ELIE CARTAN

Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 325-412
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__325_0>

SUR

LES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE

ET

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE

(PREMIÈRE PARTIE)

PAR E. CARTAN

La plupart des Chapitres de ce Mémoire, qui paraîtra en deux parties, sont consacrés à la théorie purement géométrique de ce que j'appelle les *variétés à connexion affine*, et qui comprennent, comme cas particulier, les variétés à connexion *métrique* et les variétés à connexion *euclidienne*. Le terme « connexion affine » est emprunté à M. H. Weyl (1), mais il prend dans ce Mémoire une signification élargie. Comme je l'ai indiqué à grands traits dans des Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2), une variété à connexion affine est une variété qui, au voisinage *immédiat* de chaque point, a tous les caractères d'un espace affine, et pour laquelle on a une loi de repérage des domaines entourant deux points *infiniment voisins* : cela veut dire que si, en chaque point, on se donne un système de coordonnées cartésiennes ayant ce point pour origine, on connaît les formules de transformations (de même nature que dans l'espace affine) qui permettent de passer d'un système de référence à tout autre système de référence d'origine infiniment voisine. Dans la théorie de

(1) Dans son beau Livre : *Temps, espace, matière*, traduit sur la quatrième édition allemande par Gustave Juvet et Robert Leroy; Paris, A. Blanchard, 1922.

(2) *C. R.*, t. 174, p. 437, 593, 734, 857, 1104.

M. H. Weyl, ce repérage de proche en proche est soumis *a priori* à une certaine restriction, dont on ne voit pas bien la nécessité logique, et qui consiste dans l'existence, au voisinage de chaque point, de ce qu'il appelle un système de coordonnées *géodésique*. J'avais indiqué, dans les Notes signalées ci-dessus, que la différence qui existait entre une variété à connexion affine et un espace affine proprement dit se manifestait par un déplacement affine associé à tout contour fermé infiniment petit : ce déplacement peut se décomposer en une translation et une rotation : la translation traduit la *torsion*, la rotation traduit la *courbure* de la variété. Dans la théorie de M. H. Weyl, la *torsion* est constamment nulle. Toutes ces notions s'étendent aux variétés à connexion métrique ou euclidienne; la théorie classique des espaces définis par un ds^2 (espaces de Riemann) n'est au fond que celle des variétés à connexion euclidienne sans torsion ([1]) : c'est sur elles, comme on sait, que repose la théorie de la relativité généralisée édifiée par M. Einstein.

Les propriétés fondamentales des variétés à connexion affine sont étudiées dans le Chapitre II, celles des variétés à connexion métrique ou euclidienne dans le Chapitre III. Quelques indications sommaires sur la théorie des courbes et des surfaces, en particulier sur les lignes droites des variétés à connexion euclidienne, sont données dans le Chapitre IV.

En dehors de ces trois Chapitres de Géométrie pure, la première partie du présent Mémoire contient deux Chapitres d'applications à la théorie de la gravitation newtonienne et de la gravitation einsteinienne. Au fond, j'ai repris l'idée initiale de M. Einstein, d'après laquelle, pour un observateur entraîné dans un champ de gravitation et portant avec lui un système de référence animé d'un mouvement de translation, les lois de la Physique seraient vraies dans son voisinage comme si son système de référence était immobile et comme s'il n'y avait pas de champ de gravitation : son propre mouvement satisferait au principe d'inertie. Cela revient pour l'observateur à regarder comme

([1]) M. D. J. Struik vient de publier sur la théorie des espaces de Riemann un exposé d'ensemble, intitulé : *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* (Berlin, Julius Springer, 1922), qui contient une bibliographie très complète.

équipollents des systèmes de référence qui ne le sont pas dans le sens classique, c'est-à-dire cela revient à regarder l'espace-temps comme une variété à connexion affine. *En gardant toutes les notions de la Mécanique classique*, on a ainsi une réduction à la Géométrie de la gravitation newtonienne, réduction qui est *exactement de la même nature* que celle qui est fournie par la théorie d'Einstein et qui montre, comme elle, l'interdépendance de la connexion affine de l'Univers et de la distribution de la matière dans l'espace. En toute rigueur on a, en guise d'explication, fait une simple convention de langage; mais cela montre justement l'importance, dans l'évolution de la Science, des conventions de langage judicieusement choisies.

La gravitation newtonienne étant ainsi *expliquée*, le passage de la théorie de Newton à celle d'Einstein est presque intuitif lorsqu'on a donné aux lois de la gravitation newtonienne leur forme *invariante*, c'est-à-dire indépendante du système de référence variable adopté aux différents points d'Univers : cette forme invariante ne fait intervenir que la courbure de l'espace-temps, et la forme invariante des lois de la gravitation einsteinienne n'en est presque que la simple transposition, quand on passe des notions de l'espace et du temps utilisées en Mécanique classique aux notions de l'espace et du temps utilisées en Relativité restreinte.

Avant d'arriver à exposer ce parallélisme, ce qui est fait au dernier Chapitre de cette première partie, une question préjudicielle importante était à poser : les phénomènes physiques sont-ils compatibles avec *plusieurs définitions distinctes* de la connexion affine de l'espace-temps? Cette question en présuppose elle-même une autre : comment doit-on formuler les lois physiques quand on adopte telle ou telle connexion affine pour l'espace-temps? Les lois physiques se traduisent en général par des équations aux dérivées partielles qni font intervenir au fond les nombres qui mesurent certaines grandeurs d'état physique en un point de l'espace-temps et les nombres qui mesurent ces mêmes grandeurs en un point infiniment voisin; pour pouvoir formuler analytiquement la loi, il faut savoir rapporter les deux séries de mesures à un système de référence commun, au cas où les mesures ont été faites au moyen de deux systèmes de référence différents : autrement dit, il faut connaître la connexion affine attribuée à l'espace-temps. Mais cette connexion étant supposée connue, le problème est loin d'être résolu : sa solution dépend en grande partie de l'interprétation physique des formules analytiques qui traduisent les lois en question. Par exemple, certaines lois peuvent s'exprimer par la propriété qu'une certaine intégrale, étendue à un domaine fermé à deux dimensions ou à trois dimensions, de l'espace-temps, est nulle ([1]); une telle loi est, à un très large degré, indépendante de la connexion affine attribuée à l'espace-temps. D'autres, comme le principe d'inertie en Mécanique, la font sûrement intervenir. Dans le Chapitre I, je montre que, soit en Mécanique classique, soit en Relativité restreinte, la Dynamique des milieux continus, dont les équations sont établies en partant d'un même point de vue basé sur la conception de l'espace-temps comme variété à quatre dimensions, comporte une infinité de connexions affines *équivalentes :* autrement dit, les phénomènes mécaniques ne sont capables de nous révéler qu'une *classe* de connexions affines entre lesquelles le choix est *a priori* arbitraire.

C'est au Chapitre V que, grâce à l'étude géométrique faite aux Chapitres II et III, je montre qu'entre toutes les connexions affines mécaniquement équivalentes, il en existe une qui se distingue de toutes les autres par des propriétés intrinsèques. La considération des lois de l'Électromagnétisme de Lorentz conduit à penser que cette connexion affine est *à torsion nulle,* ce que n'exigeaient pas nécessairement les lois de la Mécanique. Ainsi serait justifiée l'idée *a priori* de M. Einstein que les propriétés physiques de l'Univers ([2]) sont contenues tout entières dans son ds^2. Néanmoins, la conclusion pourrait être en défaut si l'on adoptait de la Mécanique des milieux continus une conception plus large que d'habitude, en admettant la possibilité d'éléments de matière doués de moments cinétiques non infiniment petits par rapport à leur quantité de mouvement. Dans ce cas, il y aurait lieu de généraliser la théorie d'Einstein ; j'indique la plus naturelle de ces généralisations : dans cette nouvelle théorie, la torsion de l'Univers continue à être nulle dans le vide.

([1]) Citons : en Mécanique classique, la loi de conservation de la masse; en Électromagnétisme, les deux premiers groupes des équations de Maxwell.

([2]) Tout au moins celles qui font l'objet de la théorie de la relativité généralisée.

Dans la seconde partie de ce Mémoire, j'étudierai d'une manière approfondie les tenseurs de torsion et de courbure. Cette étude n'était pas indispensable auparavant; il est en effet très remarquable que, dans les applications à la théorie de la relativité, la rotation qui traduit la courbure de l'Univers entre *globalement*, sans qu'on ait besoin de faire figurer explicitement les coefficients qui la définissent analytiquement (1).

La lecture du Mémoire ne suppose pas la connaissance du calcul différentiel absolu : en revanche, elle suppose connues les règles fondamentales du calcul des intégrales multiples, en particulier celles qui font passer d'une intégrale étendue à un domaine fermé à l'intégrale étendue au domaine à une dimension de plus limité par le premier (2). Au fond, les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée.

Bien que le calcul différentiel absolu ne m'ait pas été utile, j'ai néanmoins employé certaines de ses notations en utilisant, par exemple, des indices inférieurs et supérieurs; j'ai aussi, malgré les inconvénients que cela peut présenter, supprimé les signes de sommation quand il n'y avait pas d'ambiguïté possible. Peut-être cela engagera-t-il ceux qui sont familiarisés avec le calcul différentiel absolu (et qui ne l'est peu ou prou actuellement?) à s'engager avec moins de méfiance dans la lecture de ce Mémoire.

CHAPITRE I.

LA DYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS ET LA NOTION DE CONNEXION AFFINE DE L'ESPACE-TEMPS.

Le principe d'inertie et la gravitation newtonienne.

1. La Mécanique classique, telle qu'elle a été fondée par Newton,

(1) Cela n'est pas le cas dans les expositions faites habituellement de la théorie.

(2) Je me permets à cet égard de renvoyer le lecteur à mes *Leçons sur les Invariants intégraux;* Paris, Hermann, 1922.

reposait sur la notion d'un temps absolu et d'un espace absolu; tout événement était localisé analytiquement dans le temps par le choix d'une origine des temps et d'une unité de temps, dans l'espace par le choix d'un système de coordonnées fixes, par exemple ayant pour origine le centre de gravité du système solaire et des axes dirigés sur des étoiles fixes; il était naturellement loisible de prendre tout autre système d'axes, pourvu qu'il fût invariablement lié au premier. Comme on sait, les lois de la Mécanique restent vraies si, tout en conservant la notion du temps absolu, on admet des axes de coordonnées *mobiles* par rapport à l'espace absolu de Newton, à la condition que ces axes soient animés, par rapport à cet espace absolu, d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. On arrive ainsi à la notion de *système de référence de Galilée*.

Le principe d'inertie s'énonce de la manière suivante : *Un point matériel, soustrait à l'action de tous les autres corps, se meut de manière que sa vitesse, déterminée par rapport à un système de référence de Galilée, soit constamment équipollente à elle-même.* Si le principe d'inertie est valable pour un système de référence de Galilée, il l'est pour tous les autres.

Analytiquement, la chose est évidente, si l'on se sert des formules de passage d'un système de référence de Galilée à un autre. Plaçons-nous dans le cas général où l'on fait usage, pour localiser un point dans l'espace, de coordonnées cartésiennes quelconques, rectangulaires ou non [1]. Les formules de transformation sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + g_1 t + h_1,\\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + g_2 t + h_2,\\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + g_3 t + h_3;\\ t' &= t + h,\end{aligned}\right.$$

avec des coefficients constants.

On peut donner au principe d'inertie un autre énoncé. Convenons

(1) Les lois de la Mécanique classique conservent exactement la même forme en coordonnées obliques qu'en coordonnées rectangulaires et les formules de la Mécanique *théorique* y sont exactement les mêmes.

d'appeler « systèmes de référence *équipollents* » deux systèmes de référence formés de deux trièdres de coordonnées équipollents au sens géométrique ordinaire de ce mot, et supposés immobiles l'un par rapport à l'autre; analytiquement, les formules de passage d'un système de référence à un système équipollent sont de la forme

$$\begin{aligned} x' &= x + h_1, \\ y' &= y + h_2, \\ z' &= z + h_3, \\ t' &= t + h. \end{aligned}$$

Cela posé, attachons à un point matériel mobile, à chaque instant de son mouvement, un système de référence de Galilée ayant pour origine le point lui-même ([1]). Le principe d'inertie s'énonce alors ainsi :

Si un point matériel est soustrait à l'action de tous les autres corps et qu'on lui attache à chaque instant un système de référence de Galilée constamment équipollent à lui-même, les composantes de sa vitesse, déterminées à chaque instant par rapport au système de référence correspondant, sont constantes.

2. On voit que la structure de la Mécanique classique repose sur deux notions :

1° La notion du système de référence de Galilée (qui permet de définir la vitesse d'un point mobile);
2° La notion de systèmes de référence de Galilée équipollents (qui permet d'énoncer le principe d'inertie).

Il est essentiel de remarquer que l'avantage du second énoncé du principe d'inertie tient à ce qu'*il n'utilise essentiellement la notion de systèmes de Galilée équipollents que pour deux systèmes d'origines infiniment voisines*.

Dans toutes les généralisations qui ont été faites de la Mécanique

---

([1]) Cela veut dire que le point est l'origine des axes de coordonnées et que l'instant où on le considère est pris comme origine du temps.

classique ou relativiste, la notion de système de référence de Galilée est restée inébranlable; c'est sur la notion de systèmes de référence équipollents qu'ont porté au fond les modifications.

Restons toujours dans le cadre de la Mécanique classique, avec la notion du temps absolu (mesuré avec une unité de temps fixée une fois pour toutes). Nous allons voir qu'une modification de la notion de systèmes de référence équipollents va nous permettre d'étendre le principe d'inertie non seulement à un point matériel soustrait à l'action de tous les autres corps, *mais encore à un point matériel placé dans un champ de gravitation.* Rapportons la position d'un point dans l'espace et le temps à un système de Galilée fixe dont nous appellerons T_0 le trièdre des coordonnées, et considérons un champ de forces analogue au champ de gravitation, c'est-à-dire, au fond, *un champ d'accélérations* (X, Y, Z).

Si, par rapport au système de Galilée fixe, la vitesse du mobile à l'instant t est

$$u, \quad v, \quad w,$$

sa vitesse à l'instant $t + dt$ sera

$$u + X\,dt, \quad v + Y\,dt, \quad w + Z\,dt.$$

Attachons au mobile à l'instant t un trièdre de coordonnées T équipollent à T_0 au sens géométrique ordinaire du mot, et de même attachons-lui à l'instant $t + dt$ un trièdre T' équipollent à T_0. Ces trièdres ne définissent des systèmes de Galilée que si l'on se donne leurs mouvements de translation rectilignes et uniformes par rapport à T_0; s'ils sont choisis, nous aurons défini deux systèmes de référence de Galilée d'origines

$$x, \quad y, \quad z, \quad t;$$
$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad t + dt.$$

Appelons respectivement

$$a, \quad b, \quad c,$$
$$a', \quad b', \quad c'$$

les vitesses de translation des trièdres T et T' par rapport à T_0. Cela posé, la vitesse du point par rapport au système de Galilée qui lui est attaché à l'instant t a pour composantes

$$u - a, \quad v - b, \quad w - c;$$

la vitesse par rapport au système de Galilée qui lui est attaché à l'instant $t + dt$ a pour composantes

$$u + X\,dt - a', \quad v + Y\,dt - b', \quad w + Z\,dt - c'.$$

Les composantes n'auront pas changé si l'on a

$$a' - a = X\,dt, \qquad b' - b = Y\,dt, \qquad c' - c = Z\,dt.$$

Par suite, *le mouvement d'un point matériel quelconque placé dans le champ de forces considéré satisfera encore au principe d'inertie si l'on convient de regarder comme équipollents deux systèmes de référence de Galilée d'origines infiniment voisines*

$$x, \quad y, \quad z, \quad t;$$
$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad t + dt,$$

lorsque leurs trièdres de coordonnées T *et* T' *sont équipollents au sens géométrique ordinaire du mot, et lorsque de plus le trièdre* T' *est animé par rapport au trièdre* T *d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse* ($X\,dt$, $Y\,dt$, $Z\,dt$).

Remarquons que, là encore, n'interviennent que les relations mutuelles qui existent entre deux systèmes de référence infiniment voisins.

3. On peut présenter les choses d'une autre manière, qui est peut-être plus intuitive et qui se rapproche davantage du point de vue qui a servi de point de départ à M. Einstein dans sa théorie de la gravitation. Imaginons un point matériel mobile dans le champ de forces considéré et un trièdre T ayant ce point pour origine entraîné avec lui d'un mouvement de *translation*. A chaque instant t considérons le système de référence de Galilée constitué par un trièdre $\overline{T}$ coïncidant avec T à l'instant considéré et animé d'un mouvement de translation *rectiligne et uniforme* ayant pour vitesse la vitesse actuelle du point

mobile [1]; par rapport à ce système de Galilée, le point matériel a évidemment une vitesse nulle; son mouvement satisfait donc au principe d'inertie (constance de la vitesse) si les systèmes de référence de Galilée successifs définis par les trièdres $\overline{T}$ sont considérés comme équipollents *de proche en proche*. On voit bien que la vitesse constante du trièdre $\overline{T}'$ correspondant à l'instant $t + dt$ par rapport au trièdre $\overline{T}$ correspondant à l'instant t est

$$X\,dt, \quad Y\,dt, \quad Z\,dt.$$

Considérons, par exemple, le champ uniforme constitué par la pesanteur à la surface de la Terre, en supposant pour un instant que nous puissions négliger le mouvement de la Terre par rapport à l'espace absolu. En prenant un axe des z vertical et ascendant, deux trièdres parallèles T et T' considérés l'un à l'instant t, l'autre à l'instant $t + dt$, seront considérés comme définissant deux systèmes de référence de Galilée équipollents si le second est animé par rapport au premier d'une vitesse verticale constante $g\,dt$. Dans ce cas, on peut attacher à tout événement (x, y, z, t) de l'espace-temps un système de référence de Galilée *de manière que tous ces systèmes soient équipollents entre eux;* il suffira de se donner le système de Galilée attaché à un événement particulier (x_0, y_0, z_0, t_0); tous les autres seront parfaitement déterminés.

Cette circonstance ne se présente plus dans le cas général. La relation d'équipollence, étant seulement définie de proche en proche, ne permet de dire que deux systèmes sont équipollents que si l'on se donne le chemin suivi dans l'espace-temps pour aller de l'origine de l'un à l'origine de l'autre; deux systèmes équipollents pour un certain chemin cesseront de l'être pour un autre chemin. Nous reviendrons plus loin sur cette question fondamentale.

4. Convenons de dire que les conditions d'équipollence de deux systèmes de Galilée d'origines infiniment voisines définissent des pro-

---

(1) En réalité, pour l'usage qui est fait du trièdre $\overline{T}$, on peut le remplacer par le trièdre T lui-même, qui joue ainsi, au point de vue de la mesure de la vitesse d'un point à l'instant t, le rôle d'un trièdre de Galilée.

priétés *géométriques* (¹) de l'espace-temps. Les phénomènes de gravitation passent alors de la Physique dans la Géométrie (²). Les composantes X, Y, Z du champ de gravitation constituent essentiellement les éléments de la structure géométrique de l'espace-temps (³). Les relations

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0, \tag{1}$$

vraies en coordonnées *rectangulaires*, traduisent des propriétés de cette structure.

Enfin, l'équation fondamentale de Poisson

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-4\pi\rho, \tag{2}$$

qui, avec les précédentes, fournit les lois complètes de la gravitation newtonienne (⁴), montre que *la densité de matière d'un milieu continu est la manifestation physique d'une propriété géométrique locale de l'espace-temps.*

Nous retrouvons ainsi, sans sortir du cadre de la Mécanique classique, quelques-uns des traits de la théorie de la gravitation d'Einstein. Le seul trait essentiel qui manque se rapporte à la liaison entre les phénomènes de gravitation et les phénomènes électromagnétiques. Mais nous trouvons déjà cette interdépendance de la structure géométrique de l'espace-temps et de la matière qui remplit l'espace.

(¹) En réalité, ce sont des propriétés à la fois géométriques et cinématiques.

(²) Au fond, c'est là une autre manière de dire que la masse d'inertie est identique à la masse pesante, ou encore qu'un champ de gravitation est un champ cinématique (champ d'accélérations) plutôt qu'un champ dynamique (champ de forces).

(³) En réalité, comme on le verra plus loin, cette structure ne fait intervenir les fonctions X, Y, Z qu'à des constantes arbitraires près. Cela correspond à ce fait qu'étant donné un système matériel soumis à un champ de gravitation *uniforme*, il est impossible, par des expériences mécaniques faites à l'intérieur de ce système, de déceler ce champ de gravitation; en particulier si l'on suppose que les étoiles produisent un champ de gravitation *uniforme dans l'étendue du système solaire*, rien n'est à changer aux lois que la Mécanique céleste prévoit pour les mouvements du Soleil et des planètes.

(⁴) Il faut ajouter la condition complémentaire que les fonctions X, Y, Z s'annulent à l'infini.

5. Les considérations précédentes appellent des compléments. En premier lieu, la réduction de la gravitation à la Géométrie n'est-elle possible qu'avec une seule définition de l'équipollence de deux systèmes de Galilée infiniment voisins? Nous examinerons plus loin cette question; contentons-nous pour le moment de remarquer qu'elle doit être résolue par la négative. Imaginons, en effet, deux systèmes de référence de Galilée d'origines infiniment voisines équipollents au sens indiqué au n° 3. Les trièdres correspondants (T) et (T′) d'origines M et M′ sont équipollents au sens géométrique ordinaire du mot et le trièdre (T′) est animé par rapport au trièdre (T) d'un certain mouvement de translation rectiligne et uniforme. Imaginons alors que nous remplacions le trièdre (T′) par le trièdre (T″) de même origine qui se déduit de (T) par un mouvement hélicoïdal d'axe MM′, de sens donné et de pas donné une fois pour toutes, ce trièdre (T″) étant fixe par rapport au trièdre (T′). Considérons un point matériel mobile dans le champ de gravitation, qui soit en M à l'instant t, en M′ à l'instant $t + dt$. Sa vitesse à l'instant $t + dt$, étant très sensiblement portée par la droite MM′, aura évidemment mêmes composantes par rapport au système de référence (S′) défini par le trièdre mobile (T′) que par rapport au système de référence (S″) défini par le trièdre mobile (T″). Par suite, si le mouvement du point vérifie le principe d'inertie lorsqu'on suppose les systèmes (S) et (S′) équipollents, *il vérifiera également le principe d'inertie avec la définition modifiée de l'équipollence*.

Concluons de cet exemple qu'*il existe, tant qu'on se borne à la Dynamique du point matériel, une infinité de définitions possibles de l'équipollence de deux systèmes de référence de Galilée d'origines infiniment voisines*.

6. On pourrait penser que ces conclusions doivent être modifiées si l'on fait intervenir la Dynamique des *systèmes* matériels, car la Dynamique du point néglige un élément important, la rotation de l'élément matériel sur lui-même. Considérons une petite bille sphérique animée d'une rotation absolue constante; l'axe de cette rotation, qui porte le moment cinétique de la bille, doit être regardé comme constamment équipollent à lui-même. Il semble donc que notre con-

vention primitive, dans laquelle les directions d'espace restaient équipollentes à elles-mêmes au sens habituel, soit la seule admissible. Nous laisserons pour le moment cette question de côté, nous réservant de montrer plus loin que les conclusions précédentes sont très prématurées et qu'*au contraire l'indétermination révélée plus haut subsiste tout entière quand on tient compte des lois de la Dynamique des systèmes* (¹). Mais pour que la question puisse être utilement étudiée, il importe de remarquer que le point de vue nouveau auquel nous nous sommes placé nous oblige à énoncer les lois de la Mécanique sous une forme *exclusivement locale*, c'est-à-dire à tout ramener à la Mécanique des milieux continus; nous ne savons pas, en effet, ce que sont deux systèmes de référence équipollents, lorsque leurs origines ne sont pas infiniment voisines.

Mais afin de faciliter le passage de la Mécanique newtonienne à la Mécanique relativiste, nous allons montrer comment la conception de l'espace-temps comme variété à quatre dimensions permet d'écrire les équations de la Mécanique classique des milieux continus.

