Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міжнародна наукова конференція

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

(до 90-річчя від дня народження академіка І. І. Ляшка)

м. Київ, 10, 11 вересня 2012 р.

Матеріали конференції

Київ 2012

Основні напрями роботи конференції

- **Обчислювальна математика**
- **Оптимальне керування та теорія екстремальних задач**
- **Математичне моделювання**
- **Теорія фільтрації**

Організаційний комітет

Голова

Анісімов А.В., член-кор. НАН України

Заступники голови

Закусило О.К., академік АПН України

Ляшко С.І., член-кор. НАН України

Члени оргкомітету

Гаращенко Ф.Г., професор

Григоренко Я.М., академік НАН України

Грищенко О.Ю., професор

Клюшин Д.А., професор

Наконечний О.Г., професор

Номіровський Д.А., професор

Перестюк М.О., академік НАН України

Самойленко В.Г., професор

Семенов В.В., професор

Сергієнко І.В., академік НАН України

Секретар

Пришляк К.О., к.ф.–м.н.

Зміст

ВЕЛИКЕ ЖИТТЯ

9 вересня виповнюється 90 років від дня народження академіка НАН України, організатора і першого декана факультету кібернетики, видатного українського вченого та педагога **Івана Івановича Ляшка**.

Народився Іван Іванович на Полтавщині, в селі Мацківці Лубенського району в селянській родині подружжя Івана Юхимовича та Килини Федорівни Ляшків.

Першими шкільними вчителями відразу ж було помічено його велике захоплення точними науками — математикою і фізикою. Він завжди відзначався здатністю міцно утримувати у своїй пам'яті найскладніші формули, намагався знайти свій метод розв'язання найскладніших шкільних задач з алгебри і тригонометрії. Коли талановитого учня Івана делегували на обласну Олімпіаду, він виборов там перше місце, отримавши 10 балів з 10 можливих. Обласне радіо влаштувало зустріч з переможцями. Ведучий запитав Івана, щоб він хотів передати своєму улюбленому вчителю. Іван сказав: — "Турецький марш", музичне привітання від Моцарта і власноруч зіграв його на своїй нерозлучній мандоліні. Школа і все село зустрічали Івана, як справжнього героя, радіючи з математичних успіхів улюбленого юного музики.

Мрії та плани на майбутнє юнака з Полтавщини змінила війна. І. І. Ляшко довгих 8 років служив у лавах Військово — морського флоту СРСР, пройшовши увесь тяжкий період війни.

Повернувшись до мирного життя, головний старшина зенітної установки лінкору "Севастополь" Ляшко прагне одержати вищу математичну освіту. Не легко було після значної перерви у навчанні. Але він за один рік закінчив Київський учительський інститут. А потім, уже працюючи учителем математики Бесідської школи Ставищанського району Київської області, теж достроково закінчив Київський педагогічний інститут.

Зустріч І. І. Ляшка з академіком АН України Олександром Юлієвичем Ішлінським, директором Інституту математики та Костянтином Васильовичем Задиракою визначила подальшу його долю. Вони помітили обдарованість студента Ляшка, рекомендували його в аспірантуру до Київського університету імені Тараса Шевченка. З 1952 року, почавши навчатися в аспірантурі, І. І. Ляшко назавжди пов'язав свій науковий і педагогічний шлях з Київським національним університетом імені Тараса Шевченка. Тут він став кандидатом і доктором наук, професором, деканом, проректором, академіком.

Перші серйозні математичні дослідження Іван Іванович розпочав у галузі теорії аналітичних функцій. Ним було одержано розв'язок цікавої як з теоретичної, так і з практичної точок зору складної задачі про фільтрацію під багатошпунтовою греблею при довільному криволінійному водоупорі, обґрунтовано і розвинуто методи мажорантних областей і руху граничних точок. У 1955 році Іван Іванович достроково захистив кандидатську дисертацію.

Іван Іванович, працюючи над розв'язанням задач математичної фізики, одержав принципово нові результати по розвитку і застосуванню методу сумарних зображень, розв'язав серію складних задач, які описані в монографії "Розв'язання фільтраційних задач методом сумарних зображень", що вийшла в 1963 році. Праця мала не лише наукове значення, але й широке прикладне застосування в галузі гідротехнічного будівництва.

І. І. Ляшко у 1963 році успішно захистив докторську дисертацію. Разом зі своїми першими учнями, продовжуючи займатися математичною теорією фільтрації, він публікує монографії "Чисельно-аналітичне розв'язання задач теорії фільтрації" та "Метод мажорантних областей в теорії фільтрації", що вийшли, відповідно, у 1973 та 1974 роках.

Іваном Івановичем та його учнями запропоновано та розроблено новий підхід у застосуванні методу мажорантних областей для розв'язання серії задач планової фільтрації. При цьому досліджені питання існування, єдиності, стійкості та збіжності розв'язків відповідних скінченнорізницевих задач.

Очоливши колектив своїх учнів та колег, І. І. Ляшко створив одну з найпотужніших у Радянському Союзі школу фільтрації.

Діяльність І. І. Ляшка відзначено у 1975 році премією імені академіка М. М. Крилова, а у 1981 році — Державною премією України у галузі науки і техніки. В 1969 році Івана Івановича обрано членом-кореспондентом, а в 1973 році — академіком АН УРСР.

І. І. Ляшко запропонував ідею створення автоматизованої системи розв'язання певних класів задач математичної фізики методом сумарних зображень, яку було успішно реалізовано і описано у виданій в 1977 році монографії "Питання автоматизації розв'язання задач фільтрації на ЕОМ".

У подальшому І. І. Ляшко одержав ряд важливих результатів, які дозволили розв'язувати широкі класи задач фільтрації ґрунтових вод, прогнозування запасів води, вологосолеперенесення при бічних промивках та промивках на рисових системах, просочування крізь земляні споруди.

Цікаві результати одержано І. І. Ляшком, В. П. Діденком та О. Є. Цитрицьким при вивченні фільтрації шумів. Автори вперше у світовій практиці розробили стійкі методи і алгоритми розв'язання даного класу задач з використанням ідей регуляризації у поєднанні з технікою оснащених гільбертових просторів, що мало значний практичний інтерес для багатьох галузей народного господарства. Отримані результати відображено у монографіях "Фільтрація шумів", "Обробка вимірювань при дослідженнях складних систем" та "Математичні моделі при вимірюваннях".

У 1990-х роках І. І. Ляшко з учнями розробили ефективну методику чисельного розрахунку тепломасоперенесення в неоднорідних поруватих середовищах, що ґрунтується на оригінальних різницевих схемах для розв'язання крайових задач для лінійних і квазілінійних еліптичних, параболічних, псевдопараболічних та псевдогіперболічних рівнянь, які охоплюють широке коло класичних і некласичних задач математичної фізики.

Під керівництвом І. І. Ляшка було розроблено комп'ютерну систему прийняття рішень для захисту підземних вод від забруднень, яка пройшла успішну адаптацію на реальних об'єктах, небезпечних для довкілля — на майданчику захоронення радіоактивних відходів і на ставку-охолоджувачу Чорнобильської АЕС.

Викладацький шлях Іван Іванович почав ще будучи аспірантом у 1955 році. Після захисту кандидатської дисертації він стає доцентом, а згодом, ставши доктором наук — професором. Прочитані ним на механіко-математичному факультеті та факультеті кібернетики курси теорії функцій комплексної змінної, рівнянь математичної фізики, спеціальні курси викликали захват у студентів.

Крім великих здібностей науковця і педагога, у Івана Івановича Ляшка був талант організатора наукового та навчального процесів. У 1964 році він очолює кафедру математичної фізики, а згодом стає деканом механіко-математичного факультету. І. І. Ляшко був і вихователем, і зразком, і захисником, і суворим батьком студентів. Він любив студентів, а студенти любили його.

У 1969 році Іван Іванович очолив кафедру обчислювальної математики. І саме ця кафедра згодом стала базовою першого в СРСР факультету кібернетики, який він разом з Віктором Михайловичем Глушковим створив у Київському державному університеті і став першим його деканом. За ним пішли його учні, талановита молодь. Ці люди стали опорою нового факультету, міцним ядром, навколо якого групувались викладацькі кадри, здібні студенти. Під керівництвом І. І. Ляшка факультет кібернетики став одним з найсильніших і перспективних факультетів університету.

Протягом 1975–1995 років разом зі своїми колегами Іван Іванович створив цикл із 8 підручників та 9 навчальних посібників з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії оптимізації та інших дисциплін. Багато з цих видань перекладено російською, англійською, іспанською та в'єтнамською мовами. У 1989 році автори тритомника "Математичний аналіз" були удостоєні Державної премії України.

Обіймаючи посади завідувача кафедри, заступника декана, декана, проректора з наукової роботи, члена Президії Академії наук України, голови Правління республіканського товариства "Знання", Іван Іванович приділяв велику увагу питанням удосконалення навчального і наукового процесів.

Успішності в досягненні поставленої мети в великій мірі сприяла міцна підтримка коханої і люблячої дружини Віри Степанівни, яка понад 50 років створювала домашній затишок і умови для роботи. Разом з Іваном Івановичем вони виростили двох прекрасних синів: Сергія та Володимира, які обрали як і батько дорогу в математику.

Старший син, Сергій Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент Національної академії наук України, гідно продовжив справу Івана Івановича. Очоливши кафедру обчислювальної математики, він сприяв оновленню і осучасненню наукових розробок, застосувавши методи сумісної оптимізації та ідентифікації в задачах стохастичного програмування, оптимізації розподілених систем з узагальненою дією. До роботи на кафедрі Сергій Іванович залучив молодих талановитих студентів, які згодом стали доцентами і професорами, захистили під його керівництвом кандидатські і докторські дисертації. В 1991 році на базі існуючої наукової школи він заснував нову школу "Моделювання та оптимізація інформаційних систем", яка визнана як наукова школа світового рівня.

Справа життя Івана Івановича продовжується в діяльності створеного ним факультету кібернетики, кафедри обчислювальної математики, наукової школи.

Іван Іванович Ляшко помер 29 березня 2008 року, але пам'ять про нього назавжди збережеться в серцях близьких та рідних людей, тих, які з ним працювали, були його учнями і продовжують його справу.

Перелік джерел

1. Сергієнко І. В., Ляшко С. І., Грищенко О. Ю. Творчий шлях академіка НАН України Ляшка І. І. — III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика", присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. Матеріали конференції. — 2009. — С. 3-9.
2. Іван Іванович Ляшко. — В кн.: Історія Київського університету. — К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1959.
3. Ляшко Иван Иванович. — В кн.: История Академии наук Украинской ССР. — К.:Наук. думка, 1979. — С.59, 87, 98,711, 813, 820, 826.
4. Іван Іванович Ляшко. — В кн.: Укр. рад. енцикл., 2-у вид. 1981. — Т. 6. — С. 264–265.
5. Ляшко Иван Иванович. — В. кн.: Киевские математики-педагоги. Под ред. А.Н. Боголюбова. — К.: Вища школа, 1979. — с. 287–295.
6. Иван Иванович Ляшко. Биобиблиография ученых Украинской ССР. — К.: Наукова думка, 1982. — 54 с.
7. Видатні постаті Київського університету: Ляшко Іван Іванович. — К.: ВПЦ "Київ. ун-т", 2002. — 103 с.
8. "Механіко-математичному факультету — 60". — К.: 2000.

9. ”Факультету кібернетики — 30”. — К.,1999. — 216 с.
10. Шкіль М., Булах Г. Інтеграл його життя. Серія: Видатні постаті національного університету. Іван Іванович Ляшко. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. — 152 с.
11. Рудник В. Лицарі ”королеви знань” — Президентський вісник, 9 листопада 2001 р. — С. 22.

К. О. Пришляк.

Міжнародна наукова конференція
Обчислювальна та прикладна математика
(до 90-річчя від дня народження академіка І. І. Ляшка)

(Київ, 10, 11 вересня 2012)

Тези доповідей

A barrelledness of pre-Hilbert spaces

Anikushyn A.V.
anik_andrii@ukr.net
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

In this report we will talk about barrelledness of the spaces with an inner product. There are many characterizations of barrelledness of vector spaces. Characterization of barrelled spaces in terms of closed graph theorem was developed in [1],[2]. Characterization of barrelled sequence spaces was proved in [3]. Characterization of barrelled spaces by means of their β-duals was developed by Noll and Stadler in [4]. Some questions of the theory of barrelled space was considered in [5]. A big list of characterizations of barrelledeness was given by Perez-Carreras in [6]. A new approach to problem of characterization of barrelledeness was given in [7]. The next theorem for normed vector spaces was proved in [7].

Theorem. Let $(F, \|\cdot\|)$ and $(F_1, \|\cdot\|_1)$ be the normed vector spaces. Suppose that norm $\|\cdot\|_1$ is stronger than norm $\|\cdot\|$. Furthermore, suppose that the embeddings

$$(F_1, \|\cdot\|_1) \subseteq (F, \|\cdot\|), \ (F, \|\cdot\|)^* \subseteq (F_1, \|\cdot\|_1)^*$$

are dense. If $(F, \|\cdot\|)^* \neq (F_1, \|\cdot\|_1)^*$, then the space $(F_1, \|\cdot\|)$ is not barrelled.

Using this theorem, we will prove the following result:

Theorem. Let E be a pre-Hilbert space with an inner product $(\cdot,\cdot)_0$. Suppose there exists an inner product $(\cdot,\cdot)_+$ on E, such that:

1. The norm $\|\cdot\|_+$ is stronger than the norm $\|\cdot\|_0$;
2. The norms $\|\cdot\|_+$ and $\|\cdot\|_0$ are not equivalent;
3. The space E with inner product $(\cdot,\cdot)_+$ is a Hilbert space;

then the space $(E, \|\cdot\|_0)$ is not barrelled.

1. *Mahowald M.* Barrelled spaces and closed graph theorem // Journal of the London Mathematical Society. – 1961. – **Vol. s1-36.** – Iss.1. – P. 52–56.
2. *Wilansky A.* On a characterization of barrelled space // Proceedings of the AMS. – 1976. – **Vol. 57.** – №2. – P. 375.
3. *Swetits J.* Characterization of a class of barrelled sequence spaces// Glasgow Math. J. – 1978. – №19. – P.27–31.
4. *Noll D., Stadler W.* Abstract sliding hump technique and characterization of barrelled spaces // Studia mathematica. – 1989. – **Vol. XCIV.** – №2. – P.103–120.
5. *Perez-Carreras P.* Some aspects of the theory of barreled spaces // Časopis pro pěstování matematiky. – **Vol.112.** – 1987. – №2. – P.123–161.
6. *Perez-Carreras P.* Barrelled locally convex spaces // Elsevier Science Publishers. – 1987. – 529 pp.
7. *Anikushyn A.V.* On relationship between a priory inequalities and weak a priory inequalities for linear operators // The journal of computational and applied mathematics. – 2010. – №4. – P. 3–8.

Mathematical and numerical modeling of phase transitions dynamics

Boyko S.B., Sandrakov G.V.
sandrako@mail.ru
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

Mathematical and numerical method of direct simulation for some heterogeneous fluid dynamics with take of phase transitions will be presented. It is supposed that the fluids are compressible and inviscid (non-viscous). Heterogeneities of the fluids are considered as small drops or particles of one fluid within other fluid. Total number of the drops can be large enough and the drops may have phase transitions. Thus, simulations of the main fluid (or gas) with small transited drops dynamics are discussed. These are dynamics of multiphase flows really. Therefore it is possible to use general multiphase flow models in the case (see, for example, [1]). But relevant multiphase equations are not complete as a rule. For example, there is a problem as to distribute energies between the phases in the model dynamics. Various physical experiments are necessary for solving of the problem in the concrete cases of fluid dynamics. The situation is more difficult whenever phase transitions are possible.

The presented method is a combination of Harlow's particle-in-cell method and Belotserkovskii's large particles method (see, for example, [2]). The method is based on a discretization of conservation laws for masses, momentums, and energies in integral forms. This is natural and numerical simulations are realized as direct computer experiments for the dynamics of main fluid together with transited drops without use multiphase flows approach. The method seems to be much more adequate to the mechanical and mathematical essence of the dynamics, because conservation laws are correct on the discrete level at least.

This method is designed to numerical modeling of following physical processes. Let us consider graphite drops distributing uniformly in some fluid. More exactly there is medium with graphite particles and the heterogeneous medium may be considered under high pressure as heterogeneous "fluid", which has components with corresponding state equations. Inducing conical shock waves in the medium it was possible to observe phase transitions of the graphite particles in computer experiments by the method. Results of the computer experiments were in agreement with results of physical experiments. The results were depending on density of particles and intensity of the shock waves inducing by boundary conditions, for example.

This method seems to be perspective for mathematical and numerical simulations of other absorption and diffusion processes with take of phase transitions in complex heterogeneous fluid and plasma dynamics (see, for example, [3] and [4]).

1. *Nigmatulin R. I.* The dynamics of multiphase media. Part 1. M.: Nauka (1987).
2. *Belotserkovskii O. M. and Davydov Yu. M.* The method of large particles in gas dynamics. Numerical experiments. M.: Nauka (1982).
3. *Boyko S. B., Mischenko V. V., and Sandrakov G. V.* The numerical investigation method for evaporated plasma // J. Computing and Applied Math. – 2007. – № 2 (95). – P. 3–12.
4. *Boyko S. B. and Sandrakov G. V.* Mathematical modeling of structured heterogeneous fluid dynamics // J. Computing and Applied Math. – 2011. – № 1 (104). – P. 109–120.

Numerical Modeling of Pyroelectricity Problems Using Finite Element Method

Chaban F.[1], Kovalyk T.[1], Shynkarenko H.[1,2], Stelmashchuk V.[1]

h.shynkarenko@po.opole.pl, vitstelm@gmail.com

[1](Ivan Franko Lviv National University, Ukraine, Lviv

[2]Opole University of Technology, Poland, Opole)

Both pyroelectrics and piezoelectrics belong to so–called smart materials, which are widely used in modern devices, such as different sensors, actuators, pressure gauges, burglar alarms, infrared detectors, night vision equipment. It is obvious, that an engineer needs a total understanding of how these materials behave under different circumstances, before their practical application. That knowledge can be obtained in two ways. The first one is an experimentation. The second (and actually much more cheaper) way is a computer (numerical) modeling. Thus, our purpose is to build numerical scheme, based on FEM, that will allow us to solve various pyroelectricity problems and eventually analyze the processes, which are observed in these materials.

In our research we use linear mathematical model of the pyroelectricity phenomenon, see [1]–[3]. Let $\Omega \subset R^n$ be the domain occupied by pyroelectric, $\Gamma = \partial\Omega$ is its boundary, $\nu = \{v_i\}_{i=1}^n$ is a vector of unit normal to Γ. We are analyzing the behavior of the pyroelectric during the time period $[0, T]$, $0 < T < +\infty$. Let $x \in \Omega$ be the spatial variable and $t \in [0, T]$ is a time moment. We choose as basic variables the elastic displacement vector $u = \{u_i(x, t)\}_{i=1}^n$, electric potential $p = p(x, t)$ and temperature change $\theta = \theta(x, t)$. Then the processes, which are observed in pyroelectric, can be described by the following system of partial differential equations

$$\begin{cases} \rho(u_i'' - f_i) - \sigma_{ij,j} = 0, \\ \sigma_{ij} = c_{ijkm}[\varepsilon_{km}(u) - \alpha_{km}\theta] + a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u') - e_{kij}E_k(p), \\ D'_{k,k} + J_{k,k} = 0, \\ D_k = \varepsilon_{km}E_m(p) + e_{kij}\varepsilon_{ij}(u) + \pi_k\theta, \ J_k = z_{km}E_m(p), \\ \rho c_\varepsilon\theta' + h_{i,i} + T_0(c_{ijkm}\alpha_{km}\varepsilon_{ij}(u') + \pi_k E_k(p')) = w, \\ h_i = -\lambda_{ij}\theta_{,j}, \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \ E_m(p) = -p_{,k}, \end{cases}$$

which is complemented by corresponding initial and boundary conditions.

By means of variational formulation of initial boundary value problem, Galerkin method with space finite element approximations and one–step reccurent scheme for time integration, the tool for computer modeling of pyroelectric behavior has been build. With help of the developed tool, numerical results, which confirm efficiency and reliability of proposed schemes, have been received. Considering forced steady–state vibrations of the pyroelectrics we complement numerical analysis by aposteriori error estimators for piecewise–linear and bilinear finite element approximations.

Analysis of numerical results give answers on questions regarding characteristics of displacement, stress, and abilities of pyroelectric for energy transformations.

1. *Shynkarenko H.* Projection–Mesh Approximations for Variational Problems of Pyroelectricity. / H.A. Shynkarenko // Differ. equations. — V.29, N.7, 1993. – p. 1252–1260. (In Russian)
2. *Tichy J.* Fundamentals of Piezoelectric Sensorics. Mechanical, Dielectric and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials / Jan Tichy, Jiri Erhart, Erwin Kittinger, Jana Privratska. – Berlin: Springer, 2010. – 216 p.
3. *Yang J.* The Mechanics of Piezoelectric Structures / J.Yang. — Singapore: World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2006. — 312 p.

Numerical modelling of thermoelastic and heat transfer processes with dynamic sources of surface heat inflow

Chyr I.A.[1], **Shynkarenko H.A.**[1,2]
ivan.chyr@plast.org.ua, h.shynkarenko@po.opole.pl
([1] Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine, L'viv
[2] Opole University of Technology, Poland, Opole)

One of the technological processes of surface hardening with highly concentrated heat sources is surface frictional hardening [2]. The source is created in the area of contact between applied to each other work surfaces of tool and work piece. During the contact this area is characterized by high increase of temperature and decrease during its absence [1].

We consider two mathematical models of heat transfer and linear thermoelasticity for the process of frictional hardening. They are supplemented with boundary conditions for heat fluxes and stresses in the area of dynamic contact. On the rest of the boundary conditions for heat exchange with environment and homogenous mechanical stresses are set.

Numerical schemes based on the corresponding variational formulations for one– and two–dimensional problems are constructed using finite element approach for space semi–discretization and one-step recurrent time-integration schemes [3]. Also sufficient stability and convergence conditions of these schemes were obtained.

Constructed schemes are illustrated with numerical results for model problems of frictional hardening.

1. *Гурей І.В.* Технологічне забезпечення якості та експлуатаційних властивостей виробів параметрами імпульсної фрикційної обробки: автореф. дис... д–ра техн. наук: 05.02.08; Одеський національний політехнічний ун–т. — О. — 2002. — 36 с.
2. *Резников А.Н.* Теплофизика процессов механической обработки материалов. — М.: Машиностроение. — 1981. — 281 с.
3. *Шинкаренко Г.А.* Проекційно–сіткові схеми розв'язування початково–крайових задач. — Київ: НМ–КВО. — 1991. — 88 с.

A posteriori error estimators and *hp*-adaptive FEM for 1D diffusion-convection-reaction boundary value problems

Drebotiy R.[1], **Shynkarenko H.**[1,2]
roman.drebotiy@gmail.com, h.shynkarenko@po.edu.pl
([1] Ivan Franko National University of L'viv, Ukraine, L'viv
[2] Opole University of Technology, Poland, Opole)

The main issue of this work is the construction of a posteriori error estimator (AEE) for finite element method (FEM) with polynomial basis functions of arbitrary degree. Constructed error estimator is used as a fundamental tool for implementation of ***hp***–adaptation algorithm.

We use approach [1] which is based on so-called *reference solution*. Its main idea is to replace a true error of FE approximation with a difference between numerical solution (or, in some extent, its equivalent) and reference solution, which is a solution of the same boundary value problem built on specially refined mesh. Such estimates, calculated separately on each finite element, allow us to compare different variants of local refinement of current mesh, which includes a spatial refinement and an increment of FE local approximation space dimension. More precisely, we choose a finite set of refinement patterns on each element and solve the discrete optimization problem on it in the form:

find mesh hp_{opt} *such that*

$$\frac{\left|u - \Pi_{hp}u\right|^2_{H^1(0,L)} - \left|u - \Pi_{hp_{opt}}u\right|^2_{H^1(0,L)}}{N_{hp_{opt}} - N_{hp}} \to \max,$$

where Π is a projection operator to finite element space, constructed on the corresponding mesh; N — corresponding number of degrees of freedom; u — reference solution.

We also focus on the important subtasks, including the automation of Gaussian quadrature formulas of arbitrary order development and the problem of optimal FE error computation.

The first problem arises in connection with the use of arbitrary order polynomials as basis functions. Solving this problem is important in terms of effective implementation of ***hp***–adaptation algorithm. We use an original approach, first proposed in [2]. It is based on recurrence relations for orthogonal polynomials which allow us to reduce original problem of finding nodes and weights of quadrature formula to eigenvalue problem for symmetric tridiagonal matrix.

The second problem is reduced to a specific choice of FE basis functions, namely integrals of Legendre polynomials. To effectively calculate the values of basis functions we use Legendre's equation and recurrence relations for the corresponding polynomials.

A computational experiments show that the constructed algorithm is more effective in comparison with ***h***-adaptive algorithms in problems where solutions have periodic nature.

1. *Demkowicz L.* Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two-Dimensional Elliptic and Maxwell Problems // Austin, Summer 2005;
2. *Gene H. Golub, John H. Welsch* Calculation of Gauss quadrature rules // Computer Science Department, Stanford University, Stanford, California 94305;
3. *William F. Mitchell, Marjorie A. McClain* Survey of hp-Adaptive Strategies for Elliptic Partial Differential Equations // Mathematical and Computational Sciences Division, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899-8910.

Modelling of the spectral problem on networks

Krylova A.S.
krylovaas@univ.kiev.ua
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

Modelling of the spectral problem on networks will be discussed. This modelling is reduced to some problem by homogenization. Thus, homogenization of the spectral problem on small-periodic networks with periodic boundary conditions will be also discussed.

Homogenization of equations on a small-periodic network was considered in [1].

This problem for a network has the following form

$$\begin{gathered} -\varepsilon^2\partial^2_{x'}u_\varepsilon(x') = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon(x'), \qquad x' \in G_\varepsilon \cap \Omega, \\ u_\varepsilon(x'_1, x'_2) = u_\varepsilon(x'_1+1, x'_2), \quad u_\varepsilon(x'_1, x'_2) = u_\varepsilon(x'_1, x'_2+l), \\ \partial_{x'}u_\varepsilon(x'_1, x'_2) = \partial_{x'}u_\varepsilon(x'_1+1, x'_2), \\ \partial_{x'}u_\varepsilon(x'_1, x'_2) = \partial_{x'}u_\varepsilon(x'_1, x'_2+l), \qquad x' \in G_\varepsilon \cap \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

where G_ε is a small-periodic network, ε is a small positive parameter, $\Omega = [0,1] \times [0,l]$ is a rectangle with the boundary $\partial\Omega$.

We construct asymptotic expansions according to homogenization principle from [2]. These expansions are approximate solutions of spectral problem on the small-periodic network. The main statement of the our research is the following theorem.

Theorem 1. For eigenvalues λ_ε and eigenfunctions u_ε of the problem (1) there exists a constant C independent from ε and s, such that

$$|\lambda^s_\varepsilon - \varepsilon^2\lambda^s| \le C\varepsilon^3(\lambda^s)^{3/2}, \qquad \|u^s_\varepsilon - v^s\|_{L^2(G_\varepsilon)} \le C\varepsilon(\lambda^s)^{1/2},$$

for $\lambda^s_2 \ll \varepsilon^{-2}$ and $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$, where λ^s_2 and $v^s_s(x)$ is the eigenvalue and the eigenfunction of corresponding homogenization problem.

