

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Astronomia

EVOLUZIONE DELLE SOTTOSTRUTTURE IN AMMASSI DI GALASSIE SIMULATI

laureando: Carlo Giocoli

anno accademico: 2003/2004

Relatore: *dott. Giuseppe Tormen*

Carlo Giocoli:
e-mail: giocoli@pd.astro.it

This book has been typeset from a $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ file prepared by the author.

a Luca, Maria, Mamma, Papà, Nonno Antonio e Nonna Gilda ...

a Nonno Carmine che purtroppo ci ha lasciati alcuni mesi fà ...

Indice

1	Introduzione	3
2	Storia Termica dell'Universo	7
2.1	Materia barionica, materia oscura e radiazione	7
2.1.1	Storia Termica dell'universo	8
2.1.2	L'universo: omogeneità ed isotropia	10
2.1.3	Proprietà dell'universo	11
3	Instabilità gravitazionale: Teoria di Jeans	19
3.1	Equazioni di un fluido perfetto: universo statico	19
3.1.1	Fluido non-collisionale	22
3.2	Universo in espansione: trattazione Newtoniana	24
4	Leggi scala da spettri a leggi di potenza	31
5	Galassie e ammassi di galassie	35
5.1	Proprietà degli ammassi di galassie	35
5.1.1	Funzione di luminosità	35
5.2	Dinamica d'ammasso	36
5.2.1	Rilassamento a due corpi	38
5.2.2	Rilassamento violento	38

6	Modello dell'Excursion sets e funzione di massa: Press & Schechter	45
6.1	Excursion Set	45
6.2	Funzione di Massa	47
6.3	Tempo di formazione degli aloni	48
6.4	Collasso Ellissoidale	48
7	Simulazioni N-body	51
7.1	Metodi a N -corpi	53
7.2	Aloni virializzati	54
7.2.1	Evoluzione di una perturbazione sferica: formazione degli aloni virializzati	54
7.2.2	Collasso di aloni di materia oscura: secondary infall	56
7.2.3	Profili di densità della materia oscura	58
7.3	Simulazione: Individuazione degli aloni	62
7.3.1	Collasso sferico: Spherical Overdensity	62
7.3.2	Friends-of-Friends	63
7.4	Merging history tree	63
8	Seguire le sottostrutture nelle simulazioni	65
8.1	Post-Processing di una simulazione: le sottostrutture	67
8.2	Massa accresciuta e Funzione di Massa dei Subaloni	69
8.2.1	Aloni di materia oscura	72
8.2.2	Funzione di massa di accrescimento (<i>unevolved</i> SHMF)	72
8.2.3	Tasso di perdita di massa relativamente all'alone ospite	73
9	Definizione della massa degli aloni, funzione di massa dei subaloni	93
9.1	Alone ospite: rinormalizzazione della massa	94
9.2	Funzione di massa dei subaloni: SHMF	95
9.2.1	Frazione di massa nei subaloni	99
9.2.2	Distribuzione radiale dei satelliti	100
9.2.3	SHMF a diversi redshift	104
10	Processi di crescita dell'alone ospite in simulazioni N-body	111
10.1	Simulazione cosmologica: GIF, crescita degli aloni di materia oscura	114
10.1.1	Redshift di formazione	115
10.1.2	Formazione degli aloni in termini di M_*	115
11	Conclusioni & Sviluppi futuri	121

A	Masse viriali & Masse a 200 volte la densità critica	123
B	Calibrazione delle relazioni del tasso di perdita di massa dei subaloni	127

Elenco delle figure

1.1	<i>A sinistra:</i> i contorni di massima-verosimiglianza in $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ per le osservazioni di WMAP, Survey di galassie e Supernovae. <i>A destra:</i> i contorni di verosimiglianza per la relazione $\Omega_w - w$	3
2.1	Storia termica dell'universo.	8
2.2	La mappa del CMB in figura è una combinazione lineare opportunamente pesata di cinque mappe in diverse frequenze fatte da WMAP. I pesi sono stati calcolati in modo da minimizzare il contributo dell'emissione galattica rispetto al segnale del cielo.	10
2.3	Spettro di potenza misurato da diversi esperimenti.	16
2.4	Andamento di Ω_m e Ω_Λ per un universo Λ CDM. L'intervallo in redshift si estende fino a $z = 10$ valore massimo di interesse per le simulazioni usate in questo lavoro di tesi.	18
3.1	Esempio di flusso laminare.	23
5.1	Evoluzione dinamica di un ammasso.	37
5.2	Sequenza evolutiva degli ammassi di galassie da Irregular a cD -cluster.	40
5.3	Moto di una particella durante un incontro binario.	42
5.4	Moto di una particella durante una serie di incontri.	42

7.1	Dinamica di un processo di collasso.	57
7.2	<i>Merging history</i> di un alone.	63
8.1	Andamento della soglia di sovradensità critica in termini del parametro di densità della materia, da Eke et al. 1996. La curva rossa è l'equazione 8.3.	67
8.2	Nella box in alto gli aloni individuati in una simulazione a $z = 0$, in basso un alone ospite in cui sono ben distinguibili i subaloni.	68
8.3	La funzione di massa dei subaloni non evoluta, cioè il numero di subaloni accresciuti con massa nell'intervallo $m/M(t_0)$, $(m + dm)/M(t_0)$, con $M(t_0)$ la massa dell'alone parente a redshift zero	71
8.4	In funzione del redshift viene riportata la massa dell'alone ospite normalizzata a $z = 0$. La linea tratteggiata rappresenta la relazione di van den Bosch 2002, i residui hanno una deviazione standard di circa 0.29.	71
8.5	<i>Unevolved</i> SHMF, i satelliti sono stati divisi in relazione alla massa a redshift zero dell'alone progenitore.	73
8.6	Funzione di massa di accrescimento a diversi redshift come indicato.	74
8.7	Frazione di massa accresciuta.	74
8.8	Illustrazione del processo di <i>merging</i> ed evoluzione. In alto il <i>merging</i> di due aloni che porta alla formazione di un nuovo sistema (in centro). In basso è illustrato il processo di evoluzione in cui la massa dell'alone parente aumenta, mentre quella dei subaloni diminuisce.	75
8.9	Tasso di perdita di massa dei subaloni relativamente all'alone ospite. Le linee indicano gli andamenti dei satelliti.	77
8.10	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	78
8.11	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	79
8.12	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	80
8.13	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	81
8.14	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	82
8.15	$dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	83
8.16	Andamento della pendenza della retta interpolatrice in funzione del redshift.	85
8.17	Andamento del punto zero della retta interpolatrice in funzione del redshift.	85
8.18	$dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	86
8.19	$dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	87
8.20	$dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	88
8.21	$dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	89

8.22 $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	90
8.23 $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.	91
8.24 Andamento della pendenza della retta interpolatrice in funzione del redshift.	92
8.25 Andamento del punto zero della retta interpolatrice in funzione del redshift.	92
9.1 Profili di densità dei 17 aloni principali individuati nelle simulazioni.	94
9.2 Funzione di massa delle sottostrutture ricavata da diversi autori. I punti rappresentano la nostra SHMF, questi fanno riferimento ai subaloni nelle simulazioni SPH in cui i satelliti sono stati selezionati tra gli aloni che mergono con più di 100 particelle. Figura 1 di Van den Bosh, Tormen & Giocoli 2004 (MNRAS submitted).	96
9.3 Funzione di massa dei satelliti a $z = 0$. Le masse degli aloni ospiti sono in M_{200} e i satelliti non sono stati discriminati in base al numero di particelle contenute. I punti fanno riferimento a tre diversi intervalli in massa dell'alone ospite.	97
9.4 SHMF riscalata per unità di massa dell'alone ospite.	98
9.5 Frazione di satelliti in termini della loro massa.	99
9.6 (a) <i>A sinistra</i> : distribuzione dei pericentri delle orbite dei satelliti al momento del <i>merging</i> e a $z = 0$. (b) <i>A destra</i> : distribuzioni dell'eccentricità agli stessi redshift. Queste due grandezze vengono calcolate assumendo un potenziale sferico e statico, ipotesi poco valida nel caso di satelliti molto grandi e ad alti redshift. I valori fanno riferimento perciò a $z < z_{\text{form}}$ e per $m/M < 0.25$	100
9.7 Correlazione eccentricità e pericentro per i satelliti al momento dell'accrescimento, sempre nelle condizioni che non siano troppo massivi e che non vengano accresciuti ad alti redshift.	101
9.8 <i>Mergin rate</i> nel caso delle simulazioni N -body e SPH. N -body(*) indica il caso in cui i satelliti sono stati scelti con al più di 10 particelle.	102
9.9 Funzione di massa dei subaloni nelle simulazioni N -body e SPH. Si osserva una buona consistenza dei dati, e l'aumento della risoluzione in massa quando i satelliti vengono selezionati tra gli aloni che mergono con almeno dieci particelle.	103
9.10 Funzione di massa dei subaloni nei singoli ammassi.	103
9.11 Frazione di massa dell'alone parente che si trova in subaloni più massivi di m_{sub} . A destra la massa dei subaloni è stata divisa per la massa dell'alone ospite a 200 volte da densità critica.	104

9.12 Distribuzione cumulativa dei satelliti nelle nostre simulazioni confrontata con altri dati. La linea continua è la relazione trovata da Gao et al. 2004, le simulazioni usate sono le GIF2 del consorzio VIRGO. Coma, Virgo & Milky Way fanno riferimento a sistemi in simulazioni di dimensioni dell'ammasso della Coma, della Vergine e della Via Lattea fatti evolvere da Gigna et al. 1998 & 2000. Per i dati si ringrazia James Taylor. L'accordo con le altre simulazioni diventa tuttavia più stringente se si considerano "persi" i satelliti sotto $0.04 - 0.06R_{200}$ (figura in basso).	105
9.13 SHMF considerando satelliti a diverse distanze dal centro dell'alone parente.	106
9.14 Funzione di massa dei subaloni (SHMF) a diversi redshift.	107
9.15 Frazione di massa media mantenuta dal satellite a $z = 0$ in termini del redshift di accrescimento.	108
9.16 Frazione di massa media mantenuta dal satellite a $z = 0$ in termini del redshift di accrescimento. In questo caso sono stati riportati i valori per le simulazioni di sola materia oscura e con gas, si nota un buon accordo. La linea continua è un <i>fit</i> esponenziale che interpola abbastanza bene i punti.	108
9.17 Dipendenza radiale del redshift di accrescimento per tutti i satelliti presenti negli aloni parente a $z = 0$. In rosso la media, mentre in blu è riportata la mediana.	110
9.18 Dipendenza radiale della massa ritenuta a $z = 0$ rispetto alla massa di accrescimento per tutti i satelliti presenti nei progenitori principali. I colori sono come nella figura precedente.	110
10.1 Andamento di M_* in termini del redshift.	112
10.2 (a) <i>In alto</i> : M/M_* contro $\log(1+z)$ ricavato dalle ri-simulazioni di TMY 2004. (b) <i>In basso</i> : lo scatter della relazione che fitta ad occhio i punti.	113
10.3 (a) <i>In alto</i> : numero di aloni per unità di volume a $z = 0$ nell'intervallo di massa $M, M + dM$. Il numero di aloni in ogni <i>bin</i> è stato diviso per il volume totale della simulazione che è di $[141.3 h^{-1} \text{ Mpc}]^3$. (b) <i>In basso</i> : la fusione di massa non condizionale, in punti riproducono i dati della simulazione. La curva rossa è la Press & Schechter, quella nera è la Sheth & Tormen che si accorda meglio con i dati (come già mostrato in Sheth & Tormen 1999) poichè basata sul modello del collasso ellissoidale.	116

10.4	Frazione di aloni che si formano tra z e $z + dz$. Il redshift di formazione è stato ricavato interpolando con una crescita di massa lineare tra due snapshot successivi.	117
10.5	Mass Accretion History, in rosso è riportata quella ricavata da un <i>mergertree</i> Monte Carlo alla Somerville & Kolatt da Van den Bosch 2002, il redshift di accrescimento considerato è una media sui valori di tutti gli aloni con più di 200 particelle, la validità della relazione è sostenuta nel <i>range</i> di massa: $10^6 - 10^{16} M_{\odot} h^{-1}$. I punti indicano la MAH ricavata dalle simulazioni cosmologiche GIF mediando 4960 <i>mergertree</i> . L'individuazione degli aloni e la loro "storia" è stata fatta come in TMY.	118
10.6	Crescita di M/M_* in termini del redshift ricavata dalle simulazioni cosmologiche.	119
10.7	Andamento in termini di M/M_* dei parametri che fittano la relazione M/M_* vs $\log(1 + z)$	120
B.1	Tasso di perdita di massa dei satelliti rispetto al progenitore principale.	128
B.2	Residui della relazione lineare che interpola il tasso di perdita di massa.	128

Elenco delle tabelle

8.1	Proprietà delle costanti che caratterizzano l'universo utilizzate nelle simulazioni.	66
8.2	Proprietà dei <i>cluster</i> simulati a redshift zero.	69
8.3	Proprietà delle rette interpolanti i punti nelle figure 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.15.	84
8.4	Proprietà delle rette interpolanti i punti nelle figure 8.18, 8.19, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23.	84
10.1	Proprietà delle costanti che caratterizzano l'universo utilizzate nella simulazione cosmologica GIF.	114
A.1	Tabelle con le masse ricalcolate degli aloni ospiti: SPH. Le masse sono espresse in $M_{\odot} h^{-1}$, mentre i raggi in $\text{Mpc } h^{-1}$	124
A.2	Tabelle con le masse ricalcolate degli aloni ospiti: N-body. Le masse sono espresse come nella tabella precedente.	125

-> INDICE

Introduzione

I recenti studi sul fondo cosmico delle microonde, le osservazioni delle Supernovae ad alto redshift e le Survey di galassie hanno messo in evidenza che a dominare il contenuto dell'universo è un tipo di "materia" con equazione di stato uguale a quella del vuoto: la *Dark Energy*.

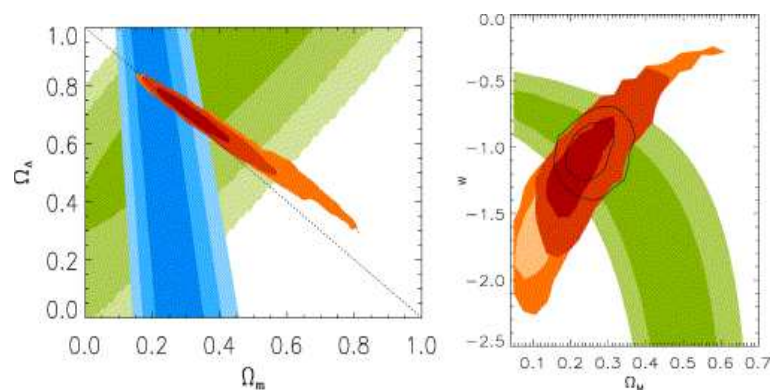


Figura 1.1: *A sinistra*: i contorni di massima-verosimiglianza in $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ per le osservazioni di WMAP, Survey di galassie e Supernovae. *A destra*: i contorni di verosimiglianza per la relazione $\Omega_w - w$.

Queste analisi osservative, e parallelamente altri studi teorici, hanno fatto strada ad un modello concordante di universo: quello Λ CDM ($\Omega_{\text{tot}} = \Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$).

Questo lavoro di tesi si propone di studiare in un “universo” simulato di tipo Λ CDM la formazione delle sottostrutture negli ammassi di galassie, come conseguenza dei fenomeni di *merging*. L'importanza delle sottostrutture da un punto di vista cosmologico è legata alla possibilità che ha la materia barionica di cadere in queste buche di potenziale, raffreddare e formare stelle.

Gli aloni di materia oscura sono i sistemi attorno ai quali le galassie e gli ammassi di galassie tendono a formarsi. Questi nascono come conseguenza delle instabilità gravitazionali del campo di densità medio, le quali collassano e virializzano. Le prime simulazioni N -body sostenevano che gli aloni di DM fossero omologhi in termini delle loro proprietà, nel senso che se opportunamente riscaldati queste risultavano indipendenti dalla massa, dalla forma dello spettro delle fluttuazioni primordiali, e dai parametri cosmologici. Per quanto riguarda le sottostrutture si pensava che potesse esserci una funzione di massa di tipo universale indipendente da M :

$$n(m|M)dm = n(m)dm .$$

In un modello di *clustering* gerarchico tuttavia gli aloni piccoli si formano prima, mentre i più massicci in seguito ad “incontri”. Le sottostrutture, soggette allo *stripping* mareale e alla frizione dinamica, tendono a perder massa e muoversi verso il centro. Gli aloni grandi avendo subito recenti fenomeni di *merging*, conservano perciò un maggior numero di subaloni rispetto a quelli piccoli.

Per quanto riguarda i profili, la distribuzione della materia oscura sembra seguire un andamento abbastanza generale, $\rho \propto r^{-3}$ a grandi raggi, e un appiattimento nel centro $\rho \propto r^{-\alpha}$ con $\alpha < 2$. In relazione a questo, come appena la densità cresce sistematicamente cresce anche il numero di subaloni.

Le dimensioni degli aloni individuali nelle simulazioni CDM crescono nel tempo, ed in media attraverso una serie di masse sempre più grandi. Questa evoluzione Lagrangiana della massa può essere caratterizzata dalla *Mass Accretion History*: $M(z)/M(0)$. In letteratura ci sono diversi modelli che descrivono l'andamento della massa di un progenitore principale in termini di z . Questi fanno tuttavia riferimento al modello Press & Schechter o EPS, in relazione alla definizione di tempi scala quali il redshift di formazione. Calibrare una relazione indipendente da modelli teorici per la MAH rappresenta il secondo obiettivo di questa tesi.

L'evoluzione delle sottostrutture è stata fatta utilizzando delle ri-simulazioni estratte da una grande simulazione cosmologica. Da questa sono state scelte particolari regioni contenenti uno o due aloni nel *range* di massa $3 \times 10^{14} - 1.7 \times 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$, e ri-simulate a più alta risoluzione con il *software* **ZIC**. Gli intervalli in redshift sono equispaziati su una scala logaritmica da 10 a 0 per un totale di 51 *snapshots*. Ad ogni *snapshot* sono stati individuati gli aloni utilizzando

il criterio della sovradensità sferica. A $z = 0$ sono stati selezionati 17 aloni massivi dei quali è stata seguita la *merging history tree*. I satelliti d'ammasso vengono individuati tra gli aloni che mergono con il progenitore principale e seguiti durante la loro evoluzione fino a che hanno delle particelle *self-bound*.

La calibrazione della MAH è stata fatta utilizzando la simulazione cosmologica GIF di sola materia oscura. Anche in questo caso gli aloni sono stati individuati con il criterio della sovradensità sferica. A $z = 0$ sono stati selezionati quelli con più di 200 particelle ed è stata seguita la loro "storia". Il *range* di massa corrispondente è: $2.82 \times 10^{12} - 9.82 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$.

La tesi è organizzata in maniera seguente:

- Nei primi capitoli si descrive la teoria che sta alla base della nostra conoscenza sugli ammassi di galassie e sui modelli cosmologici. In seguito si parlerà dei modelli analitici che descrivono le proprietà degli aloni di DM. Nel capitolo 7 verrà trattata l'utilità delle simulazioni e alcuni risultati riguardanti le proprietà degli ammassi di galassie.
- Nel capitolo 8 verrà affrontato l'argomento del *post-processing* della simulazione e l'evoluzione delle sottostrutture, e come queste vengono identificate tra gli aloni che mergono con il progenitore principale. Il loro stato iniziale (massa con cui accrescono, eccentricità e pericentro dell'orbita) rappresenta tuttavia un importante ingrediente per le ricette semi-analitiche, come anche il loro tasso di perdita di massa: tutto ciò è descritto e calibrato nello stesso capitolo e in quello successivo.
- La perdita di massa dei satelliti dipende anche dalla crescita dell'alone parente, la sua evoluzione temporale, riscalata in termini di M_* , sarà affrontata nel capitolo 10 e ne sarà data un'espressione analitica mediando la crescita di 4960 aloni di una simulazione cosmologica di sola materia oscura.

-> INDICE

Storia Termica dell'Universo

2.1 Materia barionica, materia oscura e radiazione

Lo studio della formazione ed evoluzione delle strutture su grande scala dell'universo si pone tra i primi obiettivi la ricerca del suo contenuto.

Secondo il modello standard dell'*Hot Big Bang* l'universo risulta omogeneo ed isotropo su grande scala al momento della ricombinazione, la sua evoluzione è governata dalle equazioni di **Friedmann** (equazioni 2.2) ricavate dalla relatività generale (equazione 2.1), i suoi principali costituenti possono essere descritti da un fluido di materia e uno di radiazione e le sue proprietà cinematiche (costante di **Hubble**) eguagliano quelle dell'universo che noi osserviamo.

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (2.1)$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right)a, \quad \dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (2.2)$$

Fino al disaccoppiamento, materia barionica e radiazione possono essere considerate in condizione di equilibrio l'una rispetto all'altra alla stessa temperatura, dopo le due componenti seguono una storia termica indipendente.

2.1.1 Storia Termica dell'universo

Nei primi istanti dell'universo, materia e radiazione scatterano a causa del fatto che il tempo medio di collisione è più piccolo del tempo caratteristico di espansione; il principale processo che domina gli urti tra queste due componenti è lo scattering Thomson tra fotoni ed elettroni.

Durante il periodo in cui la materia e la radiazione sono disaccoppiate, la temperatura della prima, T_m , evolve come quella di un gas in fase di espansione adiabatica, mentre quella della seconda, T_r , come quella di un gas di fotoni. Assumendo che l'universo sia principalmente costituito da idrogeno¹:

$$T_m = T_{0m}(1+z)^2, \quad (2.3)$$

considerando la relazione energia-densità e temperatura di corpo nero, per la radiazione si ha:

$$T_r = T_{0r}(1+z). \quad (2.4)$$

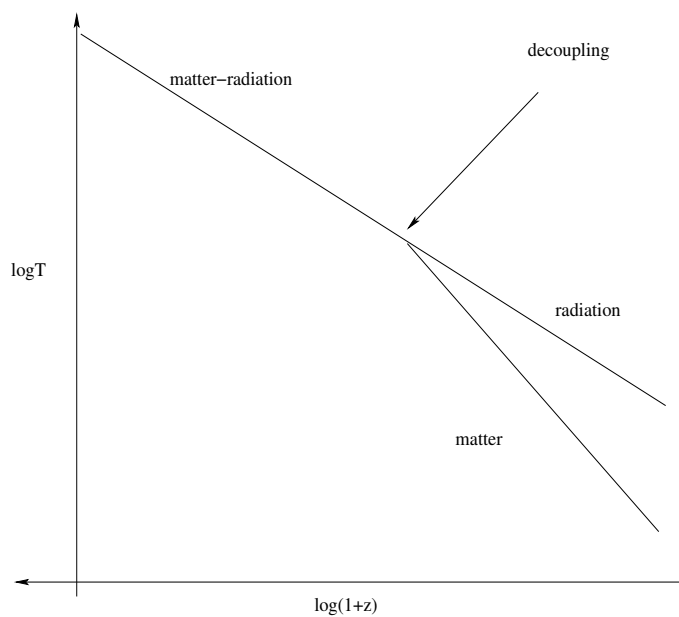


Figura 2.1: Storia termica dell'universo.

Se σ_c , sezione d'urto tra elettroni e fotoni, può essere considerata costante, il tempo medio di collisione τ_c scala come l'inverso della densità numerica degli atomi, quindi decresce con il

¹Il modello di nucleosintesi degli elementi assume che la formazione degli elementi leggeri inizi nell'epoca radiativa. La nucleosintesi degli elementi pesanti avviene nell'interno delle stelle le quali distruggono l'idrogeno al posto di produrlo.

redshift molto più rapidamente che il tempo scala caratteristico di espansione τ_H :

$$\begin{aligned}\tau_c &\propto \rho_m^{-1} \propto (1+z)^{-3} \\ \tau_H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{-1} \propto (1+z)^{-3/2}.\end{aligned}$$

Da queste equazioni si evince quanto già detto sopra, cioè che deve esistere un tempo t_d prima del quale lo scattering avviene su un tempo scala più piccolo di quello dell'espansione, causando così un forte accoppiamento tra materia e radiazione. A causa delle alte temperature la materia in questa fase è completamente ionizzata e il processo di scattering con i fotoni è guidato dalla sezione d'urto Thomson σ_T , che è maggiore di quella di un atomo di idrogeno neutro.

L'equazione che governa l'espansione adiabatica di un gas di materia e radiazione è:

$$d\left[\left(\rho_m c^2 + \frac{3\rho_m k_B T}{2m_p} + \sigma_r T^4\right)a^3\right] = -\left(\frac{\rho_m k_B T}{m_p} + \frac{\sigma_r T^4}{3}\right)da^3, \quad (2.5)$$

in cui si assume che la materia abbia equazione di stato di gas perfetto:

$$p = \frac{\rho_m k_B T}{m_p}.$$

Dato che $\rho_m a^3 = \text{const.}$, e posto:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{4m_p \sigma_r T^3}{3k_B \rho_m},$$

si può riscrivere l'equazione 2.5 come:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1 + \sigma_{\text{rad}}}{-\frac{1}{2} + \sigma_{\text{rad}}} \frac{da}{a}; \quad (2.6)$$

non integrabile analiticamente a causa della dipendenza di σ_{rad} da $T(a)$ non ancora nota. Tuttavia $\sigma_{\text{rad}}(T)$ non dipenda da a dopo il disaccoppiamento se consideriamo T come la temperatura della radiazione. Quindi $\sigma_{\text{rad}}(t) = \sigma_{\text{rad}}(t_0)$, che possiamo calcolare in termini dei presenti valori di densità di materia e temperatura di radiazione:

$$\sigma_{\text{rad}}(t_0) = \frac{4m_p \sigma_r T_{0r}^3}{3k_B \rho_{0m}} \simeq 1.35 \times 10^8 (\Omega_0 h^2)^{-1}.$$

A questo punto possiamo riscrivere l'equazione 2.6 come:

$$\frac{dT}{T} \simeq -\frac{da}{a} \Rightarrow T = T_0(1+z),$$

come se il raffreddamento fosse dominato dalla componente fotonica; questo perchè ad alte temperature la materia in condizioni relativistiche assume l'equazione di stato $p = \frac{1}{3}\rho c^2$.

²Nel caso di un universo piatto.

2.1.2 L'universo: omogeneità ed isotropia

Lo studio dell'universo su grande scala oggi si basa sul *Principio Cosmologico* secondo cui l'universo è spazialmente omogeneo ed isotropo "mediamente"³ su grande scala. Questo *Principio* è stato per Einstein un punto di partenza, non basato sulle osservazioni, per ricavare le equazioni del campo gravitazionale. A parte questo il *Principio Cosmologico* rappresenta oggi un vincolo di consistenza con le osservazioni, principalmente ad alti redshift.

La scoperta nel 1965 da parte di Penzias e Wilson della radiazione cosmica di fondo (CMB) ha rappresentato proprio il legame nascosto tra la conveniente ipotesi di Einstein e l'universo come noi lo vediamo. Il fondo cosmico delle microonde è quello che rimane della componente fotonica dopo il disaccoppiamento dalla materia. La completa isotropia, di una parte su 10^5 , una volta corretto il moto della Galassia, è la conferma che tale era lo stato dell'universo nei primi istanti di vita.

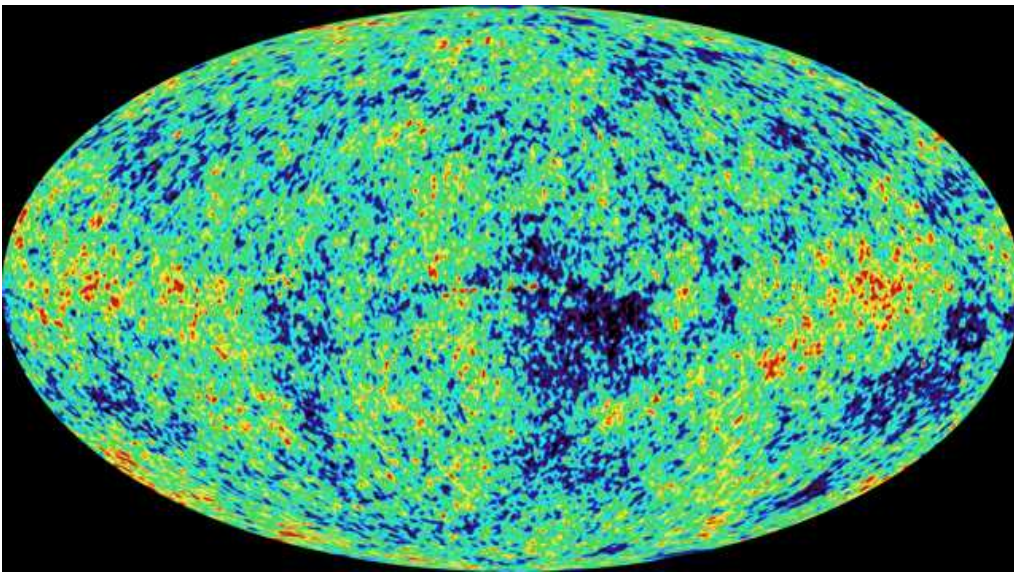


Figura 2.2: La mappa del CMB in figura è una combinazione lineare opportunamente pesata di cinque mappe in diverse frequenze fatte da WMAP. I pesi sono stati calcolati in modo da minimizzare il contributo dell'emissione galattica rispetto al segnale del cielo.

³L'avverbio "mediamente" risulta necessario in quanto è evidente la disomogeneità spaziale su scale anche molto grandi. Volgendo l'occhio al cielo risultano evidenti i primi addensamenti di materia come le stelle, poi le galassie e agli ammassi di galassie, che violano l'omogeneità spaziale raggiungibile solo su scale così grandi da poter trascurare queste disomogeneità, un po' come le catene montuose sono un'irregolarità locale trascurabile per chi studia la forma geometrica della Terra.

Componente di dipolo nel CMB

Come detto il moto della Galassia causa una prima anisotropia detta di dipolo: noi ci stiamo muovendo rispetto al sistema di riferimento in cui il CMB è "fermo". Quello che si verifica è un qualcosa di più complicato di un vero e proprio effetto Doppler, il quale provoca un aumento dell'energia dei fotoni visti nella direzione di moto relativo a quello di un osservatore statico in un fondo isotropo. In questo modo un intervallo $d\nu$ di frequenza subirà un aumento $(1 + \beta \cos \theta)$; ovviamente sulla temperatura l'effetto sarà nullo essendo espressa in unità di frequenza.

Se $I(\nu)$ rappresenta l'intensità del campo di radiazione per un osservatore in quiete rispetto al CMB, $I'(\nu')$ per un osservatore in movimento sarà:

$$I'(\nu') = I(\nu)(1 + \beta \cos \theta)^3. \quad (2.7)$$

Nell'equazione sopra un fattore $(1 + \beta \cos \theta)$ è dovuto al moto dell'osservatore e quindi ad una maggiore quantità di fotoni ricevuti, mentre $(1 + \beta \cos \theta)^2$ alla diminuzione dell'angolo solido sotteso e quindi ad un aumento di intensità. Considerando infine gli effetti relativistici, in prima approssimazione trascurabili dato $\beta \sim 10^{-3}$, abbiamo un andamento della temperatura dato dall'equazione:

$$T(\theta) = T_0(1 - \beta)^{1/2}(1 + \beta \cos \theta). \quad (2.8)$$

Assumendo che su grande scala l'universo risulta omogeneo ed isotropo, contenente semplici forme di materia, se il libero cammino medio delle particelle è minore del tempo scala di interesse fisico, il fluido può essere considerato come perfetto. In molti casi di interesse fisico è utile scrivere l'equazione di stato di un fluido nella forma:

$$p(\rho) = w\rho c^2, \quad \text{con}, \quad 0 \leq w \leq 1^4. \quad (2.9)$$

Tuttavia particolari equazioni di stato sono necessarie per poter descrivere la dinamica dell'universo su grande scala e la compatibilità con un modello inflazionario⁵.

2.1.3 Proprietà dell'universo

Le tecniche osservative oggi a disposizione permettono l'osservazione della materia in differenti condizioni di densità e temperatura a causa dell'emissione e dell'assorbimento nelle varie bande

⁴Intervallo di Zel'dovich.

⁵La necessità di una Dark Energy era già stata ipotizzata da Einstein con l'introduzione della costante cosmologica nell'equazione 2.1:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} + g_{ij}\Lambda$$

dello spettro elettro-magnetico.

La gravità anche può osservare la materia ma in un modo del tutto indipendente.

Questi due metodi portano però ad una diversa stima della densità totale della materia, la gravità è in grado di osservare più massa anche di un fattore dieci più grande rispetto a quella rilevabile in altra maniera.

Le prime evidenze dell'eccesso di materia gravitante rispetto a quella osservata vennero alla luce già nel 1933 grazie ai lavori di Fritz Zwicky. Il ricercatore svizzero si occupava in quegli anni, della misura della velocità radiale di sette galassie appartenenti all'ammasso della Coma. Zwicky aveva evidenziato che le galassie individualmente avevano una velocità radiale che differiva da quella media dell'ammasso con una dispersione di velocità di circa 700 km s^{-1} . Interpretando questa dispersione come una misura dell'energia cinetica per unità di massa della galassie d'ammasso e facendo una stima approssimativa del raggio del sistema, era stato in grado di misurare la massa totale dell'ammasso dal teorema dal viriale:

$$2T + W = 0, \quad W = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2.$$

Comparando il rapporto massa-luminosità dell'ammasso calcolato in questo modo e quello delle galassie vicine dalla loro curva di rotazione lui trovò che il primo superava il secondo di un fattore circa 400.

Altre evidenze della "materia mancante", ormai da diversi anni rinominata materia oscura (DM), vennero fuori negli anni successivi dallo studio della curva di rotazione delle galassie spirali (usando come traccianti la riga a 21 cm dell'idrogeno neutro) e della dispersione di velocità delle stelle nelle galassie ellittiche. Tutti e due questi sistemi anno messo in evidenza un grande rapporto massa-luminosità e quindi la presenza di una materia gravitante di origine "non comune".

L'universo risulta quindi essere caratterizzato da varie componenti di differente natura ogniuna con equazione di stato

$$p_i = w_i \rho_i c^2.$$

Definiamo Ω_{w_i} come parametro di densità della i -esima componente come:

$$\Omega_{w_i} = \frac{\rho_{w_i}}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.10)$$

con H costante di **Hubble**.

Il modello inflazionario, le osservazioni del CMB e lo studio della formazione delle strutture su grande scala fanno prediligere un universo piatto, cioè:

$$\Omega_{\text{tot}} = \sum_i \Omega_{w_i} \simeq 1.$$

Oltre a questo le osservazioni del CMB, come vedremo inseguito, e l'abbondanza del deuterio ci suggeriscono una stima di $\Omega_B \simeq 0.04$, assunto un valore della costante di **Hubble** oggi di circa $70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ $\Omega_{\text{stars}} \simeq 0.005$. Quindi scopo della cosmologia moderna è la soluzione del problema:

$$\Omega_{\text{tot}} - \Omega_B = ?$$

A questo punto la Dark Matter e la Dark Energy sono considerati elementi essenziali per la soluzione del problema della "materia mancante".

La natura della DM e della DE è diversa, basta considerare il fatto che la prima collassa su scala di qualche Mpc, mentre la seconda possiede una pressione molto negativa.

Oggi giorno ci sono forti evidenze per credere che:

$$\Omega_{\text{matter}} = \Omega_B + \Omega_{\text{DM}} \simeq 1/3, \quad \Omega_{\text{DE}} \simeq 2/3.$$

Hot DM & Cold DM

Le strutture che si osservano su grande e su piccola scala nell'universo in cui viviamo si formano come conseguenza di instabilità gravitazionale. Il fatto che solo il 4% della densità cosmica sia di natura barionica suggerisce che la DM che noi osserviamo sia di natura non barionica. La necessità di una forma di materia di origine non barionica presenta un supporto indiretto dal fatto che i modelli barionici trovano difficoltà nel permettere la crescita delle strutture da piccole condizioni iniziali e quindi di riconciliare l'esistenza di una ben sviluppata rete di filamenti e di strutture come osservata alla presente epoca. Le osservazioni di **COBE**, e ultimamente di **WMAP**, delle fluttuazioni di densità sul fondo cosmico delle microonde hanno evidenziato al momento del disaccoppiamento materia-radiazione

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(z_{\text{dec}}) \sim 10^{-5}.$$

In un universo dominato da barioni le strutture sarebbero in grado di crescere solo dopo la ricombinazione a causa della grande pressione di radiazione. Un valore $\delta > 1$ oggi richiederebbe tuttavia alla ricombinazione $\delta > 10^{-3}$, ovviamente in disaccordo con le osservazioni del CMB almeno di due ordini di grandezza.

In un modello dominato da materia non barionica, l'assenza di un accoppiamento tra DM e radiazione permetterebbe alle strutture di crescere anche prima che l'idrogeno nell'universo si sia ricombinato. In questo contesto, dopo la ricombinazione i barioni cadrebbero nelle buche di potenziale create dalla componente di materia non barionica dominante. Quindi un universo con una sostanziale componente non barionica può dare origine alle strutture che vediamo oggi dalle piccole fluttuazioni iniziali.

Tuttavia la crescita delle strutture via instabilità gravitazionale dipende sia dalla natura delle perturbazioni primordiali sia dal fatto che la materia oscura può essere fredda (Cold: CDM) o calda (Hot: HDM), queste due definizioni dipendono dallo suo stato al momento del disaccoppiamento con la radiazione.

Sia a_{NR} l'epoca in cui la velocità tipica delle particelle di materia oscura diventa non-relativistica, e a_{DX} l'epoca in cui la materia oscura X si disaccoppia dal resto della materia e della radiazione dell'universo. L'epoca di de-relativizzazione dipende essenzialmente dalla massa delle particelle poiché questa avviene nel momento in cui la temperatura dell'universo è uguale all'energia a riposo delle particelle:

$$k_B T(a_{NR;X}) \approx m_X c^2, \quad (2.11)$$

poiché la temperatura dell'universo diminuisce con il tempo, le particelle pesanti si de-relativizzano prima di quelle leggere.

In relazione a quanto espresso nell'equazione 2.11 ci sono due ovvi casi:

- la massa m_X è abbastanza piccola da permettere alla DM di disaccoppiarsi quando è ancora relativistica: $a_{DX} < a_{NR} \Rightarrow$ HDM;
- m_X è più grande quindi la materia prima si de-relativizza e poi si disaccoppia: $a_{DX} > a_{NR} \Rightarrow$ CDM.

In relazione a questi due differenti situazioni la materia ancora relativistica al disaccoppiamento risulterebbe caratterizzata da una grande dispersione di velocità, mentre la metria non-relativistica a quest'epoca presenterebbe un più piccolo valore della dispersione di velocità.

Su grande scala e nella sua globalità l'universo viene considerato come un fluido perfetto (omogeneo ed isotropo), d'altra parte su piccola scala non possiamo trascurare i fenomeni della microfisica che influenzano il comportamento delle fluttuazioni. Nel caso della materia oscura la dissipazione va sotto il nome di *free streaming*; in particolare ciò che avviene è che le particelle di DM si diffondono da regioni sovradense a regioni sottodense livellando le disomogeneità δ del campo di densità. Questo effetto introduce un'importante lunghezza di scala detta "distanza di *free streaming*":

$$\lambda_{FS}(t) = a(t) \int_0^t \frac{v(t')}{a(t')} dt', \quad (2.12)$$

e una corrispondente massa:

$$M_{FS} \propto \lambda_{FS}^3 \rho_{DM}. \quad (2.13)$$

Nei due scenari di Hot e Cold DM lo spettro finale delle fluttuazioni di densità sarà diverso da quello iniziale, e diverso nei due casi⁶. Nel caso della HDM le differenze nascono perchè su scala più piccola di λ_{FS} vengono cancellate a causa di questo processo con il risultato che lo spettro finale processato abbia un ben definito cut-off su scala $\lambda \sim \lambda_{FS}$. Per quanto riguarda le particelle candidate per questa componente "Calda" i neutrini massivi sono tra i principali candidati, $m_\nu \approx 30$ eV. In questo caso $\lambda_{FS} \simeq 41(30 \text{ eV}/m_\nu)$ Mpc con il risultato che grandi *proto-pancakes*, con una massa comparabile con quella presente in ricchi ammassi di galassie $M \sim 10^{15} M_\odot$, sono i primi oggetti a formarsi. I piccoli oggetti si formerebbero come deframmentazione di questi *proto-pancakes*: scenario *top-down*. Tuttavia questo rende molto difficile la formazione di strutture in epoca remota per spiegare la presenza di galassie e QSO's ad alti redshifts.

In contrasto alla HDM, la CDM ha una scala di *free streaming* più piccola, quindi per questo le piccole scale sono le prime a diventare non-lineari e il processo di clustering gravitazionale procede in maniera *bottom-up*.

Il modello inflazionario, evocato per risolvere problemi come la piatezza e l'orizzonte cosmologico, predice $P_i(k) \propto k^n$, con $k \simeq 1$, nei primi istanti. Proporzionalmente con il tempo cresce anche il raggio di **Hubble** R_H :

$$R_H = a(t) \int_0^t \frac{c dt'}{a(t')}, \quad (2.14)$$

questo fa entrare in contatto causale perturbazioni su scala sempre maggiore e permette ai vari processi microfisici di iniziare ad operare su tali scale. Sono proprio questi che portano ad una modifica dello spettro primordiale in modo che dipenda dal tipo di processo, e quindi dal tipo di particelle e di perturbazioni dell'universo.

