

第七節 柱體與錐體

一、柱體

空間中兩個全等且互相平行的封閉平面區域，以及在全等關係下，連接這兩個平面區域周界對應點的所有直線段，它們所成的集合稱為柱體。其中兩個全等且平行的封閉平面區域，稱為柱體的底，一般依擺放位置可以區分為上底與下底；底以外的其餘表面，稱為柱體的側面。同時垂直於兩個底面的線段，稱為柱體的高，而高的長度，一般也簡稱為柱體的高，上、下兩個底面的距離就是柱體的高。柱體一般以其兩個底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱為角柱，如果其底面是圓區域，則稱為圓柱。下圖中圖 2-7-1 到圖 2-7-7 是七種不同的柱體。

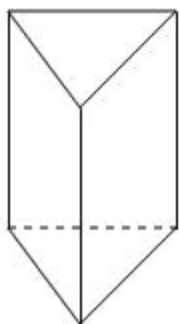
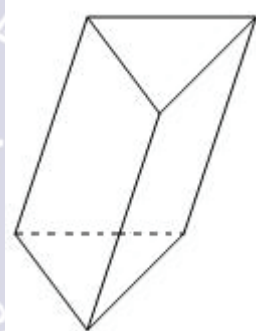


圖 2-7-1



(斜角柱)

圖 2-7-2

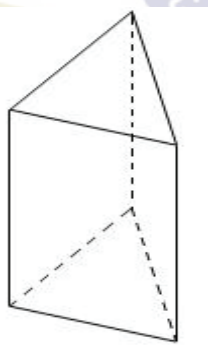


圖 2-7-3

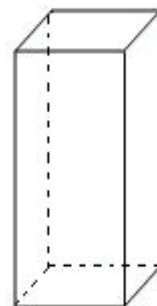


圖 2-7-4

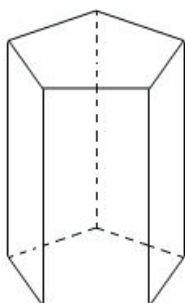


圖 2-7-5

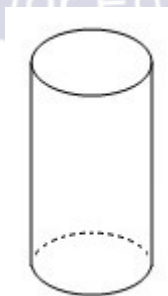
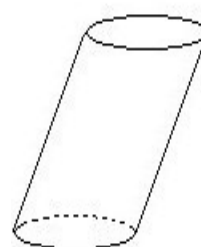


圖 2-7-6



(斜圓柱)

圖 2-7-7

(一) 角柱

隨著角柱底面形狀的不同，可以分別給予柱體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的柱體稱為三角柱，底面是四邊形區域的柱體稱為四角柱，底面是五邊形區域的柱體稱為五角柱…，以此類推。而上圖中圖 2-7-1、圖 2-7-2、圖 2-7-3 都是三角柱，圖 2-7-1 中三角柱的側面是長方形區域，而圖 2-7-2 中三角柱的側面是平行四邊形區域，如果角柱的側面是長方形區域，一般稱為直角柱，直角柱側面有兩個邊和兩個底面都垂直，如果角柱的側面是平行四邊形區域，一般稱為斜角柱，斜角柱側面的邊和上下兩個底面都不會垂直，當直角柱的底面是正多邊形區域時，一般稱為正角柱，圖 2-7-3 是正三角柱，圖 2-7-4 是正四角柱，圖 2-7-5 是正五角柱。在國小階段討論的對象都是直角柱，並不討論斜角柱，因此本教材將直角柱稱為角柱。

「上、下兩個底面是全等的多邊形區域」，「上、下兩個底的周界所對應的邊互相平行」，「上、下兩個底面互相平行」，「側面都是長方形區域」，「側面的邊的長度都等長」，「側面的邊，分別垂直於上、下兩個底面」，「側面的邊都互相平行」，上述這些性質都是直角柱的特徵，當學童進行完直角柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

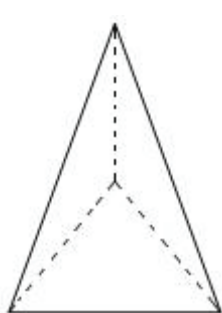
(二) 圓柱

底為圓區域的柱體稱為圓柱。和角柱一樣，圓柱也可以區分為直圓柱和斜圓柱兩類，圖 2-7-6 是直圓柱，圖 2-7-7 是斜圓柱，直圓柱上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，而斜圓柱上、下兩個底面圓心的連線和兩個底面都不垂直。國小階段討論的對象都是直圓柱，並不討論斜圓柱，因此本教材將直圓柱稱為圓柱。

「上、下兩個底面是全等的圓區域」，「上、下兩個底面互相平行」，「上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面」，「側面上，同時垂直於上、下兩個底面的線段都等長」，上述這些性質都是直圓柱的特徵，當學童進行完圓柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