Justification of asymptotic expansions for next eigenvalues and eigenfunctions will be implemented in following researches.

1. *Maz'ya V.G., Slutskii A.S.* Homogenization of a differential operator on a fine periodic curvilinear mesh // Math. Nachr. – 1986. – **133** – P. 107-133.
2. *Sandrakov G.V.* Averaging principles for equations with rapidly oscillating coefficients // Math. USSR-Sb. – 1991. – **68**, № 2. – P. 503-553.
3. *Krylova A.S., Sandrakov G.V.* Investigation of eigenvalues and eigenfunctions for arbitrary fragments of networks // Journal of Numerical and Applied Mathematics – 2010. – **101**, № 2. – P. 81-96. (Ukrainian)

Path of MS–functions on 2–disk

Lukova–Chuiko N.V., Pryshlyak K.O.
lukova@ukr.net
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

Consider a two–dimensional disk B with a given Riemannian metric on it. Let f be a smooth function without critical points on B.

By the singular points we mean the critical points of the restriction on the boundary (further critical points) and the point at which the field gradient for edges (tangent point). We will consider only the functions for which all singular points have different values and there is no path connecting two critical points. Such functions will be called MS–function.

Homotopy of MS–functions is a way in the space of common functions, ie continuous family of MS–functions. In this case each function has its own Riemannian metric.

Let the number of critical points is equal to k, and special — n. On the set of singular points, we introduce the numbering. The first point is a minimum point, while driving on the edge of the counter–clockwise number of points increases. Each singular point we associate the number of critical values of desc. So the minimum point is 1 and the maximum — number of n. Thus we get the substitution of n numbers.

In addition, for each singular point, from which comes the trajectory of the gradient field, we assign a specific point preceding the point at which the trajectory leaves the circle. Thus we obtain a set of ordered pairs of numbers.

The scheme is a set of certain functions consisting of the substitution of n numbers and ordered pairs of numbers.

By substitution we can determine the type of singular point. If the value of the function at neighboring points greater than the value of a singular point, then it is a local minimum, if more — the maximum. The other special point — the point of tangency.

Theorem. Two MS–functions f, g are homotopic if and only if its schemes are equal.

1. *Maksymenko S.I* Path–components of Morse mappings spaces of surfaces. // Comment. Math. Helv. — 2005. — **80**. — P. 655–690.

The approximation of common fixed point of finite number of Fejer mappings in Hilbert space

Malitsky Y.V.
y.malitsky@gmail.com
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

We introduce a new explicit algorithm for finding common fixed point of finite number of Fejer (quasi–nonexpansive) mappings in Hilbert space.

A mapping $T\colon H \to H$ is called Fejer (or quasi-nonexpansive) if for all $x \in H$ and for all $z \in F(T)$ holds inequality

$$||Tx - z|| \leqslant ||x - z||,$$

where $F(T)$ is a set of fixed points of T.

A mapping $F\colon H \to H$ is called demiclosed in $y \in H$ if from $x_n \rightharpoonup x$ and $Fx_n \to y$ follows $Fx = y$.

Let $T_1, T_2, \dots, T_N$ are a Fejer mappings such that mappings $\mathrm{Id} - T_i$ are demiclosed in 0 for all $i = \overline{1, N}$. We need to find some element from $C = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)$.

Theorem *Let x_1, y are an arbitrary elements in H. Fix $\lambda \in (0,1)$ and define a sequence (x_n) by*

$$x_{n+1} = \alpha_n y + (1 - \alpha_n)(\lambda x_n + (1-\lambda) T_{n \, mod \, N}\, x_n),$$

where (α_n) is a sequnece of real numbers from $(0,1)$ and which satisfies some control conditions. Then (x_n) converges strongly to the element of C nearest to y.

This talk is based on the joint research with V. Semenov.

Boundary value problem of Schrodinger equation

Pokutnyi A.A.

e-mail: lenasas@gmail.com

(Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Ukraine, Kiev)

The report is devoted to obtaining necessary and sufficient conditions for existence of solutions of boundary value problem

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -iH_0\varphi(t) + \varepsilon Z(\varphi(t), t, \varepsilon) + f(t), \;\; t \in [0; w],$$

$$Q\varphi(\cdot) = \alpha \in D,$$

in the Hilbert space $H_T = H \oplus H$, where $H_0 = H_0^*$ is self–adjoint on domain $D = D(T) \oplus D(T)$ of operator T which is strongly positive self–adjoint operator in the Hilbert space H; Q — is linear and bounded operator.

We generalize Lyapunov–Scmidt method for investigating of this problem.

Modeling and homogenization of some hydrodynamics problems

Sandrakov G.V.
sandrako@mail.ru
(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

Turbulent regimes are arisen under a small viscosity (or equivalently under a high Reynolds number) and are associated with rapidly oscillating fluid dynamics. Moreover, in mathematical and numerical modelling it is known that rapidly oscillation effects arise under computer simulations of solutions of Navier–Stokes equations with a vanishing viscosity. But reasons of the effects are not clear, since the effects may be turbulent regimes or the numerical simulations may be incorrect. Some theoretical results in the direction are presented here.

Homogenization of nonstationary linearized equations of hydrodynamics and Navier-Stokes equations with periodic rapidly oscillating initial data and the vanishing viscosity will be discussed. We give homogenized (limit) equations whose solutions determine approximations (leading terms of the asymptotics) of the solutions of the equations under consideration and estimate the accuracy of the approximations. These approximations and estimates shed light on the following interesting property of the solutions of the equations. When the viscosity is not too small, the approximations contain no rapidly oscillating terms, and the equations under consideration asymptotically smooth the rapid oscillations of the data; thus, the equations are asymptotically parabolic. If the viscosity is very small, the approximations can contain rapidly oscillating terms with zero means, and the equations are asymptotically hyperbolic. As an example, we remark a precise result.

Let ε be a small positive parameter and (u,p) be a weak solution of the initial-boundary value problem for nonstationary Navier-Stokes equations

$$\begin{gathered} u_t' - \nu\,\Delta\,u + u\cdot\nabla u + \nabla p = F_\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\times(0,T), \\ u\big|_{t=0} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\times(0,T), \end{gathered} \tag{1}$$

where $F_\varepsilon = F(t,x,x/\varepsilon)$, $F(t,x,y) \in L^2(0,T;L^2(\Omega;L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^{\mathrm{n}})$, $\Omega \subset \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ is a bounded domain with a smooth boundary, T is a positive number, and $2 \le n \le 4$. Here, a subscript per means 1-periodicity with respect to $y \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ and $Y=[0,1]^n$ is a periodicity cell. Thus, by definition $F(t,x,y)$ is 1-periodic in y, $\int_Y F(t,x,y)\,dy = 0$ for a. e. $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$, and the restriction of $F(t,x,y)$ to Y is an element of $L^2(0,T;L^2(\Omega;L^\infty(Y))^n)$.

Theorem. *Let* $\nabla_x F \in L^1(0,T;L^2(\Omega;L^\infty_{per}(Y)/\mathrm{R})^{\mathrm{n\times n}})$ *and* (u,p) *is a solution of problem (1). Then, there are positive* ε_0 *and* ν_0 *such that*

$$\|\,u\,\|^2_{L^\infty(\,0,T\,;\,L^2(\Omega)^n)} + \nu\,\|\,\nabla u\,\|^2_{L^2(\,0,T\,;\,L^2(\Omega)^{n\times n})} \le C\,(\,\varepsilon^2 + \varepsilon^2\,\nu^{-1}\,),$$

and

$$\|\,p\,\|_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)/\mathrm{R})} \le C\,(\,\varepsilon + \varepsilon^2\,\nu^{-1-n/4}\,),$$

where C *is independent of* ε *and* ν *whenever* $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ *and* $0<\nu\le\nu_0$.

Asymptotic and homogenization methods are used to prove of the theorem. Similar theorems for cases of nonstationary Stokes equations and Navier-Stokes equations were proved in [1],[2]. In particular, the results are applicable to some Kolmogorov flows.

1. *Sandrakov G. V.* The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics // Izvestiya: Math. – 2007. – **71**, № 1. – P. 97–148.
2. *Sandrakov G. V.* On some properties of solutions of Navier-Stokes equations with oscillating data // J. Math. Sciences – 2007. – **143** – P. 3377–3385.

Splitted recurrent identification by least squares method with minimal deviation norm from «attraction» points for nonlinear dynamic systems under non–classical assumptions

Slabospitsky A.S.

sl@univ.kiev.ua

(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

The recurrent estimation problem of parameter vector $\alpha = \mathrm{column}(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)})$ is investigated for nonlinear dynamic object with special structure when each individual equation of state has its own parameter vector $\alpha^{(j)}$:

$$x_j(k+1) = f_j^T(x(k), u(k), k)\alpha^{(j)} + g_j(x(k), u(k), k) + \xi_j(k),\ j = \overline{1, n},\ k \in \mathbb{N},$$

where $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k))^T$, $u(k)$, $\xi(k) = (\xi_1(k), \xi_2(k), \ldots, \xi_n(k))^T$ are state, control and disturbance vectors respectively, vector functions $f_j(x(k), u(k), k)$ and functions $g_j(x(k), u(k), k)$ are given.

The least squares estimation of unknown parameter vector α for above–mentioned system is considered under non–classical assumptions when this estimate may be not unique and additionally «attraction» point $\alpha_*(N)$ for parameter vector α is known at any moment N, $N = 0, 1, 2, \ldots$

The least squares estimate $\hat{\alpha}(N)$ with minimal deviation norm from «attraction» point $\alpha_*(N)$ at any moment N is proposed as required unique estimate in this problem statement, viz.:

$$\hat{\alpha}(N) = \tilde{F}_N^+ \tilde{x}_N + \left(E - \tilde{F}_N^+ \tilde{F}_N\right)\alpha_*(N),\ N \in \mathbb{N},$$

where $(^+)$ — symbol of Moore–Penrose pseudoinverse operator,

$$\tilde{F}_N = \begin{pmatrix} F(x(1), u(1), 1) \\ F(x(2), u(2), 2) \\ \ldots \\ F(x(N), u(N), N) \end{pmatrix},\ \ \tilde{x}_N = \begin{pmatrix} x(2) - g(x(1), u(1), 1) \\ x(3) - g(x(2), u(2), 2) \\ \ldots \\ x(N+1) - g(x(N), u(N), N) \end{pmatrix},$$

$$F(x(k), u(k), k) = \mathrm{diag}(f_1^T(x(k), u(k), k), f_2^T(x(k), u(k), k), \ldots, f_n^T(x(k), u(k), k)),$$

$$g(x(k), u(k), k) = \mathrm{column}(g_1(x(k), u(k), k), g_2(x(k), u(k), k), \ldots, g_n(x(k), u(k), k)).$$

Two representation forms of more effective splitted recurrent algorithm are obtained for estimate $\hat{\alpha}(N)$ by least squares method with minimal deviation norm from «attraction» point $\alpha_*(N)$ at any moment N. The splitted recurrent procedure for corresponding residual sum of squares is suggested too.

Applications of obtained results to the some parameter identification problems for nonlinear discrete dynamic systems with uncertainties under above–mentioned non–classical assumptions are discussed.

Uniform piecewise approximations in the nonlinear oscillation theory

Vakal L.P., Vakal Y.E.
lara.vakal@gmail.com
(V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, Kyiv)

We consider free undamped oscillations of a system with one degree of freedom under nonlinear restoring forces. These oscillations are described by the nonlinear differential equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x\right) = 0, \tag{1}$$

where $x = x(t)$ — coordinate, t — time, $f(x)$ — a generalized restoring force, which was taken with the opposite sign and which is a nonlinear function of the coordinate x.

The investigation of free oscillations is reduced to integration of the nonlinear differential equation (1). General methods for the integration of these equations don't exist, so approximative methods have been developed: the step-by-step integration method, the small parameter method, the Van der Pol method, the Krylov-Bogolyubov method etc [1].

A graphic presentation of the function $f(x)$ is called a characteristic line.

In the case, when the characteristic line of the restoring force $f(x)$ is a polygonal line (i.e. consists of straight linear segments), we can determine a precise solution of the equation (1), using the step–by–step integration method. In this method we solve sequentially linear problems on the separate segments and "glue together" the obtained solutions. Constants of integration are determined from initial conditions, the conditions of the transition from step to step and periodical conditions [2].

We can also use the step–by–step integration method in the case when the characteristic line is a curve. For this purpose we should change the curve with a polygonal line, which consists of a certain number of straight linear segments, i.e. we should approximate the function $f(x)$ on finite x–interval with necessary accuracy by a piecewise linear function. For the approximation we propose to use the best uniform piecewise polynomial approximations with optimal knots of interval division into separate subintervals. It permits to minimize the piecewise approximation error and consequently provide the best accuracy of the approximate solution of the nonlinear differential equation (1).

For obtaining such approximations, in practice, we can use the simple and effective algorithm of uniform piecewise polynomial approximation described in the article [3].

1. *Bat M.I., Dzhanelidze G.Yu., Kelzon A.S.* Theoretical mechanics in examples and problems. V. 3. — M.: Nauka, 1973. — 488 p.
2. *Panovko Ya.G.* Introduction to the mechanical oscillation theory. — M.: Nauka, 1989. — 252 p.
3. *Vakal L.P.* Uniform piecewise polynomial approximation // Computer tools, networks and systems. — 2006. — № 5. — P. 53–59.

Використання нечітких нейронних мереж для прогнозування економічних даних

Аджубей Л.Т.
adzhubey@stab.univ.kiev.ua
(Київський національний университет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Традиційно задача прогнозування даних, отриманих в результаті спостережень, формулюється наступним чином [1]: за відомим визначеним набором вхідних даних, що описують характеристики динамічних процесів і вважаються зразковими, необхідно оцінити можливі значення показників у деякій перспективі. Одним з підходів, що використовуються для вирішення задач прогнозування, є нейронні мережі [2]. Нейронна мережа із довільного неідеального сигналу, поданого на її вхід, має виділити відповідний зразок (за його наявності) або дати відповідь про його відсутність. У загальному випадку, сигнал описується вектором $X = \{x_i, i = 0, \dots, n-1\}$, де n — кількість нейронів у мережі і розмірність вхідних та вихідних векторів. Якщо мережа розпізнає зразок на підставі запропонованих їй даних, то її вихід містить вектор вихідних значень мережі Y, що співпадає з шуканим аразком. У протилежному випадку, вихідний вектор не співпадає із жодним з наявних зразків.

Задача суттєво ускладнюється у випадку представлення вхідних даних у вигляді вектора елементів деякої нечіткої множини, побудованої на основі сукупності спостережень в умовах невизначеності.

Пропонується використовувати нейронну мережу Хопфілда для пошуку вихідних значень мережі для різних рівнів належності нечітких елементів вхідного вектора та векторів–зразків. Запропонована процедура агрегації отриманих виходів у вигляді нечіткого вектора, аналіз значень якого дозволяє визначити тенденцію зміни даних у майбутньому.

Розглянуто задачу спостереження за умов неточності вхідних даних, що представлені у вигляді набору нечітких множин. Отримано умови сумісності початкових даних з розрахованим у мережі виходом.

Запропонований підхід апробовано на обработці економічних даних (вартість курсу акцій), отриманих в результаті спостережень за динамікою відповідних показників.

1. Наговицин А.Г. Валютный курс. Факторы. Динамика. Прогнозирование / А.Г.Наговицин, В.В.Иванов. — М.: Инфра–М, 1995. — 176 с.
2. Круглов В.В. Нейронные сети. Теория и практика / В.В. Круглов, В.В.Борисов. — М: Горячая линия–Телеком, 2002. — 382 с.

p–аналітичні функції з характеристикою $p = x^k y^l$

Александрович І.М., Сидоров М.В.
ms123@ukr.net
(Київський національний университет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Теорема 1. Для того, щоб p–аналітичну функцію $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ можна було подати у вигляді

$$\tilde{f}(z) = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \tag{1}$$

необхідно і достатньо, щоб існував ненульовий розв'язок рівняння

$$\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \left(\frac{1}{P} \frac{\hat{d}P}{dz} \right) - \bar{P}P = 0. \tag{2}$$

Тут $u(x,y)$ — гармонічна функція, ω_k, w_k $(k = 1,2)$ — довільні функції від z, $F(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ — аналітична функція від z, $P = -\frac{1}{2}\frac{\hat{d}\ln p}{dz}$, $\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Якщо характеристика має вигляд $p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$, то матиме місце

Теорема 2. Для того, щоб $p_1(x) \cdot p_2(y)$–аналітичну функцію можна було подати у вигляді лінійної комбінації (1), достатньо, щоб $p_1(x) = q_i(x)\,,\ p_2(y) = q_i(y)\,,(i = 1,2,3)$, де $q_1(\xi) = \gamma\, th^{\pm 2}(a\xi + b)$,$q_2(\xi) = \gamma\, th^{\pm 2}(a\xi + b)$, $q_3(\xi) = \gamma\,(a\xi + b)^{\pm 2}$ ($\gamma - const > 0$, a і b — сталі, $a > 0$).

Зокрема, представлення x^2y^2–аналітичної функції $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ через аналітичну функцію $F(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ матиме вигляд

$$\tilde{f}(z) = \left(\frac{1}{\Delta^+ y} + i\frac{x^3}{\Delta^+} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(-\frac{1}{\Delta^+ x} + i\frac{y^3}{\Delta^+} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ixy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \tag{3}$$

де $\Delta^+ = x^2 + y^2$.

Задача. Нехай G — верхня півплощина. Знайти функцію $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$ x^2y^2–аналітичну в області G, неперервну на границі G, за винятком, можливо точки $(0,0)$, яка задовольняє крайову умову

$$\tilde{v}(x,0) = x\beta(x)\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $x\beta(x)$ — відома неперервна обмежена функція від x і при $|x| \to \infty$ $\beta(x) = O\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$.

Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді (3). Задовольняючи крайову умову, одержимо

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = \beta(x)\,.$$

Відтворивши за $Re\,F(z)$ функцію $F(z)$ в області G за формулою Шварца, одержуємо розв'язок задачі у замкнутій формі.

Екстремальні властивості і обчислювальна складність нової міри близькості

Алєксєєнко В.В., Клюшин Д.А.
dokmed5@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ — вибірка, отримана простим випадковим вибором із генеральної сукупності G з абсолютно неперервною функцією розподілу F_G, а $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$ — відповідний варіаційний ряд.

Розглянемо наближення F_G на вибіркових значеннях згідно гіпотези Хілла:

$$F_G^{(1)}\left(x_{(i)}\right) = \frac{i}{n+1}.$$

Нехай $y_1, y_2, ..., y_m$ — вибірка, отримана простим випадковим вибором із генеральної сукупності H з абсолютно неперервною функцією розподілу F_H. Припустимо, що $F_G = F_H$. Тоді $z_1, z_2, ..., z_{m+n} = x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ...y_m$ є вибіркою, що отримана простим випадковим вибором із генеральної сукупності G, $z_{(1)} < z_{(2)} < ... < z_{(m+n)}$ — відповідний варіаційний ряд.

Розглянемо наближення F_G на вибіркових значеннях згідно гіпотези Хілла:

$$F_G^{(2)}\left(z_{(i)}\right) = \frac{i}{n+m+1}.$$

Оскільки $\left\{x_i, i = \overline{1,n}\right\} \subset \left\{z_i, i = \overline{1,m+n}\right\}$, то таким чином визначено і $F_G^{(2)}\left(x_{(i)}\right)$.

Позначимо

$$I_0 = \left(-\infty; x_{(1)}\right), I_n = \left(x_{(n)}, \infty\right), I_j = \left(x_{(j)}, x_{(j+1)}\right), j = \overline{1, n-1}.$$

Нехай ξ_1 — неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F_G^{(1)}$, ξ_2 — неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F_G^{(2)}$.

Позначимо

$$p_j^{(1)} = P\left(\xi_1 \in I_j\right), p_j^{(2)} = P\left(\xi_2 \in I_j\right).$$

Побудуємо статистику, що характеризуватиме близькість цих випадкових величин:

$$d = \sum_{i=0}^{n} \left|p_i^{(1)} - p_i^{(2)}\right|.$$

Позначимо l_i — кількість $y_j : y_j \in I_j$.

Теорема 1. Якщо статистика d досягає мінімального значення, то виконується умова $\left|l_i - \frac{m}{n+1}\right| < 1 \, \forall i = \overline{0,n}$.

Теорема 2.

$$\min(d) = \frac{2(n+1)\left\{\frac{m}{n+1}\right\}\left(1 - \left\{\frac{m}{n+1}\right\}\right)}{n+m+1}.$$

Теорема 3. Статистика d досягає максимального значення, якщо $\exists \, a : l_a = m$ та максимальне значення

$$\max(d) = \frac{2m}{m+n+1}.$$

Для обчислення статистики включення достатньо знайти елементи цього вектора, побудувавши варіаційні ряди $x_{(1)} < x_{(2)} < ... < x_{(n)}$ і $z_{(1)} < z_{(2)} < ... < z_{(m+n)}$, тобто відсортувати масиви довжиною n і $m+n$ Результуюча складність алгоритму — $(m+n)\log(m+n)$.

Регуляризованный проксимальный метод в геодезических метрических пространствах неположительной кривизны

Апостол Р.Я., Семенов В.В.
semenov.volodya@gmail.com
(Київський національний университет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Рассматривается задача

$$f(x) \to \min, \;\; x \in X,$$

где (X, d) — полное геодезическое метрическое пространство неположительной кривизны (в терминологии М. Громова — CAT(0) пространство [1]), $f : X \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу выпуклая функция. Предполагается, что $\operatorname{argmin}_X f \neq \emptyset$.

Исследована сходимость следующего проксимального процесса с регуляризацией. Выбираем $a \in X$, $x_1 \in X$ и генерируем последовательность элементов (x_n) по правилу

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{argmin}_{y \in X} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda_n} d(y, x_n)^2 \right\}, \\ x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1 - \alpha_n) y_n, \end{cases}$$

где $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lambda_n > 0$, а запись $\alpha p \oplus (1-\alpha) q$ обозначает единственную точку r, лежащую на геодезическом сегменте соединяющем точки p и q, со свойством

$$d(r, p) = (1 - \alpha) d(p, q), \;\; d(r, q) = \alpha d(p, q)$$

Результаты [2, 3] перенесены на случай геодезических метрических пространств неположительной кривизны.

1. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 512 с.
2. *Ф.П. Васильев, О. Обрадович* Регуляризованный проксимальный метод для выпуклых задач минимизации // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко. Тр. МИАН, 1995, 211. — С. 131–139.
3. *Xu H.–K.* A Regularization Method for the Proximal Point Algorithm // Journal of global optimization. — 2006 (Volume 36). — Number 1. — P. 115–125.

Трикроковий ітераційний метод з пам'яттю розв'язування задач мінімізації

Бартіш В.Я.
bartishv@gmail.com
(Львівский національний університет ім. І. Франка)

Розглянемо задачу
$$f(x) \to \min_{R^n}, \tag{1}$$
де $f : R^n \to R$, $f(x) \in C^2(R^n)$.

Для розв'язування задачі (1) існує низка методів. Нами розглянута модифікація методу з [1], а саме
$$u_k = x_k - \alpha_k (f''(x_k))^{-1} f'(x_k),$$
$$v_k = x_k - \beta_k H_k f'(x_k),$$
$$x_{k+1} = \arg\min_{\gamma} f(u_k + \gamma(v_k - u_k)), k = 0, 1, \ldots,$$
де
$$H_k = \begin{cases} I, & \text{при } k = 0, \\ (f''(x_{k-1}))^{-1}, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Параметри $\alpha_k \in (0, 1]$, $\beta_k \in (0, 1]$, які повинні задовольняти умові монотонності, вибираємо аналогічно як у класичному методі Ньютона (β_0 — як у градієнтному методі). Для визначення γ_k використовуємо алгоритм ДСК, при цьому
$$\gamma_k^0 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } f(u_k) < f(v_k), \\ 1, & \text{якщо } f(v_k) < f(u_k), \\ 1/2, & \text{якщо } f(u_k) = f(v_k). \end{cases}$$

Переваги запропонованого алгоритму відносно алгоритму з [1] в тому, що відсутні проблеми із вибором параметра β_k. У випадку "доброго"початкового наближення $\alpha_k = \beta_k = 1$, в інших випадках, як показала практика, $\beta_k \approx \alpha_k$.

Досліджена збіжність і показано ефективність, в сенсі кількості обчислень, запропонованого методу у порівнянні з методом Ньютона.

1. *М. Бартіш, О. Ковальчук, Н. Огородник* Трикрокові методи розв'язування задач безумовної мінімізації // Вісник Львів. університету. Серія прикл. матем. та інформ. – 2007. – **13**. – С. 3-10.

Про один трикроковий різницевий метод мінімізації функцій

Бартіш М.Я., Огородник Н.П.
ogorodnyk.nataly@gmail.com
(Львівский національний університет ім. І. Франка)

Розглянемо задачу безумовної мінімізації вигляду

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

де $x \in R^n$ і $f(x) \in C^2(R^n)$.

Для розв'язування задачі (1) можна використати наступний алгоритм

$$u_k = x_k - (f''(x_k))^{-1} f'(x_k), \tag{2}$$

$$x_{k+1} = x_k - (f''(\frac{x_k + u_k}{2}))^{-1} f'(x_k), \tag{3}$$

який має третій порядок збіжності.

Якщо матрицю других похідних складно або неможливо обчислити, у алгоритмі (2)–(3) використовують різницевий аналог цієї матриці, наприклад, замість методу Ньютона (2) використовують метод Стеффенсена. У цьому випадку отримаємо алгоритм вигляду

$$u_k = x_k - (f'(x_k, x_k - \lambda f'(x_k)))^{-1} f'(x_k), \tag{4}$$

$$x_{k+1} = x_k - (f'(x_k, u_k))^{-1} f'(x_k), \tag{5}$$

де $\lambda \in R$, $f'(x, y)$ — поділені різниці. При виконанні певних умов алгоритм (4)–(5) має третій порядок збіжності.

Використовуючи ідею побудови трикрокових ітераційних методів розв'язування задач мінімізації (1) з [1], на основі алгоритму (4)–(5) нами запропоновано трикроковий різницевий метод

$$u_k = x_k - (f'(x_k, x_k - \lambda f'(x_k)))^{-1} f'(x_k), \tag{6}$$

$$v_k = x_k - (f'(x_k, u_k)) f'(x_k), \tag{7}$$

$$x_{k+1} = \arg\min_{\gamma} f(u_k - \gamma(u_k - v_k)), k = 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

При виконанні відповідних умов, має місце оцінка

$$f(x_k) - f(x_0) \leq (\prod_{i=1}^{k} \mu_i^{3^{k-i}}) q^{3^k - 1} (f(x_0) - f(x_*)),$$

де $\mu_i \in (0, 1]$, $q \in (0, 1)$.

У випадку "поганого"початкового наближення у формули (6) і (7) вводять крокові множники, які повинні забезпечувати монотонне спадання функції.

Запропонований метод (6)–(8) було апробовано на низці тестових функціях. На підставі числових розрахунків та порівнянні одержаних результатів можна зробити висновок, що він працює ефективніше, в сенсі кількості обчислень, ніж метод (4)–(5), на базі якого він побудований.

1. *М. Бартіш, О. Ковальчук, Н. Огородник* Трикрокові методи розв'язування задач безумовної мінімізації // Вісник Львів. університету. Серія прикл. матем. та інформ. — 2007. — **13**. — С. 3-10.

