $\det \mathrm{Ad}_h = \det \mathrm{Ad}_h|_{\mathfrak{m}} = 1$, где $\mathfrak{m} = \{e_1, e_2\}$, $h \in H = SO(2)$. Используя для производящей функции $S_\lambda(u',v,x)$ ее явное выражение (2.68), согласно формуле (3.41) получаем:

$$\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,u'(v+x_3) + \frac{iJ}{\hbar}(x_1\cos v - x_2\sin v)\right]. \tag{3.44}$$

Всякая коприсоединенная орбита группы $E(2)$ является целочисленной (см. условие (3.31)), следовательно, параметр J принимает любые значения из интервала $(0,+\infty)$. Координата x_3 является 2π-периодической, поэтому функция $\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(x)$ будет глобально определена на группе $E(2)$ лишь тогда, когда

$$u' = n\hbar, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Таким образом, параметр u' в данном случае квантуется, а интегрирование по мере $d\mu(u)$ должно сводиться к суммированию по всем возможным значениям целого параметра $n \in \mathbb{Z}$:

$$\int \varphi(u)\, d\mu(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n\hbar). \tag{3.45}$$

Напомним, что операторы λ-представления алгебры $\mathfrak{e}(2)$ антиэрмитовы относительно лебеговой меры dv. Соответствующая дельта-функция совпадает с обычной дельта-функцией Дирака $\delta(v - v')$, а формула (3.43) представляет собой ее разложение в ряд Фурье

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{K_\lambda(n\hbar, v')}\, \exp{(inv)} = \delta(v - v'),$$

где

$$K_\lambda(u, v) = \frac{1}{2\pi}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\, uv\right). \tag{3.46}$$

Используя (3.44), (3.46), а также учитывая (3.45), с помощью формулы (3.42) получаем явное выражение для «матричных элементов» унитарного представления T^λ:

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x) = \exp\left[\frac{iJ}{\hbar}(x_1 \cos v - x_2 \sin v)\right] \delta(v + x_3 - v').$$

При этом согласно (3.24) представление T^λ действует в гильбертовом пространстве $L^2(S^1, dv)$ и определяется формулой

$$T^\lambda(x)\varphi(v) = \exp\left[\frac{iJ}{\hbar}(x_1 \cos v - x_2 \sin v)\right] \varphi(v + x_3).$$

Пример 3.6. В случае группы $SO(3)$ (см. примеры 2.2, 2.5, 3.3) $\mathfrak{m} = \mathfrak{so}(3)$, поэтому $\mathrm{Ad}_x = \mathrm{Ad}_x|_{\mathfrak{m}}$ для любого $x \in SO(3)$. Используя (2.71), получаем следующее выражение для функции $\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(\varphi, \theta, \psi)$:

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(\varphi, \theta, \psi) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\, \frac{e^{-i\,\frac{\varphi+\psi}{2}} v \cos\frac{\theta}{2} + ie^{i\,\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}}{ie^{-i\,\frac{\varphi-\psi}{2}} v \sin\frac{\theta}{2} + e^{i\,\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}}\, u' - \frac{iJ}{\hbar}(\varphi - \psi + \pi)\right] \times$$
$$\times \left(ie^{i\varphi} \cos\frac{\theta}{2} - v \sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2J}{\hbar}}.$$

Условие целочисленности (3.31) для группы $SO(3)$ приводит к квантованию параметра J:

$$J = n\hbar, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.47}$$

Это можно показать непосредственно, потребовав глобальность функции $\mathscr{D}^{\lambda}_{vu'}(\varphi,\theta,\psi)$ на всей группе $SO(3)$. Действительно, как легко видеть $\mathscr{D}^{\lambda}_{0u'}(0,0,\psi)=\exp(iJ\psi/\hbar)$, откуда и следует справедливость (3.47).

Роль дельта-функции в гильбертовом пространстве $L^2(V,d\mu(v))$ с мерой (3.19) играет функция:

$$\delta(v,\bar v')=(1+v\bar v')^{\frac{2J}{\hbar}}\ .$$

Как было показано в примере 2.2, область определения координаты u — это замкнутый круг $\bar D_J=\{u\in\mathbb{C}\colon |u|\le J\}$. Зафиксируем на множестве $\bar D_J$ меру

$$d\mu(u)=\frac{i\,du\wedge d\bar u}{2\pi J^2}.$$

Легко проверяются следующие соотношения ортогональности

$$\int\limits_{\bar D_J}\bar u^{\,k}\,u^{k'}\,d\mu(u)=\frac{J^{2k}}{k+1}\,\delta_{kk'},\quad k,k'=0,1,2,\dots.$$

Пользуясь этими соотношениями нетрудно показать, что функция

$$K_n(u,v)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!\,(k+1)}{(2n-k)!\,n^{2k}}\,\left(\frac{iuv}{\hbar}\right)^k,$$

удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{\bar D_J}\overline{K_n(u,v')}\,\exp\left(\frac{iuv}{\hbar}\right)\,d\mu(u)=(1+v\bar v')^{2n}\,,\quad n=1,2,\dots.$$

Выбирая эту функцию в качестве ядра интегрального преобразования (3.42), для «матричных элементов» представления T^{λ} получаем следующее явное выражение:

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar v'}(\varphi,\theta,\psi)=e^{-in(\varphi+\psi)}\left[(e^{i(\varphi+\psi)}+v\bar v')\cos\frac{\theta}{2}+i(e^{i\psi}v+e^{i\varphi}\bar v')\sin\frac{\theta}{2}\right]^{2n}.$$

Пример 3.7. Наконец, рассмотрим случай группы $SL(2,\mathbb{R})$ (см. примеры 2.3, 2.6) и 3.3).

Тип A. Для данного типа коприсоединенных орбит подалгебра $\mathfrak{m}$ совпадает с поляризацией $\mathfrak{n}=\{e_1,e_2{+}e_3\}$, поэтому $\Delta(v,x)=e^{h_1}$, где $h_1=h_1(v,t,x,\theta)$ — координатная компонента фактора однородного пространства $V=\exp(\mathfrak{n})\setminus SL(2,R)=S^1$, ассоциированная с базисным вектором e_1:

$$h_1(v,t,x,\theta)=t+\ln\frac{1+(x-e^t\operatorname{ctg}\frac{v}{2})^2}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2}}.$$

Выражение для производящей функции $S_\lambda(u',v,t,x,\theta)$ специального канонического преобразования приведено в (2.75). В результате для функции $\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(t,x,\theta)$ получаем:

$$\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(t,x,\theta)=\left[\frac{1+(e^{-t}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}-x)^2}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2}}\right]^{\frac{iJ}{\hbar}-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{iJ}{\hbar}-\frac{1}{2}\right)t+\frac{iu'\theta}{\hbar}+\frac{2iu'}{\hbar}\operatorname{arcctg}\left(e^{-t}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}-x\right)\right]. \quad (3.48)$$

Все орбиты рассматриваемого типа целочисленны. Однако в силу того, что координата θ на группе $SL(2,\mathbb{R})$ определена с точностью до прибавления 4π, локальная функция (3.48) может быть глобально продолжена на всю группу, если

$$u'=\frac{n\hbar}{2},\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

Дельта-функция относительно меры $d\mu(v)=dv$ совпадает с обычной дельта-функцией Дирака $\delta(v-v')$, поэтому разложение (3.43) принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\overline{K\left(\frac{n\hbar}{2},v'\right)}\exp\left(\frac{inv}{2}\right)=\delta(v-v'),$$

где

$$K(u,v)=\frac{1}{4\pi}\exp\left(\frac{iuv}{\hbar}\right).$$

Применяя теперь формулу (3.42), для «матричных элементов» $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar v'}(t,x,\theta)$ получаем

$$\mathscr{D}^\lambda_{v\bar v'}(t,x,\theta)=e^{\left(\frac{iJ}{\hbar}-\frac{1}{2}\right)t}\left(\frac{1+(e^{-t}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}-x)^2}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2}}\right)^{\frac{iJ}{\hbar}-\frac{1}{2}}\delta\left(v'-\theta+2\operatorname{arcctg}\left(e^{-t}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}-x\right)\right).$$

Тип B. Для данных орбит $\mathfrak{m}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, поэтому $\mathrm{Ad}_g=\mathrm{Ad}_g|_\mathfrak{m}$, $g\in SL(2,\mathbb{R})$. С учетом этого, с помощью выражения (2.76) для производящей функции получаем

$$\mathscr{D}^\lambda_{vu'}(t,x,\theta)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\frac{e^{i\theta}\left(e^t(v+i)(x-i)-iv-1\right)}{ie^t(v+i)(x+i)+v-i}\,u'+\frac{iJ(\theta+2\pi)}{\hbar}+\frac{Jt}{\hbar}+\frac{2\,J\ln 2}{\hbar}\right]\times$$
$$\times\left[\left(ie^t+e^tx-i\right)v+ie^tx-e^t-1\right]^{-\frac{2J}{\hbar}}.$$

Целочисленные орбиты согласно (3.31) выделяются условием

$$J=\frac{n\hbar}{2},\quad n=1,2,\ldots.$$

Указанный факт также непосредственно следует из равенства $\mathscr{D}^\lambda_{0\,u'}(0,0,\theta)=e^{iJ\theta/\hbar}$ в силу того, что координата θ определена с точностью до прибавления 4π. Дельта-функция в гильбертовом пространстве $L^2(V,d\mu(v))$, где мера $d\mu(v)$ определена формулой (3.22), имеет вид

$$\delta(v,\bar v')=\frac{1}{(1-v\bar v')^{\frac{2J}{\hbar}}},$$

Область определения переменной u — вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Зафиксируем в этой области меру

$$d\mu(u) = \frac{i}{2\pi}\, e^{-|u|^2}\, du \wedge d\bar{u}.$$

Используя соотношения ортогональности

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \bar{u}^k u^{k'} d\mu(u) = k!\, \delta_{kk'}, \quad k, k' = 1, 2, \ldots,$$

несложно показать, что для функции

$$K_n(u, v) = \frac{1}{(1 - i\hbar uv)^n}$$

выполняется соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \overline{K_n(u, v')}\, \exp\left(\frac{iuv}{\hbar}\right) d\mu(u) = \frac{1}{(1 - v\bar{v}')^n}$$

поэтому ее можно выбрать в качестве ядра интегрального преобразования (3.42). Произведя необходимые вычисления, получаем:

$$\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(t, x, \theta) = \frac{(-2)^n e^{\frac{n(t+i\theta)}{2}}}{\left[e^{i\theta}\left(e^t(v+i)(1+ix) + v - i\right)\bar{v}' + e^t(v+i)(x+i) - iv - 1\right]^n}.$$

§ 3.5 Метод интегрирования квантовых уравнений на группах Ли

Опишем теперь применение изложенной нами выше теории к задаче интегрирования квантовых уравнений на группах Ли. Как уже отмечалось, к классу подобных уравнений относится, например, уравнение Клейна – Гордона для метрики, допускающей просто транзитивную группу движений.

Пусть G — связная унимодулярная группа Ли с инвариантной мерой Хаара $d\mu(x)$, и пусть $H(x, \partial_x)$ — правоинвариантный дифференциальный оператор на G, самосопряженный относительно меры $d\mu(x)$. Опишем метод построения базиса решений уравнения

$$H(x, \partial_x)\varphi(x) = 0, \quad \varphi \in L^2(G, d\mu(x)), \tag{3.49}$$

основанный на изложенных выше идеях гармонического анализа на группах Ли.

В силу того, что оператор $H(x, \partial_x)$ инвариантен относительно правого регулярного представления группы G, он принадлежит правоинвариантной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_R(G))$, то есть

$$H(x, \partial_x) = \mathscr{H}(-i\eta(x, \partial_x)),$$

где $\eta_i(x,\partial_x) = -(R_x)_* e_i$ — правоинвариантные векторные поля на G, $\mathscr{H}(f)$ — некоторая полиномиальная функция на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Таким образом, квантовое уравнение (3.49) может быть записано в виде

$$\mathscr{H}(-i\eta(x,\partial_x))\varphi(x) = 0. \tag{3.50}$$

Проведем редукцию уравнения (3.50), сведя его решение к интегрированию некоторого вспомогательного дифференциального уравнения, зависящего от меньшего числа независимых переменных. Для этого мы будем искать решение (3.50) в форме интегрального разложения (3.38). Действуя на это решение оператором $\mathscr{H}(-i\eta(x,\partial_x))$ с использованием равенства (3.25) получаем

$$\mathscr{H}(-i\eta(x,\partial_x))\varphi(x) = \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{H}(i\eta(x,\partial_x))\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\,\psi_\lambda(v,v')\,d\mu(v)\,d\mu(v')\,d\mu(\lambda) =$$
$$= \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\,\mathscr{H}(i\ell^{+}(v,\partial_v;\lambda))\psi_\lambda(v,v')\,d\mu(v)\,d\mu(v')\,d\mu(\lambda).$$

Если мера $d\mu(v)$ выбрана таким образом, что операторы λ-представления $\ell_i(v,\partial_v;\lambda)$ являются антиэрмитовыми, то в итоге имеем

$$\mathscr{H}(-i\eta(x,\partial_x))\varphi(x) = \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)}\,\mathscr{H}(-i\ell(v,\partial_v;\lambda))\psi_\lambda(v,v')\,d\mu(v)\,d\mu(v')\,d\mu(\lambda).$$

Система функций $\mathscr{D}^{\lambda}_{v\bar{v}'}(x)$ является полной, поэтому из полученного соотношения следует, что уравнение (3.50) будет равносильно уравнению

$$\mathscr{H}(-i\ell(v,\partial_v;\lambda))\psi_\lambda(v,v') = 0, \tag{3.51}$$

определяющему неизвестную функцию $\psi_\lambda(v,v')$. Переменные v' входят в данное уравнение как параметры, поэтому мы получили линейное дифференциальное уравнение, зависящее от $\dim V$ независимых переменных.

Определение 3.3. Линейное дифференциальное уравнение (3.51) будем называть *приведенным квантовым уравнением* на группе Ли.

Пусть $\{\psi^{(\alpha)}_\lambda(v)\}$ — ортонормированный базис решений приведенного квантового уравнения (3.51), нумеруемый $(\dim V - 1)$-мерным параметром $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{\dim V-1})$[2]:

$$\int\limits_V \overline{\psi^{(\alpha)}_\lambda(v)}\,\psi^{(\tilde{\alpha})}_\lambda(v)\,d\mu(v) = \delta(\alpha,\tilde{\alpha}). \tag{3.52}$$

[2]Для удобства мы полагаем параметр α пробегающим непрерывную область; однако в общем случае множество его значений может быть как непрерывным, так и дискретным или даже смешанным.

Рассмотрим на группе G семейство частных решений уравнения (3.49)

$$\varphi_\lambda^{(\alpha)}(x;v') = \int\limits_V \overline{\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)}\,\psi_\lambda^{(\alpha)}(v)\,d\mu(v), \tag{3.53}$$

параметризованное коллективным параметром (λ, v', α). Из свойства ортогональности «матричных элементов» $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$, а также из соотношения (3.52) вытекает ортогональность данного набора функций

$$\int\limits_G \overline{\varphi_\lambda^{(\alpha)}(x;v')}\,\varphi_{\tilde\lambda}^{(\tilde\alpha)}(x;\tilde v')\,d\mu(x) = \delta(\bar v', \tilde v')\delta(\lambda,\tilde\lambda)\delta(\alpha,\tilde\alpha).$$

Кроме того, нетрудно видеть, что набор функций $\{\varphi_\lambda^{(\alpha)}(x;v')\}$ полон в том смысле, что любое решение квантового уравнения (3.50) является линейной комбинацией этого набора. Таким образом, задача о построении ортонормированного базиса решений уравнения (3.50) сводится к аналогичной задаче для приведенного квантового уравнения (3.51).

Определение 3.4. Квантовое уравнение (3.50) на группе G будем называть *интегрируемым*, если соответствующее ему приведенное квантовое уравнение (3.51) является обыкновенным дифференциальным уравнением.

Очевидно, что уравнение (3.49) будет являться интегрируемым для *произвольного* правоинвариантного оператора $H(x,\partial_x)$, если $\dim V \leq 1$. Так как в интегральном разложении (3.38) интегрирование ведется только по регулярным ковекторам $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, для размерности смешанного многообразия V получаем: $\dim V = \dim \mathcal{O}_\lambda/2 = (\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g})/2$, где $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.1. *Квантовое уравнение* (3.49) *на группе G интегрируемо для произвольного правоинвариантного оператора $H(x,\partial_x)$, если*

$$\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}) \leq 1. \tag{3.54}$$

Рассмотрим теперь важный частный случай. Пусть оператор $H(x,\partial_x)$ в уравнении (3.49) является биинвариантным. Это означает, что $H(x,\partial_x) = \mathscr{K}(-i\eta(x,\partial_x))$, где $\mathscr{K}(f)$ — полиномиальная функция Казимира на $\mathfrak{g}^*$. Так как $\mathscr{K}(-i\ell(v,\partial_v;\lambda)) = \kappa(\lambda)\cdot 1$, где $\kappa(\lambda)$ — скалярная величина, соответствующее приведенное квантовое уравнение становится алгебраическим уравнением

$$\kappa(\lambda)\psi_\lambda(v,v') = 0,$$

которое, очевидно, элементарно интегрируется.

Следствие 3.1. *Пусть $H(x,\partial_x)$ — произвольный биинвариантный дифференциальный оператор на группе G. Тогда соответствующее ему квантовое уравнение* (3.49) *интегрируемо.*

Пример 3.8. (Уравнение Клейна – Гордона для метрики Мак-Леннана – Тарига – Таппера).

В качестве примера, иллюстрирующего изложенный метод интегрирования, рассмотрим уравнение Клейна – Гордона для метрики (2.90):

$$H(x,\partial_x)\varphi(x) = \left[\left(1-4e^{-2x_1}x_2^2\right)\partial_0^2 - 4e^{-2x_1}x_2\,\partial_0\partial_3 - a^{-2}\left(\partial_1^2 + e^{2x_1}\,\partial_2^2\right) - \right.$$
$$\left. -e^{-2x_1}\,\partial_3^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0. \quad (3.55)$$

Данное уравнение также может быть записано в виде

$$\left[\eta_1^2 - a^{-2}\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right) - \eta_4^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0, \quad (3.56)$$

где векторные поля η_i даются выражениями (2.93). Симметрии этого уравнения ассоциируются с векторными полями Киллинга (2.91), которые образуют четырехмерную разрешимую алгебру Ли $\mathfrak{g}$.

В § 2.5 мы отмечали, что метрика (2.90) является нештеккелевой. Следовательно, решение уравнения Клейна – Гордона для метрики Мак-Леннана – Тарига – Таппера в рамках классического метода разделения переменных невозможно. С другой стороны, индекс алгебры $\mathfrak{g}$ равен 2, поэтому согласно теореме (3.54) уравнение (3.55), рассматриваемое как квантовое уравнение на соответствующей группе Ли G, является интегрируемым. Построим базис пространства его решений.

Используя функции линейного перехода к каноническим координатам (2.98), найдем вид операторов λ-представления алгебры $\mathfrak{g}$ ($\hbar = 1$):

$$\ell_1 = iJ_1, \quad \ell_2 = -v\partial_v + iJ_2 - \frac{1}{2}, \quad \ell_3 = 2iJ_1 v, \quad \ell_4 = \partial_v.$$

Данные операторы действуют в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}, dv)$ и антиэрмитовы относительно соответствующего скалярного произведения (3.15).

Любая коприсоединенная орбита, проходящая через ковектор $\lambda(J) = (J_1, J_2, 0, 0)$, где $J_1 \in (-\infty, 0)\cap(0,+\infty)$, $J_2 \in (-\infty,+\infty)$, является целочисленной. Используя производящую функцию (2.7) специального канонического преобразования в T^*G, построим «матричные элементы» $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ представления T^λ согласно методике, изложенной в предыдущем параграфе:

$$\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x) = e^{iJ_1(x_0+2vx_2e^{-x_1})}e^{\left(iJ_2-\frac{1}{2}\right)x_1}\delta(v' - e^{-x_1}v - x_3).$$

Соотношения ортогональности (3.35) и полноты (3.36) для функции $\mathscr{D}^\lambda_{v\bar{v}'}(x)$ проверяются непосредственно, причем в качестве спектральной меры $d\mu(\lambda)$ выступает мера

$$\int\limits_\Lambda (\cdot)\,d\mu(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\cdot)\,\frac{J_1 dJ_1 dJ_2}{4\pi^3}.$$

Согласно (3.56), приведенное квантовое уравнение в данном случае будет иметь вид

$$\left(1+\frac{v^2}{a^2}\right)\psi''_\lambda(v)+\frac{2v}{a^2}\left(1-iJ_2\right)\psi'_\lambda(v)+$$
$$+\left[J_1^2(1-4a^2v^2)-\frac{iJ_2(1-iJ_2)}{a^2}+\frac{1}{4a^2}-m^2\right]\psi_\lambda(v)=0. \quad (3.57)$$

Будем искать решение уравнения (3.57) в следующем виде

$$\psi_\lambda(v)=(a^2+v^2)^{iJ_2}f\left(-\frac{v^2}{a^2}\right). \quad (3.58)$$

Вводя вспомогательные обозначения

$$\gamma=iJ_2,\quad \delta=a^2J_1^2,\quad \eta=\frac{a^2}{4}\left(J_1^2-m^2\right)-\frac{J_2^2}{4}+\frac{5}{16},\quad q=-\frac{v^2}{a^2},$$

после подстановки (3.58) в (3.57) получаем уравнение на функцию $f(q)$

$$f''(q)+\frac{(\frac{3}{2}+\gamma)q-\frac{1}{2}}{q(q-1)}f'(q)+\frac{\delta q+\eta+\frac{\gamma-1}{4}}{q(q-1)}f(q)=0.$$

Его общее решение имеет вид

$$\psi(q)=C_1H\ell\left(0,-\frac{1}{2},\gamma,\delta,\eta;q\right)+C_2\sqrt{q}\,H\ell\left(0,\frac{1}{2},\gamma,\delta,\eta;q\right), \quad (3.59)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $H\ell(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\eta;q)$ — конфлюэнтная функция Гойна [200].

Зафиксируем константы C_1 и C_2 в выражении (3.59) условием $\int\psi_\lambda(v)dv=1$. Подставляя соответствующее частное решение $\psi_\lambda(v)$ в формулу (3.53) мы получаем тем самым ортонормированный базис в пространстве решений исходного уравнения (3.55), нумеруемый коллективным параметром (v',J_1,J_2). Таким образом, задача построения базиса пространства решений уравнения Клейна – Гордона (3.55) решена.

Основные идеи описанного нами алгоритма построения точных решений квантовых уравнений на группах Ли были изложены в работах [41, 44, 95–97]. Отметим также, что класс квантовых уравнений, являющийся объектом обсуждения настоящей главы, может быть обобщен с сохранением возможности интегрирования представленным методом. В качестве примера укажем работу [42], где авторы используют описанную нами технику для построения точных решений уравнения Дирака на группах вида $\mathbb{R}\times G_3$, где G_3 — произвольная унимодулярная трехмерная группа Ли. Кроме того, в серии работ [201–203] был построен и исследован класс нелинейных дифференциальных уравнений на группах Ли с нелокальной нелинейностью специального вида, интегрируемых изложенных в настоящем параграфе методом.

ГЛАВА 4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Задача интегрирования геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях является, пожалуй, одной из наиболее важных задач в дифференциальной геометрии. Огромный интерес решение данной проблемы представляет также и в теоретической физике, в частности, в общей теории относительности и космологии.

К настоящему моменту проблема описания псевдоримановых многообразий, допускающих интегрируемые геодезические потоки, довольно далека до своего окончательного решения. Известны лишь сравнительно небольшие классы многообразий, на которых удается явным образом сконструировать интегрируемые геодезические потоки: компактные группы Ли [16, 99], симметрические пространства [100–104], n-симметрические пространства [105], многообразия Штиффеля [100], компактные однородные пространства с биинвариантными метриками [106]. Отметим, что все перечисленные серии многообразий относятся к классу однородных пространств групп Ли. Вместе с этим не менее значимой является проблема получения удобных критериев интегрируемости геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях; для однородных пространств с инвариантными метриками эта проблема исследовалась в работах [107–109].

В настоящей главе мы исследуем проблему интегрируемости геодезических потоков на однородных пространствах $M = H \setminus G$ с двумя классами псевдоримановых метрик на них: инвариантными метриками и метриками субмерсии. В частности, мы получим необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах геодезических потоков рассматриваемых метрик. Эти условия выражаются через целые неотрицательные числа — *степень сингулярности*, *индекс* и *дефект* однородного пространства, которые легко могут быть посчитаны по структурным константам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G и подалгебры $\mathfrak{h}$ группы изотропии H. Кроме того мы опишем эффективный алгоритм интегрирования геодезических потоков, состоящий в использовании специального канонического преобразования в T^*M, основанного на построении канонических координат на орбитах коприсоединенного представления группы G и на симплектических листах пуассоновой алгебры инвариантных функций на T^*M.

§ 4.1 Коприсоединенные орбиты и классификация однородных пространств

4.1.1 Классификация орбит коприсоединенного представления

Следуя работам [38, 110], изложим классификационный подход к описанию орбит коприсоединенного представления групп Ли.

Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — дуальное пространство к алгебре $\mathfrak{g}$. Зафиксируем в алгебре $\mathfrak{g}$ некоторый базис $\{e_i\}$ и обозначим через f_i координаты ковектора $f \in \mathfrak{g}^*$ в дуальном базисе $\{e^i\}$. Рассмотрим векторные поля вида

$$Z_i(f) = C_{ij}(f)\,\frac{\partial}{\partial f_j}, \quad C_{ij}(f) \equiv C_{ij}^k\, f_k,$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i\}$. Векторные поля $Z_i(f)$ представляют собой генераторы коприсоединенного действия группы G на пространстве $\mathfrak{g}^*$, и поэтому их линейная оболочка образует касательное пространство $T_\lambda\mathcal{O}_\lambda$ к коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_\lambda$, проходящей через элемент $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. В силу того, что ранг матрицы $\|C_{ij}(f)\|$ постоянен на каждой коприсоединенной орбите, размерность $\mathcal{O}_\lambda$ можно корректно вычислить следующим образом:

$$\dim\mathcal{O}_\lambda = \operatorname{rank}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle = \operatorname{rank}\|C_{ij}(\lambda)\|, \quad \lambda \in \mathfrak{g}^*.$$

В § 2.1 было отмечено, что функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ являются инвариантами коприсоединенного представления, поэтому их можно использовать для описания коприсоединенных орбит. Однако, в общем случае функции из $C^\infty(\mathfrak{g}^*)^G$ различают лишь регулярные орбиты, размерность которых согласно определению равна $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, где $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ — индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Для описания всех, в том числе и сингулярных орбит рассмотрим в $\mathfrak{g}^*$ семейство поверхностей, задаваемых следующим образом:

$$M_{(s)} = \{f \in \mathfrak{g}^*\colon Z_{i_1 i_2 \dots i_{n-r-2s+1}}(f) = 0;\ Z_{i_1 i_2 \dots i_{n-r-2s-1}}(f) \neq 0\}. \tag{4.1}$$

Здесь $Z_{i_1 i_2 \dots i_k}(f) \equiv Z_{i_1}(f) \wedge Z_{i_2}(f) \wedge \dots \wedge Z_{i_k}(f)$, $n = \dim\mathfrak{g}$, $r = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, $s = 0, 1, \dots, (n-r)/2$. Определение (4.1) означает, что в каждой точке поверхности $M_{(s)}$ лишь $n-r-2s-1$ векторов $Z_i(f)$ являются линейно независимыми. Отметим, что поверхности $M_{(s)}$ можно также определить эквивалентным способом с помощью условий падения ранга матрицы $\|C_{ij}(f)\|$:

$$M_{(s)} = \{f \in \mathfrak{g}^*\colon F^s(f) = 0, F^{s+1}(f) \neq 0\}, \quad s = 1, \dots, \frac{n-r}{2} - 1,$$

где через $F^s(f)$ обозначена совокупность всех миноров матрицы $\|C_{ij}(f)\|$ размера $n-r-2s$.

Из определения поверхностей $M_{(s)}$ и условия постоянства ранга матрицы $\|C_{ij}(f)\|$ на орбитах следует, что каждая $M_{(s)}$ является *инвариантной* поверхностью, представляющей собой объединение コприсоединенных орбит одинаковой размерности:

$$\mathfrak{g}^* = \bigcup_{s=0}^{(n-r)/2} M_{(s)}, \quad M_{s_i} \cap M_{s_j} = \varnothing,\ s_i \neq s_j.$$

Замечание 4.1. Отметим, что поверхность $M_{(s)}$ сама может состоять из нескольких непересекающихся связных компонент, каждая из которых в силу связности группы G содержит вместе с элементом λ и всю орбиту $\mathcal{O}_\lambda$.

Определение 4.1. Коприсоединенную орбиту $\mathcal{O}_\lambda$ будем называть *орбитой s-типа*, если $\mathcal{O}_\lambda \subset M_{(s)}$. Само число s при этом будем называть *степенью сингулярности орбиты*.

Из определения следует, что коприсоединенные орбиты, степень сингулярности которых равна нулю, являются регулярными.

Обобщим теперь понятие функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$, введя следующее

Определение 4.2. Непостоянные функции $\mathscr{K}^{(s)} \in C^\infty(M_{(s)})$ будем называть *функциями Казимира s-типа*, если они находятся в инволюции относительно скобки Ли – Пуассона с любой функцией на $M_{(s)}$:

$$\{\mathscr{K}^{(s)}, \varphi\}_{\mathfrak{g}} = 0, \quad \forall\ \varphi \in C^\infty(M_{(s)}).$$

Используя явное выражение (2.13) для скобки Ли – Пуассона, легко показать, что функции Казимира s-типа являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$C^k_{ij}\, f_k \,\frac{\partial \mathscr{K}^{(s)}(f)}{\partial f_j}\Big|_{f\in M_{(s)}} = 0, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}. \tag{4.2}$$

Обозначим через r_s число функционально независимых решений системы (4.2). Ясно, что это число связано с размерностью поверхности $M_{(s)}$ согласно формуле:

$$r_s = \dim M_{(s)} - \operatorname{rank} \|C_{ij}(f)\||_{f\in M_{(s)}} = \dim M_{(s)} + \operatorname{ind}\mathfrak{g} + 2s - \dim \mathfrak{g}.$$

Замечание 4.2. Может так оказаться, что одна или несколько функций Казимира не будут являются однозначными функциями своих аргументов. Например, это наблюдается в тех случаях, когда пространство орбит $\mathfrak{g}^*/G$ топологически не полуотделимо или не хаусдорфово. Не смотря на кажущуюся искусственность, подобные примеры все же возникают в различных задачах теории представлений, и поэтому могут представлять интерес и с точки зрения проблемы интегрирования классических и квантовых уравнений математической физики. Ниже мы исследуем одну из таких ситуаций, а пока, чтобы избежать недоразумений, под функцией Казимира мы будем понимать некоторую фиксированную ветвь многозначной функции $\mathscr{K}^{(s)}_\mu$.

Пусть $\mathscr{K}_\mu^{(s)}$ — набор функционально независимых функций Казимира s-типа, $\mu = 1,\dots,r_s$. Обозначим через $\Omega^{(s)} \subset \mathbb{R}^{r_s}$ множество значений отображения $\mathscr{K}^{(s)} : M_{(s)} \to \mathbb{R}^{r_s}$, и введем локально инвариантное подмножество $\mathcal{O}_\omega^{(s)}$:

$$\mathcal{O}_\omega^{(s)} = \{f \in M_{(s)} \colon \mathscr{K}_\mu^{(s)}(f) = \omega_\mu^{(s)}, \quad \mu = 1,\dots,r_{(s)};\ \omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}\}.$$

Размерность множества $\mathcal{O}_\omega^{(s)}$ совпадает с размерностью орбиты $\mathcal{O}_\lambda \in M_{(s)}$, где $\omega_\mu^{(s)} = \mathscr{K}_\mu^{(s)}(\lambda)$, и в случае, когда функции Казимира $\mathscr{K}_\mu^{(s)}$ — однозначные, множество $\mathcal{O}_\omega^{(s)}$ состоит из счетного (как правило конечного) числа орбит. Вследствие этого, поверхность уровня $\mathcal{O}_\omega^{(s)}$ мы будем называть *классом орбит*. Таким образом, пространство $\mathfrak{g}^*$ состоит из объединения связных инвариантных непересекающихся алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, которые в свою очередь представляют собой объединение классов орбит $\mathcal{O}_\omega^{(s)}$:

$$\mathfrak{g}^* = \bigcup_{s=0}^{(n-r)/2} M_{(s)} = \bigcup_{s=0}^{(n-r)/2} \bigcup_{\omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}} \mathcal{O}_\omega^{(s)}. \tag{4.3}$$

Рассмотрим фактор-пространство $B_{(s)} = M_{(s)}/G$, точками которого являются орбиты $\mathcal{O}_\lambda \in M_{(s)}$. Очевидно, что $\dim B_{(s)} = r_s$. Введем на $B_{(s)}$ набор локальных координат, параметризуя ковектор $\lambda \in M_{(s)}$ вещественными параметрами $J = (J_1,\dots,J_{r_s})$, принимающими значения из некоторой области $\mathbb{J} \subset \mathbb{R}^{r_s}$:

$$\lambda = \lambda(J), \quad F^s(\lambda(J)) = 0, \quad \mathscr{K}_\mu^{(s)}(\lambda(J)) = \omega_\mu^{(s)}(J), \quad \det\left\|\frac{\partial\omega_\mu^{(s)}(J)}{\partial J_\nu}\right\| \neq 0.$$

Говоря иными словами, $\lambda(J)$ представляет собой некоторое локальное сечение расслоения $M_{(s)} \to B_{(s)}$.

Замечание 4.3. Отметим, что в общем случае глобальной параметризации на всем фактор-пространстве $B_{(s)}$ может не существовать. В этом случае на $B_{(s)}$ можно определить атлас карт и ввести параметризацию на соответствующих связных инвариантных непересекающихся подмножествах $M_{(s)}^A$, $M_{(s)}^B$, $\dots$, имеющих в $M_{(s)}$ ненулевую меру: $M_{(s)} = M_{(s)}^A \cup M_{(s)}^B \cup \dots$. При этом, соответствующие области значений $\mathbb{J}^A$, $\mathbb{J}^B$, $\dots$ параметров J будут удовлетворять соотношению

$$\Omega^{(s)} = \omega^{(s)}(\mathbb{J}^A) \cup \omega^{(s)}(\mathbb{J}^B) \cup \dots.$$

Изложенный подход к классификации орбит коприсоединенного представления оказывается весьма плодотворным при описании алгебраических свойств однородных пространств, важных именно с точки зрения интегрируемых гамильтоновых систем уравнений. Однако, перед тем как перейти к этому вопросу, разберем одну специфическую ситуацию, связанную с существованием многозначных функций Казимира.

4.1.2 Многозначные функции Казимира и дикие группы Ли

В общем случае функции Казимира представляют собой лишь *локальные* инварианты коприсоединенного представления группы G. Это означает, что равенство $\mathscr{K}_\mu^{(s)}(\mathrm{Ad}_g^* f) = \mathscr{K}_\mu^{(s)}(f)$ может выполняться для элементов $g \in G$, принадлежащих лишь некоторой окрестности единицы группы. В хороших случаях (например, когда группа G полупроста) функции Казимира инвариантны относительно действия группы глобально, и поэтому поверхности уровня таких функций Казимира представляют собой отдельные орбиты или же объединения конечного числа орбит. Как следствие этого, все фактор-пространства $B_{(s)} = M_{(s)}/G$ таких групп Ли, снабженные фактор-топологией естественной топологии в $M_{(s)}$, являются хаусдорфовыми топологическими пространствами.

Более необычными являются случаи, когда функции Казимира представляют собой *многозначные функции* своих аргументов и инвариантны относительно коприсоединенного действия только локально. Конечно, чаще всего данная многозначность является не существенной, так как в некотором смысле она может быть устранена. Тем не менее, встречаются случаи неустранимой многозначности, приводящей к тому, что пространство орбит будет являться топологически не полуотделимым. Более подробное исследование показывает, что подобные группы относятся к классу так называемых *диких* групп Ли.

Исследование диких групп Ли представляет значительный интерес, в первую очередь в теории представлений. Согласно определению, предложенному А. А. Кирилловым, группа называется *ручной*, если все ее унитарные представления принадлежат типу I, и *дикой* — в обратном случае [47]. Дикие группы могут быть лишены ряда свойств, которые всегда присущи ручным группам. Например, для диких групп может иметься неоднозначность разложения унитарных представлений, отсутствовать характер, а также нарушаться требование полуотделимости пространства орбит в $\mathfrak{g}^*$. Известно, что все компактные группы, связные полупростые группы, экспоненциальные группы Ли — ручные, в то время как среди разрешимых групп Ли встречаются как ручные, так и дикие.

По-видимому, первый пример дикой группы Ли был предложен Ф. Маутнером (не опубликовано), который затем неоднократно переоткрывался в работах других авторов (см. пример 4.2, рассматриваемый нами ниже). Отметим, что критерий принадлежности произвольной связной односвязной разрешимой группы Ли к классу диких был найден Л. Ауслендером и Б. Костантом [49]. Согласно этому критерию, связная односвязная разрешимая группа Ли является дикой, если соответствующая ей форма Кириллова на орбитах не является точной или пространство коприсоединенных орбит такой группы не полуотделимо (и как следствие, не хаусдорфово). Именно в последней ситуации и проявляется существенная многозначность функций Казимира, поэтому ниже мы обсудим некоторые особенности именно этого случая.

Пусть отображение $\mathscr{K}^{(s)}: \; M_{(s)} \to \; \Omega^{(s)}$, индуцируемое функциями Казимира $\mathscr{K}_\mu^{(s)}$, является многозначным отображением. Не ограничивая общности, рассмотрим отображение, задаваемое одной функцией Казимира. В этом случае существует элемент λ из $M_{(s)}$, образ $\mathscr{K}^{(s)}(\lambda) \subset \Omega^{(s)}$ которого содержит более одной точки. Очевидно, что прямое построение глобально инвариантной поверхности уровня такой функций Казимира невозможно. Здесь, однако, необходимо различать две ситуации.

Назовем функцию Казимира $\mathscr{K}^{(s)}$ *существенно многозначной*, если существует точка $\lambda \in M_{(s)}$, образ $\mathscr{K}^{(s)}(\lambda)$ которой представляет собой плотное множество в $\Omega^{(s)}$. Легко видеть, что многозначные функции Казимира, не являющиеся существенно многозначными, могут быть заменены обычными однозначными функциями. Действительно, в этом случае можно подобрать такое не тождественное отображение $\phi: \; \Omega^{(s)} \to \; \mathbb{R}^{r_s}$, которое «сошьет» различные значения функции $\mathscr{K}^{(s)}$ в каждой точке f поверхности $M_{(s)}$. Другими словами, суперпозиция $\phi \circ \mathscr{K}^{(s)}$ будет являться однозначным отображением $M_{(s)} \to \mathbb{R}$. Очевидно, что новая функция $\tilde{\mathscr{K}}^{(s)} = \phi \circ \mathscr{K}^{(s)}$ будет также находится в инволюции с любой функцией из $C^\infty(M_{(s)})$, и поэтому будет снова являться функцией Казимира s-типа.

Пример 4.1. Рассмотрим четырехмерную односвязную разрешимую группу Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой имеет следующие коммутационные соотношения

$$[e_1, e_4] = \beta e_1 + e_2, \quad [e_2, e_4] = \beta e_2 - e_1, \quad \beta \neq 0.$$

Приведем описание классов орбит данной группы:

$$\mathcal{O}_\omega^{(0)} = \{f \in \mathfrak{g}^* : \mathscr{K}_1(f) = \omega_1^{(0)},\ \mathscr{K}_2(f) = \omega_2^{(0)};\ \neg(f_1 = f_2 = 0)\};$$

$$\mathcal{O}_\omega^{(1)} = \{f \in \mathfrak{g}^* : f = 0\};$$

где

$$\mathscr{K}_1(f) = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\, e^{-\beta \operatorname{arctg} \frac{f_1}{f_2}}, \quad \mathscr{K}_2(f) = f_3. \tag{4.4}$$

Сделаем невырожденную замену координат

$$f_1 = \rho \sin \varphi, \quad f_2 = \rho \cos \varphi, \quad f_3 = \tau, \quad f_4 = \sigma,$$

и перепишем функции Казимира (4.4) в новых переменных:

$$\mathscr{K}_1 = \rho e^{-\beta \varphi}, \quad \mathscr{K}_2 = \tau.$$

Так как переменная φ определена по модулю 2π: $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, функция Казимира $\mathscr{K}_1(f)$ бесконечнозначна, причем множество ее значений в каждой точке из $\mathfrak{g}^*$ счетно: $\{\mathscr{K}_1^{(n)}(\rho, \varphi) = \rho e^{-\beta(\varphi - \pi n)},\ n = 0, \pm 1, \dots\}$ (здесь целое число n нумерует нули функции $\operatorname{tg}\varphi$).

Рассмотрим преобразование $\phi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида

$$\tilde{\omega}_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\ln \omega_1}{\beta}\right), \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2$$

и введем новый набор функций Казимира $\tilde{\mathscr{K}_\mu} \equiv \phi \circ \mathscr{K}_\mu$:

$$\tilde{\mathscr{K}_1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\ln \rho}{\beta} - \varphi\right), \quad \tilde{\mathscr{K}_2} = \tau.$$

Очевидно, что функция Казимира $\tilde{\mathscr{K}_1}$ однозначна и корректно определяет поверхности уровня $\mathscr{O}_\omega^{(0)}$ в $\mathfrak{g}^*$, следовательно пространство орбит $M_{(0)}/G$ является полуотделимым. Таким образом, приведенная в данном примере функция Казимира $\mathscr{K}_1$ имеет не существенную (устранимую) многозначность.

Качественно иная ситуация возникает, если функция Казимира является существенно многозначной. Для таких функций «сшивающее» отображение ϕ, не являющееся тождественным, подобрать невозможно. При этом ввиду того, что множество значений $\mathscr{K}^{(s)}(f)$ в некоторых точках f плотно, условие глобальной инвариантности поверхности уровня таких функций Казимира может нарушаться, а пространство орбит $M_{(s)}/G$ не является полуотделимым.

Пример 4.2. Простейший пример группы Ли с неполуотделимым пространством орбит коприсоединенного представления приведен в монографии А. А. Кириллова [47]. Пусть α – иррациональный вещественный параметр. Рассмотрим группу G матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z, \omega \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Группа G является полупрямым произведением одномерной подгруппы $z = \omega = 0$ и четырехмерной нормальной коммутативной подгруппы $t = 0$. Как топологическое пространство G гомеоморфна евклидову пространству $\mathbb{R}^5$. Данная группа Ли называется *группой Маутнера*.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ассоциированной с группой G, выберем следующий базис:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тогда ненулевые коммутационные соотношения алгебры $\mathfrak{g}$ в этом базисе будут иметь следующий вид

$$[e_1, e_5] = -e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = -\alpha e_4, \quad [e_4, e_5] = \alpha e_3.$$

Индекс данной алгебры равен $\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 3$; в качестве функционально независимых функций Казимира могут быть выбраны функции

$$\mathscr{K}_1 = f_1^2 + f_2^2, \quad \mathscr{K}_2 = f_3^2 + f_4^2, \quad \mathscr{K}_3 = \alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{f_4}{f_3}\right). \tag{4.6}$$

Приведем описание коприсоединенных орбит рассматриваемой группы. Дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ представляет собой дизъюнктивное объединение трех инвариантных поверхностей

$$M_{(0)} = \{f \in \mathfrak{g}^* \colon \neg(f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0)\},$$

$$M_{(1)} = \{f \in \mathfrak{g}^* \colon f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0,\ f_5 \neq 0\}, \quad M_{(2)} = \{f \in \mathfrak{g}^* \colon f = 0\},$$

а соответствующие классы орбит выделяются следующими условиями

$$\mathcal{O}_\omega^{(0)} = \{f \in M_0 \colon \mathscr{K}_\mu(f) = \omega_\mu^{(0)},\ \mu = 1, 2, 3\},$$

$$\mathcal{O}_\omega^{(1)} = \{f \in M_1 \colon f_5 = \omega^{(1)}\}, \quad \mathcal{O}_\omega^{(2)} = \{f \in M_2 \colon f = 0\}.$$

Покажем, что функция Казимира $\mathscr{K}_3$ является существенно многозначной, а пространство орбит $B_{(0)} = M_{(0)}/G$ данной группы — не полуотделимо. Для этого аналогично предыдущему примеру введем «полярную» систему координат:

$$f_1 = r\cos\varphi, \quad f_2 = r\sin\varphi, \quad f_3 = \rho\cos\psi, \quad f_4 = \rho\sin\psi, \quad f_5 = \tau.$$

В новых координатах функции Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ принимают следующий вид:

$$\mathscr{K}_1 = r, \quad \mathscr{K}_2 = \rho, \quad \mathscr{K}_3 = \psi - \alpha\varphi.$$

Так как переменные φ и ψ определены по модулю 2π: $\varphi \sim \varphi + 2\pi$, $\psi \sim \psi + 2\pi$, а α — иррациональное число, функция $\mathscr{K}_3(\varphi, \psi)$ бесконечнозначна и в каждой точке из $\mathfrak{g}^*$ множество ее значений плотно на полуинтервале $[0, 2\pi)$. Наглядную иллюстрацию дает изображение этой функции на двумерном торе (см. рисунок 1). На этом рисунке каждой фиксированной ветви функции Казимира $\mathscr{K}_3^{(n,m)}(\varphi, \psi)$ соответствует пара целых чисел n и m, поэтому пробегая всевозможные значения $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ветви функции $\mathscr{K}_3(\varphi, \psi)$ «заметут» всю

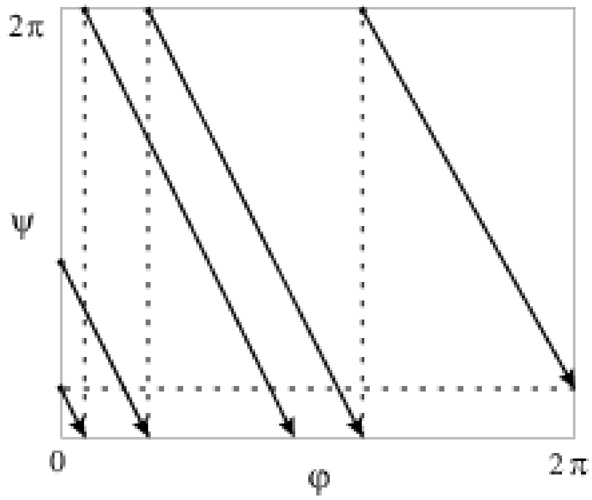

Рисунок 1 — Функция Казимира $\mathscr{K}_3(\varphi, \psi)$

площадь квадрата $\Pi = \{0 < \varphi \leq 2\pi,\ 0 < \psi \leq 2\pi\}$, образуя тем самым плотную обмотку тора. Не полуотделимость фактор-пространства $\mathfrak{g}^*/G$ в данном случае проявляется в том, что невозможно подобрать содержащее некоторую орбиту $\mathcal{O}_\lambda$ открытое множество в $\mathfrak{g}^*$, которое не пересекало бы в себя другие орбиты.

Коприсоединенное действие группы G в координатах $(r, \varphi, \rho, \psi, \tau)$ записывается в виде:

$$r \to r, \quad \varphi \to (\varphi + t) \mod 2\pi, \quad \rho \to \rho, \quad \psi \to (\psi + \alpha t) \mod 2\pi,$$

$$\tau \to \tau + \mathrm{Im}(z \cdot re^{i(\varphi+t)} + \alpha\, \omega \cdot \rho e^{i(\psi+\alpha t)}).$$

Легко видеть, что функции Казимира $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ являются инвариантами данного представления и притом глобально. Напротив, функция Казимира $\mathscr{K}_3$ зависит от параметра t группы и является G-инвариантной только в некоторой окрестности элемента $g \in G$:

$$\mathscr{K}_3(\mathrm{Ad}_g^* f) = \alpha \cdot \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\varphi + t)) - \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\psi + \alpha t)).$$

На рисунке 2 приведена зависимость этой функции от параметра t при фиксированных значениях φ, ψ и $\alpha = \sqrt{2}$.

Несомненно, что приведенные особенности групп Ли с не полуотделимым пространством орбит вызывают определенный интерес не только в теории представлений групп, но и в теории интегрируемых классических гамильтоновых систем. В свете сказанного, актуальной представляется задача выделения класса таких групп. Из рассмотренных примеров видно, что в качестве необходимого критерия может выступать наличие существенно многозначных функций Казимира. В работе [204] были перечислены наборы функций Казимира для всех вещественных алгебр Ли порядка меньше шести и выделены две алгебры Ли с

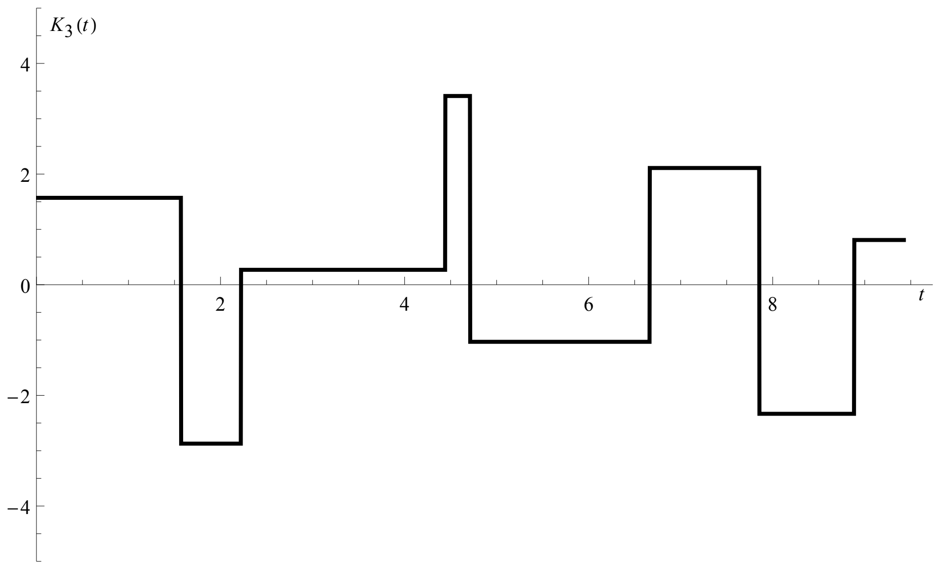

Рисунок 2 — Зависимость $\mathscr{K}_3$ от параметра t

существенно многозначными функциями Казимира (см. таблицы А.1 – А.4 из приложения А). Это — пятимерная алгебра Ли с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_5] = pe_1 - e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1 + pe_2, \quad [e_3, e_5] = qe_3 - se_4, \quad [e_4, e_5] = se_3 + qe_4, \quad s \neq 0, \tag{4.7}$$

имеющая три функции Казимира

$$\mathscr{K}_1 = (f_1^2 + f_2^2)e^{-2p\,\mathrm{arctg}(f_2/f_1)}, \quad \mathscr{K}_2 = (f_3^2 + f_4^2)^s e^{-2q\,\mathrm{arctg}(f_4/f_3)},$$

$$\mathscr{K}_3 = s\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f_2}{f_3}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{f_4}{f_3}\right),$$

и пятимерная алгебра Ли

$$[e_1, e_5] = pe_1 - e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1 + pe_2, \quad [e_3, e_5] = e_1 + pe_3 - e_4,$$

$$[e_4, e_5] = e_2 + e_3 - pe_4, \quad 0 \leq p < 1,$$

допускающая функции Казимира

$$\mathscr{K}_1 = (f_1^2 + f_2^2)e^{-2p\,\mathrm{arctg}(f_2/f_1)}, \quad \mathscr{K}_2 = (1 - p^2)(pf_4 - f_2)^2 + (f_1 - pf_3 + p^2 f_4)^2,$$

$$\mathscr{K}_3 = \sqrt{1 - p^2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) + \mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{1 - p^2}\,(pf_4 - f_2)}{f_1 - pf_3 + p^2 f_4}\right].$$

В частности, алгебра с коммутационными соотношениями (4.7) при значениях параметров $p = q = 0$ изоморфна алгебре Ли рассмотренной нами дикой группы Маутнера.

4.1.3 Тождества, инвариантные функции и классификация однородных пространств

Дальнейшее развитие идей метода орбит коприсоединенного представления приводит к возможности применения этого мощного аппарата к изучению алгебраических свойств однородных многообразий, важных именно с точки зрения задачи интегрирования дифференциальных уравнений.

Пусть G — связная вещественная n-мерная группа Ли, M — правое однородное m-мерное G-пространство; x^a — локальные координаты точки $x \in M$; $\zeta_i(x) = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}$ — инфинитезимальные генераторы группы преобразований G, образующие алгебру Ли $\mathfrak{g}(M)$, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G:

$$[\zeta_i, \zeta_j] = C_{ij}^k\, \zeta_k. \tag{4.8}$$

Выберем некоторую точку $x_0 \in M$. Ей соответствует замкнутая $(n-m)$-мерная группа стационарности (подгруппа изотропии) H, так что $M = H \setminus G$. В этой точке $\dim G - \dim M$ векторных полей из $\mathfrak{g}(M)$ обращаются в ноль. Без потери общности будем считать, что

$$\zeta_\alpha(x_0) = 0, \quad \alpha = \dim M + 1, \dots, \dim G.$$

Таким образом, набор векторных полей ζ_α образует подалгебру $\mathfrak{h}(M) \subset \mathfrak{g}(M)$, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H.

Пусть $T : M \times G \to M$ — действие группы G на однородном пространстве M, $T_g(x) \equiv xg$, $x \in M$, $g \in G$. Данное действие индуцирует естественное действие $\tilde{T}$ группы G в пространстве кокасательного расслоения T^*M, по определению сохраняющее каноническую 1-форму $\theta = p_a dx^a$, а значит и симплектическую 2-форму $\omega = dp_a \wedge dx^a$:

$$\tilde{T}_g(x,p) = (xg, (T_{g^{-1}})^* p), \quad p \in T_x^*M, \quad x \in M, \quad g \in G.$$

Инфинитезимальными генераторами этого действия являются гамильтоновые векторные поля $\operatorname{sgrad} X_i \in \operatorname{Vect}(T^*M)$, где функции $X_i \in C^\infty(T^*M)$ определяются как

$$X_i(x,p) \equiv \langle p, \zeta_i(x) \rangle = \zeta_i^a(x) p_a, \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}. \tag{4.9}$$

В силу коммутационных соотношений (4.8), для функций $X_i(x,p)$ выполняются равенства

$$\{X_i, X_j\} = C_{ij}^k\, X_k,$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ — каноническая скобка Пуассона на T^*M, ассоциированная с симплектической структурой $\omega = dp_a \wedge dx^a$. Это означает, что соответствие $e_i \to X_i$, продолженное по линейности на всю алгебру $\mathfrak{g}$, является гомоморфизмом алгебр Ли.

С гамильтоновым действием группы G на T^*M связано *отображение момента* $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^*$, определяемое формулой

$$\langle \mu(x,p), e_i\rangle = X_i(x,p), \quad i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}. \tag{4.10}$$

Отображение μ является пуассоновым отображением, так как для любых функций $\varphi,\psi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ имеет место соотношение

$$\{\mu^*\varphi, \mu^*\psi\} = \mu^*\{\varphi,\psi\}_\mathfrak{g}. \tag{4.11}$$

Здесь $\{\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g}$ — скобка Ли – Пуассона на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, определяемая формулой (2.12). Кроме этого, отображение момента $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ является G-эквивариантным отображением

$$\mu\circ\tilde{T}_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\circ\mu, \quad g\in G,$$

то есть действие группы G на T^*M при отображении μ переходит в коприсоединенное действие этой группы на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

В общем случае отображение $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ не является сюръективным. Другими словами, размерность образа $\mu(T^*M)$ может быть меньшей, чем размерность пространства $\mathfrak{g}^*$. Чтобы учесть этот факт, введем следующее определение.

Определение 4.3. Функции на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, принадлежащие ядру отображения $\mu^* : C^\infty(\mathfrak{g}^*) \to C^\infty(T^*M)$, будем называть *тождествами*.

Множество всех тождеств образует ассоциативное коммутативное кольцо, образующее двусторонний идеал в кольце функций $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Кроме того, как следует из соотношения (4.11), тождества образует алгебру относительно скобки Ли – Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\mathfrak{g}$.

Определение 4.4. Число функционально независимых тождеств будем называть *индексом* однородного пространства M и обозначать i_M.

С помощью формулы (4.10) нетрудно видеть, что i_M — это фактически число независимых функциональных соотношений между функциями $X_i(x,p) = \zeta_i^a(x)p_a$.

Хотя неявным образом тождества учитывались в работах многих авторов (в особенности в рамках проблемы некоммутативной интегрируемости гамильтоновых систем), повидимому впервые они были систематически исследованы в работах И. В. Широкова. В частности, в статье [28] им была получена верхняя оценка размерности пространства M при которой $i_M > 0$, а именно:

$$\dim M < \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g} + \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}\right). \tag{4.12}$$

Обозначим через $\mathfrak{h}^{\perp} = \{f \in \mathfrak{g}^* \colon \langle f, \mathfrak{h}\rangle = 0\}$ — аннулятор подалгебры $\mathfrak{h}$ в дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$. Следующий важный результат, доказанный в работе [110], позволяет описать тождества в терминах коприсоединенного действия группы G.

Теорема 4.1. *Функция $\Gamma \in C^{\infty}(\mathfrak{g}^*)$ тогда и только тогда является тождеством, когда ее ограничение на орбиту $\mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp}$ пространства $\mathfrak{h}^{\perp}$ равно нулю:*

$$\Gamma(f)\big|_{\mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp}} = 0.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает формула для индекса i_M однородного пространства

$$i_M = \operatorname{codim} \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp}, \tag{4.13}$$

откуда очевидным образом следует неравенство

$$i_M \le \dim G - \dim M = \dim H.$$

Кроме того, отметим еще одно полезное следствие теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Образ отображения момента $\mu : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ совпадает с орбитой подпространства $\mathfrak{h}^{\perp}$:*

$$\mu(T^*M) = \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp}.$$

Определение 4.5. Пусть для некоторых орбит s-типа: $M_{(s)} \cap \mathfrak{h}^{\perp} \ne \varnothing$, но $M_{s-1} \cap \mathfrak{h}^{\perp} = \varnothing$. В этом случае число s мы будем называть *степенью сингулярности* однородного пространства M и обозначать s_M. Соответственно будем говорить, что однородное пространство M является пространством s_M-типа.

В дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$ рассмотрим набор инвариантных поверхностей

$$M^H_{(s)} \equiv \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp} \cap M_{(s)}, \quad s \ge s_M.$$

Ясно, что каждая поверхность $M^H_{(s)}$ является объединением коприсоединенных орбит s-типа, имеющих ненулевое пересечение с подпространством $\mathfrak{h}^{\perp}$, то есть

$$M^H_{(s)} = \bigcup_{\omega \in \Omega^{(s)}_H} \mathcal{O}^{(s)}_{\omega},$$

где $\Omega^{(s)}_H = \mathscr{K}^{(s)}(M_{(s)} \cap \mathfrak{h}^{\perp}) \subset \Omega^{(s)}$. Имея теперь в виду разложение (4.3), получаем

$$\mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^{\perp} = \bigcup_{s \ge s_M} M^H_{(s)}. \tag{4.14}$$

Каждому однородному пространству M поставим в соответствие целое неотрицательное число

$$d_M = \dim M + i_M - s_M - \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g}\right), \tag{4.15}$$

которое мы будем называть *дефектом* однородного пространства. Далее мы увидим, что дефект играет очень важную роль в теории интегрирования дифференциальных уравнений на однородных пространствах, так как он непосредственно связан с пуассоновой алгеброй инвариантных функций на T^*M. Пока же, следуя работе [110], мы приведем некоторые явные формулы для вычисления дефекта, индекса и степени сингулярности однородного пространства.

Используя определения индекса и степени сингулярности однородного пространства M, перепишем равенство (4.15) с учетом формулы (4.13):

$$d_M = \frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda - \left(\dim \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^\perp - \dim \mathfrak{h}^\perp\right).$$

Здесь и ниже посредством λ мы обозначаем элемент общего положения подпространства $\mathfrak{h}^\perp$. Первый член в правой части этого равенства может быть записан как

$$\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda = \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\,\|C_{ij}(\lambda)\| \equiv \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle,$$

в то время как член в круглых скобках вычисляется согласно формуле

$$\dim \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^\perp - \dim \mathfrak{h}^\perp = \mathrm{rank}\,\|C_{i\alpha}(\lambda)\| \equiv \mathrm{rank}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\rangle.$$

Таким образом, для дефекта однородного пространства M получаем

$$d_M = \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\rangle - \mathrm{rank}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\rangle = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda - \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}^\lambda, \tag{4.16}$$

где $\mathfrak{g}^\lambda$ — аннулятор ковектора $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h}^\lambda = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\lambda$.

Сопоставляя между собой формулы (4.15) и (4.16), для степени сингулярности s_M и индекса i_M получаем следующие выражения:

$$s_M = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g}^\lambda - \mathrm{ind}\,\mathfrak{g}\right), \quad i_M = \dim \mathfrak{h}^\lambda. \tag{4.17}$$

Примерами однородных пространств нулевого дефекта являются симметрические или, более общо, слабо симметрические однородные пространства [205]. Группы Ли, рассматриваемые как однородные пространства с тривиальной подгруппой изотропии $H = \{e\}$, являются пространствами максимально возможного дефекта: $d_G = (\dim \mathfrak{g} - \mathrm{ind}\,\mathfrak{g})/2$. Кроме этого, любое однородное пространство $M = H \setminus G$, где H — нормальный делитель в G, также имеет максимально возможный дефект. (На самом деле, в этом случае действие группы G на M неэффективно, и фактически мы имеем действие фактор-группы $H \setminus G$ на себе).

В общем случае в $C^\infty(T^*M)$ могут существовать непостоянные функции, инвариантные относительно естественного действия группы G на пространстве кокасательного расслоения

T^*M. В силу связности группы G таковой будет являться всякая функция $Y(x,p)$, удовлетворяющая условию

$$\{X_i(x,p), Y(x,p)\} = 0, \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}. \tag{4.18}$$

Пусть $\{Y_1(x,p), \dots, Y_k(x,p)\}$ — максимальный набор функционально независимых решений уравнения (4.18). Обозначим через $\mathscr{F}$ линейную оболочку данного набора функций. В силу замкнутости множества инвариантных функций относительно канонической скобки Пуассона на T^*M, имеем

$$\{Y_\alpha, Y_\beta\} = \Omega_{\alpha\beta}(Y), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, \dim \mathscr{F}. \tag{4.19}$$

Таким образом, линейное пространство $\mathscr{F}$ с базисом $\{Y_1(x,p), \dots, Y_k(x,p)\}$ образует пуассонову алгебру, которую мы будем называть *алгеброй инвариантных функций* на T^*M.

Замечание 4.4. Отметим, что в общем случае функции $\Omega_{\alpha\beta}(Y)$ в формуле (4.19) могут зависеть от $Y_\alpha(x,p)$ нелинейным образом, то есть алгебра инвариантных функций $\mathscr{F}$ может не являться алгеброй Ли.

Обозначим через $\pi : G \to H \setminus G$ — естественную проекцию группы G на пространство правых смежных классов по подгруппе H. В силу того, что $\pi_*(\mathfrak{h}) = 0$, для всякого ковектора $p^0 \in T^*_{x_0}M$ будем иметь $\pi^*(p^0) \in \mathfrak{h}^\perp$. Очевидно, что возникающее тем самым отображение $\pi^* : T^*_{x_0}M \to \mathfrak{h}^\perp$ является изоморфизмом линейных пространств.

Пусть $Y(x,p)$ — инвариантная на T^*M функция. Для некоторого $g \in G$ положим $x = x_0 g$, тогда согласно определению $Y(x,p) = Y(x_0, (T_g)^* p)$, где $p \in T^*_x M$. Так как $(T_g)^* p \in T^*_{x_0}M$, мы можем записать

$$Y(x_0 g, p) = a(\pi^*(T_g)^* p), \tag{4.20}$$

для некоторой функции $a(f) \in C^\infty(\mathfrak{h}^\perp)$. В силу того, что $Y(x,p)$ — корректно определенная функция, ее значения не должны зависеть от выбора конкретного представителя правого смежного класса Hg. Отсюда следует, что функция $a(f)$, определяемая равенством (4.20), должна удовлетворять условию

$$a(\mathrm{Ad}^*_h \cdot) = a(\cdot), \quad h \in H. \tag{4.21}$$

Таким образом, всякой инвариантной на T^*M функции соответствует некоторая H-инвариантная функция из $C^\infty(\mathfrak{h}^\perp)$. Нетрудно показать, что указанное соответствие является взаимо однозначным: для любой функции $a \in C^\infty(\mathfrak{h}^\perp)^H$ формула (4.20) корректно задает инвариантную функцию $Y(x,p)$ на T^*M.

Инфинитезимальным аналогом соотношения (4.21) является система дифференциальных уравнений вида

$$C_{\alpha i}(f)\,\frac{\partial a(f)}{\partial f_i}\Big|_{f\in\mathfrak{h}^\perp}=0,\quad \alpha=1,\ldots,\dim\mathfrak{h}. \tag{4.22}$$

Если подгруппа H — связна, то множество решений системы (4.21) исчерпывает все возможные функции из $C^\infty(\mathfrak{h}^\perp)^H$. Данный факт может служить основой для практического вычисления всех инвариантных функций из $C^\infty(T^*M)$.

Следствием соотношений (4.22) является формула для размерности алгебры $\mathscr{F}$ инвариантных функций:

$$\dim\mathscr{F}=\dim M-\operatorname{rank}\|C_{i\alpha}(\lambda)\|=\dim M-\operatorname{rank}\langle\lambda,[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\rangle,$$

где λ — элемент общего положения подпространства $\mathfrak{h}^\perp$. Используя для индекса i_M вторую из формул (4.17), получаем:

$$\dim\mathscr{F}=2\dim M-\dim\mathfrak{g}+i_M. \tag{4.23}$$

Отметим, что из неотрицательности числа $\dim\mathscr{F}$ следует ограничение снизу на индекс однородного пространства

$$i_M\geq\dim\mathfrak{g}-2\dim M.$$

Пусть $\{a_1(f),\ldots,a_k(f)\}$ — набор функционально независимых решений системы уравнений (4.22), $k=\dim\mathscr{F}$. Обозначим через $\mathscr{F}^*$ линейную оболочку данного набора, тогда бесконечномерное пространство гладких на $\mathscr{F}^*$ функций представляет собой пуассонову алгебру относительно скобки Пуассона

$$\{\varphi,\psi\}_{\mathscr{F}}(a)\equiv\Omega_{\beta\gamma}(a)\,\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_\beta}\,\frac{\partial\psi(a)}{\partial a_\gamma}, \tag{4.24}$$

где функции $\Omega_{\beta\gamma}(a)$ определяются согласно формуле (4.19). Каждой функции $\varphi(a)$ мы можем сопоставить векторное поле $\operatorname{sgrad}\varphi$ на $\mathscr{F}^*$:

$$\operatorname{sgrad}\varphi(a)\equiv\Omega_{\beta\gamma}(a)\,\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_\beta}\,\frac{\partial}{\partial a_\gamma}.$$

Все касательные векторы $\operatorname{sgrad}\varphi(a)$ принадлежат плоскости $\Pi(a)$, являющейся линейной оболочкой набора векторов $\{\tilde{Z}_\beta\equiv\operatorname{sgrad}a_\beta\}$. Из тождества Якоби для скобки Пуассона (4.24) следует инволютивность векторных полей $\tilde{Z}_\beta(a)$:

$$[\tilde{Z}_\beta,\tilde{Z}_\gamma](a)=\frac{\partial\Omega_{\beta\gamma}(a)}{\partial a_\delta}\,\tilde{Z}_\delta(a),$$

поэтому согласно теореме Фробениуса распределение плоскостей $\Pi(a)$ интегрируемо. Интегральные многообразия этого распределения — это симплектические листы скобки Пуассона (4.24), играющие роль коприсоединенных орбит для пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$.

Пусть $\tilde{\mathcal{O}}_\omega$ — семейство симплектических листов общего положения скобки Пуассона (4.24), «нумеруемых» параметром ω. Как поверхность в $\mathscr{F}^*$ симплектический лист $\tilde{\mathcal{O}}_\omega$ определяется равенствами

$$\tilde{\mathcal{O}}_\omega = \{a \in \mathscr{F}^* \colon \mathscr{Z}_\mu(a) = \omega_\mu - \mathrm{const}, \mu = 1, \ldots, \mathrm{ind}\,\mathscr{F}\}$$

где функции $\mathscr{Z}_\mu(a)$ находятся из системы уравнений

$$\Omega_{\beta\gamma}(a)\,\frac{\partial \mathscr{Z}(a)}{\partial a_\gamma} = 0, \quad \beta = 1, \ldots, \dim \mathscr{F}, \tag{4.25}$$

и являются функциями Казимира скобки Пуассона (4.24). Число $\mathrm{ind}\,\mathscr{F}$, определяемое как количество функционально независимых решений системы (4.25), по аналогии с обычными алгебрами Ли мы будем называть *индексом* алгебры $\mathscr{F}$. В работе [110] показано, что индекс $\mathrm{ind}\,\mathscr{F}$ совпадает с числом нетривиальных функций Казимира s_M-типа и равен

$$\mathrm{ind}\,\mathscr{F} = \mathrm{ind}\,\mathfrak{g} + 2s_M - i_M. \tag{4.26}$$

Комбинируя между собой формулы (4.15), (4.23) и (4.26), для размерности симплектического листа $\tilde{\mathcal{O}}_\omega$ получаем

$$\dim \tilde{\mathcal{O}}_\omega = \dim \mathscr{F} - \mathrm{ind}\,\mathscr{F} = 2d_M,$$

Таким образом, дефект однородного пространства в точности равен половине размерности симплектического листа общего положения в пространстве $\mathscr{F}^*$. В частности, при $d_M > 0$ алгебра инвариантных функций на T^*M некоммутативна.

Таким образом, каждому однородному пространству $M = H \setminus G$ мы можем сопоставить три неотрицательных целых числа: индекс i_M, степень сингулярности s_M и дефект d_M. Отметим, что указанные характеристики отражают чисто алгебраические свойства однородного пространства, и могут быть посчитаны по структурным константам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и ее подалгебры $\mathfrak{h}$. Кроме того, указанные три числа не независимы; между ними имеется связь, даваемая формулой (4.15).

С классификационной точки зрения естественно ввести следующий критерий эквивалентности однородных пространств: два однородных G-пространства эквивалентны, если они имеют одинаковую степень сингулярности s_M и одинаковый индекс i_M (а следовательно, и одинаковый дефект). Подобный классификационный подход оказывается очень удобным в задачах исследования интегрируемых дифференциальных уравнений на однородных пространствах. Далее мы еще неоднократно подтвердим этот тезис, а пока лишь отметим, что описание однородных пространств с точки зрения коприсоединенных орбит представляет, на наш взгляд, и самостоятельную ценность. В связи с эти приведем здесь ссылку на работу [206], где на основе описанного подхода была получена классификация всех однородных пространств двух физически важных групп — Пуанкаре и де Ситтера.

§ 4.2 Два класса метрик на однородных пространствах

В настоящем параграфе мы опишем два класса псевдоримановых метрик, которые можно естественным образом построить на однородном пространстве $M = H \setminus G$.

4.2.1 G-инвариантные метрики

Напомним основной рецепт построения G-инвариантных метрик на однородных пространствах (см., например, [207]). Пусть G — связная вещественная группа Ли, $H \subset G$ — ее замкнутая подгруппа, $M = H\backslash G$ — соответствующее однородное пространство, $\pi : G \to H\backslash G$ — естественная проекция группы G на пространство правых смежных классов по подгруппе H. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп G и H соответственно. В силу того, что отображение $\pi_* : T_zG \to T_{\pi(g)}M$ сюръективно, всякий касательный вектор из $T_{\pi(z)}M$ может быть представлен в виде $\pi_*\xi$, где $\xi \in T_zG$ — некоторый касательный вектор на группе в точке z.

Рассмотрим билинейную симметрическую форму $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$, заданную на алгебре $\mathfrak{g}$ и удовлетворяющую двум условиям:

$$\ker \mathbf{G}(\cdot,\cdot) = \mathfrak{h}, \tag{4.27}$$

$$\mathbf{G}(\mathrm{Ad}_h\cdot, \mathrm{Ad}_h\cdot) = \mathbf{G}(\cdot,\cdot), \quad h \in H. \tag{4.28}$$

Следующее равенство корректно определяет G-инвариантную псевдориманову метрику $g(\cdot,\cdot)$ на однородном пространстве M:

$$g(\pi_*\xi_1, \pi_*\xi_2) \equiv \mathbf{G}((R_{z^{-1}})_*\xi_1, (R_{z^{-1}})_*\xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in T_zG,\ z \in G. \tag{4.29}$$

Здесь $R_z : G \to G$ — преобразование правого сдвига на группе G, отвечающее элементу $z \in G$. Действительно, в силу условия (4.27) правая часть равенства (4.29) зависит только от образов векторов ξ_1 и ξ_2 в касательном пространстве $T_{\pi(z)}M$, в то время как требование (4.28) приводит к независимости данного определения от выбора конкретного представителя правого смежного класса $\pi(z) = Hz$. Отметим, что описанным способом может быть получена любая G-инвариантная псевдориманова метрика на однородном пространстве [207].

Вообще говоря, инвариантные метрики существуют не на всяком однородном пространстве. Тем не менее, в каждом конкретном случае их построение (или доказательство того, что они не существуют) может быть легко проведено чисто алгебраическими методами. Фактически для этого необходимо решить систему алгебраических уравнений (4.27) и (4.28), и подставить полученное решение в формулу (4.29). Тем самым мы получим полное семейство инвариантных метрик на однородном пространстве M. Что же касается общих результатов, то можно, например, утверждать, что инвариантные метрики существуют на всяком однородном пространстве с компактной группой стационарности H. Действительно, в силу компактности на касательном пространстве $T_{x_0}M$ существует H-инвариантное скалярное произведение (определенное, вообще говоря, неоднозначно), которое корректно разносится на все однородное пространство M при помощи действия группы G.

Приведем теперь явную формулу для инвариантной метрики на $M = H \setminus G$, выраженную в терминах правоинвариантных 1-форм на группе G. Для этого в главном расслоении (G, M, π, H) зафиксируем некоторое сечение $s : M \to G$, $\pi \circ s = \mathrm{id}$, и введем на многообразии M локальную систему координат x^a, $(a = 1, \ldots, \dim M)$. Полагая в равенстве (4.29) $z = s(x)$, $\xi_1 = s_* \partial_{x^a}$, $\xi_2 = s_* \partial_{x^b}$, получаем

$$g_{ab}(x) \equiv g(\partial_{x^a}, \partial_{x^b}) = \mathbf{G}((R_{s^{-1}(x)})_* s_* \partial_{x^a}, (R_{s^{-1}(x)})_* s_* \partial_{x^b}). \tag{4.30}$$

Пусть $\{e_i\}$ — базис в алгебре $\mathfrak{g}$, $\{e^i\}$ — дуальный ему базис в пространстве $\mathfrak{g}^*$. Тогда мы можем записать $(R_{s^{-1}(x)})_* s_* \partial_{x^a} = \langle s^*\sigma^i, \partial_{x^a}\rangle e_i$, где $\sigma^i(g) \equiv (R_{g^{-1}})^* e^i$ — правоинвариантная 1-форма на группе G, ассоциированная с базисным ковектором e^i. Отсюда будем иметь

$$g_{ab}(x) = \mathbf{G}_{ij}\langle s^*\sigma^i, \partial_{x^a}\rangle\langle s^*\sigma^j, \partial_{x^b}\rangle, \quad \mathbf{G}_{ij} \equiv \mathbf{G}(e_i, e_j). \tag{4.31}$$

Отметим, что независимость правой части данного равенства от выбора сечения $s : G \to M$ обеспечивается требованиями 4.27 и 4.28.

На расслоенном пространстве (G, M, π, H) введем координаты $\{x^a\} \cup \{h^\alpha\}$ прямого произведения $U \times H$, где $\{x^a\}$, $(a = 1, \ldots, M)$ — локальные координаты в области тривиализации $U \in M$, содержащей точку x_0, $\{h^\alpha\}$ $(\alpha = \dim M + 1, \ldots, \dim G)$ — координаты в подгруппе H. С этой системой координат мы ассоциируем базис $\{e_a\} \cup \{e_\alpha\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ такой, что

$$e_a = s_* \partial_{x^a}|_{x=x_0},\ a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}; \quad e_\alpha = \partial_{h^\alpha}|_{h=0},\ \alpha = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} + 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}.$$

Тем самым мы имеем разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ — дополнительное подпространство, являющееся линейной оболочкой базисных векторов e_a.

Пусть сечение $s : M \to G$ выбрано таким образом, что над областью тривиализации U:

$$s^a(x) = x^a,\ a = 1, \ldots, \dim M; \quad s^\alpha(x) = 0,\ \alpha = 1 + \dim M, \ldots, \dim G.$$

В этом случае согласно формуле (4.31) получаем

$$g_{ab}(x) = \mathbf{G}_{cd}\,\sigma^c_a(x,h)\,\sigma^d_b(x,h), \tag{4.32}$$

где $\sigma^a_b(x,h) = \langle \sigma^a, s_*\,\partial_{x^b}\rangle$ — значение правоинвариантной 1-формы σ^a на векторном поле $s_*\,\partial_{x^a} \in \mathrm{Vect}(G)$, $\mathbf{G}_{cd} \equiv \mathbf{G}(e_c, e_d)$.

4.2.2 Метрики субмерсии

Инвариантные пседоримановы метрики на однородных пространствах являются класическим объектом исследования дифференциальной геометрии, а также теории групп и алгебр Ли. На сегодняшний день геометрия таких метрик хорошо изучена и, кроме того, получены достаточно обширные классификационные результаты. Напротив, понятие *псевдоримановой субмерсии* сформировалось относительно недавно. Локальная дифференциальная геометрия субмерсий впервые была изложена в работах [51], [208]. В настоящем разделе мы дадим определение псведоримановой субмерсии и опишем конструкцию возникающих при этом метрик. Более подробно мы остановимся на случае, когда субмерсия имеет вид $\pi : G \to H\backslash G$, где π — естественная проекция группы Ли G на однородное пространство $M = H \setminus G$.

Пусть $(\tilde M, \tilde g)$, (M, g) — псевдоримановы многообразия, $\pi : \tilde M \to M$ — гладкая субмерсия. Пусть $\mathcal{V}_z$ — подпространство в $T_z\tilde M$ такое, что $\pi_*(\mathcal{V}_z) = 0$, $\mathcal{H}_z$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{V}_z$ в $T_z\tilde M$, определяемое метрикой $\tilde g(\cdot,\cdot)$. Отображение π называется *псведоримановой субмерсией*, если его производное отображение π_* сохраняет скалярное произведение касательных векторов из $\mathcal{H}_z$, и ограничение метрики $\tilde g(\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{V}_z$ является невырожденным.

Векторное поле $\xi \in \mathrm{Vect}(\tilde M)$ будем называть *проектируемым*, если существует такое векторное поле $\zeta \in \mathrm{Vect}(M)$, что $\pi_*\xi = \zeta$. В этом случае говорят, что векторные поля ζ и ξ являются *π-связанными*. Векторное поле ξ на $\tilde M$ будем называть *горизонтальным*, если $\xi(z) \in \mathcal{H}_z$ в любой точке $z \in \tilde M$. Горизонтальные проектируемые векторные поля на $\tilde M$ будем называть *базисными*. Важно отметить, что для любого векторного поля $\zeta \in \mathrm{Vect}(M)$ существует единственное π-связанное с ним базисное векторное поле ξ на $\tilde M$ [51].

Согласно определению псевдоримановой субмерсии получаем, что метрики на M и $\tilde M$ связаны соотношением:

$$g(\zeta_1, \zeta_2) = \tilde g(\xi_1, \xi_2). \tag{4.33}$$

Здесь ζ_1, ζ_2 — произвольные векторные поля из $\mathrm{Vect}(M)$, ξ_1, ξ_2 — π-связанные с ними базисные векторные поля на $\tilde M$.

Сделаем теперь дополнительное предположение о том, что псевдоримановая субмерсия $\pi : \tilde M \to M$ является локально тривиальным расслоением (например, для римановых субмерсий соответствующие достаточные условия получены в работе [209]; по поводу псевдориманового случая см. [210]). Над областью тривиализации $U \subset M$ данного расслоения введем координаты прямого произведения $\{x^a\} \cup \{y^\alpha\}$, где x^a, $(a = 1, \ldots, \dim M)$ — координаты в области U, y^α, $(\alpha = 1, \ldots, \dim \mathscr{F})$ — координаты в слое $\mathscr{F}$. Очевидно, что в этом случае набор векторных полей $\{\partial_{y^\alpha}\}$ образует базис касательного пространства $\mathscr{V}_z$ в точке $z = (x, y) \in U \times \mathscr{F}$. Обозначим посредством $\tilde{\partial}_{x^a}$ базисное векторное поле на $\tilde{M}$, π-связанное с координатным векторным полем $\partial_{x^a} \in \mathrm{Vect}(U)$, $a = 1, \ldots, \dim M$. Тогда следуя формуле (4.33) будем иметь:

$$g_{ab} \equiv g(\partial_{x^a}, \partial_{x^b}) = \tilde{g}(\tilde{\partial}_{x^a}, \tilde{\partial}_{x^b}). \tag{4.34}$$

В выбранной системе координат базисные векторные поля $\tilde{\partial}_{x^a}$ записываются в виде

$$\tilde{\partial}_{x^a} = \partial_{x^a} + \Gamma^\alpha_a(x, y)\partial_{y^\alpha}, \tag{4.35}$$

где функции $\Gamma^\alpha_a(x, y)$ однозначно определяются условием $\tilde{g}(\tilde{\partial}_{x^a}, \partial_{y^\alpha}) = 0$ и выражаются через компоненты метрики $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$ согласно формуле

$$\Gamma^\alpha_a = -\bar{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{a\beta}. \tag{4.36}$$

Здесь $\bar{g}^{\alpha\beta}$ — компоненты матрицы, обратной к матрице $\|g_{\alpha\beta}\|$. Используя формулы (4.35) и (4.36), из (4.34) получаем

$$g_{ab} = \tilde{g}_{ab} - \bar{g}^{\alpha\beta}\,\tilde{g}_{a\alpha}\,\tilde{g}_{b\beta}. \tag{4.37}$$

Полученная формула выражает компоненты g_{ab} метрики многообразия M через компоненты метрического тензора $\tilde{g}_{ij}$ многообразия $\tilde{M}$. Следствием равенства (4.37) является выражение, связывающее между собой контравариантные компоненты метрик g и $\tilde{g}$:

$$g^{ab} = \tilde{g}^{ab}. \tag{4.38}$$

Пусть G — группа Ли, H — ее замкнутая подгруппа, $M = H \setminus G$ — правое однородное пространство, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H соответственно. Рассмотрим на группе G *левоинвариантную* псевдориманову метрику $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$. Применяя те же соображения, что и в § 2.4, мы можем записать

$$\tilde{g}(\xi_i, \xi_j) = \mathbf{G}_{ij},$$

где $\xi_i(g) = (L_g)_*\, e_i$ — левоинвариантное векторное поле, соответствующее базисному вектору $e_i \in \mathfrak{g}$, $\mathbf{G}_{ij} \equiv \mathbf{G}(e_i, e_j)$, где $\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$ — ограничение метрики $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$ на касательное пространство $\mathfrak{g} \simeq T_eG$. Следствием этого равенства являются формулы

$$\tilde{g}_{ij}(g) = \mathbf{G}_{kl}\,\omega^k_i(g)\,\omega^l_j(g), \quad \tilde{g}^{ij}(g) = \mathbf{G}^{kl}\xi^i_k(g)\xi^j_l(g), \tag{4.39}$$

выражающие контра- и ковариантные компоненты метрического тензора левоинвариантной метрики в терминах левоинвариантных векторных полей и дуальных им 1-форм на группе G.

Пусть $\{e_\alpha\}$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H. Предположим, что форма $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$ такова, что

$$\det \|\mathbf{G}(\mathrm{Ad}_g\, e_\alpha, \mathrm{Ad}_g\, e_\beta)\| \neq 0, \quad g \in G.$$

В этом случае, однородное пространство $M = H \setminus G$ канонически снабжается метрикой $g(\cdot,\cdot)$, превращающей отображение $\pi : G \to H \setminus G$ в псевдориманову субмерсию. Проще всего получить явный вид этой метрики в «расщепленных» координатах (x^a, h^α), где x^a — локальные координаты на однородном пространстве M, h^α — координаты на подгруппе H. Действительно, левоинвариантные векторные поля ξ_i и генераторы ζ_i действия группы G на M в этих координатах связаны соотношениями

$$\xi_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a} + \xi_i^\alpha(x,h)\partial_{h^\alpha}, \quad \zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a},$$

откуда с использованием формул (4.38) и (4.39) получаем:

$$g^{ab}(x) = \mathbf{G}^{ij}\, \zeta_i^a(x)\zeta_j^b(x). \tag{4.40}$$

Замечание 4.5. Если мы предполагаем в равенстве (4.40) произвольность постоянных величин $\mathbf{G}^{ij}$, то метрика, определяемая этим равенством, не всегда оказывается G-инвариантной.

Метрики на однородных пространствах, сконструированные описанным способом, называются *метриками субмерсии*. Нетрудно видеть, что метрики субмерсии образуют гораздо более широкий класс метрик, чем инвариантные метрики. По-видимому, метрики субмерсии существуют на любых однородных пространствах.

В настоящее время метрики субмерсии являются довольно популярным объектом исследования в дифференциальной геометрии, теории групп Ли, а также в математической и теоретической физике. Так, например, теория (псевдо)римановых субмерсий довольно интенсивно применяется к изучению эйнштейновых многообразий; в рамках этого подхода уже получены довольно обширные классификационные результаты, обзор которых можно найти в монографии [111]. Римановы субмерсии также представляют немалый интерес в теоретической физике и имеют приложения в теории Янга – Миллса [112, 113], теории Калуцы – Клейна [114, 115], а также в супергравитации и теории струн [116].

В заключение заметим, что не смотря на то, что рассмотренные нами два класса псевдоримановых метрик на однородном пространстве $M = H \setminus G$ имеют весьма различную природу, эти классы все же могут допускать непустое пересечение. Выясним, при каких условиях метрика субмерсии (4.40) может являться одновременно и G-инвариантной.

Предположим, что для метрики (4.40) справедливы соотношения

$$\mathscr{L}_{\zeta_i}\, g^{ab} = 0, \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g},$$

где посредством $\mathscr{L}_{\zeta_i}$ обозначен оператор производной Ли вдоль генератора ζ_i группы преобразований G. Нетрудно показать, что данные соотношения равносильны следующим условиям, накладываемым на билинейную форму $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$:

$$C^l_{ij}\, \mathbf{G}_{lk} + C^l_{ik}\, \mathbf{G}_{lj} = 0.$$

В силу связности группы G полученные равенства эквивалентны требованию G-инвариантности формы $\mathbf{G}(\cdot,\cdot)$:

$$\mathbf{G}(\mathrm{Ad}_g\cdot, \mathrm{Ad}_g\cdot) = \mathbf{G}(\cdot,\cdot), \quad g \in G.$$

Напомним, что лево- или правоинвариантны псевдоримановые метрики на группах Ли, отвечающие G-инвариантным билинейным симметрическим формам на соответствующих алгебрах Ли, называются *биинвариантными* (см. § 2.4). Таким образом, метрики субмерсии на однородном пространстве $M = H \setminus G$, отвечающие левоинвариантным биинвариантным метрикам на группе G, автоматически будут являться инвариантными. В связи с этим, мы будет называть такие метрики субмерсии *биинвариантными метриками* на однородном пространстве.

§ 4.3 Специальное каноническое преобразование в T^*M

Ключевым механизмом метода интегрирования правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли, изложенного в § 2.3, явилось применение специального канонического преобразования в пространстве T^*G. В настоящем разделе мы обобщим указанный подход, описав алгоритм построения аналогичного канонического преобразования в пространстве T^*M, где $M = H \setminus G$ — произвольное однородное пространство связной группы Ли G.

Пусть $\mathscr{F}$ — пуассоновая алгебра инвариантных функций на пространстве кокасательного расслоения T^*M. Аналогично отображению момента (4.10), введем отображение $\tilde{\mu}$: $T^*M \to \mathscr{F}^*$ с помощью соотношений

$$Y_\beta(x,p) = a_\beta, \quad \beta = 1, \dots, \dim \mathscr{F}. \tag{4.41}$$

Здесь $\{Y_\beta(x,p)\}$ — набор функционально независимых инвариантных функций на T^*M, образующих базис пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$. Как показано в монографии [211] пара $(\mu, \tilde{\mu})$:

$T^*M \to \mathfrak{g}^* \times \mathscr{F}^*$ определяет так называемое *бирасслоение*, то есть симплектические листы $\mathcal{O}^{(s_M)} \subset \mathrm{Ad}^*_G\,\mathfrak{h}^\perp$ и $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathscr{F}^*$ находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом:

$$\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mu}\left(\mu^{-1}(\mathcal{O}^{(s_M)})\right), \quad \mathcal{O}^{(s_M)} = \mu\left(\tilde{\mu}^{-1}(\tilde{\mathcal{O}})\right).$$

Это означает, что количество нетривиальных функций Казимира $\mathscr{K}_\nu^{(s_M)}$ на $\mathrm{Ad}^*_G\,\mathfrak{h}^\perp$ совпадает с количеством функций Казимира $\mathscr{Z}_\nu$ на $\mathscr{F}^*$ и их можно выбрать согласованным образом:

$$\mathscr{Z}_\nu \circ \tilde{\mu} = \mathscr{K}_\nu \circ \mu \quad \leftrightarrow \quad \mathscr{Z}_\nu(Y(x,p)) = \mathscr{K}_\nu(X(x,p)); \quad \nu = 1, \ldots, \mathrm{ind}\,\mathscr{F}.$$

Согласованные симплектические листы $\mathcal{O}_\omega^{(s_M)}$, $\tilde{\mathcal{O}}_\omega$, нумерованные $\mathrm{ind}\,\mathscr{F}$–мерным параметром ω, определяются равенствами:

$$\mathcal{O}_\omega^{(s_M)} = \{f \in \mathrm{Ad}^*_G\,\mathfrak{h}^\perp \colon \mathscr{K}_\nu^{(s_M)}(f) = \omega_\nu\}, \quad \tilde{\mathcal{O}}_\omega = \{a \in \mathscr{F}^* \colon \mathscr{Z}_\nu(a) = \omega_\nu\}.$$

На множестве коприсоединенных орбит s_M-типа введем (локальную) гладкую параметризацию, считая, что каждая орбита проходит через ковектор $\lambda(J)$, параметризованный $\mathrm{ind}\,\mathscr{F}$-мерным вещественным параметром $J = (J_1, \ldots, J_{\mathrm{ind}\,\mathscr{F}})$. Пусть функции $f_i = f_i(u, v; J)$ ($i = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$) задают переход к каноническим координатам $(u_{\bar{a}}, v^{\bar{a}})$ на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, причем

$$f_i(0,0;J) = \lambda_i(J), \quad F^{s_M}(f(u,v,J)) = 0;$$
$$\mathscr{K}_\nu^{(s_M)}(f(u,v,J)) = \omega_\nu^{(s_M)}(J), \quad \det\left\|\frac{\partial\omega_\nu^{(s_M)}(J)}{\partial J_\mu}\right\| \neq 0,\ \mu,\nu = 1, \ldots, \mathrm{ind}\,\mathscr{F}.$$

Как уже отмечалось, подобный переход существует всегда в силу известной теоремы Дарбу. В частности, если ковектор $\lambda(J)$ обладает поляризацией $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, построение указанного перехода может быть осуществлено чисто алгебраическими методами (см. § 2.2).

Аналогичный переход к каноническим координатам можно произвести на симплектических листах дуального пространства $\mathscr{F}^*$. Для этого мы введем гладкую параметризацию симплектических листов общего положения в $\mathscr{F}^*$ считая, что каждый такой лист проходит через элемент $\sigma(J) \in \mathscr{F}^*$, где J — вещественный $\mathrm{ind}\,\mathscr{F}$-мерный параметр. Ограничение скобки Пуассона (4.24) на симплектический лист $\tilde{O}_{\sigma(J)}$ невырожденно и определяет на нем симплектическую структуру $\tilde{\omega}_{\sigma(J)}$, которая в канонических координатах $(u'_{\bar{\alpha}}, v'^{\bar{\alpha}})$ имеет вид:

$$\tilde{\omega}_\sigma = \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d_M} du'_{\bar{\alpha}} \wedge dv'^{\bar{\alpha}}.$$

Ясно, что построение перехода к каноническим координатам $(u'_{\bar{\alpha}}, v'^{\bar{\alpha}})$ на симплектических листах $\tilde{\mathcal{O}}_{\sigma(J)}$ сводится к отысканию функций $a_\beta(u', v'; J)$, $\beta = 1, \ldots, \dim\mathscr{F}$, таких, что

$$\frac{\partial a_\beta(u',v';J)}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}\,\frac{\partial a_\gamma(u',v';J)}{\partial v'^{\bar{\alpha}}} - \frac{\partial a_\gamma(u',v';J)}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}\,\frac{\partial a_\beta(u',v';J)}{\partial v'^{\bar{\alpha}}} = \Omega_{\beta\gamma}(a(u',v';J)),$$

причем

$$\mathscr{Z}_\nu(a(u',v';J)) = \tilde{\omega}_\nu(J), \quad \nu = 1,\dots,\operatorname{ind}\mathscr{F}.$$

Рассмотрим расширенное четномерное многообразие $N = T^*M \times \mathcal{O}_{\lambda(J)} \times \tilde{\mathcal{O}}_{\sigma(J)}$, являющееся симплектическим относительно невырожденной замкнутой 2-формы

$$\sum_{a=1}^{\dim M} dp_a \wedge dx^a - \sum_{\bar{a}=1}^{(n-r)/2-s_M} du_{\bar{a}} \wedge dv^{\bar{a}} - \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d_M} du'_{\bar{\alpha}} \wedge dv'^{\bar{\alpha}}, \tag{4.42}$$

где $n = \dim\mathfrak{g}$, $r = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$, d_M — дефект однородного пространства M. Обозначим через $M_J \subset N$ — поверхность в N, заданную следующей системой алгебраических уравнений:

$$X_i(x,p) = f_i(u,v;J), \quad i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}; \tag{4.43}$$

$$Y_\beta(x,p) = a_\beta(u',v';J), \quad \beta = 1,\dots,\dim\mathscr{F}. \tag{4.44}$$

Между функциями $\{X_i(x,p)\} \cup \{Y_\beta(x,p)\}$ имеется $\operatorname{ind}\mathscr{F} + i_M$ независимых функциональных соотношений, поэтому для размерности поверхности M_J получаем

$$\dim M_J = \dim M + \frac{n-r}{2} - s_M + d_M = \frac{1}{2}\dim N.$$

Таким образом, M_J — поверхность половинной размерности в симплектическом многообразии N. Кроме того, относительно пуассоновой структуры, порождаемой симплектической формой (4.42), функциональный набор $\{X_i(x,p) - f_i(u,v;J)\} \cup \{Y_\beta(x,p) - a_\beta(u',v';J)\}$ находится в инволюции. Это означает, что семейство поверхностей $M_J \subset N$, гладко параметризованное $\operatorname{ind}\mathscr{F}$-мерным параметром J, задает некоторое *лагранжево распределение* в симплектическом многообразии N.

Не ограничивая общности предположим, что с помощью равенств (4.43), (4.44) мы можем явно выразить переменные p_a, $u_{\bar{a}}$ и $v'^{\bar{\alpha}}$ как функции от координат x^a, $v^{\bar{a}}$ и $u'_{\bar{\alpha}}$; в этом случае последние можно считать локальными координатами на поверхности M_J. В силу лагранжевости этой поверхности, ограничение на нее симплектической формы (4.42) равно нулю, поэтому 1-форма

$$\theta(u',v,x;J) = \sum_{a=1}^{\dim M} p_a(u',v,x;J)dx^a - \sum_{\bar{a}=1}^{(n-r)/2-s_M} u_{\bar{a}}(u',v,x;J)dv^{\bar{a}} + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d_M} v'^{\bar{\alpha}}(u',v,x;J)du'_{\bar{\alpha}}, \tag{4.45}$$

зависящая от J как от параметра, является замкнутой, а следовательно, локально точной. Но это означает, что существует (локальная) функция $S(u',v,x;J)$ такая, что

$$S(u',v,x;J) = \int \theta(u',v,x;J). \tag{4.46}$$

С помощью функции $S(u', v, x; J)$ определим дополнительные $\operatorname{ind}\mathscr{F}$ фазовых переменных

$$\tau^{\mu}(u', v, x, J) \equiv \frac{\partial S(u', v, x; J)}{\partial J_{\mu}}, \quad \mu = 1, \ldots, \operatorname{ind}\mathscr{F}. \tag{4.47}$$

Используя систему равенств (4.43), (4.44) и (4.47) мы можем выразить величины $u_{\bar{a}}$, $v^{\bar{a}}$, $u'_{\bar{\alpha}}$, $v'^{\bar{\alpha}}$, J_{μ} и τ^{μ} как функции от фазовых переменных p_a и x^a. Полученное локальное преобразование в T^*M будет являться, очевидно, гладким и взаимооднозначным, причем согласно построению выполняется условие:

$$\sum_{a=1}^{\dim M} dp_a \wedge dx^a = \sum_{\bar{a}=1}^{(n-r)/2-s_M} du_{\bar{a}} \wedge dv^{\bar{a}} + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d_M} du'_{\bar{\alpha}} \wedge dv'^{\bar{\alpha}} + \sum_{\mu=1}^{\operatorname{ind}\mathscr{F}} dJ_{\mu} \wedge d\tau^{\mu}. \tag{4.48}$$

Локальное каноническое преобразование в T^*M, построенное описанным способом, мы будем называть *специальным*. При этом функция $S(u', v, x; J)$, определяемая согласно (4.46), будет является *производящей функцией* этого канонического преобразования.

Обсудим некоторые частные случаи.

1. Пусть группа G — коммутативная. Симплектические листы $\mathcal{O}^{(s_M)}$ и $\tilde{\mathcal{O}}$ такой группы нульмерны, следовательно, координат v, u, v' и u' нет. В этом случае специальное каноническое преобразование есть просто переход от фазовых переменных (p, x) на T^*M к хорошо известным переменным «действие – угол» (J, τ), где J интерпретируются как переменные «действие», а τ — как переменные «угол».

2. Пусть $H = \{e\}$ — тривиальная подгруппа изотропии так, что $M = G$. Другими словами, мы рассматриваем группу Ли G как однородное пространство, на котором G как группа преобразований действует правыми сдвигами. В этом случае симплектические листы $\tilde{\mathcal{O}}$ так же как и $\mathcal{O}$ являются регулярными орбитами коприсоединенного представления группы G, а переменные v' и u' так же как v и u являются каноническими координатами на коприсоединенных орбитах. Соответствующее специальное каноническое преобразование было построено нами в § 2.3. В частности, производящая функция этого преобразования вычисляется с помощью формулы (2.56).

3. Пусть однородное пространство $M = H \setminus G$ имеет нулевой дефект: $d_M = 0$. Согласно терминологии Э. Б. Винберга такие однородные пространства называются *слабо коммутативными* [205]. В случае слабо коммутативного однородного пространства симплектические листы $\tilde{\mathcal{O}}$ нульмерны, переменных u' и v' нет. Отметим также, что алгебра $\mathscr{F}$ всех инвариантных функций коммутативна и фактически состоит только из функций вида $\mathscr{K}^{(s_M)}(X(x, p))$, где $\mathscr{K}^{(s_M)}$ — функция Казимира s_M-типа на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Обсудим теперь связь нашего канонического преобразования с некоторыми результатами теории некоммутативного интегрирования конечномерных гамильтоновых систем [17, 18, 106]. Вначале напомним некоторые определения. Пусть (N, ω) — гладкое симплектическое многообразие, $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(N)$ — набор функций, замкнутый относительно скобки Пуассона на N: $\{f_A, f_B\} = F_{AB}(f)$, $A, B = 1, \ldots, k$. Тем самым данный набор образует некоторую пуассонову алгебру $\mathscr{P}$. Для каждой точки $x \in N$ определим в T^*N два подпространства. Пусть $F_x \subset T^*_x N$ — пространство, порожденное дифференциалами функций $f \in \mathscr{P}$, $K_x \subset T^*_x M$ — ядро ограничения пуассоновой структуры на F_x. Числа

$$\operatorname{ddim} \mathscr{P} \equiv \sup_{x \in M} \dim F_x, \quad \operatorname{dind} \mathscr{P} \equiv \sup_{x \in M} \dim K_x,$$

называются соответственно *дифференциальной размерностью* и *дифференциальным индексом* алгебры $\mathscr{P}$. Пуассонова алгебра $\mathscr{P}$ называется *полной*, если

$$\operatorname{ddim} \mathscr{P} + \operatorname{dind} \mathscr{P} = \dim N.$$

Пусть $N = T^*M$, где $M = H \setminus G$. Рассмотрим пуассонову алгебру $\mathscr{P}$ на T^*M, порождаемую набором функций $\{X_i(x,p)\} \cup \{Y_\alpha(x,p)\}$. Можно показать, что в этом случае

$$\operatorname{ddim} \mathscr{P} = 2 \dim M + \operatorname{ind} \mathfrak{g} + 2 s_M - i_M, \quad \operatorname{dind} \mathscr{P} = \operatorname{ind} \mathfrak{g} + 2 s_M - i_M,$$

откуда следует, что алгебра $\mathscr{P}$ полна. (Отметим, что для однородных пространств компактных связных групп Ли полнота алгебры $\mathscr{P}$ также доказана в работе [106]). Существование специального канонического преобразования (4.48) теперь фактически является содержанием теоремы Н. Н. Нехорошева [213].

Тем не менее следует отметить, что полученные нами результаты представляют ценность по меньшей мере по двум причинам. Во-первых, указанная теорема Н. Н. Нехорошева утверждает лишь *существование* обобщенных переменных «действие – угол», но не дает никакого рецепта их явного построения. Напротив, наш основной результат — это конструктивный алгоритм построения специального канонического преобразования, сводящийся к алгебраическим манипуляциям и вычислению квадратур, что, несомненно, оказывается полезным в задачах явного интегрирования гамильтоновых систем на однородных пространствах. Во-вторых, предложенный нами метод построения специального канонического преобразования явным образом учитывает алгебраические характеристики однородного пространства, такие как его дефект, индекс и степень сингулярности. Это, как нам кажется, представляется весьма удобным при формулировании соответствующих условий интегрируемости для гамильтоновых систем на однородных пространствах (см. следующий раздел). Кроме того, формулировка результатов в терминах указанных характеристик однородного пространства делает более прозрачным геометрический смысл обобщенных переменных «действие – угол», а также позволяет дать более детальное локальное описание специального канонического преобразования.

§ 4.4 Интегрирование геодезических потоков на однородных пространствах

Применим построенное выше специальное каноническое преобразование в T^*M к задаче интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными метриками и метриками субмерсии. Как следствие, мы получим условия интегрируемости данных геодезических потоков, выраженные через алгебраические характеристики однородного пространства: дефект, индекс и степень сингулярности [212].

4.4.1 Интегрирование геодезических потоков инвариантных метрик

Гамильтониан $H(x,p)$ геодезического потока инвариантной метрики является инвариантной функцией относительно индуцированного действия группы G на пространстве кокасательного расслоения T^*M. Поэтому он является некоторой функцией от инвариантных функций $Y_\alpha(x,p)$, образующих базис пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$:

$$H(x,p) = \mathscr{H}(Y_1(x,p),\dots,Y_k(x,p)), \quad k = \dim \mathscr{F}. \tag{4.49}$$

Данное утверждение применимо вообще к произвольной инвариантной на T^*M функции, поэтому ниже мы будем исследовать интегрируемость гамильтоновой системы

$$\dot{x}^a = \frac{\partial H(x,p)}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^a} \tag{4.50}$$

гамильтониан которой имеет вид (4.49), где функция $\mathscr{H}$ является произвольной гладкой функцией своих аргументов.

Используем специальное каноническое преобразование в T^*M, определяемое равенствами (4.43), (4.44) и (4.47). В новых канонических переменных (u,v,u',v',J,τ) гамильтониан (4.49) примет вид

$$\tilde{H}(u',v',J) \equiv \mathscr{H}(a_1(u',v';J),\dots,a_k(u',v';J)),$$

где функции $a_\beta(u',v';J)$ задают переход к координатам Дарбу на симплектическом листе $\tilde{O}_{\sigma(J)}$ дуального пространства $\mathscr{F}^*$. В результате после такого преобразования гамильтонова система (4.50) примет следующий вид:

$$\dot{v}'^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial \tilde{H}(u',v',J)}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}, \quad \dot{u}'_{\bar{\alpha}} = -\frac{\partial \tilde{H}(u',v',J)}{\partial v'^{\bar{\alpha}}}, \quad \bar{\alpha} = 1,\dots,d_M; \tag{4.51}$$

$$\dot{v}^{\bar{a}} = \dot{u}_{\bar{a}} = 0, \quad \bar{a} = 1,\dots,\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda; \tag{4.52}$$

$$\dot{J}_\mu = 0, \quad \dot{\tau}^\mu = \frac{\partial \tilde{H}(u', v', J)}{\partial J_\mu}, \quad \mu = 1, \dots, \operatorname{ind} \mathscr{F}. \tag{4.53}$$

Система уравнений (4.52) – (4.53) тривиально интегрируется, если известно решение системы (4.51). Таким образом, интегрируемость исходной гамильтоновой системы (4.49) в случае инвариантного гамильтониана $H(x,p)$ фактически эквивалентна интегрируемости подсистемы (4.51).

Гамильтонова система (4.51) есть результат *редукции* исходной гамильтоновой системы (4.49) на симплектический лист $\tilde{\mathcal{O}}_{\sigma(J)}$ размерности $2d_M$. Если дефект d_M равен нулю, что соответствует случаю слабо коммутативного однородного пространства, переменных u' и v' нет, нет и системы (4.51). Следовательно, система уравнений (4.51), (4.51) при $d_M = 0$ элементарно интегрируется. Гамильтонова система (4.51) интегрируема также и при $d_M = 1$. В этом случае используя гамильтониан $\tilde{H}(u', v', J)$ в качестве интеграла движения нетрудно получить решения в квадратурах. Очевидно, что при $d_M > 1$ система (4.51) в общем случае является не интегрируемой.

Отметим, что нахождение алгебры инвариантных функций, построение канонических переменных на симплектических листах $\mathcal{O}^{(s_M)}$, $\tilde{\mathcal{O}}$, а также производящей функции специального канонического преобразования сводится к квадратурам. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Произвольная G-инвариантная гамильтонова система на кокасательном расслоении T^*M однородного пространства $M = H \setminus G$ редуцируется к автономной $2d_M$–мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируема в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$d_M < 2.$$

В работах [107,108] приводится критерий интегрируемости произвольных инвариантных гамильтоновых систем на T^*M в классе интегралов Нетер. В наших обозначениях этот критерий выглядит следующим образом:

$$\dim \mathfrak{g}^\lambda / \mathfrak{h}^\lambda + \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^\lambda = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Согласно формуле (4.16) — это условие есть ничто иное как условие нулевого дефекта: $d_M = 0$. Однако никакого противоречия с доказанной нами теоремой здесь нет, так как при $d_M = 1$ гамильтониан $H(x,p)$ системы (4.49) не принадлежит к классу интегралов Нетер. (Напомним, что класс интегралов Нетер состоит из функций на T^*M вида $\varphi \circ \mu$, где $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, а $\mu : T^*M \to \mathrm{Ad}^*_G \mathfrak{h}^\perp$ есть отображение момента (4.10)). Как следствие, мы получаем следующий критерий слабой коммутативности однородного пространства:

Следствие 4.2. *Произвольная G–инвариантная гамильтонова система на T^*M интегрируема в классе интегралов Нетер тогда и только тогда, когда пространство M слабо коммутативно.*

Пример 4.3. Рассмотрим неразрешимую пятимерную группу $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SL(2,\mathbb{R})$, являющуюся полупрямым произведением двумерного коммутативного идеала $\mathbb{R}^2$ и трехмерной простой группы $SL(2;\mathbb{R})$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ этой группы имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1,e_4] = -e_1, \quad [e_1,e_5] = e_2, \quad [e_2,e_3] = e_1, \quad [e_2,e_4] = e_2, \quad [e_3,e_4] = -2e_3, \tag{4.54}$$

$$[e_3,e_5] = e_4, \quad [e_4,e_5] = -2e_5. \tag{4.55}$$

Здесь $\mathbb{R}^2 = \{e_1,e_2\}$, $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{R}) = \{e_3,e_4,e_5\}$.

Нетрудно проверить, что $r = \operatorname{ind}\mathfrak{g} = 1$. Структура классов коприсоединенных орбит данной группы имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}^{(0)}_\omega = \{f \in \mathfrak{g}^*\colon \mathscr{K}(f) = f_1f_2f_4 + f_1^2f_5 - f_2^2f_3 = \omega^0;\ \neg(f_1 = f_2 = 0)\},\\
&\mathcal{O}^{(1)}_\omega = \{f \in \mathfrak{g}^*\colon f_1 = f_2 = 0;\ \mathscr{K}^{(1)}(f) = f_4^2 + 4f_3f_5 = \omega^1;\ \neg(f = 0)\},\\
&\mathcal{O}^{(2)} = \{f \in \mathfrak{g}^*\colon f = 0\}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим четырехмерное однородное пространство $M = H\backslash G$, где $H \subset G$ — одномерная подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{h} = \{e_5\}$. Согласно классификации однородных пространств, описанной в § 4.1, имеем $i_M = s_M = 0$. Отсюда с помощью формул (4.15), (4.23) и (4.26) находим,

$$d_M = 1, \quad \dim\mathscr{F} = 3, \quad \operatorname{ind}\mathscr{F} = 1.$$

Таким образом, однородное пространство M не является слабо коммутативным, алгебра инвариантных функций $\mathscr{F}$ имеет три порождающих и допускает одну независимую функцию Казимира. Следовательно, согласно теореме 4.2 произвольная инвариантная гамильтонова система на T^*M интегрируема в квадратурах, но не в классе интегралов Нетер.

Введем на группе G локальные канонические координаты второго рода:

$$g_{h,x} = \exp(he_5)\exp(x_4e_4)\exp(x_3e_3)\exp(x_2e_2)\exp(x_1e_1).$$

Инфинитезимальные генераторы действия группы в этих координатах будут иметь следующий вид:

$$\zeta_1 = \partial_1, \quad \zeta_2 = \partial_2, \quad \zeta_3 = x_2\partial_1 + \partial_3, \quad \zeta_4 = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - 2x_3\partial_3 + \partial_4, \tag{4.56}$$

$$\zeta_5 = x_1\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4. \tag{4.57}$$

Отсюда для функций $X_i(x,p) \equiv \zeta_i^a(x)p_a$ и $Y_\alpha(x,p)$ получаем следующие выражения:

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = x_2p_1 + p_3, \quad X_4 = -x_1p_1 + x_2p_2 - 2x_3p_3 + p_4,$$

$$X_5 = x_1p_2 - x_3^2p_3 + x_3p_4;$$

$$Y_1(x,p) = -e^{x_4}(x_3p_1 + p_2), \quad Y_2(x,p) = -p_4, \quad Y_3(x,p) = e^{-x_4}(p_1p_4 - x_3p_1p_3 - p_2p_3). \tag{4.58}$$

Очевидно, что наиболее общий вид инвариантной на T^*M функции, квадратичной по импульсным переменным p_a, следующий

$$H(x,p) = \mathscr{H}(Y(x,p)), \quad \mathscr{H}(a) = \frac{1}{2}\left(c_1a_1^2 + c_2a_2^2 + c_3a_1a_2 + c_4a_3\right). \tag{4.59}$$

Здесь $c_1,\ldots,c_4$ — произвольные постоянные. Будем интерпретировать функцию $H(x,p)$ как гамильтониан геодезического потока некоторой инвариантной метрики на M. Тогда для обратного метрического тензора этой метрики получаем

$$\|g^{ab}\| = \begin{pmatrix} c_1e^{2x_4}x_3^2 & c_1e^{2x_4}x_3 & -c_4x_3e^{-x_4}/2 & (c_3x_3e^{x_4} + c_4e^{-x_4})/2 \\ c_1e^{2x_4}x_3 & c_1e^{2x_4} & -c_4e^{-x_4}/2 & c_3e^{x_4}/2 \\ -c_4x_3e^{-x_4}/2 & -c_4e^{-x_4}/2 & 0 & 0 \\ (c_3x_3e^{x_4} + c_4e^{-x_4})/2 & c_3e^{x_4}/2 & 0 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

При этом условие $\det\|g^{ab}\| \neq 0$ влечет $c_4 \neq 0$. Отметим, что в работе [31] показано, что рассматриваемая метрика нештеккелева, то есть соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби не допускает разделение переменных. Кроме того, при $c_2 = c_3 = 0$ данная метрика является вакуумной, то есть удовлетворяет уравнению Эйнштейна в пустоте.

Проинтегрируем геодезический поток рассматриваемой метрики. Линейный канонический переход на невырожденной орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, где $\lambda(J) = (0,1,J,0,0) \in \mathfrak{h}^\perp$, отвечает поляризации $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2, e_3\}$ и определяется равенствами

$$f_1 = -e^{-v_1}v_2, \quad f_2 = e^{-v_1}, \quad f_3 = -v_2(u_1 + v_2u_2) + Je^{2v_1}, \quad f_4 = u_1 + 2v_2u_2, \quad f_5 = u_2.$$

Образующие (4.58) алгебры инвариантных функций удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\{Y_1, Y_2\} = Y_3, \quad \{Y_1, Y_3\} = 0, \quad \{Y_2, Y_3\} = Y_3.$$

Таким образом, в данном частном примере алгебра $\mathscr{F}$ является трехмерной алгеброй Ли. В пространстве $C^\infty(\mathscr{F}^*)$ имеется одна функция Казимира $\mathscr{Z}(a) = -a_1a_3$, причем $\mathscr{Z}(Y(x,p)) =$

$\mathscr{K}(X(x,p))$. Элементарно находятся канонические координаты (u',v') на симплектическом листе $\tilde{\mathcal{O}}_{\sigma(J)} = \{a \in \mathscr{F}^*\colon a_1 a_3 = J\}$:

$$a_1 = -e^{v'}, \quad a_2 = u', \quad a_3 = -Je^{v'}.$$

Выпишем в явном виде систему уравнений (4.43), (4.44):

$$p_1 = -e^{-v_1}v_2, \quad p_2 = e^{-v_1}, \quad x_2p_1 + p_3 = -v_2(u_1 + v_2u_2) + Je^{2v_1}, \tag{4.61}$$

$$-x_1p_1 + x_2p_2 - 2x_3p_3 + p_4 = u_1 + 2v_2u_2, \quad x_1\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4 = u_2, \tag{4.62}$$

$$-e^{x_4}(x_3p_1 + p_2) = -e^{v'}, \quad -p_4 = u', \quad e^{-x_4}(p_1p_4 - x_3p_1p_3 - p_2p_3 = -Je^{v'}. \tag{4.63}$$

Выразим из этой системы переменные $p_1,\ldots,p_4$, u_1, u_2 и v', и построим согласно (4.45) замкнутую 1-форму θ. Тогда для функции $S = \int\theta$ получаем следующее выражение:

$$S(u',v,x;J) = e^{-v_1}(x_2 - x_1v_2) + \frac{Je^{2v_1}x_3}{1 - v_2x_3} + u'\left[v_1 - x_4 - \ln(1 - v_2x_3)\right]. \tag{4.64}$$

Достраивая теперь согласно (4.47) недостающую функцию

$$\tau = \frac{e^{2v_1}x_3}{1 - v_2x_3}, \tag{4.65}$$

мы тем самым получаем локальное преобразование $(x,p) \to (u,v,u',v',J,\tau)$, неявно заданное равенствами (4.61) – (4.63), (4.65). Согласно построению данное преобразование — каноническое, что может быть проверено непосредственными вычислениями. При этом функция (4.64) представляет собой производящую функцию указанного канонического преобразования, выраженную в координатах x, u', v и J.