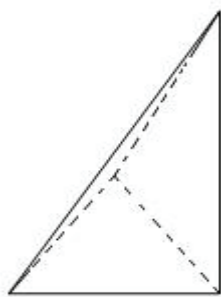
二、錐體

在空間中，給定一個封閉的平面區域，以及不在此平面區域上的一個點，則連接此給定的點與平面區域周界上任意點的所有直線段所成的集合，稱為錐體。決定此錐體的平面圖形稱為錐體的底，底面外的那一個給定點，稱為錐體的頂點，底面以外的錐體表面，稱為錐體的側面。錐體頂點到底面的距離，或由頂點垂直於底面的線段都稱為錐體的高。錐體一般以其底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱之為角錐，如果其底面是圓區域，則稱之為圓錐。下圖中圖 2-7-8 到圖 2-7-14 是七種不同的錐體。



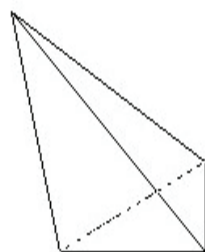
(底面是正三角形區域的正三角錐)

圖 2-7-8



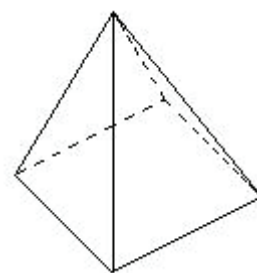
(底面是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-9



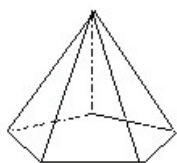
(底面不是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-10



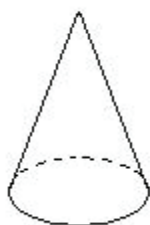
(正四角錐)

圖 2-7-11



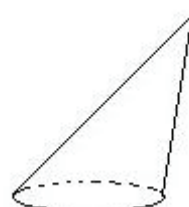
(正五角錐)

圖 2-7-12



(直圓錐)

圖 2-7-13



(斜圓錐)

圖 2-7-14

(一) 角錐

隨著角錐底面形狀的不同，分別給予錐體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是四邊形區域的錐體稱為四角錐，底面是

五邊形區域的錐體稱爲五角錐…，以此類推。而上圖中的圖 2-7-8、圖 2-7-9、圖 2-7-10 都是三角錐，圖 2-7-8 中三角錐的底面是正三角形區域，其側面都是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線一定會和底面垂直，一般稱這種角錐爲正角錐，圖 2-7-9 中三角錐的底面也是正三角形區域，其側面不是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線不會和底面垂直，圖 2-7-10 中三角錐的底面是三邊都不等長的三角形區域，側面都不是等腰三角形區域。過去國小課程所討論的錐體都是正角錐，其底面都是正多邊形區域，而頂點到底面正多邊形外接圓圓心的連線都會和底面垂直，圖 2-7-11 與圖 2-7-12 都是正角錐，圖 2-7-11 是正四角錐，圖 2-7-12 是正五角錐。

本教材只討論角錐的一般性質，並不刻意的區分正角錐或斜角錐，「錐體的側邊都是三角形」，「錐體的側邊都交於同一點」，上述這些性質都是角錐的特徵，當學童進行完角錐的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

一個三角錐有 4 個頂點，其中不在底面上的那一個頂點，是決定錐體的頂點，而底面三角形區域的三個頂點，是形成角錐後產生的頂點，國小學童並不討論角錐是如何產生的，只討論給定的角錐有哪些性質，本教材定義尖尖的點就是角錐的頂點，將這四個點都稱爲頂點，也不區分這些頂點不同的意義。

(二) 圓錐

底面爲圓形的錐體稱之爲圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分爲直圓錐和斜圓錐兩類，圖 2-7-13 是直圓錐，圖 2-7-14 是斜圓錐，直圓錐頂點到底面圓心的連線會垂直於底面，而斜圓錐頂點到底面圓心的連線不會垂直於底面，本教材只討論圓錐的一般性質，並不刻意的區分直圓錐或斜圓錐。

三、柱體和錐體構成要素的分析

柱體及錐體的構成要素都是頂點、邊和面，生活中的實物構造，屬於標準的柱體或錐體並不多，大部分實物的外貌都是複合結構，有些部分的截面比較大，有些部分配有凹凸的裝飾，數學上的描述都是以實物的理想化情境來考慮。

(一) 角柱

角柱的構成要素爲頂點、邊和面，這些構成要素的個數，分別依其底面的形

狀而不相同，下面列出角柱頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點個數 = 一個底的邊數 $\times 2 = 2n$ (n 角柱)
- 邊的個數 = 一個底的邊數 $\times 3 = 3n$
- 面的個數 = 一個底的邊數 $+ 2 = n + 2$