Se consideriamo il caso di un universo dominato da CDM, per cui i neutralini sono tra i possibili candidati con $m_p \approx 100$ GeV, la loro velocità tipica non è relativistica e la massa di **Jeans**⁷ è trascurabile ($M_J \ll M_{H,eq}$); anche il valore della massa di *free streaming*, sotto cui si cancellano le perturbazioni, risulta estremamente piccolo. La modifica globale di $P(k)$ si può scrivere in modo sintetico e parametrico introducendo una funzione $T(k)$ detta di trasferimento. Questa ci dice quanta parte della fluttuazione primordiale $\delta(k)$ sopravvive

⁶Lo spettro di potenza delle perturbazioni di densità è definito come: $P(k) \equiv |\delta_k^2|$, legato allo scarto quadratico medio delle fluttuazioni di densità dalla relazione:

$$\left\langle \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)^2 \right\rangle = 4\pi \int_0^\infty P(k) k^2 dk$$

⁷Di cui si parlerà di seguito.

indenne alla microfisica:

$$T(k, z_{\text{fin}}) \equiv \frac{\delta(k, z_{\text{fin}})}{\delta(k, z_{\text{in}})} \frac{D(z_{\text{in}})}{D(z_{\text{fin}})}, \quad (2.15)$$

in cui $D(t)$ rappresenta il fattore di crescita lineare delle perturbazioni;

$$P_{\text{fin}}(k) = P_{\text{in}} T^2(k, z_{\text{fin}}) \left[\frac{D(z_{\text{fin}})}{D(z_{\text{in}})} \right]^2 = k^n T^2(k) \left[\frac{D(z_{\text{fin}})}{D(z_{\text{in}})} \right]^2. \quad (2.16)$$

Le equazioni 2.15 e 2.16 illustrano il “turn around” dello spettro di potenza dalla sua forma iniziale “scale invariant” $P(k) \propto k$ su grandi scale, alla sua forma finale $P(k) \propto k^{-3} \log^2 k$ su piccole scale.

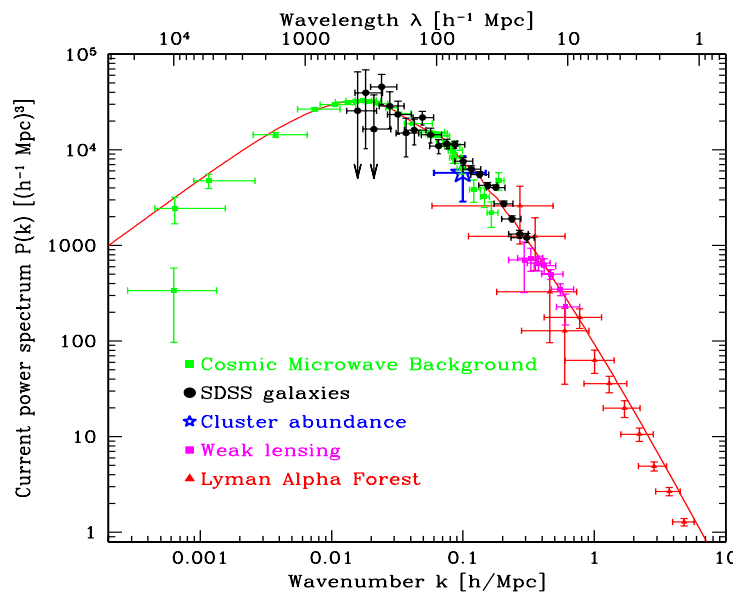


Figura 2.3: Spettro di potenza misurato da diversi esperimenti.

Il modello standar della CDM (SCDM) è stato introdotto nel 1980, in cui si assume che $\Omega_m = 1$, allo stesso momento in cui il modello della HDM cominciava a vacillare. Il modello SCDM è stato abbastanza soddisfacente nello spiegare una grande mole di dati osservativi, ma tuttavia era già stato evidenziato da diversi anni il fatto che mancava di una sufficiente potenza su grande scala e non riusciva a spiegare la funzione di correlazione a due punti per le galassie su scale dell'ordine di 50 Mpc.

Il modello cosmologico oggi accettato, succeduto al SCDM, è quello Λ CDM in cui si assume che l'universo oltre che costituito da una componente di materia oscura fredda, sia caratterizzato da una componente diffusa con una grande pressione negativa: “ Λ -term” o Dark Energy (DE).

In questo contesto il valore della costante di **Hubble** adimensionale h sarebbe 0.7.

Dalle equazioni 2.15 e 2.16 si può ricavare anche una importante relazione:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \sim k^3 P_{\text{fin}}(k) \propto \log^2 k, \quad (2.17)$$

cioè che le piccole scale sono le prime a diventare non lineari. In questo contesto c'è anche abbastanza potenza per guidare l'instabilità gravitazionale rapidamente anche su grande scala, come si osserva nelle simulazioni N -body sottoforma di una rete cosmica di filamenti.

Costante Cosmologica: Λ

I recenti studi osservativi dell'universo su grande scala (WMAP, Supernovae & Survey di galassie) hanno messo in evidenza che l'universo ha un contenuto di "materia" tale da renderlo piatto: $\Omega_{\text{tot}} = 1$. Queste osservazioni indicano anche che il contributo principale a Ω_{tot} viene da una forma di materia che ha la possibilità di avere una pressione ed una densità uguale a quella dello spazio "vuoto". Il primo a credere nella necessità di questo termine da aggiungere nell'equazione 2.1 fu proprio Einstein in base alla necessità di avere un sistema di relazioni che descrivessero un universo statico. Lo scienziato tedesco fu anche il primo a dire di aver commesso un grande errore nell'aggiungere la costante cosmologica quando è stata scoperta l'espansione dell'universo. Tuttavia oggi questa forma di "materia" è proprio quella necessaria per spiegare alcuni dati osservativi e per risolvere il rompicapo:

$$\Omega_{\text{tot}} - \Omega_{\text{DM}} = ? ;$$

il ruolo di Λ è quindi di accordare teoria e osservazione.

L'equazione di stato della Costante Cosmologica è di tipo:

$$p = w\rho c^2, \quad (2.18)$$

con w parametro che descrive il rapporto tra la pressione e la densità di energia e deve essere negativa tale da determinare oggi un'accelerazione dell'universo. Nel caso di un universo Λ CDM vale $w = -1$.

Ricapitolando:

- l'universo è costituito per il 70% da Energia Oscura o Costante cosmologica. Le recenti osservazioni di WMAP e della supernove indicano che stiamo vivendo in una fase di rapida espansione;

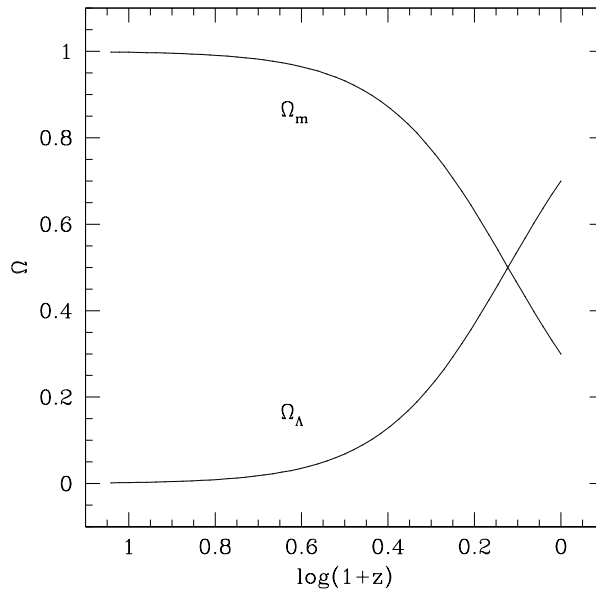


Figura 2.4: Andamento di Ω_m e Ω_Λ per un universo Λ CDM. L'intervallo in redshift si estende fino a $z = 10$ valore massimo di interesse per le simulazioni usate in questo lavoro di tesi.

- la materia che maggiormente lo caratterizza è di tipo *oscura fredda non barionica* (CDM). I barioni sono presenti in un ammontare compatibile con quello predetto dal modello di Nucleosintesi del Big Bang: $0.01 \lesssim \Omega_B h^{-2} \lesssim 0.032$;
- alla ricombinazione ($z \sim 1000$) l'universo è ben descritto dalla metrica di Robertson-Walker. Piccole deviazioni dalla condizione di omogeneità ed isotropia $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ sono state prodotte dalle fluttuazioni quantistiche amplificate durante l'era inflazionaria;
- il modello di universo inflazionario ci fa preferire un universo in cui il parametro totale di densità è prossimo all'unità: $\Omega_{\text{tot}} \simeq 1$;
- le strutture cosmiche si formano come conseguenza di *instabilità gravitazionale*. La DM guida questo processo e i primi sistemi in equilibrio che si formano sono gli *aloni di materia oscura*;
- le galassie si formano in seguito, quando la materia barionica sente la gravità degli aloni di materia oscura e cade nelle loro buche di potenziale (*formazione di galassie*);
- il processo di formazione delle strutture è di tipo *gerarchico*, si formano quindi prima i sistemi piccoli e poi quello più grandi.

[-> INDICE](#)

Instabilità gravitazionale: Teoria di Jeans

3.1 Equazioni di un fluido perfetto: universo statico

Nel considerare l'universo su grande scala bisogna ritornare a pensarlo come un fluido perfetto per il quale, le equazioni che legano i campi di densità, velocità, pressione ed entropia, possono porsi nella forma:

- **equazione di continuità:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0; \quad (3.1)$$

- **equazione di Eulero:**

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \phi; \quad (3.2)$$

- **equazione di Poisson:**

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho; \quad (3.3)$$

- **equazione di stato del fluido:**

$$p = p(\rho, S); \quad (3.4)$$

- equazione che descrive lo stato temporale dell'entropia:

$$\frac{dS}{dt} = 0^1. \quad (3.5)$$

Il sistema di equazioni appena scritto ammette soluzioni imperturbate, cioè un universo *statico, omogeneo ed isotropo*:

$$\rho = \rho_b$$

$$p = p_b$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\phi = \phi_b$$

$$S = S_b$$

dove i termini a sinistra sono tutti costanti.

Tuttavia questa soluzione non è consistente con la realtà in quanto una distribuzione infinita ed omogenea di densità non ammette soluzioni statiche. Possiamo però usare le soluzioni imperturbate per studiare l'esistenza di campi che presentano piccole perturbazioni intorno a queste:

$$\rho = \rho_b + \delta\rho$$

$$p = p_b + \delta p$$

$$v = \delta v$$

$$\phi = \phi_b + \delta\phi$$

Con la fluttuazione di densità data dall'espressione:

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{r}, t) - \rho_b}{\rho_b} = \frac{\delta\rho(\vec{r}, t)}{\rho_b} \ll 1. \quad (3.6)$$

Sostituendo queste soluzioni nel sistema precedente, trascurando i termini del secondo ordine e sottraendo le soluzioni imperturbate, si ottengono le seguenti equazioni per i campi di densità, velocità e gravitazionale:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho_b \vec{\nabla} \delta\vec{v} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} = -\frac{v_s^2}{\rho_b} \vec{\nabla} \delta\phi, \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \quad (3.9)$$

¹Questa scelta di sistema adiabatico oltre a semplificare i calcoli, si accorda sufficientemente con i dati osservativi.

Nelle equazioni sopra compare il termine v_s , che rappresenta la velocità del suono nel fluido, data dall'equazione:

$$v_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Rightarrow \delta p = v_s^2 \delta \rho \quad (3.10)$$

Cercando soluzioni che siano onde piane per le perturbazioni, cioè:

$$\delta \rho(\vec{r}, t) = \delta \rho_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$$

$$\delta \vec{v}(\vec{r}, t) = \delta \vec{v}_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$$

$$\delta \phi(\vec{r}, t) = \delta \phi_k \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t)$$

e passando nello spazio di **Fourier** il sistema, che nello spazio delle configurazioni era di equazioni differenziali lineari in δ , $\delta \vec{v}$ e $\delta \phi$, diventa di equazioni algebriche nei coefficienti ω e k . Sostituendo le soluzioni di **Fourier** nelle equazioni di **Continuità**, **Poisson** e **Eulero** si ottiene la *relazione di dispersione del sistema*:

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_b. \quad (3.11)$$

Dalla relazione 3.11 ponendo $\omega^2 = 0$ si può definire il numero d'onda di **Jeans** e la corrispondente lunghezza d'onda, quindi:

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_b}{v_s^2}}, \quad \lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G \rho_b}}. \quad (3.12)$$

Questi valori permettono di discriminare due soluzioni:

- per $\lambda < \lambda_J$:

$$\omega = \pm k v_s \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$\delta \rho$ è rappresentata da una coppia di onde sonore progressive di ampiezza costante che si propagano nelle direzioni $\pm k$ con velocità di fase data dalla relazione:

$$c_s = v_s \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

- con $\lambda > \lambda_J$:

$$\omega = \pm i (4\pi G \rho_b)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.13)$$

in questo caso l'onda non si propaga ma è stazionaria ed è del tipo:

$$\delta \rho(\vec{r}, t) = \delta \rho_k \exp(\pm |\omega| t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (3.14)$$

E' proprio questa equazione che descrive il fenomeno dell'*instabilità gravitazionale*: la ampiezza della perturbazione cresce nel tempo in modo esponenziale.

Il tempo scala caratteristico è dato da:

$$\tau = \frac{1}{|\omega|} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_b}} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_J} \right)^2 \right]^{-1/2}; \quad (3.15)$$

nel limite $\lambda \gg \lambda_J$ il tempo di crescita tende al tempo di caduta (*free fall*):

$$\tau \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho_b}},$$

e nel limite di $\lambda \rightarrow \lambda_J \Rightarrow \tau \rightarrow +\infty$.

Quanto detto fino ad ora non tiene conto dell'espansione dell'universo ma è valido per condizioni statiche e per un fluido collisionale. La conoscenza della presenza della DM e la sua necessità hanno imposto delle condizioni sul suo comportamento; oggi si ritiene che la materia oscura sia un fluido di particelle non-barioniche e non-collisionale. Non-barioniche in quanto il loro ammontare non è predetto dal Modello Standard di Nucleosintesi, ma da qualche teoria supersimmetrica, e non-collisionale per essere compatibile con il fatto che non emette radiazione e collassa subito su piccola scala anche quando le fluttuazioni di densità sono di una parte su 10^5 .

3.1.1 Fluido non-collisionale

Per estendere l'analisi dell'*instabilità gravitazionale* di **Jeans** ad un gas di particelle non collisionale bisogna considerare il fatto che assenza di collisioni implica mancanza di pressione. Un fluido non collisionale non presenterà in un punto una certa velocità (fluido ideale) ma si assume che vi sia una distribuzione casuale di velocità, in prima approssimazione isotropa. Tuttavia anche per un sistema collisionale di particelle è possibile avere una pressione trascurabile, questo si verifica quando questo è estremamente freddo da poter considerare laminare il flusso delle particelle.

Come si vede anche dalla figura, in regime laminare le particelle si muovono lungo traiettorie parallele e non le attraversano mai. Nel caso di un fluido non-collisionale le equazioni di **Continuità** e di **Eulero** vengono rimpiazzate dall'equazione di **Liouville**:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot f \vec{v} + \vec{\nabla}_v \cdot f \dot{\vec{v}} = 0, \quad (3.16)$$

dove $\vec{\nabla} = \partial/\partial \vec{r}$ e $\vec{\nabla}_v = \partial/\partial \vec{v}$.

La $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r}d\vec{v}$ rappresenta la funzione di distribuzione nello spazio delle fasi per le particelle,

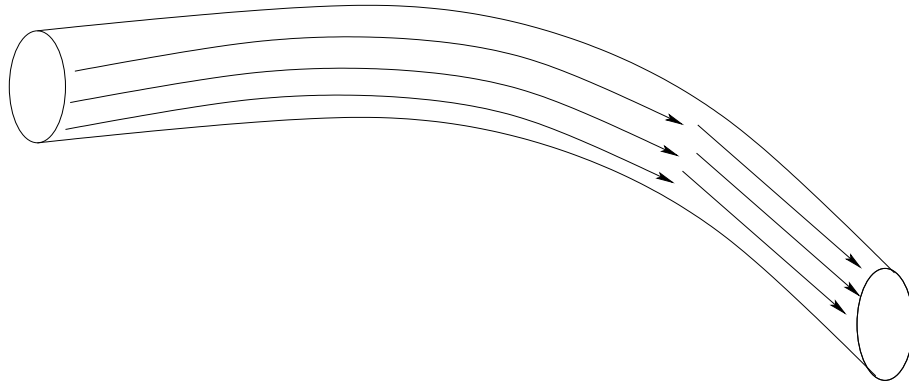


Figura 3.1: Esempio di flusso laminare.

cioè quante di queste nel volume tra \vec{r} , $\vec{r} + d\vec{r}$ hanno velocità compresa tra \vec{v} , $\vec{v} + d\vec{v}$.

Nel caso di una distribuzione stazionaria, omogenea ed isotropa si dimostra che la funzione di distribuzione dipende solo da v^2 , in particolare nel caso *Maxwelliano* si ha:

$$f(v) = \frac{\rho}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.17)$$

con

$$\sigma^{-2} = \frac{\int v^{-2} f d^3v}{\int f d^3v}.$$

Anche in questo caso vale l'equazione 3.9, con la condizione però che:

$$\delta\rho = m \int \delta f d\vec{v},$$

dove δf è la perturbazione della funzione di distribuzione. Per cui, l'equazione di **Liouville** diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta f + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \delta f - \vec{\nabla} \delta\phi \cdot \vec{\nabla}_v f = 0. \quad (3.18)$$

Analogamente a quanto fatto in precedenza per ricavare la *relazione di dispersione del sistema* si cercano per δf , $\delta\phi$ e $\delta\rho$ soluzioni in termini di onde piane, con il risultato:

$$k - 4\pi Gm \int \frac{v_x}{\omega - kv_x} \frac{df}{dv^2} d\vec{v} = 0^2 \quad (3.19)$$

Cercando soluzione per $k \rightarrow 0$ si può sviluppare in serie la *relazione di dispersione* in termini di kv_x/ω , infine trascurando i termini che si annullano per simmetria si ha:

$$\omega^2 \simeq 4\pi G\rho, \quad \rho = m \int f d\vec{v}, \quad \lambda_J = \sigma \left(\frac{\pi}{G\rho}\right)^{1/2} \quad (3.20)$$

²In cui si è preso come direzione del vettore d'onda l'asse delle ascisse.

Questo mostra che esiste un'instabilità gravitazionale con un tempo scala caratteristico dato dalla relazione:

$$\tau \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}}$$

identico al caso di un fluido collisionale per $\lambda \gg \lambda_J$.

Nel caso di $\lambda < \lambda_J$ la trattazione deve tener conto anche del processo di *free streaming* che è in grado di cancellare tutte le fluttuazioni al di sotto di una certa scala. In questo caso c'è una rapida dissipazione delle fluttuazioni su scala λ in un tempo dell'ordine di $\tau \simeq \lambda/\sigma$.

3.2 Universo in espansione: trattazione Newtoniana

Una trattazione generale e completa dell'evoluzione lineare delle perturbazioni in un universo in espansione richiede l'uso della Relatività Generale. Esistono tuttavia regimi spaziali e temporali in cui una semplice trattazione Newtoniana è sufficiente, in particolare:

- quando si considera l'evoluzione di una specie non relativistica;
- su scale minori dell'orizzonte cosmologico.

In questa trattazione chiamiamo \vec{r} la coordinata fisica e \vec{x} quella comovente, queste sono legate dalla relazione $\vec{r} = a\vec{x}$ dove a è il fattore di espansione. Le derivate temporali di \vec{r} e \vec{x} sono invece legate dalla relazione:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}} = H\vec{r} + \vec{v} = \vec{u}. \quad (3.21)$$

La velocità \vec{u} di un elemento di fluido è quindi la somma di due termini:

- $H\vec{r}$ velocità causata dall'espansione dell'universo (flusso di **Hubble**),
- \vec{v} velocità intrinseca del fluido dovuta alla mutua attrazione della materia detta *velocità peculiare*.

Le equazioni del fluido nel sistema di riferimento proprio (fisico) sono:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_r + \vec{\nabla}_r(\rho\vec{u}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_r + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_r p - \vec{\nabla}_r \phi, \quad (3.23)$$

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (3.24)$$

Consideriamo ora il caso di interesse in cui i campi sono la somma di una soluzione imperturbata e di una di cui si vuol considerare l'evoluzione lineare:

$$\rho = \rho_b(1 + \delta)$$

$$\vec{u} = H\vec{r} + \vec{v}$$

$$p = p_b + \delta p$$

$$\phi = \phi_b + \phi$$

Per ricavare l'equazione che descrive l'evoluzione delle perturbazioni di densità bisogna:

- inserire i campi di interesse nelle equazioni che descrivono lo stato del fluido,
- sviluppare i termini, sottrarre le equazioni corrispondenti alla soluzione imperturbata e mettersi nel regime lineare,
- passare al sistema di riferimento comovente,
- passare nello spazio di **Fourier** per cercare le soluzioni in termini di onde piane;

per avere infine:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k \left[\frac{k^2 v_s^2}{a^2 - 4\pi G \rho_b} \right]. \quad (3.25)$$

L'equazione 3.25 svolge a questo punto un importante ruolo, permette cioè di ricavare il comportamento delle varie componenti entro l'orizzonte su diverse scale temporali.

Universo di materia con $\Omega = 1$: $\delta_m, \lambda < R_H$ e $t > t_{eq}$

Le dipendenze temporali di a e ρ_b nel caso di un universo **Einstein-de Sitter** sono:

$$\rho_b(t) = \frac{1}{6\pi G t^2}$$

$$a(t) = a_0 \left[\frac{3H_0 t}{2} \right]^{2/3}.$$

Sostituendo gli andamenti nell'equazione 3.25 si ha:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k + \frac{2}{3t^2}\delta_k \left(\frac{k^2 v_s^2}{4\pi G \rho_b} - 1 \right) = 0, \quad (3.26)$$

con k numero d'onda fisico. Anche in questo caso, cercando le soluzioni dell'equazione differenziale, possiamo discriminare due differenti regimi, cioè:

- per $\lambda < \lambda_J$ le soluzioni sono immaginarie e corrispondono ad onde acustiche progressive:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto t^{-1/6} \exp \left[i\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \frac{5i}{6} \ln t \sqrt{\left(\frac{\lambda_J}{\lambda}\right)^2 - 1} \right]; \quad (3.27)$$

- se invece $\lambda > \lambda_J$ si hanno soluzioni reali e si ha il fenomeno dell'*instabilità gravitazionale*:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) t^{\left[\frac{-1 \pm \sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2}}{6} \right]}, \quad (3.28)$$

in questo caso nel limite di $\lambda \gg \lambda_J$, cioè di pressione trascurabile rispetto alla gravità, le soluzioni si semplificano di molto e diventano:

$$\delta_{\pm}(\vec{x}, t) \propto \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) t^{\frac{-1 \pm 5}{6}}. \quad (3.29)$$

Delle due soluzioni tuttavia quella interessante è quella che determina la crescita delle fluttuazioni con il tempo, cioè quella crescente:

$$\delta_+(t) \propto t^{2/3} \propto a.$$

E' importante tener presente che questo risultato è valido sia per universi dominati da barioni che da materia oscura non collisionale, quello che cambia è la diversa interpretazione della velocità del suono, quindi di pressione, che entra nell'equazione di **Jeans**.

Universo di radiazione: δ_R , $\lambda < R_H$ e $t < t_{eq}$

La relazione 3.25 in questo caso non può essere utilizzata, dovendo trattare l'evoluzione di una specie relativistica. Tuttavia dalla Relatività Generale se ne può ricavare una corrispondente che è:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + \delta_k \left(k^2 v_s^2 - \frac{32}{3} \pi G \rho_b \right) = 0, \quad (3.30)$$

dove k è il numero d'onda fisico.

Considerato, come fatto in precedenza, l'andamento di ρ_B e a in funzione del tempo, l'equazione diventa:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{\dot{\delta}_k}{t} + \delta_k \left(k^2 v_s^2 - \frac{1}{t^2} \right) = 0.$$

Si cercano ora soluzioni del tipo $\delta_k(t) = t^\alpha$. Sostituendo nell'espressione si ricava:

$$\alpha^2 = 1 - \frac{3k v_s^2}{32\pi G \rho_b(t)},$$

e discriminando i due regimi (crescente e decrescente) per cui $\alpha^2 = 0$ si ottiene la scala di **Jeans** come:

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{3v_s^2\pi}{8G\rho_b(t)}} = 2ct\frac{\pi}{\sqrt{3}}; \quad (3.31)$$

dove l'ultima relazione è stata ottenuta dalla definizione di velocità del suono per la radiazione. Il regime di *instabilità gravitazionale* corrispondente ad una soluzione reale è:

$$\delta(\vec{x}, t) \propto t^{\pm\alpha} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (3.32)$$

mentre il regime di *oscillazione acustica* corrispondente ad una soluzione immaginaria è:

$$\delta(\vec{x}, t) \propto t^{\pm i\alpha} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (3.33)$$

Visto dalla 2.14 che la scala dell'orizzonte prima dall'equivalenza è minore della scala di **Jeans**, su questo regime temporale per la radiazione non esiste *instabilità gravitazionale*. Fisicamente l'assenza di una scala, entro l'orizzonte, su cui la radiazione può collassare è dovuta al fatto che la velocità del suono è prossima a quella della luce, quindi la pressione è estremamente efficiente nel cancellare tutte le perturbazioni di densità: l'universo può considerarsi con buona approssimazione imperturbato, $\langle \delta_R(\vec{x}) \rangle = 0$.

Universo: $\delta_{DM}, \lambda_{J,DM} < \lambda < R_H$ e $t < t_{eq}$

Per considerare l'evoluzione della materia oscura sopra la scala di **Jeans**, sempre dentro l'orizzonte, bisogna fare delle modifiche all'equazione 3.25 valida per una sola componente dominante. L'evoluzione di una componente non relativistica sarà sempre nella forma della 3.25 ma nel termine di sorgente del campo gravitazionale bisogna considerare tutte le componenti, nel termine di pressione va usata la velocità del suono o la dispersione di velocità della componente di cui si vuol trattare l'evoluzione:

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,DM} + k^2v_s^2\delta_{k,DM} - 4\pi G \sum_i \rho_{B,i}\delta_{k,i} = 0. \quad (3.34)$$

Potendo trascurare il contributo della pressione su scala $\lambda > \lambda_J$ per la materia oscura e $\langle \delta_R(\vec{x}) \rangle = 0$, l'equazione diventa:

$$\ddot{\delta}_{k,DM} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,DM} - 4\pi G\rho_{DM}\delta_{k,DM} = 0. \quad (3.35)$$

Tenuto conto degli andamenti di δ_{DM} e di δ_R in funzione di a , delle equazioni di **Friedmann** e definita $\xi = a/a_{eq}$ la 3.35 diventa:

$$\delta_k'' + \frac{2+3\xi}{2\xi(1+\xi)}\delta_k' - \frac{3}{2\xi(1+\xi)}\delta_k = 0, \quad (3.36)$$

dove ' indica la derivata rispetto a ξ , con soluzione:

$$\delta_{k,DM+} = 1 + \frac{3}{2}\xi, \quad (3.37)$$

cioé:

$$\delta_{k,DM+}(a < a_{\text{eq}}) \propto 1 + \frac{3}{2} \frac{a}{a_{\text{eq}}}.$$

Questa relazione mostra che le fluttuazioni di DM prima dell'equivalenza non crescono dentro l'orizzonte: effetto **Meszaros** o di *stagnazione* delle perturbazioni di materia oscura:

$$\frac{\delta(a_{\text{eq}})}{\delta(a_{\text{H}})} = \frac{1 + 3/2}{1 + 3a_{\text{H}}/2a_{\text{eq}}} \leq \frac{5}{2}. \quad (3.38)$$

Fisicamente è il termine $2\dot{a}/a$ inibisce la crescita delle perturbazioni di DM; in questo caso ossunto anche che $\rho_{\text{R}} > \rho_{\text{DM}}$, $\delta_{k,DM}$ non riescono a crescere in un tempo di **Hubble** in quanto $\tau_{\text{f}} > \tau_{\text{H}}$.

Universo: $\delta_{\text{B}}, \lambda_{\text{J},DM} < \lambda < R_{\text{H}}$ e $t < t_{\text{dis}}$

La trattazione dell'evoluzione temporale fino ad ora ha messo in evidenza che le perturbazioni di materia oscura crescono dopo l'equivalenza su scala spaziale maggiore di λ_{J} e dentro l'orizzonte. Per quando riguarda la componente non-dominante di tipo barionico, la pressione non permette alle perturbazioni di cresce subito e di guidare la formazione delle strutture. I primi sistemi a formarsi in questo scenario sono quindi gli aloni di materia oscura. Dall'equazione 3.25 si vuole ora ricavare il comportamento di $\delta_{k,B}$ dopo che i barioni si sono liberati dall'accoppiamento con la radiazione. In questo caso l'equazione si scrive:

$$\ddot{\delta}_{k,B} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{k,B} - 4\pi G\rho_{\text{DM}}\delta_{k,DM} = 0. \quad (3.39)$$

Dalle equazioni di **Friedmann**, nel caso di un universo con $\Omega = 1$ (valido con buona approssimazione a questi redshift) si ha:

$$\frac{2}{3}a\delta''_{k,B} + \delta'_{k,B} - A = 0, \quad (3.40)$$

dove A è la costante di proporzionalità nella relazione $\delta_{\text{DM}} = Aa$, ' indica la derivata rispetto al fattore di espansione. Cercando una soluzione del tipo $\delta_{\text{B}} = Ba + C$ con B e C che si possono ricavare inserendo la soluzione dell'equazione sopra e in base alla condizione $\delta_{\text{B}}(a_{\text{dis}}) \approx 0$ (questo perchè fino al disaccoppiamento le perturbazioni dei barioni acillano con la radiazione e non crescono). Dopo questo si ha infine:

$$\delta_{\text{B}}(a) = \delta_{\text{DM}}(1 - a_{\text{dis}}/a), \quad (3.41)$$

cioé che dopo il disaccoppiamento le perturbazioni dei barioni hanno un periodo di crescita accelerata dovuta al fatto che subiscono l'attrazione delle perturbazioni della componente di DM: *catch up* dei barioni; come detto cadono nelle buche di potenziale e attivano il processo di "accoppiamento" tra materia oscura e materia ordinaria: formazione dei primi sistemi protogalattici.

-> INDICE

Leggi scala da spettri a leggi di potenza

Anche con una perfetta conoscenza delle condizioni iniziali, la presenza di fenomeni non deterministici o stocastici fa sì che non sia possibile riprodurre l'universo come noi lo osserviamo. Scopo dei modelli di formazione delle strutture è di dare invece una corretta descrizione statistica del sistema.

La distribuzione della materia su grande scala è guidata dal potenziale o in maniera del tutto equivalente, vista l'equazione di **Poisson**, da $\delta(\vec{x})$. Il *Principio Cosmologico* ci dice che l'universo su grande scala è mediamente omogeneo ed isotropo cioè, statisticamente, che il campo *stocastico* $\delta(\vec{x})$ è *omogeneo* ed *isotropo*. Questa riformulazione statistica del *Principio Cosmologico* consente di definire in ogni punto \vec{x}_i una variabile stocastica $\delta(\vec{x}_i)$ e una densità di probabilità congiunta su un numero finito di punti invariante per traslazione, rotazione e riflessione.

L'universo è quindi in prodotto di una realizzazione statistica di un campo stocastico, pienamente caratterizzato dalla funzione di densità di probabilità definita come:

$$p[\widehat{\delta}(\vec{x})]d\delta(\vec{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(\widehat{\delta}(\vec{x}_1), \widehat{\delta}(\vec{x}_2), \dots, \widehat{\delta}(\vec{x}_N)) \prod_{j=1}^N d\delta(\vec{x}_j). \quad (4.1)$$

Vista l'impossibilità di fare un numero infinito di realizzazioni del campo di fluttuazione di densità è necessario poter dedurre le sue proprietà una una sola realizzazione facendo alcune

ipotesi, prima tra tutte quella detta *Ergodica* cioè che le medie di un campo statistico prese su un insieme stocastico sono equivalenti alle medie spaziali di ogni sua realizzazione.

Nel modello standard di formazione delle strutture si ritiene che le fluttuazioni di temperatura presenti nel CMB abbiano dato origine alla formazione delle strutture. Queste fluttuazioni di temperatura di una parte su 10^5 sono nate come conseguenza dello “stiramento” delle fluttuazioni quantistiche durante il periodo inflazionario¹ e hanno rappresentato per la materia oscura i punti verso cui dirigersi e collassare.

Secondo la teoria lineare il valore della fluttuazione $\delta(\vec{x})$ in un punto dello spazio è dato dalla somma di tante onde piane di un campo stocastico Gaussiano. Dato che la somma di perturbazioni stocastiche Gaussiane è ancora una perturbazione stocastica Gaussiana, si può pensare di fare infinite realizzazioni di $\delta(\vec{x})$ in altrettanti universi. La distribuzione del valore misurato sarà Gaussiana con valore più probabile ovviamente zero. A questo punto conosciuta la media l'altra grandezza di interesse è rappresentata dalla varianza:

$$\sigma^2 = \langle \delta^2(\vec{x}) - \langle \delta(\vec{x}) \rangle^2 \rangle = \langle \delta^2(\vec{x}) \rangle,$$

che usando l'ipotesi ergodica diventa:

$$\sigma^2 = \frac{1}{V_\infty} \int d^3x \langle \delta^2(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(K), \quad (4.2)$$

dove V_∞ rappresenta il volume di tutto lo spazio e l'ultimo passaggio segue dalla definizione di spettro di potenza.

Un importante significato fisico dello spettro di potenza segue dalla definizione di funzione di correlazione $\xi(r)$, per cui il valore dello spettro in ogni punto k dice quanto importante è nell'integrale di **Fourier** il contributo delle fluttuazioni su questa scala per dare origine alla fluttuazione $\delta(\vec{x})$ nello spazio delle configurazioni.

Assumendo una forma semplice per $P(k)$ si possono fare delle utili considerazioni sugli aloni di DM che si formano. Il caso in cui $P(k) \propto k^n$ fa parte degli spettri detti *a legge di potenza*. L'utilizzo di questa forma funzionale è favorita non solo dalla semplicità matematica con cui si possono trattare ma anche dal fatto che l'inflazione produce spettri di questo tipo.

Prima di ricavare le leggi scala è utile fare un'importante considerazione riguardo al fatto che σ^2 rappresenta lo scarto quadratico medio delle fluttuazioni di densità, mentre da un punto di vista osservativo siamo abituati a trattare con le galassie e sistemi che osserviamo. La materia

¹Al modello inflazionario oggi giorno si affiancano e contrappongono diversi altri modelli nati dall'incopatibilità della presenza delle fluttuazioni in un campo gravitazionale (primo disaccordo tra teoria della relatività generale e meccanica quantistica), da cui la nascita della teoria delle stringhe. Tra i vari modelli il più accreditato è quello di un universo ciclico collocato in membrane multidimensionali.

e le galassie sono due cose legate nel senso che è ovvio pensare che dove ci sono più galassie c'è più materia e viceversa. Per poter mettere a confronto queste due grandezze, una continua e l'altra discreta, bisogna mediare su volumi finiti, quindi si definisce la varianza di massa come la convoluzione del campo $\delta(\vec{x})$ con un certo filtro W di raggio R :

$$\delta_M(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) * W(\vec{x}, R). \quad (4.3)$$

Analogamente a quanto fatto per il campo delle fluttazioni di densità si definisce una varianza come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{V_\infty} \int d^3x \langle \delta_M^2(\vec{x}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k P(k) \widehat{W}^2(kR). \quad (4.4)$$

Dalla teoria lineare $\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})D(t)$, in particolare per un universo **Einstein-de Sitter** $D(t) \propto a(t)$, da cui segue che l'evoluzione temporale dello spettro di potenza $P(k, t) \propto D^2(t)$. Dalla relazione 4.4 segue quindi:

$$\sigma_M^2 \propto D^2(t) k^{n+3}, \quad (4.5)$$

con n l'indice spettrale.

Dato $k \propto R^{-1}$ e $M \propto R^3$ si ha:

$$\sigma_M \propto D(t) M^{-(n+3)/6},$$

nel limite $\delta_M \rightarrow 1$ si può definire la massa tipica di collasso al tempo t :

$$M_*(t) \propto D(t)^{6/(3+n)}$$

che diventa per un universo **E-de S**:

$$M_*(t) \propto (1+z)^{-6/(3+n)};$$

da cui le leggi scala per le altre grandezze:

$$t_* \propto (1+z)^{-3/2},$$

$$\rho_* \propto (1+z)^3,$$

$$R_* \propto M_*^{1/3} (1+z)^{-1},$$

$$\langle v^2 \rangle \propto M_*^{2/3} (1+z).$$

Per avere un *clustering gerarchico* e una enrgia del sistema crescente con la massa deve tuttavia essere soddisfatta una relazione per l'indice spettrale, cioè:

$$-3 < n < 1. \quad (4.6)$$

[-> INDICE](#)

Galassie e ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono i sistemi più grandi gravitazionalmente legati presenti nell'universo. La loro identificazione viene fatta considerando l'aumento della densità numerica superficiale di galassie in una certa regione di cielo su piccola scala (la scala deve tuttavia essere scelta in modo da escludere piccoli gruppi). Si definisce come ricchezza di un ammasso il numero di galassie ad esso associate, tuttavia dare una definizione univoca indipendente dal redshift risulta difficile a causa della presenza di un certo numero di galassie di background di cui non è possibile definire lo stato con assoluta confidenza e quindi la loro eventuale appartenenza al cluster. In generale gli ammassi sono sistemi costituiti da un centinaio di galassie, dal mezzo interstellare in un ammontare di circa $10^{12} M_{\odot}$ e da materia oscura (DM) circa $10^{15} M_{\odot}$. Proprio perchè la materia oscura domina il loro campo gravitazionale, in prima approssimazione possiamo pensarli come sistemi non collisionali.

5.1 Proprietà degli ammassi di galassie

5.1.1 Funzione di luminosità

La funzione di luminosità delle galassie in un ammasso indica la distribuzione numerica della luminosità delle galassie. La funzione di luminosità integrata $N(L)$ indica il numero di galassie

con luminosità maggiore di L , mentre $n(L)dL$ cioè la funzione di luminosità differenziale rappresenta il numero di galassie con luminosità compresa tra L e $L + dL$.

Nel 1976 Schechter ha proposto in forma analitica un'espressione per la funzione di luminosità differenziale:

$$n(L)dL = N^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{-\alpha} \exp \left(- \frac{L}{L^*} \right) d \left(\frac{L}{L^*} \right) \quad (5.1)$$

dove L^* è la luminosità caratteristica mentre N^* è proporzionale al numero di galassie con $L > L^*$, il valore di α ricavato da Schechter è di circa $5/4$.

Questa funzione di luminosità "fitta" abbastanza bene la distribuzione osservata di diversi ammassi, dalle galassie più deboli a quelle più luminose escludendo tuttavia la galassia cD (la più brillante presente nel centro). La sua luminosità può raggiungere circa $10L^*$. La posizione e le caratteristiche morfologiche suggeriscono che probabilmente questa è una galassia "particolare": in un modello di *clustering gerarchico* si può pensare che si sia formata come conseguenza di processi di *merging* tra diverse galassie.

Come detto L^* è la luminosità caratteristica dell'ammasso ed è quasi sempre lo stessa per un gran numero di sistemi, perciò possiamo utilizzare questa come una stima della distanza qualora venisse ricavata la loro magnitudine apparente. In altri casi anche la luminosità della galassia più brillante viene utilizzata come indicatore di distanza, anche se non si comprende bene se la sua luminosità sia determinata statisticamente dalla funzione di luminosità o da qualche processo fisico operante all'interno dell'ammasso.

Con l'aumentare dei dati osservativi e dei *clusters* catalogati si è notato che non tutti i sistemi sono ben rappresentati dalla funzione di Schechter, a causa del loro stato dinamico. Le variazioni in M^* e α probabilmente riflettono i cambiamenti del sistema dalla sua formazione, mentre le variazioni in brillantezza e forma i cambiamenti evolutivi come *interazione mareale* tra le galassie e *merging* di sistemi massivi.