L'espace-temps à quatre dimensions et la Dynamique classique des milieux continus.

7. Plaçons-nous au point de vue de la Mécanique classique. L'espace-temps ou Univers est une *variété affine*. Voici ce qu'il faut entendre par là.

Appelons *vecteur d'Univers* l'ensemble de deux événements (chacun localisé dans le temps et dans l'espace) dont l'un sera dit l'origine, l'autre l'extrémité du vecteur. Par rapport à un système de référence de Galilée les composantes d'un vecteur d'Univers sont les quatre quantités

$$t'-t, \quad x'-x, \quad y'-y, \quad z'-z$$

obtenues en retranchant les coordonnées de l'extrémité et de l'origine. Si deux vecteurs d'Univers ont les mêmes composantes par rapport à

(¹) Sauf une restriction possible, *voir* plus loin n° 16.

un certain système de Galilée, ils ont aussi les mêmes composantes par rapport à tout autre système de Galilée; il y a là, pour deux vecteurs d'Univers, une propriété indépendante du système de référence de Galilée au moyen duquel on définit analytiquement les deux vecteurs; nous dirons que les deux vecteurs d'Univers sont *équipollents*. Il est évident que deux vecteurs d'Univers équipollents à un troisième sont équipollents entre eux. C'est l'existence de cette notion d'équipollence de deux vecteurs d'Univers que nous exprimons en disant que l'Univers est affine.

Des quatre quantités

$$t'-t, \quad x'-x, \quad y'-y, \quad z'-z$$

qui définissent analytiquement un vecteur d'Univers, nous dirons que la première est sa *composante de temps*, les trois autres ses *composantes d'espace*. Nous remarquerons que *la composante de temps est indépendante du système de référence choisi*. Il n'en est pas de même du *vecteur d'espace* qui a pour composantes, par rapport au trièdre de coordonnées T qui sert à définir le système de référence de Galilée, les trois quantités $x'-x, y'-y, z'-z$; ce vecteur d'espace dépend, non seulement du vecteur d'Univers donné et du trièdre T, mais encore de la vitesse de ce trièdre par rapport à l'espace absolu.

Si maintenant nous considérons un point mobile rapporté à un système de référence de Galilée, le vecteur d'Univers qui a pour origine le point pris à l'instant t et pour extrémité le point pris à l'instant $t+dt$, a pour composantes

$$dt, \quad dx, \quad dy, \quad dz;$$

il est, *en soi*, indépendant du système de référence; il en est de même du vecteur d'Univers

$$1, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

qui s'en déduit en le divisant par dt. Si enfin on appelle m la masse du point, le vecteur d'Univers

$$m, \quad m\frac{dx}{dt}, \quad m\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{dz}{dt}$$

a une signification *en soi*, indépendante du système de référence choisi. C'est le vecteur « *quantité de mouvement-masse* ». Sa composante de temps, la masse, est indépendante du système de référence : sa composante d'espace, la quantité de mouvement, en dépend au contraire.

On voit alors que le principe fondamental de la Dynamique du point peut s'énoncer ainsi :

La dérivée par rapport au temps du vecteur d'Univers, quantité de mouvement-masse, est égale au vecteur d'espace « force ».

Cet énoncé contient à la fois le principe de la conservation de la masse et la loi qui relie la force à l'accélération.

8. Considérons maintenant un milieu continu rapporté à un système de référence de Galilée donné, et prenons un volume à trois dimensions de l'espace-temps. J'ai montré ailleurs (¹) que la masse totale des éléments matériels qui se trouvent dans ce volume est représentée par l'intégrale

$$\iiint \rho\, dx\, dy\, dz - \rho u\, dy\, dz\, dt - \rho v\, dz\, dx\, dt - \rho w\, dx\, dy\, dt,$$

en désignant par ρ la densité et par u, v, w les composantes de la vitesse de chaque élément de matière.

Si l'on suppose d'abord qu'il n'y ait ni pression ni tension dans le milieu, la quantité de mouvement suivant l'axe des x du même volume sera donnée par l'intégrale

$$\iiint \rho u\, dx\, dy\, dz - \rho u^2\, dy\, dz\, dt - \rho uv\, dz\, dx\, dt - \rho uw\, dx\, dy\, dt$$

et l'on aura de même les composantes suivant l'axe des y et l'axe des z. Nous désignerons respectivement par

$$\Pi, \quad \Pi_x, \quad \Pi_y, \quad \Pi_z$$

(¹) E. CARTAN, *Leçons sur les Invariants intégraux*, p. 35-37; Paris, Hermann, 1922.

les éléments sous le signe $\int\int\int$ des intégrales précédentes : ce sont les composantes de la « quantité de mouvement-masse » d'un élément de matière du milieu.

Désignons enfin par X, Y, Z les composantes de la force par unité de volume.

Pour obtenir les équations de la Mécanique des milieux continus, nous pouvons procéder de la manière suivante : Considérons un domaine à quatre dimensions de l'espace-temps. Décomposons ce domaine de la manière suivante : Prenons un élément de matière déterminé ; à chaque instant t l'un des points matériels qu'il contient a des coordonnées (x, y, z); le point d'Univers (x, y, z, t) ou bien n'appartiendra jamais au domaine considéré, ou bien appartiendra à ce domaine dans un certain intervalle de temps (t_1, t_2) : l'ensemble des points d'Univers constitués par les différents points matériels de l'élément matériel considéré, pris entre l'instant t_1 et l'instant t_2, constitue un des *tubes d'Univers* dans lesquels peut se décomposer le domaine d'Univers donné. La frontière de ce domaine est constituée par les éléments matériels pris aux extrémités t_1 et t_2 de l'intervalle de temps qui leur correspond.

Cela posé, la variation géométrique du vecteur d'Univers « quantité de mouvement-masse » de chaque élément matériel, entre l'instant t_1 où il entre dans le domaine d'Univers et l'instant t_2 où il en sort, est égale à un vecteur d'espace dont les composantes sont

$$\int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{X}\,dx\,dy\,dz)\,dt, \quad \int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{Y}\,dx\,dy\,dz)\,dt, \quad \int_{t_1}^{t_2}(\mathrm{Z}\,dx\,dy\,dz)\,dt.$$

Autrement dit, *l'intégrale du vecteur d'Univers « quantité de mouvement-masse » étendue à la frontière du domaine est égale à l'intégrale à quatre dimensions du vecteur d'espace « force » étendue au domaine lui-même*. Cela se traduit par les formules

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \Pi' &= 0,\\ \Pi'_x &= \mathrm{X}\,dt\,dx\,dy\,dz,\\ \Pi'_y &= \mathrm{Y}\,dt\,dx\,dy\,dz,\\ \Pi'_z &= \mathrm{Z}\,dt\,dx\,dy\,dz,\end{aligned}\right.$$

en posant

$$\Pi' = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dt\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Pi'_x = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}\right] dt\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Pi'_y = \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z}\right] dt\,dx\,dy\,dz,$$

$$\Pi'_z = \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right] dt\,dx\,dy\,dz.$$

En effectuant les calculs et simplifiant les trois dernières équations au moyen de la première, on obtient les équations classiques

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = X,$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = Y,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = Z.$$

En appelant *dérivation extérieure* (1) l'opération qui permet de passer d'un élément d'intégrale étendue à une variété fermée à p dimensions à l'élément d'intégrale égale étendue à la variété à $p+1$ dimensions que limite la première, on voit qu'on peut énoncer le principe fondamental de la Mécanique des milieux continus sous la forme suivante :

La dérivée extérieure de la « quantité de mouvement-masse » élémentaire est égale au produit de dt par la force de volume élémentaire.

9. Nous avons supposé dans ce qui précède qu'il n'y avait ni pression ni tension. On ramène le cas général au cas précédent en convenant d'appeler quantité de mouvement (généralisée) de l'élément de matière le vecteur dont les composantes s'obtiennent en ajoutant

---

(1) *Cf.* E. CARTAN, *Leçons sur les Invariants intégraux*, Chap. VII, p. 65.

respectivement aux composantes primitivement écrites les quantités

$$
\begin{gathered}
-p_{xx}\,dy\,dz\,dt - p_{xy}\,dz\,dx\,dt - p_{xz}\,dx\,dy\,dt,\\
-p_{yx}\,dy\,dz\,dt - p_{yy}\,dz\,dx\,dt - p_{yz}\,dx\,dy\,dt,\\
-p_{zx}\,dy\,dz\,dt - p_{zy}\,dz\,dx\,dt - p_{zz}\,dx\,dy\,dt.
\end{gathered}
$$

Dans la théorie cinétique des gaz, la pression est effectivement considérée comme un flux de quantité de mouvement dû à l'irrégularité des vitesses des différentes molécules; les quantités désignées plus haut par u, v, w ne représentent qu'une vitesse *moyenne*.

On retrouve les équations classiques de la Mécanique des milieux continus en développant les équations (5), ce qui donne

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,\\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = X,\\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = Y,\\
\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z.
\end{gathered}
$$

10. Ces équations ne sont pas complètes. Cela tient en effet à ce que nous n'avons pas tenu compte du théorème des moments cinétiques [1]; il se traduit ici par les égalités

$$
\begin{gathered}
\iiint y\,\Pi_z - z\,\Pi_y = \iiiint (yZ - zY)\,dt\,dx\,dy\,dz,\\
\iiint z\,\Pi_x - x\,\Pi_z = \iiiint (zX - xZ)\,dt\,dx\,dy\,dz,\\
\iiint x\,\Pi_y - y\,\Pi_x = \iiiint (xY - yX)\,dt\,dx\,dy\,dz;
\end{gathered}
$$

les intégrales des seconds membres sont étendues à un domaine quelconque d'Univers à quatre dimensions, celles des premiers membres à la frontière à trois dimensions de ce domaine. Ces équations donnent

$$
\begin{gathered}
[dy\,\Pi_z] - [dz\,\Pi_y] = 0,\\
[dz\,\Pi_x] - [dx\,\Pi_z] = 0,\\
[dx\,\Pi_y] - [dy\,\Pi_x] = 0;
\end{gathered}
$$

[1] On peut remarquer que la formulation analytique de ce théorème ne suppose pas les axes nécessairement rectangulaires.

elles sont identiquement vérifiées s'il n'y a pas de pression; dans le cas général elles donnent

$$p_{zy} - p_{yz} = 0,$$
$$p_{xz} - p_{zx} = 0,$$
$$p_{yx} - p_{xy} = 0.$$

11. On peut représenter les résultats précédents au moyen d'une notation vectorielle simple. Désignons par les lettres

$$\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3$$

les quatre vecteurs d'Univers qui ont respectivement pour composantes

$$\begin{array}{cccc} 1, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & 1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & 1, & 0; \\ 0, & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

Les quatre derniers sont des vecteurs d'espace. Avec ces notations la « quantité de mouvement-masse » d'un point matériel de masse m est représentée par

$$m\left(\mathbf{e}_0 + \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3\right).$$

Si nous convenons encore de désigner par une lettre $\mathbf{m}$ un point d'Univers (t, x, y, z), la dérivée $\frac{d\mathbf{m}}{dt}$ de ce point par rapport au temps est le vecteur d'Univers de composantes

$$1, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

on voit que la « quantité de mouvement-masse » d'un point matériel est représentée par la notation

$$m\frac{d\mathbf{m}}{dt}.$$

Les points et les vecteurs (libres) sont des *formes géométriques* du premier degré. On peut considérer aussi des formes géométriques du second degré, qui représentent des systèmes de vecteurs *glissants*. On désigne par $[\mathbf{m}\mathbf{m}']$ le vecteur glissant qui a pour origine le point d'Univers $\mathbf{m}$ et pour extrémité le point d'Univers $\mathbf{m}'$. Ce vecteur glissant a dix coordonnées plückériennes qui sont les déterminants du deuxième ordre formés avec le Tableau

$$\begin{matrix} 1 & t & x & y & z, \\ 1 & t' & x' & y' & z'; \end{matrix}$$

on a évidemment

$$[\mathbf{m}'\mathbf{m}] = -[\mathbf{m}\mathbf{m}'].$$

De même on désignera par $[\mathbf{me}]$ le vecteur glissant obtenu en portant à partir du point d'Univers $\mathbf{m}$ un vecteur équipollent à un vecteur donné $\mathbf{e}$; les dix coordonnées plückériennes de ce vecteur glissant sont formées avec le Tableau

$$\begin{matrix} 1 & t & x & y & z, \\ 0 & \theta & \xi & \eta & \zeta, \end{matrix}$$

où figurent dans la seconde ligne les composantes du vecteur $\mathbf{e}$. Enfin la notation $[\mathbf{ee}']$ désignera le *bivecteur* dont les dix coordonnées sont formées avec le Tableau

$$\begin{matrix} 0 & \theta & \xi & \eta & \zeta, \\ 0 & \theta' & \xi' & \eta' & \zeta', \end{matrix}$$

des composantes des deux vecteurs libres $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$.

Dans chacun des cas précédents le vecteur glissant ou le bivecteur considéré peut être regardé comme le produit (extérieur) des deux facteurs, qui sont des formes géométriques du premier degré (point ou vecteur libre). Le produit de deux formes géométriques quelconques du premier degré satisfait à la loi distributive, mais change de signe avec l'ordre des facteurs.

12. Le vecteur glissant qui a pour origine le point d'Univers $\mathbf{m}$ qui représente un point matériel donné à un instant donné, et qu'on obtient en portant à partir de ce point sa « quantité de mouvement-masse », a pour expression

$$m\left[\mathbf{m}\,\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right],$$

et l'équation

$$\frac{d}{dt}\left\{m\left[\mathbf{m}\,\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right]\right\} = [\mathbf{F}],$$

où $\mathbf{F}$ représente le vecteur glissant « force », contient, en même temps que le principe fondamental de la Dynamique, le théorème des moments cinétiques; elle condense en effet les dix équations

$$\frac{dm}{dt} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = X,$$
$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = Y,$$
$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = Z,$$
$$\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dx}{dt} - mx\right) = tX,$$
$$\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dy}{dt} - my\right) = tY,$$
$$\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dz}{dt} - mz\right) = tZ,$$
$$\frac{d}{dt}\left(my\frac{dz}{dt} - mz\frac{dy}{dt}\right) = yZ - zY,$$
$$\frac{d}{dt}\left(mz\frac{dx}{dt} - mx\frac{dz}{dt}\right) = zX - xZ,$$
$$\frac{d}{dt}\left(mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}\right) = xY - yX.$$

13. Revenons à la Mécanique des milieux continus. Désignons par **G** le vecteur glissant qui représente l'élément à trois dimensions de « quantité de mouvement-masse » et par **F** le vecteur glissant qui représente la force de volume élémentaire. *Les équations de la Mécanique sont condensées dans la formule*

$$\mathbf{G}' = [dt\mathbf{F}]. \tag{6}$$

On a du reste ici

$$\mathbf{G} = [\mathbf{m}\mathbf{e}_0]\Pi + [\mathbf{m}\mathbf{e}_1]\Pi_x + [\mathbf{m}\mathbf{e}_2]\Pi_y + [\mathbf{m}\mathbf{e}_3]\Pi_z,$$
$$\mathbf{F} = [\mathbf{m}\mathbf{e}_1]X\,dx\,dy\,dz + [\mathbf{m}\mathbf{e}_2]Y\,dx\,dy\,dz + [\mathbf{m}\mathbf{e}_3]Z\,dx\,dy\,dz.$$

Le calcul de $\mathbf{G}'$ peut se faire en tenant compte de l'équation

$$d\mathbf{m} = \mathbf{e}_0\,dt + \mathbf{e}_1\,dx + \mathbf{e}_2\,dy + \mathbf{e}_3\,dz;$$

il donne

$$\begin{aligned}\mathbf{G}' = {} & [\mathbf{m}\mathbf{e}_0]\Pi' + [\mathbf{m}\mathbf{e}_1]\Pi'_x + [\mathbf{m}\mathbf{e}_2]\Pi'_y + [\mathbf{m}\mathbf{e}_3]\Pi'_z \\ & + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1][dt\,\Pi_x - dx\,\Pi] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2][dt\,\Pi_y - dy\,\Pi] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3][dt\,\Pi_z - dz\,\Pi] \\ & + [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3][dy\,\Pi_z - dz\,\Pi_y] + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1][dz\,\Pi_x - dx\,\Pi_z] + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2][dx\,\Pi_y - dy\,\Pi_x].\end{aligned}$$

On vérifie facilement que les coefficients de $[\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3]$ sont nuls d'eux-mêmes.

Si l'on supposait qu'il agisse sur chaque élément de matière *non seulement une force*, *mais un couple*, l'équation fondamentale (6) ne changerait pas, mais il faudrait ajouter à l'expression de $\mathbf{F}$ des termes de la forme

$$[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\mathrm{L}\,dx\,dy\,dz + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\mathrm{M}\,dx\,dy\,dz + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\mathrm{N}\,dx\,dy\,dz.$$

On aurait alors

$$\begin{aligned} p_{zy} - p_{yz} &= \mathrm{L}, \\ p_{xz} - p_{zx} &= \mathrm{M}, \\ p_{yx} - p_{xy} &= \mathrm{N}. \end{aligned}$$

Il est bien évident que de l'équation (6) on peut déduire l'équation fondamentale de la Dynamique du point matériel en supposant que la matière soit condensée dans une portion d'espace très petite; on obtiendrait alors

$$d\mathbf{G} = dt\,\mathbf{F}.$$

14. L'équation (6) va nous permettre facilement d'écrire les équations de la Mécanique des milieux continus en attachant à chaque point d'Univers un système de référence de Galilée variable. Nous désignerons encore par $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les vecteurs libres d'Univers qui définissent le système de référence de Galilée attaché au point $\mathbf{m}$. En passant d'un point $\mathbf{m}$ à un point infiniment voisin $\mathbf{m}'$, ces vecteurs libres varieront, mais la composante de temps du vecteur $\mathbf{e}_0$ restera constamment égale à 1, et les composantes de temps des vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ resteront constamment nulles. On aura donc des formules de la forme [1]

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{e}_0 &= \omega_0^1\mathbf{e}_1 + \omega_0^2\mathbf{e}_2 + \omega_0^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + \omega_1^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\mathbf{e}_2 + \omega_2^3\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 + \omega_3^3\mathbf{e}_3, \end{aligned} \right.$$

les ω_i^j étant des expressions linéaires par rapport aux différentielles

---

[1] Nous supposons, comme au n° 1, que les axes des trièdres de coordonnées ne sont pas nécessairement rectangulaires.

des quatre quantités qui servent à définir, d'une manière d'ailleurs arbitraire, les différents points d'Univers. Désignons alors par

$$(8)\qquad d\mathbf{m} = \omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3,$$

le vecteur libre d'origine $\mathbf{m}$ et d'extrémité $\mathbf{m}'$; ω^0 est simplement l'intervalle de temps élémentaire correspondant. On aura encore ici des expressions de la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= [\mathbf{m}\mathbf{e}_0]\mathrm{H} + [\mathbf{m}\mathbf{e}_1]\mathrm{H}_x + [\mathbf{m}\mathbf{e}_2]\mathrm{H}_y + [\mathbf{m}\mathbf{e}_3]\mathrm{H}_z,\\ \mathbf{F} &= [\mathbf{m}\mathbf{e}_1]\mathrm{X}\omega^1\omega^2\omega^3 + [\mathbf{m}\mathbf{e}_2]\mathrm{Y}\omega^1\omega^2\omega^3 + [\mathbf{m}\mathbf{e}_3]\mathrm{Z}\omega^1\omega^2\omega^3;\end{aligned}$$

seulement l'expression de $\mathbf{G}'$ deviendra plus compliquée, puisque les vecteurs libres $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ne sont plus fixes. On aura

$$\begin{aligned}\mathbf{G}' = [\mathbf{m}\mathbf{e}_0]\mathrm{H}' &+ [\mathbf{m}\mathbf{e}_1][\mathrm{H}'_x + \omega_0^1\mathrm{H} + \omega_1^1\mathrm{H}_x + \omega_2^1\mathrm{H}_y + \omega_3^1\mathrm{H}_z]\\ &+ [\mathbf{m}\mathbf{e}_2][\mathrm{H}'_y + \omega_0^2\mathrm{H} + \omega_1^2\mathrm{H}_x + \omega_2^2\mathrm{H}_y + \omega_3^2\mathrm{H}_z]\\ &+ [\mathbf{m}\mathbf{e}_3][\mathrm{H}'_z + \omega_0^3\mathrm{H} + \omega_1^3\mathrm{H}_x + \omega_2^3\mathrm{H}_y + \omega_3^3\mathrm{H}_z]\\ &+ [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1][\omega^0\mathrm{H}_x - \omega^1\mathrm{H}] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2][\omega^0\mathrm{H}_y - \omega^2\mathrm{H}] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3][\omega^0\mathrm{H}_z - \omega^3\mathrm{H}]\\ &+ [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3][\omega^2\mathrm{H}_z - \omega^3\mathrm{H}_y] + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1][\omega^3\mathrm{H}_x - \omega^1\mathrm{H}_z] + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2][\omega^1\mathrm{H}_y - \omega^2\mathrm{H}_x].\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement les équations cherchées.

La connexion affine de l'Univers de la Mécanique classique.

15. Nous avons admis dans ce qui précède la définition ordinaire de l'équipollence des vecteurs d'Univers. Mais les formules obtenues seraient encore valables avec une définition arbitraire de l'équipollence de deux vecteurs d'Univers *d'origines infiniment voisines*. Avec cette nouvelle définition, les formules (7) conservent leur forme *mais avec des coefficients modifiés* (1).

---

(1) Il importe de remarquer que si l'on attachait à chaque point d'Univers un *autre* système de référence de Galilée, défini par exemple par

$$\bar{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{e}_0 + u\mathbf{e}_1, \qquad \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1, \qquad \bar{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3,$$

les formules (7) devraient être modifiées en conséquence; en particulier ω_0^1 serait remplacé par $\bar{\omega}_0^1 = \omega_0^1 + u\omega_1^1 + du$.

Supposons que les seules forces de volume qui interviennent soient dues à la gravitation, ce qui est effectivement le cas dans les applications; définir l'équipollence de deux systèmes de Galilée d'origines infiniment voisines revient évidemment à définir l'équipollence de deux vecteurs d'Univers d'origines infiniment voisines. Si l'on peut choisir cette définition de manière à supprimer les forces de gravitation, les équations de la Dynamique se réduiront à

$$G' = 0.$$

Or prenons pour $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ des vecteurs équipollents *au sens ordinaire* aux vecteurs-unités d'un système de référence de Galilée *fixe* et prenons

$$\omega_0^1 = -X\,dt, \qquad \omega_0^2 = -Y\,dt, \qquad \omega_0^3 = -Z\,dt,$$
$$\omega_i^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Les équations de la Mécanique deviendront

$$H' = 0, \qquad H'_x - X[dt\,H] = 0, \qquad H'_y - Y[dt\,H] = 0, \qquad H'_z - Z[dt\,H] = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} &H' = 0, \\ &H'_x = \rho X\,[dt\,dx\,dy\,dz], \\ &H'_y = \rho Y\,[dt\,dx\,dy\,dz], \\ &H'_z = \rho Z\,[dt\,dx\,dy\,dz]; \end{aligned}$$

ce seront les équations classiques de la Dynamique d'un milieu matériel continu soumis à une force de volume *proportionnelle à la masse*. Il suffit de prendre pour X, Y, Z les composantes de l'accélération due à la gravitation pour faire rentrer la gravitation dans la Géométrie.

Le résultat qui vient d'être obtenu est identique à celui qu'avait fourni directement la Dynamique du point matériel. Les formules

$$\begin{aligned} &d\mathbf{e}_0 = -X\,dt\,\mathbf{e}_1 - Y\,dt\,\mathbf{e}_2 - Z\,dt\,\mathbf{e}_3, \\ &d\mathbf{e}_1 = d\mathbf{e}_2 = d\mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

signifient en effet que deux systèmes de référence de Galilée d'origines

$$t, \quad x, \quad y, \quad z,$$
$$t + dt, \qquad x + dx, \qquad y + dy, \qquad z + dz$$

sont regardés comme équipollents lorsque les trièdres correspondants T et T′ sont équipollents au sens ordinaire, le trièdre T′ étant animé par rapport au trièdre T d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse ($X\,dt$, $Y\,dt$, $Z\,dt$).