Используя построенное каноническое преобразование, выразим исходный гамильтониан (4.59) в новых канонических переменных:

$$\tilde{H}(u',v',J) = \frac{1}{2}\left(c_2u'^2 - c_3e^{-v'}u' + c_1e^{-2v'} - c_4Je^{v'}\right).$$

Отвечающая этому гамильтониану гамильтонова система легко интегрируется в квадратурах. Действительно, с помощью равенства $\tilde{H}(u',v',J) = E$ мы можем выразить переменную u' как функцию v', после чего зависимость координаты v' от параметра интегрирования s неявно будет даваться интегралом

$$s = \int\left(\frac{c_3e^{-v'}}{c_2} \pm \sqrt{-\frac{c_1e^{-2v'}}{c_2} + \frac{Jc_4e^{v'}}{c_2} + \frac{2E}{c_2} + \frac{c_3^2\,e^{-2v'}}{c_2^2}}\right)dv',$$

Далее, переменные $u,v,J-\mathrm{const}$, а зависимость переменной τ от параметра s определяется интегрированием:

$$\tau(s) = \int\frac{\partial\tilde{H}(v'(t),u'(t),J)}{\partial J}\,ds = -\frac{c_4}{2}\int e^{v'(s)}\,ds.$$

Тем самым, задача интегрирования в квадратурах геодезического потока метрики (4.60) решена.

В физических приложениях особый интерес представляют трех- и четырехмерные однородные пространства. Исследуем интегрируемость геодезических потоков G-инвариантных псевдоримановых метрик на однородных пространствах указанных размерностей. При этом мы будем рассматривать однородные пространства только с нетривиальными подгруппами изотропии $H \neq \{e\}$.

Нетрудно показать, что в трехмерном случае верно следующее

Следствие 4.3. *Пусть максимальная группа движений G трехмерного псевдориманова многообразия M действует транзитивно. Тогда геодезический поток на M интегрируем в квадратурах.*

Доказательство. В силу теоремы Фубини [214] трехмерных однородных пространств с пятимерной максимальной группой движений G не существует. Следовательно, имеется всего два возможных случая: $\dim G = 4, 6$. Рассмотрим их по отдельности.

Случай $\dim G = 4$. Так как дефект d_M однородного пространства удовлетворяет условию $0 \le d_M \le (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2$, а индекс $\operatorname{ind} \mathfrak{g}$ может принимать только значения $0, 2$ и 4, для возможных значений дефекта получаем: $d_M = 0, 1, 2$. При этом заметим, что $d_M = 2$ только для $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 0$. С другой стороны, если $d_M = 2$, согласно определению дефекта (4.15) имеем $d_M = 1 + i_M - s_M = 2$ или $i_M - s_M = 1$. Из формул (4.17) следуют очевидные неравенства

$$0 \le i_M \le \dim \mathfrak{h}, \quad 0 \le s_M \le (\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind} \mathfrak{g})/2,$$

из которых получаем, что условию $i_M - s_M = 1$ могут удовлетворять только значения $i_M = 1$, $s_M = 0$. Но эти значения противоречат еще одному неравенству, доказанному в работе [37]: $i_M \le 2s_M + \operatorname{ind} \mathfrak{g}$. Таким образом, всякое трехмерное однородное пространство с четырехмерной группой преобразований имеет дефект, меньший или равный 1.

Случай $\dim G = 6$. Так как группа G в этой ситуации имеет максимально возможную размерность, данный случай соответствует трехмерному однородному пространству постоянной кривизны. Как известно все пространства постоянной кривизны являются (локально) симметрическими однородными пространствами, и как следствие, имеют нулевой дефект.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях условие теоремы 4.2 выполняется. □

К сожалению, в четырехмерном случае рассуждениями, подобными тем, которые мы использовали при доказательстве следствия 4.3, полностью исследовать проблему интегрируемости геодезических потоков не удается. Вместо этого, однако, мы можем воспользоваться классификацией всех четырехмерных псевдоримановых однородных пространств, приведенной в работе [215]. Вычисляя для каждого однородного пространства из указанной классификации его дефект, мы сможем выявить все интегрируемые случаи в соответствии с условиями теоремы 4.2.

Проведя необходимые вычисления, мы приходим к следующему результату.

Следствие 4.4. *Пусть $M = H \setminus G$ — четырехмерное однородное пространство с нетривиальной подгруппой изотропии H, снабженное G-инвариантной метрикой. Тогда геодезический поток на M интегрируем в квадратурах.*

Еще раз отметим, что здесь мы предполагаем нетривиальность подгруппы изотропии H. В противном случае, утверждение 4.4 будет являться неверным, так как геодезический поток правоинвариантной метрики на четырехмерной группе Ли может быть неинтегрируемым, если индекс соответствующей алгебры Ли равен нулю (см. следствие 2.1).

4.4.2 Интегрирование геодезических потоков метрик субмерсии

Из формулы (4.40) получаем, что гамильтониан геодезического потока метрики субмерсии записывается в виде

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{ij}\zeta_i^a(x)\zeta_j^b(x)p_a p_b = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}X_i(x,p)X_j(x,p). \tag{4.66}$$

Очевидно, что в общем случае интегралами движения соответствующей гамильтоновой системы будут только инвариантные функции $Y_\alpha(x,p)$, то есть алгебра симметрии геодезического потока метрики субмерсии — это алгебра $\mathscr{F}$.

После канонического преобразования (4.43), (4.44) и (4.47) гамильтонова система с гамильтонианом (4.66) примет вид

$$\dot{v}^{\bar a} = \frac{\partial \tilde H(u,v,J)}{\partial u_{\bar a}}, \quad \dot{u}_{\bar a} = -\frac{\partial \tilde H(u,v,J)}{\partial v^{\bar a}}, \quad \bar a = 1,\ldots,\frac{1}{2}\,\dim\mathcal{O}_\lambda; \tag{4.67}$$

$$\dot{v}'^{\bar\alpha} = \dot{u}'_{\bar\alpha} = 0, \quad \bar\alpha = 1,\ldots,d_M; \tag{4.68}$$

$$\dot{J}_\mu = 0, \quad \dot{\tau}^\mu = \frac{\partial \tilde H(u,v,J)}{\partial J_\mu}, \quad \mu = 1,\ldots,\dim\mathscr{F}. \tag{4.69}$$

где

$$\tilde H(u,v,J) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}f_i(u,v;J)f_i(u,v;J).$$

Система (4.68) – (4.69) элементарно интегрируется, если известно решение гамильтоновой системы (4.67). Количество фазовых переменных (u,v) в системе (4.67) равно $\dim\mathcal{O}_\lambda$, где $\lambda\in\mathfrak{h}^\perp$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4.3. *Геодезический поток на однородном пространстве $M = H\setminus G$ с произвольной метрикой субмерсии редуцируется к автономной $\dim\mathcal{O}_\lambda$–мерной гамильтоновой системе и в общем случае интегрируем в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}_\lambda = \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}\right) - s_M < 2. \tag{4.70}$$

В случае когда $\dim\mathcal{O}_\lambda = 0$ гамильтониан геодезического потока после специального канонического преобразования будет зависеть только от параметров J, то есть системы (4.67) нет. Эта ситуация фактически соответствует инвариантной метрике, так как гамильтониан $H(x,p)$ в этом случае имеет вид $H(x,p) = \mathscr{K}^{(s_M)}(X(x,p))$, где $\mathscr{K}^{(s_M)}$ — функция Казимира s_M-типа алгебры $\mathfrak{g}$.

При $\dim\mathcal{O}_\lambda = 2$ метрика субмерсии не является G-инвариантной, и поэтому этот случай более интересен. В качестве примера мы проинтегрируем геодезический поток на четырехмерном однородном пространстве рассмотренной нами в § 4.1 группы Маутнера, пространство орбит которой не полуотделимо. Данный пример покажет полезность применения специального канонического преобразования.

Пример 4.4. Группа G матриц вида (4.5) допускает три неэквивалентных четырехмерных однородных пространства с подалгебрами изотропии $\mathfrak{h}$: $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ и $\{e_4\}$. При этом в пространствах с подалгебрами изотропии $\{e_2\}$ и $\{e_4\}$ группа G действует не эффективно, поэтому ниже мы рассмотрим однородное пространство $M = H\setminus G$ с подалгеброй изотропии $\mathfrak{h} = \{e_1\}$.

Введем на группе G канонические координаты второго рода:

$$g_{h,x} = e^{he_1}e^{x_1e_2}e^{x_2e_3}e^{x_3e_4}e^{x_4e_5}.$$

Величины $x_1,\dots,x_4$ можно считать локальными координатами на однородном пространстве M. В выбранных координатах генераторы ζ_i действия группы G на M запишутся в виде

$$\zeta_1 = \partial_1, \quad \zeta_2 = \partial_2, \quad \zeta_3 = \partial_3, \quad \zeta_4 = \partial_4, \quad \zeta_5 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \alpha\left(x_4\partial_3 - x_3\partial_4\right).$$

Метрика субмерсии общего положения данного однородного пространства с помощью внутренних автоморфизмов может быть приведена к виду

$$\|g^{ab}\| = \begin{pmatrix} c_1 + x_2^2 & c_2 - x_1x_2 & c_3 + \alpha x_2x_4 & c_4 - \alpha x_2x_3 \\ c_2 - x_1x_2 & c_5 + x_1^2 & c_6 - \alpha x_1x_4 & c_7 + \alpha x_1x_3 \\ c_3 + \alpha x_2x_4 & c_6 - \alpha x_1x_4 & c_8 + \alpha^2x_4^2 & -\alpha^2x_3x_4 \\ c_4 - \alpha x_2x_3 & c_7 + \alpha x_1x_3 & -\alpha^2x_3x_4 & c_9 + \alpha^2x_3^2 \end{pmatrix},$$

где c_i — постоянные. Выпишем гамильтониан геодезического потока данной метрики

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\left(c_1 + x_2^2\right)p_1^2 + \left(c_2 - x_1x_2\right)p_1p_2 + \left(c_3 + \alpha x_2x_4\right)p_1p_3 + \left(c_4 - \alpha x_2x_3\right)p_1p_4 + \\ + \frac{1}{2}\left(c_5 + x_1^2\right)p_2^2 + \left(c_6 - \alpha x_1x_4\right)p_2p_3 + \left(c_7 + \alpha x_1x_3\right)p_2p_4 + \\ + \frac{1}{2}\left(c_8 + \alpha^2x_4^2\right)p_3^2 - \alpha^2x_3x_4p_3p_4 + \frac{1}{2}\left(c_9 + \alpha^2x_3^2\right)p_4^2. \quad (4.71)$$

Обсудим интегрируемость гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.71) с точки зрения интегрируемости по Лиувиллю. Так как по построению функция $H(x,p)$ является квадратичной комбинацией функций

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = p_4, \quad X_5 = x_2p_1 - x_1p_2 + \alpha\left(x_4p_3 - x_3p_4\right),$$

очевидными интегралами движения являются функции $K_\mu(x,p) = \mathscr{K}_\mu(X(x,p))$, где $\mathscr{K}_\mu$ — функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$, имеющие вид (4.6). Таким образом, помимо самой функции $H(x,p)$ мы имеем еще тройку коммутирующих между собой интегралов движения:

$$K_1 = p_1^2 + p_2^2, \quad K_2 = p_3^2 + p_4^2, \quad K_3 = \alpha\,\mathrm{arctg}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{p_4}{p_3}\right). \quad (4.72)$$

Согласно общеизвестному подходу [16], интегрирование гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.71) формально может быть произведено путем ее ограничения на совместную поверхность уровня функций (4.72). Здесь, однако, необходимо учесть тот факт, что ввиду существенной многозначности функции Казимира $K_3(x,p)$, указанная поверхность уровня вообще не является подмногообразием в T^*M. Поэтому традиционный метод интегрирования в данной ситуации не применим, то есть гамильтонова система с гамильтонианом (4.71) не интегрируема по Лиувиллю.

Проинтегрируем геодезический поток с гамильтонианом (4.71) используя специальное каноническое преобразование в T^*M. Предварительно отметим, что так как для данного однородного пространства

$$\mathrm{ind}\,\mathfrak{g} = 3, \quad i_M = s_M = d_M = 0,$$

условие (4.70) теоремы 4.3 выполняется, поэтому данный геодезический поток интегрируем.

Параметризуем регулярные коприсоединенные орбиты в пространстве $\mathfrak{g}^*$ следующим образом: $\lambda(J) = (J_1, 0, J_2\cos J_3, J_2\sin J_3, 0)$, где $J_1, J_2 \in (0, +\infty)$, $J_3 \in [0, 2\pi)$. Используя поляризацию $\mathfrak{n} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ковектора $\lambda(J)$, выпишем функции линейного перехода к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$:

$$f_1 = J_1\cos v, \quad f_2 = -J_1\sin v, \quad f_3 = J_2\cos(J_3 - \alpha v), \quad f_4 = J_2\sin(J_3 - \alpha v), \quad f_5 = u.$$

Функции Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ в канонических координатах (u, v) принимают вид

$$\mathscr{K}_1(f(u,v;J)) = J_1^2, \quad \mathscr{K}_2(f(u,v;J)) = J_2^2,$$

$$\mathscr{K}_3(f(u,v;J)) = \pi(\alpha m - n) - J_3, \quad m = \left\lfloor \frac{\alpha v - J_3}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad n = \left\lfloor \frac{v}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

где через $\lfloor x \rfloor$ обозначено наибольшее целое число, меньшее или равное числу $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что неоднозначность величины J_3 не препятствует интегрированию геодезического потока с гамильтонианом (4.71) путем использования канонического преобразования (4.43), (4.44), (4.47), поскольку эта величина фигурирует лишь в составе функций $\sin(J_3 - \alpha v)$ и $\cos(J_3 - \alpha v)$, а переменная v определена по модулю 2π.

Так как дефект рассматриваемого однородного пространства равен нулю, переменных u' и v' нет. Используя систему равенств (4.43), (4.44), которая в данном примере имеет вид

$$p_1 = J_1 \cos v, \quad p_2 = -J_1 \sin v, \quad p_3 = J_2 \cos(J_3 - \alpha v), \quad p_4 = J_2 \sin(J_3 - \alpha v), \tag{4.73}$$

$$x_2 p_1 - x_1 p_2 + \alpha\,(x_4 p_3 - x_3 p_4) = u, \tag{4.74}$$

выразим переменные p_a и u как функции координат x^a и v, и вычислим согласно формулам (4.45) и (4.46) производящую функцию специального канонического преобразования

$$S(v, x; J) = J_1\,(x_1 \cos v - x_2 \sin v) + J_2\,[x_3 \cos(\alpha v - J_3) - x_4 \sin(\alpha v - J_3)]\,.$$

С помощью этой функции найдем недостающие функции $\tau^\mu(v, x, J)$:

$$\tau^1 = x_1 \cos v - x_2 \sin v, \quad \tau^2 = x_3 \cos(\alpha v - J_3) - x_4 \sin(\alpha v - J_3), \tag{4.75}$$

$$\tau^3 = J_2\,[x_3 \sin(\alpha v - J_3) + x_4 \cos(\alpha v - J_3)]\,. \tag{4.76}$$

Таким образом, система уравнений (4.73) – (4.76) неявно определяет преобразование $(x, p) \to (u, v, J, \tau)$, являющееся каноническим. Применяя это преобразование к гамильтониану (4.71), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{H}(u, v, J) = \frac{1}{2}\,u^2 + \frac{1}{2}\,J_1^2\left(c_1 \cos^2 v - c_2 \sin 2v + c_5 \sin^2 v\right) + J_1 J_2\,[c_3 \cos v \cos(\alpha v - J_3) - \\ - c_4 \cos v \sin(\alpha v - J_3) - c_6 \sin v \cos(\alpha v - J_3) + c_7 \sin v \sin(\alpha v - J_3)[+ \\ + \frac{1}{2}\,J_2^2\left[c_8 \cos(\alpha v - J_3) + c_9 \sin^2(\alpha v - J_3)\right].\end{aligned}$$

Гамильтонова система (4.67) двумерна и с помощью интеграла «энергии» $\tilde{H}(u, v, J)$ интегрируется в квадратурах.

Сделаем теперь некоторое замечание об интегрируемости геодезических потоков биинвариантных метрик на однородных пространствах.

Пусть $H(x, p)$ — гамильтониан геодезического потока псевдоримановой биинвариантной метрики на однородном пространстве $M = H \setminus G$. Ввиду G–инвариантности, функция $H(x, p)$ коммутирует со всеми функциями $X_i(x, p)$, которые в связи с этим являются первыми интегралами рассматриваемого геодезического потока. С другой стороны, биинвариантная метрика является частным случаем метрики субмерсии, следовательно, гамильтониан $H(x, p)$ геодезического потока представляет собой некоторую квадратичную форму от функций $X_i(x, p)$. Отсюда получаем, что

$$H(x, p) = \mathscr{K}^{(s_M)}(X(x, p)),$$

где $\mathscr{K}^{(s_M)}$ — функция Казимира s_M-типа алгебры $\mathfrak{g}$.

Очевидно, что после канонического преобразования, задаваемого равенствами (4.43), (4.44), (4.47), гамильтоновые уравнения исходного геодезического потока с биинвариантной метрикой принимают следующий вид вид:

$$\dot{u}_{\bar{a}} = \dot{v}^{\bar{a}} = 0, \quad \bar{a} = 1, \dots, d_M;$$

$$\dot{u}'_{\bar{\alpha}} = \dot{v}'^{\bar{\alpha}} = 0, \quad \bar{\alpha} = 1, \dots, \frac{1}{2}\dim \mathcal{O}_\lambda;$$

$$\dot{J}_\mu = 0, \quad \dot{\tau}^\mu = \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J_\mu}, \quad \mu = 1, \dots, \dim \mathscr{F}, \tag{4.77}$$

где

$$\tilde{H}(J) = \mathscr{K}^{(s_M)}(\lambda(J)).$$

Приведенная система уравнений тривиально интегрируется, поэтому мы приходим к следующему утверждению, являющемуся следствием теорем 4.2 и 4.3.

Следствие 4.5. *Геодезический поток на однородном пространстве $M = H \setminus G$ с произвольной биинвариантной псевдоримановой метрикой является интегрируемым в квадратурах.*

В работе [106] доказывается теорема о том, что геодезический поток на однородном пространстве, отвечающий биинвариантной метрике, вполне интегрируем в некоммутативном смысле, и движение системы происходит по торам размерности $d = \dim \mathfrak{g}^\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$. Легко видеть, что данное утверждение полностью согласуется с нашими результатами, в частности видно, что размерность торов d есть не что иное как количество переменных J в системе (4.77), то есть представляет собой число независимых функций Казимира s_M–типа.

Сделаем еще одно важное замечание. Согласно теореме 4.2 критерием интегрируемости в квадратурах геодезического потока с произвольной инвариантной метрикой является выполнение неравенства $d_M < 2$. Используя определение степени сингулярности s_M и индекса i_M однородного пространства, указанное неравенство можно переписать в виде

$$d_M = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda - (\dim \mathrm{Ad}_G^* \mathfrak{h}^\perp - \dim \mathfrak{h}^\perp) < 2. \tag{4.78}$$

Ввиду того, что выражение стоящее в скобках всегда неотрицательно, неравенство $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda < 2$, очевидно, является усилением неравенства (4.78). Отсюда следует важный вывод.

Утверждение 4.1. *Если геодезический поток на однородном пространстве M интегрируем в квадратурах относительно любой метрики субмерсии, то он является интегрируемым в квадратурах и относительно любой G–инвариантной метрики на M.*

В заключение обсудим проблему классификации однородных пространств, геодезические потоки на которых являются интегрируемыми для всякой метрики субмерсии. Теорема 4.3, в принципе, позволяет выделить такие случаи. Как нетрудно видеть, алгоритм подобной классификации состоит в трех этапах. Первый этап сводится к перечислению всех возможных групп преобразований, что на локальном уровне эквивалентно перечислению всех возможных вещественных алгебр Ли. Далее, для каждой конкретной группы G (или ее алгебры $\mathfrak{g}$) мы предъявляем все ее неэквивалентные однородные пространства вида $M = H \backslash G$, что фактически сводится к классификации неэквивалентных (относительно сопряжений) подалгебр $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Наконец на третьем этапе мы вычисляем степень сингулярности s_M каждого полученного однородного пространства и проверяем выполнение условия (4.70).

На практике вряд ли когда-нибудь удастся реализовать намеченную классификационную программу в полном объеме. На самом деле уже первый этап описанного алгоритма сталкивается с серьезными трудностями, так как известно, что на сегодняшний день отсутствует полная классификация алгебр Ли. Поэтому в настоящем исследовании мы ограничимся только рассмотрением алгебр Ли с условием $\dim \mathfrak{g} \leq 5$. Кроме того, мы рассмотрим лишь *несингулярные* однородные пространства, то есть такие, что $s_M = 0$. В этом случае условие теоремы 4.3 будет иметь вид (2.80), по форме совпадающий с условием интегрируемости правоинвариантных гамильтоновых систем на группах Ли.

Классификация всех вещественных алгебр Ли размерности $\dim \mathfrak{g} \leq 5$ приведена в Приложении А. Из этой классификации видно, что геодезический поток произвольной метрики субмерсии на однородном пространстве с двух- или трехмерной группой преобразований всегда интегрируем в квадратурах. Интегрируемые случаи с четырехмерной группой преобразований представляются следующими алгебрами Ли: $\mathfrak{g}_{4,1}$ $(c = 0)$, $\mathfrak{g}_{4,3}$ $(c = 0)$, $\mathfrak{g}_{4,5}$ – $\mathfrak{g}_{4,15}$.

В случае $\dim \mathfrak{g} = 5$ условие интегрируемости геодезического потока с метрикой субмерсии эквивалентно $\operatorname{ind} \mathfrak{g} > 1$; данному условию удовлетворяют алгебры Ли: $\mathfrak{g}_{5,1} - \mathfrak{g}_{5,3}$, $\mathfrak{g}_{5,7} - \mathfrak{g}_{5,19}$.

ГЛАВА 5. ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ В ВАРИАЦИЯХ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Настоящая глава посвящена изучению *гамильтоновых систем в вариациях*, то есть систем дифференциальных уравнений, являющихся результатом линеаризации гамильтоновых систем на пуассоновых многообразиях. В частности, нас будут интересовать вариации геодезических потоков на псевдоримановых однородных пространствах. Как мы покажем далее, система в вариациях геодезического потока является эквивалентной *уравнению Якоби* которое, как известно, играет важную роль в вопросах устойчивости геодезических на римановых и псведоримановых многообразиях [16,117–119]. Решения уравнения Якоби – *поля Якоби* – описывают отклонение геодезических при малых возмущениях начальных условий, поэтому задача о построении этих полей представляет большой интерес в общей теории относительности [120–123].

§ 5.1 Гамильтоновы системы в вариациях

Цель настоящего параграфа — показать, что на касательном расслоении TP произвольного пуассонова многообразия P существует естественная пуассонова структура, относительно которой произвольная гамильтонова система на P вместе со своей системой в вариациях является гамильтоновой на TP.

Пусть P — гладкое пуассоново многообразие со скобкой Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$. По определению скобка $\{\cdot,\cdot\}$ задает в пространстве гладких функций $C^\infty(P)$ структуру бесконечномерной алгебры Ли и является билинейной кососимметрической операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби. В локальных координатах $\{z^i\}$ скобку Пуассона можно записать в виде

$$\{\varphi,\psi\}(z)=\sum_{i,j=1}^{\dim P}\omega_{ij}(z)\,\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z^i}\,\frac{\partial\psi(z)}{\partial z^j},\quad \varphi,\psi\in C^\infty(P),$$

где $\omega^{ij}(z)\equiv\{z^i,z^j\}$ — кососимметрический тензор, подчиненный условию

$$\omega^{il}(z)\,\frac{\partial\omega^{jk}(z)}{\partial z^l}+\omega^{jl}(z)\,\frac{\partial\omega^{ki}(z)}{\partial z^l}+\omega^{kl}(z)\,\frac{\partial\omega^{ij}(z)}{\partial z^l}=0.$$

Отметим, что в общем случае пуассонова структура может быть вырожденной, то есть определитель матрицы $\|\omega^{ij}(z)\|$ может быть равен нулю во всех точках $z\in P$.

Пусть $H(z)$ — произвольная гладкая функция из $C^\infty(P)$. Рассмотрим на пуассоновом многообразии P гамильтонову систему с начальным условием:

$$\dot z^i=\{H(z),z^i\},\quad z^i|_{t=0}=z^i_0. \tag{5.1}$$

Система (5.1) реализует однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\gamma_t : P \to P$, которая естественным образом индуцирует динамику на касательном расслоении TP многообразия P. Обозначим через δz_0 касательный вектор в точке $z_0 \in P$. Тогда

$$(\gamma_t)_* : \ \delta z_0 \to \delta z = (\gamma_t)_* \, \delta z_0, \quad \delta z_0 \in T_{z_0}P, \quad \delta z \in T_z P, \quad z = \gamma_t \, z_0. \tag{5.2}$$

В локальных координатах $\{z^i\}$ отображение (5.2) представляет собой решение системы уравнений

$$\delta \dot{z}^i = \frac{\partial}{\partial z^k} \{H(z), z^i\} \, \delta z^k, \quad \delta z^i|_{t=0} = \delta z_0^i, \tag{5.3}$$

которая в линейном приближении описывает возмущение интегральной траектории гамильтоновой системы (5.1) при изменении начальных условий на величину $\delta z_0 \in T_{z_0}P$. Систему дифференциальных уравнений (5.3) будем называть *гамильтоновой системой в вариациях*.

Определение 5.1. Отображение $\delta \colon C^\infty(P) \to C^\infty(TP)$, определяемое как $\delta\varphi \equiv \langle d\varphi, \delta z\rangle$ для любых $\delta z \in T_z P$, $\varphi \in C^\infty(P)$, будем называть *вариацией*, а соответствующий образ $\delta\varphi$ — *вариацией* функции φ.

Очевидно, что вариация всякой функции из $C^\infty(P)$ линейна на слоях $T_z P$, $z \in P$.

Утверждение 5.1. *На пространстве касательного расслоения TP пуассонова многообразия $(P, \{\cdot,\cdot\})$ существует индуцированная пуассонова структура $\{\cdot,\cdot\}_T$, которая в локальных координатах $(z^i, \delta z^i)$ имеет вид*

$$\{F, G\}_T(z, \delta z) = \sum_{i,j,k=1}^{\dim P} \left(\frac{\partial \omega^{ij}(z)}{\partial z^k} \, \delta z^k \, \frac{\partial F(z,\delta z)}{\partial\, \delta z^i} \frac{\partial G(z,\delta z)}{\partial\, \delta z^j} + \omega^{ij}(z) \, \frac{\partial F(z,\delta z)}{\partial\, \delta z^i} \, \frac{\partial G(z,\delta z)}{\partial z^j} + \right.$$
$$\left. + \omega^{ij}(z) \, \frac{\partial F(z,\delta z)}{\partial z^i} \, \frac{\partial G(z,\delta z)}{\partial\, \delta z^j} \right), \quad F, G \in C^\infty(TP). \tag{5.4}$$

Действительно, прямой проверкой легко убедиться, что скобка (5.4) удовлетворяет правилу Лейбница и тождеству Якоби, что и доказывает данное утверждение.

Замечание 5.1. Отметим, что следуя работам [216, 217], пуассонову структуру (5.4) можно также рассматривать как порождаемую бивекторным полем

$$\delta\omega \equiv \omega^{ij}(z) \, \frac{\partial}{\partial z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial z^j} + \omega^{ij}(z) \left(\frac{\partial}{\partial\, \delta z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial}{\partial z^i} \wedge \frac{\partial}{\partial\, \delta z^j} \right),$$

являющимся лифтом пуассонового бивекторного поля $\omega = \omega^{ij}(z)(\partial/\partial z^i) \wedge (\partial/\partial z^j)$.

Пусть φ, ψ – произвольные функции из $C^\infty(P)$, $\delta\varphi$ и $\delta\psi$ – их соответствующие вариации. Из определения (5.4) легко вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Пусть $\varphi, \psi \in C^\infty(P)$. Индуцированная скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_T$ обладает следующими свойствами:*

$$\{\varphi, \psi\}_T = 0; \tag{5.5}$$

$$\{\delta\varphi, \psi\}_T = \{\varphi, \delta\psi\}_T = \{\varphi, \psi\}; \tag{5.6}$$

$$\{\delta\varphi, \delta\psi\}_T = \delta\{\varphi, \psi\}. \tag{5.7}$$

Доказательство утверждения сводится к прямой проверке равенств (5.5) – (5.7).

Индуцированная пуассонова структура $\{\cdot, \cdot\}_T$ позволяет представить гамильтонову систему (5.1) и отвечающую ей систему в вариациях (5.3) в виде новой гамильтоновой системы на пространстве касательного расслоения TP. Действительно, используя свойства (5.6) и (5.7), получаем

$$\dot{z}^i = \{H, z^i\} = \{\delta H, z^i\}_T, \quad \delta\dot{z}^i = \delta\{H, z^i\} = \{\delta H, \delta z^i\}_T. \tag{5.8}$$

Очевидно, что система (5.8) является гамильтоновой относительно скобки Пуассона (5.4) с гамильтонианом δH. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.1. *Пусть $H(z)$ – некоторая гладкая функция на пуассоновом многообразии $(P, \{\cdot, \cdot\})$. Соответствующая этой функции гамильтонова система* (5.1) *вместе с гамильтоновой системой в вариациях* (5.3) *представляют собой гамильтонову систему на пуассоновом многообразии $(TP, \{\cdot, \cdot\}_T)$ с гамильтонианом $\delta H \in C^\infty(TP)$.*

Рассмотрим примеры индуцированной пуассоновой структуры $\{\cdot, \cdot\}_T$ на некоторых часто встречающихся классах пуассоновых многообразий.

Пример 5.1. (Кокасательное расслоение T^*M). Естественная пуассонова структура на $2m$-мерном многообразии $P = T^*M$ задается с помощью симплектической 2-формы $\omega = dp_a \wedge dx^a$, где $(x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m)$ – локальная система координат в T^*M. При этом скобка Пуассона в $C^\infty(T^*M)$, отвечающая симплектической форме ω, имеет вид

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{a=1}^{\dim M} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_a} \frac{\partial\psi}{\partial x^a} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^a} \frac{\partial\psi}{\partial p_a} \right). \tag{5.9}$$

В слое $T_{(x,p)}(T^*M)$ введем линейные координаты $(\delta x^1, \dots, \delta x^m, \delta p_1, \dots, \delta p_m)$. Тогда скобка Пуассона на $T(T^*M)$, индуцируемая пуассоновой структурой (5.9), дается формулой

$$\{F, G\}_T = \sum_{a=1}^{\dim M} \left(\frac{\partial F}{\partial\,\delta p_a} \frac{\partial G}{\partial x^a} - \frac{\partial F}{\partial\,\delta x^a} \frac{\partial G}{\partial p_a} + \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial G}{\partial\,\delta x^a} - \frac{\partial F}{\partial x^a} \frac{\partial G}{\partial\,\delta p_a} \right). \tag{5.10}$$

В частности, ненулевые координатные скобки Пуассона для (5.10) записываются как

$$\{\delta p_a, x^b\}_T = \{p_a, \delta x^b\}_T = \delta_a^b.$$

Нетрудно видеть, что скобка Пуассона (5.10) невырожденна и наделяет пространство касательного расслоения $T(T^*M)$ структурой симплектического многообразия:

$$\delta\theta = \delta p_a dx^a + p_a d\delta x^a, \quad \delta\omega \equiv d(\delta\theta) = d\delta p_a \wedge dx^a + dp_a \wedge d\delta x^a. \tag{5.11}$$

Пример 5.2. (Дуальное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{g}$). Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная n-мерная алгебра Ли. Рассмотрим дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ с определенной на нем скобкой Ли–Пуассона (2.12). Пусть f_i — линейные координаты ковектора $f \in \mathfrak{g}^*$, заданные относительно базиса $\{e^i\}$ в $\mathfrak{g}^*$, дуального к некоторому базису $\{e_i\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Обозначим через δf_i координаты касательного вектора δf, принадлежащего пространству $T_f\,\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}^*$. Тогда согласно (5.4) скобка Ли – Пуассона индуцирует в $T(\mathfrak{g}^*) \simeq \mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^*$ пуассонову структуру со скобкой

$$\{F, G\}_T = \sum_{i,j,k=1}^{\dim \mathfrak{g}} C_{ij}^k \left(\delta f_k \frac{\partial F}{\partial\, \delta f_i} \frac{\partial G}{\partial\, \delta f_j} + f_k \frac{\partial F}{\partial\, \delta f_i} \frac{\partial G}{\partial f_j} + f_k \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial G}{\partial\, \delta f_j} \right). \tag{5.12}$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i\}$. В частности координатные скобки Пуассона даются формулами

$$\{f_i, f_j\}_T = 0, \quad \{f_i, \delta f_j\}_T = \{\delta f_i, f_j\}_T = C_{ij}^k\, f_k, \quad \{\delta f_i, \delta f_j\}_T = C_{ij}^k\, \delta f_k. \tag{5.13}$$

Заметим, что линейные функции на $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}^* \simeq (\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})^*$ (которые можно рассматривать как элементы пространства $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$), относительно скобки Пуассона (5.12) образуют некоторую пуассонову подалгебру, которая задает в $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ структуру алгебры Ли с коммутационными соотношениями (5.13). Нетрудно видеть, что данная алгебра Ли представляет собой полупрямую сумму исходной алгебры $\mathfrak{g} = \{\delta f_i\}$ и n-мерного абелевого идеала $\mathbb{R}^n = \{f_i\}$.

§ 5.2 Уравнение Якоби как вариация геодезического потока

Пусть (M, g) – гладкое m-мерное псевдориманово многообразие, $(x^1, \ldots, x^m)$, $(p_1, \ldots, p_m)$ – локальные координаты на многообразии M и в слое T_x^*M соответственно. Рассмотрим гамильтонову систему на T^*M, задающую геодезический поток метрики g_{ab}:

$$\dot{x}^a = \{H, x^a\}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}, \quad H(x, p) = \frac{1}{2}\, g^{ab}(x) p_a p_b. \tag{5.14}$$

Здесь $\{\cdot, \cdot\}$ — стандартная скобка Пуассона на T^*M, задаваемая равенством (5.9).

Пусть $x^a = x^a(s)$ – геодезическая на M, параметризованная натуральным параметром s. Векторное поле $\zeta^a(s) \subset T_{x(s)}M$, заданное вдоль геодезической, называется *полем Якоби*, если оно является решением следующего дифференциального уравнения второго порядка [207]:

$$\nabla_{\dot{x}}^2\, \zeta^a + R_{bcd}^a\, \dot{x}^b \dot{x}^c \zeta^d = 0. \tag{5.15}$$

Здесь $\nabla_{\dot{x}}$ – оператор ковариантного дифференцирования вдоль поля $\dot{x}^a$, R_{bcd}^a – компоненты тензора кривизны псевдориманова многообразия. Уравнение (5.15) называется *уравнением Якоби*.

Используя естественный изоморфизм пространств T^*M и TM, устанавливаемый преобразованием Лежандра $p_a = g_{ab}\,\dot{x}^b$, можно показать, что уравнение (5.15) эквивалентно гамильтоновой системе в вариациях

$$\delta\dot{x}^a = \delta\{H, x^a\}, \quad \delta\dot{p}_a = \delta\{H, p_a\}, \tag{5.16}$$

где

$$\delta x^a = \zeta^a, \quad \delta p_a = g_{ab}\,\dot{\zeta}^b + \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c}\,\dot{x}^b\zeta^c,$$

причем зависимость переменных x^a и p_a от натурального параметра s определяется системой (5.14).

Используя результаты предыдущего параграфа, зададим в пространстве $T(T^*M)$ структуру симплектического многообразия с симплектической 2-формой (5.11) и соответствующей скобкой Пуассона (5.10). Согласно теореме 5.1 геодезический поток (5.14) вместе с соответствующей системой в вариациях (5.16) представляет собой расширенную гамильтонову систему вида

$$\dot{x}^a = \{\delta H, x^a\}_T = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = \{\delta H, p_a\}_T = -\frac{\partial H}{\partial x^a}, \tag{5.17}$$

$$\delta\dot{x}^a = \{\delta H, \delta x^a\}_T = \frac{\partial\,\delta H}{\partial p_a}, \quad \delta\dot{p}_a = \{\delta H, \delta p_a\}_T = -\frac{\partial\,\delta H}{\partial x^a}, \tag{5.18}$$

где

$$\delta H(x,p) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g^{ab}}{\partial x^c}\,\delta x^c p_a p_b + g^{ab} p_a \delta p_b. \tag{5.19}$$

На многообразии TM рассмотрим симметрическое ковариантное тензорное поле 2-го ранга $\tilde{g}$, которое в локальных координатах $(x^a, \delta x^a)$ имеет вид

$$\tilde{g} = g_{ab}\left(dx^a \otimes d\delta x^b + d\delta x^a \otimes dx^b\right) - g_{ac}\,g_{bd}\,\frac{\partial g^{cd}}{\partial x^e}\,\delta x^e\, d\delta x^a \otimes d\delta x^b. \tag{5.20}$$

В силу того, что g_{ab} представляют собой компоненты метрического тензора на M, тензорное поле (5.20) невырожденно, и поэтому определяет на TM некоторую псведориманову метрику. Нетрудно видеть, что гамильтониан геодезического потока данной метрики в точности совпадает с функцией (5.19). Таким образом, система уравнений (5.17), (5.18) является гамильтоновой системой геодезического потока метрики (5.20).

Определение 5.2. Геодезический поток метрики (5.20) на TM будем называть *расширенным геодезическим потоком*.

Предположим, что функция $I(x,p)$ является интегралом движения гамильтоновой системы (5.14), то есть $\{H, I\} = 0$. В соответствие со свойством (5.6) имеем

$$\{\delta H, I\}_T = \{H, I\} = 0,$$

то есть функция $I(x,p)$ представляет собой интеграл движения гамильтоновой системы (5.17), (5.18). Кроме того, функция $I(x,p)$ доставляет этой гамильтоновой системе еще один интеграл движения, а именно, согласно свойству (5.7) соответствующая вариация δI также будет иметь нулевую скобку Пуассона с функцией δH:

$$\{\delta H, \delta I\}_T = \{H, I\} = 0.$$

Легко также видеть, что $\{I, \delta I\}_T = 0$, причем интегралы движения I и δI являются функционально независимыми на $T(T^*M)$.

Допустим, что гамильтонова система (5.14) является интегрируемой по Лиувиллю. Это означает, что данная система уравнений имеет $m = \dim M$ функционально независимых интегралов движения $I_1, \dots, I_m$, находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$:

$$\{H, I\} = 0, \quad \{I_a, I_b\} = 0, \quad a, b = 1, \dots, m.$$

Из вышесказанного следует, что дополняя данный набор интегралов движения соответствующими вариациями $\delta I_1, \dots, \delta I_m$, мы увеличиваем число интегралов движения гамильтоновой системы (5.17), (5.18) до $2m$. При этом набор функций $I_1, \dots, I_m$, $\delta I_1, \dots, \delta I_m$ является, очевидно, функционально независимым и инволютивным относительно скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_T$. Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 5.3. *Если геодезический поток на (M, g) является интегрируемым по Лиувиллю, то тем же свойством будет обладать и соответствующий расширенный геодезический поток на $(TM, \tilde{g})$.*

Таким образом, интегрируемость расширенного геодезического потока на TM в коммутативном смысле является следствием коммутативной интегрируемости исходного геодезического потока на многообразии M. Оказывается, что подобный факт будет иметь место и в более общем случае, когда исходный геодезический поток допускает полную, вообще говоря, некоммутативную пуассонову алгебру интегралов движения. В следующем разделе мы подробно проиллюстрируем данный тезис на примере геодезических потоков на однородных пространствах с инвариантными и субмерсными псевдоримановыми метриками.

§ 5.3 Интегрируемость уравнения Якоби на однородных пространствах

Пусть G — связная вещественная n-мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. На пространстве касательного расслоения TG группы G существует естественная групповая структура, которая строится следующим образом [218]. Обозначим через $\delta g \in T_g G$ касательный вектор в точке $g \in G$ и рассмотрим на TG следующую бинарную операцию:

$$(g_1, \delta g_1)(g_2, \delta g_2) = (g_1 g_2,\ (R_{g_2})_* \,\delta g_1 + (L_{g_1})_* \,\delta g_2). \tag{5.21}$$

Здесь $R_g : G \to G$ и $L_g : G \to G$ — операторы правого и левого сдвигов, соответствующие элементу $g \in G$. Легко проверить, что данная бинарная операция определяет на TG структуру группы Ли, которую мы обозначим через $\tilde{G}$. При этом единицей в $\tilde{G}$ является пара $(e, 0)$, а обратное групповое отображение задается правилом

$$(g, \delta g)^{-1} = (g^{-1}, -(L_{g^{-1}})_* \,(R_{g^{-1}})_* \,\delta g).$$

Замечание 5.2. Как следует из закона композиции (5.21), группа $\tilde{G}$ представляет собой полупрямое произведение группы G и n-мерной абелевой группы $\mathbb{R}^n$. Действительно, между TG и $G \times \mathfrak{g}$ имеется естественный изоморфизм $\iota : TG \to G \times \mathfrak{g}$, определяемый как $\iota(g, \delta g) = (g, (L_{g^{-1}})_* \,\delta g)$. Используя данный изоморфизм мы можем представить закон группового умножения (5.21) в виде

$$(g_1, X_1)(g_2, X_2) = (g_1 g_2, \mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} X_1 + X_2), \quad g_1, g_2 \in G, \quad X_1, X_2 \in \mathfrak{g}.$$

В некоторой окрестности единицы группы G закон группового умножения описывается с помощью функции композиции $z^i = \Phi^i(z_1, z_2)$, где $z_1 = (z_1^1, \ldots, x_1^n)$, $z_2 = (z_2^1, \ldots, z_2^n)$ и $z = (z^1, \ldots, z^n)$ — локальные координаты элементов g_{z_1}, g_{z_2} и $g_{z_1} g_{z_2}$ соответственно. Как следует из (5.21), в качестве функции композиции в группе $\tilde{G}$ мы можем выбрать $2n$-компонентую функцию $\tilde{\Phi}(z_1, \delta z_1; z_2, \delta z_2)$, определяемую как

$$\tilde{\Phi}^i(z_1, \delta z_1; z_2, \delta z_2) = \Phi^i(z_1, z_2), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{5.22}$$

$$\tilde{\Phi}^{i+n}(z_1, \delta z_1; z_2, \delta z_2) = \frac{\partial \Phi^i(z_1, z_2)}{\partial z_1^k} \,\delta z_1^k + \frac{\partial \Phi^i(z_1, z_2)}{\partial z_2^k} \,\delta z_2^k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.23}$$

В алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$ выберем базис вида $\{e_i \equiv \partial_{\delta z^i}|_{\delta z=0}\} \cup \{\delta e_i \equiv \partial_{z^i}|_{z=0}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Используя выражения (5.22) и (5.23), нетрудно выписать коммутационные соотношения между базисными векторами e_i и δe_i:

$$[e_i, e_j] = 0, \quad [e_i, \delta e_j] = [\delta e_i, e_j] = C_{ij}^k \,e_k, \quad [\delta e_i, \delta e_j] = C_{ij}^k \,\delta e_k.$$

Здесь $C_{ij}^k \equiv \partial_{z_1^i} \partial_{z_2^j} \,\Phi^k(z_1, z_2)|_{z_1 = z_2 = 0}$ — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$. Из приведенных коммутационных соотношений в частности видно, что алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ представляет собой полупрямую сумму алгебры $\mathfrak{g} \simeq \{\delta e_i\}$ и n-мерного абелева идеала $\mathbb{R}^n \simeq \{e_i\}$ (ср. с формулами (5.13)).

Используя формулы (5.22) и (5.23) нетрудно также выписать явный вид лево- и правоинвариантных векторных полей на группе $\tilde{G}$:

$$\tilde{\xi}_i = \xi_i^j(z)\partial_{\delta z^j}, \quad \delta\tilde{\xi}_i = \xi_i^j(z)\partial_{z^i} + \frac{\partial \xi_i^j(z)}{\partial z^k}\,\delta z^k\,\partial_{\delta z^j}; \tag{5.24}$$

$$\tilde{\eta}_i = \eta_i^j(z)\partial_{\delta z^j}, \quad \delta\tilde{\eta}_i = \eta_i^j(z)\partial_{z^i} + \frac{\partial \eta_i^j(z)}{\partial z^k}\,\delta z^k\,\partial_{\delta z^j}. \tag{5.25}$$

Здесь $\xi_i^j(z)$ и $\eta_i^j(z)$ — координатные компоненты лево- и правоинвариантных векторных полей ξ_i и η_i на группе G соответственно. При этом легко видеть, что векторные поля ξ_i и η_i являются образами векторных полей $\delta\tilde{\xi}_i$ и $\delta\tilde{\eta}_i$ при канонической проекции $\sigma : TG \to G$:

$$\xi_i = \sigma_*\,\delta\tilde{\xi}_i, \quad \eta_i = \sigma_*\,\delta\tilde{\eta}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть H — замкнутая подгруппа группы G, $M = H\setminus G$ — правое однородное пространство, π — естественная проекция группы G на пространство правых смежных классов $H\setminus G$, s — сечение главного расслоения (G, M, π, H), то есть отображение $s : M \to G$ такое, что $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Обозначим через $T_g : M \to M$ преобразование, отвечающее групповому элементу $g \in G$, и определим действие группы $\tilde{G}$ на пространстве касательного расслоения TM с помощью следующего правила:

$$(x, \delta x)(g, \delta g) \equiv (T_g(x), (T_g)_*\,\delta x + \pi_*\,[L_{s(x)}]_*\,\delta g), \quad (x, \delta x) \in TM, \quad (g, \delta g) \in TG. \tag{5.26}$$

Нетрудно проверить, что данное определение не зависит от выбора сечения $s : G \to M$.

Пусть $\{x^a\}$, $a = 1, \dots, \dim M$, — некоторая локальная система координат на M, $\{h^\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, \dim H$, — координаты в подгруппе изотропии H. Рассматривая набор переменных $\{z^i\} = \{x^a\} \cup \{h^\alpha\}$ как локальные координаты на группе G, выберем сечение $s : M \to G$ так, что $s^a(x, h) = x^a$, $s^\alpha(x, h) = 0$. Тогда в выбранной системе координат действие (5.26) записывается в виде

$$\tilde{x}^a = \Psi^a(x, z), \quad \delta\tilde{x}^a = \frac{\partial \Psi^a(x, z)}{\partial x^b}\,\delta x^b + \frac{\partial \Psi^a(x, z)}{\partial z^i}\,\delta z^i.$$

Здесь $\Psi(x, z)$ — функция действия группы G на однородном пространстве M. Используя полученные выражения, выпишем инфинитезимальные генераторы действия группы $\tilde{G}$ на TM, отвечающие базисным векторам $e_i \equiv \partial_{\delta z^i}|_{\delta z=0}$ и $\delta e_i \equiv \partial_{z^i}|_{z=0}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\zeta}_i = \zeta_i^a(x)\partial_{\delta x^a}, \quad \delta\tilde{\zeta}_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a} + \frac{\partial \zeta_i^a(x)}{\partial x^a}\,\delta x^b\,\partial_{\delta x^a}. \tag{5.27}$$

Здесь $\zeta_i^a(x) = \partial_{z^i}\Psi^a(x, z)|_{z=0}$ — координатные компоненты инфинитезимальных генераторов действия группы G.

По определению действие группы G на M — транзитивное, поэтому $\operatorname{rank}\|\zeta_i^a(x)\| = \dim M$ для любой точки $x \in M$. Но отсюда следует, что решениями системы уравнений

$$\tilde{\zeta}_i\,\varphi = 0, \quad \delta\tilde{\zeta}_i\,\varphi = 0, \quad \varphi \in C^\infty(TM),$$

являются постоянные функции на TM и только они, что означает транзитивность действия (5.26). Пусть $x_0 = \pi(e)$ — точка на M, неподвижная относительно действия элементов из подгруппы H. Легко видеть, что группой стационарности $\tilde{H}$ точки $(x_0, 0) \in TM$ для действия (5.26) будет подгруппа в $\tilde{G}$, образованная парами $(h, \delta h)$, где $h \in H$, $\delta h \in T_h H$. Иными словами, группа $\tilde{H}$ как подмногообразие в TG совпадает с пространством касательного расслоения TH подгруппы $H \subset G$. Как следствие, мы имеем следующий $\tilde{G}$-эквивариантный диффеоморфизм: $TM \simeq \tilde{H} \setminus \tilde{G}$.

Пусть на однородном пространстве M задана псевдориманова метрика g, инвариантная относительно действия группы G. Согласно результатам § 5.2 уравнение Якоби на псевдоримановом многообразии (M, g) эквивалентно гамильтоновой системе уравнений геодезического потока на расширенном псевдоримановом многообразии $(TM, \tilde{g})$, где метрика $\tilde{g}$ определяется согласно формуле (5.20).

Утверждение 5.4. *Пусть на однородном пространстве $M = H \setminus G$ задана G-инвариантная псевдориманова метрика g. Тогда метрика $\tilde{g}$, заданная на пространстве касательного расслоения TM в соответствие с формулой* (5.20)*, является инвариантной относительно соответствующего действия* (5.26) *группы $\tilde{G}$ на TM.*

Доказательство. Докажем данное утверждение в рамках гамильтонового формализма.

В силу связности группы G инвариантность метрики g равносильна требованию $\mathscr{L}_{\zeta_i} g_{ab} = 0$, где $\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}$ — инфинитезимальные генераторы действия группы G на однородном пространстве M, $i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. В свою очередь, указанное требование эквивалентно условию

$$\{H, X_i\} = 0, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g},$$

где $H = \frac{1}{2}\, g^{ab} p_a p_b$ — гамильтониан геодезического потока метрики g, $X_i = \zeta_i^a(x) p_a$, $\{\cdot, \cdot\}$ — каноническая скобка Пуассона в $C^\infty(T^*M)$.

Генераторам (5.27) действия группы $\tilde{G}$ на TM поставим в соответствие набор функций из $C^\infty(T(T^*M))$

$$X_i = \langle \delta\theta, \tilde{\zeta}_i \rangle = \zeta_i^a(x) p_a, \quad \delta X_i = \langle d\theta, \delta\tilde{\zeta}_i \rangle = \zeta_i^a(x)\delta p_a + \frac{\partial \zeta_i^a(x)}{\partial x^b}\, \delta x^b\, p_a, \tag{5.28}$$

Используя свойства (5.6) и (5.7) немедленно получаем

$$\{\delta H, X_i\}_T = \{H, X_i\} = 0, \quad \{\delta H, \delta X_i\}_T = \delta\{H, X_i\} = 0. \tag{5.29}$$

Здесь δH — гамильтониан расширенного геодезического потока на TM, записываемый в виде (5.19). Осталось заметить, что равенства (5.29) эквивалентны условию инвариантности метрики (5.20) относительно действия группы $\tilde{G}$ на TM. □

Таким образом, геодезический поток и соответствующее ему уравнение Якоби на однородном пространстве $M = H \setminus G$ с инвариантной метрикой эквивалентны расширенному геодезическому потоку на однородном пространстве $TM = \tilde{H} \setminus \tilde{G}$ с метрикой, которая является инвариантной относительно действия группы $\tilde{G}$.

Рассмотрим теперь метрики субмерсии. Гамильтониан $H(x,p)$ произвольной метрики субмерсии на $M = H \setminus G$ записывается в виде (4.66), поэтому для гамильтониана (5.19) соответствующего расширенного геодезического потока получаем

$$\delta H(x,p) = \mathbf{G}^{ij}\zeta_i^a(x)p_a\left(\frac{\partial\zeta_j^b(x)}{\partial x^c}\,p_b + \zeta_j^b(x)\delta p_b\right).$$

Используя соотношения (5.28) мы можем переписать полученное выражение в виде

$$\delta H(x,p) = \mathbf{G}^{ij}X_i(x,p)\delta X_j(x,p), \tag{5.30}$$

откуда вытекает, что $\delta H(x,p)$ представляет собой гамильтониан метрики субмерсии на однородном пространстве TM (так как он является квадратичной комбинацией функций X_i и δX_i). Таким образом, мы доказали следующее

Утверждение 5.5. *Пусть на однородном пространстве $M = H \setminus G$ задана метрика субмерсии g. Тогда метрика* (5.20) *будет являться метрикой субмерсии на однородном пространстве $TM = \tilde{H} \setminus \tilde{G}$.*

Следовательно, геодезический поток и соответствующее ему уравнение Якоби на однородном пространстве $M = H \setminus G$ с произвольной метрикой субмерсии эквивалентны расширенному геодезическому потоку относительно метрики, которая, в свою очередь, будет являться метрикой субмерсии на однородном пространстве $TM = \tilde{H} \setminus \tilde{G}$.

Выше мы уже отмечали тот факт, что интегрируемость уравнения Якоби на псевдоримановом многообразии M является следствием интегрируемости уравнения геодезических. Иными словами, условие интегрируемости исходного геодезического потока на T^*M будет являться и условием интегрируемости соответствующей ему расширенной гамильтоновой системы на $T^*(TM)$. В этой связи интерес представляет следующая проблема: как зная интегральные траектории исходного геодезического потока построить интегральные траектории соответствующего ему расширенного геодезического потока? Оказывается, что на однородных пространствах с инвариантными и субмерсными метриками наиболее эффективное решение данной проблемы сводится к использованию специального канонического преобразования в T^*M, описанного нами в § 4.3.

Зафиксируем некоторый ковектор $p^0 \in T^*_{x_0}M$. В окрестности элемента $\pi^*(p^0) \in \mathfrak{h}^\perp$ введем гладкую параметризацию коприсоединенных орбит s_M-типа: $\lambda = \lambda(J)$, где $J = (J_1, \ldots, J_{\operatorname{ind}\mathscr{F}})$ — $\operatorname{ind}\mathscr{F}$-мерный вещественный параметр. (Напомним, что через $\operatorname{ind}\mathscr{F}$ мы обозначаем индекс пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$ инвариантных функций на T^*M). Обозначим через (u, v) канонические координаты на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)} \subset \operatorname{Ad}^*_G \mathfrak{h}^\perp$, а через (u', v') — канонические координаты на соответствующем симплектическом листе $\tilde{O}_{\sigma(J)} \subset \mathscr{F}^*$ пуассоновой алгебры $\mathscr{F}$. Тогда в некоторой окрестности точки $(x_0, p^0) \in T^*M$ определено специальное каноническое преобразование, сводящееся к переходу от координат (x, p) к новым координатам (u, v, u', v', J, τ), где τ — величины, канонически сопряженные координатам J. Обозначим $S(x; v, u', J)$ производящую функцию данного канонического преобразования, выраженную в координатах x, v, u', J. По определению имеем

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial q} \right\| \neq 0, \quad q = (v, u', J).$$

Рассмотрим вариацию производящей функции $S(x; v, u', J)$:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x^a}\, \delta x^a + \frac{\partial S}{\partial v^{\bar{a}}}\, \delta v^{\bar{a}} + \frac{\partial S}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}\, \delta u'_{\bar{\alpha}} + \frac{\partial S}{\partial J_\mu}\, \delta J_\nu. \tag{5.31}$$

В силу того, что

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \delta S}{\partial x\, \partial q} & \dfrac{\partial^2 \delta S}{\partial x\, \partial \delta q} \\ \dfrac{\partial^2 \delta S}{\partial \delta x\, \partial q} & \dfrac{\partial^2 \delta S}{\partial \delta x\, \partial \delta q} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} * & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial q} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial q} & 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial q} \right|^2 \neq 0,$$

функция (5.31) может быть рассмотрена как производящая функция некоторого канонического преобразования в $T^*(TM)$, сводящегося к переходу от координат $(x, \delta x, p, \delta p)$ к новым локальным координатам $(q, \delta q) = (u, v, u', v', J, \tau, \delta u, \delta v, \delta u', \delta v', \delta J, \delta\tau)$. С учетом того, что симплектическая структура в $T^*(TM)$ имеет вид (5.11), данный переход неявно задается следующей системой равенств

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial x^a}, \quad \delta p_a = \frac{\partial \delta S}{\partial x^a}, \tag{5.32}$$

$$u_{\bar{a}} = -\frac{\partial S}{\partial v^{\bar{a}}}, \quad v'^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial S}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}, \quad \tau^\mu = \frac{\partial S}{\partial J_\mu}, \tag{5.33}$$

$$\delta u_{\bar{a}} = -\frac{\partial\, \delta S}{\partial v^{\bar{a}}}, \quad \delta v'^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial\, \delta S}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}, \quad \delta\tau^\mu = \frac{\partial\, \delta S}{\partial J_\mu}. \tag{5.34}$$

Следствиями этих равенств являются соотношения, являющиеся расширенной версией системы уравнений (4.43), (4.44):

$$X_i(x, p) = f_i(u, v, J), \quad \delta X_i(x, p, \delta x, \delta p) = \delta f_i(u, v, J, \delta u, \delta v, \delta J), \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}; \tag{5.35}$$

$$Y_\beta(x,p) = a_\beta(u',v',J), \quad \delta Y_\beta(x,p) = \delta a_\beta(u',v',J,\delta u',\delta v',\delta J), \quad \beta = 1,\dots,\dim\mathscr{F}. \tag{5.36}$$

Заметим, что функции Y_β и их вариации δY_β являются функциями из $C^\infty(T^*(TM))$, инвариантными относительно действия группы $\tilde{G}$. Действительно, если $\{\cdot,\cdot\}_T$ — скобка Пуассона, соответствующая симплектической структуре (5.11) на $T^*(TM)$, то согласно свойствам (5.5) – (5.7)

$$\{Y_\beta, X_i\}_T = 0, \quad \{Y_\beta, \delta X_i\}_T = \{Y_\beta, X_i\} = 0,$$

$$\{\delta Y_\beta, X_i\}_T = \{Y_\beta, X_i\} = 0, \quad \{\delta Y_\beta, \delta Y_i\}_T = \delta\{Y_\beta, X_i\} = 0.$$

Пусть $H(x,p)$ — гамильтониан инвариантной метрики на $M = H\setminus G$. Тогда он может быть представлен в виде (4.49), откуда для вариации δH будем иметь

$$\delta H(x,p,\delta x,\delta) = \delta\mathscr{H}(Y(x,p),\delta Y(x,p,\delta x,\delta p)),$$

где

$$\delta\mathscr{H}(a,\delta a) = \frac{\partial\mathscr{H}(a)}{\partial a^\beta}\,\delta a_\beta.$$

Используя соотношения (5.36) получаем, что после канонического преобразования (5.35) – (5.34) гамильтониан δH перейдет в функцию

$$\delta\tilde{H}(u',v',J,\delta u',\delta v',\delta J) = \delta\mathscr{H}(a(u',v',J),\delta a(u',v',J,\delta u',\delta v',\delta J)). \tag{5.37}$$

Заметим, что у гамильтоновой системы с гамильтонианом (5.37) всегда имеется еще два интеграла движения — это функция $\tilde{H}(u',v',J) = \mathscr{H}(a(u',v',J))$ и сам гамильтониан (5.37). Учитывая теперь, что число переменных u (или v) равно дефекту d_M однородного пространства, приходим к следующей теореме.