由上面的式子可以知道， n 角柱的頂點個數、邊的個數及面的個數一定會滿足「頂點的個數 $(2n)$ + 面的個數 $(n + 2)$ = 邊的個數 $(3n) + 2$ 」，數學上稱這個算式為尤拉公式，而尤拉公式對正多面體等立體圖形也成立。

(二) 角錐

角錐的構成要素也是頂點、邊和面，其個數也和底邊有密切的關係，下面列出角錐頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點數 = 底的邊數 $+ 1 = n + 1$ (n 角錐)
- 邊的個數 = 底的邊數 $\times 2 = 2n$
- 面的個數 = 底的邊數 $+ 1 = n + 1$
- 角錐也滿足尤拉公式「頂點的個數 $(n + 1)$ + 面的個數 $(n + 1)$ = 邊的個數 $(2n) + 2$ 」。

(三) 圓柱

決定圓柱的要素為底面的大小，以及兩個底面之間的距離，圓柱的粗細由底面半徑的長短決定，而圓柱的長短或高低由兩個底面的距離決定，因為圓柱底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，因此本教材不討論圓柱頂點、邊和面個數的問題。

(四) 圓錐

決定圓錐的要素為底面的大小，以及頂點到底面的距離，和圓柱不同的是圓錐有一個頂點，因為圓錐底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，所以本教材也不討論圓錐頂點、邊和面個數的問題。

四、柱體和錐體的展開圖

在理論上來說，立體的表面是無法展開的，因為立體只是一個形狀，並沒有厚度，只能透過拓印的方式，依其各面的相關位置，在平面將各個面拓印下來。為了能較具體地呈現立體各面展開的可能相對位置，本教材所討論的立體展開圖，是將立體想像成其內部是空心的，用紙做的模型，可以沿著此模型面的邊緣將其剪開。

剪出角柱和角錐的展開圖時，必須滿足剪開後相連的面保留有共同的邊，每一個面至少保留有一個邊和其它的面相連，所有的面要連結成一整塊，可以攤平成一個平面區域，而且可以再沿著相鄰的邊，摺回成原來的立體等這些條件。角柱和角錐可以有很多的展開方式，圖 2-7-15 和圖 2-7-16，分別是四角柱兩種不同的展開圖。

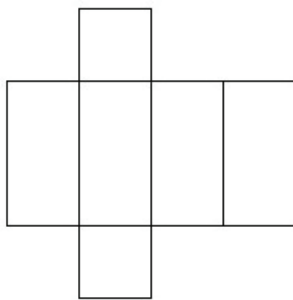


圖 2-7-15

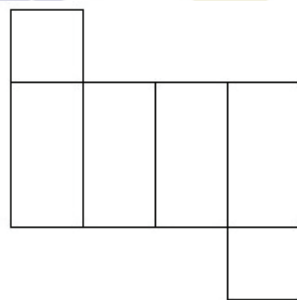


圖 2-7-16

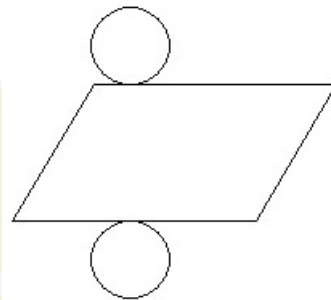


圖 2-7-17

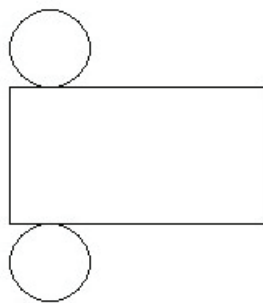


圖 2-7-18

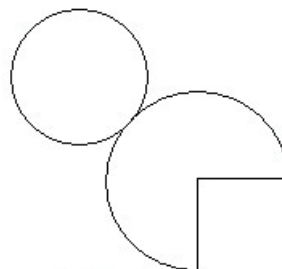


圖 2-7-19

圓柱和圓錐的底面是平面，側面是曲面，而其底部的圓周是曲線，因此圓柱和圓錐展開的方式和角柱與角錐不同。如果要讓展開後整個表面都能平攤在平面上，其底面的周界和側面理論上只能有一個點相連接，無法和角柱與角錐一樣，

保持一個直的邊相連接，圖 2-7-17 和圖 2-7-18 都是一個圓柱的展開圖，它們可以透過下列方式剪出：先將兩個底面沿著圓周剪開，使其分別和側面只保持一個理想化的連接點，再就側面上兩個底的邊緣各選定一個點，將這兩個點連接起來，如果這兩個點的連線和底面的邊緣不垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-17 圓柱的側邊展開成平行四邊形區域。如果這兩個點的連線和底的邊緣垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-18，圓柱側邊展開成長方形區域，習慣上，我們都選擇圖 2-7-18 當做圓錐的展開圖。