16. Convenons de dire qu'une définition donnée de l'équipollence de deux systèmes de Galilée d'origines infiniment voisines définit une *connexion affine* de l'espace-temps. Il est facile maintenant de voir si les phénomènes de gravitation sont compatibles avec plusieurs connexions affines distinctes de l'Univers. Faisons auparavant la remarque importante que *bien que la connexion affine de l'Univers dépende de la distribution de la matière dans l'espace*, néanmoins, *elle n'est pas modifiée sensiblement par l'introduction de faibles masses dans une région donnée de l'Univers*. Si nous raisonnons sur le système formé par une de ces faibles masses, la connexion affine de l'Univers en chaque point d'Univers correspondant ne dépendra pas de l'état de ces masses. Toute modification (imaginable) de la connexion affine de l'Univers se traduira dans l'expression de $\mathbf{G}'$ par l'addition des termes

$$\begin{aligned}(9)\qquad & [\mathbf{m}\mathbf{e}_1][\varpi_0^1\mathbf{\Pi}+\varpi_1^1\mathbf{\Pi}_x+\varpi_2^1\mathbf{\Pi}_y+\varpi_3^1\mathbf{\Pi}_z]\\ &+[\mathbf{m}\mathbf{e}_2][\varpi_0^2\mathbf{\Pi}+\varpi_1^2\mathbf{\Pi}_x+\varpi_2^2\mathbf{\Pi}_y+\varpi_3^2\mathbf{\Pi}_z]\\ &+[\mathbf{m}\mathbf{e}_3][\varpi_0^3\mathbf{\Pi}+\varpi_1^3\mathbf{\Pi}_x+\varpi_2^3\mathbf{\Pi}_y+\varpi_3^3\mathbf{\Pi}_z],\end{aligned}$$

où l'on a désigné par ϖ_0^i, ϖ_l^i les modifications subies par les composantes ω_0^i, ω_l^i de la connexion affine. Les seules modifications possibles sont donc celles qui annulent les trois quantités entre crochets, et cela *quelles que soient les valeurs numériques des quantités qui caractérisent l'état du milieu matériel.*

Plaçons-nous d'abord au point de vue le plus général possible, la connexion affine permettant l'équipollence de deux systèmes de référence de Galilée dont l'un aurait un trièdre (T) trirectangle, l'autre un trièdre (T′) *non* trirectangle. Supposons encore, ce qui est permis, que les vecteurs $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ utilisés dans les formules (7) soient toujours équipollents entre eux *au sens habituel*, c'est-à-dire que tout soit rapporté à un système de Galilée fixe. Posons

$$\begin{aligned}\varpi_0^i &= \gamma_{00}^i\,dt+\gamma_{01}^i\,dx+\gamma_{02}^i\,dy+\gamma_{03}^i\,dz,\\ \varpi_l^i &= \gamma_{l0}^i\,dt+\gamma_{l1}^i\,dx+\gamma_{l2}^i\,dy+\gamma_{l3}^i\,dz.\end{aligned}$$

Les coefficients des formes Π, Π_x, Π_y, Π_z sont

$$\rho, \quad \rho u, \quad \rho v, \quad \rho w,$$
$$\rho u^2 + p_{xx}, \qquad \rho uv + p_{xy}, \qquad \rho uw + p_{xz}, \qquad \ldots, \qquad \rho w^2 + p_{zz};$$

on peut, pour annuler les trois expressions entre crochets des formules (7), les regarder comme indépendants. En portant successivement son attention sur chacun d'entre eux, les autres étant regardés comme nuls, on arrive anx formules

$$(10) \qquad \gamma^i_{00} = 0, \qquad \gamma^i_{0j} = \gamma^i_{j0}, \qquad \gamma^k_{ij} = \gamma^k_{ji};$$

elles expriment tout simplement que les trois formes différentielles quadratiques

$$\varpi^i_0\, dt + \varpi^i_1\, dx + \varpi^i_2\, dy + \varpi^i_3\, dz \qquad (i = 1, 2, 3)$$

sont identiquement nulles.

On arriverait au même résultat si l'on utilisait simplement la Dynamique du point matériel; l'égalité

$$\frac{d}{dt}\left(e_0 + e_1 \frac{dx}{dt} + e_2 \frac{dy}{dt} + e_3 \frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

où l'on tient compte des relations (7), reste en effet valable en modifiant les coefficients ω^i_0, ω^j_i de ces relations par l'addition des termes ϖ^i_0, ϖ^j_i si l'on a

$$\varpi^i_0 + \varpi^i_1 \frac{dx}{dt} + \varpi^i_2 \frac{dy}{dt} + \varpi^i_3 \frac{dz}{dt} = 0,$$

et cela quels que soient les rapports mutuels de dx, dy, dz, dt : on arrive exactement aux mêmes conclusions.

Les conclusions au contraire seraient différentes, si l'on ne supposait pas la symétrie des composantes de la pression; cette symétrie disparaîtrait nécessairement si l'on admettait la possibilité de *couples* (1) agissant sur un élément matériel. Dans ce cas, il faudrait que l'expression (9) fût identiquement nulle, même en supposant

$$p_{xy} \neq p_{yx}, \qquad p_{yz} \neq p_{zy}, \qquad p_{zx} \neq p_{xz}.$$

(1) Ce cas se présenterait pour un aimant placé dans un champ magnétique.

On verrait alors facilement que *tous les coefficients* γ_{ij}^{k} *devraient être nuls* : il ne resterait que 9 coefficients arbitraires au lieu de 18. Dans ce cas, *et dans ce cas seulement*, la Dynamique des milieux continus impose à la connexion affine de l'Univers des conditions plus restrictives que la Dynamique du point matériel.

17. Supposons maintenant que la connexion affine conserve le caractère métrique de l'espace, c'est-à-dire qu'un système de référence constitué par un trièdre trirectangle ne puisse être équipollent qu'à un système de référence également constitué par un trièdre trirectangle. Dans ce cas-là, si l'on attache à chaque point d'Univers un système de référence de Galilée tel que les vecteurs d'espace $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ soient rectangulaires et de longueur égale à 1 (ce qui suppose choisie une fois pour toutes une unité de longueur), les formules (7) subsistent, mais on a entre les ω_i^j les relations qui se déduisent des formules

$$(\mathbf{e}_i)^2 = 1, \qquad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, 3);$$

ces relations sont

$$\omega_i^i = 0, \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0;$$

les trois quantités $\omega_2^3 = -\omega_3^2$, $\omega_3^1 = -\omega_1^3$, $\omega_1^2 = -\omega_2^1$ sont les composantes de la rotation qui amène le trièdre T à être équipollent au trièdre T'.

Les modifications qu'il est permis de faire à la connexion affine de l'Univers sont alors définies par les même conditions qu'au n° 16; seulement le fait qu'on a

$$\varpi_i^i = \varpi_i^j + \varpi_j^i = 0$$

réduit à quatre le nombre de coefficients arbitraires : on a [1]

$$\varpi_0^1 = r\,dy - q\,dz, \qquad \varpi_0^2 = p\,dz - r\,dx, \qquad \varpi_0^3 = q\,dx - p\,dy,$$
$$\varpi_2^3 = -\varpi_3^2 = p\,dt + h\,dx, \qquad \varpi_3^1 = -\varpi_1^3 = q\,dt + h\,dy, \qquad \varpi_1^2 = -\varpi_2^1 = r\,dt + h\,dz.$$

Si l'on ne supposait pas la symétrie des composantes de la pression, le coefficient h deviendrait nécessairement nul.

---

(1) L'interprétation géométrique de ces formules serait facile.

18. Nous verrons plus loin comment, suivant qu'on se place au point de vue du n° 16 ou au point de vue du n° 17, entre toutes les connexions affines compatibles avec l'expérience, il en est une qui se distingue des autres par des propriétés intrinsèques. Remarquons cependant qu'on pourrait imaginer une théorie mécanique dans laquelle le moment cinétique d'un élément de matière par rapport à un point pris à l'intérieur de l'élément ne serait pas infiniment petit par rapport à la quantité de mouvement du même élément; on pourrait supposer aussi que l'état de tension du milieu se manifeste par des *couples* et non seulement des *forces* agissant sur chaque élément plan. Dans ces conditions l'expression analytique de **G** devrait contenir des termes en $[\mathbf{e}_0\mathbf{e}_i]$ et $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$, et alors *la connexion affine de l'Univers relèverait uniquement de l'expérience;* les faits mécaniques seraient compatibles avec une seule définition de l'équipollence de deux systèmes de Galilée d'origines infiniment voisines.

L'espace-temps de la relativité restreinte et sa connexion affine.

19. La théorie de la relativité restreinte admet les mêmes systèmes de référence de Galilée que la Mécanique classique; la seule différence, essentielle il est vrai, réside dans les formules qui permettent de passer des coordonnées (t, x, y, z) d'un événement rapporté à un premier système de référence de Galilée aux coordonnées (t_1, x_1, y_1, z_1) du même événement rapporté à un autre système de référence de Galilée. Ces formules sont encore linéaires, c'est-à-dire que l'Univers de la relativité restreinte est affine, mais la composante de temps t d'un vecteur d'Univers n'est plus invariable. Ce qui ne change pas, c'est l'expression

$$c^2(t'-t)^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2-(z'-z)^2,$$

où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Deux vecteurs d'Univers admettent par suite un invariant, leur *produit scalaire*, qui est

$$c^2\theta\theta'-\xi\xi'-\eta\eta'-\zeta\zeta',$$

en désignant respectivement par

$$\begin{matrix} \theta, & \xi, & \eta, & \zeta, \\ \theta', & \xi', & \eta', & \zeta' \end{matrix}$$

les composantes des deux vecteurs.

Si en particulier on désigne comme plus haut par $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les vecteurs-unités attachés à un système de référence de Galilée, on a les formules

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} (\mathbf{e}_0)^2 = c^2, & (\mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{e}_2)^2 = (\mathbf{e}_3)^2 = -1, & \\ \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_i = 0, & \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 & (i \neq j = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

20. Si l'on considère un système de référence de Galilée variable dépendant d'un ou plusieurs paramètres, on aura, pour toute variation infiniment petite des paramètres, des formules

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{e}_0 = \omega_0^0 \mathbf{e}_0 + \omega_0^1 \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^0 \mathbf{e}_0 + \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^0 \mathbf{e}_0 + \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 = \omega_3^0 \mathbf{e}_0 + \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3, \end{array} \right.$$

où les ω_i^j sont linéaires par rapport aux différentielles des paramètres. Ces expressions ne sont pas absolument quelconques, car les relations (11) doivent toujours être vérifiées. En les différentiant, on obtient facilement

$$(13) \qquad \omega_0^0 = 0, \qquad \omega_0^i = c^2 \omega_i^0, \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Il reste donc en somme six expressions indépendantes, et six est bien effectivement le nombre des paramètres dont dépend l'*orientation* d'un système de référence de Galilée.

Dans les formules précédentes, les expressions ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 représentent la vitesse (infiniment petite) changée de signe du mouvement de translation rectiligne uniforme dont les axes du second système de référence sont animés par rapport aux axes du premier.

On remarquera qu'on retrouve la loi de dépendance de deux systèmes de Galilée infiniment voisins dans la Mécanique classique [1] en supposant c infini; les formules (13) deviennent en effet

$$\omega_0^0 = 0, \qquad \omega_i^0 = 0, \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0.$$

21. *La Dynamique du point matériel.* — En relativité restreinte, la notion du vecteur « quantité de mouvement-masse » peut encore être mise à la base de la Dynamique du point matériel : c'est le vecteur

$$m\left(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \frac{dx}{dt} + \mathbf{e}_2 \frac{dy}{dt} + \mathbf{e}_3 \frac{dz}{dt}\right).$$

La masse au repos μ du point matériel est, à un facteur constant près, la racine carrée du produit scalaire du vecteur « quantité de mouvement-masse » par lui-même; d'une manière plus précise, on a

$$\mu = m\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{c^2}} = m\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}};$$

ce nombre μ est attaché à chaque point matériel, de même qu'en Mécanique classique la masse ordinaire.

L'expression analytique du vecteur « quantité de mouvement-masse » prend une forme plus symétrique si l'on introduit le *temps propre* du point défini par

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}\, dt = \frac{\mu}{m}\, dt.$$

Le vecteur quantité de mouvement-masse devient alors

$$\mu\left(\mathbf{e}_0 \frac{dt}{d\tau} + \mathbf{e}_1 \frac{dx}{d\tau} + \mathbf{e}_2 \frac{dy}{d\tau} + \mathbf{e}_3 \frac{dz}{d\tau}\right);$$

dans cette expression les quantités μ et $d\tau$ sont indépendantes du système de référence.

Le principe fondamental de la Dynamique peut s'énoncer ainsi :

La dérivée par rapport au temps propre du vecteur d'Univers « quantité de mouvement-masse » est égale au vecteur d'Univers « hyperforce »

$$\mathbf{e}_0 R + \mathbf{e}_1 X + \mathbf{e}_2 Y + \mathbf{e}_3 Z.$$

[1] Il s'agit de systèmes de Galilée à trièdres trirectangles, comme au nº 17.

Ce vecteur hyperforce a une signification indépendante du système de référence, et l'on a

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \mathrm{R}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx}{dt}\right)\frac{d\tau}{dt} = \mathrm{X}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dy}{dt}\right)\frac{d\tau}{dt} = \mathrm{Y}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dz}{dt}\right)\frac{d\tau}{dt} = \mathrm{Z}\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}}.$$

La force, au sens habituel du mot, est donc la composante d'espace de l'hyperforce, multipliée par $\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}}$.

On a d'autre part, entre R, X, Y, Z, une relation nécessaire, qui exprime la constance de la masse au repos du point :

$$c^2 m\frac{dm}{dt} - m\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) - m\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) - m\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

ou

$$c^2\mathrm{R}\,dt = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz;$$

cette relation exprime que le travail élémentaire de la force est égal à la différentielle de la quantité mc^2; cette quantité est l'*énergie* du point matériel

$$mc^2 = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{V}^2}{c^2}}};$$

dans une première approximation, elle est égale à

$$\mu c^2 + \frac{1}{2}\mu\mathrm{V}^2$$

ou encore

$$\mu c^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{V}^2,$$

si l'on suppose V très petit par rapport à c.

22. *La Dynamique des milieux continus.* — Si l'on se place dans le cas particulier où aucune force de volume n'agit, les équations de la

Dynamique des milieux continus sont essentiellement les mêmes que dans la Dynamique classique. On forme le vecteur glissant qui représente la quantité de mouvement-masse d'un élément de matière

$$\mathbf{G} = [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_0]\Pi + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_1]\Pi_x + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_2]\Pi_y + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_3]\Pi_z$$

et l'on écrit que la dérivée extérieure $\mathbf{G}'$ est identiquement nulle.

Si le milieu est rapporté à un système de Galilée fixe, on peut encore mettre les composantes Π, Π_x, Π_y, Π_z sous la forme

$$\begin{aligned}
\Pi\ &= \rho\, dx\, dy\, dz - \rho u\, dy\, dz\, dt - \rho v\, dz\, dx\, dt - \rho w\, dx\, dy\, dt;\\
\Pi_x &= u\Pi - p_{xx}\, dy\, dz\, dt - p_{xy}\, dz\, dx\, dt - p_{xz}\, dx\, dy\, dt,\\
\Pi_y &= v\Pi - p_{yx}\, dy\, dz\, dt - p_{yy}\, dz\, dx\, dt - p_{yz}\, dx\, dy\, dt,\\
\Pi_z &= w\Pi - p_{zx}\, dy\, dz\, dt - p_{zy}\, dz\, dx\, dt - p_{zz}\, dx\, dy\, dt.
\end{aligned}$$

La *densité au repos* ρ_0 de l'élément de matière considéré est donnée par

$$\rho_0[dt\, dx\, dy\, dz] = [dt\,\Pi] - \frac{1}{c^2}[dx\,\Pi_x] - \frac{1}{c^2}[dy\,\Pi_y] - \frac{1}{c^2}[dz\,\Pi_z],$$

formule dans le second membre de laquelle intervient le produit scalaire du vecteur (dt, dx, dy, dz) et du vecteur $(\Pi, \Pi_x, \Pi_y, \Pi_z)$. En développant on trouve [1]

$$\rho_0 = \rho\left(1 - \frac{u^2+v^2+w^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Les équations de la Dynamique des milieux continus sont donc identiques à celles de la Mécanique classique, dans le cas où il n'y a pas de forces données.

Si l'on attache à chaque point d'Univers un système de référence de Galilée variable, on aura

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}' = \ & [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_0][\Pi' + \omega_1^0\Pi_x + \omega_2^0\Pi_y + \omega_3^0\Pi_z]\\
& + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_1][\Pi'_x + \omega_0^1\Pi + \omega_2^1\Pi_y + \omega_3^1\Pi_z]\\
& + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_2][\Pi'_y + \omega_0^2\Pi + \omega_1^2\Pi_x + \omega_3^2\Pi_z]\\
& + [\mathbf{m}\,\mathbf{e}_3][\Pi'_z + \omega_0^3\Pi + \omega_1^3\Pi_x + \omega_2^3\Pi_y]\\
& + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1][\omega^0\Pi_x - \omega^1\Pi] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_2][\omega^0\Pi_y - \omega^2\Pi] + [\mathbf{e}_0\mathbf{e}_3][\omega^0\Pi_z - \omega^3\Pi]\\
& + [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3][\omega^2\Pi_z - \omega^3\Pi_y] + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1][\omega^3\Pi_x - \omega^1\Pi_z] + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2][\omega^1\Pi_y - \omega^2\Pi_x].
\end{aligned}$$

---

(1) Il est à remarquer que l'élément de volume $[dt\, dx\, dy\, dz]$ étant indépendant du système de référence choisi, la quantité ρ_0 a une signification indépendante de ce système de référence. Il n'en est naturellement pas de même de la densité apparente ρ.

23. Recherchons si plusieurs connexions affines distinctes sont compatibles avec l'expérience. On passe d'une connexion affine à une autre en faisant subir aux composantes ω_0^i, ω_i^j des variations ϖ_0^i, ϖ_i^j satisfaisant naturellement à

$$\varpi_0^i = c^2 \varpi_0^i, \qquad \varpi_i^j + \varpi_j^i = 0,$$

et ces variations devront annuler les quatre expressions

$$\begin{array}{l}
[\varpi_1^0 \Pi_x] + [\varpi_2^0 \Pi_y] + [\varpi_3^0 \Pi_z], \\
[\varpi_0^1 \Pi\ \ ] + [\varpi_2^1 \Pi_y] + [\varpi_3^1 \Pi_z], \\
[\varpi_0^2 \Pi\ \ ] + [\varpi_1^2 \Pi_x] + [\varpi_3^2 \Pi_z], \\
[\varpi_0^3 \Pi\ \ ] + [\varpi_1^3 \Pi_x] + [\varpi_2^3 \Pi_y],
\end{array}$$

et cela *quel que soit l'état de l'élément de matière considéré.* Si nous supposons le milieu matériel rapporté à un système de référence de Galilée fixe, nous trouvons, comme au n° 16, que les formes quadratiques

$$\varpi_0^i\, dt + \varpi_1^i\, dx + \varpi_2^i\, dy + \varpi_3^i\, dz \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

doivent être identiquement nulles. On retrouve pour les ϖ_0^i et les ϖ_j exactement les mêmes expressions qu'au n° 17, avec *quatre* coefficients arbitraires p, q, r, h.

Si l'on admet une conception plus large de la Mécanique des milieux continus, la « quantité de mouvement-masse » élémentaire contenant des termes en $[\mathbf{e}_0\, \mathbf{e}_i]$ et $[\mathbf{e}_i\, \mathbf{e}_j]$, il ne reste plus aucun coefficient arbitraire et *la connexion affine de l'espace-temps relève uniquement de l'expérience* (¹).

24. *La gravitation en relativité restreinte.* — Dans la Mécanique classique, les équations

$$\omega_0^1 = -X\, dt, \qquad \omega_0^2 = -Y\, dt, \qquad \omega_0^3 = -Z\, dt,$$
$$\omega_i^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

(¹) Il en est ainsi si l'on suppose simplement la possibilité de couples agissant sur des éléments de matière, parce qu'alors le coefficient h est nécessairement nul, et, comme les quantités p, q, r, h se transforment entre elles par un changement du système de référence de Galilée (ce sont les composantes d'un vecteur d'Univers), *on est obligé de supposer également que p, q, r sont nuls.*

qui définissent la connexion affine permettant de faire rentrer la gravitation dans la Géométrie, conservent leur forme quel que soit le système de référence de Galilée choisi comme système fixe.

En relativité restreinte, si l'on admet les lois de la gravitation newtonienne pour le système de Galilée formé d'axes ayant pour origine le centre de gravité du système solaire et dirigés vers des étoiles fixes, ces lois ne conservent plus la même forme pour un autre système de référence de Galilée. Si l'on postule, avec Einstein, que la forme des lois de la gravitation doive être la même quel que soit le système de référence de Galilée adopté [1], on est obligé de modifier ces lois; mais, ce qu'il importe de remarquer dès maintenant, c'est que la réduction faite par Einstein de la gravitation à la Géométrie est essentiellement de la même nature que celle qui a été indiquée au début de ce Chapitre.

25. *Le point de vue de la relativité généralisée.* — Nous avons supposé jusqu'à présent l'existence effective de systèmes de référence de Galilée permettant de repérer *tout* l'espace-temps. Au point où nous sommes arrivés, on voit comment on peut se passer de cette hypothèse. Il suffit en effet, pour que l'on puisse formuler les lois physiques, que les deux conditions suivantes soient réalisées :

1° On dispose, pour mesurer les grandeurs d'état physiques, d'un système de référence susceptible, pour le petit morceau d'espace-temps où se trouve l'observateur, de jouer le rôle d'un vrai système de Galilée [2];

2° On connaît la connexion affine de l'espace-temps, c'est-à-dire on sait comment doivent être comparées les observations faites par rapport à deux systèmes de référence de Galilée d'origines infiniment voisines; cela revient à dire que l'on connaît la transformation du groupe de Lorentz-Minkowski qui amène en coïncidence les deux systèmes de référence; analytiquement, cela s'exprime par la connaissance des coefficients des formules (8) et (12).

---

(1) Nous verrons plus loin ce que signifie exactement cette phrase.

(2) Ce n'est naturellement pas ici le lieu d'insister sur les difficultés que peut présenter, dans la pratique, l'assimilation de tel ou tel système de référence à un système de Galilée.

Nous allons maintenant passer à la théorie des variétés à connexion affine. Nous reviendrons ensuite sur l'application de cette théorie à la relativité généralisée, et nous examinerons de quelle manière les lois de l'Électromagnétisme contribuent à notre connaissance de la connexion affine de l'Univers.

CHAPITRE II.

LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE.

L'espace affine.

26. En Géométrie ordinaire, il existe des propriétés des figures que l'on appelle *propriétés affines* : ce sont celles qui se conservent lorsqu'on effectue une transformation homographique quelconque conservant le plan de l'infini. Les notions de *vecteur*, d'*équipollence de deux vecteurs*, de *somme géométrique de deux vecteurs*, sont des notions affines; il n'en est pas de même de la notion de *longueur d'un vecteur*, qui est une notion métrique. En Géométrie affine, on ne peut comparer que les longueurs de deux vecteurs parallèles. La théorie des systèmes de vecteurs glissants, de leur équivalence, de leur réduction à un vecteur et à un couple, est aussi une théorie purement affine, malgré la forme métrique sous laquelle elle est d'habitude enseignée.