Теорема 5.2. *Расширенный геодезический поток на TM, соответствующий произвольной инвариантной псевдоримановой метрике однородного пространства M, редуцируется к $4d_M$-мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $d_M < 2$.*

Рассмотрим теперь гамильтониан $H(x,p)$ метрики субмерсии на $M = H\setminus G$. Ввиду того, что гамильтониан соответствующего расширенного геодезического потока имеет вид (5.30), после применения канонического преобразования (5.35) – (5.34) мы получаем гамильтонову систему с гамильтонианом

$$\delta\tilde{H}(u,v,J,\delta u,\delta v,\delta J) = \delta\mathscr{H}(f(u,v,J),\delta f(u,v,J,\delta u,\delta v,\delta J)),$$

где

$$\delta\mathscr{H}(f,\delta f) = \mathbf{G}^{ij} f_i\,\delta f_j.$$

Рассуждая таким же образом, что и в случае инвариантной метрики, легко видеть, что справедлива

Теорема 5.3. *Расширенный геодезический поток на TM, соответствующий произвольной псевдоримановой метрике субмерсии однородного пространства M, редуцируется к гамильтоновой системе с $2(\dim\mathfrak{g}-\operatorname{ind}\mathfrak{g})-4s_M$ независимыми переменными, в частности, интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда $(\dim\mathfrak{g}-\operatorname{ind}\mathfrak{g})/2-s_M<2$.*

§ 5.4 Пример: интегрирование уравнения Якоби на плоскости Лобачевского

Проиллюстрируем изложенный выше формализм на примере интегрирования геодезического потока и уравнения Якоби на двумерной псевдосфере с метрикой Лобачевского.

Рассмотрим трехмерное псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,2}$ с координатами (x_0, x_1, x_2) и с метрикой $dl^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2$. Псевдосфера радиуса $R = 1$ в пространстве $\mathbb{R}^{1,2}$ задается уравнением

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{5.38}$$

и является двуполостным гиперболоидом в обычном трехмерном пространстве. Будем в дальнейшем рассматривать только верхнюю полу.

Обозначим через (u, v) координаты точки (x_0, x_1, x_2) на псевдосфере, полученные в результате стереографической проекции на плоскость xy:

$$u = \frac{x_1}{1+x_0}, \quad v = \frac{x_2}{1+x_0}.$$

Как нетрудно видеть, область определения координат (u, v) есть единичный открытый круг $u^2 + v^2 < 1$. Прямыми вычислениями получаем, что ограничение псевдоевклидовой метрики dl^2 на псевдосферу (5.38) в координатах u и v принимает вид

$$-ds^2 = \frac{4}{(u^2+v^2-1)^2}\left(du^2 + dv^2\right). \tag{5.39}$$

Метрика ds^2 на открытом единичном круге $u^2 + v^2 < 1$ называется метрикой *модели Пуанкаре* плоскости Лобачевского L^2.

Примем обозначение $z = u + iv$ и рассмотрим дробно-линейное преобразование комплексной плоскости вида

$$w = \frac{i(1-z)}{1+z},$$

переводящее единичный круг в верхнюю полуплоскость. Если мы положим $w = x + iy$, то тем самым мы введем на псевдосфере новые координаты (x, y), где $y > 0$. Легко проверить, что метрика ds^2 в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0. \tag{5.40}$$

Метрика (5.40) называется метрикой *модели Клейна* плоскости Лобачевского L^2.

Алгебра $\mathfrak{g}$ векторов Киллинга данной метрики легко находится решением системы уравнений Киллинга $\mathscr{L}_\zeta g_{ab} = 0$ относительно неизвестного векторного поля $\zeta = \zeta^a \partial_a$ (здесь $\mathscr{L}_\zeta$ – производная Ли вдоль векторного поля ζ). В качестве базиса пространства решений указанной системы можно, например, выбрать набор векторных полей

$$\zeta_1 = (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \quad \zeta_2 = x\partial_x + y\partial_y, \quad \zeta_3 = \partial_x.$$

Непосредственно проверяется, что коммутационные соотношения полученной алгебры векторов Киллинга имеют вид

$$[\zeta_1, \zeta_2] = -\zeta_1, \quad [\zeta_1, \zeta_3] = -2\zeta_2, \quad [\zeta_2, \zeta_3] = -\zeta_3.$$

Очевидно, что алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{so}(1,2)$.

В силу равенства $\operatorname{rank} \|\zeta_i^a(x)\| = 2$, группа $G = SO(1,2)$ движений метрики (5.40) действует на плоскости Лобачевского транзитивно. В частности, подалгебра изотропии $\mathfrak{h}$ точки с координатами $x = 0$, $y = 1$ порождается векторным полем $\zeta_1 + \zeta_3$, причем соответствующая однопараметрическая подгруппа в $SO(1,2)$ является группой вращений $SO(2)$. Таким образом, как однородное пространство плоскость Лобачевского имеет вид $L^2 = SO(2) \setminus SO(1,2)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1,2)$ имеет индекс $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 1$, а соответствующая функция Казимира может быть выбрана в виде

$$\mathscr{K}(f) = f_1 f_3 - f_2^2.$$

Используя формулы (4.17), (4.15), (4.23) и (4.26), получаем

$$s_M = i_M = d_M = 0, \quad \dim \mathscr{F} = \operatorname{ind} \mathscr{F} = 1.$$

Отсюда вытекает, что алгебра инвариантных функций на $T^*(L^2)$ порождается единственной функцией

$$Y(x,p) = \mathscr{K}(X(x,p)) = -y^2(p_x^2 + p_y^2),$$

где

$$X_1 = (x^2 - y^2)p_x + 2xyp_y, \quad X_2 = xp_x + yp_y, \quad X_3 = p_x.$$

Рассмотрим геодезический поток метрики (5.40). Гамильтониан этого геодезического потока записывается в виде

$$H(x,p) = -\frac{1}{2}\mathscr{K}(X(x,p)) = \frac{y^2}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right), \tag{5.41}$$

откуда следует, что метрика (5.40) является биинвариантной, то есть одновременно является и инвариантной и метрикой субмерсии на L^2. Геодезический поток данной метрики дается системой уравнений

$$\dot{x} = y^2 p_x, \quad \dot{y} = y^2 p_y, \quad \dot{p}_x = 0, \quad \dot{p}_y = -y(p_x^2 + p_y^2). \tag{5.42}$$

Параметризуем семейство ковекторов общего положения из $\mathfrak{h}^\perp$ вещественным параметром $J \in (0, +\infty)$: $\lambda(J) = (0, J, 0)$. Переход к каноническим координатам на коприсоединенной орбите $\mathcal{O}_{\lambda(J)}$, отвечающий поляризации $\mathfrak{n} = \{\zeta_1, \zeta_2\}$, имеет вид:

$$f_1 = uv^2 + 2Jv, \quad f_2 = uv + J, \quad f_3 = u.$$

Так как дефект однородного пространства L^2 равен нулю, переменных u' и v' нет. Разрешая систему равенств (4.43), (4.44) относительно переменных p_x, p_y и u, с помощью формул (4.45) и (4.46) находим производящую функцию специального канонического преобразования в $T^*(L^2)$:

$$S(x; y, v, J) = J \ln \frac{(x-v)^2 + y^2}{y}.$$

Достраивая функцию

$$\tau = \frac{\partial S}{\partial J} = \ln \frac{(x-v)^2 + y^2}{y}, \tag{5.43}$$

получаем искомое каноническое преобразование $(x, y, p_x, p_y) \to (u, v, J, \tau)$ неявно заданное равенством (5.43) и уравнениями

$$(x^2 - y^2)p_x + 2xyp_y = uv^2 + 2Jv, \quad xp_x + yp_y = uv + J, \quad p_x = u. \tag{5.44}$$

После применения данного канонического преобразования гамильтониан (5.41) принимает простой вид $\tilde{H}(J) = J^2/2$, а соответствующая ему гамильтонова система элементарно интегрируется:

$$u, v, J - \mathrm{const}, \quad \tau = Js + \tau_0.$$

Рассмотрим теперь расширенный геодезический поток на $T(L^2)$. Соответствующий ему гамильтониан δH является вариацией гамильтониана (5.41) и в явном виде записывается как

$$\delta H = y\left(p_x^2 + p_y^2\right)\delta y + y^2\left(p_x \delta p_x + p_y \delta p_y\right). \tag{5.45}$$

Гамильтонова система расширенного геодезического потока в качестве подсистемы содержит систему уравнений (5.42), а также включает в себя дополнительные уравнения

$$\delta\dot{x} = 2yp_x\delta y + y^2\delta p_x, \quad \delta\dot{y} = 2yp_y\delta y + y^2\delta p_y,$$

$$\delta\dot{p}_x = 0, \quad \delta\dot{p}_y = -\left(p_x^2 + p_y^2\right)\delta y - 2y\left(p_x\delta p_x + p_y\delta p_y\right).$$

В пространстве кокасательного расслоения $T^*(TL^2)$ определим каноническое преобразование от переменных x, y, p_x, p_y, δx, δy, δp_x, δp_y к новым переменным u, v, J, τ, δu, δv, δJ и $\delta\tau$, отвечающее производящей функции

$$\delta S = \frac{2J}{(x-v)^2 + y^2}\left[(x-y)\delta x + \frac{y^2 - (x-v)^2}{2y}\delta y + (v-x)\delta v\right] + \ln\frac{(x-v)^2 + y^2}{y}\delta J.$$

Данное преобразование задается системой равенств (5.32) – (5.34) или, что эквивалентно, системой равенств (5.35), (5.36) и уравнениями, определяющими функции τ и $\delta\tau$. В нашем случае каноническое преобразование в $T^*(TL^2)$ определяется формулами (5.43), (5.44) и дополнительными соотношениями

$$(xp_x + yp_y)\delta x + (xp_y - yp_x)\delta y + \frac{x^2 - y^2}{2}\delta p_x + xy\delta p_y = (uv + J)\delta v + \frac{v^2}{2}\delta u + v\delta J, \tag{5.46}$$

$$p_x\delta x + p_y\delta y + x\delta p_x + y\delta p_y = v\delta u + u\delta v + \delta J, \quad \delta p_x = \delta u. \tag{5.47}$$

$$\delta\tau = \frac{2}{(x-v)^2 + y^2}\left[(x-y)\delta x + \frac{y^2 - (x-v)^2}{2y}\delta y + (v-x)\delta v\right]. \tag{5.48}$$

Применяя построенное каноническое преобразование в $T^*(TL^2)$ к гамильтониану (5.45), получаем $\delta\tilde{H} = J\delta J$. После интегрирования соответствующей гамильтоновой системы имеем

$$\tau = Js + \tau_0, \quad \delta\tau = \delta J s + \delta\tau_0, \quad u, v, J, \delta u, \delta v, \delta J - \mathrm{const}.$$

Зависимость от времени переменных x, δx ,p, δp неявно определяется соотношениями (5.43), (5.44) и (5.46) – (5.48).

ГЛАВА 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Построение точных решений уравнений движения заряженных частиц во внешних полях представляет собой следующий, более сложный этап решения проблемы интегрирования классических уравнений теоретической физики. В то время как теория интегрирования геодезических потоков на псевдоримановых многообразиях на настоящий день хорошо развита, аналогичная ей теория для конечномерных гамильтоновых систем, описывающих динамику частицы во внешнем поле, находится еще в стадии развития и, по-видимому, наиболее фундаментальные результаты здесь еще не получены. Отметим, что в настоящее время наибольшая исследовательская активность наблюдается по отношению к интегрируемым *магнитным геодезическим потокам*, то есть фазовым потокам гамильтоновых систем уравнений, описывающих движение заряженных частиц во внешних электромагнитных полях. Помимо исследования проблемы интегрируемости этих динамических систем [124–129], внимание специалистов также привлекает целый круг вопросов, связанных с их различными топологическими особенностями [130–133].

Как известно, традиционный подход к интегрированию уравнений движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле состоит в применении к соответствующему уравнению Гамильтона – Якоби процедуры разделения переменных. Являясь весьма эффективным способом построения точных решений, данный подход все же обладает определенной ограниченностью. В частности, в рамках метода разделения переменных довольно трудно получить удобные алгебраические критерии интегрируемости.

Определенной альтернативой методу разделения переменных является метод некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем, основанный на механизме редукции Марсдена – Вейнствейна [16, 17, 169]. Для применения данного метода целесообразнее переформулировать уравнения движения частицы в электромагнитном поле в гамильтоновой форме. Здесь, однако, необходимо отметить два подхода, использующихся при гамильтоновом описании. В первом подходе, принятом в основном в теоретической физике, внешнее электромагнитное поле вводится при помощи векторного потенциала $A = A_a dx^a$, представляющего собой 1-форму на фоновом псевдоримановом многообразии. В этом случае гамильтонова система уравнений, описывающая движение свободной (не заряженной) частицы, модифицируется путем замены старых «импульсов» p_a на новые $P_a = p_a + eA_a$, где e — электрический заряд частицы. Во втором подходе, который является более геометрическим, а поэтому и более изящным, электромагнитное поле на фоновом многообразии M «включается» при помощи деформации канонической скобки Пуассона в $C^\infty(T^*M)$, или, что то же самое, при помощи деформации естественной симплектической формы касательного расслоения T^*M: $\omega \to \omega + e\pi^*F$, где F — замкнутая 2-форма, $\pi : T^*M \to M$ — каноническая проекция [219]. Очевидно, что второй способ описания имеет более общий характер, хотя, как следует из леммы Пуанкаре, локально оба подхода являются эквивалентными.

Настоящая глава посвящена проблеме интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. При этом мы будем рассматривать внешние электромагнитные поля, естественным образом ассоциированные с 2-коциклами алгебр Ли. Частным случаем предлагаемой нами теории являются магнитные геодезические потоки, связанные с тривиальными 2-коциклами (или 2-кограницами), которые порождаются формой Кириллова – Костанта на соответствующих орбитах коприсоединенного представления. До настоящего времени в большинстве работ по данной тематике рассматривались именно такие случаи (см., например, [124–127]), хотя нетривиальные 2-коциклы представляют с точки зрения интегрирования гораздо больший интерес. В частности, как будет показано ниже, для произвольной алгебры и некоторого 2-коцикла на ней можно ввести так называемый когомологический индекс, обобщающий понятие обычного индекса алгебры Ли и позволяющий сформулировать критерий интегрируемости магнитных геодезических потоков в квадратурах.

В заключение настоящей главы мы рассматриваем *уравнения Вонга*, являющиеся обобщениями уравнений магнитных геодезических потоков и описывающие движение классической заряженной частицы с изоспином во внешнем калибровочном поле [134]. Мы исследуем структуру алгебры линейных интегралов движения этих уравнений, а также сформулируем алгебраическое условие их интегрируемости.

§ 6.1 Магнитные геодезические потоки и их интегралы движения

Пусть (M,g) — гладкое псевдориманово многообразие на котором задана замкнутая 2-форма F:

$$F = \frac{1}{2}\, F_{ab}(x)\, dx^a \wedge dx^b, \quad dF = 0.$$

В трехмерном римановом случае 2-форма F будет интерпретироваться нами как внешнее магнитное поле; в случае четырехмерного лоренцева многообразия мы будем считать, что форма F описывает внешнее электромагнитное поле.

Уравнение движения классической частицы с зарядом e и массой m

$$\ddot{x}^c + \Gamma^c_{ab}\,\dot{x}^a\dot{x}^b = \frac{e}{m}\,g^{ac}F_{ab}\dot{x}^b$$

после использования преобразования Лежандра $p_a = g_{ab}\,\dot{x}^b$ может быть представлено в виде следующей гамильтоновой системы уравнений:

$$\dot{x}^a = \{H, x^a\}_\epsilon = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = \{H, p_a\}_\epsilon = -\frac{\partial H}{\partial x^a} + \epsilon\,F_{ab}\,\frac{\partial H}{\partial p_b}. \tag{6.1}$$

Здесь $H(x,p) = \frac{1}{2}\,g^{ab}(x)p_ap_b$ — гамильтониан геодезического потока на псевдоримановом многообразии (M,g), $\epsilon = e/m$ — удельный электрический заряд частицы. Скобка $\{\cdot,\cdot\}_\epsilon$ отличается от стандартной канонической скобки Пуассона дополнительным слагаемым, отвечающим внешнему полю, и на произвольных функциях $\varphi, \psi \in C^\infty(T^*M)$ задается следующим образом [219]:

$$\{\varphi,\psi\}_\epsilon \equiv \sum_{a=1}^{\dim M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_a}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^a} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^a}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_a}\right) - \epsilon\sum_{a,b=1}^{\dim M} F_{ab}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_a}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_b}. \tag{6.2}$$

Следуя терминологии, принятой рядом авторов, мы будем называть скобку Пуассона (6.2) *магнитной*, а соответствующую ей гамильтонову систему (6.1) — *магнитным геодезическим потоком*. Отметим, что при $\epsilon = 0$ скобка (6.2) переходит в обычную каноническую скобку Пуассона, а гамильтонова система (6.1) представляет собой уравнения геодезического потока на (M,g).

Легко видеть, что магнитная скобка Пуассона (6.2) является невырожденной и порождается симплектической структурой на T^*M следующего вида

$$\omega_\epsilon = \omega + \epsilon\pi^*F = dp_a \wedge dx^a + \frac{\epsilon}{2}\,F_{ab}\,dx^a \wedge dx^b.$$

Здесь $\omega = dp_a \wedge dx^a$ стандартная симплектическая форма на T^*M, $\pi : T^*M \to M$ — естественная проекция. Мы будем называть 2-форму ω_ϵ *магнитной симплектической формой* (в литературе также используется термин «скрученная» симплектическая форма [220, 221]).

Замечание 6.1. В рамках стандартного подхода, принятого в теоретической физике, электромагнитное поле описывается с помощью 1-формы векторного потенциала $A = A_a\,dx^a$ такой, что $dA = F$. Если ввести «обобщенные импульсы» $P_a = p_a + \epsilon A_a$ и рассмотреть новый гамильтониан $\tilde{H}(x,P) = H(x, P - \epsilon A)$, гамильтонова система (6.1) может быть преобразована к системе

$$\dot{x}^a = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_a}, \quad \dot{P}_a = -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x^a}, \tag{6.3}$$

являющейся гамильтоновой относительно стандартной канонической скобки Пуассона на T^*M. Несмотря на очевидную эквивалентность обоих подходов (по крайней мере, при локальном описании), подход, основанный на использовании магнитной скобки Пуассона, является все же более геометризованным, а следовательно, более изящным. Это выражается уже в том, что 2-форма F всегда определена на многообразии M глобально, в то время как соответствующая 1-форма векторного потенциала A может быть задана лишь локально (например, в случае нетривиальной топологии M). Кроме того, система уравнений (6.1) в отличие от системы (6.3) является калибровочно инвариантной, то есть ее вид не изменяется при преобразованиях вида $A_i \to A_i + \partial_{x^a} f$, $f \in C^\infty(M)$.

Возможность точного интегрирования гамильтоновой системы (6.1) тесно связана с наличием у последней интегралов движения, то есть функций, находящихся в инволюции с гамильтонианом $H(x,p)$ относительно магнитной скобки Пуассона. Отметим, что проблема нахождения интегралов движения магнитных геодезических потоков, преимущественно полиномиальных по импульсам, независимо поднималась рядом авторов [140, 222–224]; как правило, полученные здесь результаты имели конструктивный характер и сводились к интегрированию некоторой определяющей системы уравнений. Следует отметить, что структура возникающих при этом пуассоновых алгебр в упомянутых работах практически не исследовалась, хотя в контексте построения точных решений этот вопрос представляется весьма немаловажным.

Исследуем алгебру интегралов движения гамильтоновой системы (6.1), линейных по импульсным переменным p_a. Для этого рассмотрим функцию вида

$$X^{(\epsilon)}(x,p) = \zeta^a(x) p_a + \epsilon \vartheta(x),$$

где $\vartheta \in C^\infty(M)$ — некоторая скалярная функция, $\zeta^a(x)$ — компоненты некоторого векторного поля $\zeta \in \mathrm{Vect}(M)$. Нетрудно показать, что в этом случае условие $\{H(x,p), X^{(\epsilon)}\}_\epsilon = 0$ будет эквивалентно следующей системе равенств

$$\mathscr{L}_\zeta g = 0, \quad d\vartheta = -\imath_\zeta F. \tag{6.4}$$

Здесь $\mathscr{L}_\zeta$ — оператор производной Ли в направлении векторного поля $\zeta = \zeta^a(x)\partial_{x^a}$, $\imath_\zeta F \equiv F_{ab}\zeta^a dx^b$ — внутреннее произведение 2-формы F на ζ.

Будем рассматривать (6.4) как систему уравнений, в которой неизвестными являются компоненты векторного поля ζ и функция ϑ (метрика и внешнее поле считаются заданными). Первое равенство в (6.4) представляет собой условие *киллинговости* векторного поля ζ относительно псевдоримановой метрики g. Однако не каждый вектор Киллинга ζ допускает существование функции ϑ, являющейся решением второго из уравнений (6.4). Действительно, так как $dF = 0$, то

$$d^2\vartheta = -d\,\imath_\zeta F = -(\mathscr{L}_\zeta F - \imath_\zeta dF) = -\mathscr{L}_\zeta F,$$

откуда заключаем, что для существования функции ϑ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mathscr{L}_\zeta F = 0, \tag{6.5}$$

являющееся условием инвариантности 2-формы электромагнитного поля относительно локальной однопараметрической группы преобразований, порождаемой вектором Киллинга ζ.

Определение 6.1. Вектор Киллинга ζ, удовлетворяющий условию (6.5), будем называть *допустимым* (электромагнитным полем).

Пусть $\zeta = \zeta^a(x)\partial_{x^a}$ — допустимое киллингово векторное поле. Тогда с помощью (6.4) для функции ϑ мы можем записать следующее выражение

$$\vartheta(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} \imath_\zeta F. \tag{6.6}$$

Отметим, что результат интегрирования не зависит от выбора пути, соединяющего точки x и x_0, так как стоящее по знаком интеграла выражение есть замкнутая 1-форма. С другой стороны, значение интеграла (6.6) зависит, вообще говоря, от выбора точки x_0, то есть функция $\vartheta(x)$ определена с точностью до прибавления произвольной постоянной. Смысл данной неоднозначности с точки зрения структуры алгебры интегралов движения магнитного геодезического потока будет пояснен ниже.

Как известно, относительно обычного коммутатора векторных полей множество векторов Киллинга образует конечномерную алгебру Ли, являющуюся алгеброй Ли группы движений псевдориманова многообразия M. Из условия (6.5) следует, что множество допустимых векторов Киллинга будет являться некоторой подалгеброй этой алгебры Ли, которую мы далее будем называть *допустимой*.

Пусть $\mathfrak{g}$ — допустимая подалгебра алгебры Ли векторов Киллинга псевдориманова многообразия (M, g). Зафиксируем в алгебре $\mathfrak{g}$ некоторый базис $\{\zeta_i\}$, $i = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$, и сопоставим каждому векторному полю ζ_i функцию ϑ_i согласно (6.6). Тогда по своему построению функции

$$X_i^{(\epsilon)}(x,p) = \zeta_i^a(x)p_a + \epsilon\vartheta_i(x) \tag{6.7}$$

будут являться интегралами движения магнитного геодезического потока (6.1).

После несложных преобразований магнитная скобка Пуассона двух интегралов движения вида (6.7) может быть представлена в виде

$$\{X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}\}_\epsilon = C_{ij}^k\, X_k^{(\epsilon)} + \epsilon \mathbf{F}_{ij}. \tag{6.8}$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в выбранном базисе и, кроме того, мы ввели обозначение

$$\mathbf{F}_{ij} \equiv F(\zeta_i, \zeta_j) - C_{ij}^k\, \vartheta_k. \tag{6.9}$$

Утверждение 6.1. *Величины* (6.9) *являются постоянными (то есть не зависящими от координат) и обладают следующими свойствами:*

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}, \tag{6.10}$$

$$C_{ij}^l\, \mathbf{F}_{kl} + C_{jk}^l\, \mathbf{F}_{il} + C_{ki}^l\, \mathbf{F}_{jl} = 0. \tag{6.11}$$

Доказательство. Используя свойство производной Ли $[\mathscr{L}_\xi, \imath_\eta] = \imath_{[\xi,\eta]}$, а также условие (6.5) и требование замкнутости формы F, получаем

$$\begin{aligned} dF(\zeta_i, \zeta_j) = d\,\imath_{\zeta_j}\imath_{\zeta_i}F = \mathscr{L}_{\zeta_j}\imath_{\zeta_i}F - \imath_{\zeta_j} d\,\imath_{\zeta_i}F = \mathscr{L}_{\zeta_j}\imath_{\zeta_i}F - \imath_{\zeta_j}\left(\mathscr{L}_{\zeta_i}F - \imath_{\zeta_i}dF\right) = \\ = \imath_{\zeta_i}\mathscr{L}_{\zeta_j}F + \imath_{[\zeta_j,\zeta_i]}F = -C_{ij}^k\,\imath_{\zeta_k}F. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом второго из равенств (6.4) имеем

$$d\mathbf{F}_{ij} = dF(\zeta_i, \zeta_j) - C_{ij}^k\, d\vartheta_k = 0.$$

Следовательно, величины $\mathbf{F}_{ij}$ являются константами. Свойства (6.10) и (6.11) проверяются простыми вычислениями. В частности, свойство (6.11) является прямым следствием замкнутости 2-формы F и тождества Якоби для структурных констант C_{ij}^k. □

Напомним теперь некоторые определения. Пусть $\mathfrak{g}$ — абстрактная вещественная алгебра Ли с базисом $\{e_i\}$ и коммутационными соотношениями $[e_i, e_j] = C_{ij}^k\, e_k$. Билинейная кососимметрическая форма $\mathbf{F}(\cdot,\cdot)$ на алгебре $\mathfrak{g}$, компоненты $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}(e_i, e_j)$ которой удовлетворяют условию (6.11), называется *2-коциклом* алгебры $\mathfrak{g}$, принимающим значения в тривиальном $\mathfrak{g}$-модуле $\mathbb{R}$. Обозначим множество всех таких 2-коциклов через $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Как известно [53, 54], каждому 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ можно сопоставить одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, которое как линейное пространство является прямой суммой $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$, а как алгебра Ли имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k\, e_k + \mathbf{F}_{ij}\, e_0. \tag{6.12}$$

Здесь e_0 — некоторый базисный вектор в $\mathbb{R}$.

Сравнивая между собой коммутационные соотношения (6.8) и (6.12) можно сделать следующий вывод: линейная оболочка набора функций $X_0^{(\epsilon)} \equiv \epsilon$, $X_1^{(\epsilon)}, \ldots, X_{\dim \mathfrak{g}}^{(\epsilon)}$ относительно магнитной скобки Пуассона образует $(\dim \mathfrak{g} + 1)$-мерную алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, являющуюся одномерным центральным расширением алгебры $\mathfrak{g}$, построенным с помощью 2-коцикла (6.9).

Условию (6.11) удовлетворяют, например, величины вида $\mathbf{F}_{ij} = C_{ij}^k \mu_k$, где μ_k — некоторые константы. Подобные 2-коциклы называются *2-кограницами*. Множество всех 2-кограниц алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обозначим $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

Нетрудно видеть, что одномерные центральные расширения, соответствующие 2-кограницам, являются тривиальными, то есть сводятся к прямым суммам алгебр Ли. Действительно, если $\mathbf{F}_{ij} = C_{ij}^k \mu_k$, то коммутационные соотношения (6.12) можно переписать в виде

$$[e_i, e_j] = C_{ij}^k \left(e_k + \mu_k e_0\right),$$

откуда после невырожденного преобразования $e_0 \to e_0' = e_0$, $e_i \to e_i' = e_i + \mu_i e_0$ получаем

$$[e_i', e_j'] = C_{ij}^k \, e_k'.$$

Таким образом, если $\mathbf{F} \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, соответствующее центральное расширение изоморфно прямой сумме алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathbb{R}$.

Пусть $\mathbf{F}, \mathbf{F}' \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ — некоторые 2-коциклы, $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}'$ — соответствующие им одномерные центральные расширения алгебры $\mathfrak{g}$. Расширения $\tilde{\mathfrak{g}}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}'$ называются *эквивалентными* $\tilde{\mathfrak{g}} \sim \tilde{\mathfrak{g}}'$, если $\mathbf{F}' - \mathbf{F} \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Очевидно, что эквивалентные центральные расширения суть изоморфные алгебры Ли, в связи с чем интерес представляет рассмотрение только неэквивалентных центральных расширений, которые находятся во взаимо однозначном соответствии с элементами фактор-пространства $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) / \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Пространство $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, наделенное естественной структурой абелевой группы, называется *группой 2-когомологий* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (со значениями в $\mathbb{R}$).

С учетом изложенных нами фактов несложно понять, что неоднозначность функций ϑ_i, связанная с произволом в выборе нижнего предела интегрирования в (6.6), является несущественной. Действительно, замена в интеграле (6.6) начальной точки x_0 эквивалентна преобразованию $\vartheta_i \to \vartheta_i' = \vartheta_i + \mu_i$, сводящемуся к прибавлению к функциям ϑ_i некоторых постоянных. При подобной замене 2-коцикл (6.9) преобразуется следующим образом

$$\mathbf{F}_{ij} \to \mathbf{F}_{ij}' = \mathbf{F}_{ij} - C_{ij}^k \, \mu_k.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{F} - \mathbf{F}' \in \mathbf{B}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, то есть данные 2-коциклы принадлежат одному и тому же когомологическому классу в $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Но это означает, что соответствующие этим 2-коциклам центральные расширения являются эквивалентными, то есть реализующими изоморфные алгебры Ли.

Подводя итог полученным результатам, сформулируем следующую теорему.

Теорема 6.1. *Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие, на котором задана замкнутая 2-форма F, и пусть $\mathfrak{g} = \{\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}\}$ — допустимая подалгебра алгебры киллинговых векторных полей многообразия M. Тогда функции*

$$X_0^{(\epsilon)} = \epsilon, \quad X_i^{(\epsilon)} = \zeta_i^a(x)p_a - \epsilon \int \imath_{\zeta_i} F, \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{g};$$

являются интегралами магнитного геодезического потока (6.1) *и относительно магнитной скобки Пуассона образуют* $(\dim \mathfrak{g} + 1)$*-мерную алгебру Ли* $\tilde{\mathfrak{g}}$*, представляющую собой одномерное центральное расширение алгебры* $\mathfrak{g}$*, соответствующее когомологическому классу 2-коцикла* (6.9).

Теорема 6.1 позволяет конструировать алгебру Ли интегралов движения магнитного геодезического потока по заданному внешнему (электро)магнитному полю. Можно, однако, решать несколько иную задачу. А именно, зафиксировав в алгебре векторов Киллинга псевдориманова многообразия (M, g) некоторую подалгебру $\mathfrak{g}$, мы можем найти (электро)магнитное поле, для которого данная подалгебра является допустимой. После этого мы можем явно выписать интегралы движения магнитного геодезического потока в найденном внешнем поле. При этом, если нам будут известны все (неэквивалентные) подалгебры алгебры векторов Киллинга, мы сможем явно перечислить всевозможные внешние поля, допускающие линейные по импульсам интегралы движения магнитного геодезического потока на данном псевдоримановом многообразии.

Пример 6.1. В качестве примера приведем классификацию магнитных полей и отвечающих им алгебр Ли интегралов движения магнитного геодезического потока в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.

Алгебра Ли векторов Киллинга пространства $\mathbb{R}^3$ — это шестимерная алгебра $\mathfrak{e}(3)$, порождаемая векторными полями

$$P_a = \partial_{x_a}, \quad J_{ab} = x_a\,\partial_{x_b} - x_b\,\partial_{x_a}, \quad a, b = 1, 2, 3;$$

с коммутационными соотношениями

$$[P_a, P_b] = 0, \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c, \quad [J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac}.$$

Список возможных (с точностью до сопряжений) подалгебр алгебры $\mathfrak{e}(3)$ приведен в монографии [160] на стр. 61. Далее для каждой подалгебры $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{e}(3)$ мы указываем явный вид соответствующей инвариантной замкнутой 2-формы F, а также выписываем интегралы движения $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$ магнитного геодезического потока. Кроме того, при $\dim\mathfrak{g} > 1$ мы приводим коммутационные соотношения, которым удовлетворяют построенные интегралы движения, и явно выделяем случаи, когда образуемая ими алгебра Ли является не тривиальным центральным расширением.

Ниже используются следующие обозначения: $f, f_1, f_2, \dots$ – произвольные функции своих аргументов; $a, a_1, a_2, \dots$ – произвольные постоянные.

1. $\mathfrak{g} = \{P_1\} \simeq \mathbb{R}$:

$$F = df_1(x_2, x_3) \wedge dx_1 + df_2(x_2, x_3) \wedge dx_2.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = p_1 + \epsilon f_1(x_2, x_3).$$

2. $\mathfrak{g} = \{J_{12}\} \simeq \mathfrak{so}(2)$:

$$F = df_1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3\right) \wedge \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2} + df_2\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3\right) \wedge \frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 + \epsilon f_1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3\right).$$

3. $\mathfrak{g} = \{J_{12} + \alpha P_3\} \simeq \mathbb{R}$, $\alpha > 0$:

$$F = df_1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3 - \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right) \wedge \frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2} + \\ + df_2\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3 - \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right) \wedge \frac{x_1dx_1 + x_2dx_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 + \alpha p_3 + \epsilon f_1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, x_3 - \alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right).$$

4. $\mathfrak{g} = \{P_1, P_2\} \simeq \mathbb{R}^2$:

$$F = adx_1 \wedge dx_2 + f_1'(x_3)dx_1 \wedge dx_3 + f_2'(x_3)dx_2 \wedge dx_3.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = p_1 - \epsilon\left(ax_2 + f_1(x_3)\right), \quad X_2^{(\epsilon)} = p_1 + \epsilon\left(ax_1 - f_2(x_3)\right),$$

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon a.$$

При $a \neq 0$ расширение не тривиальное.

5. $\mathfrak{g} = \{J_{12}, P_3\} \simeq \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{R}$:

$$F = a\,\frac{x_1dx_2 - x_2dx_1}{x_1^2+x_2^2} \wedge dx_3 - f_1'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{dx_1 \wedge dx_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \\ - f_2'\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\frac{x_1dx_1 \wedge dx_3 + x_2dx_2 \wedge dx_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 - \epsilon\left(ax_3 + f_1\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right),$$

$$X_2^{(\epsilon)} = p_3 + \epsilon\left(a \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_3} - f_2\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\right),$$

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon a.$$

При $a \neq 0$ расширение не тривиальное.

6. $\mathfrak{g} = \{J_{12}, J_{13}, J_{23}\} \simeq \mathfrak{so}(3)$:

$$F = \frac{a(x_3dx_1\wedge dx_2 - x_2dx_1\wedge dx_3 + x_1dx_2\wedge dx_3)}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}}.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 - \frac{\epsilon a x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, \quad X_2^{(\epsilon)} = -x_3p_2 + x_2p_3 - \frac{\epsilon a x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},$$

$$X_3^{(\epsilon)} = -x_3p_1 + x_1p_3 + \frac{\epsilon a x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}.$$

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_3^{(\epsilon)}, \quad \{X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = -X_2^{(\epsilon)}, \quad \{X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_1^{(\epsilon)}.$$

Расширение тривиальное.

7. $\mathfrak{g} = \{J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2\} \simeq \mathfrak{e}(2)$, $\alpha > 0$:

$$F = a_1dx_1\wedge dx_2 + a_2\sin\left(\frac{x_3}{\alpha} + a_3\right)dx_1\wedge dx_3 - a_2\cos\left(\frac{x_3}{\alpha} + a_3\right)dx_2\wedge dx_3.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 + \alpha p_3 + \frac{\epsilon a_1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right) + \\ + \epsilon\alpha a_2\left(x_1\sin\left(\frac{x_3}{\alpha}+a_3\right) - x_2\cos\left(\frac{x_3}{\alpha}+a_3\right)\right),$$

$$X_2^{(\epsilon)} = p_1 - \epsilon a_1 x_2 + e\alpha a_2\cos\left(\frac{x_3}{\alpha}+a_3\right), \quad X_3^{(\epsilon)} = p_2 + \epsilon a_1x_1 + e\alpha a_2\sin\left(\frac{x_3}{\alpha}+a_3\right).$$

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = -X_3^{(\epsilon)}, \quad \{X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_2^{(\epsilon)}, \quad \{X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon a_1.$$

При $a_1 \neq 0$ расширение не тривиальное.

8. $\mathfrak{g} = \{J_{12}, P_1, P_2, P_3\} \simeq \mathfrak{e}(2)\oplus\mathbb{R}$:

$$F = a\,dx_1\wedge dx_2.$$

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_2p_1 + x_1p_2 + \frac{\epsilon a}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right), \quad X_2^{(\epsilon)} = p_1 - \epsilon a x_2, \quad X_3^{(\epsilon)} = p_2 + \epsilon a x_1, \quad X_4^{(\epsilon)} = p_3.$$

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = -X_3^{(\epsilon)}, \quad \{X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_2^{(\epsilon)}, \quad \{X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon a.$$

При $a \neq 0$ расширение не тривиальное.

§ 6.2 Интегрирование магнитных геодезических потоков на группах Ли

6.2.1 Правоинвариантные замкнутые 2-формы на группах Ли

Пусть G — связная вещественная n-мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Обозначим через ρ^L левое регулярное представление алгебры $\mathfrak{g}$, действующее на функциях из $C^\infty(G)$ согласно правилу:

$$\rho^L(Z)\varphi(x) = (\eta_Z\varphi)(x), \quad \varphi \in C^\infty(G).$$

Здесь $\eta_Z(x) = -(R_x)_* Z$ — правоинвариантное векторное поле на группе, отвечающее вектору Z алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ — пространство 2-коцепей над $\mathfrak{g}$-модулем $C^\infty(G)$, то есть пространство билинейных кососимметрических форм на алгебре $\mathfrak{g}$, принимающих значения в $C^\infty(G)$. Произвольной 2-коцепи $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ взаимо однозначно соответствует дифференциальная 2-форма $F \in \bigwedge^2(G)$, которая на произвольных касательных векторах $v_1, v_2 \in T_xG$ вычисляется согласно формуле

$$F(v_1, v_2) = \mathbf{F}\left((R_{x^{-1}})_* v_1, (R_{x^{-1}})_* v_2\right). \tag{6.13}$$

Нетрудно показать, что 2-форма F будет являться замкнутой тогда и только тогда, когда соответствующая 2-коцепь $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\circlearrowleft(Z_1,Z_2,Z_3)} \rho^L(Z_1)\mathbf{F}(Z_2, Z_3) + \mathbf{F}(Z_1, [Z_2, Z_3]) = 0, \tag{6.14}$$

где суммирование осуществляется по всем циклическим перестановкам набора $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathfrak{g}$. Условие (6.14) можно записать более компактно как $\delta\mathbf{F} = 0$, где определение оператора $\delta : \mathbf{C}^k(\mathfrak{g}; C^\infty(G)) \to \mathbf{C}^{k+1}(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ дается формулой (1.69). Это означает, что множество замкнутых 2-форм на группе G находится во взаимо однозначном соответствии с множеством 2-коциклов $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ алгебры $\mathfrak{g}$ над $\mathfrak{g}$-модулем $C^\infty(G)$.

В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ зафиксируем некоторый базис $\{e_i\}$ и введем дуальный ему базис $\{e^i\}$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$: $\langle e^i, e_j\rangle = \delta^i_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда 2-коцикл $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ в данном базисе представляется как

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{F}_{ij}(x)\, e^i \wedge e^j, \quad \mathbf{F}_{ij} \equiv \mathbf{F}(e_i, e_j), \tag{6.15}$$

а условие (6.14) запишется в виде

$$\sum_{\circlearrowleft(i,j,k)} \eta_i\, \mathbf{F}_{jk} + C^l_{ij}\, \mathbf{F}_{kl} = 0.$$

Здесь $\eta_i(x) = -(R_x)_* e_i$ — правоинвариантное векторное поле, соответствующее вектору $e_i \in \mathfrak{g}$, C_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i\}$. Кроме того, если $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты группового элемента $x \in G$, из равенства (6.13) следует, что координатные компоненты 2-формы F, отвечающей 2-коциклу (6.15), даются формулой

$$F_{ij}(x) = \mathbf{F}_{kl}\, \sigma_i^k(x) \sigma_j^l(x). \tag{6.16}$$

Здесь $\sigma_i^k(x)$ — компоненты правоинвариантной 1-формы $\sigma^i(x) = -(R_{x^{-1}})^* e^i$, выраженные в локальных координатах.

Правое действие группы G на пространстве кокасательного расслоения T^*G по определению сохраняет симплектическую 2-форму $\omega = dp_i \wedge dx^i$. Однако магнитная симплектическая форма $\omega_\epsilon = \omega + \epsilon\, \pi^* F$ в общем случае уже не является инвариантной относительно этого действия. Тем не менее, если это так, то в качестве следствия мы получаем $(R_g)^* F = F$, то есть замкнутая 2-форма F должна быть инвариантной относительно правых сдвигов на G. Верно и обратное: для всякой замкнутой правоинвариантной 2-формы $F \in \bigwedge^2(G)$ магнитная симплектическая форма ω_ϵ будет являться инвариантной относительно индуцированного правого действия группы G на T^*G. Далее всюду в этом параграфе мы будем считать, что F — правоинвариантная замкнутая 2-форма на группе G.

Используя формулу (6.13) несложно показать, что инвариантность 2-формы $F \in \bigwedge^2(G)$ относительно правых сдвигов равносильна инвариантности соответствующей 2-коцепи $\mathbf{F} \in \mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$ относительно *правого* регулярного представления группы G:

$$T_g^R\, \mathbf{F}(\cdot, \cdot) = \mathbf{F}(\cdot, \cdot), \quad g \in G.$$

Так как правое действие группы G транзитивно, это означает, что 2-коцепь $\mathbf{F}$ представляет собой билинейную кососимметрическую форму на алгебре $\mathfrak{g}$, принимающую значения в $\mathbb{R}$. Легко видеть, что множество всех таких 2-коцепей образует подпространство в $\mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G))$, которое мы будем обозначать как $\mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. В частности, правоинвариантные замкнутые 2-формы на группе G будут находится во взаимо однозначном соответствии с 2-коциклами из подпространства $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) = \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; C^\infty(G)) \cap \mathbf{C}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$, причем выделяющее подобные 2-коциклы условие получается из (6.14) путем наложения дополнительного требования $\rho^L(Z)\mathbf{F} = 0$:

$$\sum_{\circlearrowleft(Z_1, Z_2, Z_3)} \mathbf{F}(Z_1, [Z_2, Z_3]) = 0. \tag{6.17}$$

Соотношение (6.17) является линейным алгебраическим уравнением на компоненты 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Одними из решений данного уравнения являются элементы пространства $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = \mathbf{B}^2(\mathfrak{g};C^\infty(G)) \cap \mathbf{C}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$, то есть 2-коциклы вида

$$\mathbf{F}(Z_1, Z_2) = \langle \mu, [Z_1, Z_2] \rangle, \quad \mu \in \mathfrak{g}^*. \tag{6.18}$$

Как будет показано ниже, с точки зрения интегрируемости магнитных геодезических потоков внешние поля, отвечающие таким 2-коциклам, представляют собой тривиальный случай, поэтому основной интерес для нас будут представлять элементы фактор-пространства $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})/\mathbf{B}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$, то есть когомологические классы алгебры $\mathfrak{g}$ над тривиальным модулем $\mathbb{R}$.

Зададимся таким вопросом: чему равен векторный потенциал A внешнего поля, соответствующего замкнутой правоинвариантной 2-форме F? Очевидно, что всякая 1-форма A может быть однозначно представлена в виде $A = \mathbf{A}_i\, \sigma^i$, где $\mathbf{A} = \mathbf{A}_i\, e^i$ — некоторая 1-коцепь на группе G, принимающая значения в $C^\infty(G)$. При этом равенство $F = dA$ будет равносильно условию $\delta\mathbf{A} = \mathbf{F}$, или, в более подробном виде

$$\eta_{Z_1}\mathbf{A}(Z_2) - \eta_{Z_2}\mathbf{A}(Z_1) - \mathbf{A}([Z_1, Z_2]) = \mathbf{F}(Z_1, Z_2), \quad Z_1, Z_2, \in \mathfrak{g}. \tag{6.19}$$

Для некоторого базиса $\{e_i\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ данное равенство представляется системой уравнений

$$\eta_i\mathbf{A}_j - \eta_j\mathbf{A}_i - C_{ij}^k\,\mathbf{A}_k = \mathbf{F}_{ij}, \tag{6.20}$$

где $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(e_i)$, $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}(e_i, e_j)$, η_i — правоинвариантное векторное поле, соответствующее базисному вектору e_i.

В силу условия коцикличности (6.17), система дифференциальных уравнений (6.20) интегрируема. Ее общее решение имеет вид $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}'_i + \eta_i\, f$, где $f \in C^\infty(G)$ — произвольная функция, $\mathbf{A}'_i$ — некоторое частное решение. Отметим, что имеющийся произвол в выборе решения фактически является проявлением калибровочной инвариантности уравнения $F = dA$.

Наиболее просто частное решение системы (6.20) может быть построено для 2-коцикла $\mathbf{F}$, являющегося 2-кограницей.

Утверждение 6.2. *Пусть 2-коцикл* $\mathbf{F}$ *имеет вид* (6.18). *Тогда частное решение системы уравнений* (6.20) *может быть выбрано в виде* $\mathbf{A}_i = -\mu_i$, $i = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$.

Замечание 6.2. Отметим, что векторный потенциал A, отвечающий 1-коциклу (6.18), будет являться инвариантным относительно правых сдвигов на группе G. Действительно, компоненты 1-формы A в этом случае будут выражаться через правоинвариантные 1-формы на группе G согласно равенству $A_i = \mu_j\sigma_i^j$. Очевидно, что в общей ситуации данное утверждение не верно.

Чтобы сформулировать аналогичный результат для общего случая, нам понадобятся некоторые дополнительные конструкции. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$ — одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, построенное с помощью 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Если в качестве базиса в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ выбрать набор $\{e_i\} \cup \{e_0\}$, где $\{e_i\}$ — базис в алгебре $\mathfrak{g}$, а e_0 — базисный элемент в $\mathbb{R}$, то коммутационные соотношения в $\tilde{\mathfrak{g}}$ будут иметь вид (6.12). Обозначим через $\tilde{G}$ группу Ли, являющуюся центральным расширением группы G с помощью $\mathbb{R}$, и имеющую алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ в качестве соответствующей алгебры Ли. Если элементы группы $\tilde{G}$ отождествить с парами вида (x,t), где $x \in G$, $t \in \mathbb{R}$, групповой закон в $\tilde{G}$ будет иметь вид

$$(x_1,t_1)(x_2,t_2) = (x_1x_2, t_1+t_2+\Theta(x_1,x_2)), \tag{6.21}$$

где $\Theta : G \times G \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$\Theta(x_1x_2,x_3) + \Theta(x_1,x_2) = \Theta(x_1,x_2x_3) + \Theta(x_2,x_3), \quad x_1,x_2,x_3 \in G; \tag{6.22}$$

$$\Theta(x,e) = \Theta(e,x) = 0, \quad x \in G. \tag{6.23}$$

Заметим, что требование (6.22) означает, что функция $\Theta(x_1,x_2)$ является 2-*коциклом группы G*. Данный 2-коцикл связан с 2-коциклом $\mathbf{F}$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следующим образом [54]:

$$\mathbf{F}(Z_1,Z_2) = \frac{d^2}{dt_1\,dt_2}\left[\Theta\left(e^{t_1Z_1},e^{t_2Z_2}\right) - \Theta\left(e^{t_1Z_2},e^{t_2Z_1}\right)\right]\Big|_{t_1=t_2=0}, \quad Z_1,Z_2 \in \mathfrak{g}; \tag{6.24}$$

или в локальных координатах

$$\mathbf{F}_{ij} = \left(\frac{\partial^2\Theta(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j} - \frac{\partial^2\Theta(x,y)}{\partial x^j\,\partial y^i}\right)\Big|_{x=y=0}. \tag{6.25}$$

Утверждение 6.3. *В качестве частного решения системы уравнений* (6.20) *может быть выбран набор функций*

$$\mathbf{A}_i(x) = \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}, \quad i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}. \tag{6.26}$$

Доказательство. Используя закон группового умножения (6.21), для правоинвариантных векторных полей на группе $\tilde{G}$ получаем выражения

$$\tilde{\eta}_0 = -\partial_t, \quad \tilde{\eta}_i = \eta_i - \mathbf{A}_i(x)\partial_t, \tag{6.27}$$

где $\eta_i = \eta_i^j(x)\partial_{x^j}$ — правоинвариантные векторные поля на G, а функции $\mathbf{A}_i(x)$ определяются формулой (6.26). В силу (6.12) для коммутатора правоинвариантных векторных полей имеем

$$[\tilde{\eta}_i,\tilde{\eta}_j] = C_{ij}^k\,\tilde{\eta}_k + \mathbf{F}_{ij}\,\tilde{\eta}_0. \tag{6.28}$$

откуда с учетом соотношений $[\eta_i,\eta_j] = C_{ij}^k\,\eta_k$ и (6.27) непосредственно следуют равенства (6.20). □

Замечание 6.3. Вообще говоря, формула (6.26) представляет собой лишь локальную конструкцию, так как 2-коцикл $\Theta(x,y)$ группы G не всегда может быть определен по 2-коциклу $\mathbf{F}$ соответствующей алгебры $\mathfrak{g}$ глобально. Для иллюстрации рассмотрим простейший пример группы G — двумерный тор $\mathbb{T}^2$. Пусть $\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2$ — 2-коцикл на соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2$. Тогда функция $\Theta(x,y)$, однозначно определяемая требованиями (6.23) и (6.25), будет иметь вид: $\Theta(x,y) = -x_2 y_1$. Однако, в силу того, что координаты на торе определены по модулю 2π, эта функция не является глобальной функцией, и поэтому определяемое с ее помощью частное решение системы уравнений (6.20)

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 = -x_1,$$

задано на группе $\mathbb{T}^2$ всего лишь локально.

Пример 6.2. Рассмотрим теперь менее тривиальный пример, иллюстрирующий полученные нами результаты. Пусть $G = E(2)$ — группа движений двумерной плоскости (см. пример 2.1). Наиболее общий вид 2-коцикла соответствующей алгебры $\mathfrak{e}(2)$ дается выражением

$$\mathbf{F} = \mu_1\, e^1 \wedge e^2 + \mu_2\, e^1 \wedge e^3 + \mu_3\, e^2 \wedge e^3, \tag{6.29}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — произвольные постоянные. Отметим, что все 2-кограницы алгебры $\mathfrak{e}(2)$ получаются из (6.29) условием $\mu_1 = 0$. Таким образом, $\dim \mathbf{H}^2(\mathfrak{e}(2);\mathbb{R}) = 1$.

Используя для группового элемента матричное представление (2.36), выпишем правоинвариантные 1-формы на группе $E(2)$

$$\sigma^1 = -dx_1 - x_2 dx_3, \quad \sigma^2 = -dx_2 + x_1 dx_3, \quad \sigma^3 = -dx_3. \tag{6.30}$$

Тогда согласно (6.16) для правоинвариантной замкнутой 2-формы на G, отвечающей 2-коциклу (6.29), получаем следующее выражение

$$F = \mu_1\, dx_1 \wedge dx_2 - (\mu_1 x_1 - \mu_2)\, dx_1 \wedge dx_3 - (\mu_1 x_2 - \mu_3)\, dx_2 \wedge dx_3. \tag{6.31}$$

Рассмотрим алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{e}(2)_{\mathbf{F}} \oplus \mathbb{R}$, являющуюся одномерным центральным расширением алгебры $\mathfrak{e}(2)$, построенным с помощью 2-коцикла (6.29). Коммутационные соотношения в этой алгебре Ли имеют вид

$$[e_1, e_2] = \mu_1\, e_0, \quad [e_1, e_3] = \mu_2\, e_0 - e_2, \quad [e_2, e_3] = \mu_3\, e_0 + e_1. \tag{6.32}$$

Пользуясь техникой вычисления функции композиции на локальных группах Ли, описанной нами в § 1.3, найдем функцию $\Theta(x,y)$, определяемую законом умножения (6.21) в соответствующей локальной группе $\tilde{G}$:

$$\Theta(x,y) = \frac{\mu_1}{2}\,(1-\cos 2x_3)y_1y_2 + \frac{\mu_1}{4}\left(y_2^2 - y_1^2\right)\sin 2x_3 + \mu_2\,y_2 - \mu_3\,y_1 -$$
$$- (\mu_1\,x_2y_1 + \mu_2\,y_2 - \mu_3\,y_1)\cos x_3 + (\mu_1\,x_2y_2 - \mu_2\,y_1 - \mu_3\,y_2)\sin x_3. \quad (6.33)$$

С помощью формулы (6.26) находим

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 = -\mu_1\,x_1, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\mu_1}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) - \mu_2\,x_1 - \mu_3\,x_2,$$

откуда для 1-формы векторного потенциала A получаем следующее выражение:

$$A = \mu_1\,x_1\,dx_2 - \left[\frac{\mu_1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \mu_2\,x_1 - \mu_3\,x_2\right] dx_3.$$

6.2.2 Алгебра интегралов движения

Как было отмечено в § 2.4, гамильтониан геодезического потока произвольной правоинвариантной псевдоримановой метрики на группе G может быть записан в виде $H(x,p) = \mathbf{G}^{ij}Y_i(x,p)Y_j(x,p)/2$, где $\mathbf{G}^{ij} = \mathbf{G}^{ji}$ — постоянные, а функции $Y_i(x,p) = \eta_i^j(x)p_j$ являются гамильтонианами фазовых потоков, порождаемых однопараметрическими подгруппами правого гамильтонового действия G на T^*G. Очевидными интегралами движения гамильтоновой системы такого геодезического потока будут функции $X_i(x,p) = \xi_i^j(x)p_j$, где $\xi_i = \xi_i^j(x)\partial_{x^j}$ — левоинвариантные векторные поля на группе G. Функции $X_i(x,p)$ образуют относительно обычной канонической скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

В случае гамильтоновой системы магнитного геодезического потока имеет место несколько иная картина. Пусть F — правоинвариантная замкнутая 2-форма на группе Ли G, соответствующая некоторому 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Рассмотрим на T^*G магнитный геодезический поток, задаваемый 2-формой F. Ясно, что в общем случае функции $X_i(x,p)$ уже не будут интегралами движения гамильтоновой системы (6.1) в силу того, что

$$\{X_i(x,p), Y_j(x,p)\}_\epsilon = -\epsilon F(\xi_i, \eta_j) \neq 0.$$

Согласно подходу, изложенному в предыдущем параграфе, вместо $X_i(x,p)$ рассмотрим новый набор функций

$$X_i^{(\epsilon)}(x,p) = \xi_i^j(x)p_j + \epsilon\vartheta_i(x), \quad i = 1,\ldots,\dim\mathfrak{g}, \qquad (6.34)$$

где функции ϑ_i определяются как решения системы уравнений

$$d\vartheta_i = -i_{\xi_i}F. \qquad (6.35)$$

Согласно построению $\{X_i^{(\epsilon)}, Y_j\}_\epsilon = 0$, то есть функции (6.34) являются интегралами движения магнитного геодезического потока для всякой правоинвариантной метрики на группе G.

Очевидно, что равенство (6.35) эквивалентно условию $\eta_i\vartheta_j = F(\eta_i, \xi_j)$, которое с учетом формул (1.12) и (6.16) может быть переписано в виде

$$\eta_i\vartheta_j + \mathbf{F}_{ik}\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k = 0. \tag{6.36}$$

Отметим, что решения данной системы определены не однозначно, а с точностью до прибавления к функциям ϑ_i произвольных постоянных.

Проще всего решение системы (6.36) выглядит для случая, когда 2-коцикл $\mathbf{F}$ является 2-кограницей.