5.2 Dinamica d'ammasso

Secondo il modello di crescita delle strutture descritto nel primo capitolo, le piccole strutture si formano per prime mentre i sistemi più grandi successivamente come unione di questi, perciò ci si aspetta che la distribuzione iniziale di un *protocluster* sia irregolare che con il passare del tempo il sistema si rilassi come conseguenza del moto della materia che lo caratterizza. Un limite inferiore al tempo di rilassamento di un sistema è dato dal *crossing time*, definito come:

$$\tau_{cr}(r) = \frac{r}{v_r}, \quad (5.2)$$

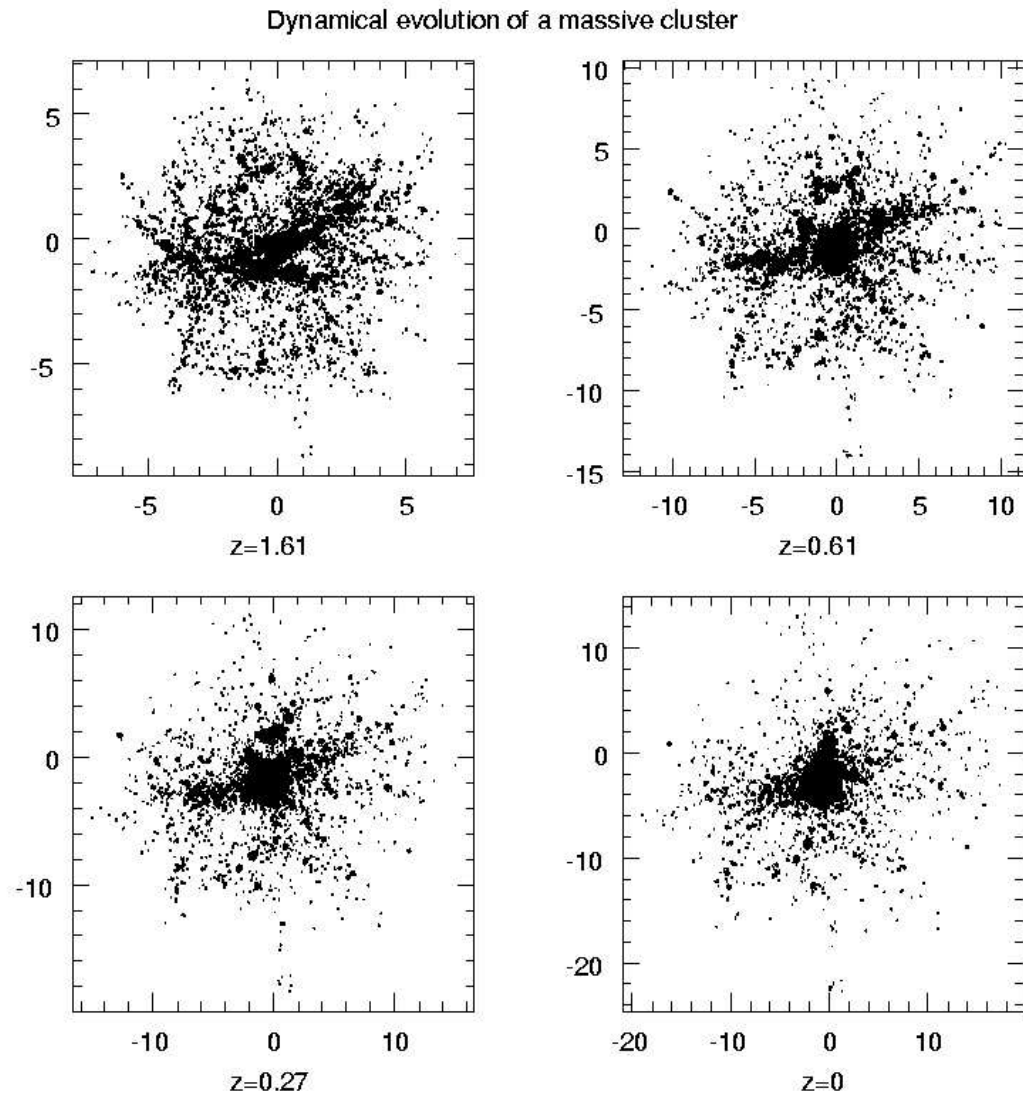


Figura 5.1: Evoluzione dinamica di un ammasso.

dove v_r rappresenta la dispersione di velocità radiale della materia.

Una stima superiore è rappresentata invece dal tempo di **Hubble**:

$$\tau_H \propto \frac{1}{H_0}. \quad (5.3)$$

5.2.1 Rilassamento a due corpi

Nei primi studi della dinamica degli ammassi si è sempre cercato di capire quale potesse essere il processo alla base del loro apparente stato di rilassamento. La funzione di distribuzione nello spazio delle fasi nella regione centrale dell'ammasso può essere statisticamente rappresentata dalla relazione:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) \propto \exp(-\epsilon/\sigma_r^2), \quad (5.4)$$

con $\epsilon = \frac{1}{2}v^2 + \phi(r)$ energia per unità di massa.

I primi lavori hanno assunto alla base un processo di rilassamento a due corpi, il corrispondente tempo scala per una galassia di massa m in un insieme di galassie con massa m_f e densità numerica n_f è dato dalla relazione:

$$\tau_{\text{rel}} = \frac{3\sigma_r^3}{4\sqrt{\pi}G^2mm_f n_f \ln \Lambda}. \quad (5.5)$$

Da questa relazione considerando valori tipici d'ammasso per il raggio, per la dispersione di velocità unidimensionale, per il numero di membri e per Λ^1 si ha $\tau_{\text{rel}} \gg \tau_H$, cioè questo vuol dire che non è possibile che l'apparente stato di rilassamento degli ammassi risulti come conseguenza del rilassamento a due corpi. Tuttavia è possibile che nelle regioni centrali di sistemi massivi abbia un peso non poco trascurabile.

5.2.2 Rilassamento violento

Mettendo da parte il rilassamento a due corpi, i lavori per spiegare la regolare dispersione di velocità negli ammassi sono continuati su altre strade.

Nel 1967 Lynden-Bell ha proposto che lo stato di questi sistemi potrebbe esser dovuto a effetti gravitazionali collettivi, per cui il rilassamento si svilupperebbe come conseguenza di interazioni collisionali tra i membri del sistema. Nel caso di un rilassamento sufficientemente violento, cioè quando l'energia delle particelle di un sistema variano di una frazione significativa, gli stati iniziale e finale sono molto diversi, in termini di dispersione di velocità dei singoli membri.

¹Rapporto tra il massimo ed il minimo parametro d'impatto,

Assumendo che gli ammassi si formino come conseguenza di crescita e collasso delle perturbazioni iniziali, durante l'evoluzione il potenziale gravitazionale ϕ fluttua violentemente, e la variazione di energia per unità di massa può scriversi nella forma²:

$$\frac{D\epsilon}{Dt} \approx \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (5.7)$$

Il tempo scala caratteristico è dato da³ :

$$t_{\text{coll}} \approx (G\langle\rho\rangle)^{-1/2} \approx \left(\frac{R_G^3}{GM_{\text{tot}}}\right)^{1/2} \approx t_{\text{cr}}(R_G), \quad (5.8)$$

dove R_G rappresenta il raggio gravitazionale dell'ammasso.

Tuttavia nelle simulazioni non si riesce mai a raggiungere la funzione di distribuzione di **Lynden-Bell**. Questa non dipende dalla massa ed è valida per ogni raggio, quindi dovrebbe coinvolgere i sistemi su tutte le scale e tutte le masse. Malgrado ciò, questo non accade poiché man mano che ci allontaniamo dal centro t_{cr} cresce fino a diventare maggiore del tempo di **Hubble** e del tempo medio di collasso.

L'idea che la distribuzione delle galassie negli ammassi sia determinata dal rilassamento violento durante la formazione del cluster fornisce una semplice spiegazione anche della sequenza morfologica monodimensionale di questi dagli irregolari ai regolari (si faccia riferimento alla figura 5.2).

La classificazione morfologica riportata è una versione rivista della classificazione di Rood-Sastry (1971) (RS). La classificazione originaria di RS si basava sulla natura e la distribuzione dei dieci più vicini ammassi di galassie, le classi sono definite come segue⁴:

cD: l'ammasso è dominato dalla galassia cD (A2199);

B: (binary) l'ammasso è dominato da una coppia di galassie luminose (A1656);

²La funzione di distribuzione di **Lynden-Bell** nello spazio delle fasi dettagliato (*fine grain*) si scrive come:

$$f(\epsilon) = \eta \frac{\exp[-\beta(\epsilon - \mu)]}{1 + \exp[-\beta(\epsilon - \mu)]}, \quad (5.6)$$

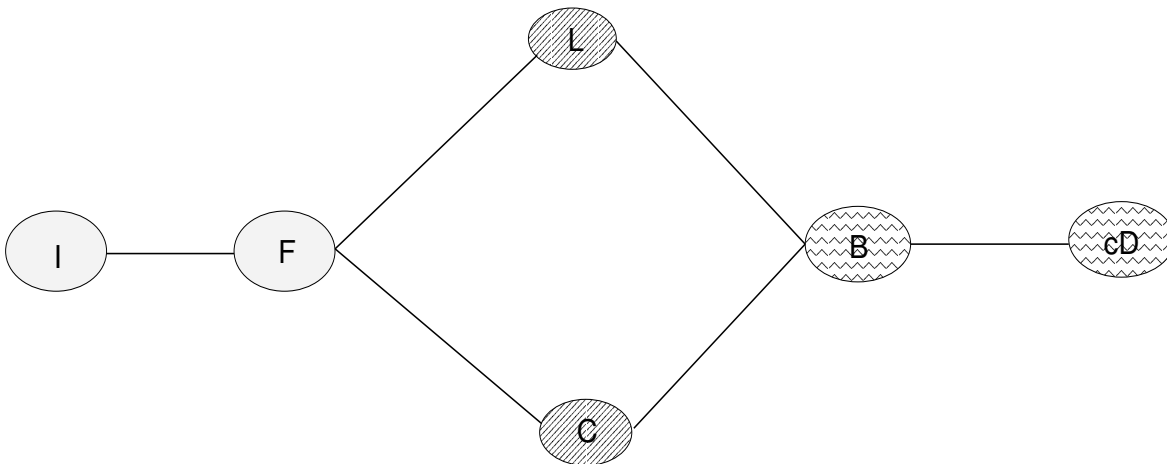
con β , μ e ν costanti. In tutta generalità però $f(\epsilon) \ll \eta$ tanto che la funzione di Lynden-Bell può essere ben approssimata dalla funzione di distribuzione di **Maxwell-Boltzman** nella forma:

$$f(\epsilon) = A \exp(-\beta\epsilon),$$

con $A = \eta \exp(\beta\mu) = \text{const.}$

³Nel caso particolare in cui l'ammasso si formi da uno stato iniziale con $v = 0$ a uno virializzato: $\Delta\epsilon \approx \Delta\phi \approx \epsilon$.

⁴Tra parentesi si riportano i corrispondenti sistemi campione.



Struble and Rood classification (1982, 1985)

Figura 5.2: Sequenza evolutiva degli ammassi di galassie da Irregular a cD-cluster.

- L:** (line) tre galassie brillanti appaiono allineate (A426);
- C:** (core) il core è costituito da quattro o dieci membri, con una separazione comparabile alle dimensioni delle galassie (A2065);
- F:** (flat) le galassie più brillanti hanno una distribuzione abbastanza appiattita (A2151);
- I:** (irregular) la distribuzione delle galassie più brillanti è piuttosto irregolare, non si osserva in particolare nessun centro (A400).

La classificazione morfologica è tuttavia un'analisi molto qualitativa dello stato dinamico di questi sistemi che caratterizzano l'universo su grande scala, ormai oggi messa da parte. Malgrado questo lo stato dinamico degli ammassi ha una forte correlazione con morfologia ma dipende anche dall'ambiente e da altre proprietà come la *merging history*.

Una volta completato il collasso, il rilassamento violento diventa trascurabile e successivi rilassamenti si possono verificare solo come conseguenza di incontri a due corpi. Per una galassia tipica questi effetti non sono molto importanti, ma al contrario per una galassia abbastanza massiva che si muove nel centro dell'ammasso (come già detto in precedenza) possono fornire un importante contributo al suo stato (Chandrasekhar 1942).

Frizione Dinamica

La dinamica della materia oscura intesa, come fluido non collisionale, è strettamente influenzata dalla forza di gravità e dai gradienti di pressione che tendono a formarsi qualora sia presente una perturbazione del campo di densità (si faccia riferimento al capitolo 3).

Se si considera un corpo di massa M in moto in prossimità di un altro di massa m , detta $\vec{r} = \vec{x}_m - \vec{x}_M$ la congiungente i due corpi, l'equazione del moto si può scrivere nella forma:

$$\left(\frac{mM}{m+M} \right) \ddot{\vec{r}} = -\frac{GmM}{r^2} \vec{u}_r. \quad (5.9)$$

Se $\Delta\vec{v}_m$ e $\Delta\vec{v}_M$ sono le variazioni di velocità dei due corpi durante l'incontro e $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ allora:

$$\Delta\vec{V} = \Delta\vec{v}_m - \Delta\vec{v}_M.$$

Dato che la variazione di velocità del centro di massa è nulla, $m\Delta\vec{v}_m + M\Delta\vec{v}_M = 0$, eliminando $\Delta\vec{v}_m$ dalle due relazioni si ha:

$$\Delta\vec{v}_M = -\left(\frac{m}{m+M} \right) \Delta\vec{V}. \quad (5.10)$$

L'equazione 5.9 ammette soluzione in termini di $\vec{V}_0 = \vec{V}(t = -\infty)$ e b parametro d'impatto nella forma:

$$\frac{1}{r} = C \cos(\psi - \psi_0) + \frac{G(m+M)}{b^2 V_0^2}, \quad (5.11)$$

in cui C e ψ_0 sono dati a partire dalle condizioni iniziali. Dalla figura 5.3 si può notare che le orbite sono simmetriche e che quindi possiamo scrivere l'angolo di deflessione $\theta_{\text{def}} = 2\psi_0 - \pi$. Vista la situazione dinamica, dalla conservazione dell'energia e del momento angolare le due componenti della variazione di velocità $\Delta\vec{V}$, parallela e perpendicolare alla direzione di moto iniziale, posso sciversi come:

$$|\Delta\vec{V}_\perp| = \frac{2bV_0^3}{G(m+M)} \left[1 + \frac{b^1 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}, \quad (5.12)$$

$$|\Delta\vec{V}_\parallel| = 2V_0 \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}. \quad (5.13)$$

Dall'equazione 5.10 si possono ottenere infine le componenti della variazione di velocità di M :

$$|\Delta\vec{v}_{M\perp}| = \frac{2mbV_0^3}{G(m+M)^2} \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}, \quad (5.14)$$

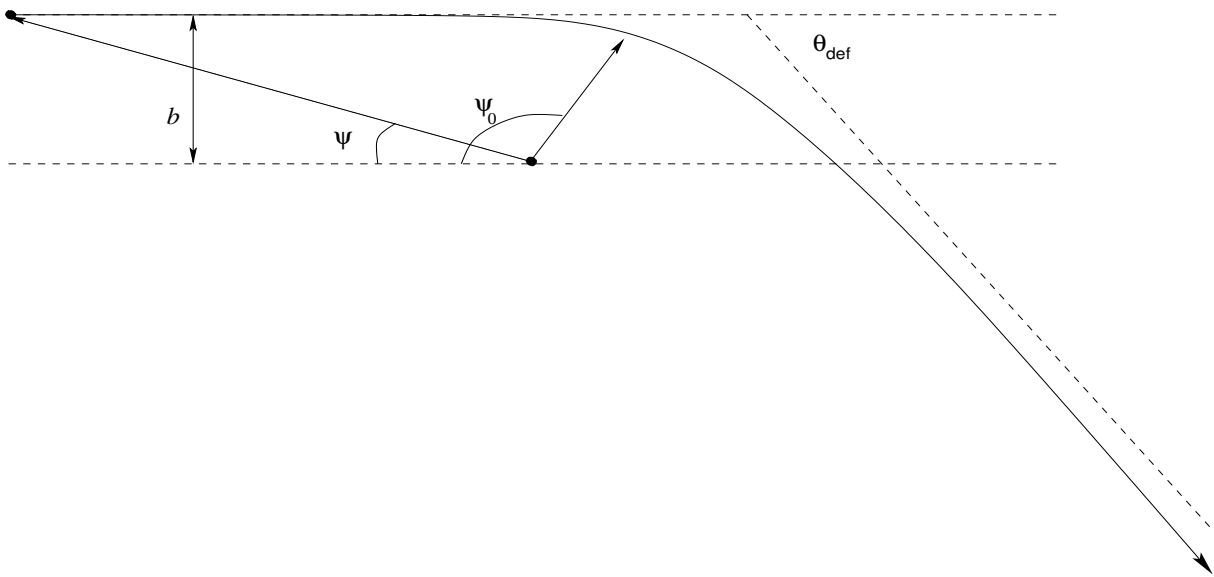


Figura 5.3: Moto di una particella durante un incontro binario.

$$|\Delta \vec{v}_{M\parallel}| = \frac{2mV_0}{m+M} \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1}. \quad (5.15)$$

Si consideri ora il caso in cui un corpo di massa M si stia muovendo in un insieme di corpi omogeneo. Come è ben intuibile dalla figura 5.4, $\sum \Delta \vec{v}_{M\perp} = 0$ e tutte le variazioni di velocità sono parallele a V_0 per formare una risultante non nulla. La decelerazione che subisce M in questa situazione è detta **frizione dinamica**. Se $f(\vec{v})$ rappresenta la funzione di distribuzione

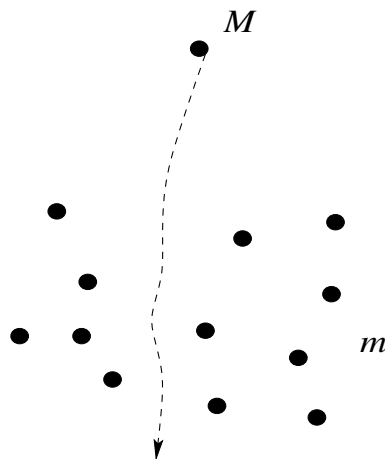


Figura 5.4: Moto di una particella durante una serie di incontri.

nello spazio delle fasi per un insieme omogeneo di particelle, il tasso di variazione di \vec{v}_M dovuto

ai diversi incontri è dato dalla relazione:

$$\left. \frac{d\vec{v}_M}{dt} \right|_{\vec{v}_m} = \vec{V}_0 f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m \int_0^{b_{\max}} \frac{2mV_0}{m+M} \left[1 + \frac{b^2 V_0^4}{G^2(m+M)^2} \right]^{-1} 2\pi b db, \quad (5.16)$$

in cui b_{\max} rappresenta un limite superiore per il parametro d'impatto. Svolgendo l'integrale l'equazione diventa:

$$\left. \frac{d\vec{v}_M}{dt} \right|_{\vec{v}_m} = 2\pi \ln(1 + \Lambda^2) G^2 m(m+M) f(\vec{v}_m) d^3\vec{v}_m \frac{(\vec{v}_m - \vec{v}_M)}{|\vec{v}_m - \vec{v}_M|^3}. \quad (5.17)$$

Nel caso in cui il logaritmo di **Coulomb**, $\ln \Lambda^5$ è costante, l'equazione 5.17 esprime che le particelle con velocità \vec{v}_m esercitano sul corpo M una forza parallelamente a $\vec{v}_m - \vec{v}_M$ e inversamente proporzionale al quadrato di questo vettore.

Per una distribuzione isotropa di particelle si ha la cosiddetta **formula della frizione dinamica di Chandrasekhar**:

$$\left. \frac{d\vec{v}_M}{dt} \right|_{\vec{v}_m} = -16\pi^2 \ln \Lambda G^2 m(m+M) \frac{\int_0^{\vec{v}_m} f(\vec{v}_m) v_m^2 dv_m}{\vec{v}_M^3} \vec{v}_M. \quad (5.18)$$

Effetti mareali: raggio mareale

Nel considerare il moto di un satellite nell'alone ospite, non si può trascurare il fatto che le velocità delle particelle del satellite vengano casualmente perturbate a causa degli effetti mareali. In accordo a questo le galassie negli ammassi sono soggette a perturbazioni mareali da parte delle galassie vicine e da parte dell'alone ospite in cui si muove. In questo modo la densità del satellite viene perturbata dal campo di densità del sistema centrale e cade rapidamente a zero oltre un certo valore del raggio detto raggio mareale r_t .

Una buona approssimazione per il raggio mareale si può ricavare considerando un satellite di massa m orbitante su un'orbita circolare attorno ad un sistema ospite. Se M è la massa del sistema ospite e D è la loro distanza, la velocità angolare con cui ruota il corpo m è:

$$\Omega = \sqrt{\frac{G(m+M)}{D^3}}.$$

Se si orienta il sistema di coordinate in modo da avere $\vec{x}_m = [D(1 + m/M)^{-1}, 0, 0]$ e $\vec{x}_M = [-D(1 + m/M)^{-1}, 0, 0]$ l'integrale di **Jacobi** pone:

$$E_J = \frac{1}{2} v^2 + \phi_{\text{eff}}(\vec{x}), \quad (5.19)$$

⁵ $\ln(1 + \Lambda^2) \approx \ln \Lambda$.

con $\phi_{\text{eff}}(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) - \frac{1}{2}|\vec{\Omega} \times \vec{x}|^2$.

La valutazione del raggio di **Jacobi** può essere fatta notando che per $\vec{x} = (x_m - r_J, 0, 0)$ il potenziale effettivo ha un punto di sella:

$$\left(\frac{\partial \phi_{\text{eff}}}{\partial x} \right)_{x=x_m-r_J} = 0.$$

Il potenziale effettivo nel caso di due punti di massa distanti D si può scrivere come:

$$\phi_{\text{eff}}(\vec{x}) = -G \left[\frac{M}{|\vec{x} - \vec{x}_M|} + \frac{m}{|\vec{x} - \vec{x}_m|} + \frac{1}{2} \frac{m+M}{D^3} |\vec{u}_z \times \vec{x}|^2 \right]. \quad (5.20)$$

Per cui dalla condizione di esistenza del punto di sella si può ricavare:

$$r_J = \pm \left(\frac{m}{3M} \right)^{1/3} D. \quad (5.21)$$

Proprietà generali degli ammassi di galassie

Assumendo che la DM domini la dinamica dei *clusters* e che si trovino in condizioni di equilibrio ci aspettiamo:

- una velocità media delle galassie dell'ordine di $v_{\text{gal}} \sim 10^3 \text{ km s}^{-1}$;
- che il mezzo interstellare sia altamente ionizzato, $T_{\text{ICM}} \sim 5 - 10 \text{ keV}$. Questo rende gli ammassi di galassie le più forti sorgenti di raggi-X attraverso l'emissione di *bremsstrahlung*: $L_x \approx 10^{45} \text{ erg s}^{-1}$;
- che la gravità domini gli altri processi;
- che gli ammassi di galassie possono essere forti lenti gravitazionali, questo ci permette di misurare la massa senza la necessità di invocare l'equilibrio termodinamico.

Abbiamo ancora che:

- sono sistemi dinamicamente giovani, cioè $\tau_{\text{dyn}} \sim \tau_{\text{H}}$;
- mantengono memoria delle condizioni iniziali dell'universo attraverso i parametri cosmologici;
- possiamo ancora osservare la loro evoluzione per poter fare dei paragoni con le simulazioni.

-> INDICE

Modello dell'Excursion sets e funzione di massa: Press & Schechter

6.1 Excursion Set

Sia $\delta(\vec{x}, t)$ il campo di fluttuazioni di densità, funzione della coordinata spaziale e temporale. Nell'ipotesi in cui $\delta \ll 1$ e che queste fluttuazioni formino un campo Gaussiano omogeneo ed isotropo si può scrivere:

$$\delta(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}, t_0) \frac{D(t)}{D(t_0)}, \quad (6.1)$$

dove $D(t)$ rappresenta il fattore di crescita lineare delle perturbazioni e t_0 è un tempo iniziale di riferimento. In questo modo il campo δ è univocamente determinato dalla conoscenza dello spettro di potenza $P(k, t)$.

Se δ_c rappresenta la soglia critica delle fluttuazioni di densità e ricordando che nel caso di un universo **Einstein-de Sitter** si può scrivere $D(z) \propto (1+z)$, si ha:

$$\delta_c(z) = \delta_c(1+z). \quad (6.2)$$

Il modello per la funzione di massa è stato per la prima volta introdotto nel 1974 da Press & Schechter secondo i quali un elemento infinitesimo di massa nel punto \vec{x} farà parte di alone

di massa maggiore o uguale a M al tempo t se, detta $\delta_f(\vec{x}, t)$ la fluttazione lineare nel punto considerato, filtrata su una scala di raggio $R \propto M^{1/3}$, vale la condizione:

$$\delta_f(\vec{x}, R) \geq \delta_c(t)$$

con $\vec{x} \in M$.

La descrizione dell'evoluzione temporale di elemento infinitesimo di massa ha bisogno di due proprietà: $\delta_f(\vec{x}, R)$ e della scala di filtraggio. La coordinata appropriata da usare per la scala di filtraggio è la varianza di massa su scala $k_f \propto R$, definita come:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dK k^2 P(k) \widehat{W}^2(kR) \approx \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty k_f dK k^2 P(k) \equiv S(k_f),$$

con $S(k_f)$ funzione monotona crescente. Ogni traiettoria inizierà nel punto $(S, \delta_f) = (0, 0)$ e si allontanerà da questo in maniera stocastica. L'equazione che governa questo moto è detta equazione di diffusione, la cui espressione è:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta_f^2}, \quad (6.3)$$

Nel caso di un cammino libero di tipo **Browniano**, la soluzione dell'equazione di diffusione è la semplice distribuzione **Gaussiana**:

$$Q(\delta_f, S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left(-\frac{\delta_f^2}{2S}\right)$$

L'equazione 6.3 permette di riformulare in modo diverso l'idea proposta da Press & Schechter nel senso che le traiettorie che, partendo dall'origine all'aumentare di S , toccano per la prima volta il valore $\delta_f = \delta_c(t)$ corrispondono all'elemento di fluido che al tempo t appartengono ad aloni di massa $M(S)$.

Sia $Q_2(\delta_f, S, \delta_c(t))$ la probabilità associata alle traiettorie che al tempo t non hanno ancora toccato la barriera $\delta_c(t)$, la frazione di queste traiettorie può essere scritta come:

$$P_2(S, \delta_c(t)) = \int_{-\infty}^{\delta_c(t)} Q_2(\delta_f, S, \delta_c(t)) d\delta_f. \quad (6.4)$$

Le traiettorie, invece, che hanno incontrato la barriera ad un tempo minore di t sono date dall'espressione:

$$\bar{P}_2(S, \delta_c(t)) = 1 - P_2(S, \delta_c(t)), \quad (6.5)$$

questa espressione indica quale è la frazione di massa che al tempo t è negli aloni di varianza minore di S , questa è detta funzione di massa cumulativa:

$$\bar{P}_2(S, \delta_c(t)) = P(< S, t).$$

6.2 Funzione di Massa

Se $P(< S, t)$ rappresenta la funzione di massa cumulativa, la sua derivata rispetto alla varianza di massa esprime la funzione di massa differenziale:

$$p(S, \delta_c(t)) = \frac{\delta_c(t)}{\sqrt{2\pi S^3}} \exp\left(-\frac{\delta_c^2(t)}{2S}\right). \quad (6.6)$$

Sostituendo M al posto di S e considerato il caso di un volume unitario per cui $M_v = \rho_0$, si ottiene la densità numerica di aloni di massa M (Press & Schechter):

$$\frac{dn(M)}{dM} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\delta_c(t)}{\sigma(k_f)} \left| \frac{d \ln \sigma}{d \ln M} \right| \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)}{2\sigma^2(k_f)}\right]. \quad (6.7)$$

Questa espressione può essere anche scritta in modo indipendente dallo spettro delle fluttuazioni, detta $\nu = \delta_c(t)/\sigma(M)$ si ha:

$$\frac{df}{d \ln \nu} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right).$$

L'approccio dell'*excursion set* permette di ricavare anche un'altra quantità molto importante: la funzione di massa condizionale, cioè la probabilità che un alone di massa M_1 al tempo t_1 abbia massa $M_2 > M_1$ al tempo $t_2 > t_1$:

$$p(S_1, \delta_c(t_1)|S_2, \delta_c(t_2)) = \frac{\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2)}{\sqrt{2\pi(S_1 - S_2)^3}} \exp\left[-\frac{(\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2))^2}{2(S_1 - S_2)}\right], \quad (6.8)$$

ciò equivale a prendere quella traiettoria che passa attraverso i punti $(S_1, \delta_c(t_1))$ e $(S_2, \delta_c(t_2))$. La probabilità, che un alone di massa M_1 al tempo t_1 abbia al tempo t_2 massa M_2 , si può ottenere dalla relazione 6.8 applicando il teorema di **Bayes**:

$$\begin{aligned} p(S_2, \delta_c(t_2)|S_1, \delta_c(t_1)) &= \frac{p(S_1, \delta_c(t_1)|S_2, \delta_c(t_2))p(S_2, \delta_c(t_2))dS_2}{p(S_1, \delta_c(t_1))dS_1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{S_1}{S_2(S_1 - S_2)} \right]^{3/2} \frac{\delta_c(t_2)(\delta_c(t_1) - \delta_c(t_2))}{\delta_c(t_1)} \exp\left[-\frac{(\delta_c(t_2)S_1 - \delta_c(t_1)S_2))^2}{2S_1S_2(S_1 - S_2)}\right] dS_2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Per ricavare il *merging rate* basta prendere il limite di t_2 che tende a t_1 :

$$\frac{d^2p}{dS_2d\delta_c(t)}(S_1 \rightarrow S_2|\delta_c(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{S_1}{S_2(S_1 - S_2)} \right]^{3/2} \exp\left[-\frac{\delta_c^2(t)(S_1 - S_2)}{2S_1S_2}\right]. \quad (6.10)$$

6.3 Tempo di formazione degli aloni

Il tempo di formazione di un alone, seguendo Lacey & Cole 1993, viene definito come il tempo in cui metà della massa finale è situata nel progenitore principale. La densità numerica di aloni di massa M_1 al tempo t_1 che al tempo t_2 “cadono” in aloni di massa M_2 è data da:

$$d^2n = \frac{dn}{dM_1}(M_1, t_1)dM_1 p(S_2, \delta_c(t_2)|S_1, \delta_c(t_1))dS_2. \quad (6.11)$$

Per ricavare la probabilità che il tempo di formazione di un alone sia minore di t_1 , si deve considerare quale è la probabilità che un alone di massa M_2 abbia un progenitore al tempo t_1 nel range di massa $[M_1, M_1 + dM]$. Integrando questa nell'intervallo $[M_2/2, M_2]$ ¹ si ottiene la probabilità per cui il tempo di formazione dell'alone sia minore di t_1

$$P(t_f < t_1 | M_2, t_2) = \int_{S_2}^{S(M_2/2)} \frac{M(S_2)}{M(S_1)} p(S_1, \delta_c(t_1) | S_2, \delta_c(t_2)) dS_1.$$

6.4 Collasso Ellissoidale

Studi riguardanti la formazione degli aloni hanno messo in evidenza che la funzione di massa non condizionale di Press & Schechter sovra-predice l'abbondanza di aloni di piccola massa e sotto-predice quella degli aloni di grande massa, quando viene comparata con le simulazione numeriche; questo è stato interpretato come conseguenza dell'assunzione del collasso sferico. La risoluzione di questa controversia ha richiesto diversi studi, si faccia riferimento a: Sheth & Tormen 1999; Lanzoni, Mamon & Guiderdoni; Sheth, Mo & Tormen 2001.

L'analisi del collasso sferico può esser fatta moltiplicando la soglia di densità critica δ_c (come definita precedentemente) per un opportuno fattore a ed esaminando come questo dipende dalla massa dell'alone.

Sheth & Tormen 1999 hanno trovato un eccellente accordo con le simulazioni utilizzando la seguente espressione per la soglia di densità critica:

$$\delta_{ce}(M, z) = \delta_c(z) \left\{ 1 + 0.47 \left[\frac{\sigma^2(M)}{\delta_c^2(z)} \right]^{0.615} \right\}, \quad (6.12)$$

dove δ_c rappresenta il valore standard di soglia di densità per il collasso sferico. La funzione di massa non condizionale e il tempo di formazione degli aloni, in maniera del tutto indipendente, suggeriscono una relazione tra la soglia di densità critica e la massa: δ_c dovrebbe decrescere all'aumentare dell'ultima. Per incorporare questo in modo esplicito nel modello Press & Schechter

¹Questa scelta garantisce che ogni alone progenitore al tempo t_2 diventi un alone distinto.

Esteso (EPS) bisogna introdurre la barriera mobile (*moving barrier*). Tuttavia come descritto in Sheth & Tormen 1999 nessuna espressione analitica è nota per la funzione condizionale di probabilità.

La funzione di massa ricavata risulta definita analiticamente dalla seguente espressione:

$$dM \frac{dn(M)}{dM} = \frac{\bar{\rho}}{M} A [1 + (a\nu)^{-p}] \sqrt{a\nu} e^{-a\nu/2} \frac{d\nu}{\nu}, \quad (6.13)$$

dove $\bar{\rho}$ denota la densità media dell'universo all'epoca attuale,

$$\nu(M, z) := \left[\frac{\delta_c(z)}{D(z)\sigma(M)} \right]^2, \quad (6.14)$$

$D(z)$ il fattore di crescita lineare delle perturbazioni di densità e $\sigma(M)$ lo scarto quadratico medio delle fluttuazioni del campo di densità della materia all'epoca presente filtrato con un *top-hat* sferico di raggio $(3M/4\pi\bar{\rho})^{1/3}$.

La normalizzazione delle costanti viene fatta richiedendo che tutta la massa sia contenuta in un alone parente. Sistemando termini di proporzionalità, la relazione 6.13 può essere riscritta come:

$$\nu f(\nu) = A \left(1 + \frac{1}{\nu^p} \right) \left(\nu'/2 \right)^{1/2} \frac{e^{-\nu'/2}}{\sqrt{\pi}}, \quad (6.15)$$

dove $\nu' = a\nu$, con $a = 0.707$ e $\nu = (\delta_c/\sigma)^2$, $p = 0.3$ e $A \approx 0.322$ richiedendo che l'integrale di $f(\nu)$ su ν valga 1. La formula originale di Press & Schechter ha $a = 1$, $p = 0$ e $A = 1/2$.

[-> INDICE](#)

Simulazioni N -body

Le simulazioni N -body hanno svolto e svolgono un ruolo molto importante nel testare e analizzare i processi di collasso gravitazionale e *merging* degli aloni di materia oscura. Come già accennato questi lavori si muovono parallelamente a quelli analitici basati principalmente sul formalismo Press & Schechter.

La loro importanza è principalmente legata alla possibilità di “toccare con mano” i processi che portano alla formazione delle strutture virializzate e di studiare come queste si formino al variare di particolari parametri cosmologici.

I passi avanti fatti nelle simulazioni numeriche sono stati resi possibili sia dalla rapida crescita delle capacità computazionali e sia dal miglioramento degli algoritmi numerici.

Con il miglioramento delle capacità computazionali i codici su cui si basavano le prime simulazioni, si sono mostrati inadeguati per lo studio dell'evoluzione di grandi sistemi (N grande), perchè la determinazione del potenziale gravitazionale si effettuava con una somma diretta sugli N -corpi. Diversi gruppi hanno quindi deciso di sviluppare codici N -body per dinamiche non collisionale, tale che il campo gravitazionale su grande scala venisse ricavato tramite le tecniche di **Fourier**: sono nati quindi i codici PM, P³M e AP³M.

Alternativamente a questi troviamo gli algoritmi ad albero (*tree algorithms*), Appel (1981, 1985). Questi codici ordinano le particelle in gruppi gerarchici e calcolano il campo gravi-

tazionale in un dato punto sommando sulle espansioni multipolari dei vari gruppi. In questo modo il costo computazionale va come $\mathcal{O}(N \log N)$, al posto che come N^2 .

Tuttavia i codici basati sulle maglie (*mesh*) sono in grado di determinare bene il potenziale a grande distanza, mentre i metodi ad albero (*tree*) lavorano bene su piccole distanze. Nella seconda metà degli anni '90, per cercare di colmare questi due difetti, è stato creato un codice ibrido *Tree-PM* che lavora su piccola scala come i codici ad albero mentre su grande scala come i codici a maglie. Questa tecnica si è rivelata molto promettente su grandi volumi cosmologici con forte *clustering* su piccola scala.

Il lavoro svolto in questa tesi è basato su simulazioni fatte evolvere con il codice **GADGET**.

GADGET: GALaxies with Dark matter and Gas intEracT

GADGET è un codice gratuito per simulazioni cosmologiche *N*-body/*SPH*. Questo codice calcola la forza gravitazionale con un algoritmo gerarchico ad albero e segue l'evoluzione della componente fluida con tecnica *SPH: smoothed particles hydrodynamics*.

Le simulazioni usate in questo lavoro di tesi sono delle *ri*-simulazioni ad alta risoluzione di particolari regioni presenti in una *grande simulazione cosmologica*, Tormen et al. (1997). La simulazione di partenza è una simulazione *N*-body cosmologica con 512^3 particelle in un cubo di dimensioni $479 h^{-1} \text{Mpc}$ (Yoshida, Seth & Diaferio 2001 and Jenkins et al. 2001). Questa assume un universo piatto con $\Omega_m = 0.3$ e un contributo di densità dovuto alla costante cosmologica $\Omega_\Lambda = 0.7$. Il valore della costante di **Hubble** (in unità di 100 km/s/Mpc) è $h = 0.7$. Le condizioni iniziali corrispondono ad uno spettro di potenza CDM normalizzato con $\sigma_8 = 0.9$ all'epoca presente, tale da riprodurre il *clustering* osservato su grande scala. Dall'output (cioè al tempo presente) di questa simulazione sono state estratte particolari regioni sferiche di raggio compreso tra 5 e $10 h^{-1} \text{Mpc}$ ogniuna contenente uno o due aloni di materia oscura di grandi dimensioni.

Per ogniuna di queste regioni sono state ricostruite le condizioni iniziali con il software **Zic** (**Z**oomed **I**nitial **C**ondition).

Allo scopo di aumentare la risoluzione spaziale e di massa, le particelle in regioni di alta densità sono state sostituite con particelle meno massive e in maggior numero (di alta risoluzione: **HR**), mentre nella periferia dell'alone le particelle sono state sostituite con altre più massive, di bassa risoluzione (**LR**), al fine di dare una corretta descrizione del campo mareale medio su grande scala.

7.1 Metodi a *N*-corpi

Le soluzioni analitiche delle equazioni del moto per un sistema a più corpi, che interagiscono tra loro solo attraverso la gravità, sono conosciute solo per $N = 2$; anche nel caso in cui $N = 3$ le equazioni sono risolvibili, ma con l'assunzione che la massa di uno dei corpi sia molto piccola rispetto agli altri due. Nel caso di N grande è necessario invece passare all'approccio numerico, poichè in nessun caso ci sono dei risultati analitici.

Per conoscere le posizioni \vec{x}_i e le velocità \vec{v}_i di un sistema di N -corpi di massa m_i bisogna risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \frac{\vec{F}_i}{m_i}, \\ \frac{d\vec{x}_i}{dt} &= \vec{v}_i, \\ \nabla^2\phi &= 4\pi G\rho(x, t).\end{aligned}$$

Nelle simulazioni le soluzioni di questo sistema vengono ricavate facendo uso di particolari tecniche numeriche: le derivate totali possono essere risolte facendo uso dei metodi alle differenze finite.

$$v = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

che per rendere piccolo l'errore necessita che l'intervallo temporale considerato sia abbastanza piccolo. I passi quindi che bisogna seguire per analizzare la dinamica di N -corpi sono:

- discretizzare l'intervallo temporale,
- calcolare la forza gravitazionale risentita da ogni particelle e
- ricalcolare le nuove posizioni e velocità.

Le simulazioni usate in cosmologia si propongono anche di studiare la formazione delle strutture su grande scala, pertanto sono tutte pensate per un numero molto alto di particelle; infatti più particelle si usano migliore è la risoluzione in massa che si ottiene. Per metodi a N -body generalmente si intende un metodo che considera solo la forza gravitazionale trascurando quelle che si riferiscono al gas. Perciò con questi metodi si segue l'evoluzione degli aloni di materia oscura, le cui particelle sono non collisionali e interagiscono solo gravitazionalmente. Il fatto che il contenuto di materia dell'universo sia per il 90% attribuibile alla DM, permette pensare che la formazione e la successiva evoluzione delle strutture su grande scala sia influenzata essenzialmente dal suo campo gravitazionale e che questa possa essere studiata trascurando in prima approssimazione il gas. Tra l'altro questo implica una grande semplificazione del sistema di equazioni con una conseguente diminuzione del tempo di calcolo.

7.2 Aloni virializzati

Dai modelli di collasso gravitazionale, un alone di materia oscura di massa M si forma ad un certo redshift z se il contrasto di densità δ di una regione Lagrangiana “filtrato” su una scala M soddisfa la condizione $\delta = \delta_c(z)$, dove $\delta_c(z)$ è il contrasto di densità critico a redshift z il cui valore dipende dalla cosmologia. Nel caso di un universo piatto (senza costante cosmologica) $\delta_c \approx 1.686(1+z)$.

Gli aloni di materia oscura non sono sistemi rigidi, ma dalle simulazioni diversi modelli sono stati proposti per la distribuzione della materia oscura e della componente barionica.

Un parametro importante che univocamente specifica il profilo di densità è la concentrazione: $c \equiv r_{\text{vir}}/r_s$, che misura la posizione, relativamente al raggio viriale, della variazione della pendenza del profilo. Generalmente aloni meno massivi, che si formano a tempi remoti, sono più concentrati (quindi r_s è minore di r_{vir}) degli aloni più massivi che si formano a tempi più remoti. Questa cosa è stata per la prima volta suggerita da Navarro, Frenck & White 1996; 1997 i quali hanno messo in evidenza che esiste una variazione di pendenza nel profilo di densità, r_s , che demarca il materiale presente nell'alone al momento della formazione da quello accresciuto successivamente.

7.2.1 Evoluzione di una perturbazione sferica: formazione degli aloni virializzati

In un universo dominato da materia non barionica l'equazione che descrive l'evoluzione di una perturbazione *tophat* è:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2}, \quad (7.1)$$

con:

$$M = \frac{4\pi R_i^3}{3} \bar{\rho}_i (1 + \Delta_i), \quad \Delta_i = \frac{\int_0^{R_i} 4\pi r^2 \delta_i(r)}{4\pi R_i^3 / 3}$$

e $\bar{\rho}_i$ densità di background al tempo iniziale.

L'integrale primo dell'equazione 7.1 è:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{MG}{R} = E, \quad (7.2)$$

con E costante di integrazione.