En Géométrie affine, le système normal de coordonnées est le système de coordonnées cartésiennes; en prenant une origine $\mathbf{o}$ et trois vecteurs (non coplanaires) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ issus de $\mathbf{o}$, tout vecteur peut se mettre sous la forme

$$x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

et tout point $\mathbf{m}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mathbf{m} = \mathbf{o} + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

en désignant par $\mathbf{m}' - \mathbf{m}$ le vecteur (libre) d'origine $\mathbf{m}$ et d'extrémité $\mathbf{m}'$ (ou tout vecteur équipollent).

Imaginons que l'on fasse correspondre à chaque point $\mathbf{m}$ de l'espace un système de référence cartésien d'origine $\mathbf{m}$; soient $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les trois vecteurs qui définissent, avec $\mathbf{m}$, ce système de référence. Nous pourrions même imaginer qu'à chaque point $\mathbf{m}$ on fasse correspondre une infinité de tels systèmes de référence. Nous aurons ainsi un ensemble de systèmes de référence dépendant d'un nombre de paramètres pouvant aller jusqu'à 12; nous appellerons u_i ces paramètres.

Lorsqu'on fait varier infiniment peu les paramètres, le point $\mathbf{m}$ et les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ subissent des variations infiniment petites, qui sont des vecteurs, et qui sont par suite exprimables linéairement au moyen de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3,\\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3. \end{aligned}\right.$$

Les ω^i et ω_i^j sont linéaires par rapport aux différentielles du_i; ces douze formes de Pfaff permettent en somme de repérer le système de référence d'origine $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$ par rapport au système de référence d'origine $\mathbf{m}$. On peut encore dire qu'elles définissent le petit déplacement affine qui permet de passer de celui-ci à celui-là.

Les formes ω^i et ω_i^j ne sont pas arbitraires. Les intégrales

$$\int d\mathbf{m}, \quad \int d\mathbf{e}_1, \quad \int d\mathbf{e}_2, \quad \int d\mathbf{e}_3$$

étendues à un contour fermé quelconque sont évidemment nulles. Or, en les transformant en intégrales de surface, on obtient

$$\int d\mathbf{m} = \iint (\omega^1)'\mathbf{e}_1 + (\omega^2)'\mathbf{e}_2 + (\omega^3)'\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_1\omega_1 + d\mathbf{e}_2\omega_2 + d\mathbf{e}_3\omega_3,$$

ou, en tenant compte des formules (1) elles-mêmes et faisant les réductions,

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{m} = \iint & [(\omega^1)' - \omega^1\omega_1^1 - \omega^2\omega_2^1 - \omega^3\omega_3^1]\,\mathbf{e}_1 \\ & + [(\omega^2)' - \omega^1\omega_1^2 - \omega^2\omega_2^2 - \omega^3\omega_3^2]\,\mathbf{e}_2 + [(\omega^3)' - \omega^1\omega_1^3 - \omega^2\omega_2^3 - \omega^3\omega_3^3]\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

On a de même

$$\int d\mathbf{e}_1 = \int\!\!\int [(\omega_1^1)' - \Sigma\omega_1^i\omega_i^1]\mathbf{e}_1 + [(\omega_1^2)' - \Sigma\omega_1^i\omega_i^2]\mathbf{e}_2 + [(\omega_1^3)' - \Sigma\omega_1^i\omega_i^3]\mathbf{e}_3,$$

$$\int d\mathbf{e}_2 = \int\!\!\int [(\omega_2^1)' - \Sigma\omega_2^i\omega_i^1]\mathbf{e}_1 + [(\omega_2^2)' - \Sigma\omega_2^i\omega_i^2]\mathbf{e}_2 + [(\omega_2^3)' - \Sigma\omega_2^i\omega_i^3]\mathbf{e}_3,$$

$$\int d\mathbf{e}_3 = \int\!\!\int [(\omega_3^1)' - \Sigma\omega_3^i\omega_i^1]\mathbf{e}_1 + [(\omega_3^2)' - \Sigma\omega_3^i\omega_i^2]\mathbf{e}_2 + [(\omega_3^3)' - \Sigma\omega_3^i\omega_i^3]\mathbf{e}_3.$$

En annulant les seconds membres et en remarquant que ces seconds membres, étant des vecteurs, doivent avoir leurs trois composantes nulles, on obtient les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} (\omega^i)' = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3} [\omega^k\omega_k^i] & (i = 1, 2, 3), \\ (\omega_i^j)' = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3} [\omega_i^k\omega_k^j] & (i, j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Elles définissent ce qu'on appelle la *structure* de l'espace affine; elles en condensent *toutes* les propriétés.

27. On peut retrouver ces formules par un procédé un peu différent, quoique identique au fond. Considérons un point fixe $\mathbf{a}$; soient x^1, x^2, x^3 ses coordonnées par rapport au système de référence attaché au point $\mathbf{m}$; on pourra poser

$$\mathbf{a} = \mathbf{m} + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3,$$

d'où, en différentiant et tenant compte de (1),

$$d\mathbf{a} = (dx^1 + \omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_3^1)\,\mathbf{e}_1$$
$$+ (dx^2 + \omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 + x^3\omega_3^2)\,\mathbf{e}_2 + (dx^3 + \omega^3 + x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + x^3\omega_3^3)\,\mathbf{e}_3.$$

Le point $\mathbf{a}$ étant fixe, on a donc

$$(3)\qquad \begin{cases} dx^1 + \omega^1 + x^1\omega_1^1 + x^2\omega_2^1 + x^3\omega_3^1 = 0, \\ dx^2 + \omega^2 + x^1\omega_1^2 + x^2\omega_2^2 + x^3\omega_3^2 = 0, \\ dx^3 + \omega^3 + x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + x^3\omega_3^3 = 0. \end{cases}$$

En exprimant que les équations (3) sont complètement intégrables, on retrouve les formules de structure (2).

La notion de variété à connexion affine.

28. Considérons maintenant une variété numérique à trois dimensions, dont chaque point $\mathbf{m}$ est supposé défini par trois nombres u^1, u^2, u^3. Faisons correspondre par la pensée à chaque point $\mathbf{m}$ un espace affine contenant ce point, et soient $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ trois vecteurs formant avec $\mathbf{m}$ un système de référence pour cet espace. La variété sera dite à « connexion affine » lorsqu'on aura défini, d'une manière d'ailleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points *infiniment voisins* quelconques $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ de la variété; cette loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}'$ correspond à tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}$, que tel vecteur du premier espace est parallèle ou équipollent à tel vecteur du second espace. En particulier, le point $\mathbf{m}'$ lui-même sera repéré par rapport à l'espace affine du point $\mathbf{m}$ et nous admettrons la loi de continuité d'après laquelle les coordonnées de $\mathbf{m}'$ par rapport au système de référence affine d'origine $\mathbf{m}$ sont infiniment petites; cela permettra de dire en un certain sens que l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est l'espace affine *tangent* à la variété donnée ([1]).

D'après cela, si l'on attache à chaque point $\mathbf{m}$, dans l'espace affine tangent, trois vecteurs de référence $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (pouvant même dépendre de paramètres arbitraires), la connexion affine de la variété s'exprimera par des formules identiques de forme à (1) :

$$(1)\qquad \begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^1\,\mathbf{e}_1 + \omega^2\,\mathbf{e}_2 + \omega^3\,\mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_i = \omega_i^1\,\mathbf{e}_1 + \omega_i^2\mathbf{e}_2 + \omega_i^3\,\mathbf{e}_3 \qquad (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

([1]) On pourrait évidemment, comme on le fait d'habitude, remarquer qu'au voisinage du point $\mathbf{m}$ il existe un repérage affine pour les points de la variété, ne serait-ce que celui qui consiste à attribuer au point défini par $u^i + du^i$ les coordonnées cartésiennes du^i; en ce sens, l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est bien *tangent* à la variété. On pourrait supposer aussi que la variété est plongée dans un espace affine à un nombre plus ou moins grand de dimensions et que l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ est effectivement l'espace plan tangent à cette variété. On pourrait enfin regarder l'espace affine attaché à $\mathbf{m}$ comme la variété elle-même qui serait perçue d'une manière affine par un observateur placé en $\mathbf{m}$. Tous ces points de vue sont compatibles avec le point de vue du texte qui me semble logiquement préférable.

dans lesquelles les ω^i et ω_i^j sont des formes linéaires par rapport aux différentielles des paramètres dont dépend le système de référence variable, les ω^i ne dépendant que des différentielles du^1, du^2, du^3. Elles s'interprètent en disant que tout point $\mathbf{m}'$ infiniment voisin de $\mathbf{m}$ sur la variété doit être regardé comme le point

$$\mathbf{m} + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3$$

de l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$ [1]; de même le vecteur $\mathbf{e}_i$ attaché à $\mathbf{m}'$ est équipollent au vecteur

$$\mathbf{e}_i + \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3$$

de l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$. Naturellement, cette équipollence ne doit être considérée comme ayant un sens qu'aux infiniment petits du second ordre près.

On peut adjoindre aux formules (1) celles qui permettent de passer des coordonnées x^i d'un point de l'espace affine de $\mathbf{m}$ aux coordonnées $x^i + dx^i$ du point correspondant (on peut dire égal) de l'espace affine de $\mathbf{m}'$. Ces formules sont identiques aux formules (3) et s'obtiennent de la même manière :

$$(3) \qquad dx^i + \omega^i + x^1 \omega_1^i + x^2 \omega_2^i + x^3 \omega_3^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ajoutons-y les formules qui permettent le même passage pour un vecteur de projections ξ^i, et qui sont

$$(4) \qquad d\xi^i + \xi^1 \omega_1^i + \xi^2 \omega_2^i + \xi^3 \omega_3^i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

29. Les lois de la connexion affine définissent en quelque sorte le *raccord* des espaces affines tangents en deux points infiniment voisins $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$. Que se passe-t-il quand on considère deux points quelconques de la variété?

On peut répondre à cette question si l'on se donne un chemin déterminé allant de $\mathbf{m}_0$ en $\mathbf{m}_1$; le raccord des deux espaces tangents peut alors se faire de proche en proche. En fait, si l'on choisit en chaque

---

(1) On voit qu'en changeant au besoin le système de référence choisi pour l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$, les coordonnées cartésiennes du point $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$ sont du^1, du^2, du^3, puisque les ω^i sont des combinaisons linéaires des du^i.

point du chemin un système de référence affine, les ω^i et les ω_j^i s'expriment sous la forme $p^i\,dt$ et $p_j^i\,dt$, en appelant t le paramètre qui définit la position du point variable sur le chemin, les p^i et p_j^i étant des fonctions connues de t. Les équations (1) pourront alors être regardées comme des équations différentielles ordinaires donnant, en chaque point du chemin, $\mathbf{m}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ en fonction de leurs valeurs initiales. On aura donc, par l'intégration de ces équations, réalisé un repérage rigoureusement exact de l'espace affine de $\mathbf{m}_1$ par rapport à l'espace affine de $\mathbf{m}_0$.

Il revient au même, et la chose est peut-être plus facile à comprendre pour ceux qui ne sont pas habitués à calculer sur des vecteurs, d'intégrer les équations différentielles (3), qui deviennent ici

$$\frac{dx^i}{dt} + p^i + p_1^i x^1 + p_2^i x^2 + p_3^i x^3 = 0.$$

Si l'on prend pour constantes d'intégration $(x^i)_0$ les valeurs des inconnues pour la valeur initiale de t, les formules

$$x^i = a^i + a_1^i (x^1)_0 + a_2^i (x^2)_0 + a_3^i (x^3)_0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

définissent le changement de coordonnées cartésiennes qui repère l'espace affine du point variable $\mathbf{m}$ du chemin par rapport à l'espace affine du point origine $\mathbf{m}_0$. Ce changement de coordonnées, appliqué à un vecteur, donnerait

$$\xi^i = a_1^i (\xi^1)_0 + a_2^i (\xi^2)_0 + a_3^i (\xi^3)_0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

d'où

$$(\mathbf{e}_i)_0 = a_i^1 \mathbf{e}_1 + a_i^2 \mathbf{e}_2 + a_i^3 \mathbf{e}_3 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

Ces dernières formules montrent ce qu'est devenu le vecteur $(\mathbf{e}_i)_0$ transporté de manière à rester de proche en proche équipollent à lui-même.

On voit de même que le point $\mathbf{m}_0$ a pris comme coordonnées a^1, a^2, a^3 dans l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$,

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{m} + a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3. \tag{6'}$$

Les formules (6) et (6′) définissent la solution générale des équations différentielles (1), comme les formules (5) définissent celle des équations (3).

30. Le raccord des espaces affines tangents en deux points quelconques $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ peut-il être défini indépendamment du chemin suivi pour aller de $\mathbf{m}$ en $\mathbf{m}'$? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les équations aux différentielles totales (1) ou (3) soient complètement intégrables. Le calcul a été fait quand nous nous sommes occupés de l'espace affine proprement dit : il donne les conditions nécessaires et suffisantes (2) :

$$(\omega^i)' = [\omega^k \omega_k^i],$$
$$(\omega_i^j)' = [\omega_i^k \omega_k^j];$$

nous avons supprimé dans les seconds membres le signe de sommation par rapport à k, suivant un usage qu'a vulgarisé le calcul différentiel absolu.

Si les conditions (2) sont réalisées, et si l'on se fixe en un point particulier $\mathbf{m}_0$ un système de référence $(\mathbf{e}_i)_0$, rien n'empêchera de choisir en un point $\mathbf{m}$ quelconque, pour $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, les vecteurs respectivement équipollents à $(\mathbf{e}_1)_0$, $(\mathbf{e}_2)_0$, $(\mathbf{e}_3)_0$, car leur propriété d'équipollence a maintenant une signification absolue. Avec ce choix des systèmes de référence, on a

$$d\mathbf{e}_i = 0,$$

et par suite toutes les formes ω_i^j sont identiquement nulles; les formules (2) montrent alors que les ω^i ont leurs covariants bilinéaires identiquement nuls : ce sont donc des différentielles exactes, et l'on ne restreint pas la généralité en supposant $\omega^i = du^i$. Donc les formules

$$d\mathbf{m} = du^i \mathbf{e}_i$$

montrent que u^1, u^2, u^3 peuvent être prises comme coordonnées affines du point $\mathbf{m}$ pour un système de référence valable pour toute la variété. Autrement dit, *la variété est elle-même un espace affine*.

La structure d'une variété à connexion affine.

31. Revenons au cas général. Peut-on trouver des formules jouant, dans la variété à connexion affine considérée, le même rôle que les

formules (2) dans un espace affine proprement dit? On peut en obtenir effectivement en suivant une marche analogue à celle qui nous a conduits, au début du Chapitre, aux formules (2).

Considérons dans la variété un contour fermé partant d'un point $\mathbf{m}_0$ et y revenant et considérons l'intégrale $\int d\mathbf{m}$ étendue à ce contour fermé. On peut donner un sens à cette intégrale à condition de repérer tous les vecteurs infiniment petits dont elle représente la somme géométrique par rapport à un même espace affine. Les considérations des numéros précédents permettent de le faire en effectuant le repérage de proche en proche par rapport à l'espace affine tangent en $\mathbf{m}_0$. Nous reviendrons plus loin sur ce procédé, qui est valable pour n'importe quel contour, mais qui n'est pas sans présenter des difficultés d'application assez sérieuses, si l'on veut être rigoureux.

Appliquons plutôt un second procédé, qui aura l'avantage de s'étendre à des intégrales multiples portant sur des vecteurs, *mais qui suppose essentiellement le contour infiniment petit*. Prenons un point $\mathbf{a}$ fixé une fois pour toutes, et qui soit infiniment près de tous les points du contour, *et repérons tous les vecteurs infiniment petits* $d\mathbf{m}$ *par rapport à l'espace affine tangent en* $\mathbf{a}$, ce qui est possible aux infiniment petits près du second ordre : cette circonstance, comme on sait, n'a aucune influence sur le calcul d'une intégrale définie.

Soient alors u_0^i les coordonnées (curvilignes) du point $\mathbf{a}$, et u^i celles d'un point $\mathbf{m}$ du contour. Posons de plus

$$\omega^i = \gamma_k^i du^k, \qquad \omega_i^j = \gamma_{ik}^j du^k.$$

On a, en appelant $(\mathbf{e}_i)_0$ les vecteurs de référence en $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i)_0 + \omega_i^j (\mathbf{e}_j)_0 = (\mathbf{e}_i)_0 + (\gamma_{ik}^j)_0 (u^k - u_0^k)(\mathbf{e}_j)_0,$$

d'où enfin

$$d\mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i = [\omega^i + (\gamma_{jk}^i)_0 (u^k - u_0^k)\omega^j](\mathbf{e}_i)_0.$$

Les composantes du vecteur $d\mathbf{m}$ dans l'espace affine tangent en $\mathbf{a}$ sont donc

$$\omega^i + (\gamma_{jk}^i)_0 (u^k - u_0^k)\omega^j,$$

en appelant $(\gamma_{jk}^i)_0$ la valeur en $\mathbf{a}$ du coefficient variable γ_{jk}^i.

Cela posé, l'intégrale de $d\mathrm{m}$ le long du contour fermé aura pour $i^{\text{ième}}$ composante, dans l'espace affine tangent en a,

$$\int \omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\omega^j = \int\int (\omega^i)' + (\gamma^i_{jk})_0\, du_k\, \omega^j + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)(\omega^j)'.$$

On ne modifie le second membre que de quantités infiniment petites par rapport à lui en supprimant le troisième terme et en remplaçant dans le second le coefficient constant $(\gamma^i_{jk})_0$ par sa valeur variable γ^i_{jk}. On arrive finalement, *pour un contour fermé infiniment petit*, à la formule

$$\int d\mathrm{m} = \int\int [(\omega^i)' - \omega^j \omega^i_j]\, \mathrm{e}_i,$$

identique à la formule trouvée dans le cas d'un espace affine proprement dit. Ici les vecteurs e_i du second membre sont relatifs à un point a quelconque, pourvu qu'il soit infiniment voisin du contour; le remplacement du point a par un autre n'altérerait le résultat que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même.

Les coefficients de e_1, e_2, e_3 dans le second membre sont des éléments d'intégrales doubles qui, d'après la nature même de la question, ne font intervenir que du^1, du^2, du^3, même si les systèmes de référence dépendent de paramètres arbitraires autres que u^1, u^2, u^3. Nous poserons

$$\Omega^i = (\omega^i)' - [\omega^k \omega^i_k] = A^i_{jk}[\omega^j \omega^k],$$

où le dernier membre est à regarder comme une somme étendue à toutes les combinaisons deux à deux (jk) des indices 1, 2, 3.

Grâce à ces notations, on a

$$\int d\mathrm{m} = \int\int \Omega^1 \mathrm{e}_1 + \Omega^2 \mathrm{e}_2 + \Omega^3 \mathrm{e}_3,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(d\mathrm{m})' = \Omega^1 \mathrm{e}_1 + \Omega^2 \mathrm{e}_2 + \Omega^3 \mathrm{e}_3,$$

en désignant comme d'habitude par $(d\mathrm{m})'$ le covariant bilinéaire de l'expression de Pfaff $d\mathrm{m}$; *cette dernière expression n'est donc pas à regarder en général comme une différentielle exacte.*

Le vecteur $\Omega^1 \mathrm{e}_1 + \Omega^2 \mathrm{e}_2 + \Omega^3 \mathrm{e}_3$ définit ce qu'on peut appeler la *torsion* de la variété à connexion affine donnée. Cette torsion est nulle, comme on le voit, si la somme géométrique d'un contour fermé infiniment petit est nulle.

32. On pourra calculer de la même manière l'intégrale $\int d\mathrm{e}_i$ étendue à un contour fermé infiniment petit et l'on trouvera

$$\int d\mathrm{e}_i = \int\int [(\omega_i^1)' - \omega_i^k \omega_k^1]\, \mathrm{e}_1 + [(\omega_i^2)' - \omega_i^k \omega_k^2]\, \mathrm{e}_2 + [(\omega_i^3)' - \omega_i^k \omega_k^3]\, \mathrm{e}_3.$$

Il en résulte des formules telles que

$$(\omega_i^j)' - [\omega_i^k \omega_k^j] = \Omega_i^j = \mathrm{A}_{ikl}^j [\omega_k \omega_l],$$

équivalentes aux formules

$$(d\mathrm{e}_i)' = \Omega_i^1 \mathrm{e}_1 + \Omega_i^2 \mathrm{e}_2 + \Omega_i^3 \mathrm{e}_3.$$

Les formes Ω_i^j définissent ce qu'on appelle la *courbure* de la variété à connexion affine donnée. Cette courbure est nulle, comme on le voit immédiatement, si les équations aux différentielles totales (4) sont complètement intégrables, autrement dit si l'équipollence de deux vecteurs a un sens absolu, indépendant du chemin choisi pour aller de l'origine du premier à l'origine du second. Dans une variété sans courbure, on peut attacher aux différents points des systèmes de référence équipollents; les composantes ω_i^j sont alors nulles et il reste simplement

$$\Omega^i = (\omega^i)';$$

on voit que, dans le cas où la torsion existe, les composantes ω^i du vecteur $d\mathrm{m}$ par rapport à des axes de directions fixes *ne sont pas des différentielles exactes*.

33. En résumé, les équations de structure (2) doivent être remplacées, dans le cas d'une variété à connexion affine quelconque, par les formules

$$(2') \quad \begin{cases} (\omega^i)' = [\omega^k \omega_k^i] + \Omega^i = [\omega^k \omega_k^i] + \mathrm{A}_{jk}^i [\omega^j \omega^k], \\ (\omega_i^j)' = [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] + \mathrm{A}_{ikl}^j [\omega^k \omega^l]. \end{cases}$$

Si l'on choisit en chaque point $\mathbf{m}$ le système de référence le plus général possible, ce qui introduit 9 paramètres autres que u^1, u^2, u^3, ces formules conservent leur validité; seulement, les A^i_{jk} et A^j_{ikl} dépendent des 12 paramètres.

Le déplacement affine associé à un contour fermé.

34. La voie que nous avons suivie pour arriver aux formules de structure (2′) et aux notions de courbure et de torsion n'est pas susceptible de généralisation aux variétés à connexion plus compliquée, par exemple aux variétés à connexion projective, ou conforme, etc. Une voie plus satisfaisante consiste à revenir au point de vue primitivement adopté du transfert du point et du vecteur le long d'un chemin donné.

Considérons donc un contour fermé infiniment petit partant d'un point $\mathbf{m}_0$ et y revenant. Le repérage de proche en proche des espaces affines tangents aux différents points du contour par rapport à l'espace affine tangent en $\mathbf{m}_0$ se fera, comme nous l'avons vu, par l'intégration des équations différentielles ordinaires (3), ce qui conduira à des formules telles que (5). Or les équations (3) peuvent être regardées comme définissant, dans l'espace affine du point $\mathbf{m}$, un certain *déplacement affine*, celui qui permet de passer du système de référence attaché à $\mathbf{m}$ au système de référence attaché au point infiniment voisin $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$; les quantités ω^j, ω_i^j sont en quelque sorte les composantes, par rapport au système de référence attaché à $\mathbf{m}$, de ce déplacement affine. *Intégrer les équations* (3), *c'est donc au fond composer, dans l'espace affine du point de départ* $\mathbf{m}_0$, *les déplacements affines successifs infiniment petits qui permettent de passer du système de référence attaché à chaque point du contour au système de référence attaché au point infiniment voisin.* Quand le contour fermé aura été complètement décrit, on arrivera à un déplacement affine final qui sera naturellement très petit si le contour fermé est très petit. C'est ce déplacement affine *associé* au contour qu'il s'agit de déterminer.

Imaginons une surface (S) contenant le contour; nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que sur cette surface la coordonnée numérique u^3 reste constante, de sorte qu'il n'interviendra que deux variables indépendantes u^1 et u^2 que nous désignerons par u et v. Nous pourrons regarder u et v comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan auxiliaire; dans ce plan, le contour fermé aura pour image une certaine ligne fermée enfermant une certaine aire $\mathcal{A}$. Nous supposerons, *ce qui restreint évidemment la généralité*, que la courbe fermée est rectifiable, que sa longueur l est infiniment petite, et enfin que l'aire du carré de côté l est finie par rapport à l'aire $\mathcal{A}$ (¹).