Дослідження математичної моделі росту ракової пухлини з врахуванням дихотомії міграції і проліферації

Безносов О.В.
dohter@gmail.com
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)

У теперішній час в моделюванні росту ракових пухлин використовуються багатовимірні рівняння в частинних похідних, що включають не тільки кінетичні члени народження/загибелі, але і різні члени перенесення, а також вплив хімічної і механічної гетерогенності тканини, в якій відбувається зростання пухлини.

Обрана для дослідження модель враховує так звану концепцію росту або руху клітин пухлини. Для опису цього явища припускалося, що коли концентрація критичного метаболіту (кисень або глюкоза) падає нижче критичного значення S_1, пухлинна клітина починає рухатися в тканині в пошуках областей з досить високим рівнем поживних речовин S_2, необхідних для проліферації, якщо ж їй не вдається це зробити за певний час, то вона гине. Поживні речовини споживаються як мігруючими, так і проліферуючими клітинами, проте очевидно, що останнім необхідно значно більше матеріалу для поділу.

В моделі змінювались початково–крайові умови і після кожної зміни умов будувався графік, який ілюстрував чисельний роз'язок системи рівнянь в частинних похідних.

Чисельно–аналітичний метод без насичення точності для наближення розв'язків жорстких задач

Біленко В.І., Дерієнко А.І.
andrey.deriyenko@gmail.com
(Кременчуцький національний університет, Україна, Кременчук)

Робота присвячена вирішенню актуальної науково–технічної задачі розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь вигляду:

$$A(x,y)y' = f(x,y), y(0) = y_0, x \in [0,H], \tag{1}$$

де $y(x)$ — вектор невідомих функцій, де компоненти матриці A та вектора f є алгебраїчними многочленами двох змінних. Запропоновано обчислювальний алгоритм є узагальненням апроксимаційного методу В.К.Дзядика [1]. Важливими властивостями та перевагами над іншими методами та алгоритмами є його оптимальність в сенсі найкращих наближень та ненасиченість. Алгоритм ілюструється для скалярного випадку, тобто на прикладі одного рівняння вигляду (1).

$$A(x,y) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s} a_{kl}x^k y^l(x), f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{M} b_{ij}x^i y^j(x) \tag{2}$$

де a_{kl} і b_{ij} — постійні коефіцієнти, $r, s, m, M \in N$.

Задача (1)–(2) зводиться до еквівалентного інтегро–функціонального рівняння типу Вольтерра [2]: $g(x, y(x)) = g_0(0, y_0) + \int_0^x F(s, y(s))ds$,

$$g(x,y(x)) = \sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s} \frac{a_{kl}}{l+1}x^k y^{l+1}(x), \tag{3}$$

$$f(s,y(s)) = f(x,y) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{l=0}^{s} k\frac{a_{kl}}{l+1}x^{k-1}y^{l+1}(x). \tag{4}$$

Отримано оцінки похибок алгоритму в термінах теорії наближення функцій та проведено обчислювальні експерименти, які ілюструють високу ефективність запропонованого алгоритму. Для програмної реалізації запропонованого алгоритму використовувалася система комп'ютерної алгебри Mathcad. Програма дозволяє автоматично обирати крок розбиття в залежності від обраної точності обчислень.

1. *Дзядык В.К.* Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 1988. — 387 с.
2. *Биленко В.И.* Аппроксимационный метод для решения интегральных уравнений типа Вольтерра–Урысона с полиномиальными нелинейностями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1989. — Т.29, №10. — С.1577–1581.

Метод узагальненого розділення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Білецький В. М., Ярошко С. А.
vbiletskyy@gmail.com
s_jaroshko@franko.lviv.ua
(Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна, Львів)

Згідно з методом узагальненого розділення змінних [1, 2] розв'язок багатовимірного інтегрального рівняння шукають у вигляді суми доданків з розділеними змінними, які обчислюють послідовно, мінімізуючи відповідні функціонали. Такий підхід дозволяє зменшити розмірність вихідної задачі, звівши її до послідовності одновимірних задач того ж роду, а також досягнути компактності представлення розв'язку.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду у просторі $\mathbb{R}^n$

$$Au \equiv \int_D K(x,y)u(y)dy - \lambda u(x) = f(x). \tag{1}$$

Тут $u, f \in \mathcal{L}_2(D)$, $K \in \mathcal{L}_2(D \times D)$, λ не належить спектру ядра K, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, де $D = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ — обмежена прямокутна область в $\mathbb{R}^n$.

За k-те наближення розв'язку рівняння (1) приймають

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) + v_k(x), \quad v_k(x) = \prod_{l=1}^{n} v_j^{(l)}(x_l), \quad v_j^{(l)} \in \mathcal{L}_2([a_l, b_l]).$$

Позначимо $f_k = f - Au_k$. k-ий доданок наближеного розв'язку визначають згідно умови мінімуму квадрата нев'язки

$$J_k(v) = J_k\left(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\right) = \|f_{k-1} - Av\|^2 \to \min.$$

У [3] доведено монотонну збіжність до нуля послідовності норм величин f_k, що свідчить про збіжність послідовності наближених розв'язків u_k до точного розв'язку рівняння (1). Проте така збіжність є, взагалі кажучи, немонотонною. Розглянута у [1, 4], модифікація методу узагальненого розділення змінних будує послідовність наближених розв'язків таким чином, щоб мінімізувати на кожному кроці норму відхилення точного та наближеного розв'язків. За наближений розв'язок у такому випадку приймають часткову суму ряду $\sum_{j=1}^{\infty} A^* v_j$, де k-ий доданок визначають згідно умови

$$\widehat{J}_k(v) = \widehat{J}_k\left(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}\right) = \left\|A^{-1} f_{k-1} - v\right\|^2 \to \min.$$

Високу обчислювальну ефективність методу продемонстровано на конкретних прикладах у [2–4].

1. *Войтович М. М., Ярошко С. А.* Варіаційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 1997. – **40**, №4. – С. 122–126.
2. *Білецький В. М.* Ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання двовимірних інтегральних рівнянь // Вісник Львівського національного університету імені Івана Франка. Серія прикладна математика та інформатика – 2009. – **15**. – С. 33–42.
3. *Biletskyy V.* An iterative method of generalized separation of variables for solving linear operator equations // Journal of Numerical and Applied Mathematics – 2010. – **1(100)**. – P. 2–9.
4. *Білецький В. М.* Модифікація методу узагальненого відокремлення змінних для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля – 2010. – **53**, №4. – С. 44–50.

Использование алгоритма регуляризации при реализации метода граничных элементов для моделирования многосвязных областей

Бобылев Д.Е., Масько Л.В.

bob_d@i.ua

(Криворожский национальный университет, Украина, г. Кривой Рог)

В статье даётся обоснование причин плохой обусловленности системы линейных уравнений метода граничных элементов, а также применяемого подхода к решению таких систем, основанного на методе регуляризации А.Н. Тихонова. Даётся описание алгоритма регуляризации, основанного на подборе параметра регуляризации.

При решении однородных задач на внешней границе обычно задаются только вектор усилия и уравнение системы не используется. Однако при рассмотрении кусочно-однородных тел на внутренних контактах приходится иметь дело с данным уравнением, которое является интегральным уравнением первого рода. Это обстоятельство, а также достаточно высокий порядок системыи отсутствие диагонального преобладания приводит к плохой обусловленности. Уравнения, полученные для близко расположенных друг к другу граничных элементов слабо различимы. Данный факт приводит к невозможности получения корректного численного решения при непосредственном применении известных методов решения линейных уравнений. Итерационные методы демонстрировали расхождение невязки уже с первых итераций. Прямые давали решение, не соответствующее физической природе рассматриваемых задач.

Данные результаты послужили причиной разработки методики регуляризации численного решения СЛАУ, основанной на методе А.Н. Тихонова. При численном решении система интегральных уравнений метода граничных элементов с использованием квадратурной формулы прямоугольников приводится к системе линейных алгебраических уравнений.

Проведено тестирование алгоритма и программы расчёта двумерных задач определения напряжённого состояния кусочно-однородных изотропных линейно-упругих тел на основе непрямого метода граничного элемента. Показана корректность математических алгоритмов и их программной реализации. Построен алгоритм регуляризации решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, появляющихся после дискретизации системы интегральных уравнений, описывающих задачу расчёта напряжённого состояния кусочно-однородных тел.

Численное решение линейных задач динамики подкрепленных конических оболочек на неравномерных сетках

Богданов С.Ю.
bog2004@bigmir.net
(Институт механики НАН Украины, Киев)

В докладе рассматривается вопрос численного решения динамических задач для конических оболочек. Изучается поведение усечённых конических оболочек. Большой интерес представляет собой изучение динамического поведения усечённых подкреплённых конических оболочек. Оболочки и рёбра описываются по теории типа Тимошенко. При этом одним из важнейших факторов является правильный выбор расчётной сетки. Очевидно, что в местах плавного изменения решения можно использовать достаточно грубую сетку. При этом повышение точности решения в окрестности подкрепляющего ребра можно достичь за счёт локального сгущения разностной сетки. Следовательно, при решении данного класса задач предпочтительнее использовать неравномерные по пространственной координате сетки. Сетка сгущается в местах установки рёбер, где наблюдается наиболее резкий рост градиентов решений исходной системы уравнений движения, что связано с разрывностью производных от функций перемещения срединной поверхности оболочки. Изложен подход к построению неравномерной сетки для решения данного класса задач. Построение неравномерной сетки, аппроксимация первых и вторых производных проводятся по методике, изложенной в [1].

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Матус П.П.* Разностные схемы с операторными множителями. // Минск. — 1998. —616 С.

Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області при моделюванні квазіідеальних полів для криволінійних областей

Бомба А.Я., Кузьменко А.П., Гладка О.М.

abomba@ukr.net, anatoliypk@gmail.com, viklom@ukr.net

(Рівненський державний гуманітарний університет, Міжнародний економіко–гуманітарний університет ім. С. Дем'янчука, Національний університет водного господарства та природокористування, Україна, Рівне)

На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та числово–аналітичних методів сумарних зображень розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних крайових задач для одно- та многозв'язних криволінійних областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями. Поєднання цих методів дає можливість у комплексі на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а і всіх граничних вузлів і, отже, суттєво пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

Методи сумарних зображень [1], що детально розроблені в роботах Г. М. Положія, І. І. Ляшка, А. А. Глущенка і їх учнів, мають низку переваг. При розв'язанні задач з використанням цих методів більшість невідомих, які входять у різницеву задачу, в рахунку участі не беруть, що забезпечує зменшення обсягу обчислювальної роботи. Зокрема, явний вигляд формул сумарних зображень дає змогу робити вибірковий рахунок, а також уникати накопичення обчислювальних похибок. Ці методи є стійкими і добре адаптованими до комп'ютерної реалізації.

Обмеження застосування методів сумарних зображень для криволінійних областей, границі яких складаються із ліній течії та еквіпотенціалей, у наших роботах «зняте» шляхом переходу від прямих задач на знаходження комплексного потенціалу поля до обернених (на знаходження характеристичної функції течії), оскільки в даному випадку відповідні області комплексних потенціалів є об'єднанням прямокутників з горизонтальними та вертикальними ділянками меж.

Розроблений підхід застосований нами також до розв'язання нелінійних задач, що моделюють стаціонарний процесу руху речовини у шаруватих середовищах, провідність яких задається кусково–сталими функціями, залежними від шуканого квазіпотенціалу. У цьому випадку відповідна обчислювальна технологія базується на поєднанні числових методів квазіконформних («кусково-конформних») відображень і сумарних зображень з декомпозицією області за альтернуючим методом Шварца. Декомпозиція області на підобласті з «накладками» дає можливість ефективно «склеювати» розв'язок у випадку значної кількості ліній розриву параметра задачі (коефіцієнта провідності), а також — розпаралелювати обчислювальний процес. Використання методу Шварца для декомпозиції області дозволяє також вирішити проблему значних співвідношень у розмірах області (оскільки алгоритм розв'язання вихідної задачі зводиться до розв'язання послідовності підзадач для більш «зручних» областей), що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових та сланцевих пластах.

1. *И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко.* Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наукова думка. – 1973. – 264 с.

Моделювання процесу сорбційного очищення рідин від багатокомпонентного забруднення

Бомба А.Я., Сафоник А.П.
abomba@ukr.net, safonik@ukr.net
(Рівненський державний гуманітарний університет,
Національний університет водного господарства та природокористування)

Розглянуто та вирішено питання врахування зворотного впливу визначальних факторів (концентрації забруднення рідини та осаду) на характеристики середовища (коефіцієнти пористості, фільтрації, дифузії) при моделюванні процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень сорбційними фільтрами. Відповідний процес фільтрування описаний наступною модельною задачею:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma(P)C_i)}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}C_i + \beta_i C_i + \varepsilon \sum\limits_{l,g=1,\, l\neq g}^{m} k_{l,g}C_l C_g = D_i\Delta C_i + \varepsilon\alpha_i P,\ i=\overline{1,m}, \\ \frac{\partial P}{\partial t} = \sum\limits_{u=1}^{m}\beta_u C_u - \varepsilon\sum\limits_{q=1}^{m}\alpha_q P, \end{cases}$$

$$C_i\left|_{ABB_*A_*} = C_{i,*}\left(M,t\right),\ \ \frac{\partial C_i}{\partial\vec{n}}\right|_{CDD_*C_*} = 0,\ \ \frac{\partial C_i}{\partial\vec{n}}\left|_{ADD_*A_*\cup BCC_*B_*\cup ABCD\cup A_*B_*C_*D_*} = 0,\right.$$

$$C_i\left(x,y,z,0\right) = C^0_{i,0}\left(x,y,z\right),\ \ P\left(x,y,z,0\right) = P^0_0\left(x,y,z\right),$$

$$\vec{v} = \ \kappa\left(P\right)\nabla\varphi,\ \ \nabla\cdot\ \vec{v} = 0,$$

$$\varphi\left|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \ \varphi\right|_{CDD_{**}} = \varphi^*,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\left|_{ADD_*A_*\cup BCC_*B_*\cup ABCD\cup A_*B_*C_*D_*} = 0,\right.$$

де $P(x,y,z,t)$ — концентрація осаду у внутрішній точці (x,y,z) області завантаження в момент часу t; β_i, α_i — коефіцієнти, що характеризують масові об'єми осадження домішок та відірваних від гранул завантаження частинок за одиницю часу, $\sigma\left(P\right)$ — пористість середовища ($\sigma\left(P\right) = \sigma_0 - \varepsilon\sigma_* P\left(x,y,z,t\right)$); $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ — оператор Лапласа; $D_i = d_{0i}\varepsilon$ — коефіцієнт дифузії домішки у рідині; σ_*, d_{0i}, ε — тверді параметри, ε — малий параметр; $C^*_i(M,t)$, $C^0_{i,0}\left(x,y,z\right)$ — достатньо гладкі функції, узгоджені між собою на ребрах області G; M — довільна точка відповідної поверхні; φ — фільтраційний потенціал ($0<\varphi_*\le\varphi\le\varphi^*<\infty$); $\vec{v}\left(v_x,v_y,v_z\right)$ — вектор швидкості фільтрації ($|\vec{v}|>v_*>>\varepsilon$); $\kappa = K\left(P\right)$ — коефіцієнт фільтрації відповідного пористого середовища ($K\left(P\right)$ — задана, достатнього гладка функція); $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до відповідної поверхні.

Розв'язок задачі знайдено у вигляді асимптотичних рядів [1, 2].

1. *Бомба А. Я.* Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно–збурені задачі типу "конвекція–дифузія"/ Бомба А. Я., Барановський С. В., Присяжнюк І. М. — Рівне : НУВГП, 2008. — 252 с.
2. *Бомба А. Я.* Бомба А.Я. Нелинейные задачи типа фильтрация–конвекция–диффузия–массообмен при условиях неполных данных / Бомба А. Я., Гаврилюк В.И., Сафоник А.П., Фурсачик Е.А. // Монография. – Ривнэ : НУВГП, 2011. — 276 с.

Методи комплексного аналізу математичного моделювання нелінійних процесів двофазної фільтрації з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

Бомба А.Я, Сінчук А.М., Ярощак С.В.
abomba@ukr.net, sinchukk@mail.ru, yaroschak@mail.ru
(Рівненський державний гуманітарний університет, Україна, м. Рівне)

На сьогоднішній день накопичений великий досвід застосування інтенсивних систем розробки нафтових родовищ, серед яких, перш за все, варто виділити площадне заводнення, при якому експлуатаційні та нагнітальні свердловини розташовуються певним чином в межах розроблених площ. При цьому, в залежності від розміщення свердловин та значення керуючих потенціалів на них, виникають різні ситуаційні стани формування течії, що, у свою чергу, вимагає побудови так званих спеціальних алгоритмів вибору оптимального випадку розробки продуктивних площ.

У роботі, з використанням моделі Баклея–Леверетта, проведено дослідження багатофазної фільтрації в горизонтальному пласті за умов неповного витіснення та запропоновано комплексний підхід до розв'язання відповідних крайових задач при існуванні тріщин гідравлічного розриву, що оснований на ідеях методів квазіконформних відображень та поетапних фіксацій характеристик середовища і процесу. Для врахування такого типу витіснення використано узагальнений закон Дарсі та рівняння нерозривності течії (записані для кожної з рідин) відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ — тиск у точці (x, y) в момент часу t, $\tilde{p}$ — деяке характерне його значення) та насиченості $s = s(x, y, t)$ витісняючої фази, у вигляді

$$\vec{v}_1 = \frac{k\tilde{k}_1}{\mu_1} grad\varphi,\ \vec{v}_2 = \frac{k\tilde{k}_2}{\mu_2} grad\varphi,\ \sigma\frac{\partial(1-s)}{\partial t} + div\vec{v}_1 = 0,\ \sigma\frac{\partial s}{\partial t} + div\vec{v}_2 = 0,$$

де $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, μ_1, μ_2 — вектори швидкості та коефіцієнти в'язкості відповідних фаз, $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ — відносні фазові проникності, σ, k — коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту, або з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії:

$$div\vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s) \cdot grad\varphi, \quad \sigma\frac{\partial s}{\partial t} + \upsilon_x\frac{\partial f}{\partial x} + \upsilon_y\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad s(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{s}(x, y)$$

($\bar{k}(s) = \frac{k\tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\tilde{k}_2(s)}{\mu_2}$, $f(s) = \frac{\mu_1\tilde{k}_2(s)}{\mu_2\tilde{k}_1(s)+\mu_1\tilde{k}_2(s)}$, $\tilde{s}(x, y)$ — задана функція розподілу насиченості в початковий момент часу).

Відзначимо, що розроблений підхід дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової систем при спеціальних умовах вплину на неї, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин, зокрема, встановити положення точок «призупинки», в околі яких виникають зони малих швидкостей.

Метод усреднения в системах дискретнх уравнений с быстрыми и медленными переменными и в задачах оптимального управления

Бойцова И.А.
boitsova.irina@mail.ru
(Одесский государственный экологический университет, Украина,Одесса)

Рассматривается система дискретных уравнений вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot X\left(i, x_i, y_i, \varepsilon\right) , \qquad x_0 = x^0,$$

$$y_{i+1} = Y\left(i, x_i, y_i, \varepsilon\right) , \qquad y_0 = y^0,$$

где $x_i \in D_x \subset R^n$ – медленные переменные, $y_i \in D_y \subset R^m$ – быстрые переменные, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $X\left(i, x_i, y_i, \varepsilon\right)$, $Y\left(i, x_i, y_i, \varepsilon\right)$ – заданные вектор-функции, $i \in I = \{0,\ 1,\ 2,\ ..., N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, $L = const$, $E\left(s\right)$ – целая часть числа s, значения x^0, y^0 – заданные начальные условия системы.

Задаче ставится в соответствие усредненная система уравнений для медленных переменных в случаях, когда правые части уравнений являются периодическими и непериодическими функциями. Рассматривается схема полного и частичного усреднения. Формулируются условия, при которых решение медленной подсистемы заданной задачи мало отличается от решения усредненной задачи на достаточно большом конечном и бесконечном промежутках времени. Показывается, что при решении усредненной задачи можно выбрать достаточно большой шаг дискретизации, который не влияет на точность получаемого решения, но дает существенный выигрыш при проводимых вычислниях.

Далее, метод усреднения применяется для решения задачи оптимального управления вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon \cdot \left[X\left(i, x_i, y_i\right) + A\ \left(x_i\right) \cdot \varphi\ \left(i, u_i\right)\right] , \qquad x_0 = x^0,$$

$$y_{i+1} = Y\left(i, x_i, y_i\right) , \qquad y_0 = y^0,$$

$$J\left(u\right) = \Phi\left(x_N\right) \to \min_{u \subset U}$$

где $u_i \in U \subset comp\left(R^r\right)$ – вектор управления, $comp\left(R^r\right)$ – пространство компактных подмножеств в R^rс метрикой Хаусдорфа.

Приводится алгоритм, позволяющий установить соответствие между оптимальными управлениями исходной и усредненной системами, формулируются условия, гарантирующие близость соответствующих траекторий и оптимальных значений критериев качества.

1. *Плотников В.А., Плотникова Л.И., Яровой А.Т.* Метод усреднения дискретных систем и его приложение к задачам управления // Нелинейные колебания – 2004. – Т.7.– № 2. – С. 241-254.

Застосування чебишовських наближень до розв'язання задач теплопровідності в кругових областях

Вакал Є.С., Вакал Л.П.

jvakal@gmail.com

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, Україна, Київ)

В роботі [1] було використано метод чебишовських наближень на межі до розв'язання задач стаціонарної теплопровідності у прямокутних областях. Застосуємо аналогічний підхід до знаходження наближених розв'язків теплових задач у кругових областях.

Як приклад розглянемо задачу про стаціонарний розподіл температури в тонкій пластинці, що має форму кругового сектора $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, $0 \leqslant r \leqslant R$, радіуси якого підтримуються при нульовій температурі, а дуга кола при температурі $f(\varphi)$. Цій задачі відповідає така математична модель:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, 0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha, \tag{1}$$

$$u\,(r,\ 0) = u\,(r,\ \alpha) = 0, 0 \leqslant r \leqslant R, \tag{2}$$

$$u\,(R,\ \varphi) = f\,(\varphi)\,, 0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha. \tag{3}$$

Згідно з методом чебишовських наближень на межі розв'язок крайової задачі (1)–(3) шукаємо серед функцій виду

$$v\,(r,\,\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k r^{\frac{k\pi}{\alpha}} \sin\,\frac{k\pi\varphi}{\alpha}, \tag{4}$$

які задовольняють диференціальне рівняння (1) і крайову умову (2), і невідомі коефіцієнти c_k визначаємо з умови

$$\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\alpha} |v\,(R,\,\varphi) - f\,(\varphi)| = \rho\,(c_1, \ldots, c_n) = \min. \tag{5}$$

Задача (5) — це задача найкращого чебишовського наближення функції $f(\varphi)$ на відрізку $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ узагальненим многочленом $\Phi\,(\varphi) \equiv v\,(R, \varphi)$ за системою базисних функцій $\left\{\sin\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right\}_{k=1}^{n}$. Для знаходження многочлена $\Phi(\varphi)$ використовуємо відповідні програмні засоби чебишовської апроксимації функцій [1].

Порівняльний аналіз точності розв'язків виду (4) крайової задачі (1)–(3), знайдених методом чебишовських наближень на межі та методом Фур'є для випадку $R = 1, \alpha = \frac{\pi}{3}$ і $f(\varphi) = \frac{9}{8}\pi\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$ [2], показав, що при $n \leqslant 5$ похибка розв'язку, отриманого запропонованим методом, майже у півтора рази менше, ніж похибка розв'язку за методом Фур'є.

1. *Вакал Л.П* Розв'язання крайових задач з використанням програмних засобів чебишовських наближень // Комп'ютерні засоби, мережі і системи. — 2010. — № 9. — С. 47–53.
2. *Лавренчук В.П., Іванишин С.Д., Совін П.А., Дронь В.С.* Рівняння математичної фізики (методичний посібник). — Чернівці: Рута, 1998. — 187 с.

Чисельне дослідження руслового стоку рідини в наближенні кінематичної хвилі

П. Венгерський, Я. Коковська

p_vengersky@franko.lviv.ua

(Львівський національний університет ім. І.Франка, Україна, Львів)

В багатьох задачах гідрології переміщення водних мас відбувається в умовах рівноваги сил опору та сили тяжіння. Такий рух має вигляд хвиль, які виникають внаслідок зміни в часі складових водного балансу і тому Лайтхілл та Уізем [1] назвали їх **кінематичними хвилями**.

Спрощені рівняння стоку води у вигляді рівнянь кінематичної хвилі набудуть вигляду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C\sqrt{iF}\frac{\partial F}{\partial x} = Bw,$$

Для регуляризації розв'язку в попередньому рівнянні введемо доданок з другою похідною по площі поперечного перерізу потоку, в результаті отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{3}{2} C\sqrt{iF}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = Bw,$$

де $F = F(x,t)$ — площа поперечного перерізу; $B = b(x,y) - a(x,y) = const$ — ширина русла; w — бічний притік; Re — число Рейнольдса; i — нахил лінії дна.

Доповнимо отримане рівняння такими початковими та крайовими умовами:

$$\begin{aligned}
&F_{t=0} = F_0,\\
&\left(-\beta\tfrac{\partial F}{\partial x} + (1-\beta)\,F\right)\Big|_{x=0} = 0,\\
&\left(\gamma\tfrac{\partial F}{\partial x} + (1-\gamma)\,F\right)\Big|_{x=L} = 0, \gamma, \beta > 0.
\end{aligned}$$

Для даної моделі були пораховані тестові приклади, результати одного з них показані на наступних рисунках: (параметри: $\alpha = 1$, $0 \leq \quad x \leq 1$, $0 \leq \quad t \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $B = 20$, $g = 9.8$, $C = 60$, $R = 0$, $1/Re = 0$, $Re = 20$, $F(0,t) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0$, $F_0 = x^2$).

Аналіз результатів обчислень тестових прикладів, порядки збіжності та стійкість розв'язків задач наведені в [2].

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны // Мир – 1977. – 622 с.
2. *Венгерський П.С., Коковська Я.В.* Один з підходів моделювання процесів руслового стоку рідини // Вісник ЛНУ–Вип.15.— 2009. – С.178—195.

Неполное обобщенное разложение Холесского седловой матрицы

***Вербицкий В.В., **Глушко И.Н.**
vvverb@mail.ru
(*Одесский национальный университет имени И.И.Мечникова, Одесса)
(**Одесский национальный политехнический университет, Одесса)

Большие разреженные системы с седловыми матрицами вида

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $A \in \mathrm{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно определенная матрица, $B \in \mathrm{R}^{m\times n}$ ($m \geq n$) — матрица полного столбцового ранга, возникают во многих научных приложениях, например, при аппроксимации смешанным методом конечных элементов различных задач механики жидкости и механики деформируемого твердого тела [1]. Итерационные методы подпространства Крылова, такие как MINRES (the minimal residual method), GMRES (the generalized minimal residual method), являются эффективными методами решения систем с седловыми матрицами [2, 3, 4]. Методы подпространства Крылова требуют предобуславливания исходной системы [4]. Один из известных способов построения предобуславливателей для систем с седловыми матрицами состоит в использовании неполного разложения исходной матрицы [3]. В работе [5] показано, что для матрицы (1) существует обобщенное разложение Холесского.