Se $E < 0$ e $\Delta_i > 0$ la regione sovradensa si espanderà fino ad un certo raggio R_{max} e successivamente collasserà. Al tempo iniziale le energie cinetica e potenziale sono:

$$K_i = \frac{(H_i R_i)^2}{2}, \quad W_i = -\frac{GM}{R_i} = -\Omega_i (1 + \Delta_i) \frac{(H_i R_i)^2}{2},$$

e

$$E_i = K_i - K_i \Omega_i (1 + \Delta_i).$$

Alla massima espansione l'energia cinetica, in base alla condizione $R_i = 0$, è nulla quindi:

$$E = -\frac{GM}{R_{\max}} = K_i [1 - \Omega_i (1 + \Delta_i)], \quad (7.3)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la conservazione dell'energia. Per R_{\max} si ha:

$$\frac{R_{\max}}{R_i} = \frac{\Omega_i (1 + \Delta_i)}{\Omega_i (1 + \Delta_i) - 1}, \quad (7.4)$$

che nel caso di un universo piatto diventa:

$$\frac{R_{\max}}{R_i} \approx \frac{1}{\Delta_i}. \quad (7.5)$$

Dalle relazioni sopra si osserva che indipendentemente dalla massa il raggio di *turn around* dipende da Δ_i , e che regioni leggermente sovradense si espandono di più ma impiegano più tempo a collassare e a virializzare.

In condizioni di equilibrio viriale vale la relazione:

$$2K_{\text{vir}} = W_{\text{vir}} \Rightarrow E = -\frac{W_{\text{vir}}}{2} \approx \frac{GM}{2R_{\text{vir}}} = -\frac{GM}{R_{\max}}, \quad (7.6)$$

e allora:

$$R_{\text{vir}} \approx \frac{R_{\max}}{2}, \quad (7.7)$$

cioè alla virializzazione l'oggetto è otto volte più denso che al *turn around*.

La soluzione dell'equazione 7.2 in forma parametrica ha l'espressione:

$$\frac{R}{R_i} = A(1 - \cos \theta), \quad \frac{t + T}{t_i} = B(\theta - \sin \theta), \quad (7.8)$$

con A e B legati dalla relazione:

$$A^3 = \frac{GM(Bt_i)^2}{R_i^3}, \quad (7.9)$$

e θ compreso nell'intervallo $[0; 2\pi]$.

Per ricavare le costanti si consideri che alla massima espansione $\theta = \pi$, quindi:

$$A = \frac{1 + \Delta_i^{-1}}{2}, \quad B = \frac{(1 + \Delta_i)}{2H_i t_i \Omega_i^{1/2}} \left[1 + \Delta_i - \frac{1}{\Omega_i} \right]^{-3/2}.$$

Consideriamo ora il caso di un universo **Einstein-de Sitter** nella condizione $T \ll t_i$, allora:

$$\Omega = 1, \quad \bar{\rho}(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \Rightarrow$$

$$1 + \Delta = \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}(t)} \left(\frac{R_i}{R} \right)^3 \approx \frac{9(\theta - \sin \theta)^2}{2(1 - \cos \theta)^3} \quad (7.10)$$

per $t \approx t_i$ si ha:

$$\Delta \approx \frac{3}{5} \Delta_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{2/3} \quad (7.11)$$

al *turn around* dalla 7.10:

$$1 + \Delta_{\max} = \frac{9\pi^2}{16} \approx 5.55 \Rightarrow \Delta_{\max} > 1, \quad (7.12)$$

cioé alla massima espansione l'oggetto è significativamente non lineare.

In fine per $\theta \rightarrow 2\pi$, $\Delta \rightarrow \infty$, cioè la virializzazione avviene ad un raggio finito.

Se $t_{\text{vir}} = t(\theta = 2\pi) \approx t_{\max}$ allora:

$$1 + \Delta_{\text{vir}} = \frac{9\pi^2}{16} \cdot 8 \cdot 4 \approx 178. \quad (7.13)$$

La relazione 7.13 esprime il fatto che il contrasto di densità in aloni virializzati è 178 volte quello di background¹.

7.2.2 Collasso di aloni di materia oscura: secondary infall

La trattazione fatta nella precedente sezione si basa tuttavia su delle assunzioni poco realistiche quando comparate con le simulazioni N -body. Per prima cosa non si può dire a priori che il raggio viriale debba essere la metà di quello massimo e per seconda cosa la situazione si complica considerando l'evoluzione delle particelle in prossimità del centro di un oggetto in fase di collasso.

Queste particelle sono di due tipi, quelle che spendono gran parte del loro tempo in prossimità del *core* e quelle che stanno passando attraverso. Contrariamente a questo, la trattazione fatta precedentemente non considera quest'ultima specie di particelle e non assume la componente in massa delle particelle che passano attraverso. A partire da questi disaccordi tra metodi analitici e simulazioni N -body nasce il modello del *secondary infall*.

Sia $m_{\text{add}}(r)$ la massa dovuta a particelle su orbite con grandi raggi e spendono parte del loro tempo in una sfera di raggio r (per le considerazioni qui fatte si faccia riferimento alla figura 7.1). Si indichi con $M_x(r')$ la massa in particelle che non si allontanano più di r' . Se si assume che le orbite siano radiali, la frazione di tempo spesa da una particella in una sfera

¹Nelle simulazioni usate per questo lavoro di tesi, l'universo considerato è di tipo Λ CDM. In questo caso rifacendo i conti si ricava un contrasto di densità pari a 323, sarà proprio questo valore poi utilizzato per normalizzare i profili di densità.

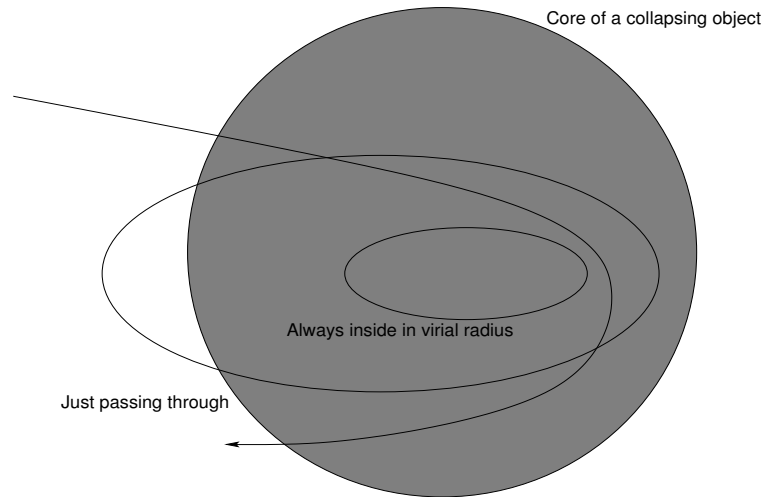


Figura 7.1: Dinamica di un processo di collasso.

di raggio r , che si allontanano al massimo r' da centro è:

$$p(r|r') = \int_0^r \frac{dr}{v(r)} \Big/ \int_0^{r'} \frac{dr}{v(r)}. \quad (7.14)$$

Integrando l'equazione del moto all'interno della shell si ottiene la velocità di queste particelle:

$$v^2(r) = \frac{GM_x(r)}{r} - \frac{GM_x(r')}{r'} = \frac{GM_x(r')}{r'} \left(\frac{M_x(r) r'}{M_x(r') r} - 1 \right). \quad (7.15)$$

Se si assume un profilo di densità a legge di potenza $\rho_x(r) = \rho_x r^{-\gamma}$, e quindi $M_x \propto r^{3-\gamma}$, si può riscrivere la relazione 7.14 come:

$$p(r|r') = \int_0^{r/r'} \frac{dr/r'}{\sqrt{(r/r')^{2-\gamma} - 1}} \Big/ \int_0^1 \frac{dr/r'}{\sqrt{(r/r')^{2-\gamma} - 1}}. \quad (7.16)$$

La massa totale delle particelle che passano attraverso r la si può calcolare moltiplicando la massa totale delle particelle in r' per la frazione di tempo che queste particelle spendono in r e integrando per $r > r'$ e R_{\max} :

$$\frac{m_{\text{add}}(r)}{M_x(r)} = \frac{4\pi \int_r^{R_{\max}} dr' r'^2 \rho_x(r') p(r|r')}{4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho_x(r')}. \quad (7.17)$$

Questa espressione mostra come la frazione di massa addizionale dipende da r e quindi l'assunzione di un fattore di collasso costante, indipendente dal raggio di *turn around*, deve essere modificata.

Se il periodo orbitale della shell interna è maggiore del tempo di collasso della shell più esterna,

allora la dinamica della shell interna ammette un invariante adiabatico che per orbite radiali è $rM(r)^2$. La massa finale ora sarà $M(r) = M_x(r) + m_{\text{add}}(r)$, diversa dalla massa iniziale. Il fattore di collasso associato a questa variazione di massa è quindi dato dalla relazione:

$$F = \frac{M_x(r)}{M_x(r) + m_{\text{add}}(r)}. \quad (7.18)$$

Infine per la dispersione di velocità nella sfera si ha:

$$v(r)^2 = \frac{GM(r)}{r} = \frac{GrM(r)}{r^2} = \frac{v(r')^2}{F(r')^2}. \quad (7.19)$$

7.2.3 Profili di densità della materia oscura

La materia oscura domina la dinamica e la massa in una grande varietà di sistemi che vanno dalle più piccole galassie fino agli ammassi più ricchi. Fisicamente quello che si osserva è che la materia risulta maggiormente concentrata nel centro che nella periferia con un profilo di densità del tutto generale dato dalla relazione³:

$$\rho_G(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\gamma [1 + (r/r_s)^\alpha]^{(\beta-\gamma)/\alpha}}. \quad (7.20)$$

dove γ rappresenta la pendenza media del profilo nella regione centrale, r_s e ρ_s rappresentano i fattori di scala. Si definisce parametro di concentrazione la grandezza $c = r_{\text{vir}}/r_s$.

Sfera isoterma

Uno dei primi modelli proposti per la distribuzione della materia oscura è quello della sfera isoterma motivato da una curva di rotazione piatta,

$$\frac{\rho(s)}{\bar{\rho}} = \frac{178}{3} \frac{1}{s^2}, \quad (7.21)$$

con $s = r/r_{178}$ ⁴.

Per cui la corrispondente massa contenuta in un raggio r è:

$$\frac{M(s)}{M_{178}} = s,$$

e giustamente come già detto:

$$\frac{V_c}{V_{178}} = 1.$$

²Si noterà in seguito che $rM(r) = \text{const.}$ implica $rv = \text{const.}$

³In cui G sta proprio per generale.

⁴ r_{xxx} indica il raggio al quale il contrasto di densità è xxx-volte quello di background.

Modello di Hernquist

L'andamento della brillantezza superficiale nelle galassie ellittiche è ben fittato dalla legge di **de Vaucouler** o alla $R^{1/4}$.

$$I(r) = I_e \exp\{-7.67[(r/r_e)^{1/4} - 1]\} \quad (7.22)$$

Su questo modello di brillantezza superficiale Hernquist nel 1990 ha proposto una nuova espressione per il profilo di densità degli aloni di DM, la cui forma è:

$$\frac{\rho(s)}{\bar{\rho}} = 178 \frac{2 a_H (1 + a_H)^2}{3 s (s + a_H)^3}, \quad (7.23)$$

con s come in precedenza e a_H parametro che setta la scala alla quale la pendenza del profilo di densità cambia da r^{-1} , a piccole distanze dal centro, a r^{-4} , a grandi r . Per la massa, il potenziale e la velocità di rotazione si ha:

$$\begin{aligned} \frac{M(s)}{M_{178}} &= \frac{(1 + a_H)^2 s^2}{(s + a_H)^2}, \\ \frac{\phi(s)}{\phi_{178}} &= -\frac{(1 + a_H)^2}{(s + a_H)}, \\ \frac{V_c(s)}{v_{178}} &= \frac{(1 + a_H)}{(s + a_H)} s^{1/2}. \end{aligned}$$

La dispersione di velocità radiale, in condizioni di equilibrio dinamico, si può ottenere integrando l'equazione di **Jeans**:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dr} (\rho \sigma_r^2(r)) + 2\beta \frac{\sigma_r^2(r)}{r} = -\frac{d\phi}{dr}, \quad (7.24)$$

con

$$\beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2(r)}{\sigma_r^2(r)}.$$

Modello Navarro Frenck White (NFW)

Nel '95 Navarro, Frenck e White hanno proposto un modello alternativo per la distribuzione della materia oscura negli aloni identificati nelle loro simulazioni CDM. Questo è un modello abbastanza compatibile in un buon intervallo di massa, $10^7 - 10^{14} M_\odot$, dalle galassie nane agli ammassi di galassie. Il modello **NFW** si ricava come caso particolare dalla relazione 7.20, $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 1)$:

$$\rho_{\text{NFW}}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)[1 + (r/r_s)]^2}. \quad (7.25)$$

Riscrivendo la relazione, per un miglior confronto diretto, in maniera analoga a quanto fatto nei precedenti casi si ottiene:

$$\frac{\rho(s)}{\bar{\rho}} = \frac{178}{3} \frac{f(a_N)}{s(s + a_N)^2}, \quad (7.26)$$

anche in questo caso a_N definisce la scala di transizione tra l'interno e l'esterno dell'alone, tuttavia in questo caso più graduale rispetto al profilo di **Hernquist**, e

$$f(a_N) = \frac{1}{\ln(1 + 1/a_N) - 1/(1 + a_N)}.$$

Per $r \rightarrow 0$ il profilo **NFW** va come quello di **Hernquist** cioè come r^{-1} , ma a grandi distanze va come r^{-3} , questo porta ad una divergenza logaritmica della massa totale.

Per la massa, il potenziale e la velocità si ha:

$$\frac{M(s)}{M_{178}} = f(a_N) \left[\ln \left(1 + \frac{s}{a_N} \right) - \frac{s}{(s + a_N)} \right],$$

$$\frac{\phi(s)}{\phi_{178}} = -f(a_N) \frac{\ln \left(1 + \frac{s}{a_N} \right)}{s},$$

$$\frac{V_c(s)}{V_{178}} = \frac{(a_N)^{1/2}}{S^{1/2}} \left[\ln \left(1 + \frac{s}{a_N} \right) - \frac{s}{(s + a_N)} \right]^{1/2}.$$

Come precedentemente l'equazione di **Jeans** ci permette di stimare la dispersione di velocità monodimensionale.

Modello Moore (M99) & Navarro (N)

Il modello **NFW** è stato ricavato dagli autori su un largo campione in massa di aloni di materia oscura fredda ed è stato confermato da diverse simulazioni. Per avere un riscontro osservativo bisogna fare riferimento alla curva di rotazione delle galassie (ad esempio per le galassie spirali in cui dominano i moti ordinati usando come traccianti l'HI) o alla dispersione di velocità delle stelle (nel caso di sistemi in cui sono importanti i moti disordinati). Il problema della parte centrale degli aloni di materia oscura di dimensione galattica nasce dal fatto che le osservazioni indicano un andamento piatto, mentre le simulazioni mostrano un irripidimento del profilo nella parte centrale. Malgrado il disaccordo si può pensare che la poco ripida curva di rotazione riprodotta dalle le osservazioni sia sistematicamente poco attendibile poiché misurata con la sola componente dell'HI. Si può tuttavia misurare la curva di rotazione spettroscopicamente e vedere se le stelle tracciano lo stesso potenziale.

Con l'aumentare della risoluzione nelle simulazioni si è osservato non solo un aumento della densità nella regione centrale ma anche una crescita della pendenza in questa regione degli aloni. Molti studi hanno anche mostrato una grande varianza dai parametri strutturali degli aloni, probabilmente in relazione al loro diverso stato di virializzazione.

Le simulazioni di universi CDM fatte evolvere da Moore et al. (1999) con il codice **PKD-GRAV** (per una dettagliata descrizione si faccia riferimento all'articolo) hanno mostrato questo comportamento, cioè che gli aloni presentavano una maggiore pendenza nella regione del *core*. Il modello di densità proposto è, come per il **NFW**, un caso particolare sempre della relazione 7.20, $(\alpha, \beta, \gamma)=(1.5, 3, 1.5)$:

$$\rho_{M99}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^{1.5}[1 + (r/r_s)^{1.5}]} \quad (7.27)$$

M99 ha una pendenza centrale che va come -1.5 e un andamento al raggio viriale come nel **NFW** proporzionale r^{-3} . Questi due profili hanno due parametri liberi, il raggio di scala e la densità corrispondente $r_s = \rho(r_s)$.

Navarro et al. (2003) hanno osservato grandi deviazioni dei profili **NFW** e **M99** da un profilo di densità asintoticamente costante al centro, hanno perciò proposto un profilo che curva in maniera più graduale verso una concentrazione centrale costante, che ha la forma:

$$\ln(\rho_N(r)/\rho_s) = (-2/\alpha_N)[(r/r_s)^{\alpha_N} - 1] \quad (7.28)$$

Questa funzione da un miglior *fit* nelle simulazioni, cosa che non dovrebbe sorprendere visto che presenta un terzo parametro libero α_N , che descrive quanto rapidamente il profilo si allontana da un'andamento a legge di potenza in prossimità del centro.

Il fatto che gli aloni di CDM di dimensione galattica siano più densi degli aloni di dimensioni degli ammassi è una conseguenza dello stato dell'universo al momento del loro collasso. Gli aloni piccoli collassano prima, mentre gli aloni grandi collassano successivamente in un universo meno denso. Seguendo Lacey & Coles (1996) si definisce redshift di collasso (o di formazione) il tempo al quale metà della massa si trova in un alone che formerà quello finale.

Diversi autori hanno suggerito una dipendenza del profilo di densità dalla *merging history* e quindi dalle eventuali sottostrutture che entrano a far parte dell'alone ospite a $z = 0$. In disaccordo con questo Moore et al. 1999 hanno dimostrato, risimulando un alone di dimensione galattica (già identificato in una simulazione Λ CDM) applicando un *cut-off* dello spettro di potenza su scala di 8 Mpc (per trascurare la formazione delle sottostrutture), che i dettagli della *merging history* non influenzano i profili di densità finale.

Per risolvere il problema del disaccordo tra i profili di densità delle osservazioni e delle simulazioni sono stati proposti altri modelli tra i quali presenza di *feedback* esplosivi o presenza di una componente oscura di tipo barionico al posto della DM. Un altro modello di tipo fenomenologico che potrebbe riprodurre le osservazioni si basa su particelle di DM con una grande sezione d'urto per annichilamento, la corrispondente massa va come $\rho^2\sigma$, dove σ rappresenta la dispersione di velocità centrale. L'annichilamento fluirebbe dal centro all'alone, lasciando un raggio

di core che correla con il modulo della dispersione di velocità, con un fattore proporzionale al tempo di collasso. Questo risolverebbe anche il problema delle troppe sottostrutture in aloni di materia oscura, perchè queste subirebbero una grande forza mareale una volta entrati nel raggio viriale dell'alone ospite.

7.3 Simulazione: Individuazione degli aloni

L'individuazione degli aloni di materia oscura all'interno delle simulazioni svolge un ruolo molto importante soprattutto per poter fare dei paragoni con i lavori analitici e con le osservazioni. Gli aloni di DM vengono idealmente definiti come sistemi sferici isolati in condizioni di equilibrio dinamico. Tuttavia in simulazioni con $\Omega_{\text{tot}} = 1$ questi sistemi non sono in condizioni di equilibrio e continuano a subire *accrescimento* e *merging* con gli altri aloni su un tempo scala comparabile con quello di espansione. Anche la condizione di sfericità non viene strettamente rispettata, nelle simulazioni questi sistemi mostrano forme abbastanza allungate.

Nei lavori di analisi e individuazione degli aloni di DM diversi sono stati i metodi sviluppati per identificare i gruppi di particelle. Nel lavoro svolto in questa tesi il metodo utilizzato è quello della *Sovradensità Sferica*, ma per ragioni storiche si farà di seguito anche una breve analisi del metodo *Friends-of-Friends*.

7.3.1 Collasso sferico: Spherical Overdensity

La *Sovradensità sferica* è un metodo che individua gli aloni nella simulazione come regioni sferiche con una certa sovradensità media $\kappa = \langle \rho \rangle / \bar{\rho}$.

Per tutti gli snapshot di ogni risimulazione, seguendo Tormen, Moscardini & Yoshida (2003) (di seguito TMY), si ricava la densità locale di ogni particella di materia oscura calcolando la distanza delle prime 10 particelle più vicine: $\rho_{i,DM} \propto d_{i,10}^{-3}$. Si riordinano quindi le particelle in densità e si prende come centro del primo alone la posizione della particella più legata. Attorno a questo centro, si costruisce una *shell* sferica di materia (DM & DM+GAS), registrando il valore decrescente della sovradensità sferica man mano che cresce il raggio. La crescita si ferma quando il valore della sovradensità supera per la prima volta il valore appropriato per il modello cosmologico al redshift considerato. Per la definizione di sovradensità sferica si è fatto riferimento a Eke, Cole & Frenck (1996). Le particelle appartenenti all'alone vengono così etichettate in una lista e ordinate con densità decrescente. Si continua così per tutti gli aloni e con tutte le particelle. Si è scelto di catalogare solo aloni con almeno 10 particelle e considerare le altre come particelle di campo.

A redshift $z = 0$ questa procedura ha identificato 17 aloni massivi contenenti in media 200,000 particelle di materia oscura nel raggio viriale, e nel caso di simulazioni SPH lo stesso per il gas. Le corrispondenti masse viriali sono nell'intervallo $3.1 \times 10^{14} - 1.7 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$.

7.3.2 Friends-of-Friends

Con questo metodo i gruppi vengono individuati settando una lunghezza di legame tra le particelle b : *linking length*. Due particelle si dicono appartenenti allo stesso gruppo se la loro distanza è minore di $b\bar{n}^{-1/3}$, con \bar{n} densità media delle particelle. I gruppi così individuati hanno una superficie con contrasto di densità dato dalla relazione $\rho/\bar{\rho} \approx 3/(2\pi b^3)$. Valori tipici della lunghezza di legame sono dell'ordine di 0.2, che corrisponde ad un contrasto di densità di circa $\rho/\bar{\rho} \approx 60$, che assunto un profilo $\rho(r) \sim r^{-2}$ porta a $\langle \rho \rangle/\bar{\rho} \approx 180$ compatibile con il valore 178 predetto dal modello del collasso sferico con un filtro *top hat*.

7.4 Merging history tree

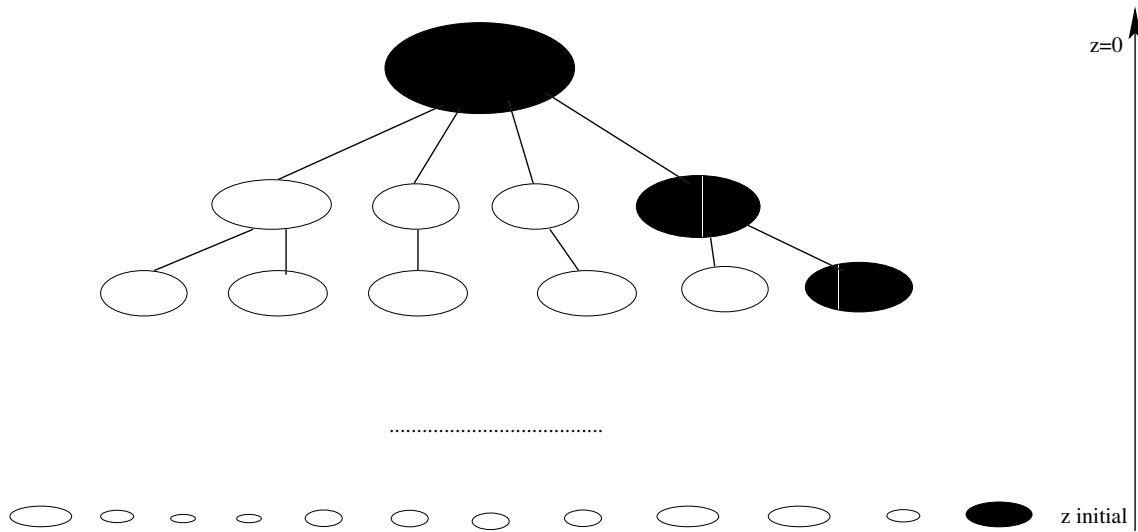


Figura 7.2: *Merging history* di un alone.

Per ogni alone ospite di dimensione d'ammasso si costruisce l'albero della storia di *merging* usando i cataloghi degli aloni a tutti gli snapshot (TMY). Partendo da un'alone a $z = 0$, si definiscono i suoi progenitori come tutti gli aloni che contengono almeno una particella che appartiene all'alone selezionato a $z = 0$. Si chiama *progenitore principale* a $z = dz_1$ dell'alone a $z = 0$ l'alone che contribuisce maggiormente in particelle. Si procede così di snapshot in

snapshot fino a che il progenitore principale non si perde nel campo. Si chiamano *satelliti* tutti i progenitori che mergono con il progenitore principale, si identifica così il *tempo di merging* il redshift al quale il satellite attraversa il raggio viriale del progenitore più grande per la prima volta (questo ovviamente tra il redshift al quale il satellite è fuori e quello al quale è dentro⁵).

⁵Ogni simulazione è caratterizzata da una serie di snapshot discreti, quindi l'identificazione dei tempi caratteristici come quello di merging deve avvenire tra due valori di z sistematicamente ben definiti.

-> INDICE

Seguire le sottostrutture nelle simulazioni

Il processo di formazione gerarchica degli aloni di materia oscura fredda lascia dietro di sé resti di *merging* dovuti allo *stripping* mareale, che sopravvivono come subaloni in aloni più grandi (*host halos*). Questi rappresentano le potenziali galassie o satelliti d'alone galattico o di ammasso, e forniscono per questo una importante prova di carattere osservativo per la cosmologia. Tuttavia nel caso in cui non sia possibile una osservazione diretta della controparte luminosa, la popolazione delle sottostrutture può essere dedotta attraverso studi di *lensing* gravitazionale.

Solo recentemente le simulazioni numeriche di formazione di strutture su grande scala, hanno raggiunto una risoluzione tale, sia in massa che in forza da poter permettere un dettagliato studio delle sottostrutture negli aloni di materia oscura (Tormen 1997; Tormen, Diaferio & Syer 1998; Moore et al. 1998, 1999; Klypin et al. 1999a, b; Ghigna et al. 1998, 200; Stoerh et al. 2002; De Lucia et al. 2004; Diemand, Moore & Stadel 2004; Gill et al. 2004a, b; Gao et al. 2004; Reed et al. 2004; Kravstov et al. 2004). Molti di questi lavori hanno trovato che in termini delle loro proprietà gli aloni di materia oscura sono omologhi; la struttura interna degli aloni di dimensione galattica sembrerebbe una versione riscalata di quella degli ammassi ricchi. Questo implica una abbondanza delle sottostrutture indipendente dalla massa dell'alone ospite e una distribuzione di tipo poissoniana, cioè:

$$n(m|M)dm = n(m)d(m), \quad (8.1)$$

dove $n(m|M)$ indica il numero di sottostrutture con massa tra m e $m + dm$ che risiedono in aloni progenitori di massa M .

Tuttavia un recente lavoro di Gao et al. 2004, analizzando un grande campione di aloni di materia oscura estratti da grandi ri-simulazioni ad alta risoluzione, e dalla simulazione cosmologica GIF2, ha messo in evidenza che la normalizzazione della funzione di massa dei subaloni dipende dalla massa dell'alone ospite. In particolare è stato rilevato che gli aloni più massivi contengono una frazione più grande di sottostrutture, in relazione al fatto che questi si formano tardi, e quindi i satelliti entrati recentemente perdono poca massa.

Uno degli scopi di questo lavoro di tesi è di calibrare, su ri-simulazioni ad alta risoluzione di ammassi di galassie, delle "ricette", riguardanti i subaloni, da utilizzare per modelli semi-analitici di formazione di galassie.

Da un punto di vista osservativo, i lavori svolti fino ad oggi rivelano un'abbondanza di sottostrutture in aloni galattici di alcuni ordini di grandezza in meno rispetto a quelli degli ammassi. In un modello CDM, questa variazione del numero di sottostrutture da alone ad alone, potrebbe tuttavia dipendere oltre che dalla massa dell'alone ospite, dalla *merging history* o anche dall'ambiente.

Da un punto di vista teorico i modelli semi-analitici suggeriscono anche che le proprietà fisiche dei barioni possono rendere gli aloni di piccola massa privi di stelle indicando una consistenza con le osservazioni in un universo di tipo Λ CDM.

Proprietà delle Simulazioni	
Ω_m	0.3
Ω_b	0.03
Ω_Λ	0.7
H_0	$70 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}$
$\sigma_8(z=0)$	0.9
ϵ (<i>softening</i> gravitazionale)	$5 \text{ kpc}/h$

Tabella 8.1: Proprietà delle costanti che caratterizzano l'universo utilizzate nelle simulazioni.

Le proprietà delle sottostrutture potrebbero dipendere dal rapporto M/M_* (dove M_* è la massa caratteristica degli aloni collassati) perchè gli aloni di piccola massa collassano prima in un universo più denso, dove le fluttuazioni dello spettro di potenza sono più ripide. Le sottostrutture in aloni di piccola massa e ad alto redshift hanno perciò una densità caratteristica più grande, e quindi dovrebbero essere soggette meno allo *stripping* mareale.

M_* rappresenta il valore caratteristico della massa per cui la varianza del campo di densità

filtrato a redshift z , euguaglia il corrispondente valore della sovradensità critica prevista dal collasso sferico:

$$\sigma(M_*, z) = \delta_c(z); \quad (8.2)$$

ad esempio Navarro et al. 1997 usano il seguente modello:

$$\delta_c(z) = 0.15(12\pi)^{2/3}[\Omega_m(z)]^{0.0055}. \quad (8.3)$$

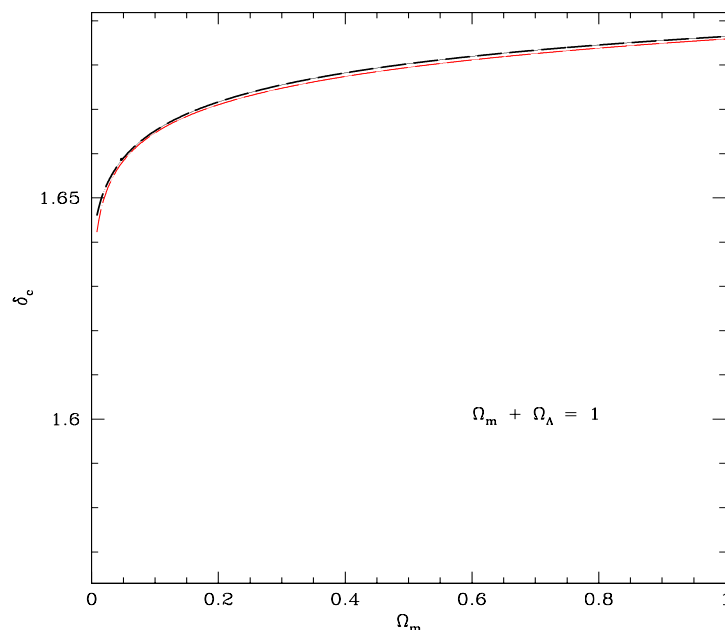


Figura 8.1: Andamento della soglia di sovradensità critica in termini del parametro di densità della materia, da Eke et al. 1996. La curva rossa è l'equazione 8.3.

8.1 Post-Processing di una simulazione: le sottostrutture

Come già detto nel capitolo precedente, l'individuazione degli aloni e il *merger tree* sono svolti seguendo il metodo utilizzato da Tormen, Moscardini & Yoshida 2004.

Dopo aver costruito i cataloghi degli aloni, sono stati individuati gli aloni ospiti al tempo attuale ed è stata costruita la loro *merging history*. Fatto questo, sono stati calcolati i profili di densità che sono serviti come input al codice di individuazione delle sottostrutture: **Surv**.

Surv segue l'evoluzione dei subaloni all'interno dell'alone ospite, li seleziona tra gli aloni che allo snapshot successivo attraversano il raggio dell'alone parente, con la condizione che abbiano almeno un centinaio di particelle¹ e che “mergano” almeno con il 50% della propria massa. Successivamente, persi dal catalogo **SO** (*Spherical Overdensity* creato dall'*halo finder*: **Dhf** o **Denhf** nel caso di simulazioni SPH), l'alone diventa un subalone e viene seguito nella sua storia all'interno dell'alone ospite.

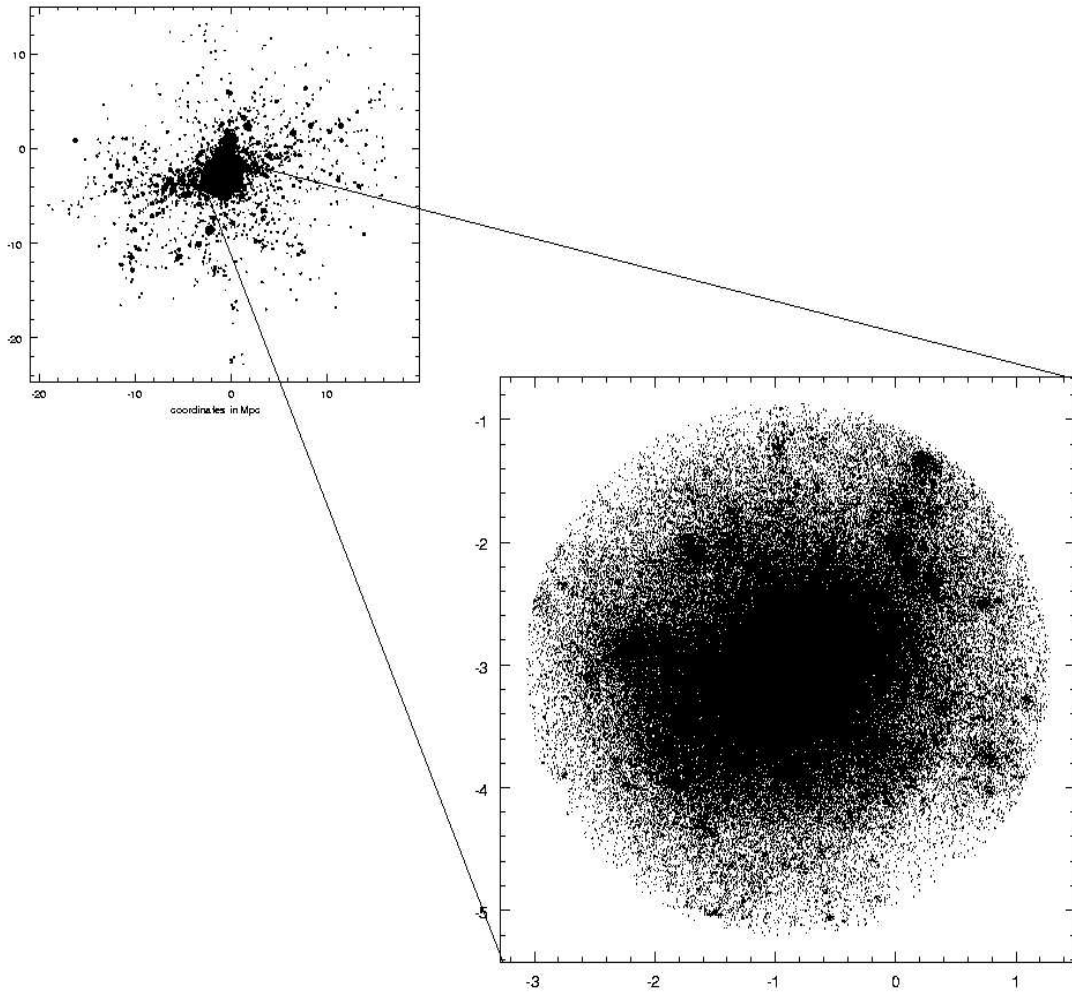


Figura 8.2: Nella box in alto gli aloni individuati in una simulazione a $z = 0$, in basso un alone ospite in cui sono ben distinguibili i subaloni.

Viene così creato un nuovo catalogo, allo snapshot di merging, di particelle *self-bound* (**SB**)

¹Per le simulazioni di sola materia oscura sono stati creati anche i cataloghi a partire da sottostrutture che mergono con dieci particelle.

presenti nel raggio viriale (quello che il satellite aveva prima di entrare nel raggio dell'alone parente). L'output di questo codice dà anche informazioni a riguardo dello stato dinamico sia del gas che della materia oscura dei subaloni, come il pericentro dell'orbita, la posizione del centro di massa delle due componenti e l'eccentricità.

<i>cluster</i>	alone ospite	$M_v(t_0) [M_\odot/h]$	n. di subaloni (t_0)	$f_m = \sum_i m_i/M_v$
g10	1	8.93×10^{14}	95	7.23×10^{-2}
g10	7	7.27×10^{14}	94	15.45×10^{-2}
g1196+1661	3	7.91×10^{14}	112	12.58×10^{-2}
g1196+1661	14	5.31×10^{14}	55	13.51×10^{-2}
g1429+2388	3	3.99×10^{14}	29	4.83×10^{-2}
g1429+2388	7	4.87×10^{14}	62	20.15×10^{-2}
g2	2	8.42×10^{14}	143	7.96×10^{-2}
g24+200	1	1.70×10^{15}	162	8.69×10^{-2}
g24+200	3	6.54×10^{14}	78	4.77×10^{-2}
g3	10	1.38×10^{15}	126	20.30×10^{-2}
g3	11	4.23×10^{14}	31	17.71×10^{-2}
g32	2	1.19×10^{15}	131	8.79×10^{-2}
g479+1496	1	5.45×10^{14}	121	21.21×10^{-2}
g479+1496	3	3.15×10^{14}	113	5.62×10^{-2}
g482+719	1	7.56×10^{14}	124	17.15×10^{-2}
g482+719	4	4.04×10^{14}	58	12.93×10^{-2}
g7	5	1.46×10^{15}	136	20.90×10^{-2}

Tabella 8.2: Proprietà dei *cluster* simulati a redshift zero.

8.2 Massa accresciuta e Funzione di Massa dei Subaloni

- Da ora in poi si indicherà, salvo modifiche, con m la massa di un subalone e M quella dell'alone parente in cui risiede. M è definita come la massa totale dentro il raggio viriale dell'alone comprese tutte le sottostrutture.

Si indicherà altresì con $x = m/M$ e con $y = m/M(t_m)$, dove $M(t_m)$ fa riferimento alla massa dell'alone parente al tempo di merging di m . I tempi t_m e t_0 sono rispettivamente il tempo di merging e quello attuale.

La dimensione attuale della massa $M(t_0)$ è dovuta agli accrescimenti e *merging* subiti durante la sua evoluzione. Ricavarne il tasso di crescita rappresenta un importante passo per la comprensione dei fenomeni dinamici e fisici che si verificano negli ammassi di galassie.

La frazione di massa accresciuta è stata stimata direttamente dalla simulazione ed è stata considerata la massa dei satelliti al tempo prima dell'entrata nell'alone ospite.

In figura 8.3 viene riportata la funzione di massa dei subaloni non evoluta, cioè il numero di satelliti nell'intervallo di massa $m(t_m)/M(t_0)$, $(m(t_m) + dm)/M(t_0)$. Le masse m utilizzate sono quelle auto-legate, calcolate in base al numero di particelle che hanno energia di legame negativa.

Un subalone in movimento su una certa orbita, in un potenziale statico (in prima approssimazione), subisce perdita di massa dovuta a effetti mareali e di riscaldamento (*heating*). Se le orbite fossero fisse (ciò permetterebbe di trascurare il "riscaldamento") il tasso di perdita di massa declinerebbe rapidamente con il tempo e tutta la massa sopra il raggio mareale sarebbe "strappata" in pochi periodi orbitali. Tuttavia le orbite non sono statiche (Tormen, Diaferio & Syer 1998 e Tormen 1997) e il riscaldamento mareale tende a premere le particelle in prossimità del raggio di marea dove possono essere perse. L'orbita evolvendo a causa della frizione dinamica porta ad una diminuzione del numero di particelle del satellite. Questi due effetti messi insieme prolungano la durata del tasso di perdita di massa, che può portare ad una completa distruzione del satellite in alcuni periodi orbitali.

E' da notare che anche i parametri dalle orbite, come il pericentro e l'eccentricità, variano. Un stima di questi, al momento di entrata nel progenitore principale, è molto importante. Ciò perchè riguardano come il processo di accrescimento si verifichi, risultando quindi di necessario impiego nei modelli semi-analitici di formazione di galassie che seguono le sottostrutture. Per studiare i parametri orbitali si fa riferimento al caso di un potenziale statico e sferico (Binney & Tremaine 1987). Questa approssimazione è poco valida però nel caso di un satellite massivo, il cui contributo al potenziale totale non è trascurabile, e ad alti redshift, quando l'alone cresce molto rapidamente. Le orbite con una distribuzione iniziale dell'eccentricità attorno a 0.3 tendono a circularizzarsi e a distribuirsi secondo una **Gaussiana** con picco intorno a circa 0.5 e dispersione 0.2.

$M(z)$ passa attraverso una serie di valori sempre crescenti a causa dei fenomeni sopra descritti (figura 8.4), contemporaneamente la massa m di una sottostruttura diminuisce a causa dello *stripping* mareale e del riscaldamento. In figura 8.4 è riportata anche (linea tratteggiata) la relazione (van den Bosch 2002):

$$\log \left[\frac{M(z)}{M_0} \right] = -0.301 \left[\frac{\log(1+z)}{\log(1+z_f)} \right]^w, \quad (8.4)$$

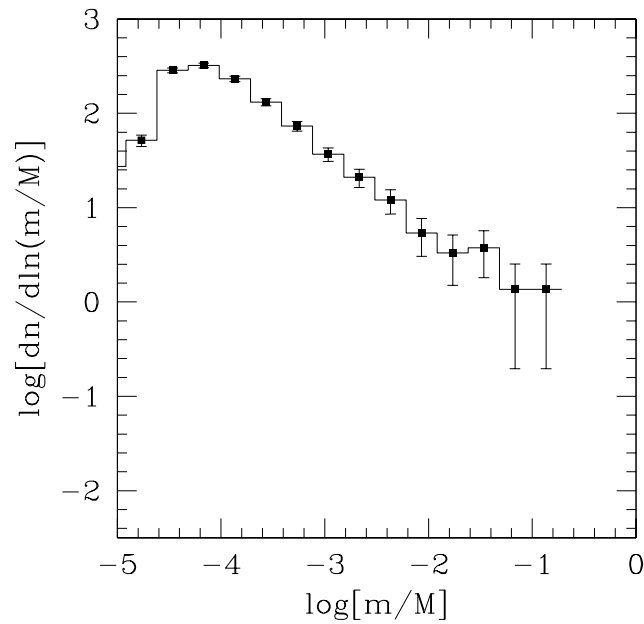


Figura 8.3: La funzione di massa dei subaloni non evoluta, cioè il numero di subaloni accresciuti con massa nell'intervallo $m/M(t_0)$, $(m + dm)/M(t_0)$, con $M(t_0)$ la massa dell'alone parente a redshift zero .