Cela posé, si en chaque point de la surface (S) nous choisissons un système de référence déterminé, les ω^i et ω_i^j deviendront des expressions de Pfaff déterminées linéaires en du, dv; soient

$$\omega^i = \alpha^i\,du + \beta^i\,dv, \qquad \omega_i^j = \alpha_i^j\,du + \beta_i^j\,dv,$$

avec des coefficients fonctions déterminées, que nous supposerons dérivables, de u et de v. Les équations (3) deviendront

$$\begin{aligned} dx^i + \alpha^i\,du + \beta^i\,dv + x^1(\alpha_1^i\,du + \beta_1^i\,dv) \\ + x^2(\alpha_2^i\,du + \beta_2^i\,dv) + x^3(\alpha_3^i\,du + \beta_3^i\,dv) = 0. \end{aligned}$$

Si nous nous déplaçons sur la courbe fermée (C), nous pouvons exprimer u et v en fonction de l'arc s de la courbe image $(0 \leqq s \leqq l)$.

Désignons par $(\alpha^i)_0$, $(\beta^i)_0$, $(\alpha_i^j)_0$, $(\beta_i^j)_0$ les valeurs numériques prises par les fonctions α^i, β^i, α_i^j, β_i^j au point de départ de la courbe (C) $(s = 0)$; nous poserons

$$(\omega^i)_0 = (\alpha^i)_0\,du + (\beta^i)_0\,dv, \qquad (\omega_i^j)_0 = (\alpha_i^j)_0\,du + (\beta_i^j)_0\,dv;$$

ce sont donc des expressions de Pfaff à coefficients constants.

Cela étant, ε étant un nombre positif donné aussi petit qu'on veut, on peut supposer le contour assez petit pour que, en tout point du

---

(¹) Il n'en serait pas ainsi, par exemple, si le contour fermé avait pour image un rectangle de côtés ε et ε^2. Toutes les restrictions énoncées, qui ne sont évidemment pas dans la nature des choses, ont pour but de permettre une démonstration simple du résultat auquel nous voulons arriver. Une démonstration rigoureuse serait nécessaire, bien qu'il n'y ait aucune raison de douter de la validité générale du résultat. On pourra comparer à celle du texte la démonstration de M. J. Pérès dans sa Note : *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemanienne* [*Rend. Accad. Lincei*, (5*a*) 28¹, p. 425-428].

contour, les différences

$$\alpha^i - (\alpha^i)_0, \qquad \beta^i - (\beta^i)_0, \qquad \alpha^j_i - (\alpha^j_i)_0, \qquad \beta^j_i - (\beta^j_i)_0$$

soient inférieures à ε en valeur absolue.

En second lieu les équations différentielles qui donnent x^i montrent qu'on a

$$|x^i - (x^i)_0| < As,$$

A étant un nombre positif fixe.

Définissons alors des fonctions auxiliaires $\overline{x}^i$ de u et de v prenant à l'origine du contour les valeurs $(x^i)_0$ et satisfaisant aux équations complètement intégrables

$$d\overline{x}^i + (\omega^i)_0 + (x^k)_0(\omega^i_k)_0 = 0;$$

ce sont des fonctions linéaires en u et v. Nous allons évaluer une limite supérieure de $x^i - \overline{x}^i$ en un point quelconque du contour.

On a

$$dx^i - d\overline{x}^i + \omega^i - (\omega^i)_0 + x^k[\omega^i_k - (\omega^i_k)_0] + [x^k - (x^k)_0](\omega^i_k)_0 = 0,$$

ce qui donne, en intégrant de o à s et tenant compte des inégalités précédemment établies,

$$|x^i - \overline{x}^i| < B\varepsilon s + Cs^2,$$

en désignant par B et C deux nombres positifs fixes.

Enfin, on peut écrire

$$dx^i + \omega^i + \overline{x}^k\omega^i_k + (x^k - \overline{x}^k)\omega^i_k = 0,$$

d'où, en intégrant de o à l,

$$\left|(x^i)_1 - (x^i)_0 + \int(\omega^i + \overline{x}^k\omega^i_k)\right| < H\left(\frac{1}{2}B\varepsilon l^2 + \frac{1}{3}Cl^3\right),$$

H désignant un nouveau nombre fixe. Le second membre de cette inégalité est, d'après les hypothèses faites, *infiniment petit par rapport à l'aire* $\mathcal{A}$.

En nous bornant à la partie principale de l'accroissement

$$(x^i)_1 - (x^i)_0 = \Delta(x^i)_0,$$

nous avons donc

$$\Delta(x^i)_0 + \int\int [(\omega^i)' + \bar{x}^k(\omega_k^i)' + d\bar{x}^k\omega_k^i] = 0,$$

ou, en remplaçant $d\bar{x}^k$ par sa valeur et regardant l'intégrale double comme réduite à un seul élément,

$$\Delta(x^i)_0 + (\omega^i)' - (\omega^k)_0\omega_k^i + \bar{x}^k(\omega_k^i)' - (x^k)_0(\omega_k^h)_0\omega_h^i = 0.$$

Nous pouvons enfin, sans altérer la partie principale, remplacer $\bar{x}^k$ par $(x^k)_0$, puis $(\omega^k)_0$ et $(\omega_k^h)_0$ par ω^k et ω_k^h; en supprimant en dernier lieu les indices o, nous obtenons la formule définitive

$$\Delta x^i + (\omega^i)' - [\omega^k\omega_k^i] + x^k\{(\omega_k^i)' - [\omega_k^h\omega_h^i]\} = 0, \tag{5}$$

ou enfin, en tenant compte des notations précédemment introduites,

$$\Delta x^i + \Omega^i + x^k\Omega_k^i = 0. \tag{5'}$$

35. Prenons le cas particulier d'un vecteur de composantes ξ^i qui serait transporté de manière à rester de proche en proche équipollent à lui-même; *quand l'origine du vecteur aura décrit le contour fermé, ses composantes initiales auront subi des variations infiniment petites* $\Delta\xi^i$ *données par les formules*

$$\Delta\xi^i = -\xi^k\Omega_k^i. \tag{6}$$

Par exemple le vecteur choisi au point de départ $\mathbf{m}$ pour $i^{\text{ième}}$ vecteur de référence sera devenu, *si on le transporte par équipollence le long du contour fermé*,

$$\mathbf{e}_i - \Omega_i^k\mathbf{e}_k;$$

il aura subi une *diminution géométrique* de $\Omega_i^k\mathbf{e}_k$. Ce résultat n'est pas en contradiction, malgré les apparences, avec la formule précédemment démontrée

$$\int_{(C)} d\mathbf{e}_i = \int\int \Omega_i^k\mathbf{e}_k,$$

car $\int d\mathbf{e}_i$, dans cette dernière formule, ne se rapporte pas à la variation d'un vecteur transporté par équipollence, mais à celle du vecteur qui, *en chaque point* $\mathbf{m}$ *du contour, est pris pour* $i^{\text{ième}}$ *vecteur de référence.*

36. En définitive à tout contour fermé infiniment petit partant d'un point $\mathbf{m}$ et y revenant, est associé un déplacement affine infiniment petit (du second ordre) dont les composantes, par rapport au système de référence attaché au point de départ $\mathbf{m}$, sont les éléments d'intégrales doubles Ω^i, Ω_i^j. Les premières composantes Ω^i définissent une *translation*, les autres une *rotation* (affine) autour de $\mathbf{m}$.

La translation révèle la *torsion*, la rotation révèle la *courbure* de la variété donnée.

Le théorème de conservation de la courbure et de la torsion.

37. Revenons aux formules (2')

$$(2')\qquad \begin{cases} (\omega^i)' = [\omega^k \omega_k^i] + \Omega^i, \\ (\omega_i^j)' = [\omega_i^k \omega_k^j] + \Omega_i^j, \end{cases}$$

qui définissent la structure d'une variété à connexion affine. Les formes différentielles Ω^i et Ω_i^j satisfont à des identités remarquables obtenues simplement en exprimant que les dérivées extérieures des seconds membres des équations (2') sont identiquement nulles. On peut simplifier le calcul en remarquant que les dérivées extérieures sont nulles d'elles-mêmes lorsque les Ω^i et les Ω_i^j sont nulles. Il vient alors les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} (\Omega^i)' + [\Omega^k \omega_k^i] - [\omega^k \Omega_k^i] = 0, \\ (\Omega_i^j)' + [\Omega_i^k \omega_k^j] - [\omega_i^k \Omega_k^j] = 0. \end{cases}$$

Nous allons donner une interprétation géométrique de ces formules.

Considérons pour cela dans la variété un volume quelconque limité par une surface fermée. A chaque élément de la surface fermée entourant un point $\mathbf{m}$ de cette surface est associé un déplacement affine infiniment petit symbolisé par les formules (5')

$$(5')\qquad \Delta x^i + \Omega^i + x^k \Omega_k^i = 0,$$

et dont les composantes Ω^i, Ω_i^k sont rapportées au système de référence du point $\mathbf{m}$. Nous ne pouvons pas songer à *composer* ces transformations infinitésimales, car la composition dépend de l'*ordre* dans lequel elles sont effectuées et l'on ne peut pas ordonner les éléments d'une surface comme ceux d'une ligne. Mais nous pouvons *additionner* ces transformations infinitésimales, dans le même sens qu'en Cinématique on additionne deux rotations instantanées; d'une manière plus précise nous définirons la somme des deux déplacements affines infiniment petits

$$\delta x^i + a^i + a^i_k x^k = 0,$$
$$\delta x^i + b^i + b^i_k x^k = 0,$$

comme étant le déplacement affine

$$\delta x^i + (a^i + b^i) + (a^i_k + b^i_k) x^k = 0.$$

Il y a encore une difficulté, c'est que les différents déplacements affines à ajouter se font dans des espaces affines tous différents : il faut donc les ramener tous à un même espace affine. *Cela ne sera possible que si la surface fermée est infiniment petite.*

Dans ce cas, en effet, nous prendrons, suivant un procédé déjà employé, un point fixe $\mathbf{a}$ à l'intérieur du petit volume. Comme l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$ peut être repéré par rapport à l'espace affine tangent en $\mathbf{a}$, nous pourrons déterminer, par rapport à ce dernier espace, les composantes du déplacement affine (5′). Désignons par u^k_0 les coordonnées numériques fixes de $\mathbf{a}$, u^k celles de $\mathbf{m}$; posons enfin

$$\omega^i = \gamma^i_k \, du^k, \qquad \omega^j_i = \gamma^j_{ik} \, du^k,$$

et désignons par

$$(\gamma^i_k)_0, \quad (\gamma^j_{ik})_0$$

les valeurs numériques en $\mathbf{a}$ des coefficients de ces formes. On a, en appelant $\overline{x}^i$ les coordonnées dans l'espace affine tangent en $\mathbf{a}$ du point correspondant (x^i) de l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$, les formules

$$x^i - \overline{x}^i + (\gamma^i_k)_0 (u^k - u^k_0) + \overline{x}^k (\gamma^i_{kh})_0 (u^h - u^h_0) = 0,$$

qui peuvent se résoudre par rapport aux $\overline{x}^i$,

$$\overline{x}^i = x^i + (\gamma^i_k)_0 (u^k - u^k_0) + x^k (\gamma^i_{kh})_0 (u^h - u^h_0).$$

Cela posé, les formules (5′) deviennent, en y substituant les variables $\overline{x}^i$ aux variables x^i d'après les relations précédentes,

$$\Delta\overline{x}^i + \Omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\Omega^j - (\gamma^k_h)_0 (u^h - u^h_0)\Omega^i_k$$
$$+ \overline{x}^k [\Omega^i_k + (\gamma^i_{jh})_0 (u^h - u^h_0)\Omega^j_k - (\gamma^j_{kh})_0 (u^h - u^h_0)\Omega^i_j] = 0.$$

Il résulte de là que les composantes du déplacement infiniment petit (5′), *évaluées par rapport au système de référence attaché au point* a, sont

$$\overline{\Omega}^i = \Omega^i + (\gamma^i_{jk})_0 (u^k - u^k_0)\Omega^j - (\gamma^k_h)_0 (u^h - u^h_0)\Omega^i_k,$$
$$\overline{\Omega}^i_k = \Omega^i_k + (\gamma^i_{jh})_0 (u^h - u^h_0)\Omega^j_k - (\gamma^j_{kh})_0 (u^h - u^h_0)\Omega^i_j.$$

La somme de tous les déplacements infiniment petits associés aux différents éléments de la surface fermée a donc pour composantes les intégrales de surface des $\overline{\Omega}^i$ et $\overline{\Omega}^i_k$, ce qui donne les éléments d'intégrales de volume

$$(\overline{\Omega}^i)' = (\Omega^i)' + (\gamma^i_{jk})_0 [du^k \Omega^j] - (\gamma^k_h)_0 [du^h \Omega^i_k],$$
$$(\overline{\Omega}^i_k)' = (\Omega^i_k)' + (\gamma^i_{jh})_0 [du^h \Omega^j_k] - (\gamma^j_{kh})_0 [du^h \Omega^i_j],$$

ou enfin, sans changer les parties principales,

$$(\overline{\Omega}^i)' = (\Omega^i)' + [\omega^i_j \Omega^j] - [\omega^k \Omega^i_k],$$
$$(\overline{\Omega}^i_k)' = (\Omega^i_k)' + [\omega^i_j \Omega^j_k] - [\omega^j_k \Omega^i_j].$$

On retrouve donc les premiers membres des formules (7), qui sont identiquement nuls.

On obtient ainsi le *théorème de la conservation de la courbure et de la torsion :*

La somme géométrique des déplacements infiniment petits associés aux différents éléments d'une surface fermée est nulle, lorsque la surface fermée est infiniment petite.

Invariants intégraux attachés à une variété.

38. Nous avons supposé dans ce qui précède que la variété a trois dimensions; mais il est évident que les résultats obtenus sont valables pour un nombre quelconque de dimensions.

Nous avons considéré certaines intégrales simples ou multiples dont l'élément était un vecteur ($d\mathbf{m}$ ou $d\mathbf{e}_i$). Supposons plus généralement qu'à chaque élément de surface de la variété on puisse attacher d'une manière intrinsèque un vecteur

$$\mathbf{e}_i \Pi^i;$$

on définira l'intégrale de ce vecteur étendue à une surface fermée infiniment petite en rapportant chaque élément de l'intégrale à l'espace affine tangent en un point $\mathbf{a}$ intérieur à la surface, ce qui permettra de faire la somme des différentes composantes [1]. On montre de la même manière que plus haut que l'intégrale cherchée est égale à une intégrale de volume dont l'élément est

$$[d\mathbf{e}_i \Pi^i] + \mathbf{e}_i (\Pi^i)',$$

où l'on remplace $d\mathbf{e}_i$ par $\omega_i^k \mathbf{e}_k$. Il en serait de même si les Π^i étaient des éléments d'intégrales triples ou quadruples, etc., et qu'on étendît l'intégration à une variété *fermée* à 3, 4, etc., dimensions.

On peut aussi considérer des formes géométriques du second, du troisième degré, etc. Une forme du second degré serait

$$[\mathbf{m}\mathbf{e}_i]\Pi^i + [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]\Pi^{ij};$$

elle représenterait un système de vecteurs (glissants). La dérivée extérieure de cette forme, qui permet de ramener à une intégrale à $p+1$ dimensions l'intégrale de la forme étendue à une variété fermée à p dimensions serait

$$\begin{aligned}[\mathbf{m}\mathbf{e}_i] \{ (\Pi^i)' + [\omega_k^i \Pi^k] \} \\ + [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] \{ (\Pi^{ij})' + [\omega^i \Pi^j] - [\omega^j \Pi^i] + [\omega_k^i \Pi^{kj}] + [\omega_k^j \Pi^{ik}] \}.\end{aligned}$$

39. Prenons comme exemple la forme

$$[\mathbf{m}\, d\mathbf{m}] = \omega^i [\mathbf{m}\mathbf{e}_i],$$

qui représente le vecteur glissant d'origine $\mathbf{m}$ et d'extrémité $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$.

---

[1] C'est de cette manière que nous avons implicitement, au Chapitre I, généralisé les équations de la Dynamique des milieux continus, pour une connexion affine quelconque de l'espace-temps.

L'intégrale de ce vecteur étendue à un contour fermé infiniment petit est

$$\int [\mathrm{m}\, d\mathrm{m}] = \int\int [\mathrm{m}\, d\mathrm{m}]' = \int\int [\mathrm{m}\mathrm{e}_i]\Omega^i + 2[\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j][\omega^i\omega^j].$$

Dans le cas $n = 3$ on trouve donc un vecteur de composantes Ω^i et un *couple* dont le moment est le double de l'aire limitée par le contour; on a la généralisation d'un théorème classique.

On a de même

$$\int\int [\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j][\omega^i\omega^j] = \int\int\int [\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j]\{[\Omega^i\omega^j] - [\omega^i\Omega^j]\};$$

cette formule, dans le cas de l'espace affine proprement dit, est la condensation des formules

$$\int\int dx^i\, dx^j = 0,$$

les intégrales étant étendues à une surface fermée; les variétés à connexion affine pour lesquelles ces formules se transportent sans modification sont celles pour lesquelles on a

$$[\omega^i\Omega^j] - [\omega^j\Omega^i] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

On démontre facilement que si $n \geqq 4$, ces relations entraînent $\Omega^i = 0$.

Signalons encore les formules

$$\int\int \mathrm{e}_i\Omega^i = \int\int\int \mathrm{e}_i[\omega^k\Omega^i_k],$$

$$\int\int [\mathrm{m}\mathrm{e}_i]\Omega^i = \int\int\int [\mathrm{m}\mathrm{e}^i][\omega^k\Omega^i_k] + [\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j]\{[\omega^i\Omega^j] - [\omega^j\Omega^i]\},$$

$$\int\int\int \mathrm{e}_i[\omega^k\Omega^i_k] = \int\int\int\int \mathrm{e}_i[\Omega^k\Omega^i_k],$$

$$\int\int\int [\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j]\{[\Omega^i\omega^j] - [\omega^i\Omega^j]\} = \int\int\int\int [\mathrm{e}_i\mathrm{e}_j]\{[\omega^j\omega^k\Omega^i_k] - [\omega^i\omega^k\Omega^j_k]\}.$$

Ces formules présentent l'intérêt de conduire naturellement à la formation d'*invariants intégraux* de degrés de plus en plus élevés attachés à la variété.

Isomorphisme de deux variétés [1].

40. Nous dirons que deux variétés à connexion affine et à n dimensions sont *isomorphes* si l'on peut établir entre ces deux variétés une correspondance ponctuelle jouissant de la propriété suivante : à tout choix des systèmes de référence attachés aux points de la première variété on peut faire correspondre un choix du système de référence attaché aux points correspondants de la seconde variété de telle sorte que les composantes ω^i et ω_i^j relatives à la première variété deviennent, par la correspondance ponctuelle considérée, égales aux composantes ω^i et ω_i^j relatives à la seconde variété. On dit aussi que les deux variétés sont *applicables* l'une sur l'autre.

Considérons deux variétés isomorphes et attribuons à un point arbitraire $\mathbf{m}$ de chacune des variétés un système de référence aussi général que possible; sur chaque variété ce système de référence dépendra de $n(n+1)$ paramètres, dont les n coordonnées de l'origine $\mathbf{m}$. Il existera entre les $n(n+1)$ paramètres de la première variété, et les $n(n+1)$ paramètres de la seconde, une correspondance telle qu'on ait les identités

$$\bar{\omega}^i = \omega^i, \qquad \bar{\omega}_i^j = \omega_i^j, \tag{8}$$

en désignant par $\bar{\omega}^i$ et $\bar{\omega}_i^j$ les composantes relatives à la seconde variété. La réciproque est vraie, car les n premières des équations précédentes entraînent une correspondance nécessaire entre les coordonnées ponctuelles d'un point de la seconde variété et les coordonnées ponctuelles d'un point de la première.

Les relations (8) entraînent, par dérivation extérieure,

$$\bar{\Omega}^i = \Omega^i, \qquad \bar{\Omega}_i^j = \Omega_i^j,$$

et par suite

$$\bar{A}_{jk}^i = A_{jk}^i, \qquad \bar{A}_{ikl}^j = A_{ikl}^j,$$
$$d\bar{A}_{jk}^i = dA_{jk}^i, \qquad d\bar{A}_{ikl}^j = dA_{ikl}^j,$$

---

[1] Les numéros 40 à 43 peuvent être passés sans inconvénient pour l'intelligence des Chapitres suivants.

donc encore l'égalité dans les deux membres des dernières formules, supposées développées en fonctions linéaires des ω^i et ω_i^j, des coefficients respectifs, et ainsi de suite.

41. On peut obtenir le développement des différentielles dA^i_{jk} et dA^i_{jkl} par le procédé géométrique suivant :

Considérons sur la première variété un point $\mathbf{m}$ et un élément à deux dimensions passant par ce point; il correspond à cet élément un déplacement infiniment petit de composantes Ω^i et Ω_i^j. En particulier la translation associée à l'élément peut être représentée par le vecteur $\mathbf{e}_i\Omega^i$. Considérons maintenant un point $\mathbf{m}'$ infiniment voisin de $\mathbf{m}$ et l'élément à deux dimensions passant par $\mathbf{m}'$ qui est *équipollent* à l'élément passant par $\mathbf{m}$; à cet élément correspond un certain vecteur attaché à $\mathbf{m}'$; la différence géométrique entre ce second vecteur et le premier, différence géométrique qui a un sens puisqu'on sait raccorder l'espace affine tangent en $\mathbf{m}'$ à l'espace affine tangent en $\mathbf{m}$, est un vecteur attaché à $\mathbf{m}$ qui a une signification géométrique indépendante des systèmes de référence choisis.

Pour avoir son expression analytique, imaginons que l'élément à deux dimensions passant par $\mathbf{m}$ soit le parallélogramme construit sur deux vecteurs infiniment petits (ξ^i) et (η^i) issus de $\mathbf{m}$; désignons par

$$\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)$$

le premier vecteur représentant la translation associée à ce parallélogramme. Désignons maintenant par d le symbole de différentiation correspondant au passage de $\mathbf{m}$ à $\mathbf{m}'$. Le vecteur qui représentera la translation associée à l'élément équipollent issu de $\mathbf{m}'$ pourra être désigné par

$$\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta) + d[\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)],$$

en convenant d'appliquer les formules suivantes, qui traduisent analytiquement les conventions géométriques faites ci-dessus :

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_i &= \quad \omega_i^k \mathbf{e}_k, \\ d\xi^i &= -\xi^k \omega_k^i, \\ d\eta^i &= -\eta^k \omega_k^i. \end{aligned}$$

Le vecteur final attaché au point m, *ou plutôt aux trois vecteurs* (ξ^i), (η^i), $d\mathrm{m}$ issus de m, sera donc

$$d[\mathrm{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)],$$

et ses composantes seront évidemment des formes trilinéaires des composantes des trois vecteurs, c'est-à-dire des ξ^i, des η^i et des ω^i, soit

$$d[\mathrm{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)] = \mathrm{A}^i_{jk|h}(\xi^j\eta^k - \xi^k\eta^j)\,\omega^h.$$

En effectuant le calcul et égalant les termes en $\mathrm{e}_i(\xi^j\eta^k - \xi^k\eta^j)$, on trouve

$$d\mathrm{A}^i_{jk} + \mathrm{A}^\rho_{jk}\,\omega^i_\rho - \mathrm{A}^i_{\rho k}\,\omega^\rho_j - \mathrm{A}^i_{j\rho}\,\omega^\rho_k = \mathrm{A}^i_{jk|\rho}\,\omega^\rho, \tag{9}$$

formule qui montre de quelle forme est la différentielle $d\mathrm{A}^i_{jk}$.