Нами построено неполное обобщенное разложение Холесского для матрицы (1) с целью его использования в качестве предобуславливателя для итерационного метода подпространства Крылова.

Теорема. Для матрицы (1) существует неполное обобщенное разложение Холесского

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ (L^{-1}B)^T & D^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^T & -L^{-1}B \\ 0 & D^{1/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

где $L \in \mathrm{R}^{m\times m}$ — нижняя треугольная матрица,

$$D = \mathrm{diag}\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}), \quad d_{ii} = ||(L^{-1}B)_{*,i}||_2^2 \quad (i = \overline{1,n}),$$

причем диагональные элементы матрицы R равны нулю ($r_{ii} = 0$, $i = \overline{1,n}$).

1. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. – Springer–Verlag, 1991. – 350 p.
2. *Benzi M., Golub G. H., Liesen J.* Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica, – 2005. – pp. 1–137.
3. *Benzi M., Wathen A. J.* Some Preconditioning Techniques for Saddle Point Problems // Mathematics in Industry – 2008. – **Vol.** 13, – pp. 195-211.
4. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems, second edn. – SIAM, Philadelphia, PA, 2003. – 547 p.
5. *Масловская Л.В.* Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач // ЖВМ и МФ – 1989. – **Т. 29**, № 1. – С. 67-74.

Функціональні структури для опису технологічної схеми вирощування сільсько–господарських культур

Вергунова І.М.
vergunova@bigmir.net
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Для опису технологічних схем вирощування сільськогосподарських культур будується багато ітеративна функціональна структура, що містить випадкові цикли та є структурою без пом'яті. Такі структури дозволяють проводити, при необхідності, укрупнення по частинах, що відповідають окремим технологічним процесам схеми вирощування культури для всіх періодів проведення робіт.

Для розглянутої системи уводити обмеження на імовірно припустиме число циклів повторень у кожній ітеративній ділянці немає необхідності, вони самі обмежуються терміном тривалості розвитку рослин або окремих фенофаз. Крім того, вважається, що технологічні процеси проходять без повторень (наприклад, якщо діагностується деяке захворювання, то після проведення захисних заходів воно вже не повторюється, тобто відповідна операція виконується без помилки).

Використовуючи модифіковану систему алгоритмічних алгебр описуються події, що відбуваються у дискретних процесах функціонування технологічної схеми. В результаті отримується низка функціональних структур, що описують усі технологічні процеси схеми. З метою покращання одержаних функціональних мереж проведено покращуючи перетворення (наприклад, для технологічного процесу «захисні заходи» можна увести контроль правильності виконання операторів «приготування засобів» і «обробка посіву» та їх доробку).

Для подальшого аналізу технологічної схеми будується відповідний імовірнісний граф. З метою можливого укрупнення графу та проведення аналізу операторних функціональних одиниць використано H–функції на основі прямого перетворення Лапласа, які являються інтегральною характеристикою переходу від одного стану системи до іншого.

Для отриманого опису технологічної схеми як множини послідовно–паралельних процесів розглянуто задачі оптимізації технологічної схеми за умов бездефектного синтезу.

Узагальнене інтегральне перетворення Стілтьєса

Вірченко Н.О.
(Національний технічний університет України, „КПІ“, м.Київ)

Одним із ефективних сучасних аналітичних методів розв'язання широкого класу крайових задач математичної фізики, теорії диференціальних, інтегральних рівнянь та багатьох задач прикладної математики є метод інтегральних перетворень. При розв'язанні складніших задач виникає потреба у запровадженні нових типів інтегральних перетворень.

Розглянено нове узагальнення інтегрального перетворення Стілтьєса у вигляді:

$$\tilde{S}_p\{f(x);y\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(p)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^p} \, {}_2\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a;\tau);(p;\gamma); \\ (c,\beta); \end{array} \middle| -b\left(\tfrac{y}{x+y}\right)^\gamma \right] dx, \tag{1}$$

де $b \geq 0$, $\gamma > 0$, ${}_p\Psi_q(z)$ — гіпергеометрична функція Райта [1], $Rec > Rea > 0$; $\{\tau,\beta\} \supset \mathbb{R}$; $\tau > 0$, $\tau < 1+\beta$.

У доповіді досліджено основні властивості інтегрального перетворення (1), побудовано формулу обернення, подано приклади застосування. Справедлива

Теорема. Для інтегрального перетовврення (1) справедлива формула обернення:

$$f(y) = \Gamma(p)\tilde{L}^{-1}\{x^{1-p}L^{-1}\{h(x);x\};y\}, \tag{2}$$

де $\tilde{L}^{-1}$ — інтегральний оператор, обернений до оператора

$$\tilde{L}\{f(x);y\} = \int\limits_0^\infty e^{-xy} \, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\Big(a;c;-b(xy)^\gamma\Big) f(x)dx, \tag{3}$$

з узагальненою конфлюентною гіпергеометричною функцією ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ [2]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \, {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (c;\tau); \\ (c;\beta); \end{array} \middle| zt^\tau \right] dt.$$

1. *Kilbas A.A., Saigo M.* H–Transforms. — Chapman and Hall / CRC, 2004. — 390 p.
2. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fract. Calculus and Appl. Anal.". — 2006. — **9**, N2. — 101–108 p.

Числові схеми для моделювання реакції окиснення чадного газу на поверхні платини

Вовк О.*, Шинкаренко Г.*,**

olexandrvovk@gmail.com, h.shynkarenko@po.opole.pl

*ЛНУ ім. І. Франка, Україна, Львів

**Політехніка Опольська, Польща, Ополе

Багатокомпонентні реакції автокаталізу описуються нелінійними початково-крайовими задачами для параболічних рівнянь вигляду: знайти вектор $\boldsymbol{u} = \{u_i(\mathbf{x},t)\}_{i=1}^p$ такий, що

$$\begin{cases} \rho_k \partial_t u_k - \nabla_x.(\boldsymbol{\mu}^k \nabla_x u_k) + \sigma_k u_k = f_k(\boldsymbol{u},\mathbf{x},t) \quad \text{в } \Omega \times (0,T], \\ -(\boldsymbol{\mu}^k \nabla_x u_k).\boldsymbol{\nu} = \psi_k(\boldsymbol{u},\mathbf{x},t) \quad \text{на } \Gamma_q \times [0,T], \Gamma_q \subset \Gamma, \\ \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \quad \text{на } \Gamma_u \times [0,T], \quad \Gamma_u = \Gamma \backslash \Gamma_q, \\ \boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}^0 \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1}$$

Дискретизація в часі та сумісна лінеаризація [2-3] варіаційного формулювання задачі (1) приводять до рекурентної схеми, кожен крок інтегрування в часі якої передбачає розв'язуваня задач вигляду: задано $\boldsymbol{u}^0 \in V^p$, $V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$; знайти пару $\{\boldsymbol{v}^{j+1/2}, \boldsymbol{u}^{j+1}\} \in V^p \times V^p$ таку, що

$$\begin{cases} m(\boldsymbol{v}^{j+1/2},\mathbf{v}) + \triangle t\theta[c(\boldsymbol{v}^{j+1/2},\mathbf{v}) - s(\boldsymbol{u}^j;\boldsymbol{v}^{j+1/2},\mathbf{v})] \\ \qquad = \langle \boldsymbol{N}[\boldsymbol{u}^j],\mathbf{v}\rangle - c(\boldsymbol{u}^j,\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V^p, \\ \boldsymbol{u}^{j+1} = \boldsymbol{u}^j + \triangle t \boldsymbol{v}^{j+1/2}, \\ m(\boldsymbol{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \rho_k u_k v_k d\mathbf{x}, \quad c(\boldsymbol{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega [(\boldsymbol{\mu}^k \nabla_x u_k).\nabla_x v_k + \sigma_k u_k v_k] d\mathbf{x}, \\ s(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial u_s} f_k(\mathbf{w}) v_k u_s d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial}{\partial u_s}\psi_k(\mathbf{w}) v_k u_s d\gamma, \\ \langle \boldsymbol{N}[\mathbf{w}],\mathbf{v}\rangle = \int_\Omega f_k(\mathbf{w}) v_k d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_q} \psi_k(\mathbf{w}) v_k d\gamma \quad \forall \boldsymbol{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V^p. \end{cases} \tag{2}$$

За просторовою змінною дискретизація виконується за схемою Гальоркіна з вибором просторів апроксимацій методу скінченних елементів.

Розглядається питання співвідношення лінеаризації з (2) та класичного методу Ньютона. На їх основі побудовано відповідні чисельні схеми розв'язування нелінійних задач Коші та початково-крайових задач (1). Числові експерименти підтвердили, що обидві схеми мають однакові характеристики відносно точності та швидкості збіжності, але використана в (2) лінеаризація дозволяє зменшити трудомісткість обчислень. Для обох схем розв'язуванням додаткової, спрощеної задачі запропоновано спосіб уточнення початкового наближення для процесу лінеаризації.

Наводяться результати числового моделювання процесу окиснення чадного газу на поверхні платини [1].

1. *K. Krischer, M. Eiswirth, and G. Ertl* Oscillatory CO oxidation on Pt(110): Modeling of temporal self organization // Chem. Phys. – 1992. – **96**, № 9161.
2. *О. Гачкевич, О. Смірнов, Г. Шинкаренко* Числове розв'язування нелінійних задач перенесення зарядів у напівпровідникових структурах // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2005, № 18. – P. 98-110.
3. *О. Вовк, Н. Павленко, Г. Шинкаренко, В. Вовк* Проекційно сіткова схема розв'язування еволюційних задач окиснення чадного газу на поверхні платини // Вісн. Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. та інформ. – 2012, № 18. – P. (в друці)

О градиентно–резольвентных схемах для вариационных неравенств над множеством решений равновесных задач

Войтова Т.А., Семенов В.В.
semenov.volodya@gmail.com
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)

Пусть H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Для операторов $A : H \to H$, множеств $M \subseteq H$ и бифункций $F : H \times H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ обозначим

$$VI(A, M) = \{x \in M : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in M\}\,,$$
$$EP(F, M) = \{x \in M : \ F(x, y) \geq 0 \ \ \forall y \in M\}\,.$$

Большим вниманием специалистов в области прикладного нелинейного анализа пользуются задачи допускающие такие формулировки

$$\text{найти } \ x \in VI(A, EP(F, C)), \tag{1}$$

$$\text{найти } \ x \in VI(A, EP(F_1, C_1) \cap EP(F_2, C_2)). \tag{2}$$

Для задачи (1) будем предполагать выполненными следующие условия (задача (2) рассматривается при подобных предположениях и очевидных условиях непустоты пересечений):

A1) $C \subseteq H$ — замкнутое выпуклое множество;

A2) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

A3) $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ для всех $x, y \in C$;

A4) для всех $x \in C$ функционал $F(x, \cdot)$ полунепрерывный снизу и выпуклый;

A5) $\limsup_{t \to +0} F(x + t(z - x), y) \leq F(x, y)$ для всех $x, y, z \in C$.

A6) $EP(F, C) \neq \emptyset$;

A7) $A : H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор.

Заметим, что множество $EP(F, C)$ — замкнутое и выпуклое, а решения вариационных неравенств (1) и (2) существуют и единственны.

В докладе рассматривается сходимость следующих процессов с погрешностями.

Выбираем $x_1 \in H$ и генерируем последовательность элементов (x_n) при помощи итерационной схемы

$$\begin{cases} y_n = J_{\lambda_n F}\,(x_n + e_n)\,, \\ x_{n+1} = y_n - \alpha_n A y_n, \end{cases}$$

где $\alpha_n > 0$, $\lambda_n > 0$, $e_n \in H$.

Выбираем $x_1 \in H$ и генерируем последовательность элементов (x_n) при помощи итерационной схемы

$$\begin{cases} y_n = J_{\lambda_n F_1}\,(x_n + e_n^1)\,, \\ z_n = J_{\lambda_n F_2}\,(x_n + e_n^2)\,, \\ v_n = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} z_n, \\ x_{n+1} = v_n - \alpha_n A v_n, \end{cases}$$

где $\alpha_n > 0$, $\lambda_n > 0$, e_n^1, $e_n^2 \in H$.

Об одной квазилинейной модели динамики популяций

Гаркуша Н.И.
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко)

В докладе рассматривается квазилинейная модель динамики популяций. Ее особенностью является учет возрастной структуры популяции. Динамика описывается квазилинейной дискретной системой уравнений.

Пусть $x_i\left(k\right)$, $i=\overline{1,n}$ — количество особей возрастного класса i в момент времени k. Момент времени k определяет дискретные моменты перехода из одной возрастной группы в другую. Перемена структуры популяции состоит в следующем. В момент времени $k=1,2,...$ происходит переход популяции класса i в класс $i+1$, $i=\overline{1,n-1}$. При этом часть популяции умирает, а переходит лишь $p_ix_i\left(k\right)$, $0<p_i<1$, $i=\overline{1,n-1}$. Последняя популяция класса $i=n$ умирает. А популяция новорожденного класса $i=1$ состоит из суммы особей, родившихся в каждом из $i=\overline{2,n}$ классов с коэффициєнтами f_i, $i=\overline{1,n}$. Таким образом, математическая модель динамики популяций описывается системой разностных уравнений

$$x\left(k+1\right)=Lx\left(k\right), \quad x\left(k\right)=\left(x_1\left(k\right),x_2\left(k\right),...,x_n\left(k\right)\right), \quad k=1,2,...,$$

где квадратная матрица L размерности $n\times n$ имеет вид

$$L=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & ... & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & ... & 0 & 0 \\ . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & ... & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

и называется матрицей Лесли.

Более адекватно динамику процесса описывает квазилинейная модель. Ее особенностью является то, что для учета влияния плотности популяции вводится величина, которая представляет собой взвешенный размер популяции $w\left(x\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_jx_j$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{1,n}$ — постоянные, которые отображают влияние возраста на темп роста популяции. Предполагается, что коэффициенты рождаемости f_i, $i=\overline{1,n}$ имеют вид $f_i=a\tilde{f}_ig[w\left(x\right)]$, $j=\overline{1,n}$, где $\tilde{f}_i$ — максимальная рождаемость индивида, $g[w]$ — зависимость падения рождаемости от плотности, a — вероятность выживания индивидов первого возрастного класа до момента перехода во второй класс. На функцию $g[w]$ накладывается ряд ограничений, и динамика развития популяции описывается квазилинейной системой разностных уравнений

$$x\left(k+1\right)=L[w\left(x\left(k\right)\right)], \quad k=0,1,2,...$$

Проведено исследование поведения решений системы. Найдены особые решения, исследована их устойчивость.

Чисельне розв'язання задач про вільні коливання анізотропних пластин змінної товщини на основі методу сплайн–апроксимації

Григоренко О.Я.[1], Єфімова Т.Л.[1], Власова І.В. [2]
[1]e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, [2]e-mail: inna-2011@hotmail.com
[1]Інститут механіки імені С.П. Тимошенко НАН України, Київ
[2]Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського, Миколаїв

В даний час широке поширення одержали полімерні, синтетичні й інші анізотропні матеріали. Завдання міцності, стійкості й коливання пластин здавна привертали увагу численних дослідників. Тонкі пластини, а також пластини середньої товщини знаходять винятково широке застосування в конструкціях найрізноманітніших інженерних споруджень. Із цієї причини створення надійно зроблених конструкцій залежить від рівня розвитку теорії пластин.

Представлена теорія може становити інтерес для машинобудування, кораблебудування, будівництва й для інших галузей сучасної техніки.

У доповіді пропонується ефективний чисельний метод дослідження власних частот коливань анізотропних прямокутних пластин змінної товщини, який базується на застосуванні сплайн–апроксимації в одному з координатних напрямків з подальшим розв'язком крайової задачі на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами стійким чисельним методом дискретної ортогоналізіції в поєднанні з методом покрокового пошуку.

Аналізуючи результати, отримані при рішенні реальних інженерних завдань по знаходженню вільних коливань анізотропних пластин змінної товщини, запропонований метод сплайн-апроксимації розглянуто для багатошарових пластин При цьому підході поле напруг і деформацій апроксимується окремо для кожного шару, що дозволяє описувати локальні ефекти, що виникають при деформуванні.

Надалі розв'язано крайову задачу на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами стійким чисельним методом дискретної ортогоналізіції в поєднанні з методом покрокового пошуку. Дається чисельна оцінка меж застосовності класичної теорії Кірхгофа–Лява.

При рішенні завдань статики й динаміки теорії пружних багатошарових композитних пластин і оболонок, наведена методика забезпечує стійке чисельне інтегрування в широкому діапазоні геометричних і фізико–механічних характеристик. Це дає підставу рекомендувати її для ефективного чисельного рішення подібного класу завдань для вивчення спектру частот вільних коливань прямокутних пластин за довільним законом зміни товщини.

Расчет напряженно–деформированного состояния ортотропных тороидальных оболочек переменной толщины в уточненной постановке

Григоренко Я.М., Авраменко Ю.А.
iuliavra@yandex.ru
(Институт механики имени С.П. Тимошенко НАН Украины, Украина, Киев)

При создании высокопрочных и надежных конструкций современной техники широкое применение находят оболочки различной формы, имеющие переменную толщину. Исследование прочностных характеристик оболочки отмеченного класса сопряжено с значительными трудностями вычислительного характера, обусловленными сложностью исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих граничных условий. Расчет напряженно–деформированного состояния таких оболочек необходимо выполнять с привлечением уточненных теорий типа Тимошенко [3], основанной на гипотезе прямой линии. Для решения задач о напряженно–девормированном состоянии тороидальных оболочек переменно толщины предлагается подход , который состоит из двух этапов: 1) применения метода сплайн–коллокации [4] вдоль образующей для сведения двумерной задачи к одномерной; 2) решение полученной одномерной задачи устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1].

На основании изложенного подхода решены задачи о напряженном состоянии замкнутых в поперечном сечении усеченных ортотропных тороидальных оболочек переменной толщины под действием равномерного нормального давления $q = q_0 = const$. Координатную поверхность оболочки отнесем к системе ортогональных криволинейных координат η, θ, где η — угол в осевом сечении, а θ — угол в поперечном сечении оболочки.

Первая квадратичная форма [2] срединной поверхности запишется в виде:

$$dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2 \,, \qquad (1)$$

$$A_1 = R + r\sin(\theta),\ \alpha_1 = \eta;\ A_2 = r,\ \alpha_2 = \theta;\ \eta_1 \le \eta \le \eta_2,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \qquad (2)$$

где R — радиус осевой окружности, r — радиус окружности в поперечном сечении. Оболочка жестко закреплена по контурам $\eta = 0$; $\eta = \Delta\eta$. Толщина оболочки изменяется по закону $h(\theta) = h_0(1 + \beta\cos(\theta))$. При этом объем оболочки остается постоянным при изменении параметра β. Задача решалась при следующих исходных данных: $L = 60$; $r = 15$ — радиус цилиндра длины L, объем которого выбран как эталон; $E_\eta = 5E$; $E_\theta = 1,25$; $G_{\eta\theta} = 0,4E$; $G_{\eta\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,2E$; $\nu_\eta = 0,45$.

Исследовалось влияние угла осевого сечения тора $\Delta\eta = 2\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/3$, параметров изменения толщины h_0 и β на напряженно–деформированное состояние тороидальных оболочек постоянного объема.

1. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, №3. – С.171-174.
2. *Голушко С.К., Немировский Ю.В.* Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 432с.
3. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П.* Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 216с.
4. *Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.* Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академпериодика, 2006. – 472с.

Аналіз погано обумовлених систем в середовищі Maple

Григор'єва Ю.А., Кудін В.І., Оноцький В.В.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Категорія поганої обумовленості є визначальною в побудові залежностей розв'язків (і областей локалізації) від збурень в елементах моделей [1–3]. Можна стверджувати, що лінійні системи, зокрема системи лінійних алгебраїчних рівнянь можуть бути некоректними [1–4], що характеризуються числом обумовленості. Розрахунок числа обумовленості є трудомісткою процедурою. Виявивши міру поганої обумовленості системи до розрахунку (чи в ході обчислень), можна оцінити відхилення точного розв'язку від наближеного.

Проведено: дослідження погано обумовлених систем; виявлення „ефектів", що супроводжують цей стан обчислень. Розглянуто властивості основних методів та алгоритмів знаходження точного розв'язку СЛАР у середовищі MAPLE. Досліджено особливості обчислень з різною довжиною мантиси, розмірності матриці обмежень та перевірено достовірність деяких „нестрогих" оціночних формул похибок обчислень.

Обчислювальний експеримент установив:

- суттєвий вплив структурних властивостей матриці обмежень, розмірності моделі, довжини мантиси, обумовленості на обчислювальні властивості алгоритмів,
- „втрату" достовірності оціночних формул з „ростом" поганої обумовленості, розмірності моделі,
- особливу роль норм ведучих елементів та ведучих стовпців на якість обчислень,
- актуальність розробки нових алгоритмів аналізу лінійних систем, в яких наявні оцінювачі числа обумовленості в ході обчислень.

1. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение. — М.: Мир, 2001. — 430с.
2. *Альфельд, Ю. Херцбергер* Введение в интервальные вычисления. — 1983.
3. *Молчанов И.Н.* Машинные методы решения прикладных задач, алгебра, приближение функций. — 1987.
4. *Богаенко В, Кудин В.* О принятии решений при анализе малых возмущений линейных моделей // Information Models of Knowledge, ITHEA, Kiev–Sofia, 2010. — P. 226–231.

Чисельне моделювання процесів кінетики абсорбції з багатокомпонентних розчинів

Грищенко О.Ю., Кочулова О.Г., Ляшко В.І., Федорова В.С.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Зростання промислового виробництва поставило перед людством проблему збереження природних ресурсів, зокрема запасів води і введення у технологічних процесах замкнених циклів використання води. Це обумовило широке коло дослідницьких робіт, пров'язаних з очисткою відпрацьованих промислових вод і повторного її використання. Оскільки вказані процеси складно моделюовати в лабораторних умовах, то основним методом їх дослідження є чисельне моделювання. Метою даної роботи є розробка та побудова однієї з можливих чисельних моделей процесів абсорбції з розчину речовин в твердий абсорбент. Перерозподіл концентрації при нестаціонарному режимі у гранулі абсорбенту, яка має скінченний об'єм V, обмежений гладкою, замкненою поверхнею S, описується рівнянням нестаціонарної дифузії

$$\frac{\partial(a+c)}{\partial t} = \operatorname{div}[D_r(x,y,z,t)\operatorname{grad} c + D_a(x,y,z,t)\operatorname{grad} a].$$

і умовою, яка виражає рівновагу між величинами $c(x,y,z,t)$ та $a(x,y,z,t)$ у довільній точці зерна $a = f(c)$. Для однорідних тіл коефіцієнти дифузії розчиненої D_r та абсорбованої фаз D_a не залежать від координат, отже враховуючи локальну рівновагу у кожній точці, рівняння спрощується: $\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial t} = D_c(t)\Delta\, c$, де $\Delta\, c$ — оператор Лапласа, а $D_c = D_r(t) + (\frac{\partial f}{\partial c})_c D_a(t)$. В початковий момент гранула вільна від абсорбованої речовини, тому: $a(r,0) = c(r,0) = 0$ (r — просторова координата зерна). У сферичній системі координат одна гранична умова відображає симетрію задачі по відношенню до центру зерна $\frac{\partial c}{\partial r}\big|_{r=0} = 0$, а друга на поверхні зерна, при постійному і обмеженому об'ємі системи, відображає баланс речовини у даному об'ємі $C(R,t)V_P' = C_H^* V_P' - V_a \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R (a+c)r^2 dr$. Записана система диференціальних рівнянь є вихідною для моделювання процесу кінетики абсорбції індивідуальних речовин. Проте більш важливими є ситуації, коли розчини містить m різних речовин. Тоді відповідно матимемо m ізотерм $a_j = f_j(c_1, c_2, \dots c_m)$, $j = \overline{1,m}$ (зокрема, речовини можуть мати різні активності реакцій, наприклад при $a_1 = h_1 c_1 + b$, $a_2 = h_2 c_2(1 - \alpha c_1)$ — речовина з концентрацією c_1 є більш активною і впливає на процес кінетики абсорбції другої речовини) та відповідної системи m нелінійних диференціальних рівнянь.

В процесі конструювання чисельної моделі питання вибору різницевої схеми є змістовною частиною. Відправними факторами при цьому є апроксимація, стійкість, консервативність, збіжність чисельного розв'язку та ефективні методи побудови розв'язку різницевих рівнянь. В роботі використано неявну апроксимацію диференціальних операторів. Особливу увагу приділено питанню апроксимації граничних умов (сингуляності у центрі сфери та виконанню балансного співвідношення на зовнішній границі), вивчено питання консервативності, швидкості збіжності та стійкості лінеаривованих систем різницевих рівнянь, а також питанню коефіцієнтної стійкості різницевих операторів, у випадку коли моделюються процеси з суттєво різними швидкостями реакцій. Обчислювальні експерименти для модельних нелінійних задач також дають хороші обнадійливі результати щодо стійкості та збіжності.

Про одну задачу промочування ґрунтового схилу в результаті аварії безнапірного водопроводу

Громадченко Т.В., Мартинюк П.М.
Grotan_nuwmnru@ukr.net
(Національний університет водного господарства та природокористування, Україна, Рівне)

Розглянуто ґрунтовий схил (область Ω). В результаті прориву водопроводу (точка D, $D \in \Omega$) відбувається змочування ґрунту схилу. Внаслідок цього вся область Ω розділяється на дві підобласті: Ω_1 - область повністю насиченого ґрунту; Ω_2 - область неповністю насиченого ґрунту. Внутрішня межа $\Gamma_n = \Gamma_n(x, z, t)$ контакту областей Ω_1 та Ω_2 в загальному випадку є рухомою. Наше завдання - визначити динаміку зміни вологості в ґрунті (область Ω) з часом. Ґрунт вважаємо однорідним та ізотропним за своїми фільтраційними характеристиками.

Для моделювання промочування ґрунту на схилі використано рівняння Річардса [1, с. 4] відносно функції насиченості $s(x, z, t) = \frac{\theta - \theta_{min}}{\theta_{max} - \theta_{min}}$, де θ_{min} - залишкова (мінімальна) вологість; θ_{max} - значення максимальної вологості, $0 \leq \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max} = n$; n - пористість; θ - об'ємна вологість. Тоді математичну модель досліджуваного процесу в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial z}\Big) - \frac{1}{\theta_{max} - \theta_{min}} \cdot \frac{\partial K(s)}{\partial z},$$

$$(x, z) \in \Omega, t \in (0; T];$$

$$s(x, z, 0) = s_0(x, z), (x, z) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma;$$

$$s(x, z, t)\big|_{\Gamma_1} = s_1(x, z, t), (x, z) \in \Gamma_1, t > 0;$$

$$\Big(-D(s)\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial z}\Big)\Big|_{\Gamma_2} = 0, (x, z) \in \Gamma_2, t > 0;$$

$$\frac{\partial s(x,z,t)}{\partial x}\Big|_{\Gamma_3 \setminus \{D\}} = 0, (x, z) \in \Gamma_3 \setminus \{D\}, t > 0;$$

$$s(x, z, t)\big|_D = 1, (x, z) \in D, t > 0,$$

де $D(s)$ - проникність ґрунтової вологи, що може розглядатися як нелінійний коефіцієнт дифузії; $K(s)$ - коефіцієнт вологоперенесення; $s_1(x, z, t)$ - відома функція.