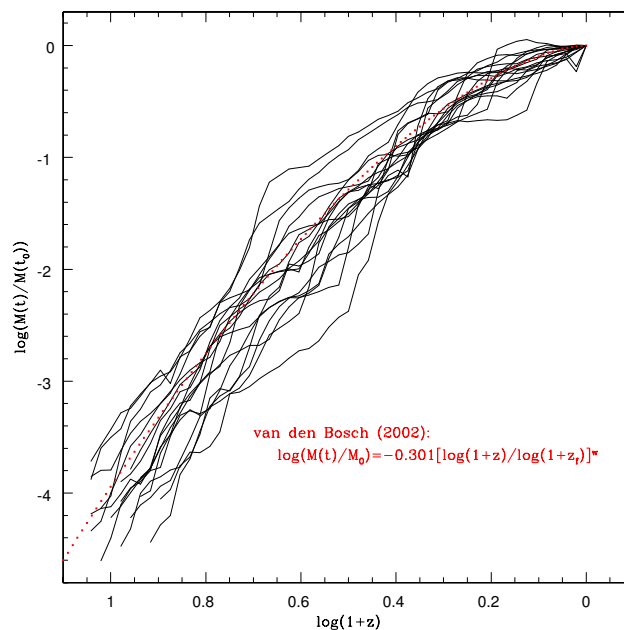


Figura 8.4: In funzione del redshift viene riportata la massa dell'alone ospite normalizzata a $z = 0$. La linea tratteggiata rappresenta la relazione di van den Bosh 2002, i residui hanno una deviazione standard di circa 0.29.

ricavando i parametri liberi $w(M_0)^2$ e z_f (redshift di formazione) come media su tutti gli aloni progenitori.

8.2.1 Aloni di materia oscura

Calcoli teorici idealizzano gli aloni di materia oscura come oggetti sferici isolati in condizioni di equilibrio dinamico. Tuttavia gli oggetti che vengono individuati in una simulazione, ad esempio con $\Omega \approx 1$, non sono nè isolati nè in completo equilibrio dinamico a causa del fatto che questi continuano a crescere tramite accrescimento e *merging* con altri aloni su un tempo scala comparabile con il tempo di espansione, dell'ordine quindi del tempo scala dinamico interno. Nel caso di un universo con $\Omega \ll 1$ ci si aspetta, d'altra parte, che le condizioni di isolamento e di equilibrio dinamico siano maggiormente verificate.

L'elevata dinamicità, e quindi il *clustering* dei sistemi, rende l'alone di materia oscura non più un sistema omogeneo con un profilo di densità via via decrescente verso l'esterno (*halo model*), ma un sistema caratterizzato da un certo numero di piccoli *clumps* (circa il 9 – 20% in massa risulta localizzata nei subaloni).

8.2.2 Funzione di massa di accrescimento (unevolved SHMF)

Come già detto in precedenza la funzione di massa di accrescimento fornisce il numero di satelliti accresciuti sull'alone principale in un dato intervallo di massa in termini di $M(t_0)$. Indipendentemente dal fatto che gli aloni più massivi si formano dopo e quelli meno massivi prima³, la funzione di massa di accrescimento dipende poco dalla massa dell'alone progenitore a $z = 0$. Questo lo si può notare bene in figura 8.5 in cui viene riportata la funzione di massa di accrescimento non evoluta (u-SHMF) per i satelliti accresciuti in tre diversi gruppi di aloni progenitore con diverse $M(t_0)$.

In un modello di *clustering* gerarchico di formazione delle strutture, i sistemi più piccoli sono i primi a formarsi mentre i più grandi sono gli ultimi, tenendo sempre conto del fatto che non si verifichi deframmentazione. In questo scenario gli aloni, che subiscono il clustering, ad alti redshift tenderanno ad accrescere maggiormente i sistemi piccoli mentre a piccoli z i sistemi più grandi (fig 8.6), sempre relativamente alla loro massa al tempo attuale.

Trascurando gli effetti numerici che tendono a diminuire il numero di sottostrutture piccole, la funzione di massa di accrescimento delle nostre simulazioni è ben interpolata (nella parte

² $w = 1.211 + 1.858 \log(1 + z_f) + 0.308 \Omega_\Lambda^2 - 0.032 \log[M_0 / (10^{11} h^{-1} M_\odot)]$.

³Si definisce redshift di formazione di un alone quello al quale l'alone possiede metà della sua massa a $z = 0$.

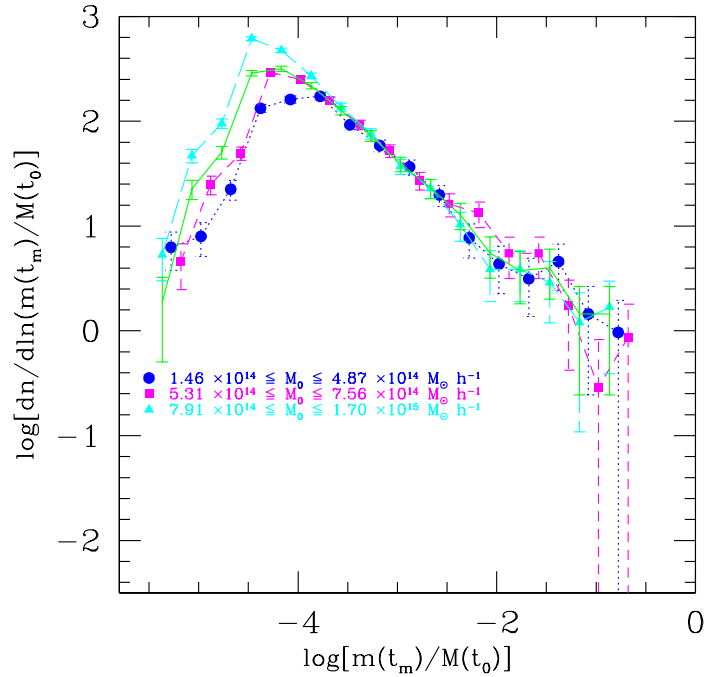


Figura 8.5: *Unevolved* SHMF, i satelliti sono stati divisi in relazione alla massa a redshift zero dell'alone progenitore.

lineare) dalla seguente relazione a legge di potenza:

$$dn \sim \left(\frac{m}{M_0} \right)^{-1.77} d \left(\frac{m}{M_0} \right).$$

In figura 8.7 è riportata:

$$\frac{df_{s,t_m}}{d \ln m(t_m)} = \frac{m(t_m)}{M(t_0)} \frac{dn}{d \ln m(t_m)},$$

che indica la frazione di massa accresciuta, in termini della massa dell'alone progenitore a $z = 0$. Da questa si nota che molta della massa presente oggi nell'alone viene originata da satelliti con massa $m(t_m) \sim 0.1M_0$.

8.2.3 Tasso di perdita di massa relativamente all'alone ospite

Se $m(t_m)$ e $M(t_m)$ rappresentano la massa del satellite e dell'alone parente al momento del *merging*, in relazione a quanto illustrato in figura 8.8, il satellite subisce perdita di massa e

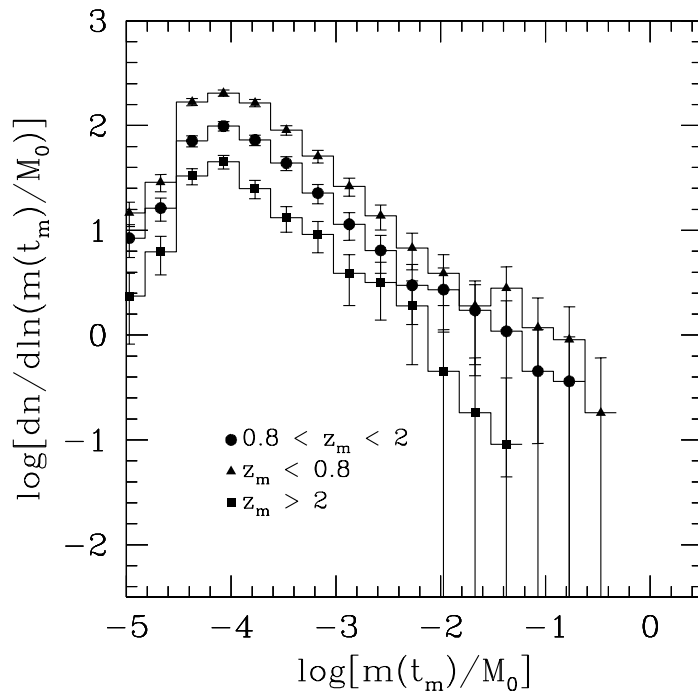


Figura 8.6: Funzione di massa di accrescimento a diversi redshift come indicato.

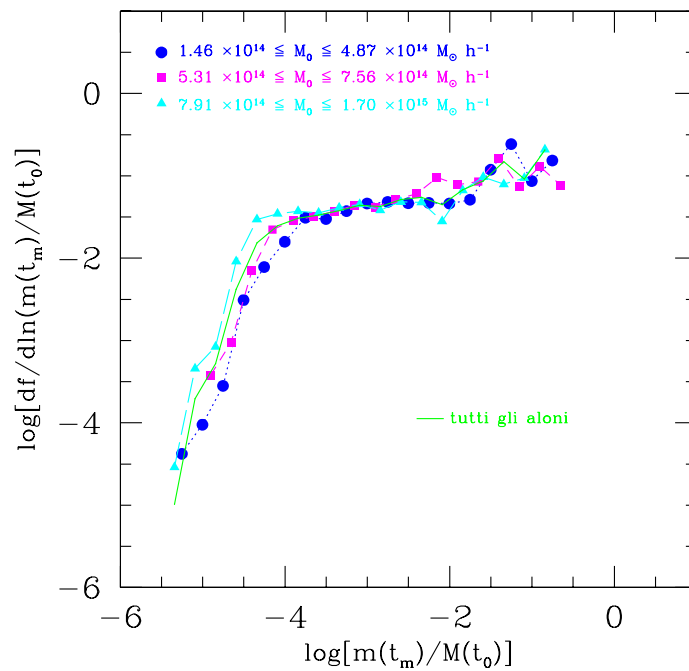


Figura 8.7: Frazione di massa accresciuta.

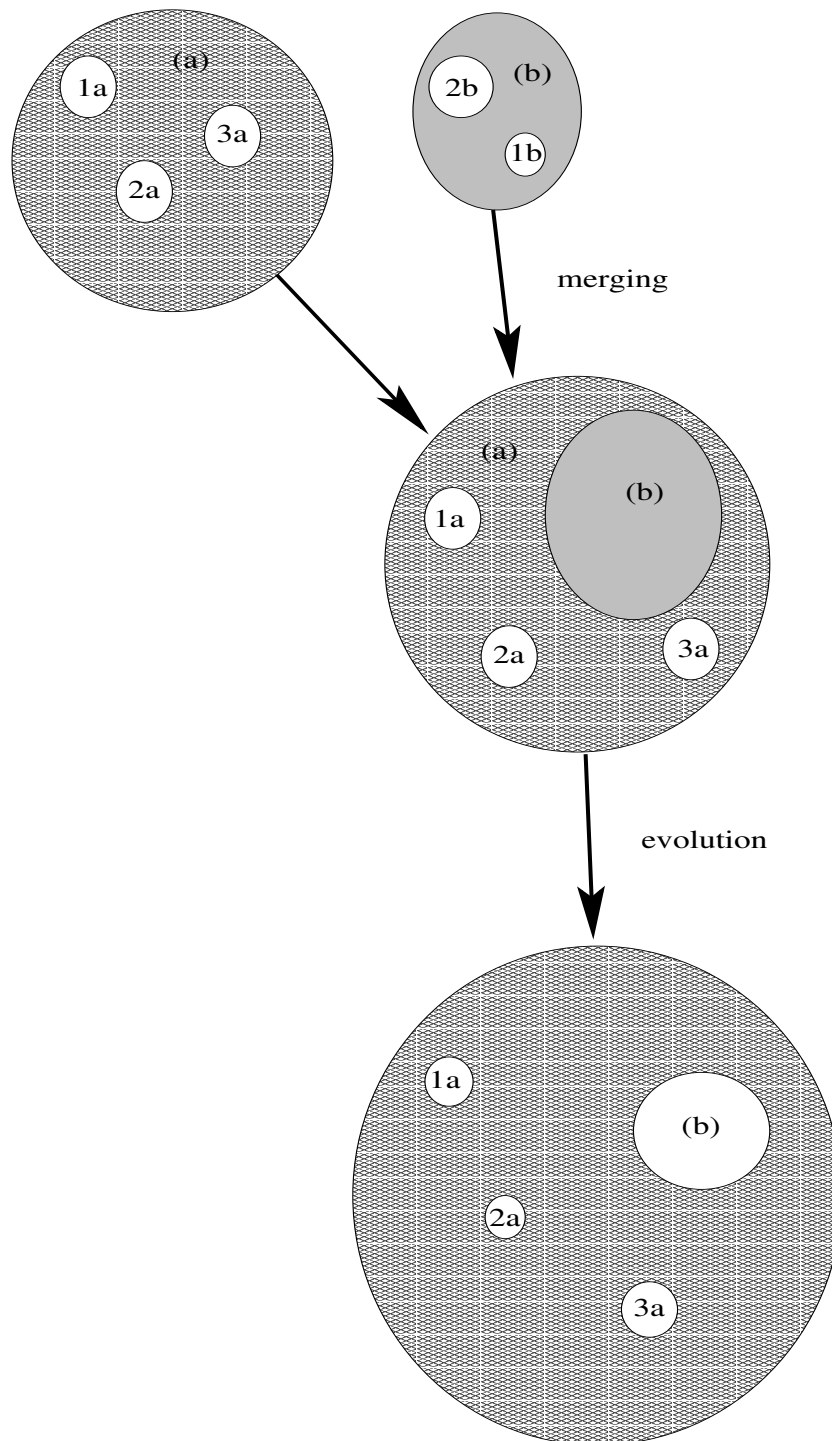


Figura 8.8: Illustrazione del processo di *merging* ed evoluzione. In alto il *merging* di due aloni che porta alla formazione di un nuovo sistema (in centro). In basso è illustrato il processo di evoluzione in cui la massa dell'alone parente aumenta, mentre quella dei subaloni diminuisce.

l'alone aumento. Se $x(t) = m(t)/M(t)$, allora la sua variazione temporale potrà essere scritta come:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm(t)}{dt} - m \frac{1}{M^2} \frac{dM(t)}{dt}. \quad (8.5)$$

Tuttavia avendo a disposizione un numero adeguato di satelliti (per questo si faccia riferimento alla tabella 8.2) per poter fare statistica, abbiamo calcolato ad ogni redshift della simulazione consecutivo al *merging*, il rapporto $m(z)/M(z)$. Si è successivamente riscaldato il redshift in tempo sapendo che in un modello Λ CDM vale la relazione:

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}}, \quad (8.6)$$

e ad ogni redshift⁴:

$$t = \frac{2}{3H_0} F(z, \Omega_m(0)). \quad (8.7)$$

Ottenuti gli andamenti temporali abbiamo quindi potuto ricavare:

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{m(t)/M(t) - m(t+dt)/M(t+dt)}{dt}.$$

Il tasso di perdita di massa dei satelliti dipende tuttavia anche dalla loro orbita, e dal numero di giri che questo compie attorno al centro dell'alone ospite. Taylor & Babul 2004 stimano ad esempio il tasso di perdita di massa in base al numero di giri fatti dal subalone. Fatti i calcoli, si evince che in poco più di due giri e mezzo dovrebbe perdere una considerevole frazione di massa e "diluirsi" nell'alone, tenendo conto che su orbite più eccentriche la perdita di massa dovrebbe essere maggiore. Al pericentro il subalone si trova in una regione maggiormente densa, per cui il raggio mareale tende a diventare più piccolo e la massa che viene persa risulta maggiore, anche se il tempo di durata del processo è abbastanza breve⁵.

In figura 8.9 sono riportati i valori di dx/dt contro $x(t)$ per tutti i satelliti che hanno un rapporto in massa con l'alone ospite di almeno 10^{-4} (limite di risoluzione in massa). Dalla figura si può notare un andamento abbastanza lineare, e sono anche mostrati gli andamenti di alcuni satelliti. Questi compaiono nella parte alta, e successivamente, in relazione ai processi dinamici che si verificano sia sul satellite, che nell'alone, questi si spostano man mano verso la parte bassa.

In relazione al fatto che i tempi dinamici dei sistemi presenti nell'universo su grande scala dipendono dalla loro densità, e che la densità degli aloni diminuisce con il redshift, ci si aspetterebbe un andamento temporale della pendenza e del punto zero della retta che interpola

⁴La $F(z, \Omega_m(0))$ è un'opportuna funzione che parametrizza numericamente la dipendenza del tempo dal redshift e dalla cosmologia.

⁵Questo perchè ovviamente il satellite si muove più velocemente al pericentro che all'apocentro.

i punti. Si è così proceduto a dividere i punti in figura 8.9 in relazione al redshift al quale viene calcolata dx/dt , in modo che in ogni *bin* compaiano lo stesso numero di punti. I risultati sono riportati nelle figure 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14 e 8.15.

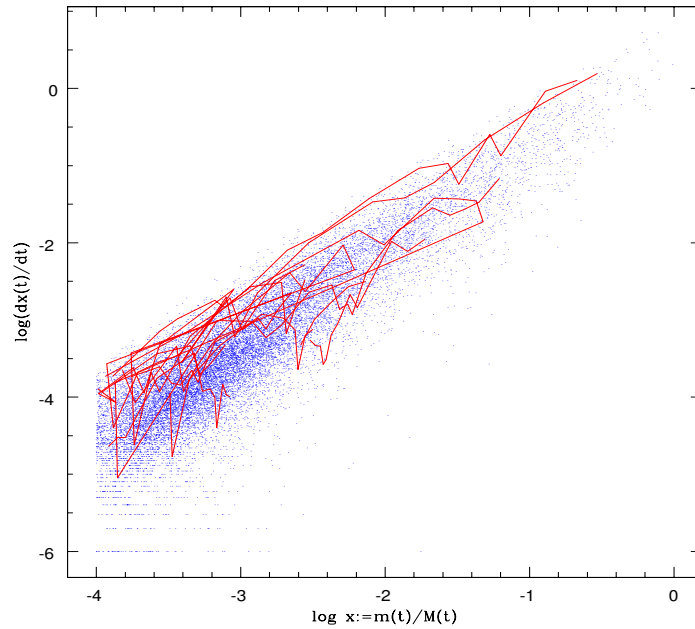


Figura 8.9: Tasso di perdita di massa dei subaloni relativamente all'alone ospite. Le linee indicano gli andamenti dei satelliti.

Si è successivamente proceduto a ricavare una relazione analoga, ma che potesse descrivere il tasso di perdita di massa del subalone rispetto alla massa dell'alone progenitore al momento del *merging* $M(t_m)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{m(t)/M(t_m) - m(t + dt)/M(t_m)}{dt} = \frac{1}{M(t_m)} \frac{dm}{dt}.$$

Gli andamenti delle pendenze delle rette e dei punti zero in base al redshift sono riportati nelle figure successive, e in tabella 8.4.

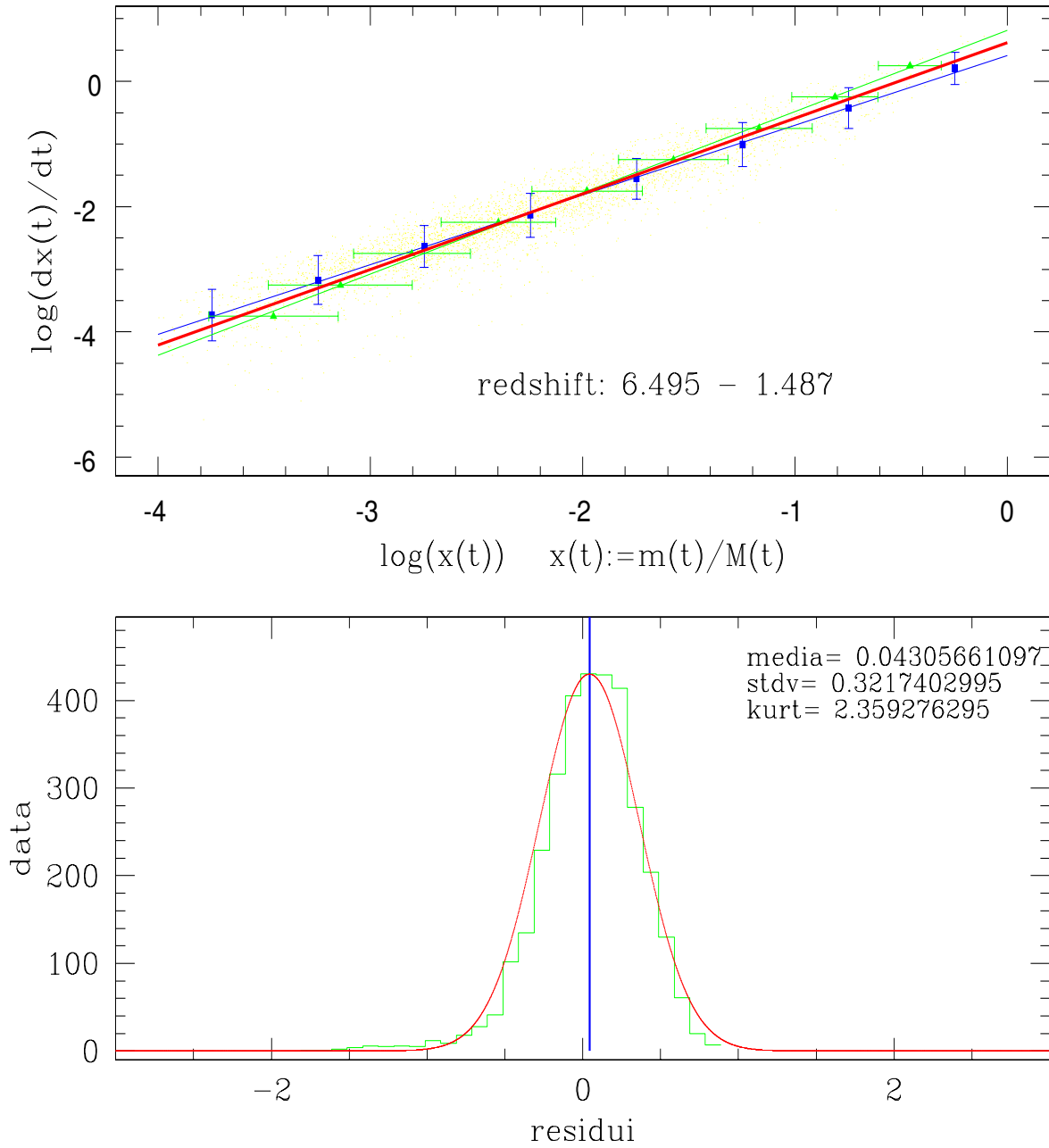


Figura 8.10: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

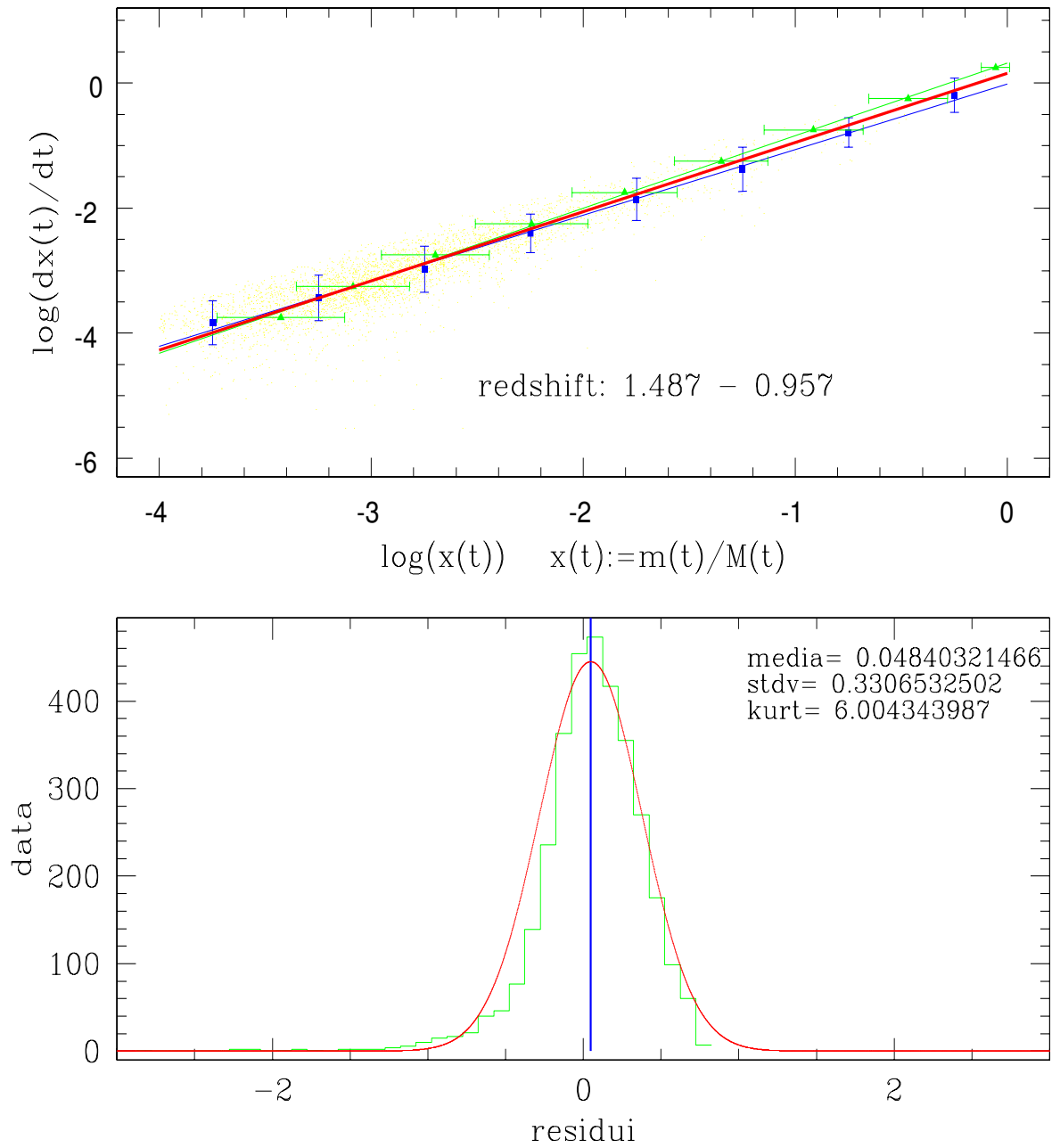


Figura 8.11: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

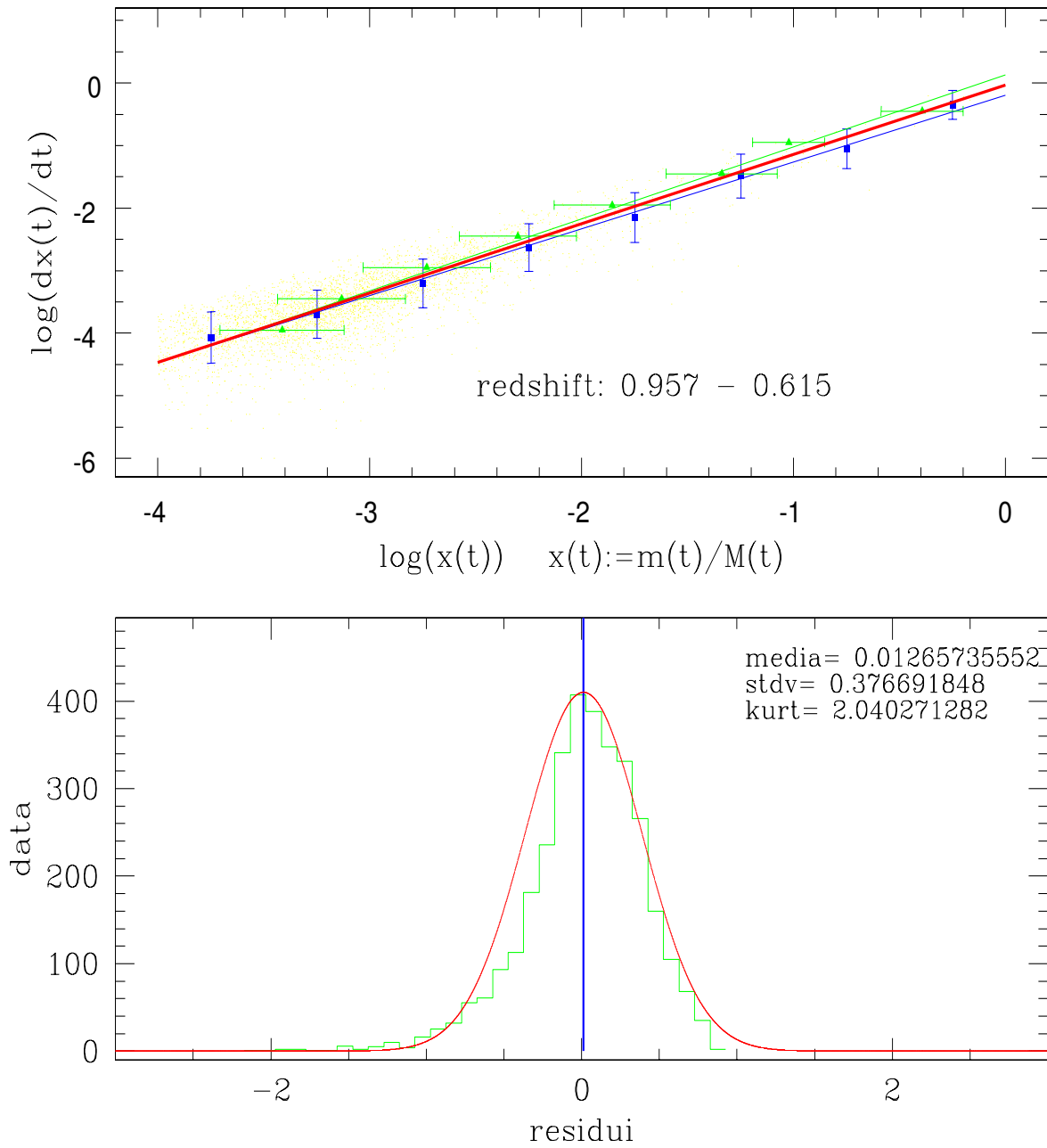


Figura 8.12: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

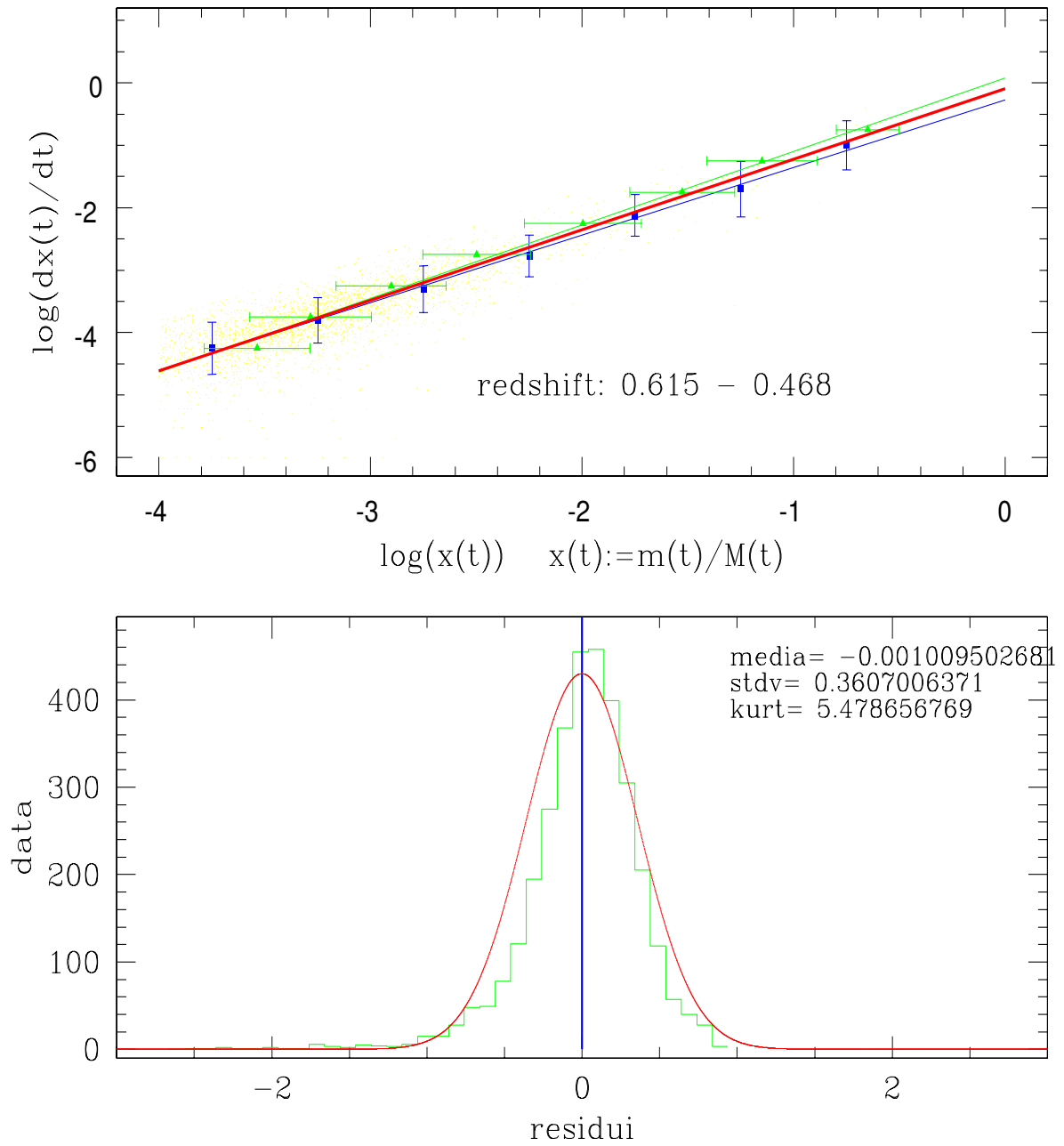


Figura 8.13: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

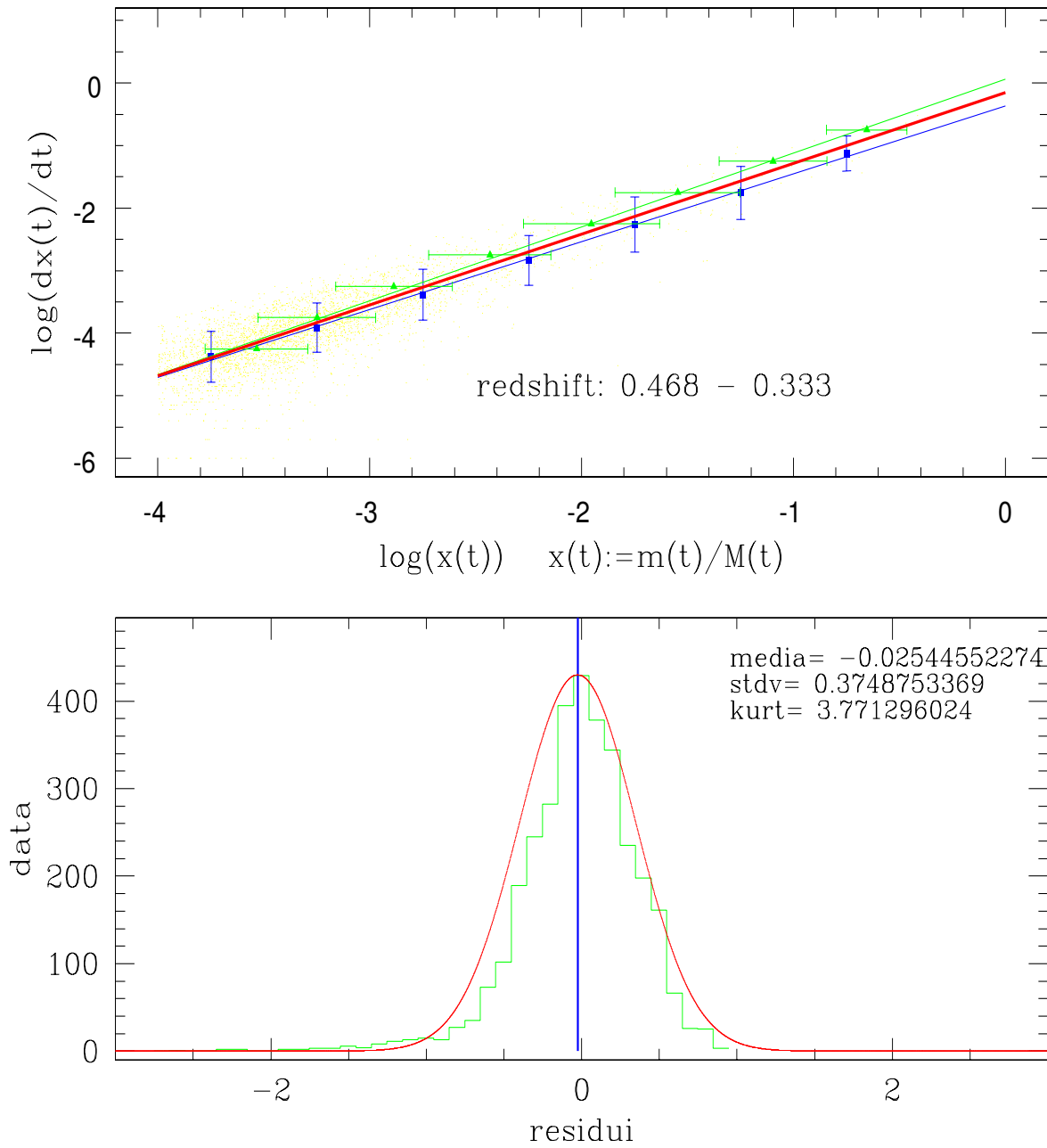


Figura 8.14: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

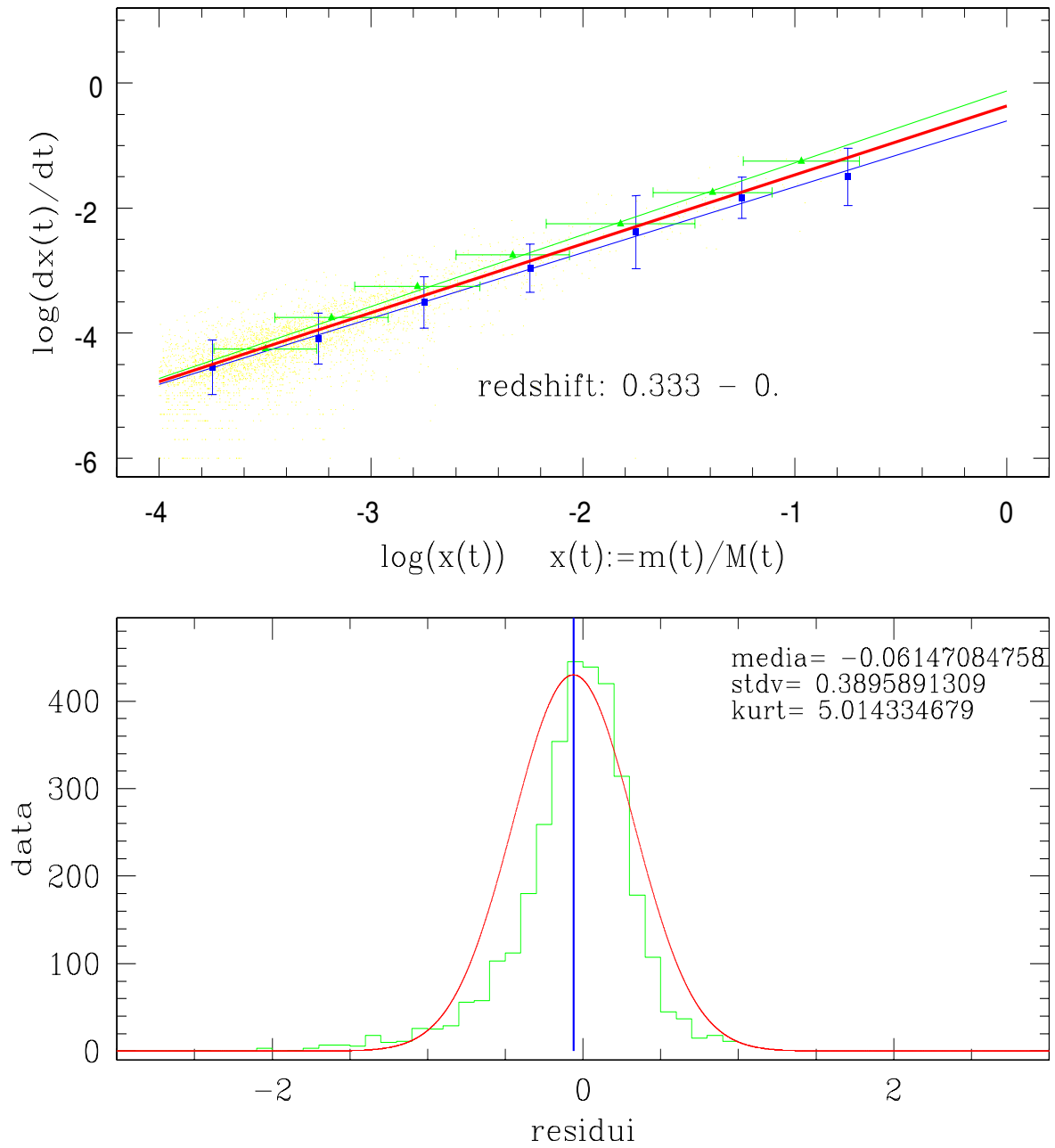


Figura 8.15: $dx(t)/dt$ contro $x(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

	pendenza (p)	$\sigma(p)$	punto zero (q)	$\sigma(q)$	intervallo in z
1	1.25	0.13	0.66	0.24	6.495 – 1.487
2	1.15	0.10	0.21	0.22	1.487 – 0.957
3	1.14	0.07	0.01	0.21	0.957 – 0.615
4	1.16	0.08	-0.02	0.26	0.615 – 0.468
5	1.15	0.07	-0.12	0.25	0.468 – 0.333
6	1.11	0.06	-0.35	0.25	0.333 – 0.