圖 2-7-19 是一個圓錐的展開圖，其剪開的方法和圓柱類似，先將底面和側面沿著底的邊緣剪開，使底面和側面只保持一個理想化的連接點，接著在底的邊緣上找一點，將這點和頂點連接起來，沿著這條線就能將側面剪成一個扇形。

直圓錐展開圖中扇形所夾的角度，和直圓錐底面的半徑以及頂點到底面圓周上任意點的距離(簡稱側邊長)有關係，假設一個直圓錐底面的半徑是 r ，側邊的長是 a ，那麼該直圓錐展開圖中的扇形區域，其半徑是 a ，弧長是 $2\pi r$ ，假設該展開圖中扇形的夾角是 θ 度，因為扇形的弧長和以 a 為半徑的圓周長滿足「 $2\pi r : 2\pi a = \theta : 360$ 」的關係，因此可以得到「 $\theta = 360 \times r \div a$ 」的結果。

學童不易理解上述公式，因此本教材只要求學童能剪出直圓錐的展開圖，並不要求學童畫出直圓錐的展開圖。如圖 2-7-20，教師畫直圓錐展開圖的時候應該注意，當 $2r = a$ 時， θ 會等於 180 度，所畫出的扇形是一個半圓，當 $2r > a$ 時， θ 會大於 180 度，所畫出的扇形會是一個優扇形(比半圓大)，當 $2r < a$ 時， θ 會小於 180 度，所畫出的扇形才是一個劣扇形。

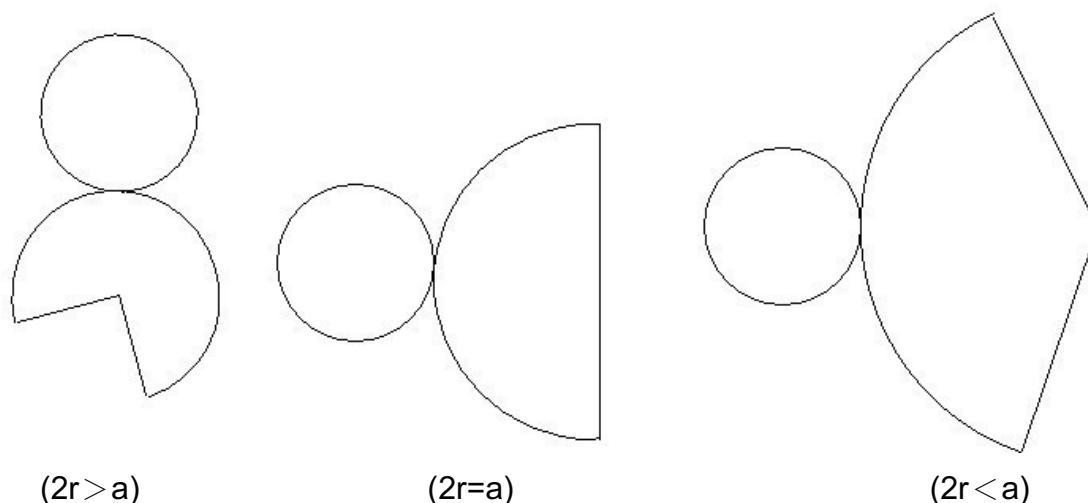


圖 2-7-20

五、柱體及錐體教學流程說明

表 2-7 是本教材關於柱體及錐體的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-7

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	2	透過由一堆立體中找出像尖頂的立體的活動，認識錐體。

11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
11	11	4	透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。
11	11	5	透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。

在低年級階段，本教材將學童對柱體和錐體的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元活動 2，透過實物辨識球、圓錐、圓柱和長方體等圖形，並描述圖形的形狀。

中年級開始，本教材將學童對球的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，在第六冊第七單元活動 5，開始探討柱體的構成要素，透過觀察正方體和長方體，知道正方體有六個全等的面，十二個等長的邊，長方體有三對全等的面，三組等長的邊，八個頂點。

高年級開始，本教材開始探討構成要素之間的關係，第十冊第七單元活動 2、3、4，分別幫助學童認識長(正)方體上相鄰的面互相垂直的現象，相對的面互相平行的現象，以及邊和面互相平行的現象。第十一冊第十一單元活動 1、2，分別在一堆立體中找出像柱子一樣的立體，以及像尖頂一樣的立體，認識柱體和錐體，活動 3 透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數，以及底面全等，側面為長方形區域，側邊一樣長且垂直於底面，兩底面互相平行，側邊互相平行等性質。活動 4 透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等，底面互相平行等性質。活動 5 透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數，以及側面為三角形區域，側面的邊都交於同一點的性質。