Функції $D(s)$ та $K(s)$ визначалися згідно наступних двох моделей: 1. Модель ВС (R. H. Brooks and A. T. Corey); 2. Модель MvG (Mualem-Van Genuchten) [1, с. 5].

Чисельний розв'язок вищенаведеної крайової задачі знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій [2]. Проведено ряд чисельних експериментів.

1. *Caputo, J.G., Stepanyants Y.A.* Front Solutions of Richards' Equation. Transport in Porous Media // Netherlands – 2008. – V.74, № 1. – P. 1-20.
2. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування грунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій: Монографія. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.

Числовий аналіз варіаційних задач дисипативної акустики

Горлач В.М.*, Клименко І.В.*, Шинкаренко Г.А.*'**
horlatch@lnu.edu.ua, iraklymenko@gmail.com, h.shynkarenko@po.opole.pl
(* Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна, Львів,
** Політехніка Опольська, Польща, Ополе)

Для розв'язування початково-крайової задачі з системою рінянь дисипативної акустики (див. [1])

$$\begin{cases} \rho u_i'' - \sigma_{ij,j}(\mathbf{u},\theta) = 0, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{u},\theta) := [-\pi(\mathbf{u},\theta) + (\eta - \frac{2}{3}\mu)e_{ij}(\mathbf{u}')]\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}'), \\ \pi(\mathbf{u},\theta) := c^2\rho\gamma^{-1}[-\nabla.\mathbf{u} + \alpha\theta], \;\; e_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \\ \rho c_v \theta_0^{-1}\theta' + \nabla.q(\theta,\mathbf{u}) = 0, \\ q(\theta,\mathbf{u}) := -\chi\nabla(\theta_0^{-1}\theta) + \alpha c^2\rho\gamma^{-1}\mathbf{u}' \qquad \text{в } \Omega\times(0,T]. \end{cases}$$

побудовано однокрокову рекурентну схему інтегрування в часі, яка для завершення дискретизації цієї задачі доповнена процедурою Гальоркіна з апроксимаціями методу скінченних елементів за просторовими змінними [2]. В матричному записі повністю дискретизована задача відносно вузлових значень акустичного зміщення та температури має вигляд

$$\begin{cases} \text{задано } \left\{\dot{\mathbf{U}}^0, \Theta^0\right\} \in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^K \text{ та параметри } \Delta t>0, \;\; \gamma,\beta\in[0,1]; \\ \text{знайти } \left\{\ddot{\mathbf{U}}^{j+1/2}, \dot{\Theta}^{j+1/2}\right\} \in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^K \text{ та } \left\{\mathbf{U}^{j+1}, \dot{\mathbf{U}}^{j+1}, \Theta^{j+1}\right\} \in \mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^K \\ \text{такі, що} \\ \{M + \Delta t\gamma A + \frac{1}{2}\Delta t^2\beta\, C\}\,\ddot{U}^{j+\frac{1}{2}} - \Delta t\gamma\mathbf{B}\dot{\Theta}^{j+\frac{1}{2}} = L(t_{j+\frac{1}{2}}) - A\dot{U}^j \\ \qquad\qquad -C[U^j + \Delta t\gamma\dot{U}^j] + \mathbf{B}\Theta^j, \\ \qquad -\mathbf{B}^T\Delta t\gamma\ddot{U}^{j+\frac{1}{2}} + \{S + \Delta t\gamma\,\mathbf{K}\}\,\dot{\Theta}^{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{Z}(t_{j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{K}\Theta^j + \dot{\mathbf{B}}^T\dot{U}^j \\ \dot{U}^{j+1} = \dot{U}^j + \Delta t\ddot{U}^{j+1/2}, \qquad U^{j+1} = U^j + \frac{1}{2}\Delta t(\dot{U}^{j+1} + \dot{U}^j), \\ \Theta^{j+1} = \Theta^j + \Delta t\dot{\Theta}^{j+1/2} \qquad j = 0,1,\ldots \text{ доки } j\Delta t < T. \end{cases}$$

Встановлено умови стійкості та збіжності цієї схеми і наводяться результати числових експериментів, які характеризують її властивості.

1. *Horlatch V.M.* Formulation and correctness of variational problem of acoustics of viscous heat-conducting fluid acoustic/V.M.Horlatch, I.V.Klymenko, H.A.Shynkarenko//Journal of Computational and Applied Mathematics.№3 (106) 2012 (в друці).
2. *Горлач В.М.* Побудова та аналіз однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі варіаційної задачі акустики в'язкої теплопровідної рідини/В.М.Горлач, І.В.Клименко, Г.А.Шинкаренко// Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 2012, вип. 18 (в друці).

Апроксимація кривої, що задана хмарою точок на площині

Данилова А.Є.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

В процесі роботи над актуальними проблемами обчислювальної геометрії виявився цікавий взаємозв'язок між деякими, на перший погляд різними, задачами. Так, проблема побудови апроксимації кривої, заданої хмарою точок на площині виявилась тісно пов'язаною з задачею побудови кривої регресії. Сама ж крива знаходилась, як розв'язок крайової задачі:

$$\lambda u^{(4)}(x) = -f_X(x)u(x) + g(x),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

де $g(x) = \int_{-1}^{1} y f_{XY}(x,y)dy$, при прямуванні значення параметра λ до нуля.

Хмарою назвемо певну множину точок, що належать деякій кривій. Запропоновано ідеї для побудови наближення кривої, заданої хмарою точок, на площині, що спираються на метод штрафної регресії, а також на дискретизацію досліджуваної області і, відповідно, побудову «околу», в якому може знаходитись наближувала крива з огляду на припущення про певний ступінь її гладкості. Для реалізації цих алгоритмів було створено програму. За допомогою побудованих наближень далі проводилась процедура покращення знайденого наближення шляхом зміни параметрів системи. Тестування та статистика показують слушність запропонованого підходу.

Вагомим плюсом запропонованого алгоритму є те, що його досить легко можна перенести на випадок тривимірного простору.

1. Рублев Б.В. Алгоритм оценивания периметра плоской фигуры по ее дискретизованному изображению // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — с. 101–110.
2. Рублев Б.В., Петунин Ю.И. Гладкая метрика в классе плоских фигур с кусочно выпуклой и вогнутой границей. // Кибернетика и системный анализ. ч. 1 - 1999. — № 1. — с. 125–135; ч. 2 — 1999. — № 2. — с. 111–120.
3. R. C. Vetkamp, Shape Matching: Similarity Measures and Algorithms.
4. Слабоспицький О.С., Аналіз даних. Попередня обробка.
5. B. W. Silverman, Spline Smoothing: The Equivalent Variable Kernel Method.
6. F. P. Abramovich, The Asymptotic Mean Squared Error of L–Smoothing Splines.
7. Evans, Partial Differential Equations
8. Wolfgang Haerdle, Applied Nonparametric Regression

Об оценке временного интервала применимости уравнения диффузии

Дубко В.А.
doobko2008@yandex.ru
(Национальный авиационный университет, Украина, Киев)

Рассмотрим динамическую модель броуновского движения в неоднородной среде:

$$mdv(t) = -6\pi\mu(x(t))rv(t)dt + b(x(t))dw(t); \quad dx(t) = v(t)dt, \tag{1}$$

где $x(t)$ — координата, $v(t)$ — скорость, m — масса частицы, а r — радиус броуновской частицы, $\mu(x)$ — вязкость, $w(t)$ — винеровский процесс $\in R^3$ с независимыми компонентами; $\mu(x)$ и $b(x)$ — скалярные функции.

Предположим, что температура среды постоянна. Это эквивалентно требованию:

$$\begin{array}{l} \lim M[d_t \left|v^2(t)\right|^2 / x(t_1) = x] = O \cdot dt \\ t \to \infty, \quad (t_1 < t) \end{array}$$

Воспользовавшись (1), формулой Ито и этим требованием, находим:

$$\lim_{t\to\infty} M\left[\frac{\left|v(t)\right|^2 m}{2} / x(t) = x\right] = \frac{3}{4}\frac{b^2(x)}{6\pi\mu(x)} = \frac{2}{3}K_B T^0,$$

где K_B — постоянная Больцмана, T^0 — температура в градусах Кельвина.

Перейдем к безразмерным величинам (ℓ — размерность длины в метрах, τ — времени в секундах) $\bar{\mu} = \sup\limits_y \mu(y)$, $m_0 = m(6\pi\bar{\mu}\ell\tau)^{-1}$, $s = m_0 t\tau^{-1}$,$u(s) = \tau v(t)(m_0\ell)^{-1}$, $y(s) = x(t)\ell^{-1}$, $\eta(y) = \mu(y\ell)\bar{\mu}^{-1}$. В предположении, что $\bar{\rho}$ (плотность частицы) $=$ $\bar{\rho}$ (плотность водной среды) $=10^3 kg/\ell^3$,$r = 10^{-6}\ell$, $T^0 = 300^0 K$, уравнения (1) переходят в такие:

$$\varepsilon\, du_\varepsilon(s) = -\eta(y_\varepsilon(s))u_\varepsilon(s)ds + \sigma(y_\varepsilon(s))dw(s), \quad dy_\varepsilon(s) = u_\varepsilon(s)ds,$$

где $\sigma(y) = [2m^{-1}K_B T^0\tau^2\ell^{-1}r^{-1}\eta(y)]^{1/2}$, $\sup\limits_y \sigma^2(y) \cong 10$; $\varepsilon = m_0^2 \cdot \ell \cdot r^{-1} \cong 10^{-18}$.

В [1], на основе предложенного алгоритма построения диффузионной аппроксимации решений ([1], с.15), играющих роль координат, установлено, что уравнение для $\bar{y}(s) = \underset{\varepsilon\downarrow 0}{l.i.m}\, .y_\varepsilon(s)$, имеет вид:

$$d\bar{y}(s) = -2^{-1}\left[\sigma(\bar{y}(s)\eta^{-1}(\bar{y}(s))\right]^2 \nabla_{\bar{y}} \ln\eta(\bar{y}(s))ds + \sigma(\bar{y}(s))\eta^{-1}(\bar{y}(s))dw(s) \tag{2}$$

Возвращаясь к исходным размерным величинам, убеждаемся, что $\mathrm{M}[|\bar{x}(t) - x_\varepsilon(t)|^2] \le 4r^2$,$\forall t \le 10^{10}$ сек. ([1], с.82-83]). В исходных переменных, стохастическому уравнению (2) соответствует прямое уравнение Колмогорова, совпадающее с уравнением диффузии для неоднородной среды — вторым законом Фика.

1. *Дубко В. А.* Метод диффузионной аппроксимации в исследовании моделей стохастических динамических систем. — Владивосток: Дальнаука, 1994. 107 с.

Моделирование и расчет течений неоднородной жидкости

Загуменный Я.В.
zagumennyi@gmail.com
(Институт гидромеханики НАН Украины, Киев)

В окружающей среде и технологических установках плотность жидкости, задаваемая распределениями температуры или концентрации растворенных веществ или взвешенных частиц, обычно неоднородна. Устойчивая стратификация сохраняет основные структурные компоненты течений однородных жидкостей и обуславливает существование ряда специфических, таких как внутренние волны и тонкая структура среды. Для их описания используется фундаментальная система уравнений механики жидкостей, включающая уравнение неразрывности Даламбера, баланса импульса Навье–Стокса, температуры Фурье (или энтропии) и концентрации Фика с замыкающим уравнением состояния. В предположении малости кинетических коэффициентов по сравнению с произведением характерной скорости и масштаба течения и неизменности уравнения состояния, система анализируется методами теории сингулярных возмущений. Классификация компонент периодических течений, основанная на анализе решений линеаризованной системы уравнений с учетом условия совместимости, приведена в [1]. В полной нелинейной постановке решение фундаментальной системы строится численно с использованием конечно–разностных подходов в оригинальных авторских программах и метода конечных объемов, реализованного в решателях собственной разработки открытого пакета OpenFOAM. Расчеты проводятся на суперкомпьютерных комплексах НИВЦ МГУ (системы "Ломоносов" и "Чебышев"), МСЦ РАН и СКИТ ИК НАНУ. Непроницаемое препятствие, помещенное в толщу неравновесной стратифицированной среды нарушает однородность фонового диффузионного потока стратифицирующей компоненты и приводит к формированию сложной вихревой системы медленных течений, которые носят название "индуцированных диффузией на топографии". Картины таких течений и зависимость их свойств от параметров задачи представлены в работе [2]. При начале движения пластины начинает формироваться поле опережающих и присоединенных волн, результаты расчета которых приведены в [3], и спутный след. Выполнены аналитические и численные расчеты сил и моментов, действующих на каждую сторону пластины. При больших скоростях пластины инфинитезимальные структурные компоненты взаимодействуют между собой и порождают новые. Проводится сравнение данных аналитического, численного и лабораторного моделирования течения около пластины в свободном пространстве и около неподвижной наклонной плоскости. Обсуждаются условия согласия и расхождения результатов, проблемы переноса данных моделирования на природные системы и летательные аппараты.

1. *Чашечкин Ю.Д.* Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // Морской гидрофизический журнал. — 2010. – № 5. — С. 3–10.
2. *Чашечкин Ю.Д., Загуменный Я.В.* Структура течения, индуцированного диффузией на наклонной пластине // Доклады академии наук. — 2012. – **444**, № 2. — С. 165–171.
3. *Чашечкин Ю.Д., Бардаков Р.Н., Загуменный Я.В.* Расчет и визуализация тонкой структуры полей двумерных присоединенных внутренних волн // Морской гидрофизический журнал. — 2010. — № 6. — С. 3–15.

Точкове оптимальне керування переносом ліків у злоякісних пухлинах

Карабін Л.Д.
lesiakarabin@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Ріст і керування злоякісними пухлинами давно є предметом медико–математичних досліджень. Важливим відкритим питанням є задача знаходження необхідної кількості концентрації препарату для того щоб максимально знешкодити пухлину, зберегти здорові клітини та мінімізувати витрати ліків.

Нехай $Y = (Y_1(x,t), Y_2(x,t), Y_3(x,t))^T$ — вектор стану системи, де x визначена на $\Omega = [a,b]$, тобто одновимірна змінна, та $t \in [0,T]$. Компоненти вектора стану: $Y_1 = Y_1(x,t)$ — густина ракових клітин, $Y_2 = Y_2(x,t)$ — густина здорових клітин, $Y_3 = Y_3(x,t)$ — концентрація ліків.

Ці просторово–часові моделі складаються систему трьох пов'язаних між собою рівнянь дифузії. Густина ракових клітин Y_1 та густина здорових клітин Y_2 конкурують між собою, змагаючись за ресурси. Нехай $u = u(x,t)$ позначатиме кількість, з якою ліки були введені у пухлину і буде функцією керування в оптимальній системі керування. На відміну від моделі Чакрабарті-Хансона [1], в якій керування вводиться як неперервна функція, розглядатимемо точкове керування, тобто $u = \sum_{i=1}^{NC} C_i\delta(x - x_i)$, де x_i — точки, в які введено ліки, NC — кількість цих точок, C_i — відповідна інтенсивність ліків у точках. Таке нововведення більш реалістично відповідає існуючим методам введення ліків у пухлину. Тоді, об'єднуючи рівняння для $Y_1(x,t), Y_2(x,t), Y_3(x,t)$ в одне векторне, отримаємо:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + (A(Y) + B(Y))Y + U$$

Функціонал для мінімізації обираємо у вигляді, щоб він був квадратичною формою поточних та кінцевих витрат:

$$J(Y,U) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (Y^T RY + (U - U_0)^T S(U - U_0)dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega ((Y^T QY) \mid_{t=T})dx$$

Завершуючи постановку задачі наведемо граничні та початкові умови: $Y \mid_{t=0} = Y_0(x)$, для $x \in \Omega$; $-D\frac{\partial Y}{\partial x} \mid_{x\in\partial\Omega} = 0, t \in [0,T]$.

Отриману задачу розв'язуємо варіаційним методом, а саме методом множників Лагранжа [2] для отримання рівняння стану та допоміжного рівняння, а також обчислювальним — інтегро–інтерполяційним методом побудови різнецевих схем [3].

Результати обчислюваного експерименту свідчать, що точкове керування дає значно ефективніший результат і призводять до суттєвого зменшення пухлини одразу після введення ліків. Отримані результати є необхідним фундаментом для подальших досліджень, що базуватимуться на переході до просторової задачі, вдосконаленні методу її розв'язування та вивченні умов існування і єдиності розв'язку векторної задачі оптимального керування.

1. *S. P. Chakrabarty and F. B. Hanson* Optimal controle of drug delivery to brain tumors for a distributed parameters model // Proceedings of American Control Conference. — 2005. — P. 973–978.
2. *Max D. Gunzburger* Perspectives in Flow Control and Optimization // SIAM, Philadelphia — 2003.
3. *А. А. Самарский* Теория разностных схем // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», Москва — 1977. — 656 р.

Программное управление с вероятностью 1 динамических систем с сильными возмущениями

Карачанская Е.
Karachanskaya@mail.khstu.ru
(Тихоокеанский госуниверситет, Россия, Хабаровск)

Сильными будем называть возмущения, составной частью которых являются импульсные изменения параметров системы, вызванные скачками пуассоновского процесса. Подобные системы описываются уравнениями вида:

$$d\mathbf{x}(t) = A(t;\mathbf{x}(t))dt + B(t;\mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} \nu(dt;d\gamma)G(t;\mathbf{x}(t);\gamma), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный винеровский процесс; $\nu(\Delta t;\Delta\gamma)$ – стандартная пуассоновская мера на $\mathbb{R}^{n'} \times [0,T]$, моделирующая независимые случайные величины на интервалах и множествах, которые не пересекаются в пространстве $\gamma \in R(\gamma) = \mathbb{R}^{n'}$; коэффициенты $a_i(t;\mathbf{x})$, $b_{ik}(t;\mathbf{x})$ и $g_i(t;\mathbf{x};\gamma)$ уравнения (1) выбраны таким образом, чтобы были обеспечены условия существования и единственности решения.

Если уравнение движения системы представить в виде:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t) = \Big[P(t;\mathbf{x}(t)) + Q(t;\mathbf{x}(t))\cdot \mathbf{s}(t;\mathbf{x}(t))\Big]dt + B(t;\mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \\ + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} G(t;\mathbf{x}(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma), \qquad \mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o)\Big|_{t=0} = \mathbf{x}_o, \end{aligned} \tag{2}$$

то можно можно построить с вероятностью, равной 1, континуум программных управлений $\big\{\mathbf{s}(t;\mathbf{x}(t);f_j)\big\}_j$, позволяющих системе (2) оставаться на заданном интегральном многообразии $u\big(t;\mathbf{x}(t;\mathbf{x}_o);\omega\big) = u(0;\mathbf{x}_o)$ сколь угодно долгое (или необходимое) время [1]. Наличие построенного континуума управлений дает возможность выбрать наиболее подходящий для реализации набор функций $\{f_j\}$ и определить конкретное управление.

Построение таких управлений обусловлено получением обобщенной формулы Ито-Вентцеля [2,3,4]; возможностью определения коэффициентов системы обобщенных стохастических ДУ (ОСДУ) вида (1) [5], рассматривая функцию $u(t;\mathbf{x})$ как первый интеграл системы ОСДУ (1); и алгоритмом нахождения континуума преобразований, обеспечивающих автоморфизм для заданной функции [6,7].

1. *Карачанская Е. В.* Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями // Вестник Тихоокеанского госуниверситета – 2011. – № 2(21). – С. 51–60.
2. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы // Перша мiжнародна науково-практична конференцiя "Вiдкритi еволюцiонуючi системи" (26-27 квiт. 2002 р., Київ) – 2002. – С. 14–31.
3. *Карачанская Е. В.* Об одном из обобщений формулы Ито-Вентцеля // Обозрение прикладной и промышленной математики – 2011. – **18**, № 18. – С. 494–496.
4. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* О двух подходах к построению обобщенной формулы Ито-Вентцеля (Препринт / Вычислительный центр ДВО РАН; № 174) / Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та – 2012. – 27 с.
5. *Карачанская Е. В.* Построение множества дифференциальных уравнений с заданным множеством первых интегралов // Вестник Тихоокеанского госуниверситета – 2011. – № 3(22). – С. 47–56.
6. *Дубко В. А.* Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции // Друга мiжнародна науково-практична конференцiя «Вiдкритi еволюцiонуючi системи» (1-30 грудня 2003 р., Київ.) – 2004. – **II**. – С. 66–68.
7. *Дубко В. А., Карачанская Е. В.* Нахождение автоморфных преобразований для заданной функции // Торическая топология и автоморфные функции: тезисы докладов Международной конференции, Хабаровск, 5–10 сентября 2011 г. Хабаровск : Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та – 2011. – С. 143.

Модель розповсюдження радіоактивної суміші ізотопів: радіоактивного тритію (tritium 3h) та нерадіоактивного гелію-3 (helium-3)

Клюшин Д.А., Стешенко Г.М.
grrtt@mail.ru
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

У даній роботі на основі моделі, яка була запропонована Дугласом (Douglas) та Спаньоло (Spagnuolo) [4], що описує процес переносу суміші через пористе середовище, було розв'язано за допомогою чисельних методів, зокрема DC-алгоритму [1], який є абсолютно стійким і не вимагає розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному часовому кроці, практичну задачу моделювання розповсюдження радіоактивної суміші. Дана суміш складається з двох ізотопів: радіоактивного трітія (tritium 3H) та нерадіоактивного гелія-3 (helium-3), причому період піврозпаду трітія у гелій складає 4500 днів. Отримані результати дають змогу, використовуючи дані спостережних свердловин, виявляти джерела виникнення радіоактивного забруднення та ефективно їх ліквідовувати.

1. *Самарский А.А.* Критерий устойчивости семейства разностных схем./ А.А.Самарский А.В.Гулин. // Доклады РАН. – 1993. – Т.330. – **№6** . – С. 694-695.
2. *Choquet C.* Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity / C. Choquet // Asymptotic Analysis. – 2004. – **№ 37**. – P. 57-78.
3. *Choquet C.* Radionuclide transport model with wells / C. Choquet // Journal of Mathematics and Fluid Mechanics. – 2004. – **№ 6**. – P. 365-388.
4. *Douglas J. Jr.* The transport of nuclear contamination in fractured porous media / J. Jr. Douglas, A. Spagnuolo. // Journal of Korean Mathematical Society. – 2001. – **№ 38**. – P. 723-761.

Узагальнена розв'язність інтегро–диференціальних рівнянь еліптичного типу

Коляденко М.П., Анікушин А.В.

anik_andrii@ukr.net

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

У роботі [1] було розглянуто математичні моделі, що виникають в задачах теорії плазми і лінійної теорії спінових хвиль. Наприклад, електронно-іонні хвилі в холодній "замагніченій" плазмі, електронні хвилі в холодній плазмі у зовнішньому полі, спінові хвилі в однорідному фериті типу "легка вісь", спінові хвилі в двопідгратковому антиферомагнетику типу "легка площина" тощо. Ці моделі описуються інтегро-диференціальними рівняннями еліптичного типу. У роботі [2] було досліджено такі рівняння, доведено апріорні нерівності та доведено теореми про існування та єдиність узагальненого розв'язку для таких рівнянь. Дана робота продовжує результати отримані у [2].

Розглянемо лінійний оператор

$$Lu = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{3} \beta_i(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + \gamma(x) u(x,t) +$$

$$+ \int_0^t \sum_{i=1}^{3} K_i(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x_i^2} d\tau + \int_0^t \sum_{i=1}^{3} R_i(t,\tau) \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i} d\tau + \int_0^t S(t,\tau) u(x,\tau) d\tau,$$

де $u(x,t)$ — функція, що описує стан системи в області $Q = \Omega \times (0,T)$, Ω — обмежена область в тривимірному просторі з гладкою межею $\partial\Omega$. Будемо вважати, що K_i, R_i, S — обмежені, інтегровані ядра, а β_i, γ — обмежені, інтегровані та задовольняють умову:

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_{i x_i}(x) \geq 2\gamma(x), \;\; x \in \Omega.$$

Через W_{BR}^{+} позначимо поповнення простору гладких функцій, що задовольняють однорідні граничні умови за нормою

$$||u||^2_{W_{BR}^{+}} = \sum_{i=1}^{3} \int_Q u^2_{x_i}(x,t) dQ.$$

Через W_{BR}^{-} позначимо негативний простір, побудований за W_{BR}^{+} відносно $L_2(Q)$.

Лема. Існують такі сталі $c_0, c_1 > 0$, що для довільної функції $u \in W_{BR}^{+}$ виконується нерівність:

$$c_1 ||u||_{W_{BR}^{+}} \geq ||Lu||_{W_{BR}^{-}} \geq c_0 ||u||_{W_{BR}^{+}}.$$

Розглянемо задачу

$$Lu = F, F \in W_{BR}^{-}.$$

На основі отриманих апріорних нерівностей, використовуючи методику з [3], доведено існування та єдиність розв'язку вказаної задачі.

1. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа // М.: Физматлит, 2007. – 734 с.
2. *Анікушин А.В.* Узагальнена розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу // Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – № 3. – С. 163–168.
3. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами // К.: Наукова думка, 1998. – 465 с.

Стаціонарне матричне диференціальне рівняння Ріккаті

Копець М.М.
e-mail:miroslav1941@windowslive.com
(НТУУ „Київський політехнічний інститут“, Україна, Київ)

Розглядається наступна *задача оптимального керування* лінійною системою із розподіленими параметрами: знайти мінімальне значення функціонала

$$I(\mathbf{u},\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_0^l [\mathbf{z}^*(t,x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{u}^*(t,x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t,x)]dxdt \tag{1}$$

на множині розв'язків залежного від параметра $\mathbf{u}(t,x)$, що називається *керуванням*, рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t,x), \tag{2}$$

де $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{F}$ — задані квадратні матриці розміру nxn, $\mathbf{G}$ — задана квадратна матриця розміру mxm, $\mathbf{C}$ — задана прямокутна матриця розміру nxm, причому елементи всіх пяти матриць — дійсні числа, матриця $\mathbf{F}$ — симетрична невід'ємно визначена, матриця $\mathbf{G}$ — симетрична додатно визначена, $\mathbf{z}(t,x)$ — n–мірна вектор–функція, $\mathbf{u}(t,x)$ — m–мірна вектор–функція, $t_0 \geq 0$, $l > 0$ — задані дійсні числа. Для рівняння (2) пропонуються наступні додаткові умови

$$\mathbf{z}(t_0,x) = \mathbf{z}_0(x),\ \mathbf{z}(\infty,x) = \mathbf{0},\ \mathbf{z}(t,0) = \mathbf{h}(t), \tag{3}$$

де $\mathbf{z}_0(x)$ і $\mathbf{h}(t)$ — задані n–мірні вектор–функції. Керування $\mathbf{u}^0(t,x)$, на якому реалізується мінімум функціонала (1), називається оптимальним керуванням, а відповідний йому розвязок $\mathbf{z}^0(t,x)$ задачі (2)–(3) — оптимальним процесом. Дослідження задачі оптимізації (1)–(3) виконано за допомогою *методу множників Лагранжа*[1, с.31]. Символом $\mathbf{A}^*$ позначатимемо транспоновану матрицю $\mathbf{A}$. Аналогічно позначаються транспоновані матриці $\mathbf{B}$ і $\mathbf{C}$. За умови, що розвязок цієї задачі оптимізації існує, доведено наступне твердження.