Ce que nous venons de faire pour les composantes de la translation peut se faire pour les composantes de la rotation. Considérons en un point m un parallélogramme élémentaire construit sur deux vecteurs (ξ^i) et (η^i) et un vecteur arbitraire (u^i). Le vecteur

$$\mathrm{e}_i u^j\,\Omega^i_j(\xi, \eta)$$

représente, au signe près, l'accroissement géométrique subi par le vecteur (u^i) quand il est transporté par équipollence le long du contour du parallélogramme. Soit m' un point infiniment voisin de m; considérons en ce point le parallélogramme *équipollent* au premier et le vecteur $(\overline{u}^i)$ équipollent au vecteur (u^i); l'accroissement subi par ce dernier vecteur quand on le transporte par équipollence le long du contour du second parallélogramme est un second vecteur

$$\overline{\mathrm{e}}_i\overline{u}^j\,\overline{\Omega}^i_j(\overline{\xi}, \overline{\eta});$$

la différence géométrique entre ce vecteur et le premier, différence qu'on peut désigner par

$$p\,(\mathrm{e}_i u^j\,\Omega^i_j(\xi, \eta)),$$

est un vecteur attaché au point m, dépendant des (u^i) et des trois vecteurs (ξ^i), (η^i), $d\mathrm{m}$ d'une manière intrinsèque. Ce vecteur est de la forme

$$\mathrm{e}_i\,u^j\,\mathrm{A}^i_{jkl|h}(\xi^k\eta^l - \xi^l\eta^k)\,\omega^h.$$

En faisant le calcul, on trouve

$$(10)\qquad dA^i_{jkl} + A^\rho_{jkl}\omega^i_\rho - A^i_{\rho kl}\omega^\rho_j - A^i_{j\rho l}\omega^\rho_k - A^i_{jk\rho}\omega^\rho_l = A^i_{jkl|\rho}\omega^\rho.$$

42. Il résulte de ce qui précède que la différentiation des composantes A^i_{jk} et A^i_{jkl} introduit comme seuls nouveaux coefficients les coefficients $A^i_{jk|\rho}$, $A^i_{jkl|\rho}$ des formes

$$d(\mathbf{e}_i\Omega^i(\xi, \eta)), \quad d(\mathbf{e}_i u^j \Omega^i_j(\xi, \eta)).$$

Si maintenant dans ces formes développées on remplace les ω^i par les composantes ζ^i d'un vecteur arbitraire, on obtiendra des formes

$$\mathbf{e}_i\Pi^i(\xi, \eta, \zeta), \quad \mathbf{e}_i u^j \Pi^i_j(\xi, \eta, \zeta),$$

qui définiront en somme un déplacement associé à un parallélépipède élémentaire issu de $\mathbf{m}$ (¹); *seulement les arêtes de ce parallélépipède ne joueront pas toutes le même rôle*. Quoi qu'il en soit on pourra, par le même procédé que plus haut, en déduire de nouvelles formes

$$d(\mathbf{e}_i\Pi^i(\xi, \eta, \zeta)), \quad d(\mathbf{e}_i u^j \Pi^i_j(\xi, \eta, \zeta)),$$

qui, développées, seront de la forme

$$\mathbf{e}_i A^i_{jk|hl}\xi^j\eta^k\zeta^h\omega^l, \quad \mathbf{e}_i u^j A^i_{jkl|hm}\xi^k\eta^l\zeta^h\omega^m.$$

Les nouveaux coefficients qui s'introduisent ainsi permettent d'écrire les expressions complètes des différentielles des $A^i_{jk|h}$ et $A^i_{jkl|h}$:

$$(11)\quad \begin{cases} dA^i_{jk|h} + A^\rho_{jk|h}\omega^i_\rho - A^i_{\rho k|h}\omega^\rho_j - A^i_{j\rho|h}\omega^\rho_k - A^i_{jk|\rho}\omega^\rho_h = A^i_{jk|h\rho}\omega^\rho, \\ dA^i_{jkl|h} + A^\rho_{jkl|h}\omega^i_\rho - A^i_{\rho kl|h}\omega^\rho_j - A^i_{j\rho l|h}\omega^\rho_k - A^i_{jk\rho|h}\omega^\rho_l - A^i_{jkl|\rho}\omega^\rho_h = A^i_{jkl|h\rho}\omega^\rho. \end{cases}$$

On peut évidemment poursuivre ces opérations indéfiniment; les coefficients nouveaux qui s'introduisent à chaque différentiation sont les coefficients de formes auxquelles on peut donner une signification géométrique et qui représentent des déplacements associés à des vecteurs arbitraires en nombre de plus en plus élevé.

43. Si deux variétés sont isomorphes, la correspondance qui réalise

(¹) Ou plutôt à un parallélogramme et à un vecteur.

l'isomorphisme de ces deux variétés rend égaux entre eux tous les coefficients A^i_{jk}, A^i_{jkl} et leurs dérivés de tous les ordres. Je n'ai pas l'intention de poursuivre plus avant l'étude de ce problème qui se traiterait suivant la méthode que j'ai employée dans un précédent Mémoire (¹). Je vais me contenter d'indiquer les relations qui existent nécessairement entre les quantités qui viennent d'être considérées, en omettant la démonstration du fait que les relations que je vais indiquer sont les seules qui existent dans le cas général.

Tout d'abord les formules qui traduisent le théorème de conservation de la courbure et de la torsion

$$(7)\qquad \begin{cases} (\Omega^i)' + [\Omega^k \omega^i_k] - [\omega^k \Omega^i_k] = 0, \\ (\Omega^j_i)' + [\Omega^k_i \omega^j_k] - [\omega^k_i \Omega^j_k] = 0 \end{cases}$$

nous donnent, en développant et en négligeant tous les termes qui contiennent les ω^j_i,

$$[dA^i_{jk}\omega^j\omega^k] + A^i_{jk}[\Omega^j\omega^k - \omega^j\Omega^k] - A^i_{k\rho\sigma}[\omega^k\omega^\rho\omega^\sigma] = 0,$$
$$[dA^j_{ikl}\omega^k\omega^l] + A^j_{ikl}[\Omega^k\omega^l - \omega^k\Omega^l] = 0,$$

d'où, en prenant l'ensemble des termes en $[\omega^\alpha\omega^\beta\omega^\gamma]$,

$$(12)\qquad \begin{cases} A^i_{\alpha\beta|\gamma} + A^i_{\beta\gamma|\alpha} + A^i_{\gamma\alpha|\beta} + A^i_{\rho\gamma}A^\rho_{\alpha\beta} \\ \qquad + A^i_{\rho\alpha}A^\rho_{\beta\gamma} + A^i_{\rho\beta}A^\rho_{\gamma\alpha} - A^i_{\alpha\beta\gamma} - A^i_{\beta\gamma\alpha} - A^i_{\gamma\alpha\beta} = 0, \\ A^j_{i\alpha\beta|\gamma} + A^j_{i\beta\gamma|\alpha} + A^j_{i\gamma\alpha|\beta} + A^j_{i\rho\gamma}A^\rho_{\alpha\beta} + A^j_{i\rho\alpha}A^\rho_{\beta\gamma} + A^j_{i\rho\beta}A^\rho_{\gamma\alpha} = 0. \end{cases}$$

En ce qui concerne les $A^i_{jk|lh}$ et les $A^i_{jkl|hm}$, on aura entre ces quantités et les précédentes des relations de deux espèces différentes. Les premières proviendront de la différentiation des relations (12), en ne conservant que les termes en ω^δ; elles seront de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} A^i_{\alpha\beta|\gamma\delta} + A^i_{\beta\gamma|\alpha\delta} + A^i_{\gamma\alpha|\beta\delta} = \ldots, \\ A^j_{i\alpha\beta|\gamma\delta} + A^j_{i\beta\gamma|\alpha\delta} + A^j_{i\gamma\alpha|\beta\delta} = \ldots, \end{cases}$$

les termes non écrits ne dépendant que des quantités précédemment considérées. Les relations de la seconde espèce proviendront de l'égalisation des covariants bilinéaires des premiers membres des rela-

(¹) *Sur les équations de la gravitation d'Einstein* (*Journal de Math.*, 1922, p. 141-203).

tions (9) et (10); en ne conservant dans les égalités obtenues que les termes en $[\omega^\alpha \omega^\beta]$, on trouve

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & A^i_{jk|\beta\alpha} - A^i_{jk|\alpha\beta} = A^\rho_{jk} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho k} A^\rho_{j\alpha\beta} - A^i_{j\rho} A^\rho_{k\alpha\beta} - A^i_{jk|\rho} A^\rho_{\alpha\beta}, \\ & A^i_{jkl|\beta\alpha} - A^i_{jkl|\alpha\beta} = A^\rho_{jkl} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho kl} A^\rho_{j\alpha\beta} - A^i_{j\rho l} A^\rho_{k\alpha\beta} - A^i_{jk\rho} A^\rho_{l\alpha\beta} - A^i_{jkl|\rho} A^\rho_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right.$$

Les relations existant entre les $A^i_{jk|lhm}$ et les $A^i_{jklh|mn}$ se déduiront de même :

1° Des relations (13) et (14) différentiées en conservant seulement les termes en ω^ε;

2° Des relations (11) dérivées extérieurement, en conservant seulement les termes en $[\omega^\alpha \omega^\beta]$.

On procédera ainsi de proche en proche.

On voit facilement que le nombre des composantes de la courbure et de la torsion est $\dfrac{n^2(n^2-1)}{2}$ et celui de leurs dérivées du premier ordre est $\dfrac{n^2(n^2-1)(n+1)}{3}$.

Cas des variétés sans torsion. — Si la variété est sans torsion, les relations précédentes se simplifient; elles se réduisent aux suivantes :

$$A^j_{i\alpha\beta|\gamma} + A^j_{i\beta\gamma|\alpha} + A^j_{i\gamma\alpha|\beta} = 0,$$
$$A^j_{i\alpha\beta|\gamma\delta} + A^j_{i\beta\gamma|\alpha\delta} + A^j_{i\gamma\alpha|\beta\delta} = 0,$$
$$A^i_{jkl|\beta\alpha} - A^i_{jkl|\alpha\beta} = A^\rho_{jkl} A^i_{\rho\alpha\beta} - A^i_{\rho kl} A^\rho_{j\alpha\beta} - A^i_{j\rho l} A^\rho_{k\alpha\beta} - A^i_{jk\rho} A^\rho_{l\alpha\beta}.$$

Généralisation [1].

44. Les équations (3) et (5′) définissent des transformations infinitésimales du groupe des déplacements affines. Il est facile de généraliser les considérations développées dans les numéros précédents, ce qui permettra d'en mieux saisir la portée générale.

Considérons un groupe fini et continu quelconque G à n variables

[1] La fin de ce Chapitre suppose du lecteur certaines connaissances sur la théorie des groupes; elle peut être passée sans inconvénient pour la compréhension des Chapitres suivants.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce groupe étant, par exemple, défini par r transformations infinitésimales indépendantes

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f.$$

Nous pouvons regarder les x_i comme les coordonnées d'un point dans un certain espace (E). Si dans cet espace nous ne portons notre attention que sur les propriétés des figures qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe G, nous pouvons dire que l'espace (E) admet le groupe G comme groupe fondamental. A cet égard on peut substituer aux coordonnées primitives $x_1, \ldots, x_n$ celles qu'on en déduit par une transformation T du groupe; avec ce nouveau système de coordonnées les propriétés des figures se traduisent analytiquement de la même manière qu'avec l'ancien; les deux systèmes de coordonnées sont équivalents. Le passage d'un système de coordonnées à un autre équivalent se traduit donc par une transformation du groupe fondamental.

Cela posé, imaginons un ensemble continu d'observateurs, réduits à des points, et dont chacun adopte un système de coordonnées pour l'étude de l'espace (E), ces systèmes étant naturellement tous équivalents entre eux. La variété formée par ces observateurs-points est, je suppose, à p dimensions, chaque point étant défini d'une manière quelconque par p coordonnées $u_1, \ldots, u_p$. Si l'on passe d'un point $\mathbf{m}$ de la variété à un point infiniment voisin $\mathbf{m}'$, on passera dans l'espace (E) d'un certain système de coordonnées à un autre que nous supposerons infiniment voisin; autrement dit, on passe des coordonnées x_i utilisées par l'observateur $\mathbf{m}$ aux coordonnées x'_i utilisées par l'observateur $\mathbf{m}'$ en effectuant une certaine transformation infinitésimale du groupe G, soit

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f,$$

en désignant par $\omega_1, \ldots, \omega_r$ des expressions linéaires en $du_1, \ldots, du_p$, avec des coefficients fonctions de $u_1, \ldots, u_p$. Autrement dit, si (x_i) et $(x_i + dx_i)$ sont les coordonnées d'un *même* point de (E) adoptées respectivement par l'observateur $\mathbf{m}$ et l'observateur $\mathbf{m}'$, on aura

$$(15) \qquad dx_i = \omega_1 X_1(x_i) + \omega_2 X_2(x_i) + \ldots + \omega_r X_r(x_i);$$

ou encore, si f est une fonction *déterminée* des coordonnées, on aura

$$df = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \ldots + \omega_r X_r f. \tag{15'}$$

Supposons, par exemple, que G soit le groupe à une variable et un paramètre

$$x' = x + a;$$

on aura

$$dx = \omega,$$

ω étant une expression de Pfaff en $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

45. Cela posé, imaginons que dans la variété (V) des observateurs, on aille d'un point quelconque $\mathbf{m}_0$ à un point quelconque $\mathbf{m}_1$ par un chemin déterminé. En passant d'un point $\mathbf{m}$ quelconque de ce dernier au point infiniment voisin $\mathbf{m}'$, on aura à effectuer dans l'espace (E) une transformation infinitésimale dont les composantes, *avec les coordonnées adoptées par l'observateur* $\mathbf{m}$, sont $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. La composition de toutes ces transformations infinitésimales successives permettra de passer des coordonnées adoptées par l'observateur $\mathbf{m}_0$ aux coordonnées adoptées par l'observateur $\mathbf{m}_1$; ce sera une certaine transformation finie du groupe G. Elle sera évidemment fournie par l'intégration des équations différentielles (15), où les ω_i sont maintenant de la forme $p_i(t)\,dt$, en appelant t un paramètre en fonction duquel soient exprimées les coordonnées $u_1, \ldots, u_p$ d'un point variable du chemin.

Si maintenant on décrit un contour *fermé* sur la variété (V), on ne retrouvera pas nécessairement le même système de coordonnées en revenant au point $\mathbf{m}_0$ qu'en en partant. Pour qu'on retrouvât le même, il faudrait (et il suffirait) que les équations (15) fussent complètement intégrables. Prenons ces équations sous la forme condensée (15'). La condition d'intégrabilité complète donne, en désignant par ω'_i le covariant bilinéaire de ω_i,

$$X_i f\,\omega'_i + [d(X_i f)\,\omega_i] \equiv X_i f\,\omega'_i + [X_h(X_k f) - X_k(X_h f)][\omega_h \omega_k] = 0.$$

Or, d'après un théorème classique de S. Lie, on a

$$(X_h X_k) \equiv X_h(X_k f) - X_k(X_h f) = c_{hks} X_s f,$$

les coefficients c_{hks} étant des constantes. On doit donc avoir

$$X_s f \{ \omega'_s + c_{hks}[\omega_h \omega_k] \} = 0,$$

et par suite

$$(16) \qquad \omega'_s + c_{hks}[\omega_h \omega_k] = 0.$$

46. La circonstance particulière qui vient d'être étudiée se présentera en particulier si nous prenons pour variété (V) *la variété des paramètres* du groupe. Si

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r)$$

sont les équations finies de la transformation T_a la plus générale du groupe G, on pourra regarder $a_1, \ldots, a_r$ comme les coordonnées d'un point $\mathbf{m}$ d'une variété (V) à r dimensions. Si $a_1^0, \ldots, a_r^0$ sont les paramètres de la transformation identique et si $\mathbf{m}_0$ est le point correspondant de (V), nous admettrons que le système de coordonnées adopté par l'observateur $\mathbf{m}$ se déduit par la transformation T_a du système de coordonnées adopté par l'observateur $\mathbf{m}_0$. On passera alors du système de coordonnées de $\mathbf{m}$ à celui du point infiniment voisin $\mathbf{m}'$ par la transformation infinitésimale $T_a^{-1} T_{a+da}$. Il est bien évident alors que, *quel que soit le chemin suivi* pour aller d'un point $\mathbf{m}$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_r)$ à un point $\mathbf{m}'$ de coordonnées $(b_1, \ldots, b_r)$, le changement résultant de coordonnées de l'espace (E) sera $T_a^{-1} T_b$.

Réciproquement, si les relations (16) sont vérifiées pour une variété quelconque (V) d'observateurs, et si nous choisissons arbitrairement dans cette variété un point $\mathbf{m}_0$, chaque point $\mathbf{m}$ correspondra à une transformation déterminée T_a du groupe G, celle qui permet de passer des coordonnées choisies par $\mathbf{m}_0$ aux coordonnées choisies par $\mathbf{m}$; par suite les u_i sont des fonctions déterminées des a_i. Il se pourra naturellement qu'à une même transformation T_a correspondent une infinité de points $\mathbf{m}$; il se pourra aussi, en particulier si $p < r$, qu'il n'y ait qu'une partie des transformations du groupe qui puissent correspondre aux différents points de la variété.

47. Revenons au cas général. Nous avons interprété jusqu'ici une transformation du groupe G comme définissant un changement de

coordonnées dans l'espace (E), les variables primitives x_i et les variables transformées x'_i se rapportant *à un même point* de l'espace (E). On peut adopter un point de vue différent et en un certain sens plus intuitif et regarder les x_i et les x'_i comme les coordonnées de *deux points différents* dans un *même système de coordonnées*. Nous désignerons par la lettre S la transformation, interprétée de cette manière : cette transformation n'a évidemment un sens que si l'on a fait une fois pour toutes un choix préalable d'un système de coordonnées. Nous dirons que c'est un *déplacement* de l'espace (E).

En nous plaçant à ce point de vue, la transformation infinitésimale $\omega_1 X_1 f + \ldots + \omega_r X_r f$ que nous avons associée à un couple de deux points infiniment voisins **m** et **m'** de la variété (V) peut être regardée comme un *déplacement infiniment petit* de l'espace (E). Les expressions de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_r$ définissent donc en somme un mouvement continu (idéal) à p paramètres de l'espace (E). En employant une expression empruntée à la théorie des liaisons en Mécanique, nous pourrons dire qu'en général *ce mouvement n'est pas holonome;* il est holonome si les conditions (16) sont vérifiées. Par exemple dans le cas du groupe

$$x' = x + a,$$

on a affaire à une translation continue d'une droite; cette translation est holonome si la composante ω de la translation infiniment petite est une différentielle exacte; elle ne l'est pas dans le cas contraire.

48. Revenons à un contour fermé *infiniment petit* de la variété (V). L'intégration approchée des équations (15) peut se faire par un procédé analogue à celui qui nous a servi dans l'étude des variétés à connexion affine. En appelant Δx_i la variation infiniment petite subie par x_i, on démontre que cette variation peut être obtenue en prenant le covariant bilinéaire du second membre, en y remplaçant les différentielles dx_k par leurs expressions fournies par les équations (15) elles-mêmes. On obtient ainsi, sous une forme condensée,

$$\Delta f = \Omega_1 X_1 f + \Omega_2 X_2 f + \ldots + \Omega_r X_r f, \tag{17}$$

en posant

$$\Omega_s = \omega'_s + c_{hks}[\omega_h \omega_k]. \tag{18}$$

A chaque contour fermé est donc associé un déplacement infiniment petit de l'espace (E), *déplacement dont les composantes* $\Omega_1, \ldots, \Omega_r$ *sont des éléments d'intégrales doubles.* Ce déplacement mesure en quelque sorte la *non-holonomie* du mouvement de l'espace (E).

Les formules (18), dérivées extérieurement, donnent, en tenant compte des relations qui existent entre les constantes c_{hks} (1),

$$\Omega'_s = c_{khs} \{ [\Omega_h \omega_k] - [\omega_h \Omega_k] \}. \tag{19}$$

L'interprétation de ces formules est analogue à celle que nous avons obtenue dans la théorie des variétés à connexion affine.

49. Reprenons pour cela notre premier point de vue. Imaginons dans la variété (V) un volume limité par une surface fermée infiniment petite. A chaque élément de cette surface entourant un certain point $\mathbf{m}$ est associée la transformation infinitésimale Θ, de symbole

$$\Omega_1 X_1 f + \ldots + \Omega_r X_r f,$$

que nous pouvons interpréter comme définissant un *déplacement* S de l'espace (E), déplacement défini analytiquement en nous servant des coordonnées adoptées par l'observateur $\mathbf{m}$. Soit alors $\mathbf{a}$ un point fixe intérieur au volume considéré. Le *même* déplacement de l'espace (E) pourra être exprimé analytiquement au moyen des coordonnées adoptées par l'observateur $\mathbf{a}$, puisqu'on sait passer des unes aux autres lorsque les deux observateurs sont infiniment voisins. Soient respectivement

$$x_1, \ldots, x_n, \quad \text{et} \quad \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n,$$

les coordonnées adoptées par les observateurs $\mathbf{m}$ et $\mathbf{a}$. Le passage des dernières aux premières se fait par une transformation infinitésimale T.

Désignons enfin par des lettres accentuées les coordonnées du point transformé par le déplacement S. On voit immédiatement que le passage des $\overline{x}$ aux $\overline{x'}$ sera obtenu en effectuant successivement les

(1) Ces relations proviennent de ce que, pour la variété (V) des paramètres, les formules (13) sont vraies, et par suite celles qu'on en déduit par dérivation extérieure. Cela revient à dire que, dans la dérivation extérieure des formules (15), on peut supprimer tous les termes qui ne contiennent ni les Ω_i ni les Ω'_i.

transformations T, Θ et T^{-1}. Autrement dit, le déplacement S sera défini, si l'on adopte les coordonnées de l'observateur fixe **a**, par la transformatien $T\Theta T^{-1}$.

On démontre alors facilement que si Uf est le symbole de la transformation infinitésimale T, Vf celui de Θ, le symbole de $T\Theta T^{-1}$ est

$$Vf + (UV) = Vf + U(Vf) - V(Uf).$$

Si l'on appelle u_h et $\overline{u}_h$ les coordonnées respectives des points **m** et **a** de la variété (V), et si l'on pose

$$\omega_i = \gamma_{ih}\, du_h,$$

on a

$$Uf = \gamma_{ih}(u_h - \overline{u}_h)X_i f,$$
$$Vf = \Omega_i X_i f,$$

et, par suite,

$$Vf + (UV) = \{\Omega_s + c_{iks}[\gamma_{ih}(u_h - \overline{u}_h)\Omega_k - \gamma_{kh}(u_h - \overline{u}_h)\Omega_i]\}\, X_s f.$$

Telle est l'expression analytique du déplacement S quand on le rapporte au système de référence du point **a**.

Si l'on fait la *somme* des composantes de ce déplacement, étendue à tous les éléments de la surface fermée considérée dans la variété (V), on trouve, pour la $s^{\text{ième}}$ somme,

$$\Omega'_s + c_{iks}([\omega_i \Omega_k] - [\omega_k \Omega_i]),$$

quantité nulle d'après la formule (19).

Autrement dit, *la somme des déplacements infinitésimaux associés aux différents éléments de surface qui limitent un volume fermé infiniment petit de la variété* (V) *est nulle.*

50. Dans le cas particulier où le groupe G est le groupe

$$x' = x + a,$$

le théorème général de conservation précédent conduit à un résultat classique. Si ω est une expression de Pfaff quelconque de la variété (V), et si l'on désigne par ω' l'élément d'intégrale double que donne l'application de la formule de Stokes, l'intégrale $\int\int \omega'$ étendue à une surface fermée est nulle. Ici il n'y a pas besoin de rapporter la translation infinitésimale de grandeur ω' au système de référence de l'observateur $\mathbf{a}$, parce que la grandeur d'une translation d'une droite est indépendante de l'origine choisie pour les abscisses, les transformations du groupe G étant *commutatives*. Dans ce cas particulier, on voit encore que la translation associée à un contour fermé quelconque, même fini, est toujours donnée par l'intégrale $\int\int \omega'$ étendue à une aire limitée par ce contour.