Утверждение 6.4. *Пусть $\mathbf{F}_{ij} = C_{ij}^k\,\mu_k$, где μ_k — некоторые постоянные. Тогда функции*

$$\vartheta_i(x) = \|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\,\mu_j, \quad i = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}; \tag{6.37}$$

удовлетворяют системе равенств (6.36)

Доказательство. Используя второе из матричных тождеств (1.13), получаем

$$(\eta_i\vartheta_j)(x) = \eta_i(x)\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k\,\mu_k = -C_{ik}^l\,\mu_l\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k = -\mathbf{F}_{ik}\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k.$$

Утверждение доказано. □

Таким образом, для внешнего поля, определяемого 2-кограницей $\mathbf{F}_{ij} = C_{ij}^k\,\mu_k$, интегралы движения магнитного геодезического потока будут иметь вид

$$X_i^{(\epsilon)}(x,p) = \xi_i^j(x)p_j + \epsilon\,\mu_j\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j, \quad i = 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}. \tag{6.38}$$

Согласно формуле (6.8) магнитная скобка Пуассона функций $X_i^{(\epsilon)}$ и $X_j^{(\epsilon)}$ имеет вид $\{X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}\}_\epsilon = C_{ij}^k\,X_k^{(\epsilon)} + \epsilon\,\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$, где $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ — постоянные величины, определяемые согласно формуле

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = F(\xi_i, \xi_j) - C_{ij}^k\,\vartheta_k. \tag{6.39}$$

В частности, если $\mathbf{F}_{ij} = C_{ij}^k\,\mu_k$, а ϑ_i выбраны в виде (6.37), имеем

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = F(\xi_i, \xi_j) - C_{ij}^k\,\vartheta_k = C_{kl}^m\,\mu_m\,\|\mathrm{Ad}_x\|_i^k\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^l - C_{ij}^k\,\|\mathrm{Ad}_x\|_k^m\,\mu_m = 0,$$

откуда для интегралов движения (6.38) получаем

$$\{X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}\}_\epsilon = C_{ij}^k\,X_k^{(\epsilon)}.$$

Следовательно, интегралы движения вида (6.38) образуют подалгебру в пуассоновой алгебре $(C^\infty(T^*M), \{\cdot,\cdot\}_\epsilon)$, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Для анализа общего случая рассмотрим центральное расширение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$, задаваемое с помощью 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$, и обозначим через $\tilde{G}$ соответствующую группу Ли, являющуюся центральным расширением G с помощью группы $\mathbb{R}$. Как мы уже отмечали выше, закон группового умножения в $\tilde{G}$ имеет вид (6.21), причем входящая в него функция $\Theta(x_1, x_2)$ представляет собой 2-коцикл группы G, связанный с 2-коциклом $\mathbf{F}$ формулой (6.24).

Утверждение 6.5. *Соотношениям* (6.36) *удовлетворяют функции*

$$\vartheta_i(x) = \frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=0} - \|\mathrm{Ad}_x\|_i^j \, \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y^j}\Big|_{y=0}, \quad i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}. \tag{6.40}$$

Доказательство. Предварительно отметим одно полезное равенство

$$\eta_i(x)\, \frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y^j}\Big|_{y=0} = -\xi_j(x)\, \frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}, \tag{6.41}$$

которое получается из условия (6.22), если в нем положить $x_1 = z$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ и последовательно продифференцировать его по z^i и y^j при $y = z = 0$.

Подействуем правоинвариантным векторным полем η_i на функцию ϑ_j, определяемую согласно (6.40). Тогда с учетом (6.41) получаем

$$\eta_i(x)\,\vartheta_j(x) = -\xi_j(x)\,\mathbf{A}_i(x) + \left[\eta_i(x)\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k\right]\mathbf{A}_k(x) + \|\mathrm{Ad}_x\|_j^k\,\eta_i(x)\mathbf{A}_k(x),$$

где введено обозначение $\mathbf{A}_i(x) = \partial_{y^i}\,\Theta(y,x)\big|_{y=0}$. Используя формулы (1.12) и (1.13), полученное равенство можно переписать в виде

$$\eta_i(x)\,\vartheta_j(x) = -\|\mathrm{Ad}_x\|_j^k\left[\eta_i(x)\,\mathbf{A}_k(x) - \eta_k(x)\,\mathbf{A}_i(x) - C_{ik}^l\,\mathbf{A}_l(x)\right].$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что согласно утверждению 6.3 функции $\mathbf{A}_i$ удовлетворяют уравнению (6.20), то есть выражение стоящее в квадратных скобках равно $\mathbf{F}_{ik}$. □

В заключение данного раздела отметим, что в силу равенства $\xi_i(x) = -\|\mathrm{Ad}_x\|_i^j\,\eta_j(x)$ формула (6.39) может быть переписана в виде

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = \|\mathrm{Ad}_x\|_i^k\,\|\mathrm{Ad}_x\|_j^l\,\mathbf{F}_{kl} - C_{ij}^k\,\vartheta_k(x).$$

Так как величины $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ представляют собой постоянные, при $x = e$ получаем

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij} = \mathbf{F}_{ij} - C_{ij}^k\,\vartheta_k(0).$$

Очевидно, что для функций (6.40) имеем $\vartheta_i(0) = 0$. Таким образом, при выборе частного решения системы (6.36) в виде (6.40), 2-коциклы $\mathbf{F}_{ij}$ и $\tilde{\mathbf{F}}_{ij}$ совпадают. В общем случае эти 2-коциклы отличаются, но при этом всегда принадлежат одному и тому же когомологическому классу в $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$.

Пример 6.3. Построим интегралы движения магнитного геодезического потока на группе $E(2)$ для случая правоинвариантного внешнего поля, рассмотренного в примере 6.2. Используя для 2-коцикла $\Theta(x,y)$ его явное выражение (6.33), согласно формулам (6.34) и (6.40) получаем

$$X_1^{(\epsilon)} = \cos x_3\, p_1 + \sin x_3\, p_2 + \epsilon\mu_1\left(x_1\sin x_3 - x_2\cos x_3\right) - \epsilon\mu_2\sin x_3 - \epsilon\mu_3\left(1-\cos x_3\right), \tag{6.42}$$

$$X_2^{(\epsilon)} = -\sin x_3\, p_1 + \cos x_3\, p_2 + \epsilon\mu_1\left(x_1\cos x_3 + x_2\sin\ x_3\right) - \epsilon\mu_2\left(1-\cos x_3\right) - \epsilon\mu_3\sin x_3, \tag{6.43}$$

$$X_3^{(\epsilon)} = p_3 - \frac{\epsilon\mu_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \epsilon\mu_2 x_1 + \epsilon\mu_3 x_2. \tag{6.44}$$

Прямыми вычислениями нетрудно проверить, что

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon\mu_1, \quad \{X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = -X_3^{(\epsilon)} + \epsilon\mu_2, \quad \{X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_2^{(\epsilon)} + \epsilon\mu_2.$$

Сравнивая полученные соотношения с коммутационными соотношениями (6.32) мы видим, что алгебра, образованная интегралами движения (6.42) – (6.44), представляет собой одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}(2)$, соответствующее 2-коциклу (6.29).

6.2.3 Метод интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли

Изложим теперь метод интегрирования в квадратурах магнитных геодезических потоков правоинвариантных метрик на группах Ли.

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$ — одномерное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построенное с помощью 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Обозначим через $\tilde{G}$ группу Ли, являющуюся центральным расширением группы G с помощью коммутативной группы $\mathbb{R}$ и имеющую алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ в качестве алгебры Ли. Отождествим дуальное пространство $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ с прямой суммой $\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ и обозначим общий элемент этого пространства (λ,ϵ). Как следует из закона композиции (6.21), коприсоединенное действие $\tilde{G}$ сводится к действию группы G, так как центральная подгруппа $\mathbb{R}$ действует на $\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ тривиально:

$$\widetilde{\mathrm{Ad}_g^*}\,(\lambda,\epsilon) = \left(\mathrm{Ad}_g^*\,\lambda + \epsilon\,\vartheta(g^{-1}), \epsilon\right), \quad g \in G.$$

Здесь $\vartheta(g) = \vartheta_i(g)e^i \in \mathfrak{g}^*$, где функции $\vartheta_i(g)$ определены равенством (6.40). Таким образом, коприсоединенное действие группы $\tilde{G}$ оставляет инвариантными гиперплоскости $\epsilon = \mathrm{const}$, причем на каждой такой гиперплоскости это действие является аффинным преобразованием, линейная часть которого совпадает с обычным коприсоединенным действием группы G.

Обозначим через $\mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)} \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ коприсоединенную орбиту группы $\tilde{G}$, проходящую через ковектор (λ, ϵ). В частности, орбита $\mathcal{O}_\lambda^{(0)}$ совпадает с обычной коприсоединенной орбитой $\mathcal{O}_\lambda$ группы G. Как однородное пространство орбита $\mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)}$ диффеоморфна фактор-пространству $\tilde{G}^{(\lambda,\epsilon)} \backslash \tilde{G}$, где $\tilde{G}^{(\lambda,\epsilon)} \subset \tilde{G}$ — группа стационарности ковектора (λ, ϵ). Соответствующая алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^{(\lambda,\epsilon)} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ является аннулятором ковектора (λ, ϵ) и, как нетрудно видеть из (6.25) и (6.40), разлагается в прямую сумму алгебр Ли: $\tilde{\mathfrak{g}}^{(\lambda,\epsilon)} = \mathfrak{g}_{\mathbf{F}}^{\lambda,\epsilon} \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{g}_{\mathbf{F}}^{\lambda,\epsilon}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, определяемая как

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{F}}^{\lambda,\epsilon} \equiv \{Z \in \mathfrak{g} \colon (\mathrm{ad}_Z^* \lambda)(\cdot) = \epsilon\, \mathbf{F}(Z, \cdot)\}. \tag{6.45}$$

Как следствие, для размерности коприсоединенной орбиты $\mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)}$ можно записать

$$\dim \mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{\mathbf{F}}^{\lambda,\epsilon}.$$

Обобщим понятие индекса алгебры Ли введя следующее

Определение 6.2. Пусть $[\mathbf{F}] \in \mathbf{H}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ — когомологический класс 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. *Индексом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *класса когомологий* $[\mathbf{F}]$ (или просто *когомологическим индексом*) будем называть целое неотрицательное число

$$\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} \equiv \inf_{\mathbf{F} \in [\mathbf{F}]} \dim \ker \mathbf{F}. \tag{6.46}$$

Так как по определению $\ker \mathbf{F} = \{Z \in \mathfrak{g} \colon \mathbf{F}(Z, \cdot\,) = 0\}$, используя (6.45) получаем

$$\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}_{\mathbf{F}}^{\lambda,1} = \inf_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} \mathrm{corank}\, \| C_{ij}^k\, \lambda_k + \mathbf{F}_{ij} \|. \tag{6.47}$$

Отсюда видно, что при $\mathbf{F} \in [0]$ когомологический индекс совпадает с обычным индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Кроме того, из (6.47) следует, что размерность всякой регулярной коприсоединенной орбиты $\mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)} \subset \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ равна

$$\dim \mathcal{O}_\lambda^{(\epsilon)} = \dim \mathfrak{g} - \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g}.$$

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{n}}$ поляризацию регулярного ковектора (λ, ϵ). Чтобы избежать излишних технических сложностей будем считать данную поляризацию вещественной, хотя все излагаемые ниже результаты могут быть перенесены и на случай комплексной поляризации (см. пример ниже). Имеет место включение $\mathbb{R} \subset \tilde{\mathfrak{n}}$, поэтому поляризация $\tilde{\mathfrak{n}}$ разлагается в прямую сумму $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_{\mathbf{F}} \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{n}_{\mathbf{F}}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая что

$$\dim \mathfrak{n}_{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \left(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} \right), \quad \epsilon \mathbf{F}(Z_1, Z_2) + \langle \lambda, [Z_1, Z_2] \rangle = 0, \quad Z_1, Z_2 \in \mathfrak{n}_{\mathbf{F}}.$$

В частности, при $\mathbf{F}=0$ подалгебра $\mathfrak{n}_{\mathbf{F}}$ совпадает с поляризацией ковектора λ.

По заданной поляризации $\tilde{\mathfrak{n}}$ построим функции линейного перехода к координатам Дарбу (u,v) на орбите коприсоединенного представления $\mathcal{O}^{(\epsilon)}_\lambda$:

$$f^{(\epsilon)}_0(u,v;\lambda)=\epsilon,\quad f^{(\epsilon)}_i(u,v;\lambda)=\zeta^a_i(v)u_a+\chi^{(\epsilon)}_i(v;\lambda),\quad i=1,\dots,\dim\mathfrak{g}.$$

Из коммутационных соотношений (6.12) следует, что функции $\zeta^a_i(v)$ удовлетворяют системе равенств (2.30), поэтому векторные поля $\zeta_0=0$ и $\zeta_i=\zeta^a_i(v)\partial_{v^a}$ задают инфинитезимальное действие группы $\tilde{G}$ на (локальном) однородном пространстве $\tilde{V}=\exp(\tilde{\mathfrak{n}})\setminus\tilde{G}$. Очевидно, что данное действие не эффективно и фактически сводится к действию соответствующей фактор-группы $G\simeq\tilde{G}/\mathbb{R}$ на однородном пространстве $V=\exp(\mathfrak{n}_{\mathbf{F}})\setminus G$. Инфинитезимальные генераторы последнего — это векторные поля ζ_i, образующие алгебру Ли, изоморфную алгебре $\mathfrak{g}$. В свою очередь, функции $\chi^{(\epsilon)}_i(v;\lambda)$ подчиняются условию

$$\zeta^a_i(v)\,\frac{\partial\chi_j(v;\lambda)}{\partial v^a}-\zeta^a_j(v)\,\frac{\partial\chi_i(v;\lambda)}{\partial v^a}=C^k_{ij}\,\chi_k(v;\lambda)+\epsilon\,\mathbf{F}_{ij},\quad \chi^{(\epsilon)}_i(0;\lambda)=\lambda_i,$$

и поэтому определяют некоторую деформацию алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}(V)$, порождаемой векторными полями $\zeta_0=0$ и $\zeta_i=\zeta^a_i(v)\partial_{v^a}$.

Из закона композиции (6.21) вытекает, что левоинвариантные 1-формы $\tilde{\omega}^0$ и $\tilde{\omega}^i$ на группе $\tilde{G}$ имеют вид

$$\tilde{\omega}^0(t,x)=dt-\frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}\omega^i(x),\quad \tilde{\omega}^i(t,x)=\omega^i(x),$$

где ω^i — левоинвариантные 1-формы на группе G. Обозначим через $\Psi:V\times G\to V$ функцию действия группы G на однородном пространстве $V=\exp(\mathfrak{n}_{\mathbf{F}})\setminus G$. Тогда, как следует из формулы (2.56), производящая функция канонического действия группы $\tilde{G}$ на орбите $\mathcal{O}^{(\epsilon)}_\lambda$ будет иметь вид $S^{(\epsilon)}_\lambda(u',v,x)+\epsilon t$, где

$$S^{(\epsilon)}_\lambda(u',v,x)=u'_a\Psi^a(v,x)+\int\limits_e^x\left(\chi^{(\epsilon)}_i(\Psi(v,x);\lambda)-\epsilon\,\frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}\right)\omega^i(x). \tag{6.48}$$

Отметим, что в силу утверждения 2.3 функция $S^{(\epsilon)}_\lambda(u',v,x)$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$\xi_i(x)\,S^{(\epsilon)}_\lambda(u',v,x)=f^{(\epsilon)}_i\left(u',\frac{\partial S^{(\epsilon)}_\lambda}{\partial u'};\lambda\right)-\epsilon\,\frac{\partial\Theta(x,y)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}, \tag{6.49}$$

$$\eta_i(x)\,S^{(\epsilon)}_\lambda(u',v,x)=-f^{(\epsilon)}_i\left(\frac{\partial S^{(\epsilon)}_\lambda}{\partial v},v;\lambda\right)+\epsilon\,\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial y^i}\Big|_{y=0}. \tag{6.50}$$

Пусть (λ_0,ϵ) — некоторый регулярный ковектор в $\mathfrak{g}^*\oplus\mathbb{R}$. В пространстве коприсоединенных орбит группы $\tilde{G}$, лежащих в гиперплоскости $\epsilon=\mathrm{const}$ и близких к орбите $\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda_0}$, введем локальные координаты $J = (J_1, \ldots, J_{\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}})$, считая, что каждая орбита проходит через некоторый ковектор $\lambda(J) \in \mathfrak{g}^*$. В кокасательном расслоении T^*G рассмотрим гладкое взаимо однозначное локальное преобразование $(x,p) \to (u,v,u',v',J,\tau)$, заданное в некоторой окрестности точки $(e,\lambda_0) \in T^*_e G$ с помощью следующей системы равенств

$$\frac{\partial S^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}(u',v,x)}{\partial x^i} = p_i + \epsilon A_i, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}; \tag{6.51}$$

$$\frac{\partial S^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}(u',v,x)}{\partial u'_a} = v'^a, \quad \frac{\partial S^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}(u',v,x)}{\partial v^a} = u_a, \quad a = 1, \ldots, \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}\right); \tag{6.52}$$

$$\frac{\partial S^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}(u',v,x)}{\partial J_\nu} = \tau^\nu, \quad \nu = 1, \ldots, \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}. \tag{6.53}$$

Согласно построению имеем

$$\omega_\epsilon = dp_i \wedge dx^i + \frac{\epsilon}{2} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j = -du_a \wedge dv^a + du'_a \wedge dv'^a + dJ_\nu \wedge d\tau^\nu,$$

Из соотношений (6.49) и (6.50) следуют равенства

$$X^{(\epsilon)}_i(x,p) = f^{(\epsilon)}_i\left(u',v';\lambda(J)\right), \quad Y_i(x,p) = -f^{(\epsilon)}_i\left(u,v;\lambda(J)\right),$$

где функции $X^{(\epsilon)}_i(x,p)$ и $Y_i(x,p)$ определены формулами (6.34) и (2.7) соответственно, и кроме того предполагается, что переменные x, p, u, v, u', v', J и τ связаны преобразованием (6.51) – (6.53). Используя указанные равенства нетрудно видеть, что гамильтонова система (6.1), задающая магнитный геодезический поток правоинвариантной метрики на G, после преобразования (6.51) – (6.53) перейдет в каноническую гамильтонову систему вида

$$\dot{u}_a = \frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J)}{\partial v^a}, \quad \dot{v}_a = -\frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J)}{\partial u_a}, \tag{6.54}$$

$$\dot{v}'^a = \dot{u}'_a = \dot{J}_\nu = 0, \quad \dot{\tau}^\nu = \frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J)}{\partial J_\nu}, \tag{6.55}$$

где

$$\tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij}\, f^{(\epsilon)}_i(u,v;\lambda(J)) f^{(\epsilon)}_j(u,v;\lambda(J)).$$

Очевидно, что интегрируемость полученной системы уравнений эквивалентна интегрируемости ее подсистемы (6.54). Таким образом, нами доказана

Теорема 6.2. *Пусть F — замкнутая правоинвариантная 2-форма на группе Ли G, соответствующая 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Магнитный геодезический поток, задаваемый 2-формой F, является интегрируемым в квадратурах для произвольной правоинвариантной псевдоримановой метрики на G, если и только если*

$$\frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}\right) < 2. \tag{6.56}$$

Для полупростых алгебр Ли справедлива вторая лемма Уайтхеда, согласно которой $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = 0$ [143]. В этом случае любой 2-коцикл $\mathbf{F}$ алгебры $\mathfrak{g}$ является 2-кограницей, поэтому $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]}\mathfrak{g} = \operatorname{ind}\mathfrak{g}$. Следовательно, свойство интегрируемости геодезических потоков правоинвариантных метрик на полупростых группах Ли сохраняется и при «включении» внешнего правоинвариантного (электро)магнитного поля. Очевидно, что данное утверждение остается справедливым также и в случае произвольной алгебры Ли с нулевой группой 2-когомологий $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$.

В качестве иллюстрации более общей ситуации, рассмотрим пример интегрирования магнитного геодезического потока на трехмерной группе $E(2)$.

Пример 6.4. На группе $E(2)$ рассмотрим внешнее поле, задаваемое 2-формой (6.31) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$:

$$F = dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_1 \wedge dx_3 - x_2 dx_2 \wedge dx_3. \tag{6.57}$$

Согласно примеру 6.3 соответствующий магнитный геодезический поток допускает три интеграла движения

$$X_1^{(\epsilon)} = \cos x_3\, p_1 + \sin x_3\, p_2 + \epsilon\,(x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3)\,, \tag{6.58}$$

$$X_2^{(\epsilon)} = -\sin x_3\, p_1 + \cos x_3\, p_2 + \epsilon\,(x_1 \cos x_3 + x_2\ x_3)\,, \tag{6.59}$$

$$X_3^{(\epsilon)} = p_3 - \frac{\epsilon}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \tag{6.60}$$

которые относительно магнитной скобки Пуассона образуют алгебру Ли $\widetilde{\mathfrak{e}(2)}$, являющуюся центральным расширением алгебры $\mathfrak{e}(2)$:

$$\{X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \epsilon, \quad \{X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = -X_2^{(\epsilon)}, \quad \{X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}\}_\epsilon = X_1^{(\epsilon)}.$$

Зададим на группе $E(2)$ однопараметрическое семейство правоинвариантных метрик

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha(\sigma^1)^2 + (\sigma^2)^2 + (\sigma^3)^2 = \\ &= \alpha dx_1^2 + 2\alpha x_2 dx_1 dx_3 + dx_2^2 - 2x_1 dx_2 dx_3 + (1 + x_1^2 + \alpha x_2^2) dx_3^2, \quad \alpha \neq 0. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Здесь σ^i — правоинвариантные 1-формы, определяемые соотношениями (6.30). Отметим, что при $\alpha = 1$ данная метрика является плоской.

Значения метрики (6.61) на правоинвариантных векторных полях

$$\eta_1 = -\partial_{x_1}, \quad \eta_2 = -\partial_{x_2}, \quad \eta_3 = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} - \partial_{x_3},$$

даются постоянной матрицей

$$\|\mathbf{G}_{ij}\| = \|g(\eta_i, \eta_j)\| = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда для гамильтониана геодезического потока данной метрики получаем выражение

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\,\mathbf{G}^{ij} Y_i(x,p) Y_j(x,p) = \frac{1}{2}\left[\alpha Y_1^2(x,p) + Y_2^2(x,p) + Y_3^2(x,p)\right], \tag{6.62}$$

где функции $Y_i(x,p) \equiv \eta_i^j(x) p_j$ имеют вид

$$Y_1 = -p_1, \quad Y_2 = -p_2, \quad Y_3 = x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_3.$$

Таким образом, магнитный геодезический поток рассматриваемой метрики задается с помощью следующей системы уравнений

$$\dot{x}_1 = (\alpha^{-1} + x_2^2) p_1 - x_2(x_1 p_2 + p_3), \quad \dot{p}_1 = p_2(x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_3 + \epsilon), \tag{6.63}$$

$$\dot{x}_2 = (1 + x_2^2) p_2 + x_1(p_3 - x_2 p_1), \quad \dot{p}_2 = -p_1(x_2 p_1 - x_1 p_2 - p_3 + \epsilon\alpha^{-1}), \tag{6.64}$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 p_1 + x_1 p_2 + p_3, \quad \dot{p}_3 = \epsilon(\alpha^{-1} x_1 p_1 + x_2 p_2). \tag{6.65}$$

Метрика (6.61) является штеккелевой. Действительно, помимо гамильтониана (6.62) геодезический поток данной метрики допускает еще два интеграла движения

$$X_1^{(0)} = \cos x_3\, p_1 + \sin x_3\, p_2, \quad X_2^{(0)} = -\sin x_3\, p_1 + \cos x_3\, p_2,$$

находящихся в инволюции относительно обычной скобки Пуассона на T^*G. Таким образом, согласно теореме о необходимых и достаточных условиях штеккелевости риманова пространства [21] свободное уравнение Гамильтона – Якоби для метрики (6.61) допускает полное разделение переменных. С другой стороны, в присутствии внешнего поля (6.57) интегралы движения $X_1^{(\epsilon)}$ и $X_2^{(\epsilon)}$ уже не будут находится в инволюции относительно магнитной скобки Пуассона, поэтому они не могут быть использованы для разделения переменных в соответствующем уравнении Гамильтона – Якоби. Отметим, что алгебра Ли $\widetilde{\mathfrak{e}(2)}$, образованная интегралами движения (6.58) – (6.60), вообще не содержит двумерных коммутативных подалгебр, не включающих в себя тривиальный интеграл движения $X_0^{(\epsilon)} = \epsilon$. Что же касается интегралов движения магнитного геодезического потока, квадратичных по переменным p_i, то можно показать, что все они являются квадратичными комбинациями линейных интегралов движения (6.58) – (6.60), то есть принадлежат универсальной обертывающей алгебре $U(\widetilde{\mathfrak{e}(2)})$. При этом любой инволютивный набор, содержащий интеграл движения второго порядка по импульсам, с необходимостью будет включать функцию

$$K^{(\epsilon)} = (X_1^{(\epsilon)})^2 + (X_2^{(\epsilon)})^2 + 2\epsilon X_3^{(\epsilon)} = p_1^2 + p_2^2 + 2\epsilon(-x_2 p_1 + x_1 p_2 + p_3),$$

порождаемую функцией Казимира $\mathscr{K}^{(\epsilon)} = f_1^2 + f_2^2 + 2\epsilon f_3$ алгебры $\widetilde{\mathfrak{e}(2)}$. Однако присутствие в инволютивном наборе функции $K^{(\epsilon)}$ нарушает необходимые и достаточные условия разделения переменных в уравнении Гамильтона – Якоби, если только $\alpha \neq 1$ и $\epsilon \neq 0$. Следовательно, интегрирование магнитного геодезического потока метрики (6.61) методом Гамильтона – Якоби невозможно.

Покажем, что гамильтонова система (6.63) – (6.65) может быть проинтегрирована описанным нами методом. Предварительно отметим, что $\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{e}(2) = 1$, поэтому согласно теореме 6.2 данная гамильтонова система интегрируема.

При $\epsilon \neq 0$ регулярные орбиты коприсоединенного представления алгебры $\widetilde{\mathfrak{e}(2)}$ — это семейство эллиптических парабалоидов

$$\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)} = \{(f,\epsilon) \in \mathfrak{e}(2)^* \oplus \mathbb{R}\colon f_1^2 + f_2^2 + 2\epsilon f_3 = 2\epsilon J\}, \quad \lambda(J) = (0,0,J), \quad J \in \mathbb{R}.$$

Ковектор $\lambda(J) = (0,0,J)$ не допускает вещественных поляризаций (см. [181], стр. 83). В качестве комплексной поляризации выберем подалгебру $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}_{\mathbf{F}} \oplus \mathbb{R}$, где $\mathfrak{n}_{\mathbf{F}} = \{e_1 + ie_2, e_3\} \subset \mathfrak{e}(2)^{\mathbb{C}}$. Тогда функции, задающие линейный переход к каноническим координатам на орбитах, принимают вид

$$f_0^{(\epsilon)} = \epsilon, \quad f_1^{(\epsilon)} = iu + \frac{\epsilon v}{2}, \quad f_2^{(\epsilon)} = -u - \frac{i\epsilon v}{2}, \quad f_3^{(\epsilon)} = -iuv + J.$$

Из соотношений $f_1 + if_2 = \epsilon v$ и $f_1 - if_2 = 2iu$ следует, что областью определения переменной u, как, впрочем, и v, является вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Коприсоединенное действие группы $\widetilde{E(2)}$ приводит к действию группы $E(2)$ на комплексном однородном многообразии $V = \exp(\mathfrak{n}_{\mathbf{F}}) \setminus E(2) \simeq \mathbb{C}$:

$$\Psi(v,x) = e^{-ix_3}(v + ix_1 - x_2).$$

Функция $\Theta(x,y)$ определяется равенством (6.33), в котором необходимо положить $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = 0$:

$$\Theta(x,y) = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2x_3) y_1 y_2 + \frac{1}{4}\left(y_2^2 - y_1^2\right)\sin 2x_3 - x_2 y_1 \cos x_3 + x_2 y_2 \sin x_3.$$

Используя для левоинвариантных 1-форм ω^i их явные выражения (2.66), с помощью формулы (6.48) получаем

$$S^{(\epsilon)}_{\lambda}(u',v,x) = e^{-ix_3}\,(v + ix_1 - x_2)\,u' + \frac{\epsilon}{2}\,(x_1 - ix_2)\,v + \frac{i\epsilon}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 - 2ix_1x_2\right) + Jx_3.$$

Функции $S^{(\epsilon)}_{\lambda}(u',v,x)$ отвечает локальное преобразование в $T^*E(2)$, сводящееся к переходу от координат (x^i,p_i) к новым переменным (u,v,u',v',J,τ) и неявно заданное системой равенств (6.51) – (6.53). Разрешим данную систему равенств относительно переменных p_i и x^i:

$$p_1 = iu + \frac{\epsilon v}{2}, \quad p_2 = -u - \frac{i\epsilon v}{2}, \quad p_3 = iuv - ie^{i\tau}v'u - ie^{-i\tau}u'v + J, \tag{6.66}$$

$$x_1 = \frac{i}{2}\left(v - e^{i\tau}v'\right) + \frac{u - u'e^{-i\tau}}{\epsilon}, \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(v - e^{i\tau}v'\right) + \frac{i(u - u'e^{-i\tau})}{\epsilon}, \quad x_3 = \tau. \tag{6.67}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\omega_\epsilon = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 + dp_3 \wedge dx_3 +$$
$$+ \epsilon \left(dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_1 \wedge dx_3 - x_2 dx_2 \wedge dx_3\right) = -du \wedge dv + du' \wedge dv' + dJ \wedge d\tau.$$

Применяя преобразование (6.66), (6.67) к гамильтониану (6.62), получаем

$$\tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J) = \frac{1}{2}\left(1 - \alpha - v^2\right)u^2 - \frac{i}{2}\left(2J - \epsilon - \epsilon\alpha\right)uv + \frac{\epsilon^2 v^2}{8}\left(\alpha - 1\right) + \frac{J^2}{2}.$$

Гамильтонова система (6.54), отвечающая этому гамильтониану, двумерна и с помощью интеграла «энергии» $\tilde{H}^{(\epsilon)}(u,v;J) = E$ элементарно интегрируется в квадратурах.

Магнитные геодезические потоки на трех- и четырехмерных многообразиях представляют с точки зрения физических приложений особый интерес. Обсудим в связи с этим интегрируемость магнитных геодезических потоков правоинвариантных метрик на трех- и четырехмерных группах Ли.

Так как ранг произвольной кососимметрической матрицы является четным числом, когомологический индекс всякой трехмерной алгебры Ли согласно (6.47) будет равен либо 1, либо 3, причем последнее возможно только для коммутативной алгебры. В обоих случаях неравенство (6.56), очевидно, выполняется. Таким образом, в качестве простого следствия теоремы 6.2 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 6.1. *Пусть F — произвольная правоинвариантная замкнутая 2-форма, заданная на трехмерной группе Ли G. Тогда соответствующий данной 2-форме магнитный геодезический поток является интегрируемым в квадратурах для всякой правоинвариантной метрики на G.*

Что касается четырехмерных групп Ли, здесь возможны как интегрируемые, так и не интегрируемые случаи. В Приложении В, основываясь на классификации всех вещественных четырехмерных алгебр Ли, мы приводим всевозможные канонические формы 2-коциклов и выделяем их подклассы, для которых выполняется условие (6.56).

§ 6.3 Интегрирование магнитных геодезических потоков на однородных пространствах

Обобщим теперь метод интегрирования магнитных геодезических потоков на группах Ли на более общий случай — случай однородных пространств.

Пусть G — связная вещественная группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа, $M = H\backslash G$ — соответствующее правое однородное пространство, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G и H соответственно. Допустим, что на однородном пространстве M задана замкнутая G-инвариантная 2-форма F. Каждому инфинитезимальному генератору $\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}$ действия группы G на M поставим в соответствие функцию $X_i^{(\epsilon)}(x,p) \equiv \zeta_i^a(x)p_a + \epsilon\vartheta_i(x)$, где функция $\vartheta_i(x)$ однозначно определена условиями: $d\vartheta_i = -i_{\zeta_i}F$, $\vartheta_i(x_0) = 0$. Здесь $x_0 \in H \setminus G$ — выделенная точка, представляющая собой правый смежный класс единичного элемента группы G. Как было показано в § 6.1, функции $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$ являются интегралами движения магнитного геодезического потока всякой G-инвариантной метрики на M. Кроме того, относительно магнитной скобки Пуассона данные функции образуют алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$, являющуюся одномерным центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$, построенным с помощью 2-коцикла $\mathbf{F}_{ij} = F(\zeta_i,\zeta_j) - C_{ij}^k\,\chi_k$.

Определим отображение $\mu^{(\epsilon)} : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ с помощью следующего правила

$$\langle \mu^{(\epsilon)}(x,p), e_i\rangle \equiv X_i^{(\epsilon)}(x,p). \tag{6.68}$$

Отображение (6.68) будем называть *магнитным отображением момента*. Согласно определению

$$\{\varphi\circ\mu^{(\epsilon)}, \psi\circ\mu^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \{\varphi,\psi\}_{\mathfrak{g},\epsilon}\circ\mu^{(\epsilon)}, \quad \varphi,\psi\in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Здесь скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g},\epsilon}$, заданная на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$, называется *магнитной скобкой Ли – Пуассона* и определяется равенством

$$\{\varphi,\psi\}_{\mathfrak{g},\epsilon}(f) \equiv \left(C_{ij}^k\, f_k + \epsilon\mathbf{F}_{ij}\right)\frac{\partial\varphi(f)}{\partial f_i}\,\frac{\partial\psi(f)}{\partial f_j}.$$

Таким образом, отображение $\mu^{(\epsilon)}$ — пуассоновое; оно переводит магнитную скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\epsilon$ на T^*M в магнитную скобку Ли – Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g},\epsilon}$ на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^*$.

В общем случае магнитное отображение момента $\mu^{(\epsilon)} : T^*M \to \mathfrak{g}^*$ может быть не сюръективным, то есть как гладкое многообразие его образ может иметь размерность меньшую, чем $\dim\mathfrak{g}$.

Определение 6.3. Функцию $\Gamma(f) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ такую, что $\Gamma(\mu^{(\epsilon)}(x,p)) \equiv 0$, будем называть *магнитным тождеством*.

Ясно, что магнитные тождества — это функциональные соотношения между интегралами движения $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$. В дальнейшем для нас важную роль будет играть число функционально независимых магнитных тождеств.

Утверждение 6.6. *Число функционально независимых магнитных тождеств равно индексу i_M однородного пространства $M = H \setminus G$.*

Доказательство. Очевидно, что число k функционально независимых магнитных тождеств равно

$$k = \dim \mathfrak{g} - \sup_{z \in T^*M} \dim F_z,$$

где $F_z \subset T_z(T^*M)$ — подпространство, порождаемое дифференциалами функций $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$. В силу транзитивности действия G на M мы можем положить в данной формуле $x = x_0$ так, что

$$k = \dim \mathfrak{g} - \sup_{\lambda \in T^*_{x_0}M} \dim F_{(x_0,\lambda)}. \tag{6.69}$$

Пусть $\{e_\alpha\}$, $(\alpha = 1, \ldots, \dim \mathfrak{h})$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$ группы H, $\{e_a\}$, $(a = \dim \mathfrak{h} + 1, \ldots, \dim \mathfrak{g})$ — базис подпространства, дополнительного к подалгебре $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Ясно, что в этом случае $\zeta_\alpha^a(x_0) = 0$, причем без ограничения общности мы можем положить $\zeta_a^b(x_0) = \delta_a^b$. Для указанного базиса имеет место соотношение

$$\left.\frac{\partial \zeta_\alpha^b(x)}{\partial x^a}\right|_{x=x_0} = C_{a\alpha}^b, \quad \alpha = 1, \ldots, \dim \mathfrak{h}; \quad a, b = \dim \mathfrak{h} + 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}, \tag{6.70}$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $\{e_i\} = \{e_\alpha\} \cup \{e_a\}$. Отметим также, что изоморфизм $\pi^* : T^*_{x_0}M \to \mathfrak{h}^\perp$, индуцируемый естественной проекцией $\pi : G \to H \setminus G$, при данном выборе базиса фактически отождествляет кокасательное пространство $T^*_{x_0}M$ с аннулятором $\mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$ подалгебры $\mathfrak{h}$:

$$\pi^*(\lambda) = \lambda_a e^a, \quad \lambda = \lambda_a dx_0^a \in T^*_{x_0}M.$$

Имея ввиду этот факт, далее мы будем отождествлять между собой ковекторы из пространств $T^*_{x_0}M$ и $\mathfrak{h}^\perp$.

Распишем подробнее дифференциал функции $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$ в точке (x_0, λ), $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp$:

$$dX_i^{(\epsilon)}(x_0,\lambda) = \left(\left.\frac{\zeta_i^b(x)}{\partial x^a}\right|_{x=x_0} \lambda_b + \epsilon \left.\frac{\partial \vartheta_i(x)}{\partial x^a}\right|_{x=x_0} \right) dx^a + \zeta_i^a(x_0) dp_a.$$

Так как дифференциалы dx^a и dp_a являются линейно независимыми, линейная комбинация $Z^i\, dX_i^{(\epsilon)}(x_0,\lambda)$ будет равна нулю тогда и только тогда , когда

$$Z^i \left(\left.\frac{\zeta_i^b(x)}{\partial x^a}\right|_{x=x_0} \lambda_b + \epsilon \left.\frac{\partial \vartheta_i(x)}{\partial x^a}\right|_{x=x_0} \right) = 0, \quad Z^i \zeta_i^a(x_0) = 0.$$

Из второго равенства сразу же следует, что $Z^a = 0$, $a = \dim\mathfrak{h} + 1, \ldots, \dim\mathfrak{g}$. Далее, в силу соотношения $d\vartheta_i = -i_{\zeta_i}F$ имеем

$$\frac{\partial\vartheta_\alpha(x)}{\partial x^a}\Big|_{x=x_0} = 0,$$

откуда с учетом формулы (6.70) получаем следующую систему алгебраических уравнений на неизвестные компоненты Z^α, $\alpha = 1, \ldots, \dim\mathfrak{h}$:

$$C_{a\alpha}(\lambda)Z^\alpha = 0, \quad C_{a\alpha}(\lambda) \equiv C^b_{a\alpha}\lambda_b.$$

Число линейно независимых решений данной системы равно $\dim\mathfrak{h} - \operatorname{rank}\|C_{a\alpha}(\lambda)\|$, откуда для размерности пространства $F_{(x_0,\lambda)}$ имеем

$$\dim F_{(x_0,\lambda)} = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h} + \operatorname{rank}\|C_{a\alpha}(\lambda)\|.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (6.69) получаем

$$k = \dim\mathfrak{h} - \sup_{\lambda\in\mathfrak{h}^\perp}\operatorname{rank}\|C_{a\alpha}(\lambda)\|,$$

или в инвариантной форме

$$k = \dim\mathfrak{h} - \sup_{\lambda\in\mathfrak{h}^\perp}\langle\lambda, [\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\rangle = \inf_{\lambda\in\mathfrak{h}^\perp}\mathfrak{h}^\lambda, \quad \mathfrak{h}^\lambda \equiv \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}^\lambda. \tag{6.71}$$

Вспоминая теперь, что индекс i_M однородного пространства $M = H\setminus G$ вычисляется согласно второй из формул (4.17), сравнивая последнюю с полученным нами равенством (6.71), заключаем, что $k = i_M$. □

Напомним, что индекс i_M однородного пространства M — это число функционально независимых обычных (не магнитных) тождеств, то есть функций на $\mathfrak{g}^*$, представляющих собой функциональные зависимости между интегралами движения $X_i(x,p) = \zeta^a_i(x)p_a$. Из доказанного утверждения следует, что количество обычных тождеств в определенном смысле равно количеству магнитных тождеств. Однако не смотря на это, магнитные и обычные тождества все же не совпадают друг с другом; последние, как нетрудно видеть, получаются из магнитных тождеств путем предельного перехода $\epsilon \to 0$. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 6.5. Рассмотрим четырехмерное однородное пространство $M = H\setminus G$, где G — 8-мерная вещественная группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения

$$[e_1,e_2] = 2e_2, \quad [e_1,e_3] = -2e_3, \quad [e_1,e_5] = e_5, \quad [e_1,e_6] = -e_6, \quad [e_1,e_7] = -e_7,$$

$$[e_1, e_8] = e_8, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_6] = e_5, \quad [e_2, e_7] = -e_8, \quad [e_3, e_5] = e_6, \quad [e_3, e_8] = -e_7,$$

$$[e_4, e_7] = -e_6, \quad [e_4, e_8] = e_5, \quad [e_7, e_8] = e_4.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы H задается базисными векторами e_1, e_2, e_3 и e_4. Согласно (4.17) индекс i_M данного однородного пространства равен единице.

В некоторой окрестности единичного элемента группы G введем канонические координаты второго рода

$$g_{h,x} = \prod_{\alpha=1}^{4} \exp(h_\alpha e_\alpha) \prod_{a=1}^{4} \exp(x_a e_{a+4});$$

тогда набор x_1, x_2, x_3, x_4 можно принять в качестве локальных координат на однородном пространстве M. В этих координатах инфинитезимальные генераторы действия группы G на M будут иметь вид:

$$\zeta_1 = -x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3} - x_4\partial_{x_4}, \quad \zeta_2 = -x_2\partial_{x_1} - \frac{x_3^3}{3}\,\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_4},$$

$$\zeta_3 = \frac{x_4^3}{6}\,\partial_{x_1} - \left(x_1 + \frac{x_3 x_4^2}{2}\right)\partial_{x_2} + x_4\partial_{x_3}, \quad \zeta_4 = -x_4\partial_{x_1} + x_3\partial_{x_2}, \quad \zeta_5 = \partial_{x_1}, \quad \zeta_6 = \partial_{x_2},$$

$$\zeta_7 = \frac{x_4^2}{2}\,\partial_{x_1} - x_3x_4\partial_{x_2} + \partial_{x_3}, \quad \zeta_8 = \partial_{x_4}.$$

Рассматриваемое однородное пространство допускает существование G-инвариантной псевдоримановой метрики. С точностью до масштабного преобразования эта метрика единственна:

$$ds^2 = 2dx_1dx_3 + 2dx_2dx_4 + x_3^2\,dx_4^2. \tag{6.72}$$

Мы также зададим на однородном пространстве M внешнее электромагнитное поле, определяемое замкнутой G-инвариантной 2-формой F:

$$F = dx_3 \wedge dx_4. \tag{6.73}$$

Согласно теореме 6.1, магнитный геодезический поток, соответствующий метрике (6.72) и внешнему полю (6.73), допускает алгебру интегралов движения, порождаемую функциями

$$X_1^{(\epsilon)} = -x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 - \epsilon x_3x_4, \quad X_2^{(\epsilon)} = -x_2p_1 - \frac{x_3^3}{3}\,p_2 + x_3p_4 + \frac{\epsilon x_3^2}{2},$$

$$X_3^{(\epsilon)} = \frac{x_4^3}{6}\,p_1 - \left(x_1 + \frac{x_3x_4^2}{2}\right)p_2 + x_4p_3 - \frac{\epsilon x_4^2}{2}, \quad X_4^{(\epsilon)} = -x_4p_1 + x_3p_2, \quad X_5^{(\epsilon)} = p_1,$$

$$X_6^{(\epsilon)} = p_2, \quad X_7^{(\epsilon)} = \frac{x_4^2}{2}\,p_1 - x_3x_4p_2 + p_3 - \epsilon x_4, \quad X_8^{(\epsilon)} = p_4 + \epsilon x_3.$$

Как нетрудно проверить, данная пуассонова алгебра изоморфна одномерному центральному расширению алгебры $\mathfrak{g}$, построенному с помощью 2-коцикла $\mathbf{F} = e^7 \wedge e^8 \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$.

Непосредственной проверкой несложно убедиться, что функция

$$\Gamma(f) = \frac{1}{3} f_4^3 - f_4 f_5 f_7 - f_4 f_6 f_8 + f_1 f_5 f_6 + f_2 f_6^2 - f_3 f_5^2 + \frac{\epsilon f_4^2}{2} \in C^\infty(\mathfrak{g}^*) \qquad (6.74)$$

тождественно удовлетворяет условию $\Gamma(X^{(\epsilon)}(x,p)) = 0$, то есть является магнитным тождеством. Можно также показать, что любое другое магнитное тождество будет являться некоторой функцией от $\Gamma(f)$. Тем самым мы заключаем, что число функционально независимых магнитных тождеств в данном примере равно индексу i_M однородного пространства M. При этом обычное (не магнитное) тождество получается из (6.74) наложением условия $\epsilon = 0$.

Исследуем теперь вопрос о существовании функций $Y(x,p)$ на T^*M, удовлетворяющих условию

$$\{Y(x,p), X_i^{(\epsilon)}(x,p)\}_\epsilon = 0, \quad i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}. \qquad (6.75)$$

Данному классу функций, например, будет принадлежать гамильтониан магнитного геодезического потока, рассматриваемый относительно всякой G-инвариантной псевдоримановой метрики на $M = H \setminus G$.

Утверждение 6.7. *Функция $Y(x,p)$ тогда и только тогда удовлетворяет условию* (6.75), *когда она инвариантна относительно действия группы G на M.*

Доказательство. Магнитная скобка Пуассона (6.2) функций $Y(x,p)$ и $X_i^{(\epsilon)}(x,p) = \zeta_i^a(x) p_a + \epsilon \vartheta_i(x)$ может быть представлена как

$$\{Y, X_i^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \{Y, X_i\} + \epsilon \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x^a} - F_{ab}\, \zeta_i^b \right) \frac{\partial Y}{\partial p_a},$$

где $X_i(x,p) = \zeta_i^a(x) p_a$. В силу соотношения $d\vartheta_i = -i_{\zeta_i} F$ выражение в круглых скобках равно нулю, поэтому

$$\{Y, X_i^{(\epsilon)}\}_\epsilon = \{Y, X_i\},$$

что в виду связности группы G равносильно доказываемому утверждению. □

Таким образом, функции из $C^\infty(T^*M)$, находящиеся в инволюции относительно магнитной скобки Пуассона со всеми интегралами движения $X_i^{(\epsilon)}(x,p)$, суть инвариантные функции на T^*M. В § 4.1 было отмечено, что относительно обычной канонической скобки Пуассона на T^*M инвариантные функции образуют пуассонову алгебру $\mathscr{F}$, размерность которой определяется согласно формуле (4.23). С другой стороны, относительно магнитной скобки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\epsilon$ эти функции также будут образовывать некоторую пуассоновую алгебру $\mathscr{F}^\epsilon$, в общем случае являющуюся деформацией алгебры $\mathscr{F}$ (ср. с формулой (4.19)):

$$\{Y_\alpha, Y_\beta\}_\epsilon = \Omega_{\alpha\beta}^{(\epsilon)}(Y) \equiv \Omega_{\alpha\beta}(Y) - \epsilon\, F_{ab} \frac{\partial Y_\alpha}{\partial p_a} \frac{\partial Y_\beta}{\partial p_b}.$$

Здесь $\{Y_\alpha\}$ — максимальный набор функционально независимых инвариантных функций.

Пусть $\tilde{\mu}^{(\epsilon)} : T^*M \to \mathscr{F}^*$ — отображение, задаваемое системой равенств $Y_\alpha(x,p) = a_\alpha$, $\alpha = 1,\ldots,\dim\mathscr{F}$. Очевидно, что это отображение пуассоновое: магнитная скобка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_\epsilon$ при отображении $\tilde{\mu}^{(\epsilon)}$ переходит в скобку Пуассона на $\mathscr{F}^*$, имеющую вид

$$\{\varphi,\psi\}_{\mathscr{F},\epsilon}(a) \equiv \Omega^{(\epsilon)}_{\alpha\beta}(a)\,\frac{\partial\varphi(a)}{\partial a_\alpha}\,\frac{\partial\psi(a)}{\partial a_\beta}.$$

Вместе с магнитным отображением момента $\mu^{(\epsilon)}$ отображение $\tilde{\mu}^{(\epsilon)}$ образует бирасслоение, и поэтому симплектические листы $\mathcal{O}^{(\epsilon)} \subset \mathfrak{g}^*$ и $\tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)} \subset \mathscr{F}^*$ находятся во взаимо однозначном соответствии друг с другом (см. [211], стр. 39). Так как симплектические листы в $\mathfrak{g}^*$ — это фактически орбиты коприсоединенного представления группы $\tilde{G}$, отсюда получаем

$$\operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)} = \dim\mathfrak{g}^{\lambda,\epsilon}_{\mathbf{F}} - i_M,$$

где подалгебра $\mathfrak{g}^{\lambda,\epsilon}_{\mathbf{F}} \subset \mathfrak{g}$ определена формулой (6.45), λ — ковектор, находящийся в общем положении в подпространстве $\mathfrak{h}^\perp$.

Обозначим посредством $d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}}$ число, равное половине размерности симплектического листа общего положения в $\mathscr{F}^*$. Так как $\dim\mathscr{F}^{(\epsilon)} = \dim\mathscr{F}$, используя формулу (4.23), имеем

$$d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\left(\dim\mathscr{F}^{(\epsilon)} - \operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)}\right) = \dim M + i_M - \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g}^{\lambda,\epsilon}_{\mathbf{F}}\right),$$

или с учетом равенств $i_M = \dim\mathfrak{h}^\lambda$ и $\dim M = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{h}$:

$$d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\,\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\lambda,\epsilon}_{\mathbf{F}} - \dim\mathfrak{h}/\mathfrak{h}^\lambda. \tag{6.76}$$

Определение 6.4. Целое неотрицательное число $d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}}$, определяемое равенством (6.76), будем называть *магнитным дефектом* однородного пространства $M = H\setminus G$.

Замечание 6.4. Из сравнения (6.76) с формулой (4.16) видно, что в случае $\epsilon = 0$ или при $\mathbf{F} = 0$ магнитный дефект $d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}}$ совпадает с обычным дефектом d_M однородного пространства M.

В § 4.4 мы описали эффективный метод интегрирования геодезических потоков G-инвариантных метрик на однородных пространствах, основанный на построении специального канонического преобразования в T^*M. Адаптируем указанный метод на случай интегрирования соответствующих магнитных геодезических потоков.

Пусть $\operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)}$-мерный вещественный параметр $J = (J_1,\ldots,J_{\operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)}})$ нумерует симплектические листы общего положения в пространстве $\mathscr{F}^*$. Это означает, что выбрана некоторая (локальная) гладкая параметризация $\sigma(J) \in \mathscr{F}^*$, взаимо однозначно сопоставляющая каждому значению J симплектический лист $\tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)}_{\sigma(J)}$, проходящий через элемент $\sigma(J)$. Согласованная с ней параметризация симплектических листов в $\mathfrak{g}^*$ имеет в этом случае следующий вид: $\lambda(J) \equiv \mu^{(\epsilon)}\left((\tilde{\mu}^{(\epsilon)})^{-1}(\sigma(J))\right) \in \mathfrak{g}^*$.

Пусть функции $f_i^{(\epsilon)}(u,v;J)$ определяют переход к каноническим координатам (u,v) на симплектическом листе $\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)} \in \mathfrak{g}^*$, а функции $a^{(\epsilon)}_{\alpha}(u',v';J)$ задают переход к координатам Дарбу (u',v') на симплектическим листе $\tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)}_{\sigma(J)}$. Отметим, что построение подобных координат может быть произведено алгебраическими методами без использования процедур интегрирования дифференциальных уравнений (см. § 2.2).

Многообразие $N^{(\epsilon)} = T^*M \times \mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)} \times \tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)}_{\sigma(J)}$ является симплектическим относительно 2-формы

$$\sum_{a=1}^{\dim M} dp_a \wedge dx^a + \epsilon \sum_{a,b=1}^{\dim M} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b - \sum_{\bar{a}=1}^{\frac{1}{2}\dim \mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}} du_{\bar{a}} \wedge dv^{\bar{a}} - \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}}} du'_{\bar{\alpha}} \wedge dv'^{\bar{\alpha}}. \tag{6.77}$$

Рассмотрим в $N^{(\epsilon)}$ поверхность $M_J^{(\epsilon)}$, задаваемую системой $\dim\mathfrak{g} + \dim\mathscr{F}$ уравнений вида

$$X_i^{(\epsilon)}(x,p) = f_i^{(\epsilon)}(u,v;J), \quad i = 1,\dots,\dim\mathfrak{g}; \tag{6.78}$$

$$Y_\alpha(x,p) = a^{(\epsilon)}_\alpha(u',v';J), \quad \alpha = 1,\dots,\dim\mathscr{F}. \tag{6.79}$$

Так как между функциями $\{X_i^{(\epsilon)}(x,p)\} \cup \{Y_\alpha(x,p)\}$ имеется $\operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)} + i_M$ функциональных зависимостей, для размерности $M_J^{(\epsilon)}$ будем иметь

$$\dim M_J^{(\epsilon)} = \dim M + \frac{1}{2}\dim\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)} + d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}} = \frac{1}{2}\dim N^{(\epsilon)},$$

то есть $M_J^{(\epsilon)}$ — поверхность половинной размерности в $N^{(\epsilon)}$. Кроме того, в силу инволютивности функционального набора $\{X_i^{(\epsilon)}(x,p) - f_i^{(\epsilon)}(u,v;J)\} \cup \{Y_\alpha(x,p) - a_i^{(\epsilon)}(u',v';J)\}$ относительно скобки Пуассона в $C^\infty(N^{(\epsilon)})$, определяемой симплектической формой (6.77), ограничение последней на $M_J^{(\epsilon)}$ равно нулю. Это означает, что $M_J^{(\epsilon)}$ — лагранжевая поверхность в $N^{(\epsilon)}$.

Не ограничивая общности, предположим, что из уравнений (6.78) и (6.79) мы можем явно выразить переменные p, u и v' как функции от переменных x, v и u'; тогда последние можно считать локальными координатами на лагранжевой поверхности $M_J^{(\epsilon)}$. Так как ограничение симплектической 2-формы (6.77) на эту поверхность равно нулю (в силу лагранжевости), 1-форма

$$\theta^{(\epsilon)}(u',v,x;J) = \sum_{a=1}^{\dim M} p_a(u',v,x;J)dx^a - \sum_{\bar{a}=1}^{\frac{1}{2}\dim\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}} u_{\bar{a}}(u',v,x;J)dv^a +$$
$$+ \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}}} v'^{\bar{\alpha}}(u',v,x;J)du'_{\bar{\alpha}},$$

зависящая от J как от параметра, будет удовлетворять условию $d\theta^{(\epsilon)} = -\epsilon F$. Определим $\operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)}$ дополнительных функций

$$\tau^{\nu}(u', v, x, J) = \int \frac{\partial}{\partial J_{\nu}}\, \theta^{(\epsilon)}(u', v, x; J). \tag{6.80}$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла есть замкнутая 1-форма, поэтому функции τ^{ν} определены с помощью (6.80) корректно.

Из системы равенств (6.78) – (6.80) выразим переменные (u, v, u', v', J, τ) как функции от фазовых переменных (x, p). Полученное преобразование является (локальным) гладким взаимо однозначным преобразованием в T^*M, причем согласно построению

$$dp_a \wedge dx^a + \frac{\epsilon}{2}\, F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b = du_{\bar{a}} \wedge dv^{\bar{a}} + du'_{\bar{\alpha}} \wedge dv'^{\bar{\alpha}} + dJ_{\nu} \wedge d\tau^{\nu}.$$

Из утверждения 6.7 следует, что гамильтониан магнитного геодезического потока G-инвариантной метрики является функцией от базисных инвариантных функций $Y_{\alpha}(x, p)$:

$$H(x, p) = \mathscr{H}(Y_1(x, p), \ldots, Y_{\dim \mathscr{F}}(x, p)).$$

После использования преобразования (6.78) – (6.80) данный гамильтониан перейдет в функцию

$$\tilde{H}^{(\epsilon)}(u', v'; J) = \mathscr{H}(a_1^{(\epsilon)}(u', v'; J), \ldots, a_{\dim F}^{(\epsilon)}(u', v'; J)),$$

а гамильтонова система (6.1) примет следующий вид:

$$\dot{v}'^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u', v', J)}{\partial u'_{\bar{\alpha}}}, \quad \dot{u}'_{\bar{\alpha}} = -\frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u', v', J)}{\partial v'^{\bar{\alpha}}}, \quad \bar{\alpha} = 1, \ldots, d_{M,\mathbf{F}}^{(\epsilon)}; \tag{6.81}$$

$$\dot{v}^{\bar{a}} = \dot{u}_{\bar{a}} = 0, \quad \bar{a} = 1, \ldots, \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\lambda}^{(\epsilon)}; \tag{6.82}$$

$$\dot{J}_{\mu} = 0, \quad \dot{\tau}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u', v', J)}{\partial J_{\mu}}, \quad \mu = 1, \ldots, \operatorname{ind}\mathscr{F}^{(\epsilon)}. \tag{6.83}$$

Подсистема (6.82), (6.83) элементарно интегрируется в квадратурах, если построено решение системы (6.81). Таким образом, интегрируемость магнитного геодезического потока G-инвариантной метрики равносильна интегрируемости гамильтоновой системы (6.81).

Теорема 6.3. *Пусть F — замкнутая G-инвариантная 2-форма на однородном пространстве $M = H \setminus G$, соответствующая 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Отвечающий 2-форме F магнитный геодезический поток является интегрируемым в квадратурах для произвольной G-инвариантной псевдоримановой метрики на M, если и только если*

$$d_{M,\mathbf{F}}^{(\epsilon)} < 2. \tag{6.84}$$

Проиллюстрируем описанный метод интегрирования магнитных геодезических потоков на нетривиальном примере.

Пример 6.6. Пусть M — четырехмерное псевдориманово однородное пространство, рассмотренное нами в примере 4.3. Проинтегрируем в квадратурах магнитный геодезический поток на M, соответствующий замкнутой инвариантной 2-форме

$$F = dx_1 \wedge dx_2. \tag{6.85}$$

Предварительно отметим, что согласно (6.9) 2-коцикл, определяемый 2-формой F, будет иметь вид $\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2$. Отсюда с помощью формулы (6.76) для магнитного дефекта получаем $d^{(\epsilon)}_{M,\mathbf{F}} = 1$, то есть рассматриваемый магнитный геодезический поток в соответствие с теоремой 6.3 является интегрируемым.