Теорема 1. Єдине оптимальне керування $\mathbf{u}^0(t,x)$ та відповідне йому оптимальний процес $\mathbf{z}^0(t,x)$ в задачі оптимального керування (1)–(3) можна знайти із наступної системи рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t,x), \tag{4}$$

$$\mathbf{z}(0,x) = \mathbf{z}_0(x),\ \mathbf{z}(\infty,x) = \mathbf{0},\ \mathbf{z}(t,0) = \mathbf{h}(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}^*\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{B}^*\mathbf{p}(t,x) - \mathbf{F}^*\mathbf{z}(t,x), \tag{6}$$

$$\mathbf{p}(\infty,x) = \mathbf{0},\ \mathbf{p}(t,0) = \mathbf{0},\ \mathbf{p}(t,l) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\mathbf{G}\mathbf{u}(t,x) + \mathbf{C}^*\mathbf{p}(t,x) = \mathbf{0}, \tag{8}$$

З рівняння (8) можна виразити $\mathbf{u}(t,x)$ через $\mathbf{p}(t,x)$ і підставити в рівняння (4). Вважаємо, що $\mathbf{p}(t,x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{z}(t,x)$, де матричнозначну функцію $\mathbf{R}(x)$ потрібно знайти. На підставі співвідношень (4)–(7) приходимо до наступного висновку.

Теорема 2. Матричнозначна функція $\mathbf{R}(x)$ є розв'язком такого *стаціонарного матричного диференціального рівняння Ріккаті*

$$\mathbf{A}^* \frac{dR(x)}{dx} = \mathbf{F} + \mathbf{B}^*\mathbf{R}(x) + \mathbf{R}(x)\mathbf{B} - \mathbf{R}(x)\mathbf{C}\mathbf{G}^{-\mathbf{1}}\mathbf{C}^*\mathbf{R}(x)$$

з додатковими умовами

$$\mathbf{A}^*\mathbf{R}(x) = \mathbf{R}(x)\mathbf{A},\ \mathbf{R}(0) = \mathbf{0},\ \mathbf{R}(l) = \mathbf{0}.$$

З допомогою матричнозначної функції $\mathbf{R}(x)$ оптимальне керування $\mathbf{u}^0(t,x)$ та мінімальне значення функціонала (1) можна виразити наступним чином.

Теорема 3. Оптимальне керування має вигляд $\mathbf{u}^0(t,x) = -\mathbf{G}^{-\mathbf{1}}\mathbf{C}^*\mathbf{R}(x)\mathbf{z}^0(t,x)$, де оптимальний процес $\mathbf{z}^0(t,x)$ задовольняє співвідношенням

$$\frac{\partial \mathbf{z}^0(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{z}^0(t,x)}{\partial x} + [\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{G}^{-\mathbf{1}}\mathbf{C}^*\mathbf{R}(x)]\mathbf{z}^0(t,x),$$

$$\mathbf{z}^0(0,x) = \mathbf{z}_0(x),\ \mathbf{z}^0(\infty,x) = \mathbf{0},\ \mathbf{z}^0(t,0) = \mathbf{h}(t).$$

Для обчислення мінімального значення функціонала (1) маємо формулу

$$I_{min}(\mathbf{u^0}, \mathbf{z^0}) = \frac{1}{2}\int_0^l \mathbf{z^{0*}}(t_0,x)\mathbf{R}(x)\mathbf{z^0}(t_0,x)dx.$$

1. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1977. — 480 с.

Метод последовательного раскрытия модулей для решения задач негладкой оптимизации

Косолап А.И.
e-anivkos@ua.fm
(Украинский химико–технологический университет, Украина, Днепропетровск)

Рассмотрим задачу оптимизации с ограничениями в конечномерном евклидовом пространстве

$$\min\{f_0(x)|f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, x \in E^n\}, \tag{1}$$

где все $f_i(x)$ — выпуклые функции, которые могут быть негладкими. Чаще всего негладкость функций порождается тем, что $f_i(x)$ содержат модули. Негладкость функций возникает также при преобразовании задачи (1) к задаче безусловной оптимизации с использованием точной штрафной функции [1]

$$\min\{f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} r(f_i(x) + |f_i(x)|), x \in E^n\}, \tag{2}$$

где $r > 0$. Однако минимизируемая функция задачи (2) — недиффиринцируемая, что создает проблемы при нахождении ее точки минимума. Методы недиффиринцируемой оптимизации [2] значительно уступают эффективным методам гладкой оптимизации. Покажем, что задача (2) преобразуется к решению последовательности гладких задач оптимизации. Преобразуем задачу (2) к виду

$$\min\{x_{n+1}|f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} r(f_i(x) + |f_i(x)|) \leq x_{n+1}, x \in E^{n+1}\}, \tag{3}$$

Пусть $x^0 \in E^{n+1}$ — произвольная начальная точка. Раскроем модули задачи (3) в этой точке и решим гладкую задачу

$$\min\{x_{n+1}|f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} r(f_i(x) + \alpha_{ij}(f_i(x))) \leq x_{n+1}, x \in E^{n+1}\}, j = 0, 1, ..., k, \tag{4}$$

где $\alpha_{ij} = 1$, если $f_i(x^0) \geq 0$ и $\alpha_{ij} = -1$, если $f_i(x^0) < 0, k = 0$. Решение задачи (4) будет нижней оценкой решения задачи (3), что вызвано релаксацией ограничений. Поэтому, если решение задачи (4) (x^1, x^1_{n+1}) допустимо для задачи (3), то x^1 — решение задачи (1). В противном случае, раскрываем модули задачи (3) в точке x^1 (вычисляем α_{i1}) и добавляем соответствующее ограничение в задачу (4) ($k = 1$). Снова решаем задачу (4) и, если ее решение допустимо для задачи (3), то задача (1) решена. Для получения оптимального решения задачи (1) необходимо решить только конечное число задач (4), так как допустимая область задачи (2) определяется конечным числом гиперповерхностей.

Таким образом, задача негладкой оптимизации (3) свелась к решению последовательности гладких задач (4). Численные эксперименты показали эффективность рассмотренного метода последовательного раскрытия модулей.

1. *Fletcher R.* Practical Methods of Optimization: second edition. — N.Y.: John Wiley & Sons. — 2000. — 451 p.
2. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — К.: Наук. думка, 1979. — 200 с.

Аналіз погано обумовлених задач лінійного програмування в середовищі MATLAB

Кудін В.І., Никитішен Т.О., Оноцький В.В.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Задачі лінійного програмування (ЗЛП) можна розглядати як ускладнення моделей лінійних систем рівнянь (СЛАР) та нерівностей (СЛАН). Крок ітераційного методу розв'язання ЗЛП — розв'язання СЛАР [1–3]. Відомо, що за своїми структурними властивостями такі моделі можуть бути некоректними. Однією з проявів некоректності є властивість поганої обумовленості [1–2]. Для тестування відомих схем розв'язання даного класу задач розроблено ряд бібліотек моделей систем з погано обумовленими матрицями обмежень [2]. Зокрема, до таких матриць належить матриця Гільберта.

В даній роботі досліджено вплив поганої обумовленості на ітераціях методів реалізованих в MATLAB (в вершинах багатогранної множини як для СЛАР) на обчислювальні властивості, вцілому, для більш складного класу лінійних моделей — ЗЛП.

Застосування симплексної ідеології на основі (в середовищі Matlab) дає змогу досліджувати властивості розв'язків СЛАР, СЛАН та не вироджені ЗЛП великої розмірності, досліджувати властивості розв'язків СЛАР з погано обумовленими матрицями та ЗЛП МБМ (технології довгої арифметики) контролювати процес входження обчислень в стан поганої обумовленості системи „правильним" вводом–виводом в базисну матрицю на ітераціях методу базисних матриць [4]; будувати початкові (та оптимальні) розв язки задач на основі тривіальних базисних матриць, що виключає трудомісткі початкові обчислення.

Результат експерименту вказує на залежність (нелінійну, немонотонну) числа обумовленості (і точності результатів) як від порядку вводу–виводу в базисну матрицю так і від значення ведучого елемента та норми стовпця оберненої матриці. Це говорить про доцільність розробки оцінювачів обумовленості системи в ході обчислень з використанням властивостей елементів методу базисних матриць.

1. *Метьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. — Москва–С.–Петербург–Киев: Вильямс, 2001. — 703 с.
2. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение. — М.: Мир, 2001. — 430с.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы линейного программирования. Общие задачи. — Минск: Изд–во Белорус. ун–та, 1977. — 175 с.
4. *Ляшко С.И., Кудин В.И., Оноцкий В.В.* О технологии длинной арифметики при построении алгоритмов исследования линейных систем, Компьютерная математика, — 2009, — №2. — С. 101–109

Про аналіз властивостей матричної гри у змішаних стратегіях методом базисних матриць

Кудін В.І., Оноцький В.В., Тодоріко Б.Д.
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Математичний апарат задач лінійного програмування (ЗЛП) можна розглядати як інструментарій дослідження властивостей матричних ігор у змішаних стратегіях. Розв'язок матричної гри - аналогічний дослідженню двоїстої пари ЗЛП з особливостями (одиничними векторами нормалі цільової функції, обмежень та невід'ємністю змінних) [1]. Додаткові особливості на процес розв'язання може накласти структура прямокутної платіжної матриці, зокрема, погана обумовленість систем (квадратних підматриць) на ітераціях методу типу симплекс [1–2]. Важливою ознакою методу розв'язання матричної гри є встановлення властивості суттєвості чистих стратегій ігроків для розв'язку задачі у змішаних стратегіях. Це аналог оптимальної активності обмежень відповідної (прямої та двоїстої) ЗЛП. [3].

В даній роботі досліджено обчислювальні властивості методу базисних матриць (МБМ) [3] та методів „закладених" в MATLAB: для моделей різної розмірності, з єдиними, неєдиними розв'язками для матричної гри у змішаних стратегіях. Зокрема, проаналізовано вплив поганої обумовленості на ітераціях методів на обчислювальні властивості, вцілому, для більш складного класу лінійних моделей — ЗЛП. Встановлено умови суттєвості чистих стратегії в матричній грі зі змішаними стратегіями та встановлено зв'язок з умовами неєдиності, оптимально-активності обмежень відповідної пари ЗЛП. Наведено результати обчислювального експерименту на моделях різної розмірності з використанням методів MATLAB (модифікований симплекс метод та метод внутрішніх точок) та реалізації МБМ.

1. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Новые направления в линейном программировании. — Москва: Изд–во Советское радио, 1960. — 524 с.
2. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложение. — М.: Мир, 2001. — 430с.
3. *Кудін В.І., Ляшко С.І., Яценко Ю.П., Хритоненко Н.В.* Метод штучних базисних матриць // Доповіді НАН України, 9, 2007, с. 30–34.

Основні напрями моделювання теплового самозаймання пиловугільних сумішей

Кузьменко Б.В., Мальчевський І.А.
bkuzmenko@i.ua, mal@nas.gov.ua
(Інститут вугільних енерготехнологій НАНУ,Україна, Київ,
Президія Національної академії наук України, Україна, Київ)

Розрізняють наступні типи систем теплового самозаймання пиловугільних сумішей: детерміновані, стохастичні та нечіткі, яким відповідають відповідні типи математичних моделей, [1]. В основу цих моделей у всіх випадках покладаються рівняння балансів: теплового; матеріального за витратою вугільної сировини, відносно якої відбувається теплове самозаймання; матеріального за витратою кисню (окислювача). Нами вперше встановлено наступне рівняння теплового балансу, яке враховує теплове випромінювання

$$\frac{d\overline{\theta}}{d\chi} = \overline{C}(\alpha\overline{C} + 1 - \alpha)\frac{1}{\theta^2}e^{-\frac{1}{\theta}} - \Omega(\overline{\theta} - \overline{\theta}_1) - \varsigma(\overline{\theta}^4 - \overline{\theta}_1^4),\ \chi = \chi_0,\ \overline{\theta} = \theta_0,\ \overline{C} = \overline{C}_0, \qquad (1)$$

де $\overline{\theta}$,$\overline{C}$ — відносні величини температури та концентрації за киснем пиловугільної суміші; Ω, ς, α, θ_1 — відповідно, безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі в навколишнє середовище, коефіцієнт теплового випромінювання; стехіометрична стала та відносна величина температури навколишнього середовища; χ, χ_0, $\overline{\theta}$, ${}_0\overline{C}_0$ — відповідно, фактор часу та його початкове значення, початкові значення, відповідно температури та концентрації. В момент теплового самозаймання

$$\frac{d\overline{\overline{\theta}}}{d\chi} = 0.$$

Для стохастичних умов теплового самозаймання до правої частини ріняння (1), як і інших рівнянь математичної моделі, додається випадкова складова, типу $\varphi \cdot \nu(\chi)$, де $\nu(\chi)$ — випадкова величина, що визначає стохастичність процесів у системі, що моделюється. В результаті стохастичного моделювання отримується диференціальна функція розподілу положення точки самозаймання, або моменту теплового самозаймання. Для нечітких умов перебігу теплового самозаймання задача моделювання теплового самозаймання полягає в отриманні виразу для характеристичної функції належності для часу або геометричного положення відповідної точки $\mu(\theta, \chi)$ з відповіднимиумовами існування та єдності розв'язку, відповідне рівняння має вигляд:

$$\frac{\partial^2\mu(\overline{\theta}, \chi)}{\partial\overline{\theta}\partial\chi} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}[a(\overline{\theta}, \chi)\mu(\overline{\theta}, \chi)] + 0.5\frac{\partial^3[d(\overline{\theta}, \chi)\mu(\underline{\overline{\theta}}, \chi)]}{\partial\overline{\theta}^3}.$$

1. *Кузьменко Б.В., Лисенко В.П.* Теплове самозаймання паливних сумішей. Монографія. — К.: ФЕНІКС, 2010. — 200 с.

Диференціальні інваріанти векторного поля на неевклідовій площині

Лісняк В.С.

v-lisnyak@univ.kiev.ua

(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Супровідний орторепер $\mathbf{K} \equiv (M;\ \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1)$ часуподібного векторного поля $\mathbf{E}$ з локальними векторами $\mathbf{e}$ виберемо так щоб $\mathbf{e} = \lambda \mathbf{k}_0,\ \ \lambda > 0$. Тоді з дериваційних рівнянь $d\mathbf{M} = w^s \mathbf{k}_s$ та $d\mathbf{k}_r = w_r^m \mathbf{k}_m$ виходить, що незмінність $\mathbf{e}$ забезпечується виконанням рівностей $w^n = 0$, w_0^1=0; $d\lambda = 0$, як рівносильних з $d\mathbf{M} = 0$ та $d\mathbf{e} = 0$, відповідно. Якщо за базисні форми взяти саме w^0 та w^1, то дістаємо вихідні залежності $w_0^1 = a_0 w^0 + a_1 w^1$, $d\lambda = \lambda_0 w^0 + \lambda_1 w^1$.

Оскільки у кожній точці M області Ω задання поля $\mathbf{E}$ у ${}^1\mathbf{V}_2$ орторепер $\mathbf{K}$ однозначно визначений, то і функції a_s та λ_k є диференціальними інваріантами поля $\mathbf{E}$. Для з'ясування їхнього геометричного змісту можна розглянути комплекси прямих C_0 та C_1, утворені прямими $m_0 : \quad \mathbf{M} + \tau^0 \mathbf{k}_0$ та $m_1 : \quad \mathbf{M} + \tau^1 \mathbf{k}_1$ і знайти точки $\mathbf{F}_0$ та $\mathbf{F}_1$ їх перетину з їм нескінченно близькими прямими $m_0 + dm_0$ і $m_1 + dm_1$, відповідними зміщенню $d\mathbf{M}$ точки M прикладення вектору $\mathbf{e}$ поля $\mathbf{E}$.

Точка $\mathbf{F}_0$ визначається з $\mathbf{M} + \tau^0 \mathbf{k}_0 = \mathbf{M} + d\mathbf{M} + (\tau^0 + d\tau^0)(\mathbf{k}_0 + +d\mathbf{k}_0)$, а з цього $w^0 \mathbf{k}_0 + w^1 \mathbf{k}_1 + \tau^1 w \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 d\tau^1 = 0$. Врахування ж вихідних залежностей приводить до системи рівнянь $\{w^0 + d\tau^0 = 0,\ w^1 + \tau^0(a_0 w^0 + a_1 w^1) = 0$. З неї видно, що τ^0, а тому й $\mathbf{F}_0$ істотно залежать від напряму зміщення $d\mathbf{M}$ точки M. Ці $d\mathbf{M}$ слід обирати чимось характерними — геометрично осмисленими. Візьмемо $d\mathbf{M}||\mathbf{k}_0$. Тоді $w^1 = 0$ й з останнього рівняння системи $\{...$ одержується $\tau^0 a_0 w^0 = 0$. Рівність $w^0 = 0$ тут неможлива, бо разом з $w^1 = 0$ це означало б $d\mathbf{M} = 0$ — незміщуваність M. Припущення $a_0 = 0$ означає, що поле $\mathbf{E}$ часткового класу. Залишається $\tau^0 = 0$, але цей випадок просто нецікавий. Отже, вибір зміщення $d\mathbf{M}||\mathbf{k}_0$ для m_0 виявився непродуктивним.

Розглянемо зміщення $d\mathbf{M}||\mathbf{k}_1$. Тоді вже $w^0 = 0$ і відразу одержується $w^1 + +\tau^0 a_1 w^1 = 0$, а тому й $a_1 = -1/\tau^0$. Таким чином, інваріант a_1 є протилежним оберненому значенню координати τ^0 точки F_0 на m_0.

Розглядаючи подібно C_1, тобто прямі m_1, точки F_1 і зміщення $d\mathbf{M}||\mathbf{k}_0$, прийдемо до $\mathbf{M} + \tau^1 \mathbf{k}_1 = \mathbf{M} + d\mathbf{M} + (\tau^1 + d\tau^1)(\mathbf{k}_1 + d\mathbf{k}_1)$, а зрештою і до рівності $a_0 = 1/\tau^1$, яка і з'ясовує диференціально-геометричний зміст інваріанту a_0. Що ж до функцій λ_0 та λ_1, то вони є коефіцієнтами розкладу диференціалу $d\lambda$ інваріантного скалярного поля λ за диференціальним базисом форм w^0 та w^1, відповідно. Отже, всі інваріанти $\mathbf{E}$ геометризовано.

Ізотропні вектори однакові з іншими у просторі V_2^1 відносно його лінійних властивостей, але мають своєрідні метричні відмінності, згідно вигляду $diag(-1,\ 1)$ матриці метричного тензору $\mathbf{g}$. Наприклад, два ізотропні вектори $\mathbf{p}$ та $\mathbf{q} = \lambda p$ з $\lambda \neq 0$ нерозрізнювані за їхніми довжинами, нульовими для них обох, але ж розрізнювані за координатами $(p^0,\ p^1)$ та $(q^0,\ q^1) = (\lambda p^0,\ \lambda p^1)$.

Моделювання теплового процесу під час електропластичного волочіння рухомого дроту

Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.
leca91@yandex.ru
(Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Україна, Кременчук)

Розглядається задача дослідження температурного поля рухомого ізотропного осесимметричного середовища із циклічно діючими джерелами тепла. Побудова математичної моделі була викликана проблемами, що виникли під час дослідження електропластичної деформації тугоплавких металів та сплавів на їх основі [1, 2]. До останнього часу залишалось нез'ясованим питання внеску температурного впливу імпульсного струму на підвищення пластичності металу під час ЕПВ. В даній роботі на основі нелінійної крайової задачі для рівняння теплопровідності була побудована, математична модель теплового процесу, що відбувається в рухомому дроті під час ЕПВ. Задача розв'язанна чисельним методом. Розрахунки температурних розподілів зроблені для цинку та вольфраму. Дані для чисельних експериментів узяті із публікації [1, 2]. Результати чисельного експерименту порівнювалися із результатами прямого замірювання температури у окремих точках області нагрівання [1, 2]. Чисельні розрахунки практично співпадають із значеннями температури, отриманими під час її замірювання за допомогою приладів і показують, що температура під час обробки дроту імпульсним струмом майже не підвищується, що свідчить про відсутність впливу температурного фактора на ефекти, які виникають під час ЕПВ.

1. *Спицын В.И.* Электропластическая деформация металлов / В.И. Спицын, О.А. Троицкий. — М.: Наука, 1985. — 160 с.2.
2. *Троицкий О.А.* Влияние длительности импульсов тока на скорость ползучести кристаллов цинка / О.А. Троицкий, В.И. Сташенко, В.И. Спицын // Металлы. — 1982. — № 1. — С. 164–168.

Квазістатичні задачі термопружності для оболонок податливих на зсув та стиск

Малець Р.
romannakhmil@yahoo.com
(Львівський національний університет ім.І.Франка, Україна, Львів)

Дане дослідження розглядає процес геометрично нелінійного деформування ізотропних оболонок податних на зсув і стиск під дією силових навантажень та нерівномірного нагріву.

У працях [1, 2] побудовано початково-крайові та відповідні варіаційні задачі динаміки та статики оболонок під дією силових навантажень. Основна особливість використаного в цих працях підходу полягає в напівдискретизації вектора зміщень пружного тіла за змінною товщини на основі кінематичних гіпотез Тимошенка–Міндліна зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Вихідні співвідношення моделі містять як невідомі — зміщення серединної поверхні оболонки та повороти її нормалі. Встановлено умови коректності варіаційних задач статики та динаміки лінійної шестимодальної теорії оболонок Тимошенка–Міндліна, побудовані оцінки збіжності чисельних розв'язків поставлених задач. Сукупність результатів праць [1, 2] служить ґрунтовною основою для продовження дослідження цього класу моделей оболонок.

Насамперед сформульована задача термопружності для зсувних оболонок. Модель побудована на основі геометрично нелінійної теорії оболонок Тимошенка—Міндліна [3], що зберігає прямолінійність нормального елемента недеформованої оболонки після її навантаження, але може змінювати свою довжину і може бути неортогональним до деформованої серединної поверхні. Цю гіпотезу відображає шестимодальний варіант рівнянь переміщень точок облонки, який у поєднанні із співвідношеннями нелінійної теорії пружності, зв'язує переміщення серединної поверхні оболонки із компонентами тензора деформацій Гріна. Для врахування, окрім силового навантаження, впливу температурного поля на деформацію тонкостінних конструкцій використано гіпотезу Дюгамеля—Неймана.

Сформульовано крайову задачу про статичну рівновагу оболонок податливих на зсув та стиснення. Варіаційні принципи термопружності, за допомогою яких розвинуті наближені методи розв'язування задач термопружності, аналогічні до відомих варіаційних методів розв'язування задач ізотермічної теорії пружності [4]. Вони базуються на узагальненому варіаційному принципі Лагранжа і виразах, що апроксимують можливі переміщення та можливі напруження, і принципі мінімуму енергії деформації. Доведено коректність варіаційних задач лінійного деформування зсувних оболонок довільної форми під дією термосилового навантаження.

Наведено також розв'язування геометрично нелінійних задач статики методом скінченних елементів та аналіз числових результатів модельних задач деформування зсувних оболонок під дією термосилового навантаження.

1. *Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А.* Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статики зсувних оболонок // Матем. методи та фіз.–мат. поля. — 1999. — **42**, № 2. — С.53–61.
2. *Іванова Н. В.* Чисельне моделювання поводження гнучких зсувних оболонок з деформівною нормаллю : Дис... канд. наук: 01.01.07 — 2000.
3. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. — Рига: Зинатне. — 1988. — 284 с.
4. *Лейбензон Л. С.* Теория упругости. —- Собр. трудов, т. 1. М., Изд–во АН СССР. —- 1951.

Застосування принципу рівноваги до розв'язування жорстко некоректних задач

Милейко Г.Л., Солодкий С.Г.

anna_mileyko@ukr.net, solodky@imath.kiev.ua

(Інститут математики НАН України, Україна, Київ)

Розглянемо проблему наближенного розв'язування жорстко некоректних задач, що задаються у вигляді операторного рівняння I роду

$$Ax = y, \tag{1}$$

де $A : X \to Y$ — лінійний компактний ін'єктивний оператор, що діє між гільбертовими просторами X і Y. Будемо припускати, що замість y відоме деяке збурення $y_\delta \in Y$: $\|y - y_\delta\| \le \delta, \delta > 0$, а замість A — оператор $A_h : \|A - A_h\| \le h, h > 0$, где $A_h : X \to Y$ — також лінійний ін'єктивний компактний оператор.

Слідуючи [1], будемо припускати, що x_0 належить множині

$$M^K_{p,\rho}(A) := \{x : x = (\underbrace{\ln ... \ln}_{K-\text{разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}v, \quad \|v\| \le \rho\}, \tag{2}$$

при деяких невідомих $0 < p \le p_1, K = 1, 2, ...$ й відомому $\rho > 0$, де операторна функція $(\underbrace{\ln ... \ln}_{K-\text{разів}}(A^*A)^{-1})^{-p}$ задається спектральним розкладом оператора A^*A.

Для стійкого розв'язування задачі (1) ми застосуємо ітерований метод Тіхонова з принципом рівноваги (див. [2]).

Нагадаємо (див., наприклад, [3]), що ітерований метод Тіхонова полягає у виборі натурального m, початкового наближення $x^{h,\delta}_{0,\alpha}$ та послідовному обчислюванні елементів $x^{h,\delta}_{i,\alpha}, i = 1, 2, ..., m$ за правилом

$$x^{h,\delta}_{i,\alpha} = \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} x^{h,\delta}_{i-1,\alpha} + \alpha(A^*_h A_h + \alpha I)^{-1} A^*_h y_\delta.$$

А також зазначимо, що у рамках принципу рівноваги, за параметр регуляризації береться елемент

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\Delta_N)\}, \tag{3}$$

де

$$\Delta_N = \{\alpha_i = (q^2)^i \alpha_0, i = 1, 2, ..., N\}, \quad q > 1, \quad \alpha_0 = n(h + \delta)^2, \quad N : \alpha_N \asymp 1,$$

та

$$M^+(\Delta_N) = \{\alpha_i \in \Delta_N : \|x^{h,\delta}_{m,\alpha_i,n} - x^{h,\delta}_{m,\alpha_j,n}\| \le 4\Psi(\alpha_j), \quad j = 1, 2, ..., i\},$$

де $\Psi(\alpha)$ — одна з функцій, що визначає величину похибки, монотонно спадна.

Теорема. Нехай $x_0 \in M^K_{p,\rho}(A), \quad 0 < p \le p_1, \quad K = 1, 2, ...$ і параметр регуляризації обирається згідно правилу (3). Тоді для довільних $\delta, h > 0$ похибка має порядок

$$O\left(\left[\underbrace{\ln ... \ln}_{K-\text{разів}} \frac{\rho}{\rho c_1 h + c_2 \delta} \right]^{-p} \right).$$

1. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами // М.: Едиториал УРСС — 2002, — с. 192.
2. *Pereverzev S., Schock E.* On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — №43, — P. 2060–2076.
3. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах // М.: Наука — 1986, — с. 181.

О сходимости разностных схем для задачи динамики вязкой стратифицированной жидкости

Москальков М.Н., Утебаев Д.

moskalkov@hotmail.com , dutebaev_56@mail.ru

(Национальный авиационный университет, Украина, Киев,

Каракалпакский госуниверситет имени Бердаха, Узбекистан, Нукус)

В настоящей работе рассматриваются задача [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}L_1 u + \frac{\partial}{\partial t}L_2^2 u + L_3 u = f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, \ 0 < t \leqslant T\},$$

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \Omega\,, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t \in [0,T],$$

$$L_q u = -\sum_{m=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(k_m^q(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right), \ 0 < k_0 \leqslant k_m^q(x) \leqslant k_1, \ q = \overline{1,3}\,, \ x \in \Omega \subset R^p, \ p = 1,2,\ldots.$$

Сначала аппроксимируем, пространственные переменные на основе метода конечных элементов, в результате чего получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D\frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B\frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \ \ u_h(0) = u_{0,h}, \ \ \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}, \tag{1}$$

где $u_h(t)$ — элемент конечномерного пространства $H_h \forall t; D,\ B,\ A$ — операторы из H_h в H_h (им соответствуют матрицы массы и жесткости).