Revenons maintenant à la notion de variété à connexion affine. L'espace (E) est ici l'espace affine proprement dit, le groupe fondamental est le groupe des transformations affines engendré par les transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad x^i \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Il n'y a cependant pas identité complète entre la notion de variété à connexion affine et la notion de variété (V) d'observateurs introduite dans les considérations précédentes, car à tout point $\mathbf{m}$ de la variété à connexion affine peuvent correspondre une infinité d'observateurs adoptant des systèmes de référence différents, *mais de même origine* $\mathbf{m}$.

CHAPITRE III.

LES VARIÉTÉS A CONNEXION MÉTRIQUE.

51. Imaginons un espace euclidien en chaque point $\mathbf{m}$ duquel on adopte un système de coordonnées rectangulaires, avec une unité de longueur choisie en chaque point et pouvant varier d'un point à un autre. Si l'on appelle $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les vecteurs égaux à l'unité de longueur portés sur les axes, on a, en passant d'un point $\mathbf{m}$ au point infiniment voisin $\mathbf{m} + d\mathbf{m}$, les formules générales (1) (Chap. II)

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_3 &= \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2 + \omega_3^3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \right.$$

Si l'on définit le produit scalaire de deux vecteurs en partant d'une certaine unité de longueur *absolue*, on a les relations

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0, \qquad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0, \qquad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0.$$

En différentiant ces relations, on obtient les formules

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3, \qquad \omega_2^3 + \omega_3^2 = 0, \qquad \omega_3^1 + \omega_1^3 = 0, \qquad \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0.$$

Nous écrirons simplement ω à la place de ω_i^i. Les formules (1) deviennent donc

$$(1') \qquad \begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^k \mathbf{e}_k, \\ d\mathbf{e}_i = \omega\, \mathbf{e}_i + \omega_i^k \mathbf{e}_k \qquad (\omega_i^j + \omega_j^i) = 0, \end{cases}$$

où dans la seconde relation la sommation est effectuée pour les valeurs de l'indice k différentes de i.

52. Ces formules nous permettent de définir les *variétés à connexion métrique*. Ce sont les variétés à connexion affine pour chaque point $\mathbf{m}$ desquelles l'espace affine tangent est un espace euclidien. Le repérage mutuel de deux espaces euclidiens tangents en deux points infiniment voisins se fait au moyen des expressions de Pfaff

$$\omega^i, \qquad \omega, \qquad \omega_i^j = -\omega_j^i;$$

les ω^i sont les composantes de la *translation*, ω est la composante de l'*homothétie* [1] et les ω_i^j sont les composantes de la *rotation* qui amènent le système de référence attaché au point $\mathbf{m}$ en coïncidence avec le système de référence attaché au point $\mathbf{m}'$.

On pourrait aussi imaginer qu'il existe une unité de longueur absolue valable pour tous les espaces euclidiens tangents à la variété; les vecteurs unités $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ attachés à chaque point seraient par convention tous égaux entre eux. Dans ce cas, la forme ω serait nulle. Nous dirons que nous avons dans ce cas une variété *à connexion euclidienne*.

53. Tout ce qui précède peut se généraliser dans le cas d'un nombre

---

[1] Le rapport d'homothétie est $1 + \omega$.

quelconque de dimensions. On pourrait aussi supposer qu'on a choisi des systèmes de référence non rectangulaires, ou des systèmes de référence rectangulaires avec des vecteurs $\mathbf{e}_i$ non égaux entre eux. Sans vouloir traiter le cas général, bornons-nous à indiquer ce qui se passe lorsque, une unité de longueur étant choisie en chaque point $\mathbf{m}$, on prend des vecteurs $\mathbf{e}_i$ de référence satisfaisant à

$$(\mathbf{e}_i)^2 = g_{ii}, \qquad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, \ldots, n),$$

les g_{ii} étant des coefficients *constants* choisis une fois pour toutes et les mêmes en tous les points de la variété ([1]). Comme l'unité de longueur varie d'un point à l'autre de la variété, on aura simplement le droit de différentier les relations

$$\frac{(\mathbf{e}_1)^2}{g_{11}} = \frac{(\mathbf{e}_2)^2}{g_{22}} = \ldots = \frac{(\mathbf{e}_n)^2}{g_{nn}}, \qquad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0,$$

ce qui donnera, en tenant compte des formules (1),

$$(2) \qquad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_n^n = \omega, \qquad g_{ii}\omega_j^i + g_{jj}\omega_i^j = 0.$$

Le carré de la longueur d'un vecteur (ξ^i) issu de $\mathbf{m}$ est, dans ces conditions,

$$g_{ii}(\xi^i)^2;$$

il varie avec l'unité de longueur choisie en $\mathbf{m}$. Le produit scalaire de deux vecteurs (ξ^i), (η^i) est de même

$$g_{ii}\xi^i\eta^i.$$

54. Étant donné un vecteur (ξ^i), nous désignerons par ξ_i le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur $\mathbf{e}_i$,

$$\xi_i = \xi\mathbf{e}_i = g_{ii}\xi^i;$$

nous dirons que les ξ_i sont les composantes *covariantes* du vecteur ([2]),

---

([1]) Il est évident que cette convention ne restreint en rien la généralité; on peut même supposer ces coefficients égaux à ± 1.

([2]) Il est essentiel de remarquer que les g_{ii} étant des constantes fixées une fois pour toutes, les composantes covariantes d'un vecteur sont liées à ses composantes contravariantes d'une manière indépendante du choix du système de référence.

les ξ^i étant appelées ses composantes contravariantes. Avec ces notations, le carré de la longueur d'un vecteur est $\xi_i\xi^i$ et le produit scalaire de deux vecteurs est $\xi_i\eta^i$ ou $\xi^i\eta_i$. Le ds^2 de la variété (carré de la distance de deux points infiniment voisins) est de même $\omega_i\omega^i$, en posant

$$\omega_i = g_{ii}\omega^i.$$

Nous désignerons naturellement par Ω_i les composantes covariantes du vecteur Ω^i.

La forme ω_i^j peut être regardée comme la $j^{\text{ième}}$ composante (contravariante) du vecteur $d\mathbf{e}_i$; nous poserons

$$\omega_{ij} = d\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_j = g_{jj}\omega_i^j,$$

et de même

$$\omega_{ji} = d\mathbf{e}_j.\mathbf{e}_i = g_{ii}\omega_j^i;$$

les relations (2) montrent que l'on a

$$(2') \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

Nous poserons de même

$$\Omega_{ij} = g_{jj}\Omega_i^j = (d\mathbf{e}_i)'\mathbf{e}_j, \qquad \Omega_{ji} = g_{ii}\Omega_j^i = (d\mathbf{e}_j)'\mathbf{e}_i;$$
$$\Omega^{ij} = \frac{1}{g_{ii}}\Omega_i^j, \qquad \Omega^{ji} = \frac{1}{g_{jj}}\Omega_j^i.$$

55. *Équations de structure.* — Elles se déduisent immédiatement des équations générales établies au Chapitre I. Elles s'écrivent

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} (\omega^i)' = [\omega^i\omega] + [\omega^k\omega_k^i] + \Omega^i, \\ \omega' \quad = \Omega, \\ (\omega_i^j)' = [\omega_i^k\omega_k^j] + \Omega_i^j, \end{array}\right.$$

et l'on a naturellement entre les Ω_i^j les relations

$$g_{ii}\Omega_j^i + g_{jj}\Omega_i^j = 0,$$

ou

$$(4) \qquad \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0.$$

Les équations (3) peuvent encore s'écrire

$$(3')\qquad \begin{cases} (\omega_i)' = [\omega_i \omega] + [\omega_i^k \omega_k] + \Omega_i, \\ \omega' \quad = \Omega, \\ (\omega_{ij})' = [\omega_i^k \omega_{kj}] + \Omega_{ij} = [\omega_{ki} \omega_j^k] + \Omega_{ij}. \end{cases}$$

Enfin les équations qui traduisent le théorème de conservation sont

$$(5)\qquad \begin{cases} (\Omega^i)' + [\omega \Omega^i] - [\omega^i \Omega] + [\omega_k^i \Omega^k] - [\omega^k \Omega_k^i] = 0, \\ \Omega' = 0, \\ (\Omega_i^j)' + [\omega_k^j \Omega_i^k] - [\omega_i^k \Omega_k^j] = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(5')\qquad \begin{cases} (\Omega_i)' + [\omega \Omega_i] - [\omega_i \Omega] - [\omega_i^k \Omega_k] + [\omega_k \Omega_i^k] = 0, \\ \Omega' = 0, \\ (\Omega_{ij})' - [\omega_j^k \Omega_{ik}] - [\omega_i^k \Omega_{kj}] = 0. \end{cases}$$

56. *La torsion et les courbures.* — A tout contour fermé infiniment petit sont associées :

1° Une translation $\mathbf{e}_i \Omega^i$;
2° Une homothétie de rapport $1 + \Omega$;
3° Une rotation de composantes Ω_i^j.

La translation définit la *torsion*, l'homothétie la *courbure d'homothétie*, la rotation la *courbure de rotation* de la variété.

Si la courbure d'homothétie est nulle, la variété est à connexion euclidienne. On peut disposer des arbitraires dont dépend le choix du système de référence de manière à satisfaire à l'équation

$$\omega = 0;$$

cette équation est en effet complètement intégrable, puisque le premier membre, ayant son covariant bilinéaire ω' identiquement nul, est une différentielle exacte. On peut donc choisir les systèmes de référence attachés aux différents points $\mathbf{m}$ de la variété de manière que la connexion devienne euclidienne : cela est possible d'une infinité de manières, le choix de l'unité de longueur (qui est maintenant absolue) étant arbitraire [1].

---

[1] Analytiquement si l'on remplace $\mathbf{e}_i$ par $u\mathbf{e}_i$, où u est un paramètre arbitraire,

57. *Représentation géométrique de la rotation associée à un contour fermé infiniment petit.* — On peut représenter géométriquement la rotation de composantes Ω_i^j. Partons pour cela des formules qui donnent la variation géométrique $\Delta\xi$ que fait subir cette rotation à un vecteur ξ; on a

$$\Delta\xi^i = \xi^k \Omega_k^i,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Delta\xi^i = \xi_k \Omega^{ki}.$$

Cette variation est la somme géométrique des $\frac{n(n-1)}{2}$ variations dues aux différentes composantes Ω^{ij} de la rotation totale, ce qui permet encore de regarder la rotation totale comme la somme de $\frac{n(n-1)}{2}$ rotations composantes. Prenons par exemple la rotation composante Ω^{12}; on a

$$\Delta\xi^1 = \xi_2 \Omega^{21},$$
$$\Delta\xi^2 = \xi_1 \Omega^{12},$$
$$\Delta\xi^3 = \ldots = \Delta\xi^n = 0;$$

cette rotation composante n'altère pas les vecteurs perpendiculaires au plan $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$; quant à un vecteur non perpendiculaire à ce plan, sa composante normale n'est pas altérée, la rotation faisant sentir son effet uniquement sur la projection du vecteur sur le plan.

Considérons en particulier le vecteur $\mathbf{e}_1$ de composantes $(1, 0)$; il devient après la rotation le vecteur de composantes $(1, g_{11}\Omega^{12})$

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + g_{11}\Omega^{12}\mathbf{e}_2;$$

soit θ l'angle dont ce vecteur a tourné, angle compté positivement dans le sens de $\mathbf{e}_1$ vers $\mathbf{e}_2$; on a

$$\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_2 = |\mathbf{e}_1|\,|\mathbf{e}_2|\,\theta = g_{11}\Omega^{12}|\mathbf{e}_2|^2,$$

d'où

$$\theta = g_{11}\Omega^{12}\frac{|\mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}_1|}.$$

ω est remplacé par $\omega + \frac{du}{u}$. Pour rendre la connexion euclidienne, il n'y a qu'à prendre $u = C e^{-\int \omega}$.

Considérons enfin le bivecteur situé dans le plan $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ et de mesure algébrique θ; ce bivecteur est (¹)

$$\frac{[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\theta}{|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2|} = g_{11}\frac{\Omega^{12}}{|\mathbf{e}_1|^2}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega^{12}.$$

Il résulte de ce qui précède que *la rotation Ω_i^j peut être représentée par le système de bivecteurs*

$$(6) \qquad [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\Omega^{ij}$$

dont chaque terme définit une des $\frac{n(n-1)}{2}$ rotations composantes.

Il est essentiel de remarquer que cette représentation a une valeur intrinsèque si la variété est à connexion *euclidienne;* si au contraire la variété est à connexion métrique, le système de bivecteurs considéré dépend du choix de l'unité de longueur attachée au point $\mathbf{m}$.

On peut dire que, dans le cas des variétés à connexion euclidienne, l'expression (6) est un *invariant intégral bivectoriel* attaché à chaque élément à deux dimensions de la variété.

58. *Invariants intégraux attachés à une variété à connexion euclidienne.* — Les composantes Ω^i et Ω_{ij} de la torsion et de la courbure d'une variété à connexion euclidienne fournissent, d'après ce qui précède, deux invariants intégraux à deux dimensions

$$(7) \qquad \mathbf{e}_i\Omega^i,$$

$$(6) \qquad [\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]\Omega^{ij},$$

l'un vectoriel, l'autre bivectoriel. Il est facile d'en déduire d'autres invariants à trois dimensions.

Considérons d'abord un vecteur ξ^i; le produit scalaire et le produit vectoriel de ce vecteur par le vecteur $\mathbf{e}_i\Omega^i$ sont respectivement

$$\xi_i\Omega^i,$$

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j](\xi^i\Omega^j - \xi^j\Omega^i);$$

(¹) Si en particulier on considère une aire infiniment petite $d\sigma$ dans le plan $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, le contour étant parcouru dans le sens direct, le rapport $\frac{\Omega^{12}}{d\sigma}$ définit la *courbure* de l'élément plan $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$.

cela nous conduit à la considération des deux formes scalaire et bivectorielle

(8) $$[\omega_i \Omega^i],$$

(9) $$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j][\omega^i \Omega^j - \omega^j \Omega^i],$$

qu'on peut interpréter de la manière suivante.

Considérons un volume (à trois dimensions) limité par une surface fermée infiniment petite et prenons à l'intérieur du volume un point **a**. Décomposons la surface fermée en une infinité d'éléments, soit **m** un point intérieur à l'un de ces éléments. La première forme représente la somme des produits scalaires du vecteur **m** — **a** par la translation associée à l'élément de surface qui entoure **m** [1]; la seconde forme représente la somme géométrique des produits vectoriels des deux mêmes vecteurs.

On peut de même, en reprenant un vecteur arbitraire (ξ^i), considérer le déplacement subi par ce vecteur par l'effet de la rotation Ω^{ij}, à savoir

$$\mathbf{e}_i \xi^k \Omega^i_k,$$

et la somme des produits extérieurs de ce vecteur par les différents bivecteurs qui représentent la rotation Ω^{ij}, à savoir

$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k](\xi^i \Omega^{jk} + \xi^j \Omega^{ki} + \xi^k \Omega^{ij}).$$

Cela nous conduit à deux nouvelles formes, éléments d'intégrales triples,

(10) $$\mathbf{e}_i[\omega^k \Omega^i_k],$$

(11) $$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k][\omega^i \Omega^{jk} + \omega^j \Omega^{ki} + \omega^k \Omega^{ij}],$$

dont l'interprétation géométrique est la suivante. En reprenant la surface fermée dont il est question plus haut, et le point **a** intérieur à cette surface, la première forme représente la somme géométrique des déplacements subis par les vecteurs **m** − **a** par l'effet de la rotation associée à l'élément de surface qui entoure **m**; la seconde

[1] Le nombre ainsi obtenu, divisé par le nombre qui mesure le volume de l'élément à trois dimensions considéré, peut s'appeler la *torsion scalaire* de cet élément.

représente la somme géométrique des trivecteurs obtenus par la multiplication extérieure du vecteur $\mathbf{m} - \mathbf{a}$ et du système de bivecteurs représentant la rotation associée à l'élément de surface qui entoure $\mathbf{m}$.

On peut poursuivre et obtenir des invariants intégraux à quatre dimensions. A un vecteur (ξ^i) on peut associer :

1° Son produit par le nombre scalaire (8)

$$\mathbf{e}_i \xi^i [\omega_k \Omega^k];$$

2° Son déplacement par l'effet de la rotation que représente la forme bivectorielle (9)

$$\mathbf{e}_i \xi^k [\omega_k \Omega^i - \omega^i \Omega_k];$$

3° Son produit extérieur par le système de bivecteurs (9)

$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k] \{ \xi^i [\omega^j \Omega^k - \omega^k \Omega^j] + \xi^j [\omega^k \Omega^i - \omega^i \Omega^k] + \xi^k [\omega^i \Omega^j - \omega^j \Omega^i] \};$$

4° Son produit scalaire par le vecteur (10)

$$\xi_i [\omega^k \Omega^i_k];$$

5° Son produit vectoriel par le vecteur (10)

$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] [\xi^i \omega^k \Omega^j_k - \xi^j \omega^k \Omega^i_k];$$

6° Son produit extérieur quadrivectoriel par le système de trivecteurs (11)

$$\begin{aligned}[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l] \{ & \xi^i [\omega^j \Omega^{kl} + \omega^k \Omega^{lj} + \omega^l \Omega^{jk}] - \xi^j [\omega^i \Omega^{kl} + \omega^k \Omega^{li} + \omega^l \Omega^{ik}] \\ & + \xi^k [\omega^i \Omega^{jl} + \omega^j \Omega^{li} + \omega^l \Omega^{ij}] - \xi^l [\omega^i \Omega^{jk} + \omega^j \Omega^{ki} + \omega^k \Omega^{ij}] \}.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement l'existence de nouveaux invariants intégraux [1]

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_i [\omega^i \omega^k \Omega_k], \\ [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k] [\omega^j \omega^k \Omega^i + \omega^k \omega^i \Omega^j + \omega^i \omega^j \Omega^k], \\ [\omega^i \omega^j \Omega_{ij}], \\ [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] [\omega^i \omega^k \Omega^j_k - \omega^j \omega^k \Omega^i_k], \\ [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l] [\omega^i \omega^j \Omega^{kl} + \omega^i \omega^k \Omega^{lj} + \omega^i \omega^l \Omega^{jk} + \omega^k \omega^l \Omega^{ij} + \omega^l \omega^j \Omega^{ik} + \omega^j \omega^k \Omega^{il}].\end{gathered}$$

---

[1] La première et la deuxième formes associées au vecteur (ξ^i) donnent naissance au même invariant intégral.

L'interprétation géométrique de ces formes serait analogue à celle des formes précédentes.

On pourrait continuer et obtenir des invariants intégraux à un nombre de dimensions de plus en plus élevé.

59. Les *dérivées extérieures* de ces invariants intégraux sont faciles à calculer; ce sont en effet de nouveaux invariants intégraux admettant une signification indépendante du choix du système de référence. Il en résulte qu'en les calculant *tous les termes en ω_i^j doivent disparaître*. On peut s'en rendre compte d'une manière nette en remarquant que si l'on attache à chaque point $\mathbf{m}$ le système de référence *le plus général possible*, les $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres arbitraires qu'on introduit ainsi n'interviennent pas en réalité dans la forme invariante qu'on dérive; donc, leurs différentielles, qui se révèlent dans les ω_i^j, n'interviendront pas non plus dans la dérivée extérieure.

On *aura donc les dérivées extérieures des différentes formes considérées en regardant les $\mathbf{e}_i$ et les Ω_{ij} comme des constantes, et en remplaçant* $(\omega^i)'$ *et* $(\Omega^i)'$ *respectivement par*

$$\Omega^i \quad \text{et} \quad [\omega^k \Omega_k^i].$$

On peut donc former le Tableau suivant (où l'on n'a fait figurer que les formes à deux et trois dimensions) :

Formes invariantes.	Formes dérivées.
$\mathbf{e}_i \Omega^i$	$\mathbf{e}_i[\omega^k \Omega_k^i]$
$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]\Omega^{ij}$	0
$[\omega_i \Omega^i]$	$[\Omega_i \Omega^i] + 2[\omega^i \omega^j \Omega_{ij}]$
$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j][\omega^i \Omega^j - \omega^j \Omega^i]$	$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j][\omega^i \omega^k \Omega_k^j - \omega^j \omega^k \Omega_k^i]$
$\mathbf{e}_i[\omega^k \Omega_k^i]$	$\mathbf{e}_i[\Omega^k \Omega_k^i]$
$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k][\omega^i \Omega^{jk} + \omega^j \Omega^{ki} + \omega^k \Omega^{ij}]$.	$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k][\Omega^i \Omega^{jk} + \Omega^j \Omega^{ki} + \Omega^k \Omega^{ij}]$.

On remarquera que certaines des formes à trois dimensions peuvent être obtenues par dérivation des formes à deux dimensions.

60. *Les invariants intégraux des variétés à connexion euclidienne sans torsion.* — Si la variété est sans torsion (variété de Riemann),

les Ω^i sont nuls, et par suite, d'après les équations (5), la forme

$$\mathbf{e}_i[\omega^k \Omega^i_k]$$

est identiquement nulle. Des invariants intégraux précédemment déterminés, *les seuls qui subsistent sont*

$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]\Omega^{ij},$$
$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k][\omega^i \Omega^{jk} + \omega^j \Omega^{ki} + \omega^k \Omega^{ij}],$$
$$[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l][\omega^i \omega^j \Omega^{kl} + \omega^i \omega^k \Omega^{lj} + \omega^i \omega^l \Omega^{jk} + \omega^k \omega^l \Omega^{ij} + \omega^l \omega^j \Omega^{ik} + \omega^j \omega^k \Omega^{il}],$$

et leurs dérivées extérieures sont identiquement nulles. On en déduit des théorèmes de conservation qu'il serait facile d'énoncer géométriquement [1].

Cas des variétés à trois dimensions. — Dans le cas des variétés à trois dimensions, les invariants intégraux à quatre dimensions disparaissent d'eux-mêmes. Remarquons qu'à tout vecteur

$$\xi^i \mathbf{e}_i$$

est lié d'une manière invariante un bivecteur

$$\xi_1[\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] + \xi_2[\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1] + \xi_3[\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2]$$

et réciproquement; de même à un trivecteur est lié un scalaire, sa mesure.

D'après cela, *en nous bornant au cas où il n'y a pas de torsion*, nous obtenons les invariants intégraux nouveaux

$$[\omega^1 \Omega^{23}] + [\omega^2 \Omega^{31}] + [\omega^3 \Omega^{12}],$$
$$\mathbf{e}_1 \Omega_{23} + \mathbf{e}_2 \Omega_{31} + \mathbf{e}_3 \Omega_{12},$$

dont le second, à deux dimensions, a sa dérivée extérieure nulle; ce

---

[1] Ces formes peuvent être considérées comme définissant la *courbure* (bivectorielle, trivectorielle, quadrivectorielle) d'un élément à deux, trois, quatre dimensions. Au lieu de prendre des multivecteurs *libres*, on pourrait prendre les multivecteurs *appliqués* $[\mathbf{m}\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j]\Omega^{ij}$, etc. On a alors le théorème remarquable que *la courbure p-vectorielle libre d'un petit domaine à p dimensions est la somme géométrique des courbures (p — 1)-vectorielles appliquées des éléments à p — 1 dimensions qui limitent le domaine.* Ce théorème permet d'obtenir simplement les formes du texte par récurrence.

second est le vecteur qui représente, suivant le procédé habituel, la rotation associée à un élément de surface ([1]).

Cas des variétés à quatre dimensions. — Ici il y a une correspondance invariante :

1° Entre le vecteur

$$\xi^i \mathbf{e}_i$$

et le trivecteur *polaire*

$$\xi_1[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4] - \xi_2[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4] + \xi_3[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4] - \xi_4[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3];$$

2° Entre le système de bivecteurs

$$\xi^{ij}[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$$

et le système de bivecteurs *polaire*

$$\xi_{12}[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4] + \xi_{13}[\mathbf{e}_4\mathbf{e}_2] + \xi_{14}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] + \xi_{34}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + \xi_{42}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3] + \xi_{23}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4].$$

Si l'on regarde les ξ^i comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à trois dimensions, le trivecteur polaire du vecteur (ξ^i) peut être regardé comme représentant le plan polaire du point par rapport à la quadrique $x^i x_i = 0$. De même si les ξ^{ij} sont les coordonnées plückériennes d'une droite, les coordonnées du bivecteur polaire sont celles de la droite polaire par rapport à la quadrique.