Tabella 8.3: Proprietà delle rette interpolanti i punti nelle figure 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.15.

	pendenza (p)	$\sigma(p)$	punto zero (q)	$\sigma(q)$	intervallo in z
1	1.21	0.24	0.30	0.43	6.495 – 1.487
2	1.15	0.22	-0.01	0.44	1.487 – 0.957
3	1.14	0.16	-0.16	0.40	0.957 – 0.615
4	1.18	0.12	-0.14	0.34	0.615 – 0.468
5	1.16	0.11	-0.25	0.35	0.468 – 0.333
6	1.20	0.12	-0.23	0.41	0.333 – 0.

Tabella 8.4: Proprietà delle rette interpolanti i punti nelle figure 8.18, 8.19, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23.

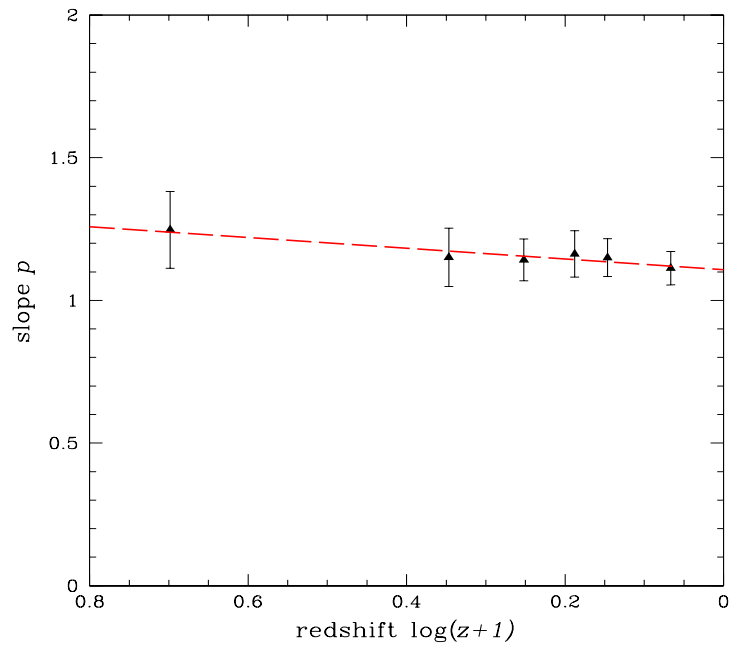


Figura 8.16: Andamento della pendenza della retta interpolatrice in funzione del redshift.

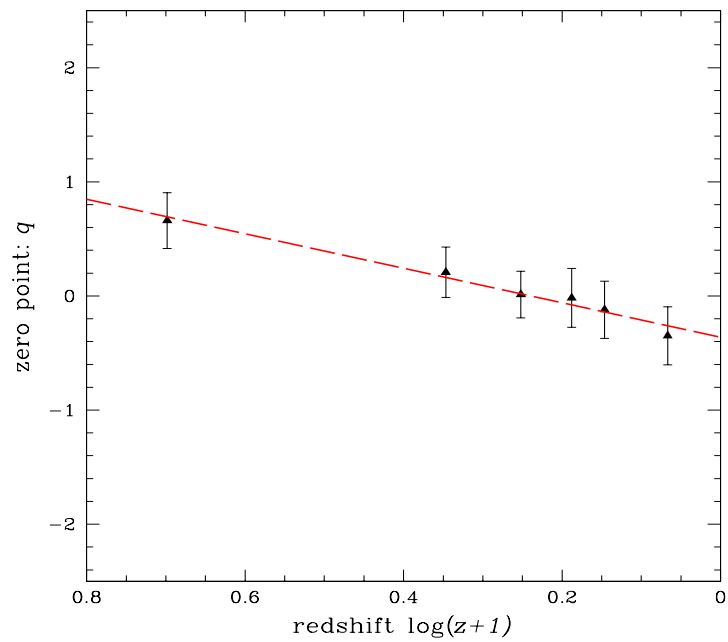


Figura 8.17: Andamento del punto zero della retta interpolatrice in funzione del redshift.

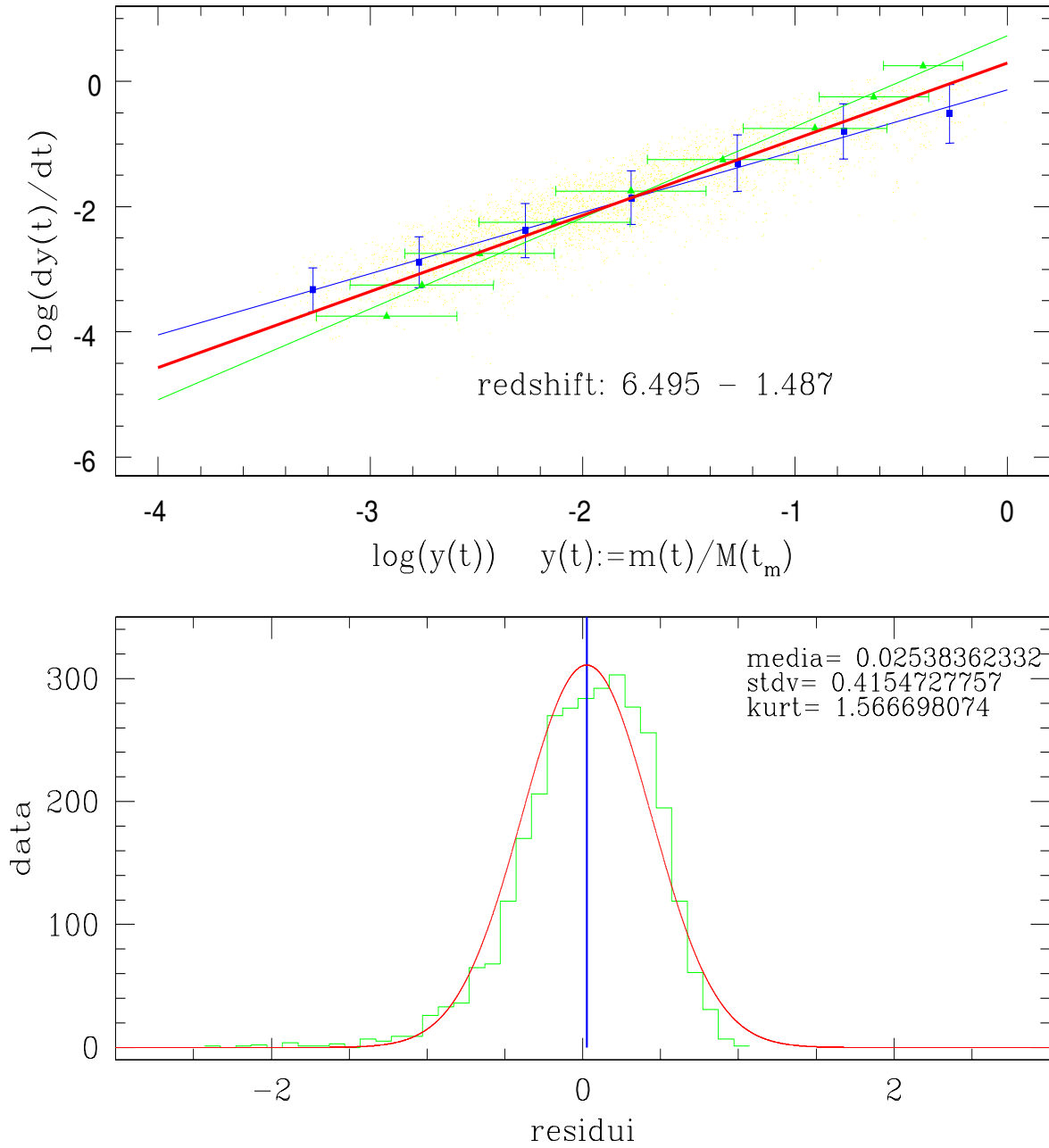


Figura 8.18: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

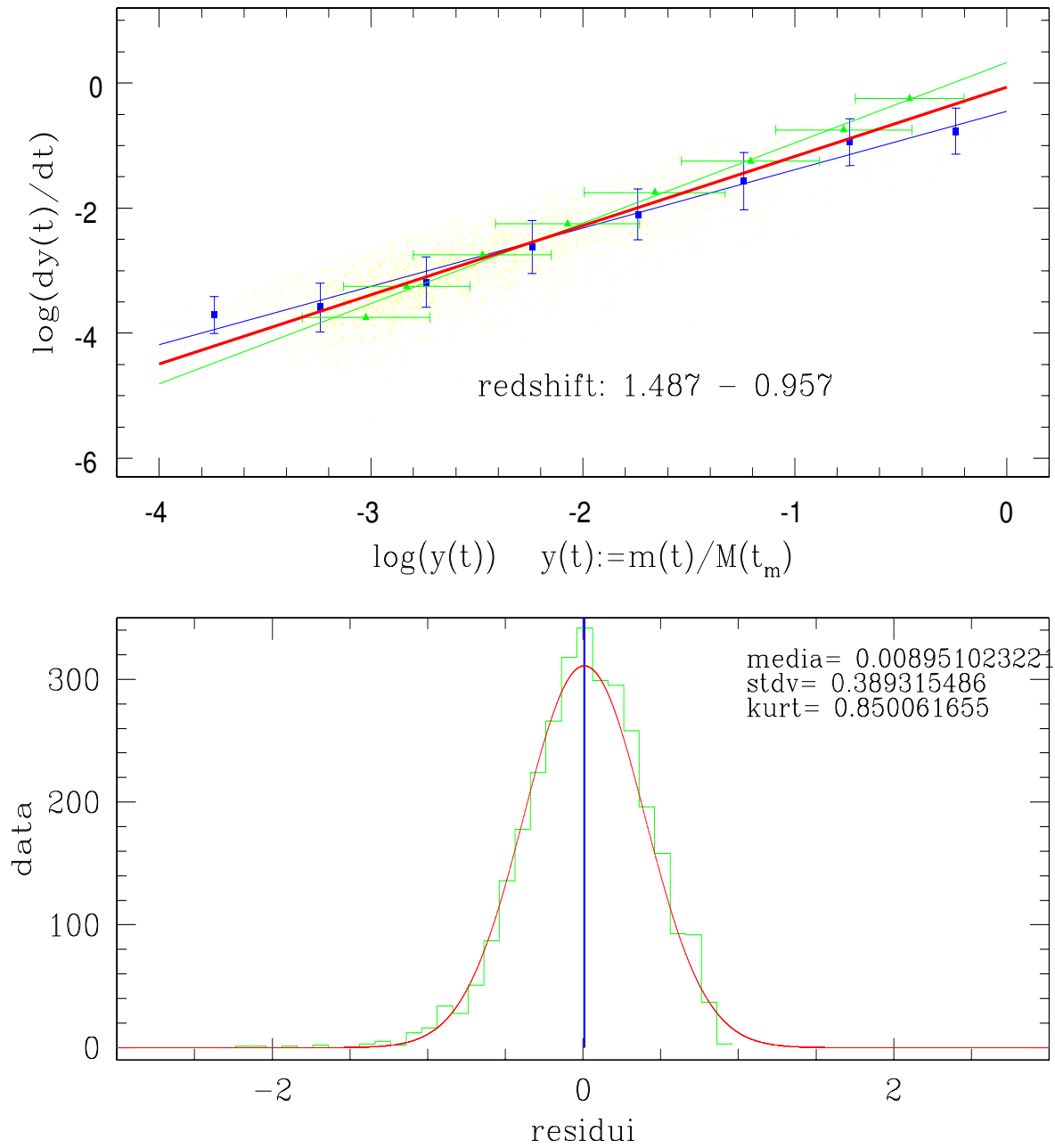


Figura 8.19: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

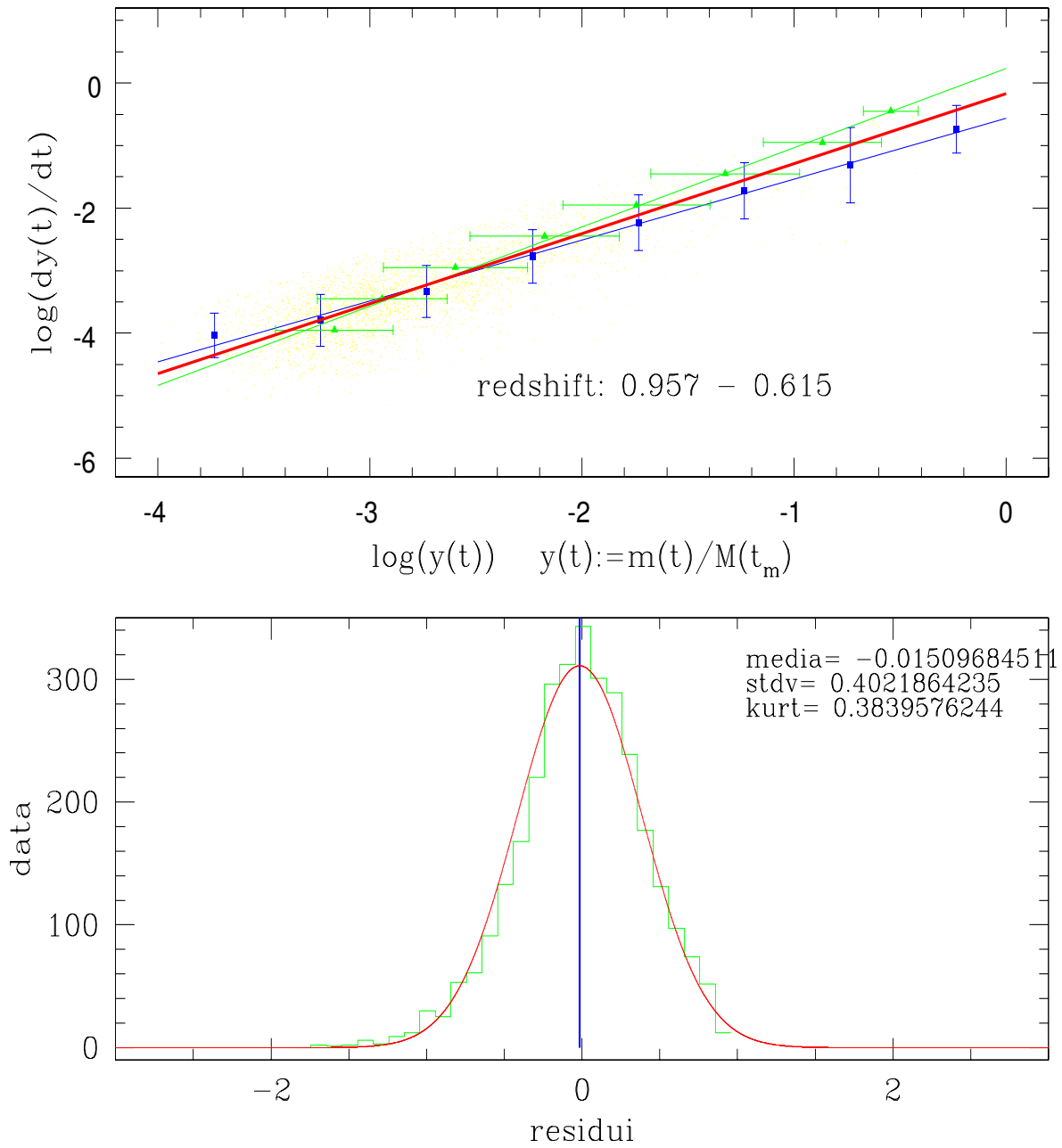


Figura 8.20: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

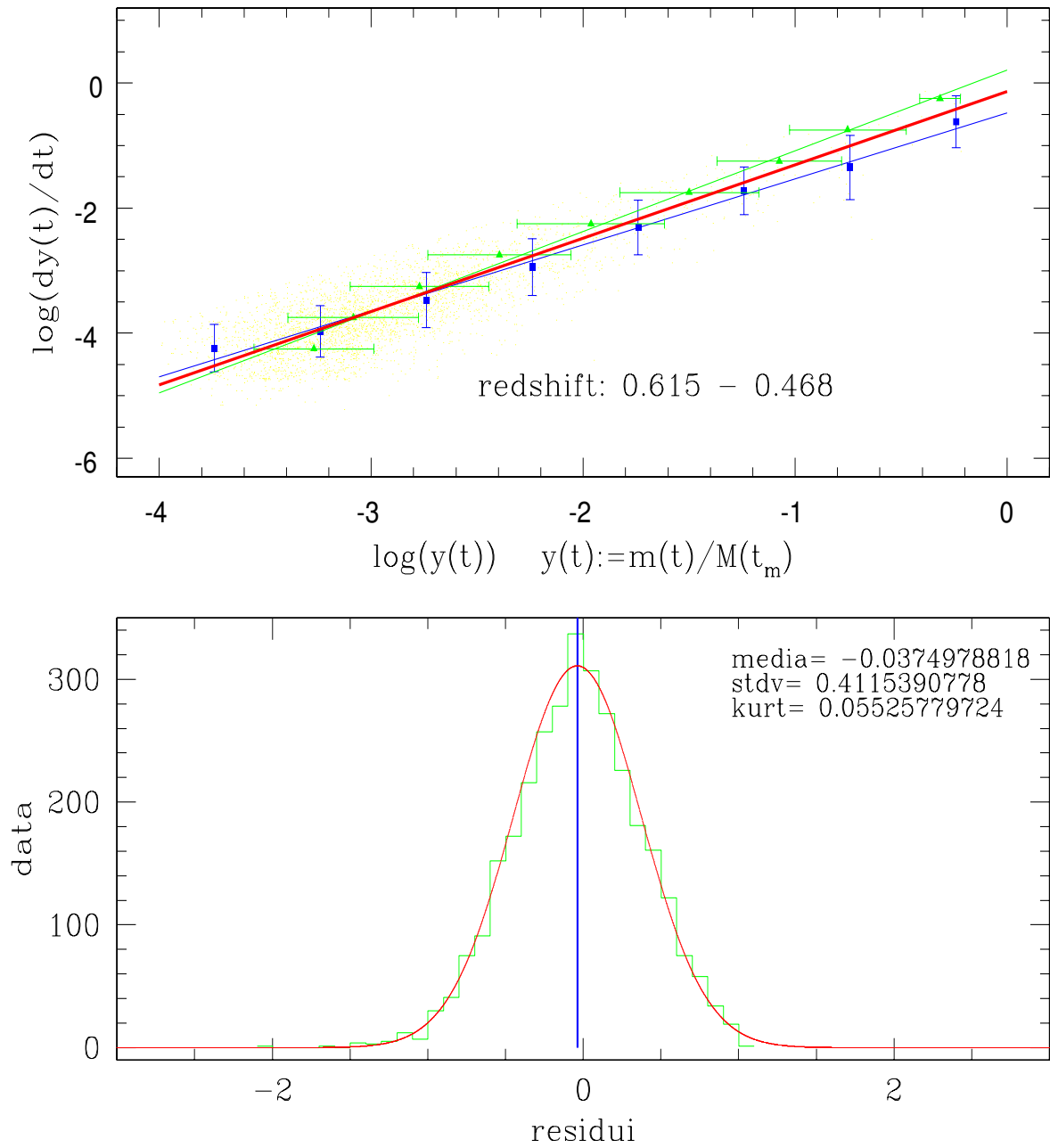


Figura 8.21: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

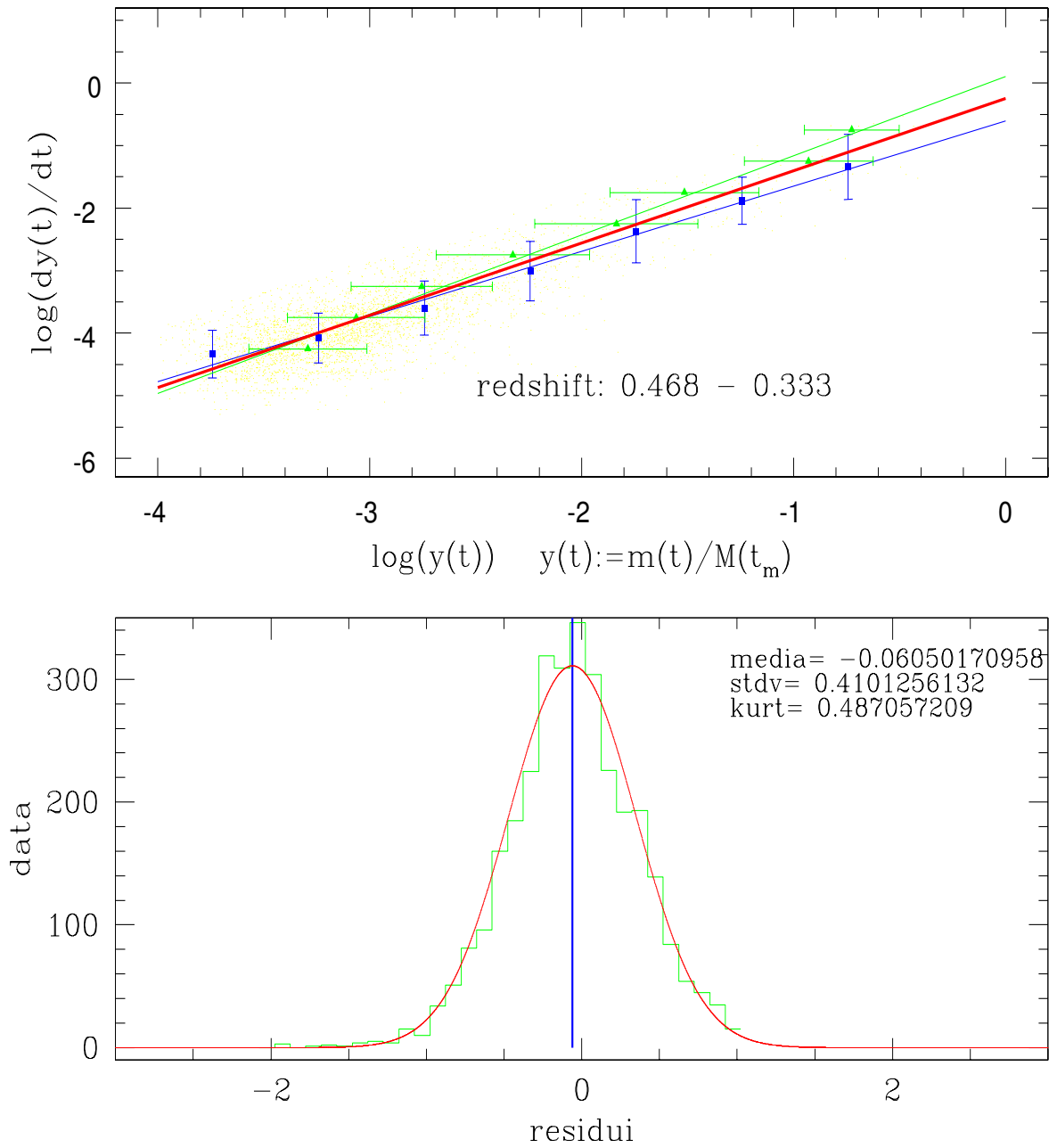


Figura 8.22: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

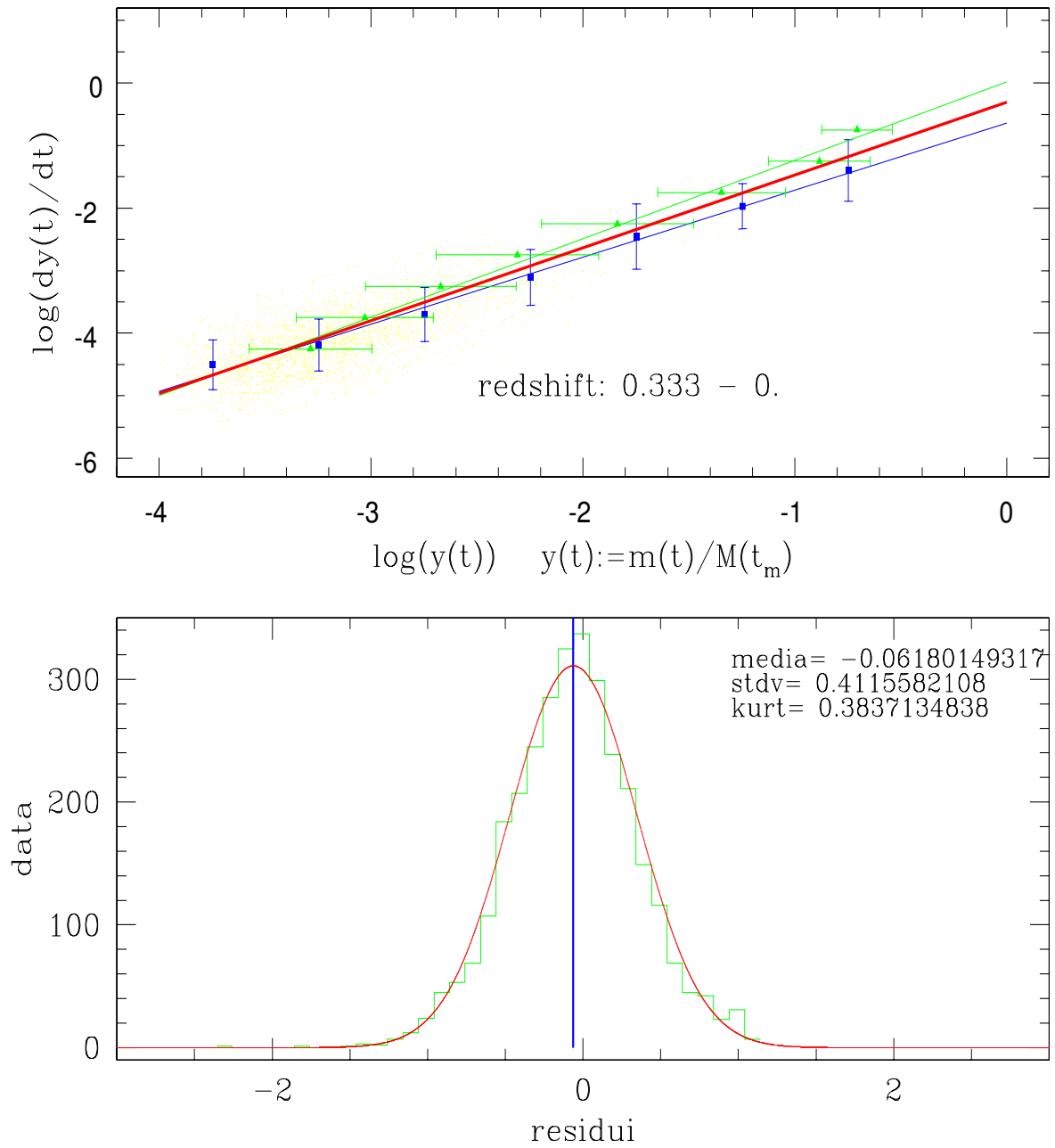


Figura 8.23: $dy(t)/dt$ contro $y(t)$ nell'intervallo di redshift come indicato in figura.

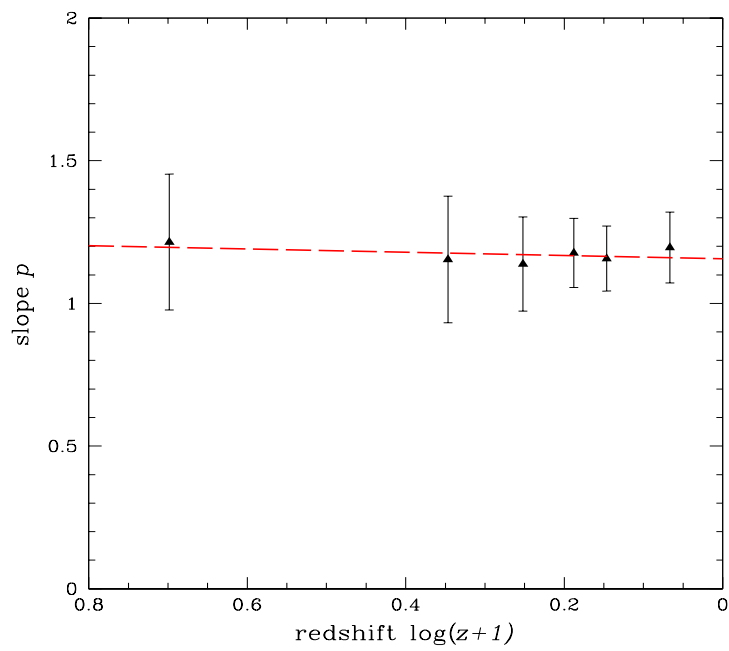


Figura 8.24: Andamento della pendenza della retta interpolatrice in funzione del redshift.

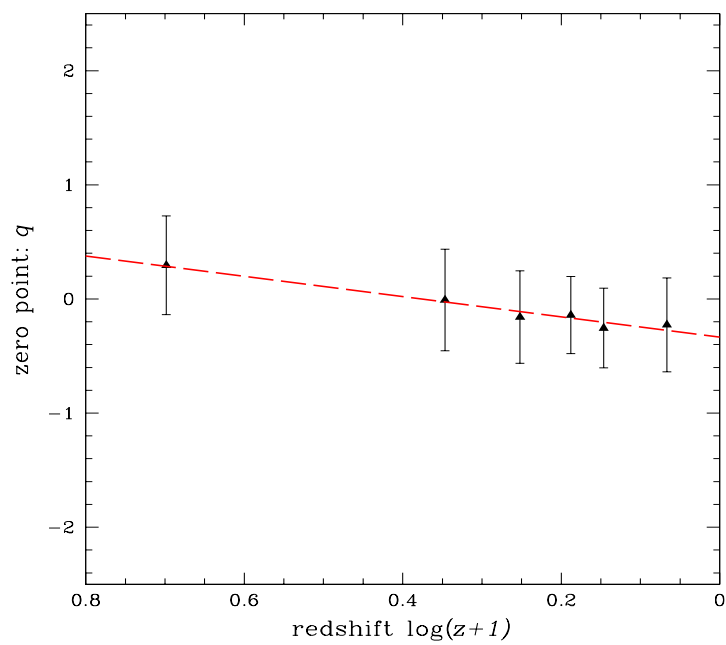


Figura 8.25: Andamento del punto zero della retta interpolatrice in funzione del redshift.

-> INDICE

Definizione della massa degli aloni, funzione di massa dei subaloni

In un modello gerarchico di crescita delle strutture, ci si aspetta che circa il 15% della massa di un alone di materia oscura sia sottoforma di sottostrutture: resti di oggetti caduti dentro e spogliati di una certa parte della massa a causa di *stripping* mareale.

Fino ad oggi diversi sono stati i modelli riguardanti l'abbondanza degli aloni di materia oscura ben sviluppati (Press & Schechter 1974; Sheth & Tormen 1999; Jenkins et al. 2001; Sheth, Mo & Tormen 2001), non ci sono però modelli analitici riguardanti l'abbondanza delle sottostrutture, a parte alcuni lavori ancora poco sviluppati (Zhao et al. 2004, Oguri & Lee 2004 e Lee 2004).

In questo capitolo si farà un confronto della funzione di massa delle sottostrutture ricavata nelle nostre simulazioni e quelle di altri autori, come questa cambia in base al parametro di normalizzazione e come i subaloni si distribuiscono in base alla loro massa nell'alone progenitore.

9.1 Alone ospite: rinormalizzazione della massa

La massa degli aloni nelle simulazioni è stata ricavata, con il criterio della sovradensità sferica. Individuata la particella più densa di un sistema è stata costruita una *shell* di raggio sempre crescente fino a quando la densità non ha raggiunto il valore critico previsto dal collasso sferico (Eke et al. 1996). Tuttavia per avere un accordo con i recenti lavori fatti su simulazioni di ammassi di galassie (De Lucia et al. 2004 e Gao et al. 2004) abbiamo ricavato a posteriori anche le masse degli aloni racchiuse entro R_{200} (il raggio al quale la densità diventa 200 volte quella critica).

Dai *files* contenenti le informazioni sui profili si è ricavato R_{200} , successivamente sono stati rilette i cataloghi della *sovradensità sferica* e ricavati i nuovi aloni in base al numero di particelle contenuto in R_{200} ¹.

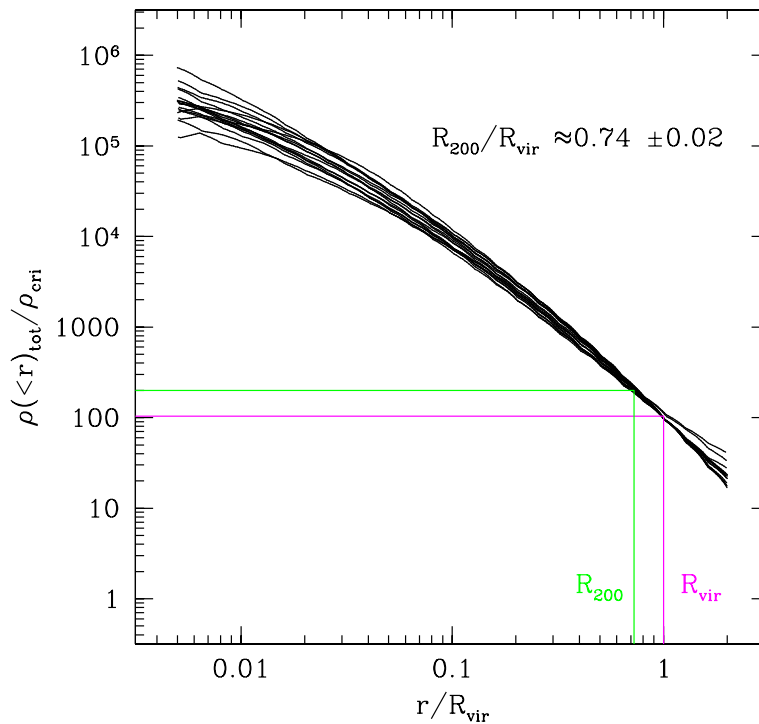


Figura 9.1: Profili di densità dei 17 aloni principali individuati nelle simulazioni.

¹Si riportano in appendice le tabelle riguardanti le masse viriali e i raggi confrontati con i corrispondenti valori ricavati a posteriori tagliando la densità a 200 volte quella critica.

9.2 Funzione di massa dei subaloni: SHMF

Come già detto numerosi studi hanno ricavato la funzione di massa dei subaloni da simulazioni ad alta risoluzione. Diversi e indipendenti metodi sono stati sviluppati per identificare i subaloni. Molti studi pubblicati si accordano sul fatto che la SHMF sia approssimativamente una legge di potenza, $dn/dm \sim m^{-\alpha}$, con $\alpha \approx 1.7 - 1.9$ indipendentemente dal redshift e dalla massa dell'alone parente.

In figura 9.2 vengono raffrontate le funzioni di massa dei subaloni in due diversi lavori con la nostra, tutte basate sulla stessa cosmologia Λ CDM. I punti solidi indicano la nostra SHMF ricavata dalle simulazioni di Tormen et al. 2004. De Lucia et al. 2004 hanno fatto uno studio analogo su 11 ri-simulazioni a più alta risoluzione estratte da una simulazione cosmologica. Il range di massa degli aloni è: $7 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot} \leq M_0 \leq 1.8 \times 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$. La linea tratteggiata piccola corrisponde alla relazione $dn/d \ln(m/M) = 0.016(m/M)^{-0.94}$, che è la legge di potenza che fitta bene ad occhio questi dati. In fine la linea tratteggiata grande è la legge di potenza della SHMF, $dn/d \ln(m/M) = 0.017(m/M)^{-0.91}$, di Gao et al. 2004 ottenuta fittando ad occhio i dati di 15 aloni nel range di massa $3 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot} \leq M_0 \leq 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ (estratti da ri-simulazioni e da una simulazione cosmologica). Su simulazioni cosmologiche GIF e aloni di dimensioni della Via Lattea, Stoehr et al. 2004 (a) trovano una pendenza minore $dn/dm \sim m^{-1.78}$. Tutte queste funzioni di massa dei subaloni, ed altre ancora, sono in accordo almeno del 20%. I nostri dati stanno un po' sopra ad alte masse. A parte lo scatter è un risultato abbastanza consistente, basti pensare alle diverse tecniche usate per individuare gli aloni, seguire le sottostrutture e la diversa risoluzione in massa.

Le funzioni di massa dei subaloni (*evolved* SHMF) dipendono dalla massa, con una normalizzazione che diminuisce sistematicamente al diminuire della stessa dell'alone ospite. Questo fatto è in accordo con quanto trovato da Gao et al. 2004 e contrario a quanto affermato da De Lucia et al. 2004 e Moore et al. 1999 a favore di una funzione di massa dei subaloni di tipo universale.

La dipendenza della normalizzazione della SHMF dalla massa è un riflesso del fatto che aloni meno massivi si formano prima, dando abbastanza tempo allo *stripping* mareale di prendere luogo.

Anche se il *range* di massa delle simulazioni utilizzate in questo lavoro di tesi è piccolo (un ordine di grandezza) già dalla tabella che riporta le proprietà degli aloni a $z = 0$ si evince un andamento simile a quello appena accennato.

In figura 9.3 sono riportate le SHMF in tre diversi intervalli in massa dell'alone ospite.

La figura 9.4 mostra la funzione di massa dei subaloni per i tre diversi intervalli di massa

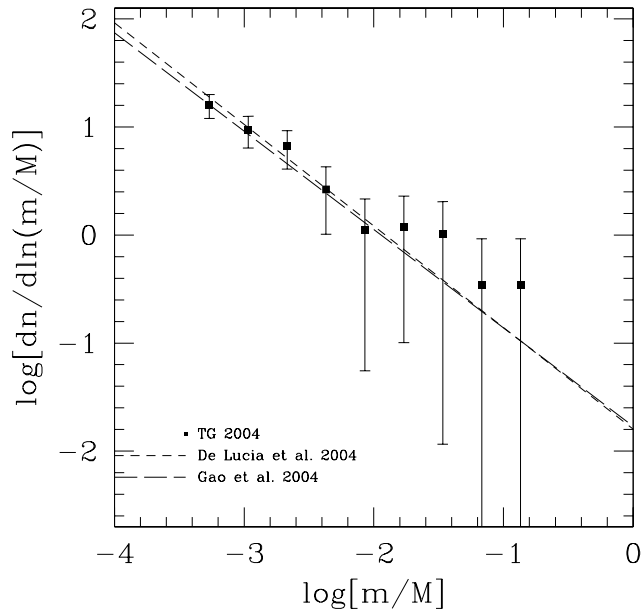


Figura 9.2: Funzione di massa delle sottostrutture ricavata da diversi autori. I punti rappresentano la nostra SHMF, questi fanno riferimento ai subaloni nelle simulazioni SPH in cui i satelliti sono stati selezionati tra gli aloni che mergono con più di 100 particelle. Figura 1 di Van den Bosh, Tormen & Giocoli 2004 (MNRAS submitted).

dell'alone ospite, in questo caso però la normalizzazione è stata fatta in maniera diversa.

In relazione a quanto fatto da Gao et al. 2004, il numero totale di subaloni in ogni *bin* è stato diviso per la somma della massa di tutti gli aloni parenti a $z = 0$, questa abbondanza è plottata contro la massa attuale dei subaloni. L'andamento trovato da Gao è descritto dalla relazione:

$$\frac{dn}{dm} = 10^{-3.2} \left(\frac{m}{h^{-1}M_{\odot}} \right)^{-1.9} hM_{\odot}^{-1},$$

la linea continua in figura. La linea tratteggiata rappresenta l'andamento trovato nelle nostre simulazioni. Come ci si aspettava sta la nostra SHMF si pone leggermente sopra (si veda già la figura 9.2) quella trovata Gao e ha una pendenza minore.

Questo tipo di normalizzazione della funzione di massa dei subaloni permette di eliminare la dipendenza dalla massa dell'alone progenitore, sistemi più massivi tendono ad avere un'abbondanza maggiore di sottostrutture rispetto a quelli meno massivi, a redshift fissato. Basti pensare al fatto che in un modello di *clustering* gerarchico le strutture grandi si formano più tardi e quindi hanno subito fenomeni di *merging* recentemente, lasciando poco tempo allo

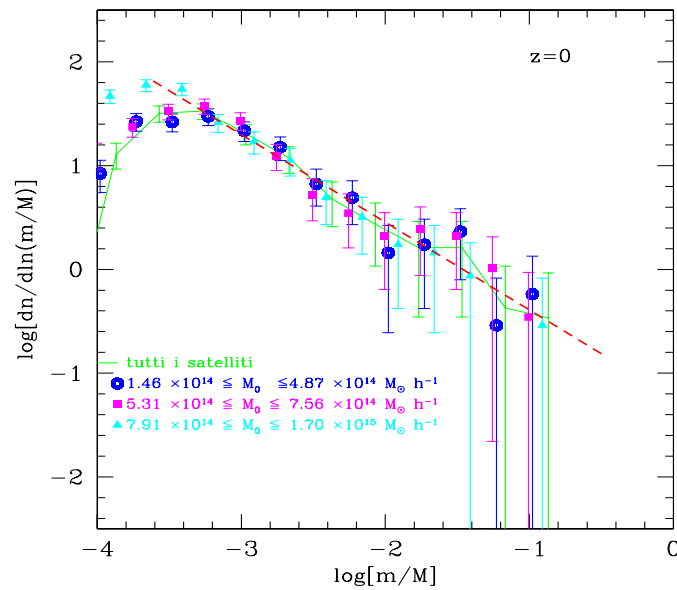


Figura 9.3: Funzione di massa dei satelliti a $z = 0$. Le masse degli aloni ospiti sono in M_{200} e i satelliti non sono stati discriminati in base al numero di partcelle contenti. I punti fanno riferimento a tre diversi intervalli in massa dell'alone ospite.

stripping mareale di agire. In figura 9.5 è riportata la frazione in massa di satelliti in termini della loro massa. La normalizzazione è stata fatta in maniera analoga alla figura 9.4 moltiplicando per la massa media del *bin*.

A causa della frizione dinamica le orbite tendono a circularizzarsi. Sia J il momento angolare dell'orbita del satellite e J_{circ} quello dell'orbira circolare con la stessa energia. Per $\epsilon := J/J_{\text{circ}}$ uguale a zero l'orbita è di tipo radiale mentre per ϵ uguale a uno di tipo circolare. Come mostrato da Tormen 1997; Tormen et al. 1998 i satelliti vengono principalmente accresciuti su orbite radiali e a causa della frizione dinamica queste tendono a circularizzarsi. In figura 9.6 (b) viene riportata la distribuzione dell'eccentricità dei satelliti al momento dell'accrescimento e a redshift zero. Al momento dell'accrescimento le orbite tendono ad essere radiali perchè i processi di accrescimento avvengono lungo i filamenti, una volta entrati nell'alone i satelliti subiscono la frizione dinamica e le orbite si circularizzano: la distribuzione a $z = 0$ ha un valore medio di circa 0.5 e una dispersione di 0.26, in accordo con Gigna et al. 1998 che hanno lavorato su simulazioni cosmologiche ad alta risoluzione. L'eccentricità al momento del *merging* presenta anche una dipendenza dalla massa, nel senso che aloni più massivi risiedono

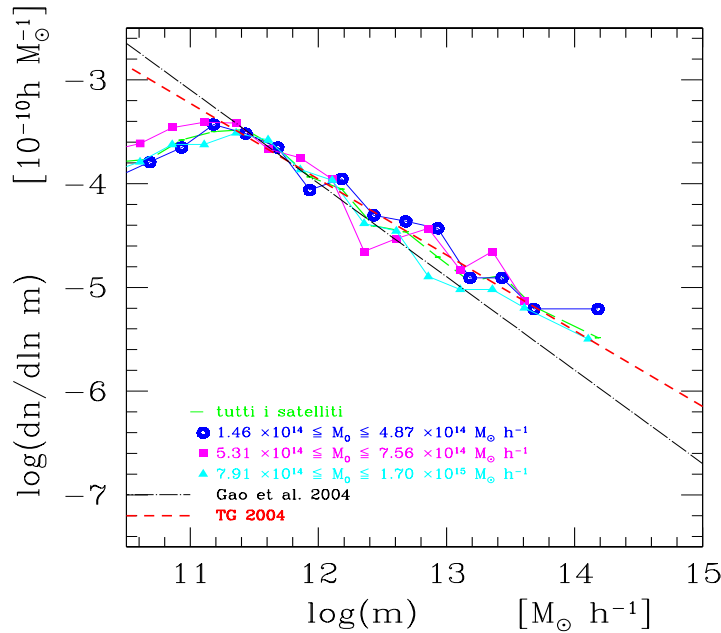


Figura 9.4: SHMF riscalata per unità di massa dell'alone ospite.

su orbite più eccentriche e penetrano più all'interno dell'ammasso.

Springel, White, Tormen & Kauffman 2001 e Gao et al. 2004 utilizzano un codice sviluppato da Volker Springel detto SUBFIND. Questo localizza i satelliti come sistemi isolati localmente sovradensità e auto-legati presenti negli aloni di materia oscura. Il fatto che in alcuni modelli sia stata trovata una SHMF di tipo universale è stato interpretato come un effetto dovuto alla risoluzione numerica. Ciò che si osserva è che subaloni di piccola massa si dissolvono molto rapidamente e soprattutto nelle regioni interne dell'alone.

I clusters utilizzati in questo lavoro di tesi sono delle ri-simulazioni di una grande simulazione cosmologica di sola materia oscura. Per riprodurre questi ammassi di galassie si è riportato il sistema alle condizioni iniziali e *zoommato* in una regione di particolare interesse contenente uno o due aloni di grande massa: *box* di ri-simulazione. Nella regione centrale detta anche di alta risoluzione le particelle vengono sostituite da altre particelle meno massive e in maggior numero, nella periferia (regione di bassa risoluzione) le particelle vengono invece sostituite con altre più massive in modo da descrivere solo il campo mareale medio. Riorganizzate le condizioni iniziali sono state realizzate due tipi di simulazioni: una con sola materia oscura (*N*-body) e una anche con gas (SPH) tale che la somma delle masse delle particelle di gas e DM dia come risultato la massa della particella di DM della simulazione *N*-body. Il *postprocessing* è stato realizzato in maniera analoga sia per la simulazione *N*-body che SPH. Come già

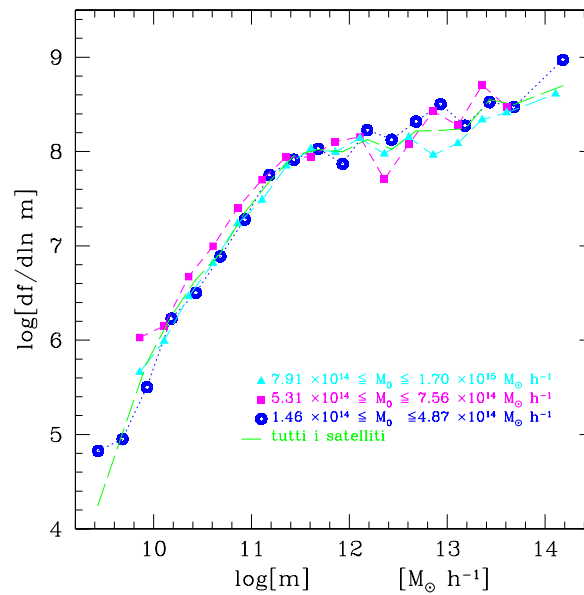


Figura 9.5: Frazione di satelliti in termini della loro massa.

accennato in precedenza, per le simulazioni di sola materia oscura si è fatto girare due volte il codice che individua i subaloni. Una volta, come per le simulazioni SPH, con la condizione che gli aloni che mergono abbiano almeno 100 particelle e una seconda volta con 10 particelle. Il fatto di aver imposto 100 particelle per gli aloni che mergono ci ha permesso di fare un confronto e di trovare che i dati sono abbastanza compatibili con Tormen, Moscardini & Yoshida 2004. La condizione di 10 particelle ci ha permesso in più di poter aumentare la risoluzione verso masse più piccole.

In figura 9.8 è riportato il *merging rate* delle nostre simulazioni N -body e SPH. In termini del redshift è stata riportata la frazione di satelliti che mergono. N -body(*) indica il caso in cui i satelliti sono stati scelti con 10 particelle al momento del *merging* e con almeno il 50% della loro massa.

9.2.1 Frazione di massa nei subaloni

Al contrario di altre distribuzioni, la frazione di massa nei subaloni in letteratura trova alcuni disaccordi. Come visto nel capitolo precedente (tabella 8.2) nelle simulazioni usate in questo lavoro di tesi circa il 10% della massa dell'alone parente si trova in subaloni. In letteratura diversi autori stimano un'abbondanza che va dal 5% al 20%, solo Moore et al. 2001 suggerisce

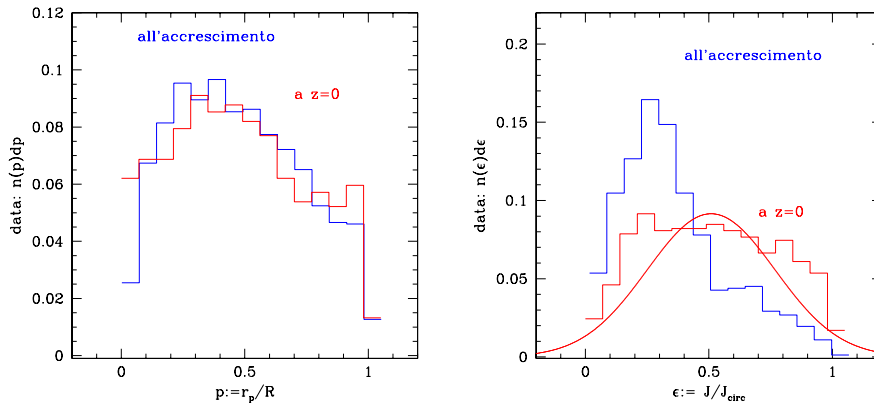


Figura 9.6: (a) *A sinistra*: distribuzione dei pericentri delle orbite dei satelliti al momento del *merging* e a $z = 0$. (b) *A destra*: distribuzioni dell'eccentricità agli stessi redshift. Queste due grandezze vengono calcolate assumendo un potenziale sferico e statico, ipotesi poco valida nel caso di satelliti molto grandi e ad alti redshift. I valori fanno riferimento perciò a $z < z_{\text{form}}$ e per $m/M < 0.25$.

che la frazione vera potrebbe essere anche il 100% se potessimo raggiungere un limite di identificazione fino alle più piccole masse. In figura 9.11 viene mostrata la frazione di massa in subaloni più massivi di m_{sub} per i satelliti in tutti gli ammassi simulati. In blu e in rosso sono riportati i satelliti appartenenti rispettivamente agli aloni ospite più massivi e meno massivi. Come mostrato da recenti lavori (Gao et al. 2004 e Van den Bosch, Tormen & Giocoli 2004 (MNRAS submitted)) la frazione di massa nei subaloni aumenta con la massa, quindi i piccoli sistemi non sono una versione riscalata di ammassi più grandi contrariamente a quanto affermato da altri lavori. In termini di M_* , massa lineare di collasso, i sistemi più massivi contengono più subaloni perchè sono una frazione più grande di questa (in seguito equazione 10.1).

9.2.2 Distribuzione radiale dei satelliti

L'evoluzione delle strutture che caratterizzano l'universo per accrescimento e *merging* gerarchico degli aloni di materia oscura è un modello ben motivato dalle simulazioni numeriche e dai dati osservativi. Il processo è guidato dalla materia oscura mentre i barioni giocano in questo caso un ruolo minore. L'idea corrente è che le galassie possano formarsi nelle buche di potenziale degli aloni di materia oscura in cui il gas può facilmente raffreddare e formare stelle.

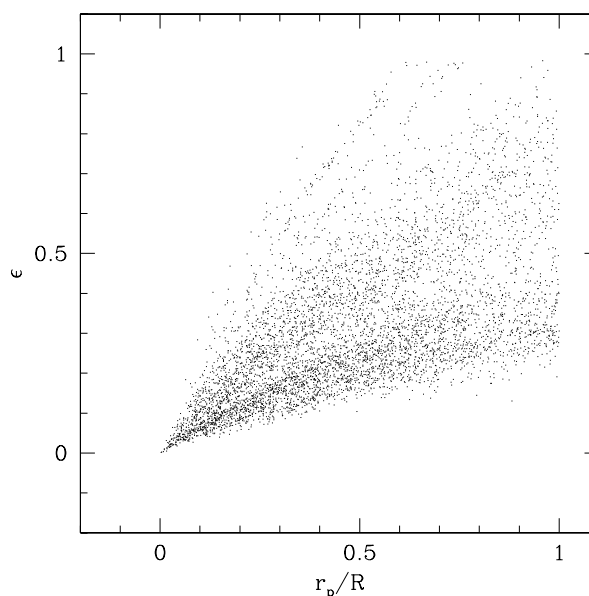


Figura 9.7: Correlazione eccentricità e pericentro per i satelliti al momento dell'accrescimento, sempre nelle condizioni che non siano troppo massivi e che non vengano accresciuti ad alti redshift.

I satelliti delle galassie d'ammasso sono un'importante prova della dinamica e della massa delle galassie. Correntemente, da un punto di vista osservativo, l'analisi della dinamica dei satelliti è il migliore metodo per determinare la massa a grandi raggi della nostra Galassia e del Gruppo Locale. Anche se i satelliti di Andromeda e della Via Lattea sono stati studiati per molto tempo, il loro numero è ancora incerto. Vengono scoperti numeri sempre maggiori e con diversi tipi di proprietà, tra questi alcuni sono grandi e luminosi con un apprezzabile tasso di formazione stellare (M33 e la Grande Nube di Magellano). A parte casi particolari, la maggior parte dei satelliti ha un basso tasso di formazione stellare ed morfologicamente diviso tra galassie ellittiche o sferoidali nane.

La formazione e l'evoluzione delle galassie satellite è tuttavia ancora un problema aperto. Accordandoci ad un modello gerarchico di formazione delle strutture, gli aloni di materia oscura piccola dovrebbero collassare prima di quelli grandi. Quindi se guardiamo la Via Lattea i suoi satelliti dovrebbero essersi formati prima che il corpo centrale si fosse "assemblato". Alcuni satelliti potrebbero essere sopravvissuti al processo di formazione della Galassia, mentre altri potrebbero essere stati accresciuti. E' usualmente questa la ricetta che viene utilizzata nei lavori semi-analitici di formazione delle galassie (Kauffman, White & Guiderdoni 1993; Springel

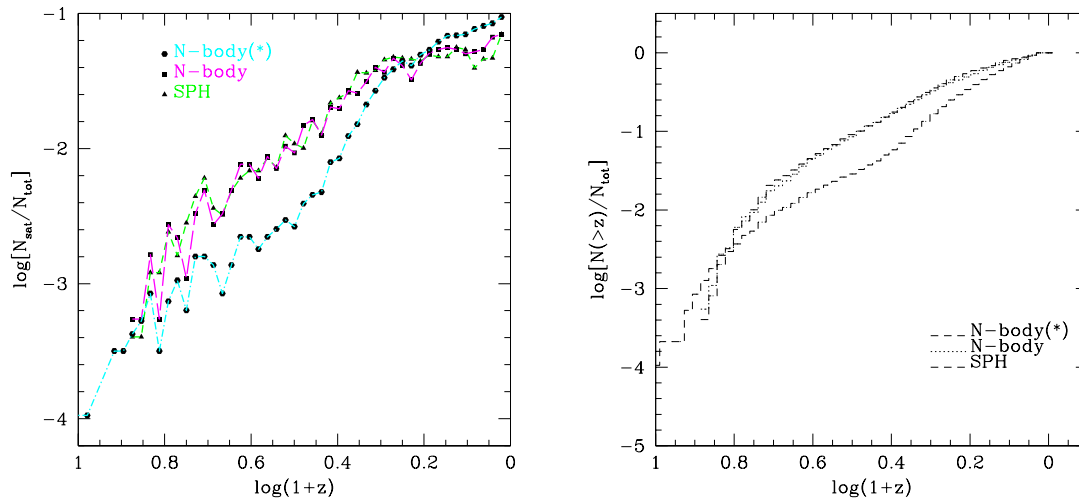


Figura 9.8: *Mergin rate* nel caso delle simulazioni *N*-body e SPH. *N*-body(*) indica il caso in cui i satelliti sono stati scelti con al più di 10 particelle.

et al. 2001(b)). In figura 9.12 è riportata la distribuzione cumulativa dei satelliti nelle nostre simulazioni confrontata con altre simulazioni di regioni di diverse dimensioni (galattica e extra galattica). L'abbondanza dei satelliti nella regione centrale si potrebbe spiegare tenendo conto che non dovrebbero risultare isolati ma inglobati in un sistema massivo unico, il quale risulta essere il picco di densità centrale. Tuttavia seguire i satelliti (soprattutto sotto $0.1 R_{\text{vir}}$) nella regione centrale è abbastanza difficile. Taylor & Babul 2004 ad esempio, nel loro modello semi-analitico, seguono i satelliti fino alla soglia di $0.1 R_{\text{vir}}$, sotto la quale li considerano dispersi. La linea continua rappresenta la relazione analitica trovata da Gao et. al per la distribuzione cumulativa dei satelliti:

$$\frac{N(< x)}{N_{\text{tot}}} = \frac{(1 + ac)x^\beta}{(1 + acx^\alpha)},$$

dove x indica la distanza in unità di R_{200} , $N(< x)$ il numero di satelliti dentro x , N_{tot} il numero totale di subaloni in R_{200} , $a = 0.244$, $\alpha = 2$, $\beta = 2.75$, e c rappresenta il parametro di concentrazione. Questo andamento suggerisce che come appena il profilo di densità dell'alone ospite diventa più concentrato, così fa anche la popolazione dei subaloni.

In figura 9.13 è riportata la funzione di massa dei subaloni considerando sistemi a diverse distanze dal centro dell'alone ospite.

Nelle simulazioni gli aloni di materia oscura non sono sistemi dinamicamente tranquilli, ma tutt'altro, subiscono in continuazione fenomeni di accrescimento e merging. Gli stessi satelliti una volta entrati nell'alone parente non rimangono fermi, ma compiono diversi giri attorno

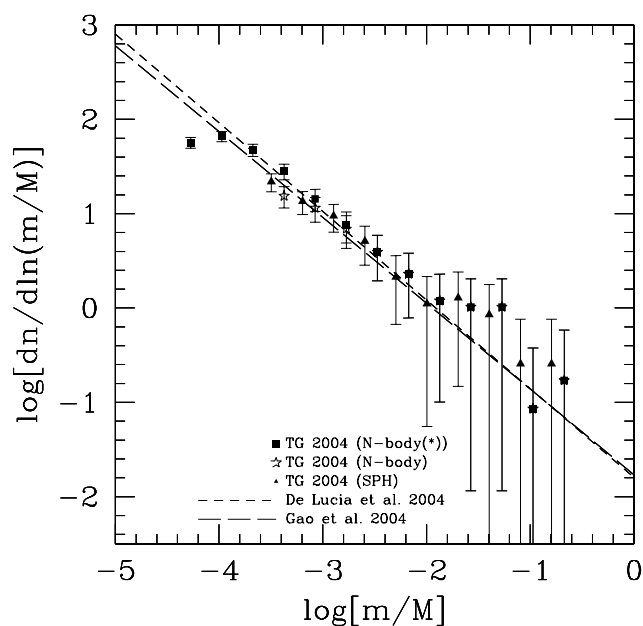


Figura 9.9: Funzione di massa dei subaloni nelle simulazioni N -body e SPH. Si osserva una buona consistenza dei dati, e l'aumento della risoluzione in massa quando i satelliti vengono selezionati tra gli aloni che mergono con almeno dieci particelle.

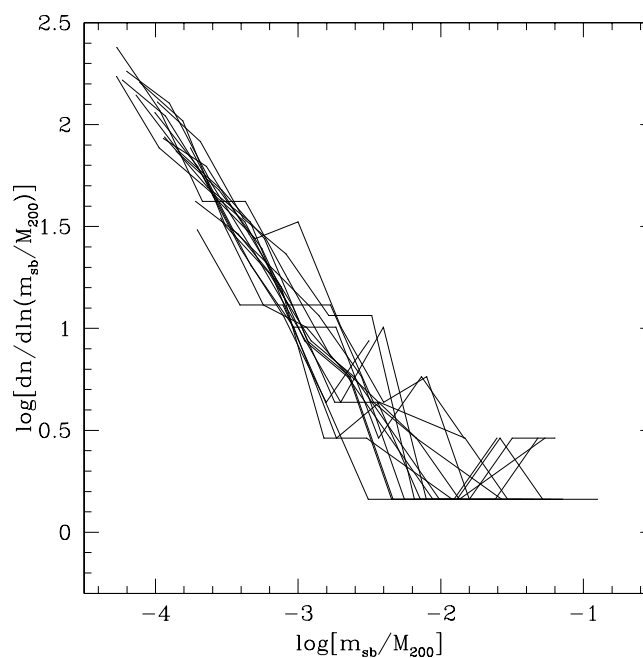


Figura 9.10: Funzione di massa dei subaloni nei singoli ammassi.

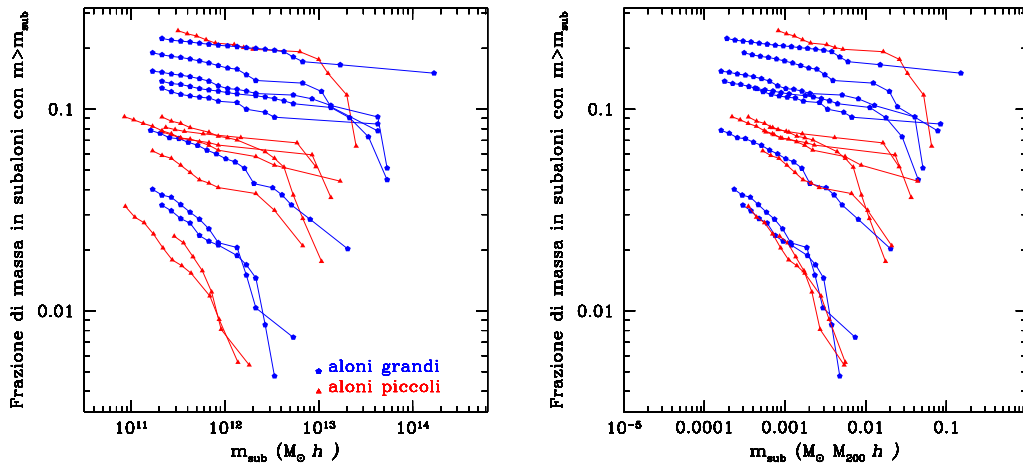


Figura 9.11: Frazione di massa dell'alone parente che si trova in subaloni più massivi di m_{sub} . A destra la massa dei subaloni è stata divisa per la massa dell'alone ospite a 200 volte da densità critica.

al centro del sistema, possono subire *merging* e uscire. Da come si osserva in figura, nella regione centrale i subaloni piccoli sono meno menonumerosi, la loro abbondanza in massa è quasi due ordine di grandezza in meno rispetto ai satelliti contenuti in tutto l'alone. Per i sistemi massivi, l'abbondanza dall'esterno all'interno varia di circa 0.5 in ordini di grandezza.

9.2.3 SHMF a diversi redshift

Secondo un recente lavoro di Van den Bosh, Tormen & Giocoli 2004 (MNRAS submitted), la frazione di massa in subaloni f_s ha una dipendenza dal redshift, oltre che dalla massa, in modo che aloni ad alti z hanno una maggior frazione di massa in sottostrutture (quindi $d\langle f_s \rangle/dz$ decresce in maniera monotona). In figura 9.14 viene riportata la funzione di massa delle sottostrutture a diversi redshift, la massa del subalone a un certo redshift viene divisa per la massa dell'alone parente allo stesso tempo, i satelliti considerati sono solo quelli nel raggio dell'alone. Andando da $z = 2$ a $z = 0$ quello che si nota è che cresce l'abbondanza di sistemi piccoli in termini di $M(z)$, questo perchè i processi di perdita di massa (*tidial stripping*) rendono i subaloni meno massivi e la frizione dinamica tende a protarli in regioni maggiormente dense. L'abbondanza di aloni di grande massa, relativa a quelle dell'alone, ad alti redshift è per questo una diretta conseguenza proprio del *clustering* gerarchico. Non si osserva una diversità sistematica in termini di pendenza, proprio perchè come si nota dalla figura 9.8, gli aloni continuano ad accrescere in continuazione materia, quindi l'abbondanza degli aloni

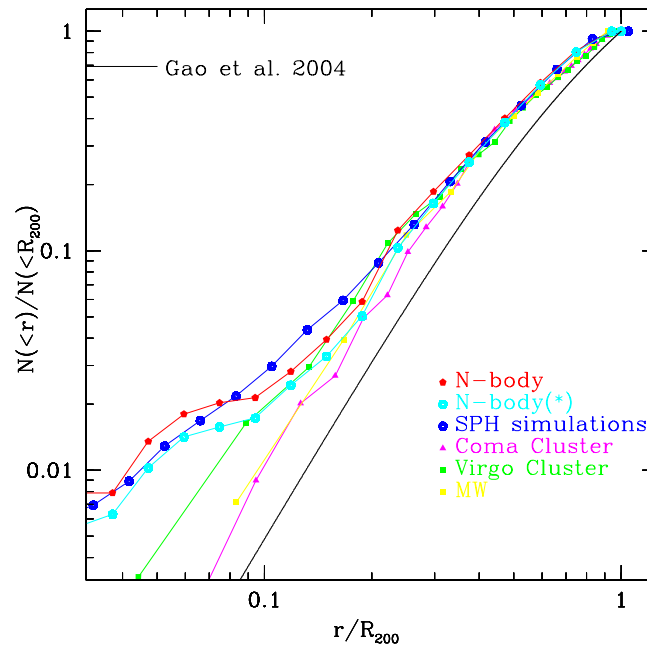
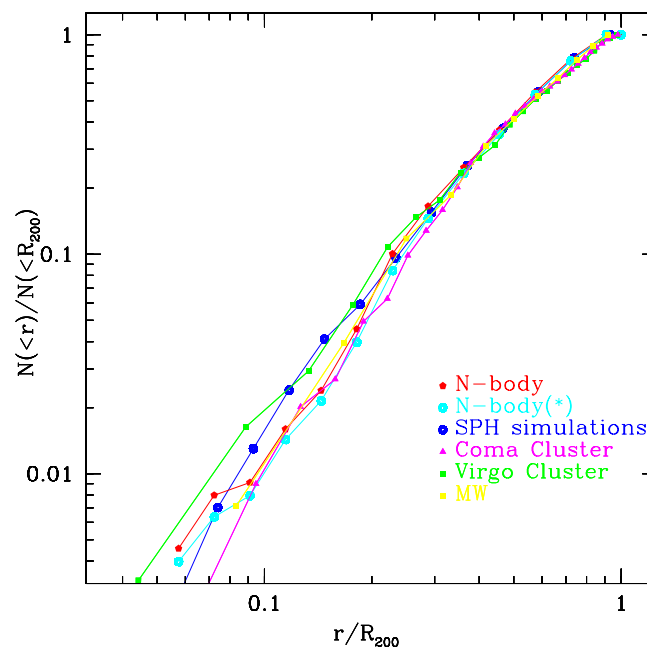


Figura 9.12: Distribuzione cumulativa dei satelliti nelle nostre simulazioni confrontata con altri dati. La linea continua è la relazione trovata da Gao et al. 2004, le simulazioni usate sono le GIF2 del consorzio VIRGO. Coma, Virgo & Milky Way fanno riferimento a sistemi in simulazioni di dimensioni dell'ammasso della Coma, della Vergine e della Via Lattea fatti evolvere da Gigna et al. 1998 & 2000. Per i dati si ringrazia James Taylor. L'accordo con le altre simulazioni diventa tuttavia più stringente se si considerano “persi” i satelliti sotto $0.04 - 0.06R_{200}$ (figura in basso).



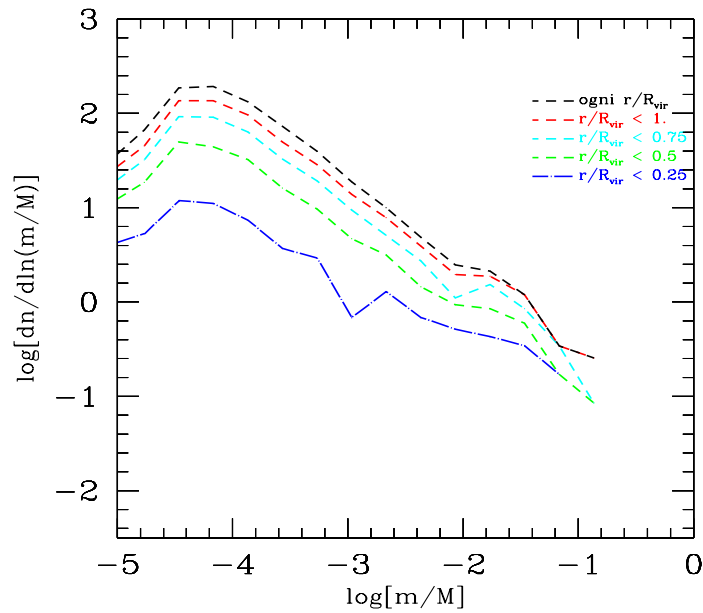


Figura 9.13: SHMF considerando satelliti a diverse distanze dal centro dell'alone parente.

grandi viene rimpiazzata da nuovi *merging*; per questo l'abbondanza dei subaloni in termini di z analiticamente deve tener conto anche di questo fatto.

La massa del satellite a $z = 0$ ovviamente dipende dalla sua storia e quindi anche dalla sua epoca di accrescimento. In maniera analoga a quanto fatto da Gao et al. 2004, abbiamo cercato di modellare il tasso di perdita di massa in termini del redshift di accrescimento, per questo si faccia riferimento alla figura 9.15.

In accordo con i dati delle simulazioni SPH, in figura 9.16 viene riportata sempre la frazione di massa media trattenuta dai satelliti a $z = 0$ in termini del redshift di accrescimento anche per le simulazioni di sola DM. Si nota una buona consistenza, la linea continua indica l'andamento della relazione:

$$\frac{m_0}{m(t_m)} \sim \exp[-\alpha \log(1+z)].$$

L'espressione sopra non deve essere interpretata come un *fit* analitico, ma vuole solo evidenziare che i satelliti accresciuti ad alti redshift mantengono poca della massa con cui accrescono in relazione al fatto che hanno trascorso abbastanza tempo nell'alone ospite e hanno subito per lungo tempo la frizione dinamica, lo spoglio mareale e il surriscaldamento della componente barionica. In base a quanto si osserva in figura i satelliti accresciuti dopo redshift 1.5 ritengono una frazione molto piccola della loro massa al momento dell'accrescimento: sotto il 5%.

I subaloni accresciuti a alti redshift sul progenitore principale hanno in media piccoli periodi

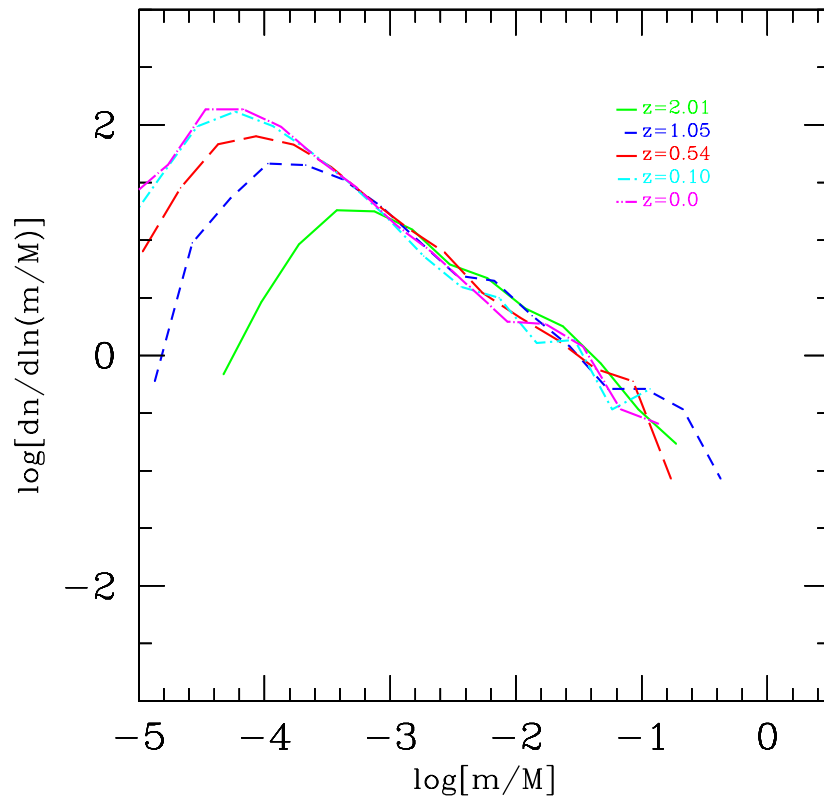


Figura 9.14: Funzione di massa dei subaloni (SHMF) a diversi redshift.

orbitali e si trovano principalmente nella regione centrale dell'alone finale. Ciò a causa del fatto che orbitando da lungo tempo nell'alone, hanno subito un duraturo effetto di frizione dinamica e *stripping* mareale tali da far decadere abbastanza la loro orbita rispetto a subaloni accresciuti con la stessa massa ma a redshift più bassi. Questi due effetti fanno pensare ad una correlazione tra il tempo di accrescimento e la distanza radiale nell'alone ospite, e anche tra la massa ritenuta e sempre la distanza dal centro dell'alone in termini di R_{200} .

Nelle figure 9.17 e 9.18 sono riportati i valori medi della frazione di massa trattenuta a $z = 0$ e del redshift di accrescimento in termini di r/R_{200} per i subaloni presenti in tutti gli aloni ospiti. Chiaramente da come si nota dalle figure, e da quanto si può notare in Gao et al. 2004, esiste una correlazione età-raggio, indipendente dalla massa. Satelliti accresciuti recentemente si trovano principalmente nella regione esterna, mentre quelli più vecchi nella parte centrale; in più i subaloni in prossimità del centro ritengono una frazione più piccola della massa del loro progenitore di quelli nella regione interna. L'abbondanza di subaloni nella regione centrale, e

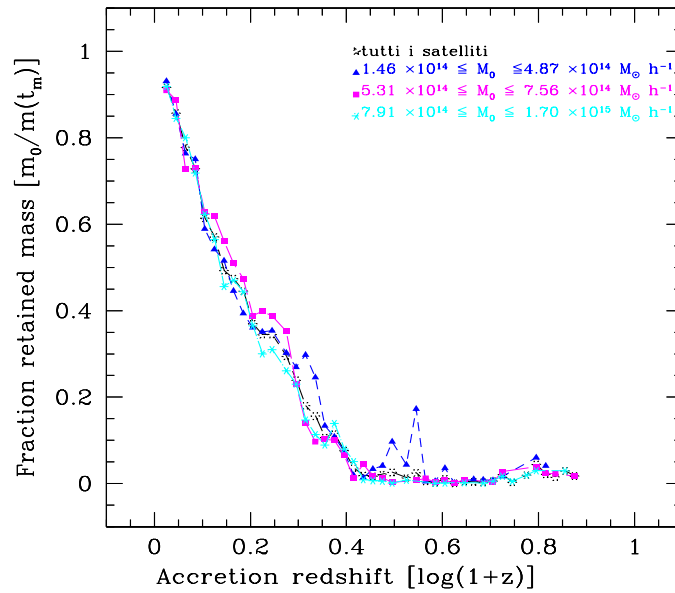


Figura 9.15: Frazione di massa media mantenuta dal satellite a $z = 0$ in termini del redshift di accrescimento.

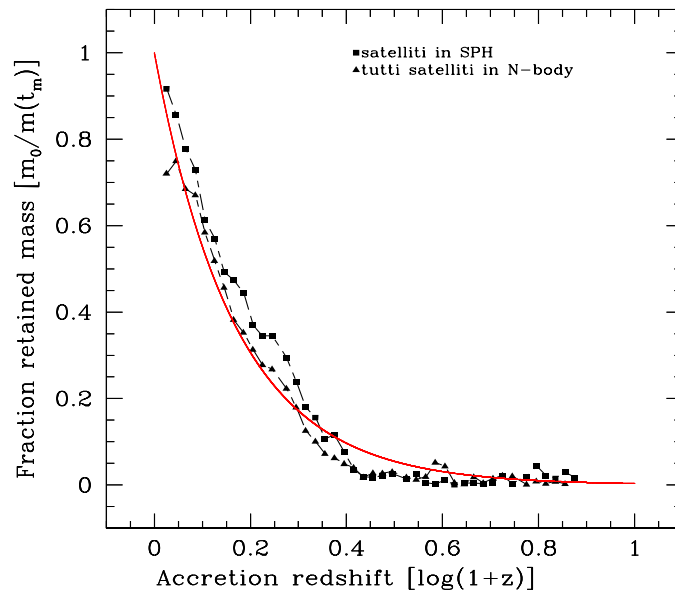


Figura 9.16: Frazione di massa media mantenuta dal satellite a $z = 0$ in termini del redshift di accrescimento. In questo caso sono stati riportati i valori per le simulazioni di sola materia oscura e con gas, si nota un buon accordo. La linea continua è un *fit* esponenziale che interpola abbastanza bene i punti.

l'operatività del *tidial stripping* (figura 9.16), suggeriscono anche che i progenitori di quelli che risiedono nelle regioni centrali sono più massivi di quelli che risiedono nella periferia di ugual massa; come conseguenza di questo da un punto di vista osservativo si ha che i subaloni interni ospitano galassie più brillanti di quelli esterni della stessa massa.

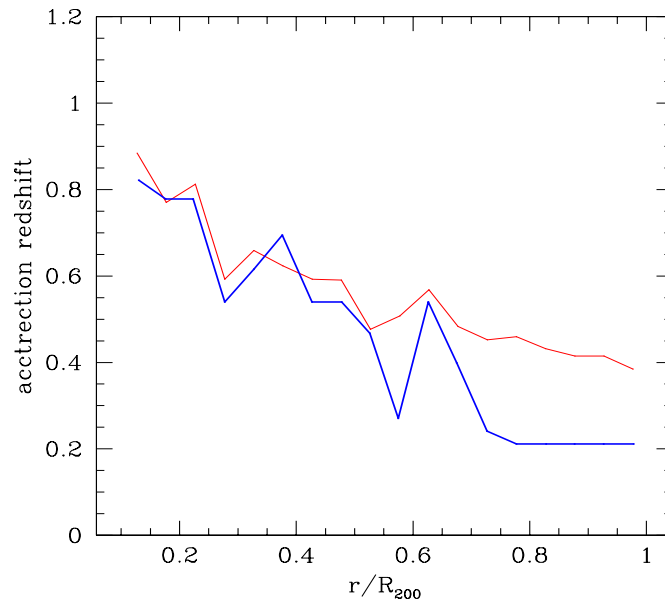


Figura 9.17: Dipendenza radiale del redshift di accrescimento per tutti i satelliti presenti negli aloni parente a $z = 0$. In rosso la media, mentre in blu è riportata la mediana.

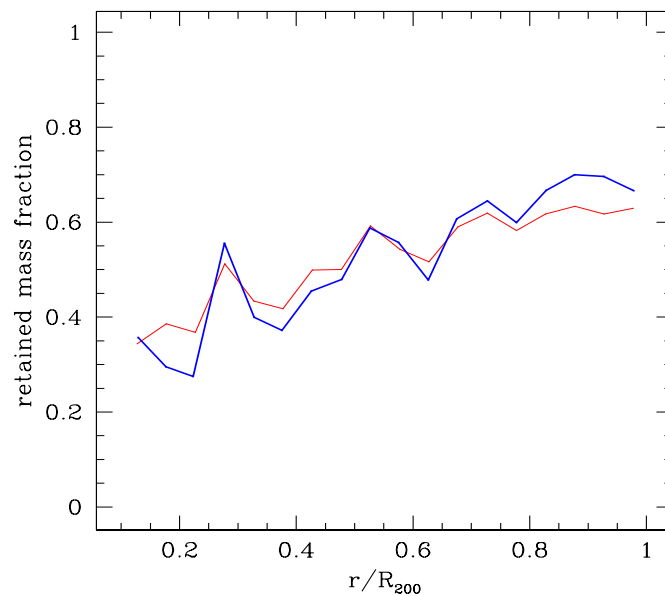


Figura 9.18: Dipendenza radiale della massa ritenuta a $z = 0$ rispetto alla massa di accrescimento per tutti i satelliti presenti nei progenitori principali. I colori sono come nella figura precedente.

-> INDICE

Processi di crescita dell'alone ospite in simulazioni N -body

In questo capitolo vengono presentati i risultati preliminari riguardanti il tasso di crescita di massa dell'alone parente ricavato da una simulazione cosmologica di un universo Λ CDM.

Nel modello cosmologico standard di materia oscura fredda, i progenitori principali crescono tramite processi di accrescimento e *merging* di aloni, che si formano dal campo stocastico **Gaussiano** di fluttuazioni di densità. Il tasso di crescita degli aloni di materia oscura, nei modelli di formazione delle galassie, è strettamente correlato al tasso con cui i barioni possono raffreddare e formare stelle. Per questo la *mass accretion history* (MAH) è un ingrediente essenziale in un contesto cosmologico di formazione delle strutture.

In relazione a quanto visto nei capitoli precedenti la perdita di massa dei subaloni dipende dalla crescita dell'alone ospite e in base a quanto affermato in Van den Bosch, Tormen & Giocoli 2004 (MNRAS submitted) anche la frazione di massa in sottostrutture dipende da $M(z)$ o meglio da M/M_* secondo la relazione:

$$\log[\langle f_s \rangle] = \sqrt{0.4(\log[M/M_*] + 5)} - 2.74, \quad (10.1)$$

per $10^{-4} < m/M < 0$.

Qualora si avesse un modello per M/M_* basterebbe assegnare la massa dell'alone ospite a

$z = 0$ e si potrebbe ricavare analiticamente l'andamento in termini del redshift dalla $\langle f_s \rangle$ e quindi della SHMF.

In figura 10.1 è riportato l'andamento di M_* in termini del redshift, il *fit* non è analitico ma è stato ricavato interpolando in termini di z la relazione:

$$\delta_c(z) - \sigma_8(z) = 0,$$

che ci ha permesso di ricavare la scala di collasso lineare R_* ; la massa racchiusa, in termini della densità di *background*, dà proprio il valore di M_* . Il modello cosmologico usato è Λ CDM con una normalizzazione della varianza di massa su una scala di 8 Mpc a redshift zero: $\sigma_8 = 0.9$.