Далее, для решения задачи (1) применяется многопараметрическая схема метода конечных элементов четвертого порядка точности по времени [2]:

$$D_\gamma \dot{y}_t + By_t + A\frac{\hat{y} + y}{2} = \varphi_1, \ \ D_\alpha y_t - \tau^2\gamma B\dot{y}_t - D_\beta\frac{\hat{\dot{y}} + \dot{y}}{2} = \varphi_2, \ \ y^0 = u_0, \dot{y}^0 = u_1. \tag{2}$$

Здесь

$$y = y^n = y(t_n), \ \hat{y} = y^{n+1}, \ \dot{y} = \dot{y}^n = \frac{dy}{dt}(t_n),$$

$$D_\gamma = D - \gamma\tau^2 A, \ D_\alpha = D - \alpha\tau^2 A, \ D_\beta = D - \beta\tau^2 A,$$

$$\varphi_1 = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_1(\xi)d\xi, \quad \varphi_2 = \int\limits_0^1 f(t_n + \tau\xi)\vartheta_2(\xi)d\xi,$$

$$\vartheta_1(\xi) = p_1\vartheta_1^{(1)}(\xi) + p_2\vartheta_1^{(2)}(\xi), \quad \vartheta_2(\xi) = s_1\vartheta_2^{(1)}(\xi) + s_2\vartheta_2^{(2)}(\xi), \quad \xi = (t - t_n)/\tau,$$

$$\vartheta_1^{(1)}(\xi) = 1, \ \ \vartheta_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \ \ \vartheta_2^{(1)}(\xi) = \tau\left(\xi - 1/2\right), \ \ \vartheta_2^{(2)}(\xi) = \tau\left(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2\right),$$

$$p_1 = 6 - 60\gamma, \quad p_2 = 30 - 360\gamma, \quad s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — параметры, которые подчиняются условию четвертого порядка аппроксимации

$$\alpha + \gamma = \beta + 1/6.$$

Высокий порядок точности схемы достигается за счет специальной дискретизации временной и пространственных переменных. Доказана устойчивость и сходимость построенных алгоритмов. Получены априорные оценки в различных нормах, которые используются в дальнейшем для получения согласованных оценок точности схемы при слабых предположениях о гладкости решений дифференциальных задач.

Схема (2) имеет определенные преимущества перед другими схемами:

- схема высокого порядка точности (выше двух);
- кроме самого решения, одновременно находитися и её производная (скорость) с той же точностью;
- используя интерполяционное представление

$$y(t) = y^n\varphi_{00}^n(t) + \dot{y}^n\varphi_{10}^n(t) + y^{n+1}\varphi_{01}^n(t) + \dot{y}^{n+1}\varphi_{11}^n(t),$$

$\varphi_{00}^n(t) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1,\ \varphi_{01}^n(t) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \varphi_{10}^n(t) = \tau(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi),\ \varphi_{11}^n(t) = \tau(\xi^3 - \xi^2),$

при необходимости можно получить решение и его производную в любой момент времени;
- поскольку схемы двухслойные, можно без потери точности использовать переменный шаг;
- схема условно устойчивая и требует в 4 раза больше арифметические операции, чем обычные, но эта схема для достижения определенной точности позволяет выбрать большие шаги по времени.

1. Ляшко С.И., Редько С.Е. Приближенное решение задачи динамики вязкой стратифицированной жидкости // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1987. — Том 27. — № 5. — С. 720–729.
2. Утебаев Д. Исследование разностных схем метода конечных элементов для уравнения колебания с диссипацией // Вісник Київ. нац. унів., Сер. фіз.–мат. науки — Київ, 2006. — № 4. — С. 232–237.

Динамічні моделі дифузії з обмеженою швидкістю

Новіцький А.В.
novitzky.andrej@yandex.ru
(Національний авіаційний університет, Україна, Київ)

Подається порівняльний аналіз різних моделей руху броунівських частин з урахуванням обмеженості їх швидкості.

1. Рівняння Ланжевена з ортогональним впливом [1].

2. Рух по гратках [2].

3. Моделі що спираються на стохастично ієрархічно–корельовані серії (SHCS) [3].

На основі SHCS рядів та алгоритму розробленому автором реалізується комп'ютером програма дифузії в R^3 з лінійною швидкістю.

1. *Дубко В.А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. // Дубко В.А. — Владивосток: ДВО АН СССР — 1989. — 185 с.
2. *Колесник А.Д.* Симметричные марковские случайные эволюции на плоскости // А. Д. Колесник, А. Ф. Турбин, Киев : ИМ. — 1990. — 39 с.
3. *Дубко В.А.* SHCS–ряды и их применение для обобщения, классификации и моделирования случайных гармонических процессов // Препринт № 154 / В. А. Дубко, Е. В. Карачанская, Вычислительный центр ДВО РАН. — Хабаровск: изд-во ТОГУ. — 2010. — 31 с.

Оптимізація параметрів чисельних моделей випадкових процесів

Пашко А.
pashkoua@mail.ru
(Європейський університет, Україна, Київ)

При чисельному моделюванні випадкових процесів і полів особлива увага приділяється тосності і надійності. Найбільш часто моделюються гауссові випадкові процеси. В роботі [1] розглядаються оцінки точності і надійності субгауссових випадкових процесів і полів. Розглянемо стаціонарний регулярний строго субгауссівський випадковий процес, що зображуються у вигляді

$$\xi(t) = \int_0^\infty cos(\lambda t) d\phi_1(\lambda) + sin(\lambda t) d\phi_2(\lambda),$$

$\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)$ центровані некорельовані випадкові процеси з некорельваними приростами і при $u > v \geq 0$ $E(\phi_i(u) - \phi_i(v))^2 = F(u) - F(v)$, де $F(u)$ спектральна функція процесу.

Модель будується у вигляді

$$\xi_N(t, \Lambda) = \sum_{i=0}^{N} \big(cos(\lambda_i t)\nu_{1i} + sin(\lambda_i t)\nu_{2i}\big)$$

де ν_{1i}, ν_{2i} некорельовані строго субгауссові випадкові величини, такі, що $E(\nu_{li})^2 = F(u_{i+1}) - F(u_i)$, та $0 = u_0 < u_1 < ... < u_N = \Lambda$ — деяке розбиття відрізка $[0, \Lambda]$.

Наприклад, має місце твердження.

Твердження. Випадковий процес $\xi_N(t, \Lambda)$ є моделлю, що наближає процес $\xi(t)$ з надійністю $1 - \alpha, 0 < \alpha < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $L_2(T)$, якщо для чисел Λ та N виконуються нерівності

$$B_{N,\Lambda} < \delta,$$

$$exp\big(\frac{1}{2}\big)\frac{\delta}{(B_{N,\Lambda})^{1/2}} exp\big(-\frac{\delta^2}{2B_{N,\Lambda}}\big) \leq \alpha,$$

де

$$B_{N,\Lambda} = \frac{T^3}{3}\sum_{i=0}^{N-1}\int_{u_i}^{u_{i+1}}(u - u_i)^2 dF(u) + T(F(\infty) - F(\Lambda)).$$

В роботі досліджуються алгоритми вибору довжини інтервалу та його розбиття для різних випадкових процесів. Зокрема, для процесів, що мають спектральну щільність

$$f(\lambda) = \frac{1}{(1 + \lambda^2)^n},$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{(1 + \lambda^{2n})^2}.$$

1. *Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Розора І.В.* Моделювання випадкових процесів та полів // К.Задруга – 2007. – С. 232.

Лінійчата гіперповерхня півевклідової площини

Польща Г.С., Лісняк В.С.
v-lisnyak@univ.kiev.ua
(Київський технологічний інститут легкої промисловості, Україна, Київ,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Однопараметрична підмножина C множини U всіх прямих у ${}^1\mathbf{V}_2$ є фактично гіперповерхнею в U за лінійчато-геометричним її змістом. Називатимемо C ще і комплексом прямих, запозичуючи термінологію простору $\mathbf{E}_3$.

Віднесемо ${}^1\mathbf{V}_2$ до поля ортореперу $\mathbf{G} \equiv (A;\ \mathbf{R}(\mathbf{n}_0,\ \mathbf{n}_1))$. Його дериваційні рівняння мають вигляд $d\mathbf{A} = w^r\mathbf{n}_r$, $d\mathbf{n}_s = w_s^k\mathbf{n}_k$; $w_i^u + w_u^i = 0$.

Зіставимо з кожною прямою $m \in {}^1\mathbf{V}_2$ орторепер $\mathbf{G}$ з вершиною A на m й ортом $\mathbf{n}_0||m$. Нерухомість прямої m забезпечують лише такі зміни $\mathbf{G} \equiv (A;\, \mathbf{n}_0,\, \mathbf{n}_1)$, що $d\mathbf{A}||m$ та $d\mathbf{e}_0 = 0$, тобто $w^1 = 0$, $w_0^1 = 0$. Тому пфафові форми w^1 і w_0^1 головні. Взявши w_0^1 за базисну, маємо рівняння $w^1 = \alpha w_0^1$.

Знайдемо тепер точку $D \equiv m \times (m + dm)$ – перетину прямої m (її точка D має радіус-вектор $\mathbf{r}_1 = \mathbf{A} + \mu\mathbf{n}_0$) з їй нескінченно близькою прямою $m + dm$, на якій ця ж D подається радіус-вектором $\mathbf{r}_2 = \mathbf{A} + d\mathbf{A} + (\mu + d\mu)(\mathbf{n}_0 + d\mathbf{n}_0)$. Тому $0 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = d\mathbf{A} + \mathbf{n}_0 d\mu + \mu d\mathbf{n}_0$. Тут знехтувано нескінченно малим доданком $d\mathbf{n}_0 d\mu$ вищого порядку мализни. Останнє векторне рівняння рівнозначне системі двох координатних $\{\ d\mu + w^0 = 0,\ w^1 + \mu w_0^1 = 0$.

Звідси зі врахуванням $w^1 = \alpha w_0^1$ зокрема виходить $\mu = -\alpha$. Суміщення A з D забезпечується покладанням $\mu = 0$, що зводить $w^1 = \alpha w_0^1$ до $w^1 = 0$. Цим положення вершини A реперу $\mathbf{G}$, а отже, і його самого точно визначено як $A \equiv m \times (m + dm)$. Тому $\mathbf{G}$ стає канонічним супровідним орторепером лінійчатої гіперповерхні C з прямих ліній у ${}^1\mathbf{V}_2$. Рівність $w^1 = 0$ фактично ж є лінійним диференціальним рівнянням комплексу C у його саме таким способом — $A \equiv m \times (m + dm)$ — канонізованому ортореперí $\mathbf{G}$. З першого дериваційного рівняння $d\mathbf{A} = w^0\mathbf{n}_0 + w^1\mathbf{n}_1$ в наслідок $w^1 = 0$ виходить $d\mathbf{A} = w^0\mathbf{n}_0$. Форма w^0 у канонізованому $\mathbf{G}$ стає теж головною, а тому пов'язаною з базисною w_0^1 залежністю виду $\chi w^0 = w_0^1$. Звідси негайно дістаємо $\chi = w_0^1/w^0$.

Отже, зміст диференціального інваріанту χ такий: це відносна швидкість повороту біжучої прямої m навколо A при нескінченно малому зміщенні точки A. Своєрідність побудови геометрії ∞^1 прямих у ${}^1\mathbf{V}_2$ (порівняно з евклідовою площиною $\mathbf{E}_2$) проявляється тільки при звертанні до іманентно метричних понять, співвідношень і утворень півевклідової площини ${}^1\mathbf{V}_2$.

Подібні запропонованим тут геометричні конструкції використовувалися і раніше (доц. Польща Г.С.) у геометризації розподілу точок чотиривимірного проективниго простору і можуть бути застосовані при дослідженні лінійчатих многовидів у багатовимірних півеклідових просторах.

Нерідко чисто психологічною причиною незвичності неевклідової геометрії є безпідставне очікування від її об'єктів властивостей їм однойменних об'єктів (понять, фігур, формул) класичного евклідового простору.

Математичне моделювання динамічних процесів в Азовському морі

Потапенко Л.І.
lpotapenko@ukr.net,
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Азовське море має велике народногосподарське значення завдяки своїм великим рибним запасам. Особливістю Азовського моря є його порівняно невеликі розміри і мілководність. Внутрішньоконтинентальне розташування і мілководність моря спричиняють сильну мінливість його гідрогеологічних характеристик. В даній роботі побудована тривимірна математична модель, яка дозволяє вивчати динамічні процеси в Азовському морі. Модель призначена для оцінки і прогнозування стану водного середовища моря з урахуванням впливу вітру. Математична модель заснована на рівняннях гідродинаміки мілководних водойм, які включають в себе рівняння Нав'є-Стокса, рівняння нерозривності, співвідношення, що зв'язує повний гідродинамічний тиск з глибиною, а також граничні та початкові умови. Граничні умови на вільній поверхні враховують вплив вітру на динаміку водного середовища. Через переважання горизонтального масштабу над вертикальним можна вважати несуттєвою роль горизонтальної турбулентної в'язкості в порівнянні з вертикальною. Тому вважаємо коефіцієнт горизонтального турбулентного обміну постійним, а коефіцієнт вертикального турбулентного обміну обчислюється виходячи з моделі Смагоринського. Рельєф дна Азовського моря в вузлах сітки визначається цифровою моделлю. Для чисельної реалізації моделі побудована неявна різницева схема зі змінним кроком по горизонтальних координатах. Для обчислення тиску використовується скінченнорізницева апроксимація рівняння Пуассона.

Критические значения функции на замкнутой кривой

Пришляк Д.А., Лосева М.В.
prishlyak@yahoo.com
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Украина, Киев)

Пусть задана гладкая замкнутая кривая на плоскости, которую мы будем рассматривать как траекторию движения точки. Рассмотрим функцию высоты на ней $f(x, y) = y$, у которой все критические точки есть локальные минимумы или максимумы. Нас будет интересовать вопрос: какие возможны значенения функции в критических точках, при которых кривая не будет иметь точек самопересечения. Заметим, что локальные минимумы и максимумы чередуются.

Теорема 1. Если у кривой один глобальный максимум или один глобальный минимум, то существует кривая, с такими же критическими значениями и без точек самопересечения.

Каждому локальному минимуму и максимуму припишем индекс, который определяется следующим образом: в точке минимума (есле таких несколько, то в минимуме с наименьшей абсцисой) зададим движение по кривой так, что вектор скорости сонаправлен направлению оси абсцис. Индекс локального минимума равен 1, если вестор скорости сонаправлен оси абсцис и -1 в противоположном случае. Для максимумов наоборот: если вектор скорости сонаправлен оси абсцис, то индекс равен -1, а если противоположно направлен то 1.

Теорема 2. Сумма индексов замкнутой кривой без точек самопересечения равна двум.

Следствие. Если у замкнутой кривой четыре критические точки и два критических значения, то она имеет точки самопересечения.

1. *О.О.Пришляк, К.О.Пришляк, К.І.Міщенко, Н.В.Лукова.* Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях// Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. – **104**, №1. — С.97-108.

Максимізіція ймовірності небанкрутства страхової компанії в класичній моделі ризику за можливості використання франшизи й ліміту відповідальності

Рагуліна О.Ю.
lena_ragulina@mail.ru
(Донецький національний університет, Україна, Донецьк)

Розглядається ймовірність небанкрутства страхової компанії на нескінченному проміжку часу як функція початкового капіталу в класичній моделі ризику. За допомогою результатів роботи [1], в якій вивчались функціональні властивості цієї функції, знаходяться аналітичні вирази для ймовірності небанкрутства у випадках, коли встановлюються умовна франшиза, ліміт відповідальності, а також умовна франшиза й ліміт відповідальності одночасно, а розміри страхових вимог мають показниковий розподіл. Особливістю знайдених аналітичних виразів є те, що вони є різними на певних відрізках через наявність дискретної компоненти у функції розподілу розмірів страхових вимог.

Вивчається питання про доцільність введення умовної франшизи й ліміту відповідальності з точки зору максимізації ймовірності небанкрутства для малих та досить великих значень початкового капіталу. Зокрема, показується, що при досить малих значеннях початкового капіталу встановлення умовної франшизи завжди зменшує ймовірність небанкрутства, а встановлення ліміту відповідальності завжди збільшує; при досить великих значеннях початкового капіталу встановлення ліміту відповідальності завжди збільшує ймовірність небанкрутства.

Розв'язується задача вибору оптимального рівня умовної франшизи в динамічній постановці з точки зору максимізації ймовірності небанкрутства на нескінченному проміжку часу. Для цього виводиться рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана, яке задовольняє ймовірність небанкрутства в припущенні, що ця функція є диференційовною, і показується, що це рівняння має розв'язок, який задовольняє певні умови. Перевірочна теорема встановлює зв'язок між цим розв'язком рівняння та ймовірністю небанкрутства при використанні оптимальної стратегії. Аналогічна задача розв'язується, коли страхова компанія може використовувати безумовну франшизу.

Показується, що у випадку показниково розподілених розмірів страхових вимог стратегія, яка полягає в тому, щоб ніколи не використовувати умовну франшизу, не є оптимальною, отже, використання оптимальної стратегії дозволяє збільшити ймовірність небанкрутства. Проте в цьому випадку ймовірність небанкрутства неможливо збільшити, використовуючи безумовну франшизу.

1. *Рагуліна О.Ю.* Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2010. – № 1-2. – С. 82-116.

Матриця коваріацій оцінки параметрів моделі сплайнової регресії з обмеженнями на параметри

Савкіна М.Ю.
marta@imath.kiev.ua
(Інститут математики НАН України, Україна, Київ)

Розглянемо модель лінійної регресії

$$y_i = f(x_i) + \xi_i, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\xi_0, ..., \xi_n$ – незалежні у сукупності нормально розподілені випадкові величини з $E\xi_i = 0$ та $D\xi_i = \sigma^2$, а функцію регресії $f(x)$ можна подати у вигляді лінійної комбінації нормалізованих B-сплайнів[1]

$$f(x) = b_0 B_0(x) + b_1 B_1(x) + b_2 B_2(x), \tag{2}$$

де

$$B_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{x^*}, & \text{якщо } 0 \le x \le x^*, \\ 0, & \text{якщо } x^* \le x \le 1, \end{cases}$$

$$B_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^*}, & \text{якщо } 0 \le x \le x^*, \\ -\frac{x}{1-x^*} + \frac{1}{1-x^*}, & \text{якщо } x^* \le x \le 1, \end{cases}$$

$$B_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 \le x \le x^*, \\ \frac{x}{1-x^*} - \frac{x^*}{1-x^*}, & \text{якщо } x^* \le x \le 1. \end{cases}$$

В цих позначеннях x^* - точка переходу моделі: $x^* \in [x_0, x_n]$; b_0, b_1, b_2 - невідомі параметри, які підлягають оцінюванню.

Припустимо тепер,що невідомі параметри задовільняють співвідношенням

$$b_0 + r_1 b_1 + r_2 b_2 = r_3, \tag{3}$$

або

$$\begin{cases} b_0 + r_{11} b_1 + r_{12} b_2 = r_{13}, \\ b_0 + r_{21} b_1 + r_{22} b_2 = r_{23}, \\ r_{11} \ne r_{12}, \text{ або } r_{21} \ne r_{22}, \end{cases} \tag{4}$$

де $r_1, r_2, r_3, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}$ - відомі сталі.

У випадку, коли $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$, на підставі загальної формули для матриці коваріацій оцінки метода найменших квадратів параметрів моделі лінійної регресії з обмеженнями на параметри[2] знайдено матриці коваріацій оцінок метода найменших квадратів параметрів b_0, b_1, b_2 моделі сплайнової регресії (1),(2) з обмеженнями на параметри (3) та моделі (1),(2) з обмеженнями на параметри (4).

1. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. — Москва: Наука,1980.— 352 С.
2. *Демиденко Е.З.* Линейная и нелинейная регрессии. — Москва: Финансы и статистика,1981.—304 С.

О решении вариационных неравенств на множестве неподвижных точек счетного семейства нерастягивающих операторов

Семенов В.В.
semenov.volodya@gmail.com
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина, Киев)

Пусть H — действительное гильбертово пространство, $A : H \to H$ — сильно монотонный и липшицевый оператор, $T_i : H \to H$ — счетный набор нерастягивающих операторов. Предположим, что

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset,$$

где $F(T_i) = \{x \in H : x = T_i x\}$. Рассмотрим задачу

$$\text{найти } \ x \in F : \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in F. \tag{1}$$

Предмет доклада — обсуждение сходимости следующего итерационного алгоритма решения вариационного неравенства (1).

Задаем $x_1 \in H$ и генерируем последовательность элементов $x_n \in H$ при помощи схемы

$$x_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i + (\alpha_{n-1} I - \alpha_n A) \circ T_n \right) x_n,$$

где $\alpha_0 = 1$, (α_n) — убывающая последовательность чисел интервала $(0,1)$, $\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$.

Оптимізація процесів вирощування біомаси в культурах мікроорганізмів на основі математичної моделі

Сіренко І.П., Станіславська С.В.
i.sirenko@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

В роботі [1] описано і досліджено математичну модель росту періодичної культури мікроорганізмів. Модель являє собою таку систему диференційних рівнянь:

$$\frac{dx}{d\tau} = x\left(\frac{y}{1+y} - \alpha\right), \ \frac{dy}{d\tau} = -\frac{xy}{1+y}, \ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0, \tag{9}$$

де x — концентрація біомаси, y — концентрація субстрату, x_0 — початкова концентрація біоомаси, y_0 — початкова концентрація субстрату, α — постійна, що характеризує ефективність перетворення субстрату в біомасу.

На практиці є можливість підтримувати фізико-хімічні умови культивування (температуру, pH середовища, інтерсивність аерації тощо) постійними тому можна вважати, що культивування проводиться в постійних умовах. Тоді змінними, за якими можна проводити оптимізацію будуть початкова концентрація біомаси x_0, та субстрату y_0, а також час культивування τ.

Задача оптимізації розглядається в загальній постановці за припущення адекватності моделі (1). Таким чином, будемо розглядати оптимізацію деяких функціоналів на множині розв'язків системи (1).

Найцікавішими для практики є процеси вирощування біомаси оптимальні з точки зору отримання найбільшого чистого доходу або мінімальної собівартості продукції. В цьому випадку параметрами цих оптимізаційних задач будуть такі показники як вартість біомаси, закладається на початку в ферментатор, вартість субстрату, продажна вартість вирощеної біомаси, вартість роботи обладнання за одиницю часу.

Розв'язок задачі оптимізації для конкретної культури мікроорганізмів і субстрату знаходиться чисельними методами.

Аналітичне дослідження існування розв'язків задач оптимізації в залежності від параметрів проводидься за допомогою функції Лагранжа.

1. *Сіренко І. П.* Дослідження математичної моделі росту культури мікроорганізмів. I. Основні властивості моделі // Журн. обчисл. та приклад. матем. – 2011, №1(104). – С. 121–126.

Задача полосної класифікації цифрової інформації

Соломянюк І. Г.
Solomeniukinga@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Теорія і практика проектування систем класифікації інформації на даний момент отримали істотний розвиток в численних роботах. Проте залишається актуальною проблема підвищення якості розпізнавання образів при дослідженні зображень особи, мовних, ультразвукових і гідроакустичних сигналів, текстовій інформації за наявності формул, а також інших різноманітних даних про процеси, зображення і явища, що виникають в нашому навколишньому середовищі.

Тема досліджень даної роботи подібна з напрямами досліджень проблеми розпізнавання образів засобами методів групового врахування аргументів та опорних векторів (Support Vector Machine). Проте, на відміну від цих робіт, можна при синтезі систем розпізнавання образів використовувати засоби оптимального синтезу лінійних перетворень, розроблених на підставі результатів по теорії збурених псевдообернених і проекційних операцій. В термінах псевдообернених операцій є необхідні і достатні умови існування робастної дихотомної лінійної роздільності множин в просторі ознак, а синтез систем класифікації зводиться до пошуку найкращих компонент вектора ознак або оптимально сформованих лінійних комбінацій компонент. В свою чергу цей пошук полегшується в обчислювальному аспекті за рахунок використання формул представлення збурення псевдообернених матриць при заміні вектор-рядків в початкових матрицях новими вектор-рядками.

В роботі приведені алгоритм класифікації інформації засобами нейронної мережі та алгоритм синтезу лінійних систем засобами псевдообернення, які реалізовані в програмному середовищі інженерно-математичного пакету Matlab. Проведено численні експерименти на зашумлених даних, які підтверджують доцільність використання ідеї синтезу систем нейрофункціональних перетворень та перспективність їх використання для розв'язання більш складних задач.

Алгоритми оптимального синтезу лінійних систем класифікації у ряді випадків дозволяють розв'язувати задачу класифікації, залишаючись в рамках лінійної моделі. При невдачі такого підходу можуть бути запропоновані алгоритми синтезу інших перетворень з автоматичним пошуком на классах таких перетворень.

Математичне забезпечення інформаціної системи прогнозування затоплення земель

Стеля О.Б., Пришляк К.О.
Oleg.Stelya@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Останнім часом в Україні значно загострилась проблема підтоплення і затоплення земель та населених пунктів внаслідок зміни клімату, що призвела до значного збільшення опадів за короткий термін. Це, в свою чергу, створює складні умови для проживання населення, завдає значних матеріальних збитків господарству і становить особливу загрозу для функціонування екологічно небезпечних об'єктів (залізниць, нафтопроводів, мереж енергопостачання тощо). Для оперативного прогнозування можливого затоплення територій необхідно створення комп'ютерної інформаційної системи.

Актуальність роботи викликана необхідністю мати можливість в короткі терміни та на існуючих наборах даних передбачувати розвиток підтоплення та затоплення населених пунктів в залежності від стану ґрунтів та прогнозу опадів. Існуючий європейський аналог запропонованої розробки використовує загальноєвропейську базу даних, яка внаслідок специфічності українських умов та структури даних не може бути використана для вітчизняних потреб.

Інструментальні засоби будуть складатись з бази даних з інтегрованою картографією та блоку для оперативного прогнозування розвитку підтоплення та затоплення населених пунктів. Інструментальні засоби будуть об'єднані єдиним інтерфейсом користувача з графічним віконним інтерфейсом.

На даний час створені програмні засоби оперативного прогнозування розвитку підтоплення та затоплення населених пунктів, які складаються з таких моделей:

— вологопереносу в ненасиченій зоні;

— танення снігу;

— живлення ґрунтових вод за рахунок води в пониженнях рельєфу.

Модель вологопереносу ґрунтується на нелінійному рівнянні Річардса. Для його розв'язання використовується чисельний метод, який є комбінацією метода Ньютона та метода ПВР.

Створено програмне забезпечення та проведено тестові розрахунки. Модель дозволяє визначати вологість ґрунту в залежності від таких факторів, як температура повітря, живлення ґрунту за рахунок опадів, відток води в нижні горизонти та ін.

Наступним кроком є створення програмних модулів для візуалізації на карті зон можливого затоплення земель.