Nous avons par suite, *en nous limitant aux variétés à torsion nulle, les invariants intégraux nouveaux*

$$[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Omega_{14} + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Omega_{24} + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega_{34} + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4]\Omega_{23} + [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_4]\Omega_{31} + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_4]\Omega_{12},$$

$$\sum (ijkl)\mathbf{e}_i[\omega_j\Omega_{kl} + \omega_k\Omega_{lj} + \omega_l\Omega_{jk}],$$

$$[\omega_2\omega_3\Omega_{14}] + [\omega_3\omega_1\Omega_{24}] + [\omega_1\omega_2\Omega_{34}] + [\omega_1\omega_4\Omega_{23}] + [\omega_2\omega_4\Omega_{31}] + [\omega_3\omega_4\Omega_{12}].$$

([1]) Le système de vecteurs et de couples

$$[\mathbf{me}_1]\Omega_{23} + [\mathbf{me}_2]\Omega_{31} + [\mathbf{me}_3]\Omega_{12} + [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3]\Omega_1 + [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]\Omega_2 + [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]\Omega_3$$

représente de même le déplacement associé à un élément de surface. Sa dérivée extérieure est nulle.

Si l'on regardait ce système comme représentant les tensions qui s'exercent sur un milieu matériel (tensions comportant des couples), ce milieu serait en équilibre. Il y a là une des nombreuses analogies, plus ou moins trompeuses, qui existent entre la Géométrie et la Mécanique. En fait, ce n'est là qu'une analogie.

Le second d'entre eux est indépendant du choix de l'unité de longueur; il joue, ainsi que le troisième, un rôle important dans la théorie d'Einstein ([1]).

Nous verrons dans la seconde partie de ce Mémoire une méthode générale pour former les invariants intégraux attachés à une variété.

Le théoreme fondamental des variétés sans torsion.

61. On doit à M. H. Weyl un théorème important, d'après lequel la connexion métrique d'une variété *sans torsion* est parfaitement déterminée lorsqu'on se donne le ds^2 de la variété, ainsi que la forme ω qui permet de comparer les unités de longueur choisies en deux points infiniment voisins ([2]).

L'hypothèse revient en effet à supposer connues en chaque point les formes ω^i et ω, c'est-à-dire à supposer connues la *translation* et l'*homothétie* qui amènent en coïncidence deux systèmes de référence infiniment voisins. Les composantes ω_{ij} de la *rotation* sont alors fournies par les équations

$$(\omega^i)' = [\omega^i \omega] + [\omega^k \omega_k^i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il suffit de montrer qu'il existe un système et un seul de formes $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ tel que les n formes

$$[\omega^k \omega_{ki}] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

deviennent égales à n formes données en $\omega^1, \ldots, \omega^n$, soit

$$h_{i\alpha\beta}[\omega^\alpha \omega^\beta] \qquad (h_{i\alpha\beta} = -h_{i\beta\alpha}).$$

En posant

$$\omega_{ij} = a_{ij\alpha}\omega^\alpha \qquad (a_{ij\alpha} = -a_{ji\alpha}),$$

([1]) Ces invariants fournissent, sous forme de bivecteur libre, de vecteur libre et de scalaire, une seconde représentation de la courbure d'un élément à deux, trois et quatre dimensions d'une variété à connnexion euclidienne. La différence entre cette seconde représentation et la première est qu'ici la somme géométrique des courbures *appliquées* des éléments à $p-1$ dimensions qui limitent un petit domaine à p dimensions est *nulle*.

([2]) H. Weyl, *Temps, Espace, Matière* (trad. de G. Juvet et R. Leroy), p. 108. — *Cf.* E. Cartan, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein* (*Journ. de Math.*, 1922, p. 150-151).

les coefficients $a_{ij\alpha}$ sont donnés par les relations

$$a_{\alpha i\beta} - a_{\beta i\alpha} = h_{i\alpha\beta};$$

elles admettent la solution unique

$$a_{ijk} = \frac{1}{2}(h_{ikj} - h_{ijk} - h_{jki}).$$

En particulier, si l'on a une variété à connexion euclidienne sans torsion (variété de Riemann), *sa connexion affine est complètement déterminée par son ds^2 : cette connexion est celle du parallélisme de M. Levi-Civita. C'est pour cela que la théorie de la gravitation de M. Einstein est en général présentée comme équivalente à l'étude d'une variété de Riemann.*

CHAPITRE IV.

LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES DANS UNE VARIÉTÉ A CONNEXION AFFINE OU MÉTRIQUE.

62. L'étude des courbes et des surfaces, fondée sur l'emploi d'un système de référence mobile, se fait dans une variété à connexion affine de la même manière que dans un espace affine proprement dit.

En chaque point $\mathbf{m}$ d'une courbe d'un espace affine on peut attacher (et d'une infinité de manières) un système de référence tel que le vecteur $\mathbf{e}_1$ soit tangent à la courbe. Ce qui caractérise la droite, c'est que ce vecteur $\mathbf{e}_1$ reste constamment parallèle à lui-même. On appellera donc *droite* (ou *géodésique*) dans une variété à connexion affine une ligne telle qu'un vecteur tangent à cette ligne se déplace *parallèlement à lui-même* le long de la ligne. Pour trouver toutes les droites d'une variété à connexion affine on attachera à chaque point de la variété le système de référence le plus général possible et l'on exprimera :

1° Que le vecteur $\mathbf{e}_1$ est tangent au déplacement, c'est-à-dire

$$\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0; \tag{1}$$

2° Que $d\mathbf{e}_1$ est parallèle à $\mathbf{e}_1$, c'est-à-dire

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0. \tag{2}$$

Les $2n-2$ équations (1) et (2) définissent les droites de la variété; les quantités inconnues dans ces équations sont $n-1$ des coordonnées d'un point de la variété et les n^2 paramètres arbitraires dont dépend le choix des systèmes de référence.

Si l'on a particularisé les systèmes de référence attachés aux points de la variété, on introduira n inconnues auxiliaires ξ^i par les équations

$$\frac{\omega^1}{\xi^1} = \frac{\omega^2}{\xi^2} = \ldots = \frac{\omega^n}{\xi^n},$$

et l'on exprimera que le vecteur $\xi^i \mathbf{e}_i$ reste parallèle à lui-même, ce qui donne

$$d\xi^i + \xi^k \omega_k^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En introduisant un paramètre auxiliaire t, on aura les équations

$$\xi^i = \frac{\omega^i}{dt}, \qquad \frac{d\xi^i}{dt} + \gamma_{kh}^i \xi^k \xi^h = 0,$$

en posant

$$\omega_k^i = \gamma_{kh}^i \omega^k.$$

Les courbes de la variété qui jouent le rôle de courbes planes seraient définies, si l'on utilise en chaque point $\mathbf{m}$ de la variété le système de référence le plus général possible, par les équations

$$\begin{gathered}
\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^n = 0, \\
\omega_1^3 = \ldots = \omega_1^n = 0, \\
\omega_2^3 = \ldots = \omega_2^n = 0;
\end{gathered}$$

elles dépendent, comme on le voit facilement, d'une fonction arbitraire d'un argument.

63. La recherche des invariants affines d'une courbe se fait sans difficulté. Plaçons-nous pour simplifier dans le cas d'une variété à trois dimensions. En restant dans le cas général, on démontrera, comme dans l'espace affine, qu'on peut attacher à chaque point un système de référence et déterminer un paramètre de position s de sorte qu'on ait les formules, qui généralisent celles de Frenet-

Serret,

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = \mathbf{e}_1,$$

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \mathbf{e}_1 + 2\alpha\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = \beta\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\alpha\mathbf{e}_3.$$

Les deux invariants affines fondamentaux sont α et β. Le plan osculateur à la courbe est $[\mathbf{me}_1\mathbf{e}_2]$.

64. Les propriétés fondamentales des surfaces s'étudient de la même manière. Nous nous bornerons au cas $n = 3$. A chaque point $\mathbf{m}$ d'une surface, nous attacherons un système de référence tel que les vecteurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ soient tangents à la surface. On aura donc, si l'on se déplace sur la surface,

$$\omega^3 = 0,$$

d'où, en prenant le covariant bilinéaire,

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + \Omega^3 \equiv [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] + A^3_{12}[\omega^1\omega^2] = 0.$$

Il résulte de cette égalité que les deux formes ω_1^3 et ω_2^3 sont linéaires en ω^1 et ω^2

$$\omega_1^3 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2,$$
$$\omega_2^3 = \alpha'\omega^1 + \beta'\omega^2,$$

avec

$$\beta - \alpha' + A^3_{12} = 0.$$

La surface généraliserait le *plan* (surface géodésique) de l'espace affine si l'on avait

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0,$$

ce qui exige $A^3_{12} = 0$. *En général de tels plans* (ou *surfaces géodésiques*) *n'existent pas*. Pour les trouver, quand il en existe, il faut intégrer le système

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0, \qquad A^3_{12} = 0.$$

La dérivation extérieure des deux premières équations donne

$$A^3_{112} = 0, \qquad A^3_{212} = 0.$$

On est donc conduit à trois équations finies pour les neuf paramètres arbitraires dont dépend le choix des systèmes de référence. Un cas particulier intéressant est celui où ces trois équations seraient vérifiées identiquement. On peut en déduire que si l'on choisit en chaque point un système de référence déterminé, il existe six relations linéaires entre les composantes du tenseur de torsion et quinze relations entre celles du tenseur de courbure. Dans ce cas, *il existe un plan et un seul passant par un point donné et tangent en ce point à deux vecteurs donnés.* Les variétés ont donc, comme l'espace affine, ∞^3 plans.

On peut démontrer qu'elles dépendent de trois fonctions arbitraires de trois arguments.

Prenons maintenant une surface quelconque. On peut définir sur une telle surface la direction δ' *conjuguée* d'une direction δ en considérant l'élément plan tangent $[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2]$ et cherchant sa caractéristique quand le point $\mathbf{m}$ se déplace dans la direction δ. On a

$$\begin{aligned}\delta[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] &= \omega_1^3[\mathbf{m}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2] + \omega_2^3[\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3] \\ &= [\alpha\omega^1(\delta) + \beta\omega^2(\delta)][\mathbf{m}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2] + [\alpha'\omega^1(\delta) + \beta'\omega^2(\delta)][\mathbf{m}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3].\end{aligned}$$

En exprimant que le vecteur $\omega^1(\delta')\mathbf{e}_1 + \omega^2(\delta')\mathbf{e}_2$ est dans ce plan, on obtient

$$\alpha\omega^1(\delta)\omega^1(\delta') + \beta\omega^2(\delta)\omega^1(\delta') + \alpha'\omega^1(\delta)\omega^2(\delta') + \beta\omega^2(\delta)\omega^2(\delta') = 0.$$

Cette relation n'est plus involutive si $\beta - \alpha'$ n'est pas nul. Autrement dit si la direction δ' est conjuguée de δ, la direction δ n'est pas réciproquement conjuguée de δ'. Il n'y a d'exception que si A_{12}^3 est nul. *La réciprocité entre les directions conjuguées d'une surface a lieu pour les variétés dont le premier tenseur de torsion* (1) *est nul.*

65. On peut définir une ligne asymptotique d'une surface comme une ligne dont le plan osculateur est tangent à la surface; on démontre facilement qu'alors la tangente à la ligne est sa propre conjuguée. Les lignes asymptotiques sont donc données par l'équation

$$\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = 0.$$

Les surfaces dont les lignes asymptotiques sont indéterminées sont

(1) L'étude des tenseurs de torsion sera faite plus loin.

données par les conditions

$$\alpha = 0, \qquad \beta + \alpha' = 0, \qquad \beta' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\omega_1^3 = -\frac{1}{2} A_{12}^3 \omega^2, \qquad \omega_2^3 = \frac{1}{2} A_{12}^3 \omega^1;$$

elles se confondent avec les plans si le premier tenseur de torsion est nul.

Les surfaces pour lesquelles les deux familles de lignes asymptotiques sont confondues sont données par les équations

$$\beta + \alpha' = \beta' = 0,$$

ou par l'équation

$$\omega_2^3 = \frac{1}{2} A_{12}^3 \omega^1.$$

On démontre facilement que, quelle que soit la variété, elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument.

Les indications précédentes suffisent pour montrer qu'il n'y a pas de changement essentiel de méthode à introduire pour l'étude des courbes et des surfaces plongées dans une variété à connexion affine, mais que dans certains cas les théorèmes fondamentaux relatifs à l'espace affine doivent subir de profondes modifications.

Les droites dans les variétés à connexion euclidienne.

66. Les droites s'obtiennent dans les variétés à connexion euclidienne de la même manière que dans le cas d'une connexion affine générale.

Un cas particulièrement intéressant est celui où *la ligne droite réalise le plus court chemin d'un point à un autre*. On peut montrer par le calcul que *la condition pour qu'il en soit ainsi est que la translation associée à un élément plan quelconque de la variété soit normale à cet élément*. On peut s'en rendre compte par un raisonnement géométrique assez intuitif.

Considérons un segment de droite très petit mm' sur la variété; si nous rapportons de proche en proche l'espace euclidien tangent en un point variable de cette droite à l'espace euclidien tangent en m, le segment de droite sera représenté dans cet espace euclidien par une droite véritable $\mathbf{mm}'_1$. Considérons alors un autre chemin quelconque allant de $\mathbf{m}$ en $\mathbf{m}'$; si nous rapportons de proche en proche l'espace euclidien tangent en un point variable de ce chemin à l'espace euclidien tangent en $\mathbf{m}$, ce chemin lui-même sera représenté par une certaine ligne courbe allant de $\mathbf{m}$ en un point $\mathbf{m}'_2$. Il est clair que la figure tracée dans l'espace euclidien tangent en $\mathbf{m}$ peut être interprétée comme tracée dans l'espace euclidien tangent en $\mathbf{m}'$, le repérage par rapport à cet espace se faisant de proche en proche, d'abord le long du segment de droite $\mathbf{m}'\mathbf{m}$, puis le long du second chemin allant de $\mathbf{m}$ en $\mathbf{m}'$. On peut donc regarder le vecteur (euclidien) $\mathbf{m}'_2 - \mathbf{m}'_1$ comme représentant la *translation* associée à ce petit contour fermé. *Si la variété est sans torsion*, cette translation est nulle, $\mathbf{m}'_2$ se confond avec $\mathbf{m}'_1$ et la variation première obtenue en passant de la longueur de la droite $\mathbf{mm}'_1$ à la longeur de l'arc curviligne $\mathbf{mm}'_2$ est nulle : la droite est bien sur la variété une ligne de longueur stationnaire. Mais la condition qu'il n'y ait pas de torsion n'est pas nécessaire : il suffit que la translation $\mathbf{m}'_2 - \mathbf{m}'_1$ soit *normale* à l'élément de droite $\mathbf{mm}'$ pour que la variation première de la longueur soit nulle. Autrement dit, *pour qu'une droite réalise une valeur stationnaire de la longueur, il faut et il suffit que la translation associée à un élément plan quelconque contenant un élément quelconque de la droite soit normale à cet élément de droite.*

Si l'on veut que *toutes les droites* soient les plus courts chemins, il faut et il suffit que la translation associée à un élément plan quelconque soit normale à cet élément. Si n est supérieur à 2, cette condition peut être réalisée pour une variété avec torsion. Par exemple, pour $n = 3$, la condition revient à l'identité en ξ^i, η^i :

$$\sum_i \xi^i[\mathrm{A}_{i23}(\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2) + \mathrm{A}_{i31}(\xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3) + \mathrm{A}_{i12}(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)] = 0;$$

on en déduit

$$\Omega_1 = a[\omega^2\omega^3], \qquad \Omega_2 = a[\omega^3\omega^1], \qquad \Omega_3 = a[\omega^1\omega^2],$$

a désignant un coefficient arbitraire.

67. Si $n = 2$, les droites ne réalisent les plus courts chemins que si la variété est sans torsion. Comme exemple de variété avec torsion

signalons celui qui est fourni par une sphère, sur laquelle on conviendrait de regarder comme parallèles deux vecteurs issus de deux points infiniment voisins lorsque les angles qu'ils font respectivement avec les méridiennes (¹) qui passent par leurs origines sont égaux. Dans ces conditions, si l'on choisit en chaque point un vecteur-unité $\mathbf{e}_1$ tangent au parallèle et un vecteur-unité $\mathbf{e}_2$ tangent à la méridienne qui passent par ce point, on a

$$d\mathbf{e}_1 = 0, \qquad d\mathbf{e}_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\omega_{12} = 0.$$

En prenant pour coordonnées la longitude φ et la colatitude θ, on a

$$\omega^1 = \omega_1 = \mathrm{R}\sin\theta\, d\varphi, \qquad \omega^2 = \omega_2 = \mathrm{R}\, d\theta,$$

par suite

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega'_1 = \mathrm{R}\cos\theta[d\theta\, d\varphi] = \frac{\cot\theta}{\mathrm{R}}[\omega_1\omega_2], \\ \Omega_2 &= \omega'_2 = 0, \\ \Omega_{12} &= \omega'_{12} = 0. \end{aligned}$$

La variété que nous avons ainsi définie est à courbure nulle, mais elle a une torsion qui se traduit par une translation dirigée *suivant le parallèle*. Si l'on appelle torsion en un point le vecteur obtenu en divisant par l'aire $d\sigma$ d'un élément de surface la translation associée à cet élément parcouru dans le sens direct $\left(\text{qui amène } \mathbf{e}_1 \text{ sur } \mathbf{e}_2 \text{ par une rotation de } \frac{\pi}{2}\right)$, on voit que *la torsion en un point de la sphère est représentée par un vecteur tangent au parallèle et égal à* $\frac{\cot\theta}{\mathrm{R}}$. Elle est infinie aux pôles, nulle à l'équateur.

Sur cette variété les lignes droites sont les *loxodromies*, qui font un angle constant avec les méridiennes. Les seules lignes droites qui réalisent les plus courts chemins sont celles qui sont normales en chaque point à la torsion : *ce sont les méridiennes.*

68. *Les triangles rectilignes sur les variétés à deux dimensions.* — Considérons sur une variété à deux dimensions à connexion euclidienne,

(¹) On suppose qu'on a défini une fois pour toutes sur la sphère un système de méridiennes et de parallèles.

avec ou sans torsion, un triangle infiniment petit formé de trois segments de droites. Appelons a, b, c les côtés de ce triangle; A, B, C ses angles. La courbure de ce triangle est évidemment le quotient de $A + B + C - \pi$ par son aire ([1]). Quant à la projection de la torsion en A sur le côté AB, elle est, quant à sa partie principale, égale au quotient par l'aire du triangle de la longueur

$$c - a\cos B - b\cos A;$$

sa projection sur la perpendiculaire à AB est égale au quotient par la même aire de la longueur

$$a\sin B - b\sin A.$$

On voit que, *si la variété est sans torsion*, les formules de la trigonométrie rectiligne

$$c = a\cos B + b\cos A,$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

sont valables à des quantités près infiniment petites par rapport à l'aire du triangle. C'est du reste là un résultat classique dans la théorie des surfaces : on sait en effet, d'après Gauss, qu'étant donné un triangle géodésique infiniment petit, le triangle rectiligne (euclidien) qui a mêmes côtés a aussi les mêmes angles, à des quantités près infiniment petites par rapport à l'aire du triangle ([2]).

69. *Intégration des équations différentielles qui donnent les lignes droites.* — Lorsque la torsion associée à un élément plan quelconque d'une variété à connexion euclidienne à n dimensions est normale à cet élément plan, les lignes droites sont les extrémales d'un problème de calcul des variations; les équations différentielles qui les donnent admettent un invariant intégral linéaire. Si le système de référence attaché à chaque point a été choisi *de la manière la plus générale possible*,

---

([1]) En appelant courbure le quotient par l'aire de la rotation associée au contour du triangle.

([2]) *Voir* en particulier G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, Chap. VIII, p. 157; Paris, Gauthier-Villars, 1894.

ces équations différentielles sont

$$\omega^2 = \ldots = \omega^n = 0,$$
$$\omega_1^2 = \ldots = \omega_1^n = 0,$$

et l'invariant intégral est $\int \omega^1 = \int ds$. Si au contraire le système de référence a été particularisé en chaque point, l'invariant intégral est

$$\int u_1 \omega^1 + u_2 \omega^2 + \ldots + u_n \omega^n,$$

en désignant par u_i un système de n inconnues auxiliaires liées par la relation

$$u_i u^i = 1.$$

La recherche des *lignes droites de longueur nulle* donne lieu à des remarques analogues. Ici on peut se placer dans le cas des variétés à connexion *métrique*. Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = g_{33} = \ldots = g_{nn} = -1;$$

les lignes cherchées sont données, comme il est facile de le montrer, par l'intégration de $2n - 3$ équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \omega^1 - \omega^2 = 0, & \omega^3 = 0, & \ldots, & \omega^n = 0, \\ & \omega_1^3 + \omega_2^3 = 0, & \ldots, & \omega_1^n + \omega_2^n = 0, \end{array} \right.$$

en supposant qu'on ait attaché à chaque point le système de référence le plus général possible. Or si l'on forme le covariant bilinéaire de $\omega^1 - \omega^2$, on trouve, *en tenant compte de l'équation* $\omega^1 - \omega^2 = 0$,

$$(\omega^1)' - (\omega^2)' = [\omega^3(\omega_1^3 + \omega_2^3)] + \ldots + [\omega^n(\omega_1^n + \omega_2^n)] + \sum_{i,j}^{3,\ldots,n} (A^1_{ij} - A^2_{ij})[\omega^i \omega^j]$$
$$+ \sum_{i=3}^{i=n} (A^1_{1i} + A^1_{2i} - A^2_{1i} - A^2_{2i})[\omega^1 \omega^i].$$

Il en résulte que si l'on a

$$(2) \qquad A^1_{1i} - A^2_{2i} + A^1_{2i} - A^2_{1i} = 0 \qquad (i = 3, \ldots, n),$$

les équations (1) définissent les *caractéristiques* de l'équation de Pfaff

$$\omega^1 - \omega^2 = 0.$$

Par suite, *les lignes droites de longueur nulle sont les caractéristiques d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre*. Si l'on a particularisé en chaque point **m** le système de référence, elles s'obtiennent en réduisant à sa forme canonique l'équation de Pfaff

$$u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + \ldots + u_n\omega^n = 0,$$

où les inconnues auxiliaires u_i satisfont à la relation

$$u_i u^i = 0.$$

Les relations (2) sont faciles à interpréter géométriquement. Elles expriment que si l'on considère un vecteur (ξ^i) de longueur nulle et un autre vecteur (η^i) qui lui soit perpendiculaire, la torsion de l'élément plan déterminé par ces deux vecteurs est perpendiculaire au vecteur (ξ^i). En écrivant que la relation [1]

$$A^i_{jk}\xi_i(\xi^j\eta^k - \eta^j\xi^k) = 0$$

est une conséquence des relations

$$\xi_i\xi^i = 0, \qquad \xi_i\eta^i = 0,$$

on trouve un système de $\frac{n(n^2-4)}{3}$ relations linéaires entre les composantes de la torsion; elles expriment qu'un certain tenseur formé avec les composantes du tenseur de torsion est nul. Si $n = 3$, on trouve, pour les expressions les plus générales possible de la torsion compatibles avec les relations (2),

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= a[\omega^2\omega^3] + [\omega_1\varpi],\\ \Omega_2 &= a[\omega^3\omega^1] + [\omega_2\varpi],\\ \Omega_3 &= a[\omega^1\omega^2] + [\omega_3\varpi],\end{aligned}$$

en désignant par ϖ une forme linéaire arbitraire en ω^1, ω^2, ω^3, et par a un coefficient arbitraire.

---

[1] Nous trouverons cette relation et des relations analogues dans la seconde partie de ce Mémoire, lorsque nous étudierons le tenseur de torsion.

(*A suivre.*)