Используя для инфинитезимальных генераторов действия группы G на M их явные выражения (4.56), (4.57), выпишем интегралы движения магнитного геодезического потока

$$X^{(\epsilon)}_1 = p_1 - \epsilon x_2, \quad X^{(\epsilon)}_2 = p_2 + \epsilon x_1, \quad X^{(\epsilon)}_3 = x_2 p_1 + p_3 - \frac{\epsilon x_2^2}{2},$$

$$X^{(\epsilon)}_4 = -x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2x_3 p_3 + p_4 + \epsilon x_1 x_2, \quad X^{(\epsilon)}_5 = x_1 p_2 - x_3^2 p_3 + x_3 p_4 + \frac{\epsilon x_1^2}{2}.$$

Относительно магнитной скобки Пуассона эти интегралы движения образуют шестимерную алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, являющуюся одномерным центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G:

$$\{X^{(\epsilon)}_1, X^{(\epsilon)}_2\}_\epsilon = \epsilon, \quad \{X^{(\epsilon)}_1, X^{(\epsilon)}_3\}_\epsilon = 0, \quad \{X^{(\epsilon)}_1, X^{(\epsilon)}_4\}_\epsilon = -X^{(\epsilon)}_1, \quad \{X^{(\epsilon)}_1, X^{(\epsilon)}_5\}_\epsilon = X^{(\epsilon)}_2,$$

$$\{X^{(\epsilon)}_2, X^{(\epsilon)}_3\}_\epsilon = X^{(\epsilon)}_1, \quad \{X^{(\epsilon)}_2, X^{(\epsilon)}_4\}_\epsilon = X^{(\epsilon)}_2, \quad \{X^{(\epsilon)}_2, X^{(\epsilon)}_5\}_\epsilon = 0, \quad \{X^{(\epsilon)}_3, X^{(\epsilon)}_4\}_\epsilon = -2X^{(\epsilon)}_3,$$

$$\{X^{(\epsilon)}_3, X^{(\epsilon)}_5\}_\epsilon = X^{(\epsilon)}_4, \quad \{X^{(\epsilon)}_4, X^{(\epsilon)}_5\}_\epsilon = -2X^{(\epsilon)}_5.$$

Симплектические листы пуассонова многообразия $(\mathfrak{g}^*, \{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{g},\epsilon})$ четырехмерны и совпадают с орбитами коприсоединенного представления группы Ли $\tilde{G}$, ассоциированной с алгеброй $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)} = \left\{ f \in \mathfrak{g}^* \colon f_1^2 f_5 + f_1 f_2 f_4 - f_2^2 f_3 + \frac{\epsilon}{2}(f_4^2 + 4 f_3 f_5) = \epsilon J^2/2 \right\}, \tag{6.86}$$

$$\lambda(J) = (0, 1, -\epsilon J^2/2, 0, 0), \quad J \in \mathbb{C}.$$

Линейный канонический переход к координатам Дарбу (u, v) на орбите $\mathcal{O}^{(\epsilon)}_{\lambda(J)}$ задается функциями

$$f^{(\epsilon)}_1 = -u_1 v_2 - \epsilon\, v_1, \quad f^{(\epsilon)}_2 = u_1, \quad f^{(\epsilon)}_3 = -v_1 v_2 u_1 - v_2^2 u_2 - J v_2 - \frac{\epsilon\, v_1^2}{2}, \tag{6.87}$$

$$f^{(\epsilon)}_4 = v_1 u_1 + 2\, v_2 u_2 + J, \quad f^{(\epsilon)}_5 = u_2. \tag{6.88}$$

Как мы уже отмечали (см. пример 4.3), алгебра $\mathscr{F}$ инвариантных функций на T^*M является трехмерной алгеброй Ли и порождается системой образующих (4.58). Нетрудно проверить, что относительно магнитной скобки Пуассона инвариантные функции образуют алгебру Ли $\mathscr{F}^\epsilon$, отличную от алгебры $\mathscr{F}$:

$$\{Y_1, Y_2\}_\epsilon = Y_1, \quad \{Y_1, Y_3\}_\epsilon = \epsilon Y_2, \quad \{Y_2, Y_3\}_\epsilon = Y_3,$$

Соответствующие симплектические листы в $(\mathscr{F}^*, \{\cdot,\cdot\}_{\mathscr{F},\epsilon})$, согласованные с симплектическими листами (6.86), являются поверхностями уровня вида

$$\tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)}_{\sigma(J)} = \{a \in \mathscr{F}^*\colon a_1 a_3 - \epsilon a_2^2/2 = -\epsilon J^2/2\}, \quad \sigma(J) = (-1, 0, \epsilon J^2/2).$$

При этом линейный переход к каноническим координатам (u', v') на листе $\tilde{\mathcal{O}}^{(\epsilon)}_{\sigma(J)}$ определяется функциями

$$a_1^{(\epsilon)} = -\frac{u'}{J} - \frac{1}{v'}, \quad a_2^{(\epsilon)} = u'v', \quad a_3^{(\epsilon)} = \frac{\epsilon J v'}{2}\left(-u'v' + J\right).$$

Система уравнений (6.78), (6.79) записывается в виде

$$p_1 - \epsilon x_2 = -u_1 v_2 - \epsilon\, v_1, \quad p_2 + \epsilon x_1 = u_1, \quad x_2 p_1 + p_3 - \frac{\epsilon x_2^2}{2} = -v_1 v_2 u_1 - v_2^2 u_2 - J\, v_2 - \frac{\epsilon\, v_1^2}{2}, \tag{6.89}$$

$$-x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2 x_3 p_3 + p_4 + \epsilon x_1 x_2 = v_1 u_1 + 2\, v_2 u_2 + J, \quad x_1 p_2 - x_3^2 p_3 + x_3 p_4 + \frac{\epsilon x_1^2}{2} = u_2, \tag{6.90}$$

$$-e^{x_4}(x_3 p_1 + p_2) = -\frac{u'}{J} - \frac{1}{v'}, \quad -p_4 = u'v', e^{-x_4}(p_1 p_4 - x_3 p_1 p_3 - p_2 p_3) = \frac{\epsilon\, J\, v'}{2}\left(-u'v' + J\right). \tag{6.91}$$

С помощью формулы (6.80) найдем функцию τ:

$$\tau = \ln\left(x_1 v_2 - x_2 + v_1\right) - \frac{u'\left(x_1 v_2 - x_2 + v_1\right) e^{-x_4}}{J^2\left(x_3 v_2 - 1\right)}. \tag{6.92}$$

Формулы (6.89) – (6.92) неявно задают локальное преобразование $(x, p) \to (u, v, u', v', J, \tau)$ в пространстве T^*M. Применяя данное преобразование в гамильтониану (4.59) получаем

$$\tilde{H}^{(\epsilon)}(u', v'; J) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{J^2} - \frac{c_3 v'}{J} + c_2 v'^2\right) u'^2 + \left(\frac{c_1}{J v'} - \frac{c_3}{2} - \frac{\epsilon J c_4 v'^2}{4}\right) u' + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{v'^2} + \frac{\epsilon J^2 c_4 v'}{2}\right). \tag{6.93}$$

Гамильтонова система (6.81) с гамильтонианом (6.93) элементарно интегрируется в квадратурах, переменные v, u и J в данном случае будут константами, а зависимость переменной τ от параметра интегрирования s определяется интегралом

$$\tau(s) = \int \frac{\partial \tilde{H}^{(\epsilon)}(u'(s), v'(s); J)}{\partial J}\, ds.$$

В работе [215] приведена классификация всех четырехмерных псевдоримановых пространств с нетривиальной подгруппой изотропии. Для каждого однородного пространства $M = H \setminus G$ из это классификации мы построили наиболее общий вид 2-коцикла, отвечающего замкнутой G-инвариантной 2-форме на M, и вычислили соответствующий магнитный дефект. Проверив для каждого случая условие (6.84), мы приходим к следующему следствию теоремы 6.3.

Следствие 6.2. *Пусть $M = H \setminus G$ — четырехмерное однородное пространство с нетривиальной подгруппой изотропии H, снабженное G-инвариантной метрикой, F — замкнутая G-инвариантная 2-форма на M. Тогда магнитный геодезический поток, соответствующий 2-форме F, интегрируем в квадратурах.*

§ 6.4 Замечание об интегрируемости уравнений Вонга в классе линейных интегралов движения

6.4.1 Гамильтонова форма уравнений Вонга

Уравнения Вонга описывают динамику классической изоспиновой частицы, движущейся во внешнем гравитационном поле с метрикой g_{ij} и калибровочном поле с потенциалом A_i^a [134]:

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j, \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\, p_j p_k + F_{ij}^a\, g^{jk} p_k \tau_a, \tag{6.94}$$

$$\dot{\tau}_a = -C_{ab}^c\, \tau_c A_i^b g^{ij} p_j. \tag{6.95}$$

Здесь x^i, p_i — фазовые координаты частицы, τ_a — ее координаты в изоспиновом пространстве. Тензор напряженности калибровочного поля определяется выражением

$$F_{ij}^c = \frac{\partial A_j^c}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i^c}{\partial x^j} + C_{ab}^c\, A_i^a A_j^b.$$

где C_{ab}^c — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{k}$ калибровочной группы K (в качестве калибровочный группы мы рассматриваем произвольную компактную группу Ли). Точкой обозначено дифференцирование по собственному времени частицы. Константу связи мы будем полагать равной единице.

В пространстве функций от переменных x^i, p_i, τ_a рассмотрим скобку Пуассона

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - C_{ab}^c\, A_i^b \tau_c \frac{\partial \psi}{\partial \tau_a}\right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - C_{ab}^c\, A_i^b \tau_c \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a}\right)\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \\ - F_{ij}^c\, \tau_c \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_j} - C_{ab}^c\, \tau_c \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a}\frac{\partial \psi}{\partial \tau_b}. \tag{6.96}$$

Заметим, что тождество Якоби для данной скобки есть следствие тождества Бианки для тензора напряженности F_{ij}^c, а также следствие тождества Якоби для структурных констант C_{ab}^c алгебры $\mathfrak{k}$. Ненулевые скобки Пуассона для самих координат имеют вид

$$\{p_i, p_j\} = -F_{ij}^c\,\tau_c, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j, \quad \{p_i, \tau_a\} = -C_{ab}^c\,A_i^b\tau_c, \quad \{\tau_a, \tau_b\} = -C_{ab}^c\,\tau_c. \tag{6.97}$$

В случае тривиальной калибровочной группы $K = \{e\}$ скобка Пуассона (6.96) является обычной канонической скобкой Пуассона на T^*M. В случае $K = U(1)$ (случай электромагнитного поля) скобка (6.96) совпадает с магнитной скобкой Пуассона (6.2).

Если в алгебре $\mathfrak{k}$ ввести базис $\{e_a\}$ такой, что $[e_a, e_b] = C_{ab}^c\,e_c$, тогда изоспиновые переменные τ_a можно рассматривать как линейные координаты некоторого дуального вектора $\tau \in \mathfrak{k}^*$, заданные в указанном базисе. При этом ограничение скобки (6.96) на пространство функций, зависящих только от переменных τ_a, с точностью до знака совпадает со скобкой Ли – Пуассона на дуальном пространстве $\mathfrak{k}^*$.

Заметим, что в общем случае скобка Пуассона (6.96) вырождена. В самом деле, используя соотношения (6.97) нетрудно убедиться, что равенства $\{J, p_i\} = \{J, x^i\} = \{J, \tau_a\} = 0$ записываются в виде следующей системы уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial x^i} = \frac{\partial J}{\partial p_i} = 0, \quad C_{ab}^c\,\tau_c\,\frac{\partial J}{\partial \tau^b} = 0.$$

Отсюда видно, что функциями Казимира скобки (6.96) являются функции Казимира алгебры Ли $\mathfrak{k}$ и только они.

Пусть $H = \frac{1}{2}\,g^{ij}p_ip_j$ — гамильтониан геодезического потока на псевдоримановом многообразии (M, g). Нетрудно показать, что соответствующая этому гамильтониану гамильтонова система

$$\dot{x}^i = \{H, x^i\}, \quad \dot{p}_i = \{H, p_i\}, \quad \dot{\tau}_a = \{H, \tau_a\}, \tag{6.98}$$

эквивалентна системе уравнений (6.94), (6.95). Таким образом, уравнения Вонга являются гамильтоновой системой относительно скобки Пуассона (6.96) с гамильтонианом, совпадающим с гамильтонианом геодезического потока на (M, g).

6.4.2 Алгебра линейных интегралов движения

Гамильтонова система (6.98) допускает очевидные интегралы движения — функции Казимира алгебры $\mathfrak{k}$. Напомним, что число $\operatorname{ind}\mathfrak{k}$ функционально независимых функций Казимира называется индексом алгебры $\mathfrak{k}$ и вычисляется согласно формуле (2.24).

Помимо функций Казимира уравнения Вонга могут допускать и другие сохраняющиеся величины. Изучим вопрос о существовании интегралов движения, линейных по переменным

p_i и τ_a:

$$X(x,p,\tau) = \zeta^i(x)p_i + \vartheta^a(x)\tau_a.$$

Требование $\{H, X\} = 0$ в этом случае приводит к следующей системе уравнений на неизвестные функции $\zeta^i(x)$ и $\vartheta^a(x)$:

$$\mathscr{L}_\zeta\, g = 0, \quad d\vartheta^c + C^c_{ab}\, A^a \wedge \vartheta^b = -i_\zeta F^c. \tag{6.99}$$

Первое из равенств (6.99) — это условие киллинговости векторного поля $\zeta = \zeta^i(x)\partial_i$ относительно метрики g_{ij}. Второе из равенств (6.99) можно переписать в следующем виде

$$D\vartheta \equiv d\vartheta + [A, \vartheta] = -i_\zeta F, \tag{6.100}$$

где мы ввели инвариантные обозначения $A = (A^a_i dx^i)e_a$, $F = \frac{1}{2}\left(F^a_{ij} dx^i \wedge dx^j\right) e_a$ и $\vartheta = \vartheta^a e_a$. Уравнение (6.100) является неоднородным линейным уравнением, поэтому его общее решение представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения

$$D\vartheta \equiv d\vartheta + [A, \vartheta] = 0, \tag{6.101}$$

и некоторого частного решения.

Рассмотрим однородное уравнение (6.101) подробнее. Из общей теории подобных уравнений известно, что множество его решений образует конечномерное линейное пространство (см., например, [225]). Пусть ϑ_1 и ϑ_2 — два произвольных решения уравнения (6.101). Используя соотношение (6.101), а также тождество Якоби в алгебре $\mathfrak{k}$, получаем:

$$d[\vartheta_1, \vartheta_2] = [d\vartheta_1, \vartheta_2] + [\vartheta_1, d\vartheta_2] = -[[A, \vartheta_1], \vartheta_2] - [\vartheta_1, [A, \vartheta_2]] = -[A, [\vartheta_1, \vartheta_2]].$$

Таким образом, коммутатор двух решений уравнения (6.101) снова является его решением. Следовательно, множество решений (6.101) образует некоторую подалгебру в алгебре Ли калибровочной группы. При этом отметим, что каждое решение однородного уравнения (6.101) доставляет некоторый интеграл движения уравнений Вонга. В самом деле, если $\mathfrak{k}$-значная функция $\vartheta = \vartheta^a e_a$ удовлетворяет равенству (6.101), тогда функция $Y(x,\tau) = \vartheta^a \tau_a$ будет по построению коммутировать с функцией Гамильтона H в смысле скобки Пуассона (6.96). Далее мы будем такие интегралы движения называть *изоспиновыми*.

Вернемся к неоднородному уравнению (6.100). Данное уравнение, вообще говоря, может допускать решение не для всякого вектора Киллинга ζ. Действительно, если ϑ — его решение, отвечающее векторному полю ζ, из требования $d^2\vartheta = 0$ вытекает следующее условие

$$\mathscr{L}_\zeta F = [F, i_\zeta A - \vartheta]. \tag{6.102}$$

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — инвариантное скалярное произведение в алгебре $\mathfrak{k}$ (оно всегда существует в силу компактности калибровочной группы). Тогда в качестве следствия формулы (6.102) получаем: $\mathscr{L}_\zeta\langle F,F\rangle=0$. Это означает, что вектор Киллинга ζ, допускающий решение уравнения (6.100), с необходимостью должен сохранять 2-форму $\langle F,F\rangle$. Ясно, что в общем случае указанное требование может выполняться не для всякого вектора Киллинга метрики g_{ij}.

Для дальнейших целей нам понадобится следующее техническое

Утверждение 6.8. *Пусть ϑ_1, ϑ_2 — частные решения уравнения* (6.100)*, отвечающие векторам Киллинга ζ_1 и ζ_2 соответственно. Тогда $\mathfrak{k}$-значная функция $\vartheta=[\vartheta_1,\vartheta_2]-F(\zeta_1,\zeta_2)$ будет являться решением этого уравнения, соответствующим вектору Киллинга $\zeta=[\zeta_1,\zeta_2]$.*

Доказательство данного утверждения проводится прямыми вычислениями.

Определение 6.5. Векторы Киллинга, для которых уравнение (6.100) является совместным, будем называть *допустимыми*.

Из утверждения 6.8 следует, что множество допустимых векторов Киллинга замкнуто относительно коммутатора векторных полей, и поэтому образует некоторую подалгебру в алгебре Ли всех векторов Киллинга.

Далее мы примем следующие обозначения:

- $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли допустимых векторов Киллинга;
- $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли, образованная решениями однородного уравнения (6.101).

Пусть $\{\zeta_A=\zeta^i_A(x)\partial_i\}$ и $\{\vartheta_\alpha=\vartheta^a_\alpha(x)e_a\}$ — базисы в алгебрах $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Обозначим через $\vartheta_A=\vartheta^a_A(x)e_a$ частное решение уравнения (6.100), отвечающее вектору Киллинга ζ_A. По своему построению функции

$$X_A(x,p,\tau)=\zeta^i_A(x)p_i+\vartheta^a_A(x)\tau_a,\quad Y_\alpha(x,\tau)=\vartheta^a_\alpha(x)\tau_a, \tag{6.103}$$

есть интегралы движения гамильтоновой системы (6.98), причем всякий интеграл движения, имеющий первый порядок по переменным p_i и τ_a, будет являться их линейной комбинацией.

Путем несложных преобразований скобка Пуассона интегралов движения X_A и X_B может быть представлена в виде

$$\{X_A,X_B\}=C^C_{AB}\,X_C+\Omega^c_{AB}\tau_c,$$

где C^C_{AB} — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе, ассоциированном с векторами Киллинга ξ_A, а $\mathfrak{k}$–значные функции $\Omega_{AB}(x)=\Omega^c_{AB}e_c$ определяются формулой

$$\Omega_{AB}\equiv F(\zeta_A,\zeta_B)-C^C_{AB}\,\vartheta_C-[\vartheta_A,\vartheta_B].$$

Нетрудно показать, что функции Ω_{AB} являются решениями однородного уравнения (6.101) (это легко следует из Утверждения 6.8). Но в силу того, что $\{\vartheta_\alpha\}$ — базис в пространстве решений данного уравнения, имеем $\Omega_{AB} = \mathbf{F}^\alpha_{AB}\,\vartheta_\alpha$, где $\mathbf{F}^\alpha_{AB}$ — некоторые постоянные. Учитывая теперь, что $Y_\alpha = \vartheta^a_\alpha \tau_a$, получаем

$$\{X_A, X_B\} = C^C_{AB}\,X_C + \mathbf{F}^\alpha_{AB}\,Y_\alpha.$$

Далее рассмотрим скобку Пуассона интегралов X_A и Y_α. Прямыми вычислениями получаем

$$\{X_A, Y_\alpha\} = [\vartheta_\alpha, \vartheta_A]^a \tau_a.$$

Ясно, что $\mathfrak{k}$-значная функция $[\vartheta_\alpha, \vartheta_A]$ является решением уравнения (6.101). В самом деле, действие оператора $D = d + [A, \cdot]$ на функцию $[\vartheta_\alpha, \vartheta_A]$ дает

$$D[\vartheta_\alpha, \vartheta_A] = [D\vartheta_\alpha, \vartheta_A] + [\vartheta_\alpha, D\vartheta_A] = -i_{\zeta_A}[\vartheta_\alpha, F].$$

В силу того, что ϑ_α — решение уравнения (6.101), оно удовлетворяет условию $[\vartheta_\alpha, F] = 0$. (Указанное условие легко получить из формулы (6.102), если положить в ней $\zeta = 0$). Отсюда заключаем, что $\mathfrak{k}$-значные функции $[\vartheta_\alpha, \vartheta_A]$ являются решениями уравнения (6.101), а потому имеет место разложение $[\vartheta_\alpha, \vartheta_A] = \Lambda^\beta_{A\alpha}\,\vartheta_\beta$, где $\Lambda^\beta_{A\alpha}$ — некоторые постоянные. Таким образом,

$$\{X_A, Y_\alpha\} = \Lambda^\beta_{A\alpha}\,Y_\beta.$$

Наконец отметим, что изоспиновые интегралы движения Y_α удовлетворяют соотношениям $\{Y_\alpha, Y_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta}\,Y_\gamma$, где величины $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — это структурные константы подалгебры $\mathfrak{h}$ в базисе, ассоциированном с функциями $\{\vartheta_\alpha\}$.

Выпишем еще раз все вычисленные скобки:

$$\{X_A, X_B\} = C^C_{AB}\,X_C + \mathbf{F}^\alpha_{AB}\,Y_\alpha, \quad \{X_A, Y_\alpha\} = \Lambda^\beta_{A\alpha}\,Y_\beta, \quad \{Y_\alpha, Y_\beta\} = C^\gamma_{\alpha\beta}\,Y_\gamma. \tag{6.104}$$

Полученный нами результат позволяет сделать ряд важных выводов. Во-первых, из соотношений (6.104) следует, что набор интегралов движения (6.103) замкнут относительно скобки Пуассона (6.96). Это означает, что линейная оболочка данного набора образует алгебру Ли, которую мы обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}$. Во-вторых, как видно из (6.104) алгебра $\mathfrak{h}$ изоспиновых интегралов движения образует идеал в $\tilde{\mathfrak{g}}$, причем соответствующая фактор-алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{h}$ является изоморфной алгебре $\mathfrak{g}$. На основании этого мы можем сделать следующий вывод: алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ представляет собой расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью алгебры Ли $\mathfrak{h}$ (по поводу расширений алгебр Ли см., например, [226–228]).

6.4.3 Некоммутативная редукция уравнений Вонга

Пусть $\mathscr{P} = \tilde{\mathfrak{g}} + \{J_\mu\}$ — пуассонова алгебра, образованная интегралами движения (6.103) и функциями Казимира J_μ калибровочной алгебры $\mathfrak{k}$, $\mu = 1, \ldots, \operatorname{ind}\mathfrak{k}$. Чтобы избежать технических сложностей, будем предполагать, что интегралы движения (6.103), образующие алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, являются функционально независимыми. (Если это не так, мы всегда можем сузить исходную алгебру, отбросив некоторые интегралы движения).

Пусть $\lambda = \lambda^a e_a \in \mathfrak{k}$ — элемент, принадлежащий центру $Z(\mathfrak{k})$ калибровочной алгебры Ли $\mathfrak{k}$. Ясно, что данный вектор является решением однородного уравнения (6.101), поэтому функция $Y = \lambda^a \tau_a$ представляет собой изоспиновый интеграл движения уравнений Вонга. Также ясно, что указанная функция является функцией Казимира алгебры $\mathfrak{k}$. Верно и обратное: всякий изоспиновый интеграл движения, являющийся функцией Казимира алгебры $\mathfrak{k}$, автоматически лежит в $Z(\mathfrak{k})$. Имея в виду включение $Z(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{h}$, для дифференциальной размерности алгебры $\mathscr{P}$ получаем

$$\operatorname{ddim}\mathscr{P} = \dim\tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind}\mathfrak{k} - \dim Z(\mathfrak{k}).$$

Далее, нетрудно показать, что дифференциальный индекс пуассоновой алгебры $\mathscr{P}$ равен

$$\operatorname{dind}\mathscr{P} = \operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind}\mathfrak{k} - \dim Z(\mathfrak{k}),$$

где $\operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}}$ – индекс алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$. (Определение дифференциальной размерности и дифференциального индекса пуассоновой алгебры см. в § 4.3).

Согласно основному результату теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем [17, 18] с помощью пуассоновой алгебры $\mathscr{P}$ мы можем редуцировать гамильтонову систему (6.98) к новой гамильтоновой системе с

$$k = \dim N - (\operatorname{ddim}\mathscr{P} + \operatorname{dind}\mathscr{P}) + \operatorname{corank}\{\cdot,\cdot\}$$

независимыми переменными, где $N = T^*M \times K$. Используя приведенные результаты и учитывая, что $\dim N = 2\dim M + \dim\mathfrak{k}$, $\operatorname{corank}\{\cdot,\cdot\} = \operatorname{ind}\mathfrak{k}$, будем иметь

$$k = 2\dim M + (\dim\mathfrak{k} - \operatorname{ind}\mathfrak{k}) - (\dim\tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}}) + 2\dim Z(\mathfrak{k}). \tag{6.105}$$

Таким образом, число независимых переменных в гамильтоновой системе, получающейся в результате некоммутативной редукции уравнений Вонга, определяется формулой (6.105).

После некоммутативной редукции, осуществляемой с помощью алгебры $\mathscr{P}$, в общем случае остается еще один интеграл движения — функция Гамильтона $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$. Учитывая это обстоятельство, система уравнений Вонга будет являться *интегрируемой*, если выполняется условие $k \leq 2$. Используя формулу (6.105), данное условие можно представить в виде

$$\dim M + \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{k} - \operatorname{ind} \mathfrak{k}\right) - \frac{1}{2}\left(\dim \tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}}\right) + \dim Z(\mathfrak{k}) \leq 1. \tag{6.106}$$

Рассмотрим частный случай $K = U(1)$, когда уравнения (6.94), (6.95) описывают движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. В этой ситуации $\dim \mathfrak{k} = \operatorname{ind} \mathfrak{k} = 1$, поэтому согласно (6.106) получаем

$$\dim M \leq \frac{1}{2}\left(\dim \tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}}\right). \tag{6.107}$$

Очевидно, что алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ будет представлять собой одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$ допустимых векторов Киллинга, в силу чего $\dim \tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}$, где $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}$ — когомологический индекс алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, мы получаем следующее неравенство

$$\dim M \leq \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}\right),$$

совпадающее с условием интегрируемости уравнений движения заряженной частицы в электромагнитном поле, полученным в работе [60].

6.4.4 Примеры

Приведем некоторые примеры, связанные с калибровочной группой $K = SU(2)$. Всюду ниже мы будем предполагать, что в соответствующей алгебре $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2)$ зафиксирован базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, в котором коммутационные соотношения имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Индекс алгебры $\mathfrak{su}(2)$ равен единице; в качестве соответствующей функции Казимира может быть выбрана функция $J = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2$. Кроме того, алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$ имеет тривиальный центр $Z(\mathfrak{k}) = 0$. С учетом этих замечаний условие интегрируемости (6.106) для рассматриваемого случая примет вид (6.107).

Пример 6.7. Рассмотрим калибровочное поле с потенциалами, «параллельными» в изоспиновом пространстве:

$$A_i^a = \lambda^a(0, -x_2, x_1, 0), \quad a = 1, 2, 3.$$

Здесь $\lambda = \lambda^a e_a \in \mathfrak{su}(2)$ — постоянный ненулевой вектор. Тензор напряженности данного поля имеет следующие ненулевые компоненты: $F_{12}^a = -F_{21}^a = \lambda^a$, $a = 1, 2, 3$. Нетрудно показать, что рассматриваемое калибровочное поле удовлетворяет уравнениям Янга – Миллса $F_{ij}^{\ ;j} +$

$[A^j, F_{ij}] = 0$. (По поводу построения решений уравнений Янга – Миллса для подобного класса калибровочных полей см. работу [229]).

Пространство решений однородного уравнения $D\vartheta = 0$ в данном примере одномерно и натянуто на вектор λ. В качестве изоспинового интеграла может быть выбрана функция $Y = \lambda^a \tau_a$.

Алгебра Ли векторов Киллинга плоского пространства – времени $\mathbb{R}^{1,3}$, как известно, есть десятимерная алгебра Пуанкаре $\mathfrak{p}(1,3)$. В нашем случае допустимые векторы Киллинга образуют шестимерную подалгебру $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{p}(1,3)$, образованную генераторами

$$\zeta_1 = \partial_0, \quad \zeta_2 = \partial_1, \quad \zeta_3 = \partial_2, \quad \zeta_4 = \partial_3, \quad \zeta_5 = x_3\partial_0 + x_0\partial_3, \quad \zeta_6 = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2.$$

Выбирая частные решения уравнения (6.100), отвечающие указанным векторам Киллинга, соответственно в виде

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = -\lambda x_2, \quad \vartheta_3 = \lambda x_1, \quad \vartheta_4 = 0, \quad \vartheta_5 = 0, \quad \vartheta_6 = \frac{\lambda}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

получаем следующий набор интегралов движения уравнений Вонга:

$$X_1 = p_0, \quad X_2 = p_1 - Yx_2, \quad X_3 = p_2 + Yx_1, \quad X_4 = p_3, \quad X_5 = x_3p_0 + x_0p_3,$$
$$X_6 = -x_2p_1 + x_1p_2 + \frac{Y}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad Y = \lambda^a\tau_a.$$

Пуассонова алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$, порождаемая функциями $X_1, \ldots, X_6$ и Y, обладает следующими ненулевыми коммутационными соотношениями:

$$\{X_1, X_5\} = X_4, \quad \{X_2, X_3\} = Y, \quad \{X_2, X_6\} = X_3, \quad \{X_3, X_6\} = -X_2, \tag{6.108}$$

$$\{X_4, X_5\} = X_1. \tag{6.109}$$

Из этих соотношений видно, что алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ представляет собой нетривиальное расширение алгебры $\mathfrak{g}$ с помощью одномерной алгебры $\mathfrak{h} = \{Y\}$. Рассматриваемый пример иллюстрирует ситуацию «перемешивания» изоспиновых и геометрических интегралов движения, имеющую принципиально неустранимый характер.

Сравнительно большой запас интегралов движения в данном примере приводит к интегрируемости уравнений Вонга. Действительно, из коммутационных соотношений (6.108), (6.109) следует, что индекс алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ равен $\operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}} = 3$, следовательно, $\dim\tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}} = 7 + 3 = 10$, т.е неравенство (6.107) выполняется.

Пример 6.8. Рассмотрим решение уравнений Янга – Миллса, известное в литературе как *монополь Ву – Янга* [230]:

$$A_i^1 = r^{-2}(0, 0, x_3, -x_2), \quad A_i^2 = r^{-2}(0, -x_3, 0, x_1), \quad A_i^3 = r^{-2}(0, x_2, -x_1, 0), \tag{6.110}$$

где $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Тензор напряженности калибровочного поля (6.110) имеет вид

$$F_{ij}^a=\frac{x^a}{r^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x_3 & x_2\\ 0 & x_3 & 0 & -x_1\\ 0 & -x_2 & x_1 & 0\end{pmatrix}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ решений уравнения $D\vartheta=0$ одномерна. В качестве базисного решения можно выбрать функцию $\vartheta=(x^a/r)e_a$. Таким образом, в калибровочном поле монополя Ву – Янга имеется изоспиновый интеграл движения, зависящий от пространственных координат:

$$Y=\frac{x^a\tau_a}{r}. \qquad (6.111)$$

Алгебра $\mathfrak{g}$ допустимых векторов Киллинга в данном случае четырехмерна и образована одним генератором сдвига по координате x_0 и тремя генераторами пространственных вращений:

$$\zeta_1=\partial_0,\quad \zeta_2=-x_2\partial_1+x_1\partial_2,\quad \zeta_3=-x_1\partial_3+x_3\partial_1,\quad \zeta_4=-x_3\partial_2+x_2\partial_3.$$

Соответствующие частные решения уравнения (6.100) могут быть выбраны в виде:

$$\vartheta_1=0,\quad \vartheta_2=\frac{x_3}{r}Y,\quad \vartheta_3=\frac{x_2}{r}Y,\quad \vartheta_4=\frac{x_1}{r}Y.$$

Таким образом, помимо сохраняющейся величины (6.111), имеем еще четыре интеграла движения

$$X_1=p_0,\quad X_2=-x_2p_1+x_1p_2+\frac{x_3}{r}Y,\quad X_3=-x_1p_3+x_3p_1+\frac{x_2}{r}Y,\quad X_4=-x_3p_2+x_2p_3+\frac{x_1}{r}Y.$$

Нетрудно видеть, что набор интегралов движения $X_1,\dots,X_4$ и Y, порождает алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$, изоморфную прямой сумме алгебр $\mathfrak{g}=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ и $\mathfrak{h}=\{Y\}$. Действительно, ненулевые коммутационные соотношения в пуассоновой алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ имеют вид:

$$\{X_2,X_3\}=X_4,\quad \{X_2,X_4\}=-X_3,\quad \{X_3,X_4\}=X_2,$$

т.е. геометрические и изоспиновые интегралы движения не «перемешиваются» друг с другом. Другими словами алгебра представляет собой тривиальное расширение алгебры $\mathfrak{g}$ с помощью алгебры $\mathfrak{h}$.

Индекс алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ в данном случае равен $\operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}}=3$, откуда имеем $\dim\tilde{\mathfrak{g}}+\operatorname{ind}\tilde{\mathfrak{g}}=5+3=8$. Следовательно, уравнения Вонга в калибровочном поле (6.110) интегрируемы.

Отметим, что подробное исследование движения цветовых частиц в калибровочных полях, являющихся монопольными решениями уравнений Янга – Миллса, можно найти в работах [137, 231]. Алгебра интегралов движения уравнений Вонга в поле монополя Ву – Янга также изучалась в статье [232].

Пример 6.9. В работе [233] доказано существование семейства статических сферически-симметричных решений уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса, получаемых в рамках следующего анзаца:

$$ds^2 = T^{-2}(r)dx_0^2 - R^2(r)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi\right),$$

$$A^1 = (0,0,w(r),0), \quad A^2 = (0,0,0,\cos\theta), \quad A^3 = (0,0,0,w(r)\sin\theta). \tag{6.112}$$

Здесь (r,θ,φ) — сферические координаты в $\mathbb{R}^3$, $w(r)$, $T(r)$, $R(r)$ — произвольные функции. Соответствующий тензор напряженности имеет следующие ненулевые компоненты:

$$F^1_{r\theta} = -F^1_{\theta r} = w'(r), \quad F^2_{r\varphi} = -F^2_{\varphi r} = w'(r)\sin\theta, \quad F^3_{\theta\varphi} = -F^3_{\varphi\theta} = (w(r)-1)\sin\theta.$$

Отметим, что в случае $w(r) = 1$ калибровочное поле (6.112) является локально тривиальным, а соответствующее решение Эйнштейна – Янга – Миллса представляет собой обычное решение Шварцшильда. В случае $w(r) = 0$ мы имеем решение Райсснера – Нордстрема с $U(1)$-значным тензором напряженности.

Исследуем рассматриваемый анзац с точки зрения существования алгебры линейных интегралов движения уравнений Вонга. При $w(r) \neq 0,1$ однородное уравнение $D\vartheta = 0$ имеет только тривиальное решение, так что $\dim\mathfrak{h} = 0$. В случае $w(r) = 0$ алгебра $\mathfrak{h}$ одномерна; соответствующий изоспиновый интеграл имеет вид $Y = \tau_3$.

Максимальная алгебра киллинговых векторов статической сферически-симметричной метрики изоморфна четырехмерной алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)\oplus\mathbb{R}$:

$$\zeta_1 = \partial_0, \quad \zeta_2 = -\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi, \quad \zeta_3 = \sin\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi, \quad \zeta_4 = \partial_\varphi. \tag{6.113}$$

При этом всякий вектор Киллинга является допустимым. Частные решения уравнения (6.100), отвечающие векторным полям (6.113), могут быть выбраны в виде:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = -w(r)\left(\cos\varphi\,e_1 - \sin\varphi\,e_2\right) - \sin\varphi\sin\theta\,e_3,$$

$$\vartheta_3 = w(r)\left(\sin\varphi\,e_1 + \cos\varphi\,e_2\right) - \cos\varphi\sin\theta\,e_3, \quad \vartheta_4 = w(r)\sin\theta\,e_2 + \cos\theta\,e_3.$$

Таким образом, интегралы движения уравнений Вонга при $w(r) \neq 0,1$ задаются функциями:

$$X_1 = p_0, \quad X_2 = -\cos\varphi\,p_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,p_\varphi - w(r)\left(\cos\varphi\,\tau_1 - \sin\varphi\,\tau_2\right) - \sin\varphi\sin\theta\,\tau_3,$$

$$X_3 = \sin\varphi\,p_\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,p_\varphi + w(r)\left(\sin\varphi\,\tau_1 + \cos\varphi\,\tau_2\right) - \cos\varphi\sin\theta\,\tau_3,$$

$$X_4 = p_\varphi + w(r)\sin\theta\,\tau_2 + \cos\theta\,\tau_3.$$

В случае $w(r) = 0$ к этому набору добавляется еще один изоспиновый интеграл $Y = \tau_3$. При этом, так же как и в предыдущем примере, алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ является тривиальным расширением алгебры $\mathfrak{g} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ с помощью одномерной алгебры $\mathfrak{h} = \{Y\}$.

Проанализируем возможность интегрирования уравнений Вонга в калибровочном поле (6.112). В силу того, что размерность и индекс алгебры $\mathfrak{g}$ равны $\dim \mathfrak{g} = 4$ и $\operatorname{ind} \mathfrak{g} = 2$, при $w(r) \neq 0, 1$ получаем $\dim \tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} + \operatorname{ind} \mathfrak{g} = 4 + 2 = 6$, т.е. линейных интегралов движения недостаточно для интегрируемости системы (6.94), (6.95). Напротив, при $w(r) = 0$ уравнения Вонга интегрируемы, т.к. $\dim \tilde{\mathfrak{g}} + \operatorname{ind} \tilde{\mathfrak{g}} = 5 + 3 = 8$ (см. неравенство (6.107)).

ГЛАВА 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Настоящая глава посвящена проблеме построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешних электромагнитных полях, допускающих некоммутативные алгебры операторов симметрии. В частности, мы исследуем структуру алгебр симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле, разработаем метод построения их точных решений на многообразиях групп Ли, а также на более общих псевдоримановых многообразиях с движениями.

§ 7.1 Киллинговы симметрии уравнений Клейна – Гордона и Дирака во внешнем электромагнитном поле

Пусть (M, g) — гладкое n-мерное псевдориманово многообразие. В физических приложениях сигнатуру метрики обычно полагают лоренцевой, но в нашем случае это несущественно, поэтому будем полагать метрику псевдоримановой. Дополнительно допустим, что на многообразии M задано внешнее электромагнитное поле с векторным потенциалом $A = A_a dx^a$ и 2-формой напряженности $F = \frac{1}{2}\, F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$, $F = dA$.

Рассмотрим на псевдоримановом многообразии (M, g) заряженное массивное скалярное поле φ, описываемое действием [197]:

$$S \equiv \int \mathscr{L} \sqrt{|g|}\, d^n x = \int \left[g^{ab} \overline{\left(\nabla_a^{(\epsilon)} \varphi\right)} \left(\nabla_b^{(\epsilon)} \varphi\right) - (m^2 + \varsigma R)|\varphi|^2 \right] \sqrt{|g|}\, d^n x. \tag{7.1}$$

Здесь g^{ab} — контравариантные компоненты метрического тензора, $\nabla_a^{(\epsilon)} \equiv \nabla_a - i\epsilon A_a$, где ∇_a — оператор ковариантного дифференцирования, отвечающий координатному векторному полю $\partial_a \equiv \partial/\partial x^a$, ϵ и m — вещественные параметры, обозначающие электрический заряд и массу скалярного поля соответственно, R — скалярная кривизна псевдориманова многообразия M, $g \equiv \det \|g_{ab}\|$. Безразмерный параметр ς равен нулю в случае *минимальной связи*, и равен $(n-2)/(4(n-1))$ в случае *конформной связи*.

Из вариационного принципа для действия, определяемого выражением (7.1), получается полевое уравнение Эйлера – Лагранжа

$$H^{(\epsilon)} \varphi \equiv \left(g^{ab} \nabla_a^{(\epsilon)} \nabla_b^{(\epsilon)} + m^2 + \varsigma R \right) \varphi = 0, \tag{7.2}$$

называемое *уравнением Клейна – Гордона*. Отметим, что случай $\epsilon = 0$ равносилен отсутствию внешнего электромагнитного поля. Уравнение Клейна – Гордона (7.2) при $\epsilon = 0$ мы будем называть *свободным*.

Опишем алгебру операторов симметрии уравнения (7.2), лежащих в классе неоднородных дифференциальных операторов первого порядка. Предварительно напомним некоторые определения и факты, изложенные нами выше в § 6.1.

Вектор Киллинга $\zeta \in \mathrm{Vect}(M)$ псевдориманова многообразия M называется *допустимым*, если он сохраняет 2-форму электромагнитного поля: $\mathscr{L}_\zeta F = 0$. Совокупность всех допустимых векторов Киллинга образует некоторую подалгебру в алгебре Ли всех киллинговых векторных полей, называемую *допустимой* подалгеброй. Пусть $\mathfrak{g}$ — допустимая подалгебра. Выберем в ней некоторый базис, задаваемый набором векторных полей $\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_a$, $i = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}$. В силу замкнутости данного набора относительно коммутатора векторных полей, получаем $[\zeta_i, \zeta_j] = C_{ij}^k \zeta_k$, где постоянные C_{ij}^k есть структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$.

Сформулируем теперь основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 7.1. *Алгеброй операторов симметрии уравнения* (7.2)*, лежащих в классе неоднородных дифференциальных операторов первого порядка, является* $(\dim \mathfrak{g} + 1)$*-мерная алгебра Ли* $\tilde{\mathfrak{g}}$ *с базисными элементами*

$$X_0^{(\epsilon)} = i\epsilon, \quad X_k^{(\epsilon)} = \zeta_k^a(x)\nabla_a^{(\epsilon)} - i\epsilon \int \imath_{\zeta_k} F, \quad k = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}, \tag{7.3}$$

и коммутационными соотношениями вида

$$[X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k X_k^{(\epsilon)} + \mathbf{F}_{ij} X_0^{(\epsilon)}. \tag{7.4}$$

Здесь величины $\mathbf{F}_{ij}$ *являются компонентами 2-коцикла допустимой подалгебры* $\mathfrak{g}$ *и определяются формулой*

$$\mathbf{F}_{ij} = F(\zeta_i, \zeta_j) - C_{ij}^k \int \imath_{\zeta_k} F. \tag{7.5}$$

Тем самым, алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$*, образованная операторами* (7.3)*, представляет собой одномерное центральное расширение алгебры* $\mathfrak{g}$*, построенное с помощью 2-коцикла* (7.5).

Доказательство. Рассмотрим неоднородный дифференциальный оператор первого порядка

$$X^{(\epsilon)} = \zeta^a(x)\nabla_a^{(\epsilon)} + i\epsilon\vartheta(x). \tag{7.6}$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что условие $[H^{(\epsilon)}, X^{(\epsilon)}] = 0$ эквивалентно системе равенств (6.4), полученной нами выше при исследовании алгебры интегралов движения магнитных геодезических потоков. Используя изложенные там же соображения, нетрудно видеть, что пространство операторов вида (7.6), коммутирующих с $H^{(\epsilon)}$, является линейной оболочкой набора операторов (7.3), где векторные поля ζ_i образуют некоторый базис в допустимой подалгебре $\mathfrak{g}$ алгебры Ли векторов Киллинга.

Далее, несложно проверить, что коммутатор операторов $X_i^{(\epsilon)}$ и $X_j^{(\epsilon)}$ записывается в виде (7.4), где введено обозначение (7.5). Как следует из утверждения 6.1, введенные величины $\mathbf{F}_{ij}$ являются постоянными (не зависящими от координат), и удовлетворяют условию (6.11). Но это означает, что $\mathbf{F}_{ij}$ являются компонентами 2-коцикла допустимой алгебры $\mathfrak{g}$, а алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, образованная операторами (7.3), представляет собой одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, отвечающее указанному 2-коциклу. □

Обсудим некоторые частные случаи.

1. Допустим, что внешнее поле является локально тривиальным, то есть $F = 0$ (но не обязательно $A = 0$!). Очевидно, что в этом случае допустимая подалгебра $\mathfrak{g}$ совпадает с алгеброй всех векторов Киллинга псевдориманова многообразия. Из теоремы 7.1 вытекает, что алгебра операторов симметрии уравнения Клейна – Гордона для локально тривиального внешнего поля порождается операторами вида $X_k^{(\epsilon)} = \zeta_k^a(x)\nabla_a^{(\epsilon)}$, которые вместе с тривиальным оператором симметрии $X_0^{(\epsilon)} = i\epsilon$ образуют алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, изоморфную прямой сумме $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$:

$$[X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k\, X_k^{(\epsilon)}. \tag{7.7}$$

2. Предположим, что для всякого допустимого вектора Киллинга ζ_k выполняется условие $\mathscr{L}_{\zeta_k} A = 0$. Иными словами, всякий вектор Киллинга, сохраняющий 2-форму электромагнитного поля, оставляет инвариантным также и соответствующий векторный потенциал. В этом случае $\imath_{\zeta_k} F = -d\,\imath_{\zeta_k} A$, откуда

$$X_k^{(\epsilon)} = \zeta_k^a \nabla_a^{(\epsilon)} - i\epsilon \int \imath_{\zeta_k} F = \zeta_k^a\,(\nabla_a - i\epsilon A_a) + i\epsilon\,\imath_{\zeta_k} A = \zeta_k^a \nabla_a = X_k^{(0)}.$$

Так как $[X_i^{(0)}, X_j^{(0)}] = C_{ij}^k\, X_k^{(0)}$, из соотношений (7.4) следует, что $\mathbf{F}_{ij} = 0$. Таким образом, при сделанных предположениях алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ снова является тривиальным центральным расширением допустимой подалгебры $\mathfrak{g}$. Не смотря на то, что рассмотренная ситуация является весьма частной, все же имеются физически интересные примеры, иллюстрирующие этот случай. Наиболее известный из них — решение Керра – Ньюмена, описывающее вращающуюся электрически заряженную черную дыру [234].

Как следует из второй леммы Уайтхеда, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) = 0$, то есть всякое центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$ является тривиальным [143]. Для нас это означает, что в случае полупростой допустимой подалгебры операторы (7.3) всегда могут быть выбраны таким образом, что возникающие между ними коммутационные соотношения по форме совпадут с коммутационными соотношениями для векторов Киллинга из алгебры $\mathfrak{g}$. (Отметим, что операторы $X_k^{(\epsilon)}$, определенные равенством (7.3), определены с точностью до прибавления произвольных постоянных). Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 7.1. Рассмотрим *метрику Бертотти – Робинсона*, квадрат элемента длины которой имеет вид [235, 236]:

$$ds^2 = \operatorname{sh}^2 x\, dt^2 - dx^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{7.8}$$

Симметрии этой метрики определяются векторами Киллинга

$$\zeta_1 = -\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi, \quad \zeta_2 = \sin\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi, \quad \zeta_3 = \partial_\varphi,$$

$$\zeta_4 = -\operatorname{sh}t\operatorname{cth}x\,\partial_t + \operatorname{ch}t\,\partial_x, \quad \zeta_5 = -\operatorname{ch}t\operatorname{cth}x\,\partial_t + \operatorname{sh}t\,\partial_x, \quad \zeta_6 = -\partial_t,$$

которые образуют полупростую шестимерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$, изоморфную прямой сумме $\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(1,2)$:

$$[\zeta_1,\zeta_2]=\zeta_3, \quad [\zeta_1,\zeta_3]=-\zeta_2, \quad [\zeta_2,\zeta_3]=\zeta_1, \quad [\zeta_4,\zeta_5]=\zeta_6, \quad [\zeta_4,\zeta_6]=\zeta_5, \quad [\zeta_5,\zeta_6]=\zeta_4. \tag{7.9}$$

Выпишем наиболее общий вид замкнутой 2-формы F, удовлетворяющей условию $\mathscr{L}_{\zeta_i}F = 0$, $i=1,\dots,6$:

$$F = \mu_1\operatorname{sh}x\,dt\wedge dx + \mu_2\sin\theta\,d\theta\wedge d\varphi. \tag{7.10}$$

Здесь μ_1,μ_2 — произвольные постоянные. Отметим, что при $\mu_1^2+\mu_2^2=2$ метрика (7.8) и электромагнитное поле (7.10) удовлетворяют системе уравнений Эйнштейна $R_{ab}=T_{ab}$, где R_{ab} — тензор Риччи, T_{ab} — тензор энергии – импульса электромагнитного поля [237].

По построению каждый вектор Киллинга рассматриваемой метрики является допустимым, поэтому соответствующее уравнение Клейна – Гордона

$$H^{(\epsilon)}\psi = \Big[-\operatorname{sh}^{-2}x\,(\nabla_t^{(\epsilon)})^2 + (\nabla_x^{(\epsilon)})^2 + (\nabla_\theta^{(\epsilon)})^2 + \sin^{-2}\theta\,(\nabla_\varphi^{(\epsilon)})^2 + m^2\Big]\psi = 0,$$

допускает шесть операторов симметрии $X_i^{(\epsilon)}$, которые определяются в соответствие с формулой (7.3):

$$X_1^{(\epsilon)} = -\cos\varphi\,\nabla_\theta^{(\epsilon)} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\nabla_\varphi^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu_2\sin\theta\sin\varphi+\lambda_1\right),$$

$$X_2^{(\epsilon)} = \sin\varphi\,\nabla_\theta^{(\epsilon)} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\,\nabla_\varphi^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu_2\sin\theta\cos\varphi+\lambda_2\right),$$

$$X_3^{(\epsilon)} = \nabla_\varphi^{(\epsilon)} - i\epsilon\left(\mu_2\cos\theta+\lambda_3\right),$$

$$X_4^{(\epsilon)} = -\operatorname{sh}t\,\operatorname{cth}x\nabla_t^{(\epsilon)} + \operatorname{ch}t\,\nabla_x^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu_1\operatorname{sh}t\operatorname{sh}x+\lambda_4\right),$$

$$X_5^{(\epsilon)} = -\operatorname{ch}t\,\operatorname{cth}x\nabla_t^{(\epsilon)} + \operatorname{sh}t\,\nabla_x^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu_1\operatorname{ch}t\operatorname{sh}x+\lambda_5\right),$$

$$X_6^{(\epsilon)} = -\nabla_t^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu_1\operatorname{ch}x+\lambda_6\right).$$

Согласно (7.5) матрица величин $\mathbf{F}_{ij}$ будет иметь вид

$$\|\mathbf{F}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 & -\lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & \lambda_4 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что выбирая значения произвольных постоянных λ_i равными нулю, мы добиваемся выполнения условия $\mathbf{F}_{ij} = 0$. Это означает, что именно при нулевых значениях λ_i операторы симметрии $X_i^{(\epsilon)}$ будут удовлетворять тем же самым коммутационным соотношениям, что и векторы Киллинга ζ_i.

В общем случае $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \neq 0$, поэтому никаким преобразованием базиса в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ нельзя добиться выполнения условия $\mathbf{F}_{ij} = 0$. В такой ситуации алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ операторов симметрии уравнения Клейна – Гордона будет являться нетривиальным центральным расширением допустимой подалгебры $\mathfrak{g}$, причем неоднозначность выбора операторов (7.3) — это всего лишь произвол в выборе конкретного представителя класса $[\mathbf{F}] \in \mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$, соответствующего 2-коциклу $\mathbf{F}$.

Пример 7.2. Рассмотрим четырехмерное лоренцево многообразие с плоско-симметрической метрикой [188]:

$$ds^2 = e^{2\nu(t,z)}dt^2 - Y^2(t,z)(dx^2 + dy^2) - e^{2\sigma(t,z)}dz^2. \tag{7.11}$$

Здесь $\nu(t,z)$, $\sigma(t,z)$ — произвольные функции своих аргументов. Группа движений данной метрики трехмерна и ассоциируется с векторами Киллинга

$$\zeta_1 = \partial_x, \quad \zeta_2 = \partial_y, \quad \zeta_3 = -y\partial_x + x\partial_y,$$

которые образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}$, изоморфную алгебре $\mathfrak{e}(2)$:

$$[\zeta_1,\zeta_2] = 0, \quad [\zeta_1,\zeta_3] = \zeta_2, \quad [\zeta_2,\zeta_3] = -\zeta_1.$$

Наиболее общий вид замкнутой 2-формы F, инвариантной относительно группы движений метрики (7.11), следующий

$$F = f(t,z)dt \wedge dz + \mu\, dx \wedge dy, \tag{7.12}$$

где $f(t,z)$ — произвольная функция, μ — произвольная постоянная. В соответствие с формулой (7.3) получаем

$$X_1^{(\epsilon)} = \nabla_x^{(\epsilon)} - i\epsilon\left(\mu y + \lambda_1\right), \quad X_2^{(\epsilon)} = \nabla_y^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\mu x + \lambda_2\right), \tag{7.13}$$

$$X_3^{(\epsilon)} = -y\nabla_x^{(\epsilon)} + x\nabla_y^{(\epsilon)} + i\epsilon\left(\frac{\mu}{2}(x^2+y^2)+\lambda_3\right). \tag{7.14}$$

Непосредственно проверяется, что операторы (7.13), (7.14) коммутируют с оператором

$$H^{(\epsilon)} = e^{-2\nu(t,z)}(\nabla_t^{(\epsilon)})^2 - Y^{-2}(t,z)\left[(\nabla_x^{(\epsilon)})^2 + (\nabla_y^{(\epsilon)})^2\right] - e^{-2\sigma(t,z)}(\nabla_z^{(\epsilon)})^2 + m^2 + \varsigma R(t,z),$$

где $R(t,z)$ — скалярная кривизна метрики (7.11). При этом матрица величин $\mathbf{F}_{ij}$, определяемых согласно равенству (7.5), будет иметь вид

$$\|\mathbf{F}_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -\lambda_1 \\ -\mu & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда видно, что никакими значениями произвольных постоянных λ_i нельзя добиться выполнения условия $\mathbf{F}_{ij} = 0$. Тем самым алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$, образованная операторами $X_i^{(\epsilon)}$, будет являться нетривиальным центральным расширением алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, при $\lambda_i = 0$ коммутационные соотношения в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$[X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}] = i\epsilon\mu, \quad [X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}] = X_2^{(\epsilon)}, \quad [X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}] = -X_1^{(\epsilon)}.$$

Полученные результаты могут быть непосредственно перенесены и на случай уравнения Дирака.

Общековариантное уравнение Дирака для спинорного поля $\hat{\varphi}$ записывается в виде [1, 197]

$$\hat{H}^{(\epsilon)}\hat{\varphi} \equiv \left(i\gamma^a\hat{\nabla}_a^{(\epsilon)} - m\right)\hat{\varphi} = 0, \tag{7.15}$$

где γ^a — матрицы Дирака, определяемые как решение матричной системы уравнений $\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}$, а операторы $\hat{\nabla}_a^{(\epsilon)}$ определяются следующим образом

$$\hat{\nabla}_a^{(\epsilon)} \equiv \nabla_a^{(\epsilon)} - \frac{1}{4}\gamma^b_{\ ;a}\gamma_b.$$

Отметим, что уравнение (7.15) может быть получено путем варьирования действия вида

$$S \equiv \int \mathscr{L}\sqrt{|g|}\,d^nx = \frac{i}{2}\int\left[\overline{\psi}\,\gamma^a\left(\hat{\nabla}_a^{(\epsilon)}\psi\right) - \left(\overline{\hat{\nabla}_a^{(\epsilon)}\psi}\right)\gamma^a\psi - m\overline{\psi}\,\psi\right]\sqrt{|g|}\,d^nx.$$

Определяющие уравнения для оператора симметрии уравнения (7.15) в классе линейных дифференциальных дифференциальных операторов первого порядка были получены В. Н. Шаповаловым в работе [167]. Нас, однако, будут интересовать не все из них, а только те, которые не содержат матричных коэффициентов перед производными. Оказывается, что все такие операторы симметрии порождаются векторами Киллинга из допустимой подалгебры $\mathfrak{g}$, а образуемая ими алгебра как и в случае уравнения Клейна – Гордона является центральным расширением алгебры $\mathfrak{g}$.

Теорема 7.2. *Пусть $\zeta_i = \zeta_i^a \partial_a$ — допустимые вектора Киллинга, образующие базис в алгебре $\mathfrak{g}$. Операторы вида*

$$\hat{X}_0^{(\epsilon)} = i\epsilon, \quad \hat{X}_k^{(\epsilon)} = \zeta_k^a \hat{\nabla}_a^{(\epsilon)} - \frac{1}{8}\,\zeta_{ka;b}[\gamma^a, \gamma^b] - i\epsilon \int \imath_{\zeta_k} F, \tag{7.16}$$

являются операторами симметрии уравнения Дирака (7.15) *и образуют алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ с коммутационными соотношениями*

$$[\hat{X}_i^{(\epsilon)}, \hat{X}_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k\, \hat{X}_k^{(\epsilon)} + \mathbf{F}_{ij} \hat{X}_0^{(\epsilon)},$$

где величины $\mathbf{F}_{ij}$ определены формулой (7.5). *Таким образом, алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ представляет собой одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, построенное с помощью 2-коцикла* (7.5).

Мы не будем здесь приводить подробное доказательство данной теоремы. Отметим лишь, что оно чисто техническое и по сути повторяет все этапы доказательства теоремы 7.1. Вместо этого мы проиллюстрируем теорему 7.2 двумя примерами.

Пример 7.3. (Метрика Бертотти – Робинсона). Операторы симметрии уравнения Дирака в метрике (7.8) и внешнем электромагнитном поле с 2-формой (7.10) в соответствие с (7.16) имеют вид

$$\hat{X}_1^{(\epsilon)} = -\cos\varphi\, \hat{\nabla}_\theta^{(\epsilon)} + \operatorname{ctg}\theta \sin\varphi\, \hat{\nabla}_\varphi^{(\epsilon)} - \frac{1}{2}\, \sin\varphi \sin^2\theta\, \gamma^{34} + i\epsilon\mu_2\, \sin\theta \sin\varphi,$$

$$\hat{X}_2^{(\epsilon)} = \sin\varphi\, \hat{\nabla}_\theta^{(\epsilon)} + \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi\, \hat{\nabla}_\varphi^{(\epsilon)} - \frac{1}{2}\, \cos\varphi \sin^2\theta\, \gamma^{34} + i\epsilon\mu_2\, \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\hat{X}_3^{(\epsilon)} = \hat{\nabla}_\varphi^{(\epsilon)} + \frac{1}{4}\, \sin 2\theta\, \gamma^{34} - i\epsilon\mu_2\, \cos\theta,$$

$$\hat{X}_4^{(\epsilon)} = -\operatorname{sh} t\, \operatorname{cth} x\, \hat{\nabla}_t^{(\epsilon)} + \operatorname{ch} t\, \hat{\nabla}_x^{(\epsilon)} - \frac{1}{2}\, \operatorname{sh} t \operatorname{sh}^2 x\, \gamma^{12} + i\epsilon\mu_1\, \operatorname{sh} t \operatorname{sh} x,$$

$$\hat{X}_5^{(\epsilon)} = -\operatorname{ch} t\, \operatorname{cth} x\, \hat{\nabla}_t^{(\epsilon)} + \operatorname{sh} t\, \hat{\nabla}_x^{(\epsilon)} - \frac{1}{2}\, \operatorname{ch} t \operatorname{sh}^2 x\, \gamma^{12} + i\epsilon\mu_1\, \operatorname{ch} t \operatorname{sh} x,$$

$$\hat{X}_6^{(\epsilon)} = -\hat{\nabla}_t^{(\epsilon)} - \frac{1}{4}\, \operatorname{sh} 2x\, \gamma^{12} + i\epsilon\mu_1\, \operatorname{ch} x.$$

(Здесь и далее мы используем обозначение $\gamma^{ab} \equiv \left(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a\right)/2$). Алгебра этих операторов описывается коммутационными соотношениями

$$[\hat{X}_1^{(\epsilon)}, \hat{X}_2^{(\epsilon)}] = \hat{X}_3^{(\epsilon)}, \quad [\hat{X}_1^{(\epsilon)}, \hat{X}_3^{(\epsilon)}] = -\hat{X}_2^{(\epsilon)}, \quad [\hat{X}_2^{(\epsilon)}, \hat{X}_3^{(\epsilon)}] = \hat{X}_1^{(\epsilon)}, \quad [\hat{X}_4^{(\epsilon)}, \hat{X}_5^{(\epsilon)}] = \hat{X}_6^{(\epsilon)},$$

$$[\hat{X}_4^{(\epsilon)}, \hat{X}_6^{(\epsilon)}] = \hat{X}_5^{(\epsilon)}, \quad [\hat{X}_5^{(\epsilon)}, \hat{X}_6^{(\epsilon)}] = \hat{X}_4^{(\epsilon)},$$

и, как следует из сравнения этих соотношений с (7.9), изоморфна алгебре Ли группы движений рассматриваемой метрики. Дополняя эту алгебру тривиальным оператором симметрии $\hat{X}_0^{(\epsilon)} = i\epsilon$, получаем, что алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ симметрии уравнения Дирака представляет собой тривиальное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, что фактически является следствием полупростоты последней.

Пример 7.4. Уравнение Дирака в плоско-симметрической метрике вида (7.11) и внешнем электромагнитном поле с 2-формой (7.12) в общем случае допускает три нетривиальных оператора симметрии

$$\hat{X}_1^{(\epsilon)} = \hat{\nabla}_x^{(\epsilon)} + \frac{1}{2}\,Y(t,z)\left(\frac{\partial Y(t,z)}{\partial t}\,\gamma^{12} - \frac{\partial Y(t,z)}{\partial z}\,\gamma^{24}\right) - i\epsilon\mu y, \tag{7.17}$$

$$\hat{X}_2^{(\epsilon)} = \hat{\nabla}_y^{(\epsilon)} + \frac{1}{2}\,Y(t,z)\left(\frac{\partial Y(t,z)}{\partial t}\,\gamma^{13} - \frac{\partial Y(t,z)}{\partial z}\,\gamma^{34}\right) + i\epsilon\mu x, \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}\hat{X}_3^{(\epsilon)} = -y\hat{\nabla}_x^{(\epsilon)} + x\hat{\nabla}_y^{(\epsilon)} + \frac{1}{2}\,Y(t,z)\,\frac{\partial Y(t,z)}{\partial t}\left(x\gamma^{13} - y\gamma^{12}\right) + \\ + \frac{1}{2}\,Y(t,z)\,\frac{\partial Y(t,z)}{\partial z}\left(y\gamma^{24} - x\gamma^{34}\right) + \frac{1}{2}\,Y^2(t,z)\gamma^{23} + \frac{i\epsilon\mu}{2}\left(x^2 + y^2\right).\end{aligned} \tag{7.19}$$

Коммутационные соотношения, которым удовлетворяют данные операторы, имеют следующий вид

$$[\hat{X}_1^{(\epsilon)}, \hat{X}_2^{(\epsilon)}] = i\epsilon\mu, \quad [\hat{X}_1^{(\epsilon)}, \hat{X}_3^{(\epsilon)}] = \hat{X}_2^{(\epsilon)}, \quad [\hat{X}_2^{(\epsilon)}, \hat{X}_3^{(\epsilon)}] = -\hat{X}_1^{(\epsilon)}.$$

Таким образом, также как и в случае соответствующего уравнения Клейна – Гордона, алгебра симметрии уравнения Дирака, образованная операторами (7.17) – (7.18) и дополненная тривиальным оператором $\hat{X}_0^{(\epsilon)} = i\epsilon$, представляет собой центральное расширение алгебры векторов Киллинга $\mathfrak{g}$, не тривиальное при $\mu \neq 0$.

§ 7.2 Интегрирование релятивистских волновых уравнений во внешнем электромагнитном поле на группах Ли

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос об интегрируемости релятивистских волновых уравнений на многообразиях групп Ли, а также опишем эффективный алгоритм построения их общих решений.

Пусть G — связная унимодулярная n-мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Рассмотрим на группе G правоинвариантную псевдориманову метрику, метрический тензор g_{ij} которой задается выражением (2.87). Кроме этого мы предположим, что на G задано внешнее электромагнитное поле, определяемое правоинвариантной замкнутой 2-формой F, отвечающей некоторому фиксированному 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Как было показано выше, координатные компоненты 2-формы F в этом случае выражаются через компоненты 2-коцикла $\mathbf{F}$ формулой (6.16).

Несложно показать, что свободное уравнение Клейна – Гордона для правоинвариантной метрики (2.87) может быть записано в форме

$$H^{(0)}\varphi \equiv \left(\mathbf{G}^{ij}\eta_i\eta_j + m^2 + \varsigma R\right)\varphi = 0, \tag{7.20}$$

где $\eta_i(x) = -(R_x)_* e_i$ — правоинвариантные векторные поля, соответствующие базисным векторам e_i алгебры $\mathfrak{g}$, а постоянные величины $\mathbf{G}^{ij}$ однозначно определяются равенством $\mathbf{G}^{ik}\mathbf{G}_{kj} = \delta^i_j$, где $\mathbf{G}_{ij} = g(\eta_i, \eta_j)$ — компоненты метрики, вычисленные на правоинвариантных векторных полях (см. пример 3.1). Отметим, что в силу транзитивности правого действия группы G на себе, скалярная кривизна R правоинвариантной метрики является постоянной величиной.

Включение внешнего электромагнитного поля в свободное уравнение Клейна – Гордона сводится к замене ковариантных производных ∇_i на обобщенные ковариантные производные вида $\nabla^{(\epsilon)}_i = \nabla_i - i\epsilon A_i$, где A_i — компоненты 1-формы A такой, что $dA = F$. Нетрудно видеть, что для уравнения Клейна – Гордона (7.20) указанная процедура эквивалентна замене правоинвариантных векторных полей η_i на неоднородные дифференциальные операторы

$$\eta^{(\epsilon)}_i \equiv \eta_i - i\epsilon\mathbf{A}_i, \tag{7.21}$$

где величины $\mathbf{A}_i$ однозначно задаются условием $A(\eta_i) = \mathbf{A}_i$. В результате уравнение Клейна – Гордона во внешнем электромагнитном поле на группе G может быть записано как

$$H^{(\epsilon)}\varphi \equiv \left(\mathbf{G}^{ij}\eta^{(\epsilon)}_i\eta^{(\epsilon)}_j + m^2 + \varsigma R\right)\varphi = 0. \tag{7.22}$$

В свою очередь, уравнение Дирака для правоинвариантной метрики и электромагнитного поля с правоинвариантной 2-формой F также может быть выражено в терминах неоднородных операторов (7.21). Чтобы показать это, разложим матрицы Дирака γ^i по базисным правоинвариантным векторным полям η_i:

$$\gamma^i = \tilde{\gamma}^j\eta^i_j, \quad \tilde{\gamma}^i = \gamma^j\sigma^i_j. \tag{7.23}$$

Здесь $\sigma^i = \sigma^i_j dx^j$ — правоинвариантные 1-формы, дуальные векторным полям η_i. Матрицы $\tilde{\gamma}^i$ являются постоянными (не зависящими от координат) и удовлетворяют системе матричных уравнений

$$\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j + \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i = 2\mathbf{G}^{ij}.$$

Наряду с постоянными матрицами $\tilde{\gamma}^i$ рассмотрим также матрицы $\tilde{\gamma}_i = \mathbf{G}_{ij}\tilde{\gamma}^j$. Из формул (7.23) легко следуют соотношения

$$\gamma_i = \tilde{\gamma}_j\sigma^j_i, \quad \tilde{\gamma}_i = \gamma_j\eta^j_i. \tag{7.24}$$

Используя формулы (2.87), (7.23) и (7.24), а также учитывая унимодулярность группы G, мы можем переписать уравнение Дирака в следующем виде

$$\hat{H}^{(\epsilon)}\hat{\varphi} \equiv \left(i\tilde{\gamma}^k \eta_k^{(\epsilon)} + \mathbf{\Gamma} - m\right)\hat{\varphi} = 0, \quad \mathbf{\Gamma} = -\frac{i}{8}\, C_{ij}^k\, \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}_k. \tag{7.25}$$

Обсудим алгебры симметрии уравнений (7.22) и (7.25). Во-первых, напомним, что векторами Киллинга произвольной правоинвариантной метрики на группе G являются левоинвариантные векторные поля ξ_i и только они. Последние образуют алгебру Ли векторных полей, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G: $[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k\, \xi_k$. Используя применительно к данному случаю теорему 7.1, получаем, что алгебра симметрии уравнения Клейна – Гордона (7.22) задается операторами

$$\xi_0^{(e)} \equiv i\epsilon, \quad \xi_k^{(e)} = \xi_k + i\epsilon\left(\vartheta_k - \imath_{\xi_k} A\right), \tag{7.26}$$

где функции ϑ_k однозначно определяются условиями $d\vartheta_k = -\imath_{\xi_k} F$, $\vartheta_k(e) = 0$. Данная алгебра образует одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующее 2-коциклу $\mathbf{F}_{ij} = F(\xi_i, \xi_j) - C_{ij}^k\, \vartheta_k$:

$$[\xi_i^{(e)}, \xi_j^{(e)}] = C_{ij}^k\, \xi_k^{(e)} + i\epsilon \mathbf{F}_{ij}.$$

Операторы симметрии для уравнения Дирака (7.25) также могут быть построены с использованием теоремы 7.2. Проще, однако, выписать их явный вид используя тот факт, что неоднородные операторы $\eta_i^{(e)}$ и $\xi_j^{(e)}$ коммутируют друг с другом

$$[\eta_i^{(e)}, \xi_j^{(e)}] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}. \tag{7.27}$$

Указанный факт, как нетрудно видеть, следует из условия коммутирования лево- и правоинвариантных векторных полей, а также из соотношений (6.20) и (6.36), которым удовлетворяют функции $\mathbf{A}_i$ и ϑ_i соответственно. Учитывая теперь, что матрицы $\tilde{\gamma}^k$ и $\mathbf{\Gamma}$ в уравнении Дирака (7.25) являются постоянными, легко видеть, что $[\hat{H}^{(\epsilon)}, \xi_k^{(\epsilon)}] = 0$, то есть скалярные операторы $\xi^{(\epsilon)}$, являющиеся операторами симметрии для уравнения Клейна – Гордона (7.22), будут таковыми и для уравнения Дирака (7.25).

Перейдем теперь к задаче интегрирования уравнений (7.22) и (7.25). Для ее решения мы адаптируем метод интегрирования квантовых уравнений, изложенный нами в § 3.5.

Путем несложных вычислений можно показать, что неоднородные операторы $\eta_i^{(\epsilon)}$, определяемые согласно (7.21), удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[\eta_i^{(\epsilon)}, \eta_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k\, \eta_k^{(\epsilon)} + \mathbf{F}_{ij}\, \eta_0^{(\epsilon)}, \quad \eta_0^{(\epsilon)} = -i\epsilon.$$

Тем самым данные операторы образуют алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, являющуюся центральным расширением алгебры $\mathfrak{g}$, отвечающим 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. Реализуем алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ с помощью λ-представления, соответствующего ковектору $\lambda \oplus \epsilon \in \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$ (см. § 3.2):

$$\ell_0^{(\epsilon)} = i\epsilon, \quad \ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda) = \zeta_i^a(v)\partial_{v^a} + i\chi_i^{(\epsilon)}(v;\lambda), \quad [\ell_i^{(\epsilon)}, \ell_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k\, \ell_k^{(\epsilon)} + \mathbf{F}_{ij}\, \ell_0^{(\epsilon)}.$$

По построению операторы $\ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)$ действуют в пространстве гладких функций $C^\infty(V)$ на смешанном многообразии Q, размерность которого определяется согласно формуле

$$\dim V = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}\right). \tag{7.28}$$

Здесь $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}$ — когомологический индекс алгебры $\mathfrak{g}$, задаваемый классом когомологий $[\mathbf{F}] \in \mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ и определяемый равенством (6.46). Как обычно мы зафиксируем меру $d\mu^{(\epsilon)}(v)$ на многообразии V, по отношению к которой операторы $\ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)$ являются антиэрмитовыми.

Рассмотрим на группе G семейство обобщенных функций $\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x)$ удовлетворяющих системе уравнений

$$\left[\eta_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x) + \ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)\right] \mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x) = 0, \quad \left[\xi_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x) + \overline{\ell_i^{(\epsilon)}(v', \partial_{v'}; \lambda)}\right] \mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x) = 0. \tag{7.29}$$

В силу того, что $\vartheta_i(e) = 0$, имеет место равенство $\xi_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x)|_{x=e} = \eta_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x)|_{x=e}$. В следствие этого, $\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(e) = \delta^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$, где $\delta^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$ — дельта-функция на многообразии V, определяемая относительно меры $d\mu^{(\epsilon)}(v)$.

Свойства ортогональности и полноты обобщенных функций $\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x)$

$$\int\limits_G \overline{\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x)}\, \mathscr{D}_{\tilde{v}\bar{\tilde{v}}'}^{(\epsilon,\tilde{\lambda})}(x) d\mu(x) = \delta^{(\epsilon)}(v, \tilde{v})\delta^{(\epsilon)}(v', \bar{\tilde{v}}')\delta^{(\epsilon)}(\lambda, \tilde{\lambda}), \tag{7.30}$$

$$\int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x)} \mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(\tilde{x}) d\mu^{(\epsilon)}(v) d\mu^{(\epsilon)}(v') d\mu^{(\epsilon)}(\lambda) = \delta(x, \tilde{x}), \tag{7.31}$$

позволяют определить прямое и обратное обобщенные преобразования Фурье:

$$\psi_\lambda^{(\epsilon)}(v, \bar{v}') = \int\limits_G \varphi(x) \mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x) d\mu(x), \tag{7.32}$$

$$\varphi(x) = \int\limits_{V\times V\times\Lambda} \overline{\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x)} \psi_\lambda^{(\epsilon)}(v, \bar{v}') d\mu^{(\epsilon)}(v) d\mu^{(\epsilon)}(v') d\mu^{(\epsilon)}(\lambda). \tag{7.33}$$

Используя теперь соображения, аналогичные изложенным в § 3.3, можно убедиться, что после преобразования (7.32) действие операторов $\eta_i^{(\epsilon)}$ и $\xi_i^{(\epsilon)}$ перейдет в действие соответствующих операторов λ-представления и наоборот:

$$\eta_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x)\varphi(x) \leftrightarrow \ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)\psi^{(\epsilon)}(v, \bar{v}'), \quad \xi_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x)\varphi(x) \leftrightarrow -\overline{\ell_i^{(\epsilon)}(v', \partial_{v'}; \lambda)}.$$

Отметим, что неоднородные операторы $\eta_i^{(\epsilon)}$ и $\xi_i^{(\epsilon)}$ зависят от $n = \dim \mathfrak{g}$ независимых переменных, в то время как число переменных, входящих в операторы $\ell_i^{(\epsilon)}$, определяется размерностью смешанного многообразия V согласно (7.28). Этот факт позволяет использовать прямое и обратное обобщенные преобразования Фурье (7.32) и (7.33) для редукции дифференциальных операторов, являющихся полиномиальными комбинациями операторов $\eta_i^{(\epsilon)}$ и $\xi_i^{(\epsilon)}$ к операторам с меньшим числом переменных.

Применим описанную идею редукции к уравнению Клейна – Гордона (7.22). В силу того, что оператор Клейна – Гордона представляется полиномом второго порядка от операторов $\eta_i^{(\epsilon)}$, уравнение (7.22) после редукции переходит в дифференциальное уравнение второго порядка на неизвестную функцию $\psi^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$:

$$\left(\mathbf{G}^{ij}\ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)\ell_j^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda) + m^2 + \varsigma R\right)\psi^{(\epsilon)}(v, \bar{v}') = 0. \tag{7.34}$$

Отметим, что v' входят в данное уравнение как параметры. Если мы сможем построить общее решение уравнения (7.34), то, используя квадратуру (7.33), мы получим общее решение уравнения Клейна – Гордона (7.22). В частности, если $\dim V = 1$, то (7.34) является обыкновенным дифференциальным уравнением, следовательно, уравнение (7.22) интегрируемо.

Аналогично используя описанную технику к уравнению Дирака (7.25), получим

$$\left(i\tilde{\gamma}^k\ell_k^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda) + \mathbf{\Gamma} - m\right)\hat{\psi}_\lambda^{(\epsilon)}(v, \bar{v}') = 0.$$

Здесь $\hat{\psi}_\lambda^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$ — спинор, являющийся образом спинора $\hat{\psi}(x)$ при обобщенном преобразовании Фурье (7.32). Таким образом, после редукции уравнение Дирака на группе G перейдет в дифференциально-матричное уравнение первого порядка с $\dim V$ независимыми переменными на неизвестный спинор $\hat{\psi}_\lambda^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$.

Подведем основной итог нашим исследованиям, сформулировав полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 7.3. *Пусть внешнее электромагнитное поле на унимодулярной группе Ли G задано с помощью правоинвариантной замкнутой 2-формы, соответствующей 2-коциклу $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$. Тогда для произвольной правоинвариантной метрики на группе G уравнения Клейна – Гордона* (7.22) *и Дирака* (7.25) *редуцируются соответственно к скалярному и матричному дифференциальным уравнениям с $\dim V = \left(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}\right)/2$ независимыми переменными. В частности, уравнения* (7.22) *и* (7.25) *являются интегрируемыми, если и только если*

$$\frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g}\right) \leq 1.$$

Как уже отмечалось, для полупростых алгебр Ли справедлива вторая лемма Уайтхеда, согласно которой $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})=0$. Это означает, что любой 2-коцикл $\mathbf{F}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является 2-кограницей, поэтому $\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]}\mathfrak{g}=\operatorname{ind}\mathfrak{g}$, т. е. когомологический индекс совпадает с обычным индексом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда следует, что для полупростых групп Ли свойство интегрируемости свободных уравнений Клейна – Гордона или Дирака «сохраняется» и после включения правоинвариантного электромагнитного поля. Очевидно, что данное свойство имеет место и в случае группы Ли с нулевой группой 2-когомологий $\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$.

Следствие 7.1. *Пусть G – полупростая группа Ли. Тогда уравнения Клейна – Гордона* (7.22) *и Дирака* (7.25) *относительно произвольной правоинвариантной метрики во внешнем правоинвариантном электромагнитном поле интегрируемы, если интегрируемы соответствующие свободные уравнения в отсутствие поля, т.е. в случае, когда*

$$\frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g}-\operatorname{ind}\mathfrak{g}\right)\leq 1.$$

Пример 7.5. (Релятивистские волновые уравнения на группе $E(2)\times\mathbb{R}$). Проиллюстрируем вышеизложенные результаты на одном конкретном примере. Рассмотрим четырехмерную связную группу Ли $G=E(2)\times\mathbb{R}$, где $E(2)$ — группа движений двумерной евклидовой плоскости. Алгебра Ли $\mathfrak{g}=\mathfrak{e}(2)\oplus\mathbb{R}$ группы G определяется следующими ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[e_1,e_3]=-e_2,\quad [e_2,e_3]=e_1.$$

Здесь $\{e_1,e_2,e_3\}$ — базис в алгебре Ли $\mathfrak{e}(2)$; базисный вектор в алгебре $\mathbb{R}$ обозначим как e_4.

Алгебра $\mathfrak{g}$ допускает четырехмерное пространство 2-коциклов $\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$, произвольный элемент в которого представляется в виде

$$\mathbf{F}=\mu_1\,e^1\wedge e^2+\mu_2\,e^1\wedge e^3+\mu_3\,e^2\wedge e^3+\mu_4\,e^3\wedge e^4. \tag{7.35}$$

Здесь $\{e^1,e^2,e^3,e^4\}$ — базис в пространстве $\mathfrak{g}^*$, дуальный базису $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, μ_i — произвольные постоянные. Вложение подпространства $\mathbf{B}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})\subset\mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ задается равенствами $\mu_1=\mu_2=0$, следовательно, $\dim\mathbf{H}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})=2$.

В некоторой окрестности единицы группы G введем локальные координаты второго рода: $g_x=e^{x_1e_1}e^{x_2e_2}e^{x_3e_3}e^{x_0e_4}$; за исключением $x_3\in(-\pi,\pi)$ область действия каждой координаты есть все множество $\mathbb{R}$. В выбранных координатах лево- и правоинвариантные векторные поля на группе принимают вид

$$\xi_1=\cos x_3\,\partial_{x_1}+\sin x_3\,\partial_{x_2},\quad \xi_2=-\sin x_3\,\partial_{x_1}+\cos x_3\,\partial_{x_2},\quad \xi_3=\partial_{x_3},\quad \xi_4=\partial_{x_0}; \tag{7.36}$$

$$\eta_1 = -\partial_{x_1}, \quad \eta_2 = -\partial_{x_2}, \quad \eta_3 = x_2\,\partial_{x_1} - x_1\,\partial_{x_2} - \partial_{x_3}, \quad \eta_4 = -\partial_{x_0}. \tag{7.37}$$

Группа G унимодулярна; инвариантную меру на группе выберем в виде

$$d\mu(x) = \frac{1}{2\pi}\,dx_0 dx_1 dx_2 dx_3.$$

Выпишем координатный вид правоинвариантной замкнутой 2-формы F на группе G, отвечающей 2-коциклу (7.35):

$$F = \mu_1\,dx_1 \wedge dx_2 - (\mu_1 x_1 - \mu_2)dx_1 \wedge dx_3 - (\mu_1 x_2 - \mu_3)dx_2 \wedge dx_3 - \mu_4\,dx_0 \wedge dx_3. \tag{7.38}$$

В качестве 1-формы A, удовлетворяющей условию $dA = F$, выберем 1-форму

$$A = \mu_1 x_1 dx_2 - \left[\frac{\mu_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - \mu_2 x_1 - \mu_3 x_2 + \mu_4 x_0\right] dx_3. \tag{7.39}$$

Компоненты $\mathbf{A}_i = A(\eta_i)$ этой 1-формы, вычисленные на правоинвариантных векторных полях (7.37), даются выражениями

$$\mathbf{A}_1 = 0, \quad \mathbf{A}_2 = -\mu_1 x_1, \quad \mathbf{A}_3 = -\frac{\mu_1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \mu_2 x_1 - \mu_3 x_2 + \mu_4 x_0, \quad \mathbf{A}_4 = 0.$$

Обсудим возможность точного интегрирования релятивистских волновых уравнений (7.22) и (7.25) на группе Ли $G = E(2) \times \mathbb{R}$ во внешнем электромагнитном поле, задаваемым 2-формой (7.38). Отметим, что данные уравнения допускают алгебру операторов симметрии, изоморфную алгебре Ли $\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{e}(2) \oplus \mathbb{R}) \oplus_{\mathbf{F}} \mathbb{R}$. Явный вид этих операторов легко получить, учитывая координатный вид левоинвариантных векторных полей (7.36) и формулы (7.26):

$$\xi_1^{(\epsilon)} = \cos x_3\,\partial_{x_1} + \sin x_3\,\partial_{x_2} + i\epsilon\left((\mu_3 - \mu_1 x_2)\cos x_3 - \mu_2 \sin x_3 - \mu_3\right),$$

$$\xi_2^{(\epsilon)} = -\sin x_3\,\partial_{x_1} + \cos x_3\,\partial_{x_2} - i\epsilon\left((\mu_3 - \mu_1 x_2)\sin x_3 + \mu_2 \cos x_3 - \mu_2\right),$$

$$\xi_3^{(\epsilon)} = \partial_{x_3}, \quad \xi_4^{(\epsilon)} = \partial_{x_0} + i\epsilon\mu_4 x_3.$$

Нетрудно видеть, что когомологический индекс алгебры $\mathfrak{g}$ равен

$$\operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]}\mathfrak{g} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_1\mu_4 \neq 0; \\ 2, & \text{если } \mu_1\mu_4 = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 7.3, уравнение Клейна – Гордона (7.22) и Дирака (7.25) на группе G являются интегрируемыми для всякой правоинвариантной метрики, если параметры 2-коцикла (7.35) удовлетворяют условию $\mu_1\mu_4 = 0$.

Далее мы для определенности ограничимся рассмотрением ситуации, когда $\mu_1 \neq 0$. Тогда с точностью до действия автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 2-коцикл (7.35) может быть выбран в виде

$$\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2,$$

что соответствует условиям $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$. Кроме того, мы рассмотрим случай, когда параметр ϵ является положительным (случай $\epsilon < 0$ рассматривается аналогично).

Реализуем λ-представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ следующими операторами

$$\ell_0^{(\epsilon)} = i\epsilon, \quad \ell_1^{(\epsilon)} = i\partial_v + \frac{i\epsilon v}{2}, \quad \ell_2^{(\epsilon)} = -\partial_v + \frac{\epsilon v}{2}, \quad \ell_3^{(\epsilon)} = -iv\partial_v + iJ_1, \quad \ell_4^{(\epsilon)} = iJ_2. \tag{7.40}$$

Из условия (3.31) следует, что параметр J_1 является целым: $J_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в то время как параметр J_2 принимает любые значения из $\mathbb{R}$. Область определения координаты v — вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Можно показать, что операторы $\ell_i^{(\epsilon)}$ являются косоэрмитовыми относительно меры

$$d\mu^{(\epsilon)}(v) = \frac{i\epsilon}{4\pi} \exp\left(-\frac{\epsilon|v|^2}{2}\right) dv \wedge d\bar{v}.$$

При этом соответствующая дельта-функция $\delta^{(\epsilon)}(v, \bar{v}')$ определяется выражением

$$\delta^{(\epsilon)}(v, \bar{v}') = \exp\left(\frac{\epsilon v \bar{v}'}{2}\right).$$

Решая систему уравнений (7.29), получаем

$$\mathscr{D}_{v\bar{v}'}^{(\epsilon,\lambda)}(x) = \exp\Big[-\frac{\epsilon}{4}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{i\epsilon}{2}\big(x_1x_2 + (x_1 + ix_2)e^{-ix_3}\bar{v}' + $$
$$+ v(x_1 - ix_2 - ie^{-ix_3}\bar{v}')\big) + iJ_1x_3 + iJ_2x_0\Big]. \tag{7.41}$$

Свойства ортогональности (7.30) и полноты (7.31) проверяются непосредственно. Мера $d\mu^{(\epsilon)}(\lambda)$ для целочисленных орбит определяется выражением

$$\int (\cdot)\, d\mu^{(\epsilon)}(\lambda) \equiv \frac{\epsilon}{(2\pi)^3} \sum_{J_1=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cdot)\, dJ_2$$

Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in L^2(G, d\mu(x))$ мы можем согласно формулам (7.32) и (7.33) определить прямое и обратное обобщенные преобразования Фурье.

Рассмотрим задачу интегрирования уравнений Клейна – Гордона и Дирака на группе G. Для определенности зафиксируем на группе правоинвариантную метрику с матрицей $\|\mathbf{G}_{ij}\| = \mathrm{diag}(-\alpha, -1, -1, +1)$, где $\alpha \neq 0$ — вещественный параметр:

$$ds^2 = \mathbf{G}_{ij}\,\sigma^i\sigma^j = dx_0^2 - \alpha\, dx_1^2 - 2\alpha x_2 dx_1 dx_3 - dx_2^2 + 2x_1 dx_2 dx_3 - \left(1 + x_1^2 + \alpha x_2^2\right) dx_3^2. \tag{7.42}$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ метрика является плоской.

Согласно выражению (7.22), уравнение Клейна – Гордона во внешнем электромагнитном поле с потенциалом (7.39) будет иметь вид

$$\left[\partial_{x_0}^2 - \alpha\partial_{x_1}^2 - (\partial_{x_2} - i\epsilon x_1)^2 - \left(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} - \partial_{x_3} + \frac{i\epsilon}{2}(x_1^2 - x_2^2)\right)^2 + m^2 + \varsigma R\right]\varphi(x) = 0, \tag{7.43}$$

где $R = (1-\alpha)^2/(2\alpha)$. Используя те же соображения, что и в примере 6.4, можно показать, что метрика (7.42) является штеккелевой, то есть соответствующее свободное уравнение Гамильтона – Якоби допускает полное разделение переменных. Однако, включение в него внешнего электромагнитного поля (7.39) приводит к невозможности разделения в нем переменных, что, естественно, будет иметь место и для уравнения Клейна – Гордона (7.43).

В соответствие с формулой (7.34) выпишем приведенное уравнение Клейна – Гордона, используя явный вид операторов λ-представления (7.40):

$$\left[-J_2^2 + \alpha\left(\partial_v + \frac{\epsilon v}{2}\right)^2 - \left(\partial_v - \frac{\epsilon v}{2}\right)^2 + (v\partial_v - J_1)^2 + m^2 + \varsigma R\right]\psi^{(\epsilon)}_{J_1,J_2}(v,\bar{v}') = 0. \qquad (7.44)$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением на неизвестную функцию $\psi^{(\epsilon)}_{J_1,J_2}(v,\bar{v}')$, которая зависит от переменной v и от параметров J_1, J_2 и $\bar{v}'$. Общее решение этого уравнения может быть выражено в специальных функциях Гойна:

$$\psi^{(\epsilon)}_{J_1,J_2}(v,\bar{v}') = C_1\,\mathrm{H}\ell\left(0, -\frac{1}{2}\,a, b, c, \frac{v^2}{1-\alpha}\right) + C_2\,v\,\mathrm{H}\ell\left(0, -\frac{1}{2}\,a, b, c, \frac{v^2}{1-\alpha}\right).$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, а параметры a, b, и c даются следующими выражениями

$$a = \frac{\epsilon(1+\alpha)}{2} - J_1 - \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\epsilon^2(1-\alpha)^2}{16}, \quad c = \frac{1}{4}\left(m^2 + J_1^2 - J_2^2 + J_1\right) + \frac{(1-\alpha)^2\varsigma + 3}{8\alpha}.$$

Решение исходного уравнения (7.43) может быть получено с помощью решения уравнения (7.44) путем вычисления интеграла (7.33).

В заключение выпишем также исходное и приведенное уравнения Дирака для метрики (7.42) и внешнего поля (7.39):

$$\Big[-i\tilde{\gamma}^4\partial_{x_0} - i\tilde{\gamma}^1\partial_{x_1} - i\tilde{\gamma}^2\left(\partial_{x_2} - i\epsilon x_1\right) + i\tilde{\gamma}^3\left(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2} - \partial_{x_3} + \frac{i\epsilon}{2}(x_1^2 - x_2^2)\right) + \\ + \frac{i}{4}\left(\tilde{\gamma}^{13}\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}^{23}\tilde{\gamma}_1\right) - m\Big]\hat{\psi}(x) = 0; \quad (7.45)$$

$$\Big[\tilde{\gamma}^4 J_2 - \tilde{\gamma}^1\left(\partial_v + \frac{\epsilon v}{2}\right) - i\tilde{\gamma}^2\left(\partial_v - \frac{\epsilon v}{2}\right) + \tilde{\gamma}^3\left(v\partial_v - J_1\right) + \\ + \frac{i}{4}\left(\tilde{\gamma}^{13}\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}^{23}\tilde{\gamma}_1\right) - m\Big]\hat{\psi}^{(\epsilon)}_{J_1,J_2}(v,\bar{v}') = 0. \quad (7.46)$$

Так же как и в случае уравнения Клейна – Гордона, общее решение уравнения Дирака (7.45) может быть восстановлено из общего решения уравнения (7.46) с помощью интегрального преобразования (7.33).

§ 7.3 Общая схема построения точных решений релятивистских волновых уравнений во внешнем электромагнитном поле

Пусть M — гладкое многообразие, на котором действует связная n-мерная группа Ли преобразований G. Инфинитезимальные генераторы $\zeta_i = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a}$ действия группы образуют подалгебру $\mathfrak{g}(M)$ в алгебре Ли всех векторных полей на M, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G: $[\zeta_i, \zeta_j] = C_{ij}^k \zeta_k$. Чтобы избежать некоторых технических сложностей, в данной параграфе мы ограничимся ситуацией, когда между генераторами отсутствуют функциональные зависимости, т.е. мы будем предполагать, что выполняется условие:

$$c^{i_1\dots i_k}\zeta_{i_1}^{a_1}(x)\dots\zeta_{i_k}^{a_k}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c^{i_1\dots i_k} = 0.$$

Пусть $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ — некоторый 2-коцикл алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим на многообразии M линейное дифференциальное уравнение с $N = \dim M$ независимыми переменными

$$H(x, \partial_x)\varphi(x) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^N, \quad \varphi \in C^\infty(D), \tag{7.47}$$

Предположим, что данное уравнение допускает n операторов симметрии первого порядка $X_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x) = \zeta_i^a(x)\partial_{x^a} + i\epsilon\vartheta(x)$, образующих одномерное центральное расширение алгебры $\mathfrak{g}$:

$$[H, X_i^{(\epsilon)}] = 0, \quad [X_i^{(\epsilon)}, X_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k X_k^{(\epsilon)} + i\epsilon\mathbf{F}_{ij}.$$

Основная задача настоящего параграфа состоит в построении алгоритма редуцирования уравнения (7.47) с использованием только квадратур к дифференциальному уравнению с минимально возможным числом независимых переменных N'. При этом предполагается, что базис решений исходного уравнения восстанавливается по базису решений редуцированного (приведенного) уравнения. Если редуцированное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением (или алгебраическим), то мы будем говорить, что уравнение (7.47) *интегрируемо*.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебру Ли, образованную операторами $X_0^{(\epsilon)} \equiv i\epsilon$, $X_1^{(\epsilon)}, \dots, X_n^{(\epsilon)}$. Пусть (λ, ϵ) — регулярный элемент дуального пространства $\tilde{\mathfrak{g}}^* \simeq \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R}$. Реализуем алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ операторами λ-представления (см. § 3.2, а также § 7.2):

$$\ell_0^{(\epsilon)} = -i\epsilon, \quad \ell_i^{(\epsilon)} = \xi_i^{\bar{a}}(v)\partial_{v^{\bar{a}}} + \chi_i(v;\lambda); \quad [\ell_i^{(\epsilon)}, \ell_j^{(\epsilon)}] = C_{ij}^k \ell_k^{(\epsilon)} + \mathbf{F}_{ij}\,\ell_0^{(\epsilon)}.$$

Напомним, что по построению λ-представление операторно неприводимо и действует в пространстве функций на смешанном многообразии V, размерность которого определяется согласно формуле

$$\dim V = \frac{1}{2}\left(\dim\mathfrak{g} - \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}\right). \tag{7.48}$$

Здесь $\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g}$ — когомологический индекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который вычисляется по известным структурным константам алгебры $\mathfrak{g}$ и компонентам 2-коцикла $\mathbf{F} \in \mathbf{Z}^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ с помощью равенства (6.47).

Представим общее решение уравнения (7.47) в виде интегрального разложения

$$\varphi(x) = \int \psi_\lambda^{(\epsilon)}(v) \mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x, v) d\mu(v) d\mu(\lambda). \tag{7.49}$$

Здесь $d\mu(v)$ — мера на смешанном многообразии V, $d\mu(\lambda)$ — мера на множестве регулярных целочисленных орбит в дуальном пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, а функция $\mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x, v)$ является решением следующей системы уравнений:

$$\left[X_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x) + \ell_i^{(\epsilon)}(v, \partial_v; \lambda)\right] \mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x, v) = 0. \tag{7.50}$$

Оператор $H(x, \partial_x)$ перестановочен со всеми операторами $X_i^{(\epsilon)}(x, \partial_x)$, поэтому уравнение (7.47) можно корректно ограничить на пространство решений системы (7.50). Общее решение последней можно представить в виде

$$\mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x, v) = e^{R_\lambda^{(\epsilon)}(x,v)} \psi(u),$$

где $R_\lambda^{(\epsilon)}(x, v)$ — некоторая функция, $\psi(u)$ — произвольная функция от переменных $u = u(x, v)$, являющихся характеристиками системы (7.50). Тем самым, после ограничения уравнения (7.47) на пространство решений (7.50), мы получим уравнение на неизвестную функцию $\psi(u)$:

$$\tilde{H}^{(\epsilon)}(u, \partial_u; \lambda) \psi(u) = 0. \tag{7.51}$$

Если мы сможем проинтегрировать уравнение (7.51), то подставляя его общее решение в интегральное разложение (7.49), мы получим общее решение уравнения (7.47).

Таким образом, алгоритм редуцирования дифференциального уравнения (7.47) выглядит следующим образом. На первом шаге строим λ-представление алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, образованной операторами симметрии уравнения (7.47). Второй шаг состоит в решении системы дифференциальных уравнений (7.50). Отметим, что данная система является системой уравнений первого порядка, поэтому ее общее решение находится в квадратурах. Наконец, на третьем шаге мы подставляем полученное решение системы (7.50) в (7.47), получая тем самым редуцированное уравнение (7.51).

Подсчитаем теперь число N' переменных u в редуцированном уравнении (7.51). Это легко сделать, если вспомнить, что по нашему предположению между векторными полями ζ_i нет функциональных соотношений. В этом случае число N', равное числу независимых характеристик системы (7.50), определяется только однородной частью последней. Учитывая теперь, что количество переменных v дается формулой (7.48), для N' получаем:

$$N' = \dim M - \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g}\right). \tag{7.52}$$

При этом уравнение (7.47) будет интегрируемым, если $N' \leq 1$.

Описанная схема редуцирования линейных дифференциальных уравнений с помощью их алгебр симметрии, являющихся центральными расширениями алгебр Ли, является обобщением метода некоммутативной редукции, предложенного в работах [25, 28]. В частности, формула (7.52) при $\mathbf{F} = 0$ переходит в формулу для N', полученную в [28].

Так как уравнение Клейна – Гордона (7.2) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных, изложенный алгоритм редуцирования может быть непосредственно применен к построению базиса его решений. При этом в качестве группы G может выступать группа движений метрики псевдориманова многообразия. Как мы показали выше, в этом случае алгебра операторов симметрии уравнения Клейна – Гордона описывается теоремой 7.1.

Описанная схема редукции также может быть с небольшими техническими оговорками применена и к интегрированию уравнения Дирака (7.15). Отметим лишь, что решение системы (7.50) в этом случае будет являться матричной функцией, а редуцированное уравнение (7.51) будет представлять собой дифференциально-матричное уравнение на неизвестный спинор $\hat{\psi}(u)$.

Проиллюстрируем изложенные результаты нетривиальным примером.

Пример 7.6. Проинтегрируем уравнения Клейна – Гордона и Дирака на четырехмерном псевдоримановом многообразии с метрикой (4.60) и внешним полем, задаваемом замкнутой 2-формой (6.85) (см. примеры 4.3, 6.6). Отметим, что рассматриваемая метрика не штеккелева, поэтому решение указанных релятивистских волновых уравнений методом разделения переменных невозможно.

Выберем векторный потенциал внешнего поля, отвечающего 2-форме (6.85), в симметричной калибровке:

$$A = -\frac{x_2}{2}\, dx_1 + \frac{x_1}{2}\, dx_2. \tag{7.53}$$

Тогда уравнение Клейна – Гордона для метрики (4.60) и внешнего поля с потенциалом (7.53) имеет вид

$$\Big[c_1 x_3^2 e^{2x_4}\,\partial_1^2 + 2c_1 x_3 e^{2x_4}\,\partial_{12} - c_4 x_3 e^{-x_4}\,\partial_{13} + \big(c_4 e^{-x_4} + c_3 x_3 e^{x_4}\big)\,\partial_{14} + c_1 e^{2x_4}\,\partial_2^2 -$$
$$- c_4 e^{-x_4}\,\partial_{23} + c_3 e^{x_4}\,\partial_{24} + c_2\,\partial_4^2 + \left(\frac{3}{2}\,c_3 - i\epsilon c_1\,(x_1 - x_2 x_3)\,e^{x_4}\right)(x_3 e^{x_4}\partial_1 + \partial_2) +$$
$$+ \frac{i\epsilon c_4}{2}\,e^{-x_4}\,(x_1 - x_2 x_3)\,\partial_3 + \left(2c_2 + \frac{i\epsilon c_4}{2}\,x_2 e^{-x_4} - \frac{i\epsilon c_3}{2}\,(x_1 - x_2 x_3)\,e^{x_4}\right)\partial_4 -$$
$$- \frac{3\epsilon}{4}\,(x_1 - x_2 x_3)\,e^{x_4}\left(ic_3 + \frac{\epsilon c_1}{3}\,e^{x_4}\,(x_1 - x_2 x_3)\right) + m^2 - 6\varsigma c_2\Big]\,\varphi = 0. \quad (7.54)$$

Как было показано в примере 4.3, группа движений рассматриваемой метрики порождается пятью векторами Киллинга (4.56), (4.57), причем нетрудно убедиться, что эта группа оставляет инвариантной 2-форму (6.85). Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет коммутационные соотношения (4.54), (4.55), используя которые несложно построить 2-коцикл $\mathbf{F}$ внешнего поля (6.85) и вычислить соответствующий этому 2-коциклу когомологический индекс алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]}\mathfrak{g} = 1.$$

Отсюда в соответствие с формулой (7.52) получаем $N' = 1$, то есть уравнение Клейна – Гордона (7.54) является интегрируемым.

В соответствие с теоремой 7.1 уравнение (7.54) допускает пять киллинговых операторов симметрии:

$$X_1^{(\epsilon)} = \partial_1 - \frac{i\epsilon x_2}{2}, \quad X_2^{(\epsilon)} = \partial_2 + \frac{i\epsilon x_1}{2}, \quad X_3^{(\epsilon)} = x_2\partial_1 + \partial_3, \quad X_4^{(\epsilon)} = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - 2x_3\partial_3 + \partial_4,$$
$$X_5^{(\epsilon)} = x_1\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4.$$

Алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$, которую образуют эти операторы, является центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующим 2-коциклу $\mathbf{F} = e^1 \wedge e^2$:

$$[X_1^{(\epsilon)}, X_2^{(\epsilon)}] = i\epsilon, \quad [X_1^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}] = 0, \quad [X_1^{(\epsilon)}, X_4^{(\epsilon)}] = -X_1^{(\epsilon)}, \quad [X_1^{(\epsilon)}, X_5^{(\epsilon)}] = X_2^{(\epsilon)},$$
$$[X_2^{(\epsilon)}, X_3^{(\epsilon)}] = X_1^{(\epsilon)}, \quad [X_2^{(\epsilon)}, X_4^{(\epsilon)}] = X_2^{(\epsilon)}, \quad [X_2^{(\epsilon)}, X_5^{(\epsilon)}] = 0, \quad [X_3^{(\epsilon)}, X_4^{(\epsilon)}] = -2X_3^{(\epsilon)},$$
$$[X_3^{(\epsilon)}, X_5^{(\epsilon)}] = X_4^{(\epsilon)}, \quad [X_4^{(\epsilon)}, X_5^{(\epsilon)}] = -2X_5^{(\epsilon)}.$$

В качестве операторов λ-представления алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ выберем операторы, являющиеся результатом qp-квантования функций (6.87), (6.88):

$$\ell_1^{(\epsilon)} = -v_2\partial_{v_1} + i\epsilon v_1, \quad \ell_2^{(\epsilon)} = \partial_{v_1}, \quad \ell_3^{(\epsilon)} = -v_2\,(v_1\partial_{v_1} + v_2\partial_{v_2}) + iJv_2 + \frac{i\epsilon v_1^2}{2},$$
$$\ell_4^{(\epsilon)} = v_1\partial_{v_1} + 2v_2\partial_{v_2} - iJ, \quad \ell_5^{(\epsilon)} = \partial_{v_2}.$$

Используя эти операторы несложно найти общее решение системы уравнений (7.50):

$$\mathscr{D}_{\lambda}^{(\epsilon)}(x,v) = \exp\Big[iJ\left(x_4 + \ln\left(1 - x_3 v_2\right)\right) + \\ + \frac{i\epsilon}{2}\,\frac{x_3(x_2 - v_1)^2 - x_1x_2x_3v_2 + x_1(x_1v_2 - x_2 + 2v_1)}{x_3v_2 - 1}\Big]\,\psi\left(\frac{(x_1v_2 - x_2 + v_1)\,e^{-x_4}}{x_3v_2 - 1}\right). \quad (7.55)$$

Подставляя это решение в уравнение (7.54) после преобразований получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на неизвестную функцию $\psi(u)$:

$$\left(c_1 - c_3u + c_2u^2\right)\psi''(u) + \left[(c_3 - 2c_2u)(2iJ+1) - i\epsilon c_4u^2\right]\psi'(u) + \\ + \left[2c_2J\left(i - \frac{J}{2}\right) + \epsilon c_4(i-J)u + m^2 - 6\varsigma c_2\right]\psi(u) = 0.$$

Перейдем к задаче интегрирования уравнения Дирака в метрике (4.60) и внешнем поле (7.53). Рассмотрим четверку векторных полей (тетраду), в которой метрика (4.60) является постоянной:

$$\eta_1 = -e^{-x_4}\partial_1, \quad \eta_2 = -x_3e^{x_4}\partial_1 - e^{x_4}\partial_2, \quad \eta_3 = -e^{-2x_4}\partial_3, \quad \eta_4 = -\partial_4,$$

$$\|\mathbf{G}_{ab}\| \equiv \|g(\eta_a,\eta_b)\| = -\frac{4}{c_4^2}\begin{pmatrix} c_2 & 0 & -c_3/2 & -c_4/2 \\ 0 & 0 & c_4/2 & 0 \\ -c_3/2 & c_4/2 & c_1 & 0 \\ -c_4/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_4 \neq 0.$$

Введем также не зависящие от координат матрицы $\tilde\gamma^a$, определяемые равенствами $\gamma^a = \eta^a_b\tilde\gamma^b$. Из условий $\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab}$ следуют соотношения, которым будут удовлетворять постоянные матрицы $\tilde\gamma^a$:

$$(\tilde\gamma^1)^2 = (\tilde\gamma^3)^2 = \tilde\gamma^1\tilde\gamma^2 + \tilde\gamma^2\tilde\gamma^1 = \tilde\gamma^1\tilde\gamma^3 + \tilde\gamma^3\tilde\gamma^1 = \tilde\gamma^3\tilde\gamma^4 + \tilde\gamma^4\tilde\gamma^3 = 0,$$

$$(\tilde\gamma^2)^2 = c_1, \quad \tilde\gamma^1\tilde\gamma^4 + \tilde\gamma^4\tilde\gamma^1 = -(\tilde\gamma^2\tilde\gamma^3 + \tilde\gamma^3\tilde\gamma^2) = c_4, \quad \tilde\gamma^2\tilde\gamma^4 + \tilde\gamma^4\tilde\gamma^2 = c_3, \quad (\tilde\gamma^4)^2 = c_2.$$

Используя матрицы $\tilde\gamma^a$ выпишем явный вид уравнения Дирака (7.15):

$$\hat H^{(\epsilon)}\hat\varphi = \Big[i\tilde\gamma^1\left(-e^{-x_4}\partial_1 - \frac{i\epsilon x_2e^{-x_4}}{2} - \frac{2c_2}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{12} + \frac{c_2}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{23} + \frac{3c_3}{2c_4^2}\,\tilde\gamma^{34}\right) + \\ + i\tilde\gamma^2\left(-x_3e^{x_4}\partial_1 - e^{x_4}\partial_2 + \frac{i\epsilon}{2}\,(x_1 - x_2x_3)e^{x_4} + \frac{c_2}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{13}\right) + \\ + i\tilde\gamma^3\left(-e^{-2x_4}\partial_3 - \frac{c_2}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{12} + \frac{3c_3}{2c_4^2}\,\tilde\gamma^{14} - \frac{c_3}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{23} - \frac{1}{c_4}\,\tilde\gamma^{24} - \frac{4c_1}{c_4^2}\,\tilde\gamma^{34}\right) + \\ + i\tilde\gamma^4\left(-\partial_4 - \frac{c_3}{2c_4^2}\,\tilde\gamma^{13} + \frac{1}{c_4}\,\tilde\gamma^{14} + \frac{1}{c_4}\,\tilde\gamma^{23}\right) - m\Big]\,\hat\varphi = 0. \quad (7.56)$$

В соответствие с теоремой 7.2 операторы симметрии этого уравнения будут иметь вид

$$\hat X_1^{(\epsilon)} = \partial_1 - \frac{i\epsilon x_2}{2}, \quad \hat X_2^{(\epsilon)} = \partial_2 + \frac{i\epsilon x_1}{2}, \quad \hat X_3^{(\epsilon)} = x_2\partial_1 + \partial_3, \quad \hat X_4^{(\epsilon)} = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - 2x_3\partial_3 + \partial_4,$$

$$\hat{X}_5^{(\epsilon)} = x_1\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4 - \frac{e^{-2x_4}}{c_4}\,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3.$$

Решая систему уравнений $\left[\hat{X}_i^{(\epsilon)}(x,\partial_x) + \ell_i^{(\epsilon)}(v,\partial_v;\lambda)\right]\hat{\mathscr{D}}_\lambda^{(\epsilon)}(x,v) = 0$, легко находим

$$\hat{\mathscr{D}}_\lambda^{(\epsilon)}(x,v) = \left[1 + \frac{e^{-2x_4}v_2\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3}{c_4(1 - x_3v_2)}\right]\mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x,v),$$

где $\mathscr{D}_\lambda^{(\epsilon)}(x,v)$ определяется выражением (7.55), в котором скалярная функция $\psi(u)$ заменена на спинор $\hat{\psi}(u)$. Подставляя полученную функцию в уравнение Дирака (7.56), после несложных преобразований получаем уравнение на $\hat{\psi}(u)$:

$$\begin{aligned}\Big[i\left(\tilde{\gamma}^4u - \tilde{\gamma}^2\right)\partial_u - \frac{\epsilon u^2\tilde{\gamma}^3}{2} - \epsilon u\tilde{\gamma}^1 + (J-2i)\tilde{\gamma}^4 + \frac{ic_2}{2c_4}\,\tilde{\gamma}^1 - \frac{3ic_3}{4c_4}\,\tilde{\gamma}^3 + {}&\\ + \frac{ic_2}{c_4^2}\,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 + \frac{ic_3}{2c_4^2}\,\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4 - \frac{2i}{c_4}\,\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^4 - m\Big]\hat{\psi}(u) = 0.&\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении мы еще раз перечислим все задачи, решенные в настоящей диссертационной работе.

1) Разработан эффективный алгоритм координатной реализации транзитивных действий произвольной группы Ли по ее алгебре Ли.

2) Построено специальное каноническое преобразование, сводящее задачу интегрирования инвариантных гамильтоновых потоков на группах Ли к задаче интегрирования гамильтоновых систем на соответствующих орбитах коприсоединенного представления и, как следствие, получен алгебраический критерий их интегрируемости. Получена явная формула для полного интеграла уравнения Гамильтона – Якоби на группах Ли.

3) Исследована связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями группы Ли. Метод интегрирования инвариантных гамильтоновых систем на группах Ли распространен на их квантовые аналоги.

4) Разработан конструктивный метод интегрирования в квадратурах гамильтоновых потоков на однородных пространствах групп Ли. Получены необходимые и достаточные условия интегрируемости геодезических потоков инвариантных метрик и метрик субмерсии на однородных пространствах.

5) Исследована проблема интегрируемости гамильтоновых систем в вариациях. Получены критерии интегрируемости уравнения Якоби на однородных пространствах.

6) Предложен когомологический подход к описанию внешних электромагнитных полей на псевдоримановых многообразиях. Решена проблема интегрируемости в квадратурах магнитных геодезических потоков на группах Ли и однородных пространствах. Исследована возможность некоммутативной интегрируемости уравнений Вонга.

7) Построен общий алгоритм получения точных решений релятивистских волновых уравнений с некоммутативными алгебрами симметрии во внешних электромагнитных полях.

Отметим, что результаты, полученные в диссертации, могут представлять интерес с точки зрения дальнейшего прогресса в квантовой теории поля в искривленном пространстве – времени. Методы и подходы, развитые в настоящем исследовании, будут представлять интерес при изучении квантовых эффектов, которые не могут быть последовательно описаны в рамках непертурбативных теорий. Сформулированные критерии интегрируемости классических и квантовых уравнений теоретической физики могут быть полезны при выборе математических моделей общей теории относительности и гравитации, в рамках которых возможно точное их подробное аналитическое исследование. Результаты настоящего диссертационного исследования также имеют методологическую ценность, демонстрируя возможность использования унифицированного теоретико-группового подхода к решению проблем интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих динамику квантовых и соответствующих им классических систем. Часть результатов диссертации также может быть использована в учебном процессе, например, при обучении студентов современным методам математической физики.

Предложенные в диссертационном исследовании методы и подходы имеют несомненные перспективы с точки зрения их дальнейшего развития. Определенный интерес, например, представляет приложение результатов, полученных в главе 3, к задачам теории представлений групп, в частности, к строгому доказательству известной эмпирической формулы А. А. Кириллова для характера представления (см. [47]). Связь между специальным каноническим преобразованием и неприводимыми унитарными представлениями групп Ли, установленная в § 3.4, по-видимому может быть обобщена и на случай произвольного однородного пространства, что может быть полезным в гармоническом анализе на однородных пространствах. Метод когомологического включения внешних полей, разработанный нами в главах 6 и 7, может быть использован для классификации электромагнитных полей на псевдоримановых многообразиях, допускающих интегрируемость классических и квантовых уравнений движения. Решение этой задачи позволит выделить широкий класс моделей, в рамках которых возможно точное исследование квантово-полевых эффектов в сильных гравитационных и электромагнитных полях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гриб, А. А. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях / А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 288 с.

[2] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 339 с.

[3] Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[4] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[5] Малкин, И. А. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем / И. А. Малкин, В. И. Манько. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

[6] Oliveri, F. Lie symmetries of differential equations: classical results and recent contributions / F. Olivery // Symmetry. — 2010. — Vol. 2, № 2. — P. 658-706.

[7] Mahomed, F. M. Symmetry group classification of ordinary differential equations: survey of some results / F. M. Mahomed // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2007. — Vol. 30, № 16. — P. 1995-2012.

[8] Mikhailov, A. V. Symmetries of differential equations and the problem of integrability / A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov // Integrability. — Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 19-88.

[9] Биррелл, Н. Квантованные поля в искривленном пространстве – времени / Н. Биррелл, П. Девис. — М.: Мир, 1984. — 356 с.

[10] Гриб, А. А. Рождение частиц из вакуума нестационарным гравитационным полем в каноническом формализме / А. А. Гриб, Б. А. Левитский, В. М. Мостепаненко // Теоретическая и математическая физика. — 1974. — Т. 19, № 1. — С. 59-75.

[11] Bernard, C. Regularization and renormalization of quantum field theory in curved space – time / C. Bernard, A. Duncan // Annals of Physics. — 1977. — Vol. 107, № 1-2. — P. 201-221.

[12] Lotze, K. H. Pair creation by a photon and the time-reversed process in a Robertson-Walker universe with time-symmetric expansion / K. H. Lotze // Nuclear Physics B. — 1989. — Vol. 312, № 3. — P. 673-686.

[13] Moradi, S. Spin-particles entanglement in Robertson — Walker spacetime / S. Moradi, R. Pierini, S. Mancini // Physical Review D. — 2014. — Vol. 89, № 2. — P. 024022.

[14] Spradlin, M. De Sitter space / M. Spradlin, A. Strominger, A. Volovich // Unity from Duality: Gravity, Gauge Theory and Strings. — Springer Berlin Heidelberg, 2002. — P. 423-453.

[15] Ryan, M. P. Homogeneous Relativistic Cosmologies / M. P. Ryan, L. C. Shepley. — Princeton University Press, 2015. — 338 p.

[16] Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1974. — 432 с.

[17] Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений / В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко. — М.: Факториал, 1995. — 448 с.

[18] Мищенко, А. С. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, № 2. — С. 46-56.

[19] Винтерниц, П. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд и подгруппы собственной группы Лоренца / П. Винтерниц, И. Фриш // Ядерная физика. — 1965. — Т. 1, № 5. — С. 889 — 901.

[20] Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. — М.: Мир, 1981. — 343 с.

[21] Шаповалов, В. Н. Пространства Штеккеля / В. Н. Шаповалов // Сибирский математический журнал. — 1979. — Т. 20, № 5. — С. 1117-1130.

[22] Шаповалов, В. Н. Разделение переменных в линейном дифференциальном уравнении второго порядка / В. Н. Шаповалов // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 10. — С. 1864—1874.