Оцінка та вплив дренажних стоків Краснознам'янської зрошувальної системи на рекреаційні території Херсонської області

Стеля І.О., Рак Л.К.
igor.stelia@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Останнім часом екологічній безпеці рекреаційно-туристських комплексів (РТК) України приділяється значна увага. Про це свідчать численні публікації соціально-економічного, природно-ландшафтного і проектно-планувального спрямування. Стан довкілля є чи не найголовнішою умовою ефективної рекреаційної діяльності на будь-якій території. На території Херсонської області значний вплив на прибережні акваторії РТК мають скиди дренажних систем, що опріснюють та змінюють їх фізико-хімічні властивості.

В роботі створено програмні засоби для обчислення скиду забруднюючих речовин з дренажним стоком в Чорне море, що включають: базу даних, інтерфейс бази даних, картографічну частину прив'язану до ГІС. В базі даних зберігаються: дані щодо точок скиду — район, затока, назва (код), географічні координати; дані щодо відбору проби — місце відбору проби, ким була взята проба, дата відбору проби, дата доставки в лабораторію, температура води, температура повітря, умови та мета відбору проби, дата початку та закінчення аналізу, у відповідності до яких вимог здійснено відбір проби; дані аналізу — вид забруднюючої речовини, одиниці вимірювання, концентрації забруднюючої речовини, похибка, ГДС/ГДК; дані щодо об'єму скидів — рік, ККД скидного каналу, загальний обсяг скиду за рік, об'єм скиду по місяцям; дані щодо роботи дренажних свердловин — назва свердловини і об'єми відкачок по місяцям.

На основі цих даних створюється вибірка з подальшим відображенням на цифровій карті точок пробовідбору, відповідних їм результатів вимірювань та розраховується загальна кількість скинутих забруднювачів по точках скиду. При необхідності біля точки пробовідбору можуть відображатися кругові діаграми із вкладом кожного забруднювача у загальне забруднення. В автоматичному режимі інформація про кількість скинутих забруднювачів відображається на цифровій карті у вигляді зафарбованих зон, де різне забарвлення відповідає різним об'ємам скидів.

Дані з бази даних передаються для подальшого аналізу та відображення у ГІС. Картографічна частина включає в себе:
— шар цифрової карти з дренажними стоками, на основі якого та наявних звітів визначені шляхи надходження дренажних вод в скидні канали;
— засоби для аналізу та відображення даних щодо скиду забруднюючих речовин по точкам скиду у Чорне море;
— тематичний шар цифрової карти з точками скиду та розфарбуванням у вигляді зафарбованих зон відповідно до даних щодо загальної кількості скинутих забруднювачів по точках скиду, що створюється в автоматичному режимі.

У роботі було проведено аналіз місць та розраховано об'єм скидів забруднюючих речовин з Краснознам'янської зрошувальної системи в Чорне море. Була зроблена оцінка можливого впливу скидів забруднюючих речовин на території лікувально-оздоровчих закладів побережжя Чорного моря Херсонської області.

Сплайнова схема розв'язання нестаціонарного рівняння конвекції-дифузії в лагранжевій формі

Стеля О.Б., Стеля І.О, Тригуб О.С.
Oleg.Stelya@gmail.com
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ)

Розглядається крайова задача для нестаціонарного рівняння конвекції-дифузії при значному домінуванні дифузійного члена над конвективним

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - V(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + f(x,t), x \in (0,L), t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = U_0(t),$$

$$u(L,t) = U_L(t),$$

$$u(x,0) = g(x),$$

де $V(x,t) \neq 0, \;\; 0 < D(x,t) << 1$.

Чисельний розв'язок таких рівнянь пов'язаний з характерними математичними трудношами. Це так звана "схемна" дифузія та нефізичні коливання в розрахунках. Поширеним методом розв'язання крайових задач для рівняння конвекції-дифузії є лагранжево-ейлоровий метод, згідно до якого рівняння (1) записується в лагранжевій формі

$$\frac{du}{dt} = D(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{2}$$

де $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ — субстанційна похідна, яка визначає швидкість зміни концентрації мігранта в рухомій точці.

Для розв'язання дискретизованого по часовій змінній рівняння (2) використовується параболічний сплайн [1,2]. В результаті розрахунків розв'язок рівняння може бути відтворений у вигляді параболічного сплайна.

Розроблено програмне забезпечення та проведено серію розрахунків, при яких запропонований метод продемонстрував високу точність чисельного розв'язку в порівнянні з точним.

1. *Стеля О.Б.* Про існування одного параболічного сплайну // Обчислювальна та прикладиа математика. Видавництво ТВіМС. – 1997. – № 1. – с. 62-67.
2. *Стеля О.Б., Кивва С.Л.* Параболический сплайн на неравномерной сетке // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 1999. – № 2(84). – с. 48-59.

Врахування пластичних деформацій при чисельному розв'язанні крайових задач теорії тонких оболонок з декількома отворами

Сторожук Є.А., Чернишенко І.С., Руденко І.Б., Харенко С.Б.
stevan@ukr.net
(Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Україна, Київ)

Тонкостінні елементи конструкцій (пластини і оболонки) з криволінійними отворами і вирізами, несучі поверхні яких є багатозв'язними областями, досить часто зустрічаються в інженерній практиці. Розрахунок вказаних елементів конструкцій з врахуванням пластичних деформацій їх матеріалу спряжений із значними математичними труднощами. Тому автори для дослідження пружнопластичного стану тонких багатозв'язних оболонок з отворами розробили методику, яка базується на використанні методу додаткових навантажень і чисельних методів — варіаційно–різницевого методу (ВРМ) та методу скінченних елементів (МСЕ).

Геометричні співвідношення представлені у векторній формі згідно теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа–Лява, а фізичні — на основі терії малих пружнопластичних деформацій при простому навантаженні та теорії текучості з ізотропним зміцненням при складному навантаженні.

Зауважимо, що векторна форма подання компонент деформації має певні переваги перед скалярною формою при представленні переміщень елемента оболонки як жорсткого цілого і мембранному замиканні.

Оскільки серединна поверхня багатозв'язної оболонки з отворами є складною областю, то вона розбивається на декілька криволінійних чотирикутних фрагментів, параметризація яких здійснюється з використанням складеної функції.

Геометрична частина гіпотез Кірхгофа–Лява у ВРМ реалізована алгоритмічно за допомогою множників Лагранжа. В цьому випадку система розв'язувальних рівнянь отримується з умов стаціонарності змішаного функціоналу, який не містить похідних від переміщень вище першого порядку, що значно спрощує процес дискретизації задачі.

При розв'язанні лінеаризованої задачі МСЕ кути повороту нормалі у виразах для компонент згинної деформації не визначаються через переміщення точок серединної поверхні оболонки, як це прийнято в класичному МСЕ, а апроксимуються біквадратичними поліномами серендипового типу з виконанням гіпотез Кірхгофа–Лява тільки у вузлах скінченного елемента (СЕ). Також прийнято, що кут повороту нормалі навколо дотичної до контуру СЕ змінюється вздовж сторони за лінійним законом. Побудований таким чином СЕ задовольняє умовам неперервності кутів повороту при переході через сторони СЕ.

За допомогою розробленої методики і складених програм досліджено напружено–деформований стан сферичної, циліндричної і конічної оболонок з двома однаковими або різними круговими отворами, а також сферичної оболонки з циклічно–симетрично розташованими круговими отворами. Вивчено вплив пластичних деформацій матеріалу, геометричних і фізико–механічних параметрів, величини і виду навантаження на розподіл переміщень, деформацій і напружень в області отворів.

Аналіз фазового портрету задачі теплового самозаймання пиловугільних сумішей

Ткаченко П.Г., Топал О.І., Кузьменко Б.В.
tkach_p@bigmir.net
(Інститут вугільних енерготехнологій НАН України, Україна, Київ)

Теорія самозаймання має важливе значення для численних задач теорії горіння, забезпечення вибухобезпечних умов роботи топкових пристроїв та системи пилоприготування твердого палива, а також для розробки способів оцінки реакційних властивостей палив. Аналіз математичних моделей, в тому числі з точки зору дослідження їх фазових портретів, є важливим етапом в даній теорії.

Математична модель задачі теплового самозаймання пиловугільних сумішей в безрозмірному виді буде мати наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = C\mu\frac{1}{\theta^2}e^{-1/\theta} - \Omega\left(\theta - \theta 1\right) - \sigma\left(\theta^4 - \theta 1^4\right), \\ \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{\theta_{ad}}C\mu\frac{1}{\theta^2}e^{-1/\theta}, \\ \mu = 1 - \alpha\left(1 - C\right). \end{cases}$$

Початкові умови для цієї системи мають вигляд: $x = 0$, $\theta = \theta 1$, $C = 1$, $\mu = 1$.

Позначення: θ — безрозмірна температура; C — безрозмірна поточна концентрація ксиню; μ — безрозмірна поточна концентрація вугільного пилу; x — безрозмірна геометрична координата. Ω — безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі; σ — безрозмірний коефіцієнт теплового випромінювання; θ_{ad} — безрозмірна адіабатна температура пило повітряної суміші за умови початкової температури 0 C^o; α — константа надлишку повітря.

В результаті дослідження моделі були аналітично знайдені її нерухомі точки та визначено їх тип. Доведено, що знайдені допустимі нерухомі точки системи є стійкими вузлами при будь-яких допустимих значеннях параметрів моделі. За допомогою системи Mathcad 14 отримано графічне зображення фазових траєкторій задачі.

1. *Кузьменко Б.В., Мальчевський І.А.* Теплове самозаймання пиловугільних сумішей. К.: «Наукова думка» НАН України, 2011. — 280 с.
2. *Хзмалян Д. М.* Теория топочных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990. — 352 с.
3. *Кирьянов Д.В., Кирьянова Е.Н.* Вычислительная физика — М.: Полибук Мультимедиа, 2006. — 352 с.: ил.

Аналог теоремы Шарковского для некоторых классов гибридных систем

Федоренко В.В., Мясин С.С.*, Федоренко Ю.В.*
vfedor@imath.kiev.ua
(Институт математики НАН Украины, Украина, Киев,
*КНУ имени Тараса Шевченко, Украина, Киев)

Рассматриваются динамические системы, порожденные следующими классами гибридных систем: 1) линейными автономными двумерными системами обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [1] и 2) линейными автономными двумерными двулистными системами обыкновенных дифференциальных уравнений [2]. Такие системы могут допускать хаотическое поведение траекторий (т.е. они могут иметь положительную топологическую энтропию), в то время, как автономные двумерные системы имеют только регулярное поведение траекторий.

Для хаотических динамических систем характерно наличие широкого спектра асимптотического поведения траекторий, в частности, наличие счетного числа периодических траекторий с различными периодами. Это свойство хаотических систем поясняет актуальность задачи сосуществования периодических траекторий, которая формулируется следующим образом: если система имеет траекторию какого–то фиксированного типа, то необходимо указать какие ещё траектории других типов имеет эта система.

Известно, что если периодические траектории динамической системы, порождённой непрерывным отображением отрезка в себя, различать по их периодам, то их сосуществование описывается порядком Шарковского во множестве натуральных чисел:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ ... \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ ... \succ 2^2\cdot 3 \succ 2^2\cdot 5 \succ ... \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1,$$

т.е. если отображение имеет периодическую траекторию периода n, то оно имеет и периодическую траекторию с любым периодом n', если $n \succ n'$. Периодические траектории непрерывных отображений отрезка также более детально классифицируются по типам, т.е. по циклическим перестановкам, которые порождаются ограничением отображения на цикл [3].

Исследование рассматриваемых классов гибридных хаотических систем сводится к исследованию отображений отрезка в себя, что позволяет описывать сосуществование периодических траекторий этих систем, и в отдельных случаях получать их аналитическое представление.

В частности, представлен класс гибридных систем, для которого существует действительное число α такое, что период любой периодической траектории системы равен αm, где m — натуральное число, зависящее от периодической траектории, а сосуществование периодов периодических траекторий системы описывает следующий аналог теоремы Шарковского: если система имеет периодическую траекторию периода αm, то эта гибридная система имеет и периодическую траекторию с любым периодом $\alpha m'$, если $m \succ m'$.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, Киев, 1987.
2. *Гаушус Э. В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований, Москва, 1976.
3. *Fedorenko V. V., Sharkovsky A. N.* Homoclinic trajectories in one–dimensional dynamics // J. of Difference Eq. and Appl. — 2012. — **18**. — P. 579–588.

Интерактивные системы для раскрашенных, изоморфных, гамильтоновых графов

Федюкович В.Е.
vf@unity.net
(Киев)

Построены интерактивные системы доказательства и аргумента (interactive proof system, протоколы) [1] для **NP**–языков: графы, допускающие правильную раскраску вершин в q цветов (q–COL) [2], изоморфизм графов (ISO) [3], гамильтоновы графы (HAM) [4]. Протокол q–COL имеет улучшенную, по сравнению с [5], коммуникативную сложность. Протоколы достигают ничтожной ошибки корректности (soundness error) без повторов, что характерно для таких языков, как равенство логарифмов в конечной группе. Протоколы построены исходя из свойств *характеристического* и *проверочного многочленов* графа, путем вероятностного тестирования многочленов и использования запросов (challenges), выбранных из множества с большим количеством элементов. Протоколы имеют моделирующий алгоритм (simulator) в модели с честным проверяющим. Протоколы допускают преобразование в схему электронной подписи.

Пусть имеется некоторый многочлен $F(z)$ с коэффициентами из поля классов вычетов $\mathbb{Z}_Q$ по модулю Q для некоторого большого Q. Вероятностная проверка выполнимости утверждения $F(z) \equiv 0$ заключается в проверке выполнимости $F(c) = 0$ для случайно выбранного значения аргумента $z = c$; при этом вероятность ошибочно положительного решения для любого многочлена степени d при равновероятном выборе c из некоторого множества $H \subset \mathbb{Z}_Q$ не превышает $\frac{d}{|H|}$.

Определение. *Характеристическим многочленом* ориентированного раскрашенного графа $\Gamma = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ с цветами вершин $b_v \in \mathbb{Z}_Q$, $v \in \mathbb{V}$ называют, [2]

$$f_C(x) = \prod_{(H,T)\in\mathbb{E}} (1 + (b_H - b_T)x)$$

Теорема. Степень характеристического многочлена раскрашенного графа равна количеству ребер для и только для правильно раскрашенного графа.

Пусть имеются ответы доказывающего, которые являются значениями линейных многочленов, вычисленные при случайно выбранном значении аргумента, такие как в протоколе доказательства равенства логарифмов при протоколе Шнорра. *Проверочный многочлен* строится заменой **NP**–решения (witness) на многочлены, используемые для получения ответов доказывающего, в однородном многочлене, полученном из характеристического.

Коммуникативная сложность протокола для языка q–COL, при сопоставимой ошибке корректности, была улучшена из–за высокой ошибки корректности оригинального протокола [5], и, как следствие, при необходимости большого количества повторов.

1. *Н.П. Варновский* Типы нулевого разглашения // XI Международная школа–семинар «Синтез и сложность управляющих систем», 2000.
2. *Giovanni Di Crescenzo, Vadym Fedyukovych* Zero-Knowledge Proofs via Polynomial Representations // Mathematical Foundations of Computer Science, 2012.
3. *Vadym Fedyukovych* Protocols for graph isomorphism and hamiltonicity // Central European Conference on Cryptography, 2009.
4. *Vadym Fedyukovych* An argument for Hamiltonicity // Cryptology ePrint Archive, Report 2008/363.
5. *Oded Goldreich, Silvio Micali, Avi Wigderson* Proofs that Yield Nothing But Their Validity for All Languages in NP Have Zero-Knowledge Proof Systems // J. ACM – 1991. – **3**, 38. – P. 691-729.

Прискорене моделювання ймовірності перетину двох марківських процесів

Хом'як О.М.
khomyak.olya@mail.ru
(Інститут кібернетики, Україна, Київ)

Нехай поведінка відновлюваної системи на періоді генерації описується марківським процесом $\{X_n(t), n \geq 0\}$ зі скінченною кількістю станів U. Кожному стану відповідає ефективність роботи системи, що описується функцією $f(\nu)$ (наявна ефективність). Перехід із стану ν в μ відбувається у випадкові моменти часу, які визначаються інтенсивністю переходу $\lambda_{\nu\mu}$, $\nu, \mu \in U$. В той же час стани іншого марківського процесу $\{Y_n, n \geq 0\}$ із скінченою кількістю станів $I \in 0, 1, 2, \ldots$ та інтенсивностями переходів λ_{ij}, $i, j \in I$ визначають ефективність, яка вимагається від системи $g(j)$. Якщо ця ефективність перевищує наявну, то виникає функціональна відмова. Потрібно оцінити ймовірність q відмови системи на періоді генерації.

В основу алгоритму прискореного моделювання ймовірності q покладений метод, описаний в роботі [1]. Для всіх справних елементів було побудовано вагові коефіцієнти, що оцінюють вплив відмови елемента на відмову всієї системи. Іншими словами, було знайдено ймовірність відмови системи при заданих початкових станах. Розглядався випадок, коли інтенсивність виходу з ладу кожного з елементів системи залежить від ϵ. Точність отриманих за допомогою цього методу оцінок суттєво вища порівняно з різними методами суттєвої вибірки.

Сформульовану математичну модель можна ефективно використовувати при розв'язанні широкого класу інших задач підвищення надійності та ефективності експлутації складних систем.

1. *N. Yu. Kuznetsov* Estimating the failure probability of a Markovian system during regeneration period by the essential sampling method // Cybernetics and Systems Analysis – 1998. – vol. 34, no. 2. – P. 216-222.

Условия интервальной устойчивости дискретных систем с запаздыванием

Хусаинов Т.Д.

Одним из эффективных математических аппаратов, используемых в последнее время при моделировании различных динамических систем, являются гибридные системы. Они соединяют в себе динамику непрерывных процессов, которые можно описать системами дифференциальных уравнений и скачкообразные переходы, описываемы разностными уравнениями. Параметры моделей, как правило, точно не известны и приходится иметь дело с динамическими системами с неточно заданными параметрами. В настоящем докладе будут рассматриваться системы линейных разностных уравнений с интервально заданными коэффициентами. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости. Далее рассмотрены системы с интервально заданными коэффициентами с одним постоянным запаздыванием. Для них также получены условия асимптотической устойчивости. При доказательстве используется второй метод Ляпунова.

Рассматривается линейная разностная система с запаздыванием

$$x\left(k+1\right) = Ax\left(k\right) + Bx\left(k-m\right), \quad k = 1, 2, ... \tag{1}$$

Для нахождения решения задачи Коши системы (1) надо задавать состояние системы на всем промежутке предистории, т.е. $x\left(k\right) = x_k$, $k = -m, -m+1, -m+2, ..., 0$. И нулевое решение $x\left(k\right)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta\left(\varepsilon\right) > 0$ такое, что для другого произвольного решения $x\left(k\right)$, при $k = 1, 2, ...$ будет выполняться $\left|x\left(k\right)\right| < \varepsilon$, лишь только $\left\|x\left(0\right)\right\|_m < \delta\left(\varepsilon\right)$, где

$$\left\|x\left(0\right)\right\|_m = \max\left\{\left|x\left(i\right)\right|, i = -m, -m+1, -m+2, ..., 0\right\}.$$

Если, к тому же

$$\lim_{k\to+\infty}\left|x\left(k\right)\right| = 0,$$

то нулевое решение называется асимптотически устойчивым. Получены следующие условия устойчивости системы.

Теорема. *Пусть матрица A асимптотически устойчивая и существует положительно определенная матрица H, для которой выполняются условия*

$$\lambda_{\min}\left(H - A^T H A\right) - \left[2\left|A^T H B\right| + \left|B^T H B\right|\right]\varphi^2\left(H\right) > 0.$$

Тогда система с запаздыванием асимптотически устойчива.

Получены условия асимптотической устойчивости интервальной системы с запаздыванием

$$x\left(k+1\right) = \left(A + \Delta A\right)x\left(k\right) + \left(B + \Delta B\right)x\left(k-m\right), \quad k = 1, 2, ...,$$

т.е. системы матрицы ΔA, ΔB которой принимают свои значения из некоторых заданных интервалов.

Некоторые проблемы динамики математической модели рынка

Хусаинова О.С., Джеладова И.А.

В соответствии с принципом независимости действующих экономических сил [1], математическая модель динамики рынка свободной торговли может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_j}{dt} = V_j\left(p_j^*, p_j^0, p_j\right) + C_j\left(p_0, p\right) + D_j\left(p_j^{**}, p_j^0, p\right) + G_j\left(q_j^0, q, p_j^0, p_j\right), \quad j = \overline{1,n}.$$

Здесь $V_j\left(p_j^*, p_j^0, p_j\right)$, $p_j > p_j^*$, $j = \overline{1,n}$ — функции, характеризующие влияние продавца товара или услуг, $D_j\left(p_j^{**}, p_j^0, p_j\right)$, $p_j < p_j^{**}$, $j = \overline{1,n}$ — функции, характеризующие влияние покупателя товара или услуг, $C_j\left(p_0, p\right)$, $j = \overline{1,n}$ — функции, характеризующие влияние конкуренции, а также действий и противодействий участников конкурентного рынка, $G_j\left(q_j^0, q, p_j^0, p_j\right)$, $j = \overline{1,n}$ — влияние внешних факторов (вмешательство государства, обязывающего участников соблюдать выполнение определенных законов).

При определенных предположениях правые части имеют вид дробно рациональных функций и система имеет вид

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\nu_j p'\left(p_j - p_j^0\right)}{p_j - p_j^*} - \sum_{i=1}^{n} c_{ji} p_j^0 \left(\frac{p_j - p_j^0}{p_j^0} - \frac{p_i - p_i^0}{p_i^0}\right) + -\frac{d_j p''\left(p_j - p_j^0\right)}{p_j^{**} - p_j} +$$

$$+ r_j \left[p_j \left(1 - e_j \frac{p_j - p_j^0}{p_j^0} + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} e_{ij} \frac{p_i - p_i^0}{p_i^0}\right) - p_j^0\right], j = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Здесь $p_j = p_j^0$, $j = \overline{1,n}$ — точка покоя системы (равновесие), определяемая условием равенства нулю правой части системы.

Система (1) является нелинейной, получить ее решение в явном виде затруднительно даже для малой размерности (на плоскости). Проведено исследование устойчивости положения равновесия, рассмотрена система с запаздыванием.

1. *Калитин Б.С.* Математические модели первого порядка конкурентного рынка. – Минск: БГУ, 2012. – 131 с.

Стабілізація нелінійних систем регулювання з запізнюванням до стану абсолютної стійкості

Шатирко А.В.
a_shatyrko@mail.ru
(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка, Украина, Киев)

Починаючи з середини XX сторіччя багатьох дослідників цікавить розв'язання проблеми абсолютної стійкості нелінійних систем регулювання, або за західною термінологією, проблеми Лур'є [1]. На сьогоднішній день існує багато достатніх умов абсолютної стійкості для систем даного класу (наприклад [2]). Основні результати в цьому напрямку отримані з використанням частотних критеріїв, та шляхом застосування прямого методу Ляпунова.

Розглядаються нелінійні системи регулювання

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) = c^T x(t) \end{cases} \tag{1}$$

та

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + bf(\sigma(t)) \\ \dot{\sigma}(t) = c^T x(t) - \rho f\left(\sigma(t)\right). \end{cases} \tag{2}$$

Припускається, що умови абсолютної стійкості систем (1), (2), що доведені в [2], не виконуються (або не знайдено параметрів, що гарантують виконання умов). Тоді за допомогою введення оберненого зв'язку у вигляді лінійної комбінації поточних фазових координат та координат, що запізнюються $u\left(t\right) = C_1 x\left(t\right) + C_2 x\left(t-\tau\right)$, система зводиться до абсолютно стійкої.

З використанням апарату прямого методу Ляпунова доведено достатні умови стабілізації (фактично пошуку матриць C_1, C_2). Результати отримано у вигляді алгебраїчних матричних нерівностей.

Доведення представлених результатів для випадку систем непрямого регулювання (2) можна знайти в [3].

1. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. – М.:Изд-во АН СССР. – 1963. Доповіді НАНУ – 2011, №2. С.18 – 23.
2. *Шатирко А.В., Хусаінов Д.Я.* Стійкість нелінійних систем регулювання з післядією. Навчальний посібник. Київ: ДП «Інформ.-аналіт. агентство» – 2012. – 73с.
3. *Шатирко А.В.* Стабілізація в системах непрямого регулювання методом функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київ Ун-ту. Серія: Фіз.-мат. Науки – 2012. – **1**. – С. 243 – 246.

Комбінований метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь

Шахно С.М., Мельник І.В., Ярмола Г.П.
shakhno@is.lviv.ua, halina-yarmola@ukr.net
(Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна, Львів)

Розглянемо нелінійне операторне рівняння:

$$F(x) + G(x) = 0, \tag{1}$$

де оператори F і G визначені на опуклій множині D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y. Тут F – диференційовний за Фреше оператор, G – неперервний оператор, диференційовності якого не вимагається. Потрібно знайти наближений розв'язок x^*, який задовольняє рівняння (1). Для розв'язувння поставленої задачі будемо використовувати комбінований диференціально-різницевий метод

$$x_{n+1} = x_n - [F'(x_n) + G(x_{n-1}; x_n)]^{-1}(F(x_n) + G(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

де $F'(x)$ – похідна Фреше, а $G(x; y)$ – поділена різниця оператора G за точками x і y, x_{-1}, x_0 – задані. Цей метод побудований на базі методів Ньютона та хорд.

В статтях [2, 3] розглядається метод, подібний до (2), в ітераційній формулі якого використовується лише похідна від диференційовної частини $F(x)$. Такий метод збігається до розв'язку з лінійною швидкістю. Більш ефективним для розв'язування (1) є диференціально-різницеві або різницеві методи, які використовують, крім похідної або її апроксимації, ще й поділені різниці недиференційовної частини $G(x)$. В [2, 3] наведено ітераційну формулу методу (2) і показано на прикладах, що він швидше збігається, ніж метод тільки з $F'(x_n)$. У статті [4] вивчено напівлокальну збіжність (2), однак встановлено лише лінійну збіжність. У статті [1] нами досліджено збіжність методу (2) з оператором $F'(x_n) + G(2x_n - x_{n-1}; x_{n-1})$ за умови Ліпшиця для поділених різниць першого порядку і встановлено порядок збіжності $(1 + \sqrt{5})/2$. У цій праці за таких же умов обгрунтовано напівлокальну збіжність методу (2) також з порядком $(1 + \sqrt{5})/2$ та на тестових прикладах з недиференційовним оператором проведено числовий експеримент по вивченню ефективності (2) та інших методів.

1. *Шахно С. М., Ярмола Г. П.* Двоточковий метод для розв'язування нелінійних рівнянь з недиференційовним оператором // Математичні студії – 2010. – **36**, № 2. – С. 213–220.
2. *Argyros I. A.* A unifying local-semilocal convergence analysis and applications for two-point Newton-like methods in Banach space // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **298**. – P. 374–397.
3. *Argyros I. A.* Improving the rate of convergence of Newton methods on Banach spaces with a convergence structure and applications // Appl. Math. Lett. – 1997. – **6**. – P. 21–28.
4. *Hernandez M. A., Rubio M. J.* The Secant method for nondifferentiable operators // Appl. Math. Lett. – 2002. – **15**. – P. 395–399.
5. *Hernandez M. A., Rubio M. J.* A uniparametric family of iterative processes for solving nondifferentiable equations // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **275**. – P. 821–834.