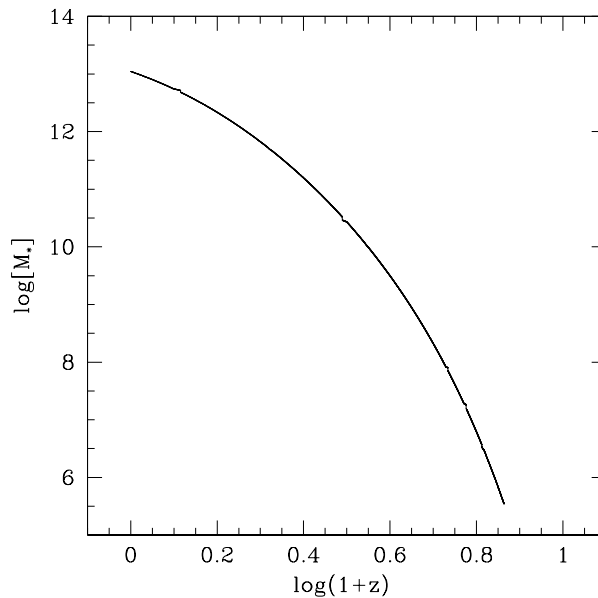


Figura 10.1: Andamento di M_* in termini del redshift.

L'andamento di $M(z)/M_*(z)$ riportato in figura 10.2 è stato ricavato dalle ri-simulazioni degli ammassi di galassie, anche se gli aloni ospiti a $z = 0$ sono solo 17 si osserva abbastanza bene un andamento di tipo esponenziale. La linea continua è una relazione che si ricava fittando ad occhio i dati (figura 10.2 (b)).

Per aumentare la statistica e anche il *range* di massa, per fittare la relazione M/M_* vs $\log(1+z)$ si è deciso di usare i cataloghi delle simulazioni cosmologiche GIF del consorzio VIRGO.

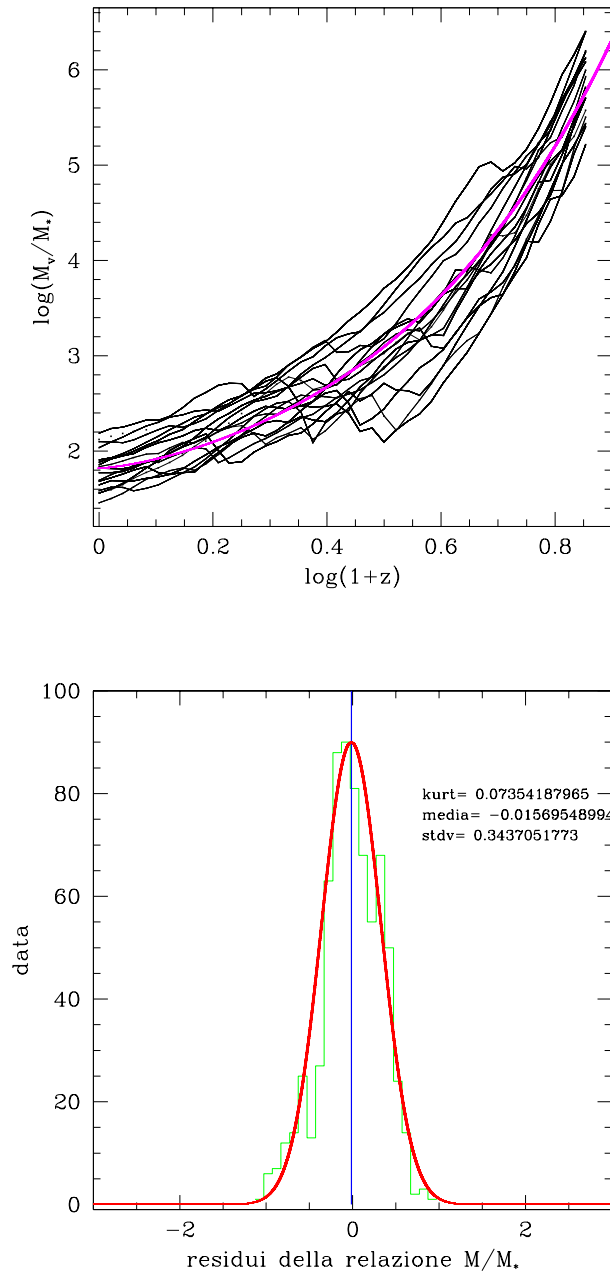


Figura 10.2: (a) *In alto*: M/M_* contro $\log(1+z)$ ricavato dalle ri-simulazioni di TMY 2004. (b) *In basso*: lo scatter della relazione che fitta ad occhio i punti.

10.1 Simulazione cosmologica: GIF, crescita degli aloni di materia oscura

Questa simulazione è stata sviluppata tramite l'utilizzo di un codice AP³M (**A**daptive **P**article-**P**article **P**article-**M**ash) detto *HYDRA* e segue l'evoluzione di 256^3 particelle in un cubo di lato $141.3 h^{-1}$ Mpc.

Proprietà delle Simulazioni	
Ω_m	0.3
Ω_Λ	0.7
H_0	$70 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Mpc}$
$\sigma_8(z=0)$	0.9
Γ	0.21
ϵ (<i>softening</i> gravitazionale)	$30 \text{ kpc}/h$
$m_{p,DM}$	$1.4 \times 10^{10} M_\odot h^{-1}$

Tabella 10.1: Proprietà delle costanti che caratterizzano l'universo utilizzate nella simulazione cosmologica GIF.

Le posizioni e le velocità delle particelle vengono “fotografate” in 43 redshift diversi tra $z = 12$ e $z = 0$. Ad ogni snapshot gli aloni vengono identificati con il criterio della sovradensità sferica, la massa degli aloni è data dal numero totale di particelle contenute nel R_{vir} al quale la sovradensità raggiunge il valore previsto dal modello del collasso sferico. A $z = 0$ sono stati selezionati 4960 aloni, quelli che contengono più di 200 particelle, e di questi è stato costruito il *merger-tree*.

Dato un alone di massa M (contenente N particelle) ad un certo redshift z , a $z + dz$ si identifica l'alone che contribuisce maggiormente in numero a N e lo si chiama progenitore principale, supponiamo che questo abbia N' particelle. Andiamo un'altra volta indietro con il redshift e tra tutti gli aloni selezioniamo quello che contribuisce maggiormente in numero a N' . Si procede così fino a quando il numero delle particelle non si perde nel campo. In questo modo sono stati creati dei *files* che per ogni snapshot, e per ogni alone selezionato, ci danno il numero di particelle che costituiscono l'alone, la massa, il raggio e altre proprietà cinematiche. Si è successivamente ricavato il redshift al quale l'alone ha metà della massa posseduta a $z = 0$, interpolando una crescita lineare tra due valori discreti di z . In figura 10.3 (a) è riportata la funzione di massa degli aloni a $z = 0$, il numero di aloni in ogni *bin* è stato diviso per il volume totale della simulazione $[141.3 h^{-1} \text{ Mpc}]^3$ per ottenere il numero di gruppi

per unità di volume in un dato intervallo di massa. In figura 10.3 (b), la funzione di massa è espressa in termini di $\nu = (\delta_c/\sigma(M))^2$ come in Sheth & Tormen 1999. La linea rossa è la Press & Shechet, che si accorda poco con i dati essendo basata sul modello del collasso sferico. La linea nera è la relazione di Sheth & Tormen basata ricavata dal collasso ellissoideale. Gli aloni presenti a $z = 0$ sono 73589, di questi ne sono stati selezionati 4960 che sono quelli che hanno più di 200 particelle, l'intervallo in massa corrispondente è: $2.82 \times 10^{12} - 9.82 \times 10^{14} M_\odot h^{-1}$.

10.1.1 Redshift di formazione

Sia $p(m, z_f)$ la probabilità di formazione in massa e redshift, dove per formazione si intende il tempo al quale un subalone ha metà della massa del corrispondente alone di massa M a $z = 0$. In base a questa definizione $M(z)/M(0)$ è distribuito tra un mezzo e uno. Seguendo Lacey & Cole 1993 e Seth & Tormen 2004 la distribuzione del tempo di formazione degli aloni che hanno massa M a $z = 0$ è data dalla relazione:

$$p(z_f)dz_f = \int p(m, z_f)dm = p(\omega)d\omega = 2\omega \operatorname{erfc}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)d\omega, \quad (10.2)$$

dove $\omega^2 \equiv (\delta_{c,f} - \delta_c)^2 / (S_f - S)$ e $S_f = \sigma^2(M/2)$. Anche se questa formula è valida per condizioni iniziali di tipo *with-noise*, si pensa possa dare un buon *fit* pure in altri casi.

In figura 10.4 è riportata la funzione di distribuzione dei redshift di formazione per gli aloni della simulazione GIF.

In figura 10.5 è riportata la crescita degli aloni in termini del redshift, e il confronto con la relazione di Van den Bosch 2002. L'accordo che già era stato evidenziato per i *clusters* ri-simulati utilizzati per lo studio delle sottostrutture, lo troviamo anche nella simulazione cosmologica.

10.1.2 Formazione degli aloni in termini di M_*

L'elevato numero di aloni di cui è stata seguita la *merging history* ci permette di fare un'adeguata statistica e di cercare di capire come la massa di un alone cresce con il redshift in termini di M_* . In letteratura non esistono modelli che predicano analiticamente questo andamento, per cui ci proponiamo di dare una prima *fitting function*.

Già dai dati delle ri-simulazioni (figura 10.2) si è notato che il rapporto M/M_* dovrebbe avere un'andamento a legge di potenza, del tipo $\exp\{\log(1+z)^b\}$.

Per la determinazione della relazione M/M_* vs $\log(1+z)$ si è per prima cosa diviso in quattro intervalli il numero di aloni in relazione al rapporto in massa con la massa lineare

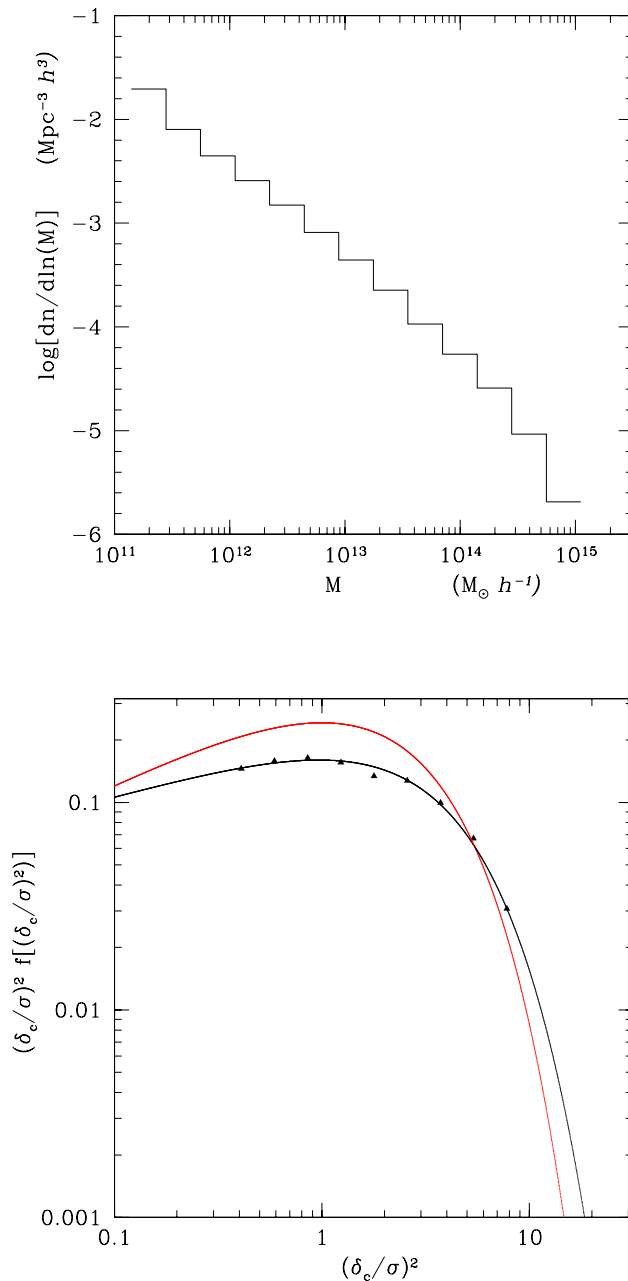


Figura 10.3: (a) *In alto*: numero di aloni per unità di volume a $z = 0$ nell'intervallo di massa $M, M + dM$. Il numero di aloni in ogni *bin* è stato diviso per il volume totale della simulazione che è di $[141.3 h^{-1} \text{Mpc}]^3$. (b) *In basso*: la fusione di massa non condizionale, in punti riproducono i dati della simulazione. La curva rossa è la Press & Schechter, quella nera è la Sheth & Tormen che si accorda meglio con i dati (come già mostrato in Sheth & Tormen 1999) poichè basata sul modello del collasso ellissoidale.

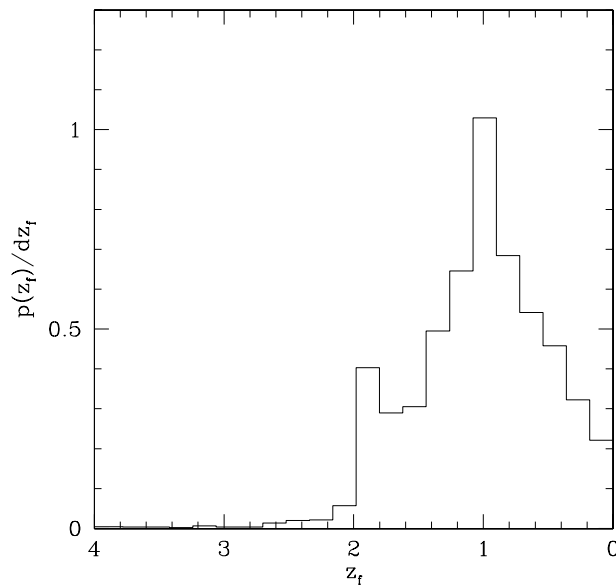


Figura 10.4: Frazione di aloni che si formano tra z e $z + dz$. Il redshift di formazione è stato ricavato interpolando con una crescita di massa lineare tra due snapshot successivi.

di collasso, si è successivamente normalizzato l'andamento in termini di $[M/M_*]_0$ e per ogni gruppo è stata ricavata la media.

La relazione che fitta i punti è del tipo:

$$\log[M/M_*] - \log[M/M_*]_0 = 0.1 \{ \exp [a \log(1 + z)]^b - 1 \}, \quad (10.3)$$

dove le costanti di normalizzazione sono state ricavate rendendo minimo il χ^2 .

In figura 10.6 sono riportati gli andamenti funzionali (le linee continue), mentre i punti con le barre di errore sono i valori medi. La figura 10.7 mostra infine l'andamento in termini di M/M_* dei parametri a e b che compaiono nell'equazione 10.3.

Da come si osserva nelle figure le relazioni che legano i parametri a M/M_* sono delle rette le cui equazioni sono:

$$a = -0.11 \log[M/M_*]_0 + 4.47;$$

$$b = 0.02 \log[M/M_*]_0 + 0.62.$$

La crescita in massa del progenitore principale scritta in questo modo è indipendente dal modello Press & Schecher, infatti basta assegnare il rapporto $[M/M_*]_0$. Nel caso della relazione 8.4 bisognava invece assegnare il redshift di formazione.

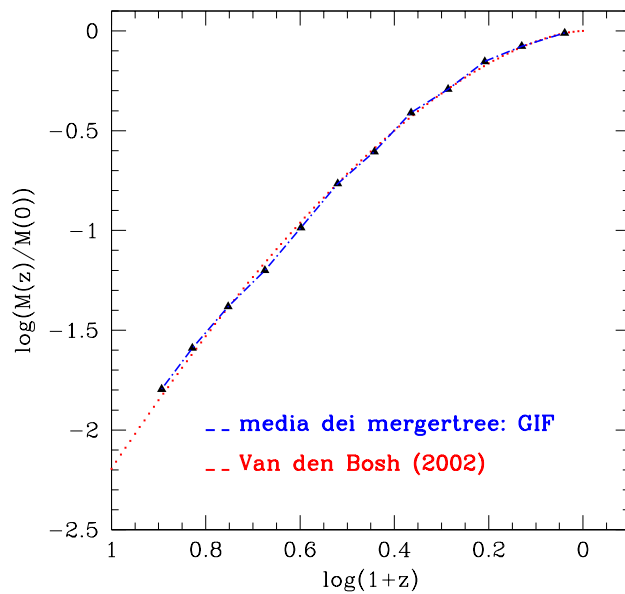


Figura 10.5: Mass Accretion History, in rosso è riportata quella ricavata da un *mergertree* Monte Carlo alla Sommerville & Kolatt da Van den Bosch 2002, il redshift di accrescimento considerato è una media sui valori di tutti gli aloni con più di 200 particelle, la validità della relazione è sostenuta nel *range* di massa: $10^6 - 10^{16} M_{\odot} h^{-1}$. I punti indicano la MAH ricavata dalle simulazioni cosmologiche GIF mediando 4960 *mergertree*. L'individuazione degli aloni e la loro "storia" è stata fatta come in TMY.

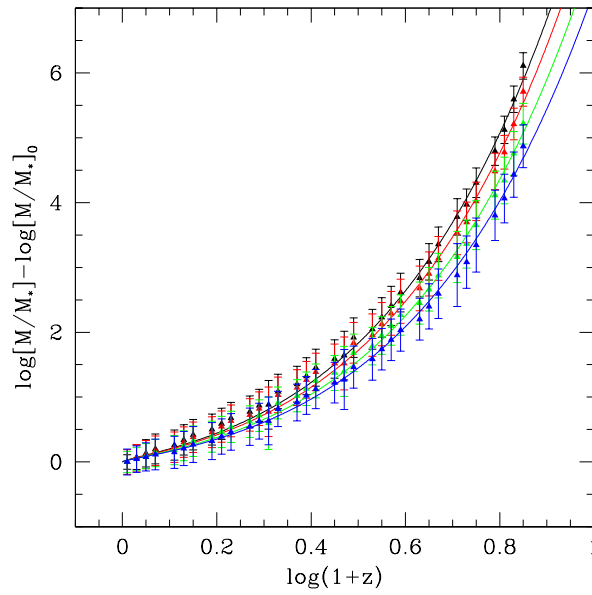


Figura 10.6: Crescita di M/M_* in termini del redshift ricavata dalle simulazioni cosmologiche.

Riscrivendo la relazione 10.3 e sostituendo a e b dalle relazioni sopra infine si ha:

$$\log \left[\frac{M}{M_*} \right] = \log \left[\frac{M}{M_*} \right]_0 + 0.1 \times \left\{ \exp \left[(-0.11 \log[M/M_*]_0 + 4.47)(\log(1+z))^{[0.02 \log[M/M_*]_0 + 0.62]} \right] - 1 \right\}. \quad (10.4)$$

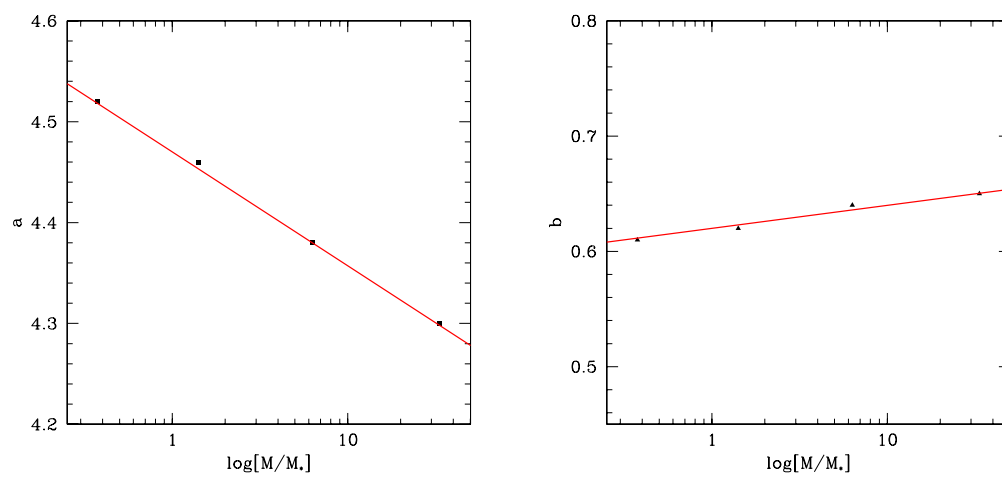


Figura 10.7: Andamento in termini di M/M_* dei parametri che fittano la relazione M/M_* vs $\log(1+z)$.

-> INDICE

Conclusioni & Sviluppi futuri

Le proprietà delle sottostrutture e il loro tasso di perdita di massa ricavati dalle nostre simulazioni sono in buon accordo con i recenti lavori svolti. I piccoli sistemi non sono una versione riscalata di quelli grandi ma hanno una minore abbondanza delle sottostrutture. Gli ammassi più grandi, in un modello gerarchico di formazione delle strutture si formano più tardi e i subaloni al loro interno sono presenti da poco tempo per subire una considerevole perdita di massa. La loro abbondanza (per $m/M > 10^{-4}$) può anche essere dedotta dalla relazione 10.1, quindi gli aloni meno massivi hanno meno satelliti in relazione al fatto che sono una frazione più piccola di M_* .

Con l'aumentare della densità della materia oscura nella regione centrale anche le sottostrutture risultano essere più concentrate. Da questo punto ci proponiamo in seguito di analizzare se può esistere un accordo tra la distribuzione della materia oscura negli ammassi di galassie e le galassie.

In relazione ai recenti lavori riguardanti la *Dark Energy* (Dolag et al. 2004) e le proprietà del *lensing* (Bartelmann et al. 2004 e Meneghetti et al. 2004) in base ai modelli cosmologici si potrebbe cercare una possibile discriminante dei modelli cosmologici tra le proprietà dei subaloni.

Il lavoro svolto in questa tesi è stato anche di calibrare delle relazioni da poter usare in modelli semi-analitici di formazione di galassie, e visti i risultati del recente lavoro di Cantalupo 2003

(tesi di laurea) ci proponiamo di portarlo avanti sviluppando nuove analisi su scale più piccole. Migliorare la statistica dei subaloni è quindi un lavoro estremamente importante per comprendere i processi di formazione delle galassie all'interno degli ammassi.

-> INDICE

Masse viriali & Masse a 200 volte la densità critica

Si riportano in questa appendice le masse degli aloni parente ricalcolate a posteriori. Il codice che individua gli aloni nella simulazioni come sistemi sovradensi con almeno 10 particelle, a priori definisce il raggio come la distanza dal centro alla quale la densità dentro la sfera assume il valore previsto dal collasso sferico: Eke et al. 1996. Dai *files* contenuti le proprietà dei profili degli aloni sono stati estratti i raggi ai quali la densità entro la sfera raggiungeva il valore di 200 volte quella critica e la massa contenuta è stata definita come M_{200} . Le tabelle nelle pagine successive si riferiscono sia alle simulazioni con gas (SPH) che di sola materia oscura (N-body).

alone	M_{200}	R_{200}	M_{vir}	R_{vir}
g10 (1)	6.994882E+14	1.465173	8.927000E+14	1.991480
g10 (2)	5.045878E+14	1.301854	7.271000E+14	1.859860
g1169+1661 (1)	6.282824E+14	1.412562	7.915000E+14	1.913220
g1169+1661 (2)	3.881735E+14	1.203656	5.310000E+14	1.674830
g1429+2388 (1)	3.454986E+14	1.156116	3.997000E+14	1.523550
g1429+2388 (2)	3.930872E+14	1.202280	4.873000E+14	1.627560
g24+200 (1)	1.388081E+15	1.842191	1.703000E+15	2.470030
g24+200 (2)	5.249994E+14	1.363039	6.544000E+14	1.795640
g2	7.151331E+14	1.476228	8.420000E+14	1.953050
g32	1.014236E+15	1.656464	1.198000E+15	2.196940
g3 (1)	1.022463E+15	1.645187	1.383000E+15	2.304580
g3 (2)	3.589132E+14	1.172836	4.233000E+14	1.552940
g479+1486 (1)	4.112174E+14	1.213905	5.450000E+14	1.690770
g479+1486 (2)	2.556712E+14	1.048688	3.146000E+14	1.406750
g482+719 (1)	5.220436E+14	1.318987	7.558000E+14	1.884010
g482+719 (2)	3.079858E+14	1.117617	4.039000E+14	1.528790
g7	1.144615E+15	1.723381	1.462000E+15	2.347190

Tabella A.1: Tabelle con le masse ricalcolate degli aloni ospiti: SPH. Le masse sono espresse in $M_{\odot} h^{-1}$, mentre i raggi in $\text{Mpc } h^{-1}$.

alone	M_{200}	R_{200}	M_{vir}	R_{vir}
g10 (1)	7.126194E+14	1.480803	9.664000E+14	2.044820
g10 (2)	5.050926E+14	1.301193	6.902000E+14	1.827830
g1169+1661 (1)	3.699767E+14	1.187162	6.091000E+14	2.058630
g1169+1661 (2)	6.089816E+14	1.397690	8.797000E+14	2.326950
g1429+2388 (1)	3.834849E+14	1.187404	4.942000E+14	1.635260
g1429+2388 (2)	3.370492E+14	1.147632	3.915000E+14	1.513050
g24+200 (1)	7.254714E+14	1.464367	1.317000E+15	2.266900
g24+200 (2)	1.052461E+15	1.813110	1.164000E+15	2.175550
g32	1.005134E+15	1.648667	1.184000E+15	2.187950
g3 (1)	3.603050E+14	1.172638	4.736000E+14	1.612200
g3 (2)	1.201704E+15	1.752756	1.407000E+15	2.317850
g479+1486 (1)	2.482261E+14	1.038934	3.077000E+14	1.396280
g479+1486 (2)	3.865169E+14	1.203203	5.373000E+14	1.681410
g482+719 (1)	5.461812E+14	1.338353	7.813000E+14	1.904920
g482+719 (2)	3.217155E+14	1.132535	3.961000E+14	1.518960
g7	1.126136E+15	1.721117	1.463000E+15	2.348060

Tabella A.2: Tabelle con le masse ricalcolate degli aloni ospiti: N-body. Le masse sono espresse come nella tabella precedente.

-> INDICE

Calibrazione delle relazioni del tasso di perdita di massa dei subaloni

Nel capitolo 8 è stata considerata l'evoluzione delle sottostrutture negli aloni ospite e il loro tasso di perdita di massa, indipendentemente dalla loro orbita. I satelliti sono stati selezionati al momento del *merging* e sono stati seguiti durante la loro evoluzione nell'alone parente. Per ogni *snapshot* temporale è stata ricavata la loro massa e considerato l'intervallo di tempo tra questi due istanti, il loro tasso di perdita di massa:

$$\log \left[\frac{dm/M}{dt} \right] = \alpha \log \left[\frac{m}{M} \right] + \beta \Rightarrow \dot{x}(t) = \beta' x(t)^\alpha. \quad (\text{B.1})$$

Svolgendo la derivata del membro di sinistra si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{M} \frac{dm}{dt} - \frac{m}{M^2} \frac{dM}{dt}. \quad (\text{B.2})$$

Per ricavare \dot{m} bisogna quindi considerare anche come cresce la massa dell'alone parente (MAH: **mass accretion history**). Van den Bosch 2002, da un modello EPS, ha ricavato una relazione per la crescita degli aloni parente che è in buon accordo con le simulazioni (fino ad oggi non è stato fatto nessun lavoro analogo sulle simulazioni) nel *range* di massa che va da $10^6 - 10^{16} M_\odot h^{-1}$:

$$\log \left[\frac{M(z)}{M_0} \right] = -0.301 \left[\frac{\log(1+z)}{\log(1+z_f)} \right]^\omega. \quad (\text{B.3})$$

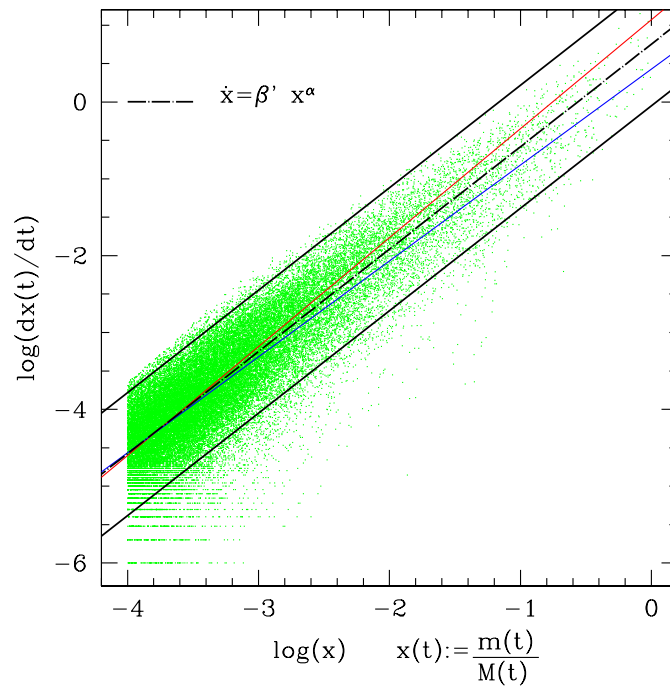


Figura B.1: Tasso di perdita di massa dei satelliti rispetto al progenitore principale.

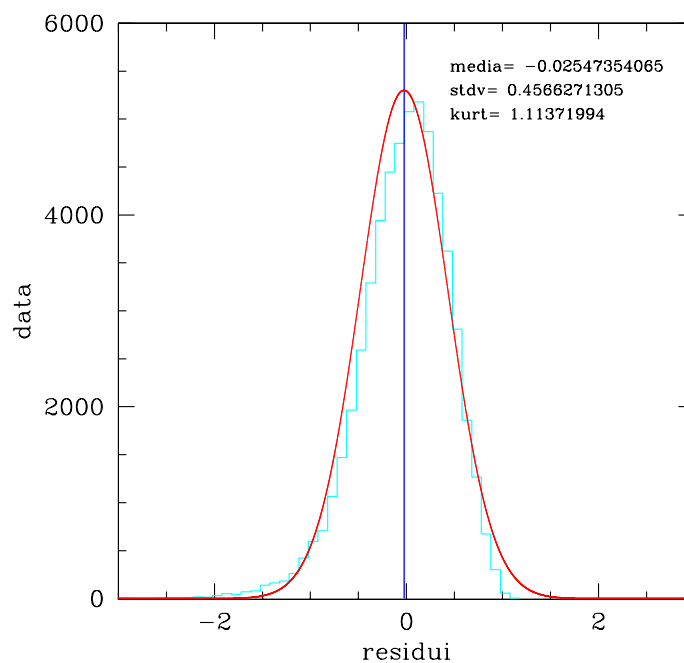


Figura B.2: Residui della relazione lineare che interpola il tasso di perdita di massa.

Conoscendo l'andamento del tempo in funzione di z (nel nostro caso per un universo Λ CDM), si può ricavare:

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{dt} = -0.301 \frac{1}{[\log(1+z_f)]^\omega} \frac{\omega [\log(1+z)]^{\omega-1}}{1+z} \left(\frac{dz}{dt} \right)_{\Lambda\text{CDM}}.$$

Infine sostituendo nella relazione sopra si ha¹ :

$$\frac{\dot{m}}{m} = \beta' \left(\frac{m}{M} \right)^{\alpha'} - \frac{0.301 \omega [\log(1+z)]^{\omega-1}}{(1+z) [\log(1+z_f)]^\omega} \left(\frac{dz}{dt} \right)_{\Lambda\text{CDM}}. \quad (\text{B.4})$$

Per avere un'espressione indipendente dal redshift di formazione degli aloni, e che quindi non tenga conto del modello Press & Schechter si può provare a utilizzare la relazione in termini di M/M_* per la quale basta specificare il rapporto a $z = 0$.

¹ $\alpha' = \alpha - 1$; $\beta' = 10^\beta$.

Bibliografia

- [1] Matthias Bartelmann et al. Evolution of dark-matter haloes in a variety of dark-energy cosmologies. 2004.
- [2] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton Series in Astrophysics, 1987.
- [3] S. Cole and C. Lacey. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. *MNRAS*, 281:716, July 1996.
- [4] G. De Lucia, G. Kauffmann, V. Springel, S. D. M. White, B. Lanzoni, F. Stoehr, G. Tormen, and N. Yoshida. Substructures in cold dark matter haloes. *MNRAS*, 348:333–344, February 2004.
- [5] J. Diemand, B. Moore, and J. Stadel. Velocity and spatial biases in cold dark matter subhalo distributions. *MNRAS*, 352:535–546, August 2004.
- [6] K. Dolag, M. Bartelmann, F. Perrotta, C. Baccigalupi, L. Moscardini, M. Meneghetti, and G. Tormen. Numerical study of halo concentrations in dark-energy cosmologies. *AAP*, 416:853–864, March 2004.
- [7] V. R. Eke, S. Cole, and C. S. Frenk. Cluster evolution as a diagnostic for Ω . *MNRAS*, 282:263–280, September 1996.
- [8] L. Gao, G. De Lucia, S. D. M. White, and A. Jenkins. Galaxies and subhaloes in Λ CDM galaxy clusters. *MNRAS*, 352:L1–L5, August 2004.

- [9] S. Ghigna, B. Moore, F. Governato, G. Lake, T. Quinn, and J. Stadel. Dark matter haloes within clusters. *MNRAS*, 300:146–162, October 1998.
- [10] S. Ghigna, B. Moore, F. Governato, G. Lake, T. Quinn, and J. Stadel. Density Profiles and Substructure of Dark Matter Halos: Converging Results at Ultra-High Numerical Resolution. *ApJ*, 544:616–628, December 2000.
- [11] S. P. D. Gill, A. Knebe, and B. K. Gibson. The evolution of substructure - I. A new identification method. *MNRAS*, 351:399–409, June 2004.
- [12] S. P. D. Gill, A. Knebe, B. K. Gibson, and M. A. Dopita. The evolution of substructure - II. Linking dynamics to environment. *MNRAS*, 351:410–422, June 2004.
- [13] A. Jenkins, C. S. Frenk, S. D. M. White, J. M. Colberg, S. Cole, A. E. Evrard, H. M. P. Couchman, and N. Yoshida. The mass function of dark matter haloes. *MNRAS*, 321:372–384, February 2001.
- [14] G. Kauffmann, S. D. M. White, and B. Guiderdoni. The Formation and Evolution of Galaxies Within Merging Dark Matter Haloes. *MNRAS*, 264:201, September 1993.
- [15] A. Klypin, S. Gottlöber, A. V. Kravtsov, and A. M. Khokhlov. Galaxies in N-Body Simulations: Overcoming the Overmerging Problem. *ApJ*, 516:530–551, May 1999.
- [16] A. Klypin, A. V. Kravtsov, O. Valenzuela, and F. Prada. Where Are the Missing Galactic Satellites? *ApJ*, 522:82–92, September 1999.
- [17] A. V. Kravtsov, O. Y. Gnedin, and A. A. Klypin. The Tumultuous Lives of Galactic Dwarfs and the Missing Satellites Problem. *ApJ*, 609:482–497, July 2004.
- [18] C. Lacey and S. Cole. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation. *MNRAS*, 262:627–649, June 1993.
- [19] C. Lacey and S. Cole. Merger Rates in Hierarchical Models of Galaxy Formation - Part Two - Comparison with N-Body Simulations. *MNRAS*, 271:676, December 1994.
- [20] Jounghun Lee. Formalism for the global subhalo mass function in the tidal-limit approximation. *Astrophys. J.*, 604:L73–L76, 2004.
- [21] Y. Li, M. Mac Low, and R. S. Klessen. Formation of Globular Clusters in Galaxy Mergers. *ApJ*, 614:L29–L32, October 2004.

- [22] Massimo Meneghetti, Bhuvnesh Jain, Matthias Bartelmann, and Klaus Dolag. Constraints on dark energy models from galaxy clusters with multiple arcs. 2004.
- [23] B. Moore, S. Ghigna, F. Governato, G. Lake, T. Quinn, J. Stadel, and P. Tozzi. Dark Matter Substructure within Galactic Halos. *ApJ*, 524:L19–L22, October 1999.
- [24] B. Moore, F. Governato, T. Quinn, J. Stadel, and G. Lake. Resolving the Structure of Cold Dark Matter Halos. *ApJ*, 499:L5, May 1998.
- [25] Daisuke Nagai and Andrey V. Kravtsov. The radial distribution of galaxies in Λ CDM clusters. 2004.
- [26] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *ApJ*, 490:493, December 1997.
- [27] M. Oguri and J. Lee. A realistic model for spatial and mass distributions of dark halo substructures: An analytic approach. *MNRAS*, page 420, September 2004.
- [28] W. H. Press and P. Schechter. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, 187:425–438, February 1974.
- [29] E. Rasia, G. Tormen, and L. Moscardini. A dynamical model for the distribution of dark matter and gas in galaxy clusters. *MNRAS*, 351:237–252, June 2004.
- [30] Darren Reed et al. Dark matter subhaloes in numerical simulations. 2004.
- [31] R. K. Sheth. Substructure in dark matter haloes: towards a model of the abundance and spatial distribution of subclumps. *MNRAS*, 345:1200–1204, November 2003.
- [32] R. K. Sheth, H. J. Mo, and G. Tormen. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. *MNRAS*, 323:1–12, May 2001.
- [33] R. K. Sheth and G. Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *MNRAS*, 308:119–126, September 1999.
- [34] R. K. Sheth and G. Tormen. An excursion set model of hierarchical clustering: ellipsoidal collapse and the moving barrier. *MNRAS*, 329:61–75, January 2002.
- [35] V. Springel, S. D. M. White, G. Tormen, and G. Kauffmann. Populating a cluster of galaxies - I. Results at $z=0$. *MNRAS*, 328:726–750, December 2001.

- [36] F. Stoehr, S. D. M. White, V. Springel, G. Tormen, and N. Yoshida. Dark matter annihilation in the halo of the Milky Way. *MNRAS*, 345:1313–1322, November 2003.
- [37] F. Stoehr, S. D. M. White, G. Tormen, and V. Springel. The satellite population of the Milky Way in a Λ CDM universe. *MNRAS*, 335:L84–L88, October 2002.
- [38] J. E. Taylor and A. Babul. The evolution of substructure in galaxy, group and cluster haloes - I. Basic dynamics. *MNRAS*, 348:811–830, March 2004.
- [39] James E. Taylor and Arif Babul. The evolution of substructure in galaxy, group and cluster haloes II: Global properties. 2004.
- [40] James E. Taylor and Arif Babul. The evolution of substructure in galaxy, group and cluster haloes III: Comparison with simulations. 2004.
- [41] James E. Taylor and Arif Babul. Predicting substructure in cdm haloes. 2004.
- [42] G. Tormen. Hydrodynamic Simulations of Galaxy Formation, 1996.
- [43] G. Tormen. The Structure of Dark Matter Haloes. In *ASP Conf. Ser. 94: Mapping, Measuring, and Modelling the Universe*, 1996.
- [44] G. Tormen. The rise and fall of satellites in galaxy clusters. *MNRAS*, 290:411–421, September 1997.
- [45] G. Tormen. The assembly of matter in galaxy clusters. *MNRAS*, 297:648–656, June 1998.
- [46] G. Tormen. N-Body Simulations of Dark Matter Haloes. In *From Stars to Galaxies to the Universe*, 1999.
- [47] G. Tormen, F. R. Bouchet, and S. D. M. White. The structure and dynamical evolution of dark matter haloes, April 1997.
- [48] G. Tormen, A. Diaferio, and D. Syer. Survival of substructure within dark matter haloes. *MNRAS*, 299:728–742, September 1998.
- [49] G. Tormen, L. Moscardini, and N. Yoshida. Properties of cluster satellites in hydrodynamical simulations. *MNRAS*, 350:1397–1408, June 2004.
- [50] F. C. van den Bosch. The universal mass accretion history of cold dark matter haloes. *MNRAS*, 331:98–110, March 2002.

-
- [51] F. C. van den Bosch, G. Tormen, and C. Giocoli. The mass function and average mass loss rate of dark matter subhaloes. 2004.
- [52] H. Zhao. Dynamical friction for dark halo satellites: effects of tidal mass loss and growing host potential. *MNRAS*, 351:891–902, July 2004.

Ringraziamenti

Finalmente... Sono passati nove mesi da quando ho iniziato questo lavoro...e dopo tanti sacrifici è finito....

Il primo e grande ringraziamento va a Bepi...
...grazie per avermi permesso di lavorare per tutti questi mesi su tante belle cose ... e di avermi fatto partecipare a tanti progetti...

Grazie per tutti i passi avanti che ho fatto ... , per le pizze mangiate insieme e con Franco ... e soprattutto per i dolci che ci ha fatto assaggiare ...

Ringrazio Elena Rasia, che mi ha reso subito partecipe del Gruppo di Cosmologia e Sebastiano, il mio primo "guru" .

Ringrazio tutti i ragazzi con i quali ho condiviso il luogo di lavoro, i computer e anche qualcos'altro !...

Ricordo con piacere le "sedute" di *journal club*, Angela, Anna, Bepi, Elena, Franco, Klaus, Riccardo e Vincenzo; e spero ce ne siano altre MILLE

Ringrazio i miei genitori che mi hanno permesso di fare questa strada ... Luca (mio fratello e "compagno" di stanza) che mi è stato vicino e ha corretto tutti gli strafalcioni ... le sottostrutte e sottostrutture ...

I miei compagni di appartamento: Antonio, Daniele, Luca e Rodolfo ... che hanno sentito tutta l'ansia che avevo e lo sclero quotidiano

Federico che mi ha aiutato a fare le fotocopie e che rompe sempre per mandare mail con la scusa che i computer al piano terra non funzionano ...

Infine una persona che ho trovato lungo questo "cammino" e che spero mi "accompagni" per molto tempo. Grazie Maria e scusa se non sono riuscito a darti tutto quello che volevi ... mi rifarò in futuro ... !