[23] Багров, В. Г. Точные решения релятивистских волновых уравнений / В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Шаповалов. — Новосибирск: Наука, 1982. — 144 с.

[24] Bagrov, V. G. Exact solutions of relativistic wave equations / V. G. Bagrov, D. M. Gitman. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Press, 1990. — 323 p.

[25] Шаповалов, А. В. Представления алгебр Ли и проблема некоммутативной интегрируемости линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1991. — № 4. — С. 95—100.

[26] Шаповалов, А. В. Нелинейные скобки Пауссона, F-алгебры и некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1992. — Т. 35, № 7. — С. 92-98.

[27] Дрокин, А. А. Редукция и некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. А. Дрокин, А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1993. — Т. 36, № 11. — С. 55-60.

[28] Шаповалов, А. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 1995. — Т. 104, №. 2. — С. 195-213.

[29] Шаповалов, А. В. Метод некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Функциональные алгебры и некоммутативная размерная редукция / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 1996. — Т. 106, № 1. — С. 3-15.

[30] Федосеев, В. Г. О некоммутативном интегрировании уравнения Дирака в римановых пространствах с группой движений / В. Г. Федосеев, А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1991. — № 9. — С. 43-46.

[31] Шаповалов, А. В. Некоммутативное интегрирование уравнений Клейна — Гордона и Дирака в римановых пространствах с группой движений / А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1991. — № 5. — С. 33—38.

[32] Вараксин, О. Л. Класификация F-алгебр и некоммутативное интегрирование уравнений Клейна-Гордона в римановых пространствах / О. Л. Вараксин, В. В. Фирстов, А. В. Шаповалов, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1993. — Т. 36, № 1. — С. 45-50.

[33] Вараксин, О. Л. Приложение метода некоммутативного интегрирования к построению базиса решений волнового уравнения / О. Л. Вараксин, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1995. — Т. 38, № 5. — С. 54-60.

[34] Вараксин, О. Л. Интегрирование уравнения Дирака, не допускающего полное разделение переменных в штеккелевых пространствах / О. Л. Вараксин, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1996. — № 1. — С. 31—37.

[35] Вараксин, О. Л. Интегрирование уравнения Дирака в римановом пространстве с пятимерной группой движений / О. Л. Вараксин, В. В. Клишевич // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1997. — № 8. — С. 24-28.

[36] Дианин, С. И. К-орбиты, гармонический анализ и интегрируемые уравнения на одной четырехмерной группе Ли / С. И. Дианин, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1998. — № 10. — С. 90-96.

[37] Широков, И. В. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений: Препринт / И. В. Широков. — Омск: ОмГУ, 1998. — 100 с.

[38] Широков, И. В. Координаты Дарбу на К-орбитах и спектры операторов Казимира на группах Ли / И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2000. — Т. 123, № 3. — С. 407—423.

[39] Михеев, В. В. Применение метода К-орбит к задачам термодинамики некомпактных групп Ли / В. В. Михеев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2003. — № 1. — С. 9-16.

[40] Михеев, В. В. Метод орбит коприсоединенного представления в термодинамике некомпактных групп Ли / В. В. Михеев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2007. — № 3. — С. 84–88.

[41] Бреев, А. И. Поляризация вакуума скалярного поля на многообразии, конформно эквивалентном $\mathbb{R} \times G$ / А. И. Бреев, И. В. Широков, Д. Н. Разумов // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2007. — Т. 50, № 10. — С. 50-56.

[42] Бреев, А. И. Поляризация вакуума спинорного поля на многообразиях групп Ли / А. И. Бреев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2009. — Т. 52, № 8. — С. 51–57.

[43] Бреев, А. И. Поляризация вакуума на неунимодулярных группах Ли / А. И. Бреев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 86–92.

[44] Бреев, А. И. Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли и однородных пространствах / А. И. Бреев, И. В. Широков, А. А. Магазев // Теоретическая и математическая физика. — 2011. — Т. 167, № 1. — С. 78–95.

[45] Бреев, А. И. Поляризация вакуума скалярного поля на однородных пространствах с инвариантной метрикой / А. И. Бреев // Теоретическая и математическая физика. — 2014. — Т. 178, № 1. — С. 69–87.

[46] Кириллов, А. А. Метод орбит в теории унитарных представлений групп Ли / А. А. Кириллов // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 2, № 1. — С. 96–98.

[47] Кириллов, А. А. Элементы теории представлений / А. А. Кириллов. — М.: Наука, 1978. — 343 с.

[48] Костант, Б. Квантование и унитарные представления / Б. Костант // Успехи математических наук. — 1973. — Т. 28, № 1. — С. 163–225.

[49] Auslander, L. Quantization and representations of solvable Lie groups / L. Auslander, B. Kostant // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1967. — Vol. 73, № 5. — P. 692-695.

[50] Pukanszky, L. Unitary representations of solvable Lie groups / L. Pukanszky // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1971. — Vol. 4, № 4. — P. 457-608.

[51] O'Neill, B. The fundamental equations of a submersion / B. O'Neill // The Michigan Mathematical Journal. — 1966. — Vol. 13, № 4. — P. 459-469.

[52] Браун, К. С. Когомологии групп / К. С. Браун — М.: Наука, 1987. — 384 с.

[53] Фейгин, Б. Л. Когомологии групп и алгебр Ли / Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1988. — Т. 21. — С. 121-209.

[54] Фукс, Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли / Д. Б. Фукс. — М.: Наука, 1984. — 272 с.

[55] Магазев, А. А. Гамильтоновы системы в вариациях и интегрирование уравнения Якоби на однородных пространствах / А. А. Магазев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2006. — № 8. — С. 42–53.

[56] Магазев, А. А. Интегрируемые магнитные геодезические потоки на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич // Теоретическая и математическая физика. — 2008. — Т. 156, № 2. — С. 189–206.

[57] Магазев, А. А. Интегрирование уравнения Клейна — Гордона — Фока во внешнем электромагнитном поле на группах Ли / А. А. Магазев // Теоретическая и математическая физика. — 2012. — Т. 173, № 3. — С. 375–391.

[58] Магазев, А. А. Симметрии уравнения Клейна — Фока во внешнем электромагнитном поле / А. А. Магазев // Омский научный вестник. — 2012. — Т. 110, № 2. — С. 29-33.

[59] Магазев, А. А. Метод некоммутативного интегрирования в задачах теоретической физики / А. А. Магазев, В. В. Михеев, И. В. Широков // Омский научный вестник. — 2013. — Т. 117, № 1. — С. 35-38.

[60] Магазев, А. А. Магнитные геодезические потоки на однородных многообразиях / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2014. — Т. 57, № 3. — С. 26-32.

[61] Магазев, А. А. Алгебра операторов симметрии и интегрирование уравнения Клейна — Гордона во внешнем электромагнитном поле / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2014. — Т. 57, № 6. — С. 93–101.

[62] Magazev, A. A. A method of integration for classical and quantum equations based on the connection between canonical transformations and irreducible representations of Lie groups / A. A. Magazev, I. V. Shirokov // Вестник Томского государственного педагогического университета. — 2014. – № 12 (153). — С. 152-157.

[63] Магазев, А. А. Об интегрируемости уравнений Вонга в классе линейных интегралов движения / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2015. — Т. 58, № 12. — С. 133-140.

[64] Magazev, A. A. Computation of Composition Functions and Invariant Vector Fields in Terms of Structure Constants of Associated Lie Algebras / A. A. Magazev, V. V. Mikheyev, I. V. Shirokov // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. — 2015. — Vol. 11. — P. 066.

[65] Болдырева, М. Н. Об алгебрах Ли симметрии стационарных уравнений Шредингера и Паули / М. Н. Болдырева, А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2016. — Т. 59, № 10. — С. 132-139.

[66] Бреев, А. И. Интегрирование уравнения Дирака на группах Ли во внешнем электромагнитном поле, допускающем некоммутативную алгебру симметрии / А. И. Бреев, А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2016. — Т. 59, № 12. — С. 63–70

[67] Магазев, А. А. Интегрирование конечномерных гамильтоновых систем на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков. — Омск: ОмГТУ, 2015. — 124 с.

[68] Магазев, А. А. Гамильтоновы системы в вариациях и интегрируемость уравнения Якоби на римановых многообразиях / А. А. Магазев, И. В. Широков // Математические структуры и моделирование. — 2004. — № 2. — С. 78-83.

[69] Магазев, А. А. Интегрирование геодезических потоков и релятивистских волновых уравнений на однородных пространствах с инвариантными метриками / А. А. Магазев, И. В. Широков // Известия Челябинского научного центра. — 2005. — № 2. — С. 4-9.

[70] Магазев, А. А. Производящая функция на группах Ли / А. А. Магазев // Сборник научных трудов ОИВТ. — 2010. — № 8. — С. 235-244.

[71] Болдырева, М. Н. Об алгебре инвариантности стационарного уравнения Шредингера для частицы в электромагнитном поле / М. Н. Болдырева, А. А. Магазев // Вестник Омского университета. — 2016. — Т. 80, № 2. — С. 24–27.

[72] Магазев, А. А. Интегрирование магнитных геодезических потоков на группах Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков, Ю. А. Юревич // XIX Международная летняя школа — семинар по современным проблемам теоретической и математической физики: Тез. докл. (Казань, 22 июня — 3 июля 2007 года). — Казань: КГУ, 2007. — С. 33.

[73] Магазев, А. А. Построение правоинвариантных полей Эйнштейна — Максвелла на группах Ли / А. А. Магазев // XIX Международная летняя школа — семинар по современным проблемам теоретической и математической физики: Тез. докл. (Казань, 22 июня — 3 июля 2007 года). — Казань: КГУ, 2007. — С. 32.

[74] Магазев, А. А. Уравнение Эйнштейна на однородных пространствах с инвариантным тензором энергии-импульса / А. А. Магазев // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 5 — 12 октября 2008 г.): Тез. докл. — Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. — С. 331.

[75] Магазев, А. А. Производящая функция канонического преобразования на группах Ли / А. А. Магазев // Международная конференция "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation" (Казань, 1 — 6 ноября 2010 г.): Тез. докл. — Казань: КГУ, 2010. — С. 90.

[76] Магазев, А. А. Об алгебре симметрии уравнения Клейна — Фока во внешнем калибровочном поле / А. А. Магазев // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 27 августа — 1 сентября 2012 г.): Материалы конференции. — Самара: СамГТУ, 2012. — С. 196–197.

[77] Магазев, А. А. Интегрируемые магнитные геодезические потоки на многообразиях с симметриями / А. А. Магазев, И. В. Широков // XLI Международная конференция «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе IT+SE‘2013» (Ялта — Гурзуф, 25 мая — 4 июня 2013 г.): Материалы конференции. — Запорожье: ЗНУ, 2013. – С. 233-235.

[78] Широков, И. В. Построение алгебр Ли дифференциальных операторов первого порядка / И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1997. — № 6. — С. 25—32.

[79] Basarab-Horwath, P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / P. Basarab-Horwath, V. Lahno, R. Zhdanov // Acta Applicandae Mathematica. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43-94.

[80] Heredero, R. H. Classification of invariant wave equations / R. H. Heredero, P. J. Olver // Journal of Mathematical Physics. — 1996. — Vol. 37, № 12. — P. 6414-6438.

[81] Петров, А. З. Пространства Эйнштейна / А. З. Петров. — М.: Физматлит, 1961. — 463 с.

[82] Петров, А. З. Новые методы в общей теории относительности / А. З. Петров. — М.: Наука, 1966. — 496 с.

[83] Кручкович, Г. И. Классификация трёхмерных римановых пространств по группам движений / Г. И. Кручкович // Успехи математических наук. — 1954. — Т. 9, № 1. — С. 3-40.

[84] Makaruk, H. Real Lie algebras of dimension $d \leq 4$ which fulfil the Einstein equations / H. Makaruk // Reports on Mathematical Physics. — 1993. — Vol. 32, № 3. — P. 375-383.

[85] Курнявко, О. Л. Построение инвариантных волновых уравнений скалярных частиц на римановых многообразиях с внешними калибровочными полями / О. Л. Курнявко, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2008. — Т. 156, № 2. — С. 237-249.

[86] Breev, A. I. Yang-Mills gauge fields conserving the symmetry algebra of the Dirac equation in a homogeneous space / A. I. Breev, A. V. Shapovalov // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing, 2014. — Vol. 563, № 1. — P. 012004.

[87] Miller, W. J. Lie theory and special functions. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 43 / W. J. Miller. — Academic Press: New York-London, 1968. — 338 p.

[88] Alhassid, Y. Algebraic approach to the scattering matrix / Y. Alhassid, J. Engel, J. Wu // Physical Review Letters. — 1984. — Vol. 53, № 1. — P. 17.

[89] Iachello, F. Algebraic approach to molecular rotation-vibration spectra. I. Diatomic molecules / F. Iachello, R. D. Levine // The Journal of Chemical Physics. — 1982. — Vol. 77, № 6. — P. 3046-3055.

[90] Барановский, С. П. Продолжения векторных полей на группах Ли и однородных пространствах / С. П. Барановский, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2003. — Т. 135, № 1. — С. 70-81.

[91] Барановский, С. П. Деформации векторных полей и канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления / С. П. Барановский, И. В. Широков // Сибирский математический журнал. — 2009. — Т. 50, № 4 — С. 737—745.

[92] Kamalin, S. A. Construction of canonical coordinates on polarized coadjoint orbits of Lie groups / S. A. Kamalin, A. M. Perelomov // Communications in Mathematical Physics. — 1985. — Vol. 97, № 4. — P. 553-568.

[93] McLenaghan, R. G. A new solution of the Einstein–Maxwell equations / R. G. McLenaghan, N. Tariq // Journal of Mathematical Physics. — 1975. — Vol. 16, № 11. — P. 2306-2312.

[94] Tariq, N. A class of algebraically general solutions of the Einstein-Maxwell equations for non-null electromagnetic fields / N. Tariq, B. O. J. Tupper // General Relativity and Gravitation. — 1975. — Vol. 6, № 4. — P. 345-360.

[95] Bagrov, V. G. New Solutions of Relativistic Wave Equations in Magnetic Fields and Longitudinal Fields / V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman, I. V. Shirokov // Journal of Mathematical Physics. — 2002. — Vol. 43, № 5. — P. 2284–2305.

[96] Барановский, С. П. Интегрирование уравнения Клейна — Фока на четырехмерных группах Ли / С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2002. — Т. 45, № 11. — С. 3-14.

[97] Барановский, С. П. Квантовые гамильтоновы системы на К-орбитах. Квазиклассический спектр асимметрического волчка / С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2001. — Т. 129, № 1. — С. 3-13.

[98] Барут, А. Теория представлений групп и ее приложения: в 2-х томах / А. Барут, Р. Рончка. — М.: Мир, 1980. — т. 2. — 396 с.

[99] Мищенко, А. С. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396—415.

[100] Thimm, A. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces / A. Thimm // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 1981. — Vol. 1, № 4. — P. 495-517.

[101] Мищенко, А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах / А. С. Мищенко // Математические заметки. — 1982. — Т. 31, № 2. — С. 257-262.

[102] Мищенко, А. С. Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах / А. С. Мищенко // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — 1983. — Т. 21. — С. 13-22.

[103] Браилов, А. В. Полная интегрируемость некоторых геодезических потоков и интегрируемые системы с некоммутирующими интегралами / А. В. Браилов // Доклады Академии наук СССР. — 1983. — Т. 271, № 2. — С. 273-276.

[104] Браилов, А. В. Построение вполне интегрируемых геодезических потоков на компактных симметрических пространствах / А. В. Браилов // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 661-674.

[105] Jovanovic, B. Integrability of invariant geodesic flows on n-symmetric spaces / B. Jovanovic // Annals of Global Analysis and Geometry. — 2010. — Vol. 38, № 3. — P. 305-316.

[106] Болсинов, А. В. Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах / А. В Болсинов., Б. Йованович // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 7. — С. 21–40.

[107] Микитюк, И. В. Однородные пространства с интегрируемыми G—-инвариантными гамильтоновыми потоками / И. В. Микитюк // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. — 1983. — Т. 47, № 6. — С. 1248-1262.

[108] Микитюк, И. В. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами / И. В. Микитюк // Математический сборник. — 1986. — Т. 129, № 4. — С. 514-634.

[109] Guillemin, V. On collective complete integrability according to the method of Thimm / V. Guillemin, S. Sternberg // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 1983. — Т. 3, № 2. — С. 219-230.

[110] Широков, И. В. Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах / И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2001. — Т. 126, № 3. — С. 393-408.

[111] Бессе, А. Многообразия Эйнштейна: в 2-х т. / А. Бессе. — М.: Мир, 1990. — т. 2. — 384 с.

[112] Bourguignon, J. P. Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields / J. P. Bourguignon, H. B. Lawson // Communications in Mathematical Physics. — 1981. — Vol. 79, № 2. — P. 189-230.

[113] Watson, B. G, G'-Riemannian submersions and nonlinear gauge field equations of general relativity / B. Watson // Global Analysis – Analysis on Manifolds. — 1983. — P. 324-349.

[114] Bourguignon, J. P. A mathematician's visit to Kaluza-Klein theory / J. P. Bourguignon // In: Conference on Partial Differential Equations and Geometry: Torino, 1988. — P. 143 — 163.

[115] Ianus, S. Kaluza-Klein theory with scalar fields and generalised Hopf manifolds / S. Ianus, M. Visinescu // Classical and Quantum Gravity. — 1987. — Vol. 4, № 5. — P. 13-17.

[116] Mustafa, M. T. Applications of harmonic morphisms to gravity / M. T. Mustafa // Journal of Mathematical Physics. — 2000. — Vol. 41, № 10. — P. 6918-6929.

[117] Casetti, L. Riemannian theory of Hamiltonian chaos and Lyapunov exponents / L. Casetti, C. Clementi, M. Pettini // Physical Review E. — 1996. — Vol. 54, № 6. — P. 59-69.

[118] Reimberg, P. H. F. The Jacobi map for gravitational lensing: the role of the exponential map / P. H. F. Reimberg, L. R. Abramo // Classical and Quantum Gravity. — 2013. — Vol. 30, № 6. — P. 065020.

[119] Horwitz, L. Geometry of Hamiltonian chaos / L. Horwitz, Y. B. Zion, M. Lewkowicz, M. Schiffer, J. Levitan // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 98, № 23. — P. 234 — 301.

[120] Kerner, R. Relativistic epicycles: another approach to geodesic deviations / R. Kerner, J. W. Van Holten, Jr. R. Colistete // Classical and Quantum Gravity. — 2001. — Vol. 18, № 22. — P. 4725.

[121] Koley, R. Geodesics and geodesic deviation in a two-dimensional black hole / R. Koley, S. Pal, S. Kar // American Journal of Physics. — 2003. — Vol. 71, № 10. — P. 1037-1042.

[122] Steinbauer, R. Geodesics and geodesic deviation for impulsive gravitational waves / R. Steinbauer // Journal of Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 39, № 4. — P. 2201-2212.

[123] Balakin, A. Motions and worldline deviations in Einstein-Maxwell theory / A. Balakin, J. W. Van Holten, R. Kerner // Classical and Quantum Gravity. — 2000. — Vol. 17, № 24. — P. 5009.

[124] Ефимов, Д. И. Магнитный геодезический поток в однородном поле на комплексном проективном пространстве / Д. И. Ефимов // Сибирский математический журнал. — 2004. — Т. 45, № 3. — С. 566–576.

[125] Ефимов, Д. И. Магнитный геодезический поток на однородном симплектическом многообразии / Д. И. Ефимов // Сибирский математический журнал. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 106–118.

[126] Bolsinov, A. V. Magnetic geodesic flows on coadjoint orbits / A. V. Bolsinov, B. Jovanovic // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2006. — Vol. 39, № 16. — P. L247.

[127] Bolsinov, A. V. Magnetic Flows on Homogeneous Spaces / A. V. Bolsinov, B. Jovanovic // Commentarii Mathematici Helvetici. — 2008. — Vol. 83, № 3. — P. 679-700.

[128] Dragovic, V. Systems of Hess — Appelrot type and Zhukovskii property / V. Dragovic, B. Gajic, B. Jovanovic // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. — 2009. — Vol. 6, № 8. — P. 1253-1304.

[129] Taimanov, I. A. On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus / I. A. Taimanov // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — Vol. 20, № 6. — P. 667-678.

[130] Taimanov, I. A. An example of jump from chaos to integrability in magnetic geodesic flows / I. A. Taimanov // Mathematical Notes. — 2004. — Vol. 76, № 3. — P. 587-589.

[131] Burns, K. Anosov magnetic flows, critical values and topological entropy / K. Burns, G. P. Paternain // Nonlinearity. — 2002. — Vol. 15, № 2. — P. 281.

[132] Bialy, M. L. Rigidity for periodic magnetic fields / M. L. Bialy // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 2000. — Vol. 20, № 06. — P. 1619-1626.

[133] Paternain, G. Magnetic rigidity of horocycle flows / G. Paternain // Pacific Journal of Mathematics. — 2006. — Vol. 225, № 2. — P. 301-323.

[134] Wong, S. K. Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin / K. S. Wong // Il Nuovo Cimento A. — 1970. — Vol. 65 — P. 689–694.

[135] Гальцов, Д. В. Классические поля / Д. В. Гальцов, Ю. В. Грац, В. Ц. Жуковский. — М.: МГУ, 1991. — 150 с.

[136] Багров, В. Г. Движение неабелевой частицы в цветовых полях / В. Г. Багров, А. С. Вишвцев;— Томский филиал СО АН СССР. — Препринт. — Томск, 1987. — 16 с.

[137] Wipf, A. W. Non-relativistic Yang — Mills particles in a spherically symmetric monopole field / A. W. Wipf // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1985. — Vol. 18, № 12. — P. 2379.

[138] Sternberg, S. Minimal coupling and the symplectic mechanics of a classical particle in the presence of a Yang-Mills field / S. Sternberg // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1977. — Vol. 74, № 12. — P. 5253-5254.

[139] Weinstein, A. A universal phase space for particles in Yang-Mills fields / A. Weinstein // Letters in Mathematical Physics. — 1978. — Vol. 2, № 5. — P. 417-420.

[140] Van Holten, J. W. Covariant hamiltonian dynamics / J. W. Van Holten // Physical Review D. — 2007. — Vol. 75, № 2. — P. 025-027.

[141] Мубаракзянов, Г. М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г. М. Мубаракзянов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1963. — № 3. — С. 99-106.

[142] Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли: алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли / Н. Бурбаки. — М.: Мир, 1976. — 496 с.

[143] Джекобсон, Н. Алгебры Ли / Н. Джекобсон. — М.: Мир, 1964. — 355 с.

[144] Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. — М.: Наука, 1984. — 520 с.

[145] Постников, М. М. Группы и алгебры Ли / М. М. Постников. — М.: Наука, 1982. — 447 с.

[146] Уорнер, Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли / Ф. Уорнер. — М.: Мир, 1987. — 304 с.

[147] Шевалле, К. Теория групп Ли: в 3 т. / К. Шевалле. — М.: ИЛ, 1946. — 1 т. — 315 с.

[148] Мосолова, М. В. Новая формула для $\ln(e^A e^B)$ через коммутаторы элементов A и B / М. В. Мосолова // Математические заметки. — 1978. — Т. 23, № 6. — С. 817—824.

[149] Terzis, P. A. Faithful representations of Lie algebras and Homogeneous Spaces [Электронный ресурс] / P. A. Terzis // Cornell University Library. — 2013. — 20 c. — URL: https://arxiv.org/abs/1304.7894.

[150] Горбацевич, В. В. Группы Ли преобразований / В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1988. — Т. 20. — С. 103-240.

[151] Cerquetelli, T. Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations / T. Cerquetelli, N. Ciccoli, M. C. Nucci // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2002. — Vol. 9, № 2. — P. 24-35.

[152] Mahomed, F. M. Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations / F. M. Mahomed, P. G. L. Leach // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1990. — Vol. 151, № 1. — P. 80-107.

[153] Schmucker, A. Symmetry algebras and normal forms of third order ordinary differential equations / A. Schmucker, G. Czichowski // Journal of Lie Theory. — 1998. — Vol. 8, № 1. — P. 129-137.

[154] Lie, S. Theorie der transformationsgruppen I / S. Lie // Mathematische Annalen. — 1880. — Vol. 16, № 4. — P. 441-528.

[155] Olver, P. J. Lie algebras of vector fields in the real plane / P. J. Olver // Proceedings of the London Mathematical Society. — 1992. — Vol. 64. — P. 339-368.

[156] Popovych, R. O. Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R. O. Popovych, V. M. Boyko, M. O. Nesterenko, M. W. Lutfullin // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 2003. — Vol. 36, № 26. — P. 7337.

[157] Fushchych, W. I. Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Dirac Equations / W. I. Fushchych, R. Z. Zhdanov. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 384 p.

[158] Щепочкина, И. М. Как реализовать алгебру Ли векторными полями / И. М. Щепочкина // Теоретическая и математическая физика. — 2006. — Т. 147, № 3. — С. 450—469.

[159] Draisma, J. Transitive Lie algebras of vector fields: an overview / J. Draisma // Qualitative Theory of Dynamical Systems. — 2012. — Vol. 11, № 1. — P. 39-60.

[160] Фущич, В. И. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений / В. И. Фущич, И. Ф. Баранник, А. Ф. Баранник. — Киев: Наукова думка, 1991. — 304 с.

[161] Nesterenko, M. Realizations of Lie algebras / M. Nesterenko // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2014. — Vol. 11, № 7. — P. 987-989.

[162] Nesterenko, M. Realizations of Galilei algebras / M. Nesterenko, S. Posta, O. Vaneeva // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2016. — Vol. 49, № 11. — P. 115-203.

[163] Gonzaĺez-Loṕez, A. Lie algebras of differential operators in two complex variables / A. Gonzaĺez-Loṕez, N. Kamran, P. J. Olver // American Journal of Mathematics. — 1992. — P. 1163-1185.

[164] Milson, R. Representations of finite-dimensional Lie algebras by first-order differential operators. Some local results in the transitive case / R. Milson // Journal of the London Mathematical Society. — 1995. — Vol. 52, № 2. — P. 285-302.

[165] Draisma, J. Constructing Lie algebras of first order differential operators / J. Draisma // Journal of Symbolic Computation. — 2003. — Vol. 36, № 5. — P. 685-698.

[166] Richter, D. A. Semisimple Lie algebras of differential operators / D. A. Richter // Acta Applicandae Mathematica. — 2001. — Vol. 66, № 1. — P. 41-65.

[167] Шаповалов, В. И. Симметрия уравнений Дирака — Фока / В. И. Шаповалов // Известия высших учебных заведений. Физика. — 1975. — № 6. — С. 57-63.

[168] Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства / С. Хелгасон. — М.: Факториал Пресс, 2005. — 608 с.

[169] Abraham, R. Foundations of mechanics / R. Abraham, J. E. Marsden. — Reading, Massachusetts: Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978. — P. 467-471.

[170] Березин, Ф. А. Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли / Ф. А. Березин // Функциональный анализ и его приложения. — 1967. — Т. 1, № 2. — С. 1-14.

[171] Souriau, J. M. Structure des systèmes dynamiques / J. M. Souriau. — Paris: Dunod, 1970. — P. 4866.

[172] Weinstein, A. The local structure of Poisson manifolds / A. Weinstein // Journal of Differential Geometry. — 1983. — Vol. 18, № 3. — P. 523-557.

[173] Vergne, M. La structure de Poisson sur l'algèbre symètrique d'une algèbre de Lie nilpotente / M. Vergne // Bulletin de la Sociètè Mathèmatique de France. — 1972. — Vol. 100. — P. 301-335.

[174] Marsden, J. Reduction of symplectic manifolds with symmetry / J. Marsden, A. Weinstein // Reports on Mathematical Physics. — 1974. — Vol. 5, № 1. — P. 121-130.

[175] Козлов, В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике / В. В. Козлов // Успехи математических наук. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3-67.

[176] Pedersen, N. V. On the symplectic structure of coadjoint orbits of (solvable) Lie groups and applications. I / N. V. Pedersen // Mathematische Annalen. — 1988. — Vol. 281, № 4. — P. 633-669.

[177] Трофимов, В. В. Канонические координаты на орбитах коприсоединенного представления тензорных расширений групп Ли / В. В. Трофимов // Успехи математических наук. — 1994. — Т. 49, № 1 — С. 229-230.

[178] Adams, M. R. Darboux coordinates on coadjoint orbits of Lie algebras / M. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise // Letters in Mathematical Physics. — 1997. — Vol. 40, № 1. — P. 41-57.

[179] Adams, M. R. Darboux coordinates and Liouville-Arnold integration in loop algebras / M. R. Adams, J. Harnad, J. Hurtubise // Communications in Mathematical Physics. — 1993. — Vol. 155, № 2. — P. 385-413.

[180] Кириллов, А. А. Лекции по методу орбит / А. А. Кириллов. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. — 290 с.

[181] Диксмье, Ж. Универсальные обертывающие алгебры / Ж. Диксмье — М.: Мир, 1978. — 407 с.

[182] Кириллов, А. А. Геометрическое квантование / А. А. Кириллов // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1985. — Т. 4. — С. 141-176.

[183] Гийемин, В. Геометрические асимптотики / В. Гийемин, С. Стернберг — М.: Мир, 1981. — 504 с.

[184] Виленкин, Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп / Н. Я. Виленкин. — М.: Наука, 1965. — 588 с.

[185] Желобенко, Д. П. Представления групп Ли / Д. П. Желобенко, А. И. Штерн. — М.: Наука, 1983. — 360 с.

[186] Трофимов, В. В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре / В. В. Трофимов // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 41. — С. 42-43.

[187] Трофимов, В. В. О вполне интегрируемых геодезических потоках на группе движений евклидова пространства / В. В. Трофимов // В сборнике «Некоторые вопросы математики и механики». — М.: МГУ, 1983. — С. 8-9.

[188] Stephani, H. Exact solutions of Einstein's field equations / H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt. — Camridge University Press, 2003. — 701 p.

[189] Petrov, A. Z. Gravitational field geometry as the geometry of automorphisms / A. Z. Petrov // Recent Developments in General Relativity. — 1962. — Vol. 1. — P. 379.

[190] Ozsváth, I. New Homogeneous Solutions of Einstein's Field Equations with Incoherent Matter Obtained by a Spinor Technique / I. Ozsváth // Journal of Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 6, № 4. — P. 590—610.

[191] Ozsváth, I. Dust — Filled Universes of Class II and Class III / I. Ozsváth // Journal of Mathematical Physics. — 1970. — Vol. 11, № 9. — P. 2871—2883.

[192] Кайгородов, В. Р. Пространства Эйнштейна максимальной подвижности / В. Р. Кайгородов // Доклады Академии наук СССР. — 1962. — Т. 196, № 4. — С. 893.

[193] Маслов, В. П. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики / В. П. Маслов, М. В. Федорюк. — М.: Наука, 1976. — 296 с.

[194] Фейнман, Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хибс — М.: Мир, 1968. — 382 с.

[195] Борисов, А. В. Современные методы теории интегрируемых систем / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — Москва — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 296 с.

[196] Гельфанд, И. М. Центр инфинитезимального группового кольца / И. М. Гельфанд // Математический сборник. — 1950. — Т. 26, № 1. — С. 103-112.

[197] Гальцов, Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр / Д. В. Гальцов. — М.: МГУ, 1986. — 288 с.

[198] Березин, Ф. А. Уравнение Шредингера / Ф. А. Березин, М. А. Шубин. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 392 с.

[199] Уэллс, Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях / Р. Уэллс. — М.: Мир, 1976. — 288 с.

[200] Славянов, С. Ю. Специальные функции. Единая теория, основанная на анализе особенностей / С. Ю. Славянов, В. Лай. — СПб.: Невский Диалект, 2002. — 312 с.

[201] Углирж, А. Ю. Интегрируемые полевые модели на многообразиях групп Ли / А. Ю. Углирж, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2007. — Т. 50, № 5. — С. 63-68.

[202] Гончаровский, М. М. Интегрируемый класс дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью на группах Ли / М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2009. — Т. 161, № 3. — С. 332–345.

[203] Бреев, А. И. Уравнение Клейна — Гордона с нелокальной нелинейностью специального вида на коммутативных однородных пространствах с инвариантной метрикой / А. И. Бреев, М. М. Гончаровский, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2013. — Т. 56, № 7. — С. 8-14.

[204] Магазев, А. А. Функции Казимира пятимерных групп Ли с не полуотделимым пространством орбит / А. А. Магазев // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2003. — № 9. — С. 56-63.

[205] Винберг, Э. Б. Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия / Э. Б. Винберг // Успехи математических наук. — 2001. — Т. 56. — № 1. — С. 3-62.

[206] Барановский, С. П. К-орбиты, тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах с группами преобразований Пуанкаре и де Ситтера / С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2000. — № 11. — С. 72 — 78.

[207] Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. — М.: Наука, 1981. — 2 т. — 416 с.

[208] Gray, A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions / A. Gray // J. Math. Mech. — 1967. — Vol. 16. — P. 715-737.

[209] Hermann, R. A. sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle / R. A. Hermann // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1960. — Vol. 11, № 2. — P. 236-242.

[210] Reckziegel, H. A fiber bundle theorem / H. Reckziegel // Manuscripta Math. — 1992. — Vol. 76, № 1. — P. 105-110.

[211] Карасев, М. В. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование / М. В. Карасев, В. П. Маслов. — М.: Наука, 1991. — 368 с.

[212] Магазев, А. А. Интегрирование геодезических потоков на однородных пространствах. Случай дикой группы Ли / А. А. Магазев, И. В. Широков // Теоретическая и математическая физика. — 2003. — Т. 136, №. 3. — С. 365-379.

[213] Нехорошев, Н. Н. Две теоремы о переменных действие — угол / Н. Н. Нехорошев // Успехи математических наук. — 1969. — Т. 24, № 5. — С. 237-238.

[214] Эйзенхарт, Э. П. Риманова геометрия / Э. П. Эйзенхарт. — М.: ИЛ, 1948. — 316 с.

[215] Komrakov, B. B. Einstein — Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces / B. B. Komrakov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2001. — Vol. 8. — P. 33-165.

[216] Vaisman, I. Second order Hamiltonian vector fields on tangent bundles / I. Vaisman // Differential Geometry and its Applications. — 1995. — Vol. 5, № 2. — P. 153-170.

[217] Mitric, G. Poisson structures on tangent bundles / G. Mitric, I. Vaisman // Differential Geometry and its Applications. — 2003. — Vol. 18, № 2. — P. 207-228.

[218] Kolár, I. Natural operations in differential geometry / I. Kolár, J. Slovák, P. W. Michor. — Springer —Verlag: Berlin Heidelberg, 1993. — 434 p.

[219] Новиков, С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса / С. П. Новиков // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, № 5. — С. 3-49.

[220] Paternain, G. P. Anosov geodesic flows and twisted symplectic structures / G. P. Paternain, M. Paternain // International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995). — 1996. — P. 132-145.

[221] Benedetti, G. On the existence of periodic orbits for magnetic systems on the two-sphere / G. Benedetti, K. Zehmisch // Journal of Modern Dynamics. — 2015. — Vol. 9, № 1. — P. 141-146.

[222] Gibbons, G. W. SUSY in the sky / G. W. Gibbons, R. H. Rietdijk, J. W. Van Holten // Nuclear Physics B. — 1993. — Vol. 404, № 1. — P. 42-64.

[223] Иванова, А. С. Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей / А. С. Иванова, М. А. Паринов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 236. — С. 197-203.

[224] Visinescu, M. Higher order first integrals of motion in a gauge covariant Hamiltonian framework / M. Visinescu // Modern Physics Letters A. — 2010. — Vol. 25, № 5. — P. 341-350.

[225] Гайшун, И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 272 с.

[226] Hochschild, G. Cohomology classes of finite type and finite dimensional kernels for Lie algebras / G. Hochschild // American Journal of Mathematics. — 1954. — Vol. 76, № 4. — P. 763-778.

[227] Mori, M. On the three-dimensional cohomology group of Lie algebras / M. Mori // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1953. — Vol. 5, № 2. — P. 171-183.

[228] Shukla, U. A cohomology for Lie algebras / U. Shukla // Journal of the Mathematical Society of Japan. — 1966. — Vol. 18, № 3. — P. 275-289.

[229] Yasskin, P. B. Solutions for gravity coupled to massless gauge fields / P. B. Yasskin // Physical Review D. — 1975. — Vol. 12, № 8. — P. 2212.

[230] Wu, T. T. Properties of Matter under Unusual Conditions / T. T. Wu, C. N. Yang. — Interscience: New York, 1969. — P. 349.

[231] Feher, L. G. Dynamical $O(4)$-symmetry in the asymptotic field of the Prasad-Sommerfield monopole / L. G. Feher // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1986. — Vol. 19, № 7. — P. 1259.

[232] Horvathy, P. A. Conserved quantities in non-abelian monopole fields / P. A. Horvathy, J. P. Ngome // Physical Review D. — 2009. — Vol. 79, № 12. — P. 127701.

[233] Smoller, J. A. An investigation of the limiting behavior of particle-like solutions to the Einstein-Yang/Mills equations and a new black hole solution / J. A. Smoller, A. G. Wasserman // Communications in Mathematical Physics. — 1994. — Vol. 161, № 2. — P. 365-389.

[234] Newman, E. T. Metric of a rotating, charged mass / E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence // Journal of Mathematical Physics. — 1965. — Vol. 6, № 6. — P. 918-919.

[235] Bertotti, B. Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity / B. Bertotti // Physical Review. — 1959. — Vol. 116, № 5. — P. 1331.

[236] Robinson, I. A solution of the Einstein-Maxwell equations / I. Robinson // Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys. — 1959. — Vol. 7. — P. 351.

[237] Kramer, D. Homogeneous Einstein—Maxwell fields / D. Kramer // Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae. — 1978. — Vol. 44, №. 4. — P. 353-356.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Функции Казимира маломерных алгебр Ли

В настоящем приложении мы приводим наборы функций Казимира для всех некоммутативных вещественных алгебр Ли порядка 2, 3, 4 и 5. Классификации алгебр порядка 2, 3 и 4 приведены в монографии [81], а все пятимерные алгебры Ли перечислены в работе [141].

Таблица А.1 — Функции Казимира двумерных алгебр Ли

№	Коммутационные соотношения	Функции Казимира
$\mathfrak{g}_{2,1}$	$[e_1, e_2] = e_1$	f_1

Таблица А.2 — Функции Казимира трехмерных алгебр Ли

№	Коммутационные соотношения	Функции Казимира
$\mathfrak{g}_{3,1}$	$[e_2, e_3] = e_1$	f_1
$\mathfrak{g}_{3,2}$	$[e_1, e_3] = e_1$	f_2
$\mathfrak{g}_{3,3}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_1 + e_2$	$f_1 \exp(-f_2/f_1)$
$\mathfrak{g}_{3,4}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = e_2$	f_1/f_2
$\mathfrak{g}_{3,5}$	$[e_1, e_3] = e_1,\ [e_2, e_3] = qe_2,\ q \neq 0, 1$	$f_1^{-q} f_2$
$\mathfrak{g}_{3,6}$	$[e_1, e_3] = e_2,\ [e_2, e_3] = -e_1 + qe_2,$ $q^2 < 4$	$(f_1^2 + f_2^2 - qf_1 f_2)\times$ $\times \exp\left[-\frac{2q}{\sqrt{4-q^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{f_1\sqrt{4-q^2}}{2f_2 - qf_1}\right)\right]$
$\mathfrak{g}_{3,7}$	$[e_1, e_2] = e_1,\ [e_1, e_3] = 2e_2,\ [e_2, e_3] = e_3$	$f_2^2 - f_1 f_3$
$\mathfrak{g}_{3,8}$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_2, e_3] = e_1$	$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$

Таблица А.3 — Функции Казимира четырехмерных алгебр Ли

№	Коммутационные соотношения	Функции Казимира
$\mathfrak{g}_{4,1}$	$[e_1,e_4]=ce_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=(c-1)e_3$	При $c=0$: $f_1, f_2f_3-f_1f_4$
$\mathfrak{g}_{4,2}$	$[e_1,e_4]=2e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2+e_3$	
$\mathfrak{g}_{4,3}$	$[e_1,e_4]=ce_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_3,$ $[e_3,e_4]=-e_2+ce_3,\ c^2<4$	При $c=0$: $f_1, f_2^2+f_3^2-2f_1f_4$
$\mathfrak{g}_{4,4}$	$[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2$	
$\mathfrak{g}_{4,5}$	$[e_1,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=e_2,\ [e_2,e_3]=e_2,$ $[e_2,e_4]=-e_1$	
$\mathfrak{g}_{4,6}$	$[e_1,e_4]=e_1$	f_2, f_3
$\mathfrak{g}_{4,7}$	$[e_1,e_4]=e_4,\ [e_2,e_4]=e_4$	f_1-f_2, f_3
$\mathfrak{g}_{4,8}$	$[e_1,e_4]=e_4,\ [e_2,e_4]=e_4,\ [e_3,e_4]=e_4$	f_1-f_2, f_1-f_3
$\mathfrak{g}_{4,9}$	$[e_1,e_4]=e_1+e_4$	f_2, f_3
$\mathfrak{g}_{4,10}$	$[e_1,e_4]=ke_1+e_2,\ [e_2,e_4]=ke_2,$ $[e_3,e_4]=\epsilon e_3,\ \epsilon=0,1$	$f_2^{\epsilon}f_3^{-k}, f_2\exp(-kf_1/f_2)$
$\mathfrak{g}_{4,11}$	$[e_1,e_4]=ke_1+e_2,\ [e_2,e_4]=ke_2+e_3$	$(k^2f_1-f_3)/(kf_2+f_3)-\ln(kf_2+f_3),$ f_3
$\mathfrak{g}_{4,12}$	$[e_1,e_4]=ke_1+e_2,\ [e_2,e_4]=ke_2+e_3$ $[e_3,e_4]=e_3$	$f_3^{-k}[f_3+(k-1)f_2],$ $[f_3-(k-1)^2f_1]/[(k-1)f_3^k]-$ $-[f_3+(k-1)f_2]\ln f_3/f_3^k$
$\mathfrak{g}_{4,13}$	$[e_1,e_4]=ke_1+e_2,\ [e_2,e_4]=ke_2-e_1,$ $[e_3,e_4]=\varepsilon e_3,\ \varepsilon=0,1$	$(f_1^2+f_2^2)\exp\left[-2k\,\mathrm{arctg}(f_1/f_2)\right],$ $f_3\exp\left[-\varepsilon\,\mathrm{arctg}(f_1/f_2)\right]$
$\mathfrak{g}_{4,14}$	$[e_1,e_2]=e_1,\ [e_1,e_3]=2e_2,\ [e_2,e_3]=e_3$	$f_2^2-f_1f_3, f_4$
$\mathfrak{g}_{4,15}$	$[e_1,e_2]=e_3,\ [e_1,e_3]=-e_2,\ [e_2,e_3]=e_1$	$f_1^2+f_2^2+f_3^2, f_4$

Таблица А.4 — Функции Казимира пятимерных алгебр Ли

№	Коммутационные соотношения	Функции Казимира
$\mathfrak{g}_{5,1}$	$[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2$	$f_1, f_2, f_1f_4-f_2f_3$
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$[e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_1$	$f_1, f_2^2-2f_1f_3, f_2^3+3f_1(f_1f_4-f_2f_3)$
$\mathfrak{g}_{5,3}$	$[e_2,e_4]=e_3,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2$	$f_1, f_3, f_2^2-2(f_1f_4-f_3f_5)$
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_1$	f_1
$\mathfrak{g}_{5,5}$	$[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_1$	f_1
$\mathfrak{g}_{5,6}$	$[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,$ $[e_4,e_5]=e_3$	f_1
$\mathfrak{g}_{5,7}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=\alpha e_2,\ [e_3,e_5]=\beta e_3,$ $[e_4,e_5]=\gamma e_4,\ -1\le\gamma\le\beta\le\alpha\le 1$	$f_1^{-\alpha}f_2, f_1^{-\beta}f_3, f_1^{-\gamma}f_4$
$\mathfrak{g}_{5,8}$	$[e_4,e_5]=\gamma e_4,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $0<\lvert\gamma\rvert<1$	$f_1, f_3\exp(-f_2/f_1), f_4\exp(-\gamma f_2/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,9}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=\beta e_3,\ [e_4,e_5]=\gamma e_4,\ 0\ne\gamma\le\beta$	$f_1\exp(-f_2/f_1), f_3^{-\gamma}f_4^{\beta}, f_1^{-\gamma}f_4$
$\mathfrak{g}_{5,10}$	$[e_4,e_5]=e_4,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2$	$f_1, f_2^2-2f_1f_3, f_4\exp(-f_2/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,11}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=e_2+e_3,\ [e_4,e_5]=\gamma e_4,\ \gamma\ne 0$	$f_4f_1^{-\gamma}, \ln f_1-f_2/f_1,$ $2f_3/f_1+\ln f_1(K_2-f_2/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,12}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=e_2+e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4$	$\ln f_1-f_2/f_1,$ $2f_3/f_1+\ln f_1(K_1-f_2/f_1),$ $6f_4/f_1-\ln f_1[K_2-(f_2\ln f_1-4f_3)/f_1]$
$\mathfrak{g}_{5,13}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=\gamma e_2,$ $[e_3,e_5]=pe_3-se_4,\ [e_4,e_5]=se_3+pe_4,$ $\lvert\gamma\rvert\le 1,\ \gamma s\ne 0$	$f_1^{-\gamma}, f_1^{s}e^{-\operatorname{arctg}(f_4/f_3)},$ $(f_3^2+f_4^2)^{s}e^{-2p\operatorname{arctg}(f_4/f_3)}$
$\mathfrak{g}_{5,14}$	$[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=pe_3-e_4,$ $[e_4,e_5]=e_3+pe_4$	$f_1, (f_3^2+f_4^2)e^{-2p\operatorname{arctg}(f_4/f_3)}$ $f_2-f_1\operatorname{arctg}(f_4/f_3)$
$\mathfrak{g}_{5,15}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=\gamma e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+\gamma e_4,$ $-1\le\gamma\le 1$	$f_1\exp(-f_2/f_1), f_1^{-\gamma}f_3,$ $f_3\exp(-\gamma f_4/f_3)$
$\mathfrak{g}_{5,16}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=pe_3-se_4,\ [e_4,e_5]=se_3+pe_4,$ $s\ne 0$	$f_1\exp(-f_2/f_1), f_1^{s}e^{-\operatorname{arctg}(f_4/f_3)},$ $(f_3^2+f_4^2)^{s}e^{-2p\operatorname{arctg}(f_4/f_3)}$

$\mathfrak{g}_{5,17}$	$[e_1,e_5]=pe_1-e_2,\ [e_2,e_5]=e_1+pe_2,$ $[e_3,e_5]=qe_3-se_4,\ [e_4,e_5]=se_3+qe_4,$ $s\neq 0$	$(f_1^2+f_2^2)e^{-2p\operatorname{arctg}(f_2/f_1)},$ $(f_3^2+f_4^2)^s e^{-2q\operatorname{arctg}(f_4/f_3)},$ $s\operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{f_4}{f_3}\right)$
$\mathfrak{g}_{5,18}$	$[e_1,e_5]=pe_1-e_2,\ [e_2,e_5]=e_1+pe_2,$ $[e_3,e_5]=e_1+pe_3-e_4,$ $[e_4,e_5]=e_2+e_3-pe_4,$ $0\leq p<1$	$(f_1^2+f_2^2)e^{-2p\operatorname{arctg}(f_2/f_1)},$ $\alpha^2(pf_4-f_2)^2+(f_1-pf_3+p^2f_4)^2,$ $\alpha\operatorname{arctg}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha(pf_4-f_2)}{f_1-pf_3+p^2f_4}\right),$ $\alpha=\sqrt{1-p^2}$
$\mathfrak{g}_{5,19}$	$[e_1,e_5]=pe_1-e_2,\ [e_2,e_5]=e_1+pe_2,$ $[e_3,e_5]=e_1+pe_3-e_4,$ $[e_4,e_5]=e_2+e_3-pe_4,$ $p\geq 1$	$(f_1^2+f_2^2)e^{-2p\operatorname{arctg}(f_2/f_3)},$ $(f_1^2+f_2^2)^{-\frac{\sqrt{p^2-1}}{2p}}(B-\sqrt{p^2-1}A),$ $(f_1^2+f_2^2)^{\frac{\sqrt{p^2-1}}{2p}}(B+\sqrt{p^2-1}A),$ $A=pf_4-f_2,\ B=f_1-pf_3+p^2f_4,$
$\mathfrak{g}_{5,20}$	$[e_1,e_5]=(1+\alpha)e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=\alpha e_3,\ [e_4,e_5]=\beta e_4,$ $\beta\neq 0$	$f_1^{-\beta}f_4^{1+\alpha}$
$\mathfrak{g}_{5,21}$	$[e_1,e_5]=(1+\alpha)e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=\alpha e_3,$ $[e_4,e_5]=e_1+(1+\alpha)e_4$	$f_1\exp\left[-(1+\alpha)\frac{f_4}{f_1}\right]$
$\mathfrak{g}_{5,22}$	$[e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2+e_3,\ [e_3,e_5]=e_3+e_4,$ $[e_4,e_5]=e_4$	$f_1^{-1}f_4^2$
$\mathfrak{g}_{5,23}$	$[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_4$	f_1
$\mathfrak{g}_{5,24}$	$[e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2+e_3,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=\beta e_4,\ \beta\neq 0$	$f_1^{-\beta}f_4^2$
$\mathfrak{g}_{5,25}$	$[e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2+e_3,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=\varepsilon e_1+2e_4,\ [e_3,e_5]=e_3,\ \varepsilon=\pm 1$	$f_1^{\varepsilon}\exp(-2f_4/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,26}$	$[e_1,e_5]=2pe_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=pe_2+e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2+pe_3,$ $[e_4,e_5]=\beta e_4,\ \beta\neq 0$	$f_1^{-\beta}f_4^{2p}$

$\mathfrak{g}_{5,27}$	$[e_1,e_5]=2pe_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=pe_2+e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2+pe_3,$ $[e_4,e_5]=\varepsilon e_1+2pe_4,\ \varepsilon=\pm1$	$f_1^{\varepsilon}\exp(-2f_4/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,28}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_3,e_5]=e_4+e_3,\ [e_4,e_5]=e_1+e_4$	$f_1\exp(-f_4/f_1)$
$\mathfrak{g}_{5,29}$	$[e_1,e_5]=(1+\alpha)e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,$ $[e_2,e_5]=\alpha e_2,\ [e_3,e_5]=e_3+e_4,\ [e_4,e_5]=e_4$	$f_1^{-1}f_4^{1+\alpha}$
$\mathfrak{g}_{5,30}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,$ $[e_3,e_5]=e_4$	f_4
$\mathfrak{g}_{5,31}$	$[e_1,e_5]=(2+h)e_1,\ [e_2,e_4]=e_1,$ $[e_2,e_5]=(1+h)e_2,\ [e_3,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_5]=he_3,\ [e_4,e_5]=e_4$	$f_1^{2(h+1)}(f_2^2-2f_1f_3)^{-h-2}$
$\mathfrak{g}_{5,32}$	$[e_1,e_5]=3e_1,\ [e_2,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=2e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4$	$f_1^4(f_2^2-2f_1f_3)^{-3}$
$\mathfrak{g}_{5,33}$	$[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_2,\ [e_3,e_5]=he_1+e_3$	$f_1^{2h}\exp[(f_2^2-2f_1f_3)/f_1^2)]$
$\mathfrak{g}_{5,34}$	$[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_4]=\beta e_3,$ $[e_3,e_5]=\alpha e_3,\ \alpha^2+\beta^2\neq0$	$f_1^{\beta}f_2^{\alpha}f_3^{-1}$
$\mathfrak{g}_{5,35}$	$[e_1,e_4]=\alpha e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_3,\ [e_3,e_5]=e_2$	$f_1f_2^{-\alpha}\exp(-f_3/f_2)$
$\mathfrak{g}_{5,36}$	$[e_1,e_4]=he_1,\ [e_1,e_5]=\alpha e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_2,e_5]=-e_3,\ [e_3,e_4]=e_3,\ [e_3,e_5]=e_2$ $\alpha^2+h^2\neq0$	$f_1^2(f_2^2+f_3^2)^{-h}e^{-2\alpha\,\mathrm{arctg}(f_3/f_2)}$
$\mathfrak{g}_{5,37}$	$[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_2,e_5]=-e_2,\ [e_3,e_5]=e_3$	$f_1^{-1}f_2f_3+f_5$
$\mathfrak{g}_{5,38}$	$[e_1,e_4]=2e_1,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_2,e_5]=-e_3,\ [e_3,e_4]=e_3,\ [e_3,e_5]=e_2$	$f_1^{-1}(f_2^2+f_3^2)+2f_5$
$\mathfrak{g}_{5,39}$	$[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$	f_3
$\mathfrak{g}_{5,40}$	$[e_1,e_4]=e_1,\ [e_1,e_5]=-e_2,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_3$	f_3
$\mathfrak{g}_{5,41}$	$[e_1,e_2]=2e_1,\ [e_1,e_3]=-e_2,\ [e_1,e_4]=e_5,$ $[e_2,e_4]=e_4,\ [e_2,e_3]=2e_3,\ [e_2,e_5]=-e_5,$ $[e_3,e_5]=e_4$	$f_1f_4^2-f_2f_4f_5-f_3f_5^2$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Классификация 2-коциклов четырехмерных алгебр Ли

В настоящем приложении мы приводим канонические виды 2-коциклов для всех четырехмерных алгебр Ли. Канонические формы получены с помощью действия групп автоморфизмов соответствующих алгебр. Кроме этого, для каждой алгебры Ли мы выделяем интегрируемые случаи, т.е. подклассы 2-коциклов, для которых $\mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g} \geq 2$. Используемая нами классификация четырехмерных алгебр Ли приведена в Приложении А. Кроме того, мы используем следующие обозначения: $\varepsilon = \pm 1$, $\kappa = 0, \pm 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,1}$ при $c \neq 1$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\left(c\,e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g} = 2 \text{ при } c = 0;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\,e^2 \wedge e^4 + \kappa_2\,e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g} = 2 \text{ при } c = 0;$$

2. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,1}$ при $c = 1$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right) + \kappa\,e^3 \wedge e^4;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\,e^2 \wedge e^4 + \kappa_2\,e^3 \wedge e^4;$$

3. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,2}$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\left(2\,e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right);$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\,e^2 \wedge e^4;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\,e^3 \wedge e^4;$$

4. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,3}$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\left(c\,e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g} = 2 \text{ при } c = 0;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\,e^2 \wedge e^4 + \kappa_2\,e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\,\mathfrak{g} = 2 \text{ при } c = 0;$$

5. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,4}$:

$$\mathbf{F} = \kappa_1\,e^1 \wedge e^4 + \kappa_2\,e^2 \wedge e^3 + \alpha\,e^3 \wedge e^4;$$

6. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,5}$:

$$\mathbf{F} = \kappa\left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3\right) + \alpha\,e^3 \wedge e^4;$$

7. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,6}$:

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4 + \varepsilon\, e^2 \wedge e^3;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4 + \varepsilon\, e^2 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\, e^1 \wedge e^4 + \kappa_2\, e^3 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

8. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,7}$:

$$\mathbf{F} = \kappa \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4\right) + \varepsilon\, e^2 \wedge e^3;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^1 \wedge e^2 + \kappa \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1 \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4\right) + \kappa_2\, e^2 \wedge e^3, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2 \text{ при } \kappa_2 = 0;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1 \left(e^1 \wedge e^3 + \frac{1}{2}\, e^2 \wedge e^3\right) + \kappa_2 \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2 \text{ при } \kappa_1 = 0;$$

9. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,8}$:

$$\mathbf{F} = \kappa_1\, e^1 \wedge e^3 + \kappa_2 \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2 \text{ при } \varepsilon = \kappa_1;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\, e^1 \wedge e^2 + \kappa_2 \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2 \text{ при } \kappa_1 = 0;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^2 \wedge e^3 + \kappa \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right);$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(2e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^3\right) + \kappa \left(e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right);$$

10. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,9}$:

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4 + \varepsilon\, e^2 \wedge e^3;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4\right) + \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1 \left(e^1 \wedge e^3 + e^3 \wedge e^4\right) + \kappa_2\, e^1 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

11. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,10}$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^2 \wedge e^4 + \kappa\, e^3 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa_1\, e^1 \wedge e^4 + \kappa_2\, e^3 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

12. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,11}$ $(k \neq 0)$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^3 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(-\frac{2}{k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(-\frac{1}{k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(\frac{2}{k^2}\, e^1 \wedge e^4 - \frac{1}{k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4\right), \quad \operatorname{ind}_{[\mathbf{F}]} \mathfrak{g} = 2;$$

13. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,11}$ $(k=0)$:

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^2 + \varepsilon\, e^3 \wedge e^4;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^1 \wedge e^2, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^2 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

14. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,12}$ $(k \neq 1)$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(\frac{1}{1-k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4 \right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(\frac{2}{1-k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4 \right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(\frac{2}{(1-k)^2}\, e^1 \wedge e^4 + \frac{1}{1-k}\, e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4 \right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

15. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,12}$ $(k=1)$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^2 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^1 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

16. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,13}$:

$$\mathbf{F} = \varepsilon\, e^2 \wedge e^4 + \kappa\, e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^3 \wedge e^4, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

17. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,14}$:

$$\mathbf{F} = -\alpha^2 \left(e^1 \wedge e^3 + \varepsilon\, e^2 \wedge e^3 \right), \quad \alpha \neq 0, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \left(e^1 \wedge e^2 + \alpha^2\, e^2 \wedge e^3 \right), \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \alpha\, e^1 \wedge e^3, \quad \alpha \neq 0, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = \kappa\, e^2 \wedge e^3, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

18. Алгебра $\mathfrak{g}_{4,15}$:

$$\mathbf{F} = \alpha^2 \left(e^1 \wedge e^2 - e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^3 \right), \quad \alpha \neq 0, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2;$$

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathrm{ind}_{[\mathbf{F}]}\, \mathfrak{g} = 2.$$