SKUPOVI

Ivan Krijan

27. 03. 2017.

Za konačan skup S nam je lako odgovoriti na pitanje koliko on ima elemenata, jednostavno ih prebrojimo. No, što u situaciji kada S ima više nego konačno elemenata? Razlikujemo li takve skupove ili samo za njih sve kažemo da imaju beskonačno elemenata? Razlikujemo ih! Točnije, postoje različite (manje i veće) beskonačnosti.

Za skupove A i B kažemo da imaju jednaki **kardinalitet** (također, kažemo da su **ekvipotentni**) ukoliko postoji bijekcija $f : A \to B$ i pišemo $k(A) = k(B)$.
Ukoliko postoji injekcija $f : A \to B$, onda pišemo $k(A) \leq k(B)$, a ukoliko postoji surjekcija $f : A \to B$, onda je $k(A) \geq k(B)$. Oprez! Ovdje implicitno koristimo aksiom izbora (navest ćemo ga kasnije), zašto? Sljedeći teorem nam govori da se ovakav uređaj na skupovima dobro ponaša.
Teorem. (Cantor-Schröder-Bernstein) Neka za skupove A i B vrijedi $k(A) \leq k(B)$ i $k(B) \leq k(A)$, tada je $k(A) = k(B)$.

Neka je A skup takav da postoji bijekcija $f : A \to \mathbb{N}$, tada kažemo da je skup A **prebrojiv** (ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva). Kardinalitet skupa prirodnih brojeva nazivamo **alef nula** i pišemo $k(\mathbb{N}) = \aleph_0$.
Primjer 0. Pokažite da je $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.
Primjer 1. Neka je A skup. Pokažite da je $k(\mathcal{P}(A)) > k(A)$.
Dakle, beskonačni skupovi koji nisu ekvipotentni s $\mathbb{N}$ sigurno postoje. Takvi skupovi se zovu **neprebrojivi**.
Ukoliko za skup A postoji bijekcija $f : A \to \mathbb{R}$, onda kažemo da je kardinalitet skupa A jednak **kontinuum**, pišemo $k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$.
Primjer 2. Dokažite da je $k([a, b]) = \mathfrak{c}$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Primjer 3. Dokažite da je $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

A^B je oznaka za skup svih funkcija $f : B \to A$. Vrijedi $k(A^B) = k(A)^{k(B)}$.
Primjer 4. Dokažite da je $k(\mathcal{P}(A)) = 2^{k(A)}$, dakle, za svaki skup A vrijedi da je $2^{k(A)} > k(A)$.
Primjer 5. Dokažite da je $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Hipoteza kontinuuma. Ne postoji skup A takav da je $\aleph_0 < k(A) < \mathfrak{c}$. Georg Cantor 1878, i dalje otvoren problem (prvi od Hilbertovih 23 iz 1900.).

Aksiom izbora. Neka je I proizvoljan neprazan skup i neka je $\{A_i : i \in I\}$ neprazna familija u parovima disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup B takav da je $B \cap A_i$ jednočlan skup za sve $i \in I$. Skup B zovemo **izborni skup** za familiju $\{A_i : i \in I\}$.
Primjer 6. Neka su A i B skupovi takvi da postoji surjekcija $f : A \to B$, pokažite da postoji injekcija $f : B \to A$.

Sada ćemo vrlo u grubo (preciznije ne stignemo) objasniti pojam uređaja na skupu A, kako bismo došli do Zornove leme.

Za skup A kažemo da je **parcijalno uređen** ako postoji relacija ($\leq$) na A za koju vrijedi da je antisimetrična i tranizitivna, tj. ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$, ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$. Skup A je **totalno** (ili **linearno**) uređen ako za svaka dva elementa $x, y \in A$ vrijedi da je $x \leq y$ ili $y \leq x$. **Dobro uređen** skup je svaki onaj totalno uređen skup A za kojeg vrijedi da svaki njegov podskup ima minimalni element. Osnovni primjer dobro uređenog skupa je skup prirodnih brojeva.
Podskup parcijalno uređenog skupa koji je totalno uređen nazivamo **lanac**.
Za element x parcijalno uređenog skupa A kažemo da je **maksimalan** ako ne postoji $y \in A$

takav da je $x < y$, a kažemo da je **najveći** ako je $y \leq x$, za sve $y \in A$. Slično definiramo minimalni i najmanji element skupa. Pažnja! Skup može imati puno maksimalnih (minimalnih) elemenata, ali samo jedan najveći (najmanji). Ako je element najveći, on je i maksimalan, no maksimalan element ne mora biti i najveći.

Teorem. (Zornova lema) Neka je A neprazan parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da svaki neprazan lanac u A ima gornju među u A. Tada A ima barem jedan maksimalni element.

Primjer 7. Dokažite da svaki vektorski prostor ima (Hamelovu) bazu.

ZADACI *Za **domaću zadaću** riješite barem 6 zadataka od onih koji nisu riješeni na predavanju. Rok za predaju je 10.04.2017.*

1. Odredite kardinalnost skupa svih prirodnih brojeva s neparno mnogo znamenaka.
2. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ prebrojiv skup. Postoji li $a \in \mathbb{R}$ takav da su skupovi $A+a$ i A disjunktni? Ovdje je $A + a = \{x + a : x \in A\}$.
3. Dokažite da je $\aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.
4. Konstruiraj bijekciju $f : [0, 1\rangle \to [0, 1]$.
5. Dokažite da je $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$.
6. Odredite kardinalost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ koji sadrže skup $\mathbb{N}$.
7. Odredite kardinalnost skupa svih podskupova od $\mathbb{R}$ ekvipotentnih s $\mathbb{R}$.
8. Koliko ima otvorenih podskupova od $\mathbb{R}$?
9. Koliko ima podskupova od $\mathbb{R}$ koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni?
10. Koliko ima surjektivnih nizova cijelih brojeva?
11. Dokažite da periodičkih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima jednako kao neperiodičkih funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
12. Koliko ima neprekidnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
13. Koliko ima derivabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
14. Koliko ima prebrojivih podskupova od $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?
15. Dvije kružnice u ravnini ($\mathbb{R}^2$) koje se diraju (u jednoj točki) izvana nazivamo *osmica*. Možemo li u ravninu smjestiti neprebrojivo međusobno disjunktnih osmica?
16. Dokažite da postoji bojanje točaka ravnine u plavu i crvenu boju takvo da je svaka točka obojana u neku boju, na svakom pravcu se nalazi najviše 2017 plavih točaka i kroz svaku crvenu točku prolazi barem jedan pravac na kojem se nalazi 2017 plavih točaka.
17. Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup. Za $A \subseteq S$ kažemo da je kofinalan ako za svaki $x \in S$ postoji $a \in A$ takav da je $x \leq a$. Dokažite da svaki totalno uređen skup sadrži kofinalan dobro uređen skup.
18. Neka je $(S, \leq)$ totalno uređen skup koji ima najmanji element. Dokažite da postoji dobro uređen podskup $A \subseteq S$ takav da za svaki $x \in S$ postoje $a, b \in A$ takvi da je $a \leq x \leq b$.
19. Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup koji nije totalno uređen. Dokažite da postoji podskup $A \subseteq S$ koji je totalno uređen i takav da za svaki $x \in S \setminus A$ postoji $a \in A$ koji nije usporediv s x.