

Festkörpermechanik

von Albrecht Bertram

mit Beispielen

von Rainer Glüge

Otto-von-Guericke–Universität Magdeburg

2015

e-Mail-Adressen der Autoren:

albrecht.bertram@ovgu.de
rainer.gluege@ovgu.de

Erste deutsche Ausgabe Febr. 2013
Überarbeitete deutsche Ausgabe 2015
Erste englische Ausgabe *Solid Mechanics* (Springer Verlag) 2015

ISBN 978-3-940961-88-4
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
© Albrecht Bertram, Rainer Glüge (2015)

*Da sage mir jemand was gegen die Mechanik!
Ist sie nicht die schönste aller Wissenschaften?*

Honoré de Balzac: Das Chagrinleder (1831)

Vorwort

Dieses Lehrbuch ist aus dem Vorlesungsskript eines zweisemestrigen Kurses hervorgegangen, den die Autoren in den vergangenen Jahren regelmäßig an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg angeboten haben. Vorausgesetzt werden für sein Studium Grundkenntnisse der Mechanik und Mathematik, wie sie in den ersten Semestern eines Ingenieurstudiums an Hochschulen und Universitäten gelehrt werden.

Das ganze Buch beschränkt sich grundsätzlich auf kleine Deformationen (geometrisch lineare Theorie). Für die nicht-lineare Theorien (großer Deformationen) sei auf weiterführende Lehrbücher¹ verwiesen.

Ein Schwerpunkt dieses Buches liegt auf der Materialmodellierung. Sie ist wohl dasjenige Gebiet, das nicht ersetzt werden kann und niemals abgeschlossen sein wird und deshalb auf Dauer im Zentrum des Forschungsinteresses stehen wird. So beginnen wir mit einer Übersicht über die wichtigsten Materialmodelle - zunächst in eindimensionaler Form. Um diese dann dreidimensional zu formulieren, bedarf es geeigneter mathematischer Werkzeuge. Für die Kontinuumsmechanik ist dies die Tensorrechnung, in die kurz eingeführt wird. Wir schränken uns dabei auf ihre einfachste Erscheinungsweise ein, indem wir grundsätzlich nur Bezug nehmen auf Orthonormalsysteme ("kartesische Tensoren"). Im Weiteren wird dann die Kontinuumsmechanik in tensorieller Schreibweise entwickelt.

In der dreidimensionalen Materialtheorie (oder Werkstoffmechanik) werden dann noch einmal die Elastizität, Viskoelastizität und Plastizität dargestellt, hier jedoch in größerer Allgemeinheit. Auch die Thermodynamik wird so weit eingeführt, wie sie für die Materialtheorie benötigt wird.

Der Stoff dieses Buches ist klassisch, nur wenig ist wirklich neu. Das meiste ist lediglich anders ausgewählt und unter didaktischen Gesichtspunkten neu dargestellt, wie es schon EUGEN ROTH treffend schrieb:

*Die Wissenschaft, sie ist und bleibt,
was einer ab vom andern schreibt -
doch trotzdem ist, ganz unbestritten,
sie immer weiter fortgeschritten.*

In den einzelnen Kapiteln wird auf die wichtigste Literatur verwiesen. Beim Kapitel 4.1 (Elastizitätstheorie) hat sich der Autor insbesondere von Gurtin (1972) und beim Kapitel 4.2 (Thermoelastizität) von Carlson (1972) inspirieren lassen (beide im *Handbuch der Physik*

¹ wie beispielsweise A. Krawietz: *Materialtheorie*. Springer-Verlag, Berlin (1986) und A. Bertram: *Elasticity and Plasticity of Large Deformations - an Introduction*. Springer-Verlag, 3. Aufl. (2012)

VIa/2). Arnold Krawietz hat insbesondere zum Kapitel 4.4.6 (Thermoplastizität) beigetragen, aber auch das gesamte Manuskript kritisch gelesen und ungezählte Verbesserungsvorschläge gemacht, wofür ihm an dieser Stelle ganz herzlich gedankt sei.

Die in dieses Skript eingestreuten Beispiele wurden von Rainer Glüge eingebracht. Sie sind eine Auswahl der Übungsaufgaben, die über mehrere Jahre von den Übungsleitern der Lehrveranstaltungen benutzt wurden. In chronologischer Reihenfolge waren dies Wolfgang Lenz, Thomas Böhlke, Michael Schurig, Gerrit Risy und Rainer Glüge. Einige Beispiele basieren auf der Vorarbeit der Kollegen, wobei insbesondere Michael Schurig mit den Beispielen 12, 16, 17 und 18 zu erwähnen ist. Die Beispiele 12, 16 und 20 wurden aus Rechnungen in den Lehrbüchern Göldner (1991) und Ieşan (2004) entwickelt.

In den vielen Jahren, in denen dieser Kurs bisher durchgeführt wurde, wurde auch dieses Skript immer wieder überarbeitet. Es sei allen Studierenden und Mitarbeitern, die hierzu beigetragen haben, an dieser Stelle gedankt. Und auch in Zukunft sind kritische Hinweise und Vorschläge willkommen (an: albrecht.bertram@ovgu.de, rainer.gluege@ovgu.de).

Das gesamte Buch ist im Internet für jede Person frei nutzbar. Während sich die Autoren eine kommerzielle Nutzung selbst vorbehalten, ist jede andere Nutzung erwünscht und beabsichtigt.

Dieses Buch wurde 2013 erstmalig ins Netz gestellt. Die vorliegende Version von 2015 ist gegenüber jener aktualisiert und verbessert. Eine englische Version dieses Buches erscheint 2015 im Springer-Verlag unter dem Titel *Solid Mechanics*.

Albrecht Bertram, Rainer Glüge

Magdeburg, 2015

Inhalt

1	EINACHSIGE MATERIALTHEORIE.....	10
1.1	Deformationen, Spannungen und Arbeit	10
1.2	Elastizität.....	14
1.3	Viskoelastizität (Rheologie)	17
1.3.1	Das NEWTON-Element	18
1.3.2	Der MAXWELL-Körper	20
1.3.3	Der KELVIN-Körper	23
1.3.4	Der POYNTING-Körper	26
1.3.5	Der BURGERS-Körper	27
1.3.6	Viskoelastische Modelle vom Differenzial-Typ	29
1.3.7	Viskoelastische Modelle vom Integral-Typ	30
1.3.8	Kriechschädigung	33
1.3.9	Materialermüdung	36
1.4	Plastizität	39
1.4.1	Starr-plastische Modelle	39
1.4.2	Elastisch-plastische Modelle	42
1.5	Viskoplastizität	45
2	EINFÜHRUNG IN DIE TENSORRECHNUNG	47
2.1	Vektor- und Tensoralgebra	48
2.1.1	Summenkonvention	48
2.1.2	Vektoren	50
2.1.3	Dyaden und Tensoren	52
	Beispiel 1. Linearität	52
2.1.4	Die Inverse eines Tensors	58
2.1.5	Die Transponierte eines Tensors	59
2.1.6	Quadratische Formen und Tensorflächen	61
2.1.7	Kreuzprodukt zwischen Vektor und Tensor	62
2.1.8	Orthogonale Tensoren	64
2.1.9	Transformationsregeln für Basiswechsel	65
2.1.10	Eigenwertprobleme	67
2.1.11	Spektralformen von symmetrischen Tensoren	71
	Beispiel 2. Produkte zwischen Vektoren	72
	Beispiel 3. Symbolische und Indexnotation	74
	Beispiel 4. Orthogonale Tensoren	75
	Beispiel 5. Eigenwerte und Invarianten	77
	Beispiel 6. Spektraldarstellung	79
2.1.12	Zeitabhängige Vektoren und Tensoren	80
2.1.13	Starrkörperdynamik (Kreiseltheorie)	82
2.1.14	Schiefe Biegung von Stäben	88
2.1.15	Tensoren höherer Stufe	91
2.1.16	Tetraden	95
	Beispiel 7. Mehrfache skalare Überschiebung	99
2.2	Vektor- und Tensoranalysis	100
2.2.1	Das Richtungs-Differenzial	100
2.2.2	Der Nabla-Operator	104

2.2.3	Zylinderkoordinaten	107
	Beispiel 8. Zylinderkoordinaten I	109
	Beispiel 9. Zylinderkoordinaten II	110
2.2.4	Integraltransformationen	111
3	GRUNDLAGEN DER KONTINUUMSMECHANIK	114
3.1	Deformationsgeometrie.....	114
3.1.1	Kompatibilitätsbedingungen.....	126
	Beispiel 10. Kompatibilitätsbedingungen.....	128
	Beispiel 11. Torsion	129
3.2	Spannungs-Analyse	131
3.2.1	Prinzipien der Mechanik.....	137
3.2.2	Spannungsfunktionen	143
	Beispiel 12. Spannungsfunktionen (KIRSCH 1898).....	148
4	DREIDIMENSIONALE MATERIALTHEORIE.....	152
4.1	Elastizität.....	153
4.1.1	Materielle Symmetrie	156
4.1.2	Isotrope Elastizität	165
4.1.3	Darstellung linearer Gesetze mit der Projektionsmethode	172
4.1.4	Identifikation der elastischen Konstanten.....	175
4.1.5	Elastische Energie	178
4.1.6	Randwertprobleme der Elastostatik.....	182
	Beispiel 13. Elastostatisches Randwertproblem	188
	Beispiel 14. Herausziehen einer Stange	191
	Beispiel 15. Rotierende Scheibe.....	192
4.1.7	Variationsprinzipien der Elastostatik.....	194
4.1.8	Verschiebungsfunktionen	202
	Beispiel 16. Kraft auf elastischen Halbraum	207
	Beispiel 17. HERTZscher Kontakt	211
	Beispiel 18. Variationsprinzipien im Vergleich	215
	Beispiel 19. Minimum der elastischen Energie bei einer gekerbten Zugprobe	221
4.1.9	Wellenausbreitung in elastischen Medien	224
4.2	Thermomechanik.....	230
4.2.1	Thermodynamische Bilanzen	230
4.2.2	Thermoelastizität	233
4.2.3	Lineare Thermoelastizität	236
4.2.4	Isotrope lineare Thermoelastizität	240
4.2.5	Das gemischte Rand- und Anfangswertproblem der linearen Thermoelastizität	242
	Beispiel 20. Thermo-elastisches Randwertproblem	243
4.3	Lineare Viskoelastizität.....	248
4.4	Plastizität	253
4.4.1	Fließgrenzen	254
4.4.2	Fließregeln.....	263
4.4.3	Verfestigungsregeln.....	266
4.4.4	Konsistenzbedingung und inkrementelle Stoffgesetze	268
4.4.5	Das Postulat von DRÜCKER.....	270
	Beispiel 21. SCHMID-Gesetz	272
	Beispiel 22. J_2 -Plastizität	275
4.4.6	Thermoplastizität.....	281

Liste der wichtigsten Bezeichnungen

Die wichtigen Gleichungen sind kapitelweise durchnummeriert. Daneben werden folgende Abkürzungen für grundlegende Aussagen benutzt, die immer wieder in verschiedenen Versionen auftauchen:

<i>C1</i>	1. CAUCHYsche Gleichung (3.2.7)
<i>C2</i>	2. CAUCHYsche Gleichung (3.2.8)
<i>CDU</i>	CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung (4.2.9)
<i>DU</i>	Dissipations-Ungleichung (4.4.6)
<i>FOURIER</i>	FOURIERsches Wärmeleitungsgesetz (2.2.6), (4.2.32)
<i>HOOKE</i>	HOOKEsches Gesetz (4.1.1)
<i>INK</i>	Kompatibilitätsbedingung (3.1.34)
<i>LB</i>	Leistungsbilanz (3.2.14)
<i>NV</i>	NAVIERsche Verschiebungsgleichung (4.1.37)
<i>PdvL</i>	Prinzip der virtuellen Leistung (3.2.13)
<i>VVB</i>	Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (3.1.23)
<i>1.HS</i>	1. Hauptsatz der Thermodynamik (4.2.3)
<i>2.HS</i>	2. Hauptsatz der Thermodynamik (4.2.6)

Häufig verwendete Abkürzungen

Dgl.	Differenzialgleichung
HTA	Hauptträgheitsachse
KOOS	Koordinatensystem
ONB	Orthonormalbasis
<i>q.e.d.</i>	<i>quot erat demonstrandum</i> (Beweisende)

Hier sind die wichtigsten Formelzeichen in alphabetischer Reihenfolge:

<i>A</i>	(Querschnitts-) Flächeninhalt
<i>A₀</i>	Ausgangsquerschnitts-Flächeninhalt
<i>ℳ</i>	(Ober-) Flächengebiet
a	Beschleunigung
<i>A_a</i> , <i>a_a</i>	Arbeit der äußeren Lasten (global und spezifisch)
<i>A_i</i> , <i>a_i</i>	Arbeit der Spannungen (global und spezifisch) (1.1.14)
b	massenspezifische Kraft (3.2.1)
<i>ℬ</i>	Körper
C	Steifigkeits-Tetrade, Elastizitätstensor (4.1.1)
<i>d</i>	Probendurchmesser, Schädigungsparameter (1.3.26)
d_O	Drall bezüglich <i>O</i> (2.1.110)
D	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor (3.1.31)
E	Verzerrungstensor mit Komponenten ε_{ij} (3.1.23)
E'	Verzerrungsdeviator
<i>E</i>	Elastizitätsmodul (1.2.1)
<i>E_i</i>	innere Energie
f	Kraftvektor
F	Deformationsgradient (3.1.16)
g	Temperaturgradient (2.2.5)
<i>G</i>	Schubmodul (4.1.14)

H	Verschiebungsgradient (3.1.14)
I	Einstensor (2.1.34)
J_M	Trägheitsmomententensor bez. M mit Komponenten J_{ij} (2.1.115)
K	Wärmeleitensor
k	Kompressionsmodul (4.1.13)
K	kinetische Energie (2.1.19), (3.2.14)
L	Geschwindigkeitsgradient (3.1.30)
l, l_0	Länge, Ausgangslänge
L_a, l_a	Leistung der äußeren Lasten (global und spezifisch) (3.2.15)
L_i, l_i	Spannungsleistung (global und spezifisch) (3.2.16)
m	Moment(envektor)
m	Masse
M	Massenmittelpunkt (2.1.107)
n	Normalenvektor
0	Nulltensor (2.1.37)
o	Nullvektor
p	Druck (3.2.11)
p	Impuls(vektor) (2.1.109)
P_i	Projektionstetraden (4.1.21)
q	Wärmeflussvektor (2.2.6)
q	lokale Wärmezufuhr pro Zeiteinheit und Volumeneinheit (4.4.74)
Q	globale Wärmezufuhr pro Zeiteinheit (4.2.1)
Q	Drehungs- oder Rotationstensor (2.1.74)
r	massenspez. Wärmequelle (4.2.1)
r	Ortsvektor
r_M	Ortsvektor zum Massenmittelpunkt (2.1.107)
\mathcal{R}	Menge der reellen Zahlen
S	Nachgiebigkeits-Tetrade (4.1.2)
T	Spannungstensor (3.2.5)
T'	Spannungsdeviator (3.2.12)
t	Zeit
t	Spannungsvektor (3.2.2)
u	Verschiebungsvektor (3.1.3)
V	Volumeninhalt
\mathcal{V}	Vektorraum, Volumengebiet
v	Geschwindigkeitsvektor
W	Wirbeltensor (3.1.32)
W, w	Formänderungsenergie (global und spezifisch) (4.1.30)
W^*, w^*	Formänderungsergänzungsenergie (global und spezifisch)
X	Ortsvektor in der Bezugsplatzierung (3.1.2)
x	Ortsvektor in der Momentanplatzierung (3.1.1)
X_1, X_2, X_3	materielle kartesische Koordinaten (3.1.5)
x_1, x_2, x_3	räumliche kartesische Koordinaten (3.1.4)
Z	Verfestigungsvariable in Kap. 5.4
α	thermischer Ausdehnungskoeffizient
χ	Bewegung (3.1.1)
Δ	LAPLACE-Operator (2.2.54)
δ	Variation, virtuell

δ	massenspez. Dissipation (-leistung) (4.2.11)
δ_{ij}	KRONECKER-Symbol (2.1.1)
ε	Volumendilatation (4.1.10)
ε	massenspez. innere Energie (4.2.3)
ε_{ij}	Dehnungen (3.1.23)
ε_{ijk}	Permutations-Symbol (2.1.2)
γ	Schubverzerrung
η	massenspez. Entropie (4.2.6)
φ	Fließkriterium (4.4.3)
κ	Wärmeleitungskoeffizient (2.2.6)
λ	LAMÉsche Konstante (4.1.17), plastischer Parameter (4.4.29)
μ	LAMÉsche Konstante (4.1.17)
ν	Querkontraktionszahl (1.1.7), (4.1.16)
θ	Temperatur
ρ	Dichte
σ	Spannung (1.1.9)
τ	Schubspannung, Zeitvariable
ω	Winkelgeschwindigkeitsvektor (2.1.114)
ψ	massenspez. freie Energie
∇	Nabla-Operator (2.2.20)

Literatur zur Geschichte der Mechanik

Bell, E. T.: *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937.

Benvenuto, E.: *An Introduction to the History of Structural Mechanics*. Part I, II. Springer-Verlag, New York, 1991.

Capecchi, D.; Ruta, G.: *Strength of Materials and Theory of Elasticity in 19th Century Italy*. Springer-Verlag, 2015.

Dugas, R.: *A History of Mechanics*. Dover Pub., New York, 1988.

Fierz, M.: *Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Hund, F.: *Geschichte der physikalischen Begriffe*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1968.

Kurrer, K.-E.: *Geschichte der Baustatik*. Ernst & Sohn, Berlin, 2002, 2016.

Maugin, G. A.: *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century*. Springer-Verlag, 2013.

Stein, E. (Hrg.): *The History of Theoretical, Material and Computational Mechanics - Mathematics Meets Mechanics and Engineering*. Springer, Berlin (2014)

Szabo, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1977.

Timoshenko, S. P.: *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, 1953.

Todhunter, I.; Pearson, K.: *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: From Galilei to the present time*. University press, 1893.

Truesdell, C. A.: *Essays on the History of Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

1 EINACHSIGE MATERIALTHEORIE

Literatur zur Materialtheorie

- Backhaus, G.:** *Deformationsgesetze*. Akademie-Verlag, Berlin (1983)
- Besseling, J. F.; van der Giessen, E.:** *Mathematical Modelling of Inelastic Deformation*. Chapman & Hall, London (1994)
- Besson, J.; Cailletaud, G.; Chaboche, J.-L.; Forest, S.; Blétry, M.:** *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer, Dordrecht (2010)
- Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)
- Fung, Y. C.; Tong, P.:** *Classical and Computational Solid Mechanics*. World Scientific, Singapore (2003)
- Krawietz, A.:** *Materialtheorie*. Springer-Verlag, Berlin (1986)
- Lemaitre, J. (Hrg.):** *Handbook of Materials Behavior Models*. Academic Press, San Diego, Bd. 1 (2001)
- Skrzypek, J. J.:** *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)

1.1 Deformationen, Spannungen und Arbeit

Betrachten wir den einachsigen Zugversuch. Hierzu werden Proben verwendet, die zumeist rotationssymmetrisch sind, an beiden Enden eine Verdickung zur Einspannung tragen und einen genügend langen Meßbereich in der Mitte haben, in dem man annähernd von einem **einachsigen Spannungszustand** ausgehen kann. Eine kreiszylindrische Form soll in diesem Bereich die Inhomogenitäten möglichst gering halten, so dass man mit einem **homogenen Spannungs- und Deformationszustand** rechnet.

Deformationen können häufig nicht direkt und lokal gemessen werden, sondern nur global als Längenänderungen

$$\Delta l := l - l_0$$

einer Meßlänge l im Meßbereich mit Anfangswert l_0 . Als (lineare) **Dehnung** (engl. *strain*) definiert man die Ableitung der Verschiebung nach der Längskoordinate

$$(1.1.1) \quad \varepsilon := \frac{du(x)}{dx},$$

was *nur* für homogene Deformationen übergeht in

$$(1.1.2) \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1.$$

Sie ist dimensionslos und wird, wenn es sich um sehr kleine Werte handelt, auch in Prozent umgerechnet. Wird beispielsweise die Meßlänge von 30 auf 31 mm gezogen, so ist

$$\varepsilon = 0,033 = 3,3 \%$$

Positive Werte für ε bedeuten eine Verlängerung, negative eine Verkürzung der Probe.

Die obige Definition von Dehnung ist aber keineswegs die einzige. Ein anderes Dehnungsmaß ist die **logarithmische** oder **HENCKY²-Dehnung** oder der **Umformgrad** (LUDWIK 1909)

$$(1.1.3) \quad d\varepsilon_{ln} = \frac{dl}{l},$$

so dass

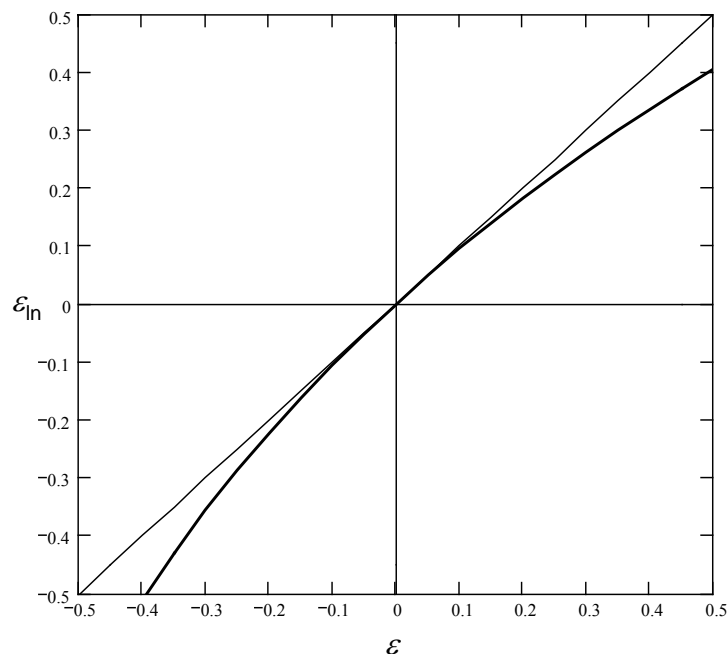
$$\varepsilon_{ln} = \int_{l_0}^l \frac{d\bar{l}}{\bar{l}} = \ln(l) - \ln(l_0) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

ist. Die Umrechnung zwischen beiden Dehnungsmaßen erfolgt gemäß

$$(1.1.4) \quad \varepsilon_{ln} = \ln(1 + \varepsilon)$$

und umgekehrt

$$(1.1.5) \quad \varepsilon = \exp(\varepsilon_{ln}) - 1.$$



Entwickeln wir diese Beziehung in eine TAYLOR-Reihe

$$\varepsilon = \exp(\varepsilon_{ln}) - 1 = \varepsilon_{ln} + \frac{1}{2!} \varepsilon_{ln}^2 + \frac{1}{3!} \varepsilon_{ln}^3 + \dots,$$

so sieht man, dass die beiden Verzerrungsmaße zusammenfallen $\varepsilon \approx \varepsilon_{ln}$, wenn man Terme von quadratischer und höherer Ordnung gegenüber linearen vernachlässigt.

Der Vorteil des logarithmischen Dehnungsmaßes besteht in seiner Additivität. Dehnt man nämlich die Probe erst bis l_1 und anschließend bis l_2 , so gelten

$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_1},$$

aber

² Heinrich Hencky (1885-1951)

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_0}{l_0} \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 .$$

Hingegen sind

$$\varepsilon_{ln1} = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_{ln2} = \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) ,$$

und es folgt die Additivität

$$\varepsilon_{ln} = \ln\left(\frac{l_2}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{l_2}{l_1} \frac{l_1}{l_0}\right) = \varepsilon_{ln1} + \varepsilon_{ln2} .$$

Die logarithmische Gesamtdehnung ist also die Summe der logarithmischen Teildehnungen.

In unserem Zahlenbeispiel ist

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0,0333 \\ \varepsilon_{ln} &= \ln(1 + 0,033) = \ln(1,033) \approx 0,0328 \\ \varepsilon_{ln}^2 &= 0,0011 . \end{aligned}$$

Seien d_0 der Probendurchmesser, A_0 der Querschnittsflächeninhalt und V_0 der Volumeneinhalt der unverformten und d bzw. A bzw. V der verformten Probe. Neben der Längsdehnung treten beim Zugversuch auch **Querdehnungen**

$$(1.1.6) \quad \bar{\varepsilon} := \frac{d - d_0}{d_0}$$

auf. Bei einachsigen Spannungszuständen in isotropen Materialien sind diese in allen Querrichtungen gleich. Die **Querkontraktionszahl** (engl. *POISSON'S³ ratio*) ist definiert als

$$(1.1.7) \quad \nu := - \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} .$$

Sie ist dimensionslos. Bei linear-elastischen Materialmodellen ist dies eine Materialkonstante, die für die meisten Materialien zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt, aber auch negative Werte annehmen kann. Für **inkompressible** Materialien ist die Deformation isochor oder volumenerhaltend

$$\begin{aligned} I = \frac{V}{V_0} &= \frac{d^2 l}{d_0^2 l_0} = \left(\frac{d - d_0}{d_0} + 1\right)^2 \left(\frac{l - l_0}{l_0} + 1\right) = (\bar{\varepsilon} + 1)^2 (\varepsilon + 1) \approx 2\bar{\varepsilon} + \varepsilon + 1 \\ \Rightarrow \quad 2\bar{\varepsilon} + \varepsilon &= (1 - 2\nu) \varepsilon \approx 0 \end{aligned}$$

und folglich $\nu = \frac{1}{2}$. Bezüglich der Querschnitte gilt dann

$$(1.1.8) \quad A_0 l_0 = A l \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{A} = \frac{l}{l_0} = 1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{A_0} \approx 1 - \varepsilon .$$

Auch **Spannungen** (engl. *stresses*) kann man nicht direkt messen, sondern nur die resultierende Kraft F , die auf die Probe aufgebracht wird, z. B. mittels einer Kraftmessdose. Die Kraft ist das Integral über die Axialspannung σ im Querschnitt

$$(1.1.9) \quad F = \int_{\mathcal{A}} \sigma dA .$$

³ Siméon Denis Poisson (1781-1840)

Ist σ homogen (d.h. räumlich konstant), so folgt

$$(1.1.10) \quad \sigma = \frac{F}{A},$$

was manchmal als **wahre Spannung** bezeichnet wird. Im Gegensatz dazu bezieht sich die **Nominalspannung** oder **Ingenieurspannung** auf den Ausgangsquerschnitt

$$(1.1.11) \quad \sigma_0 := \frac{F}{A_0}.$$

Die Dimension beider Spannungsgrößen ist [Kraft / Fläche]. Die übliche Einheit ist das *Pascal*⁴:

$$Pa := Nm^{-2}.$$

Es folgt mit (1.1.6) der Zusammenhang

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} = \frac{F}{A} \frac{A}{A_0} = \sigma \frac{d^2}{d_0^2} = \sigma (\bar{\varepsilon} + 1)^2 \approx \sigma (2\bar{\varepsilon} + 1) = \sigma (1 - 2\nu \varepsilon)$$

und im inkompressiblen Fall mit (1.1.8)

$$(1.1.12) \quad \sigma_0 = \sigma (1 - \varepsilon).$$

Bei Spannungs-Dehnungs-Diagrammen ist also die Angabe wichtig, welche Spannung über welcher Dehnung aufgetragen ist. Je größer die Dehnungen sind, desto größer werden auch die Unterschiede. Sind die Dehnungen klein, so gilt $\sigma \approx \sigma_0$. Da wir uns hier im Wesentlichen mit kleinen Verformungen beschäftigen werden, fallen alle Dehnungs- und alle Spannungsmaße zusammen, und wir können uns auf die Beziehung zwischen ε und σ konzentrieren, ohne die Maße weiter spezifizieren zu müssen.

Während eines Deformations/ Spannungsprozesses sind die Deformationen und die Spannungen Funktionen der Zeit: $\sigma(t)$ und $\varepsilon(t)$. Wir kennzeichnen ihre Ableitungen nach der Zeit mit $\dot{\cdot}$. Die spezifische **Spannungsleistung** (engl. *stress power*) ist für kleine Deformationen definiert als

$$(1.1.13) \quad l_i := \sigma \dot{\varepsilon}$$

mit der Dimension [Spannung/Zeit], und das Zeitintegral über einen beliebigen Dehnungsprozess, der bei Dehnung Null beginnt, als die spezifische **Spannungsarbeit** (engl. *work*)

$$(1.1.14) \quad a_i := \int_0^t l_i(\tau) d\tau = \int_0^t \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^{\varepsilon(t)} \sigma d\varepsilon$$

mit der Dimension [Spannung].

Vertauscht man die Rollen von Spannungen und Dehnungen in diesen Ausdrücken, so erhält man die spezifische **Ergänzungsleistung**

$$(1.1.15) \quad l_i^* := \varepsilon \dot{\sigma}$$

und die spezifische **Ergänzungsarbeit**

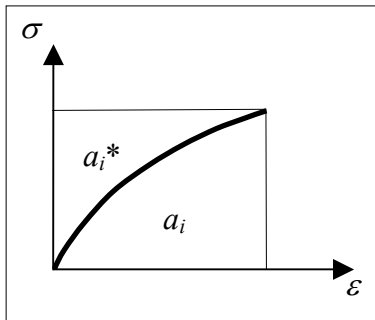
⁴ Blaise Pascal (1623-1662)

$$a_i^* := \int_0^t \varepsilon(\tau) \sigma(\tau)^\bullet d\tau = \int_0^{\sigma(t)} \varepsilon d\sigma,$$

weil

$$a_i + a_i^* = \varepsilon(t) \sigma(t),$$

was als **Endwertarbeit** bezeichnet wird.



Die (globale) Arbeit eines Körpers ist dann das Volumenintegral über die spezifische Arbeit in allen seinen Punkten.

1.2 Elastizität

Die mechanische Materialtheorie untersucht Zusammenhänge zwischen Spannungen und Deformationen. Man unterscheidet Materialien bezüglich ihrer Erinnerungsfähigkeit. Materialien mit **Gedächtnis** sind solche, bei denen das momentane Verhalten auch von zurückliegenden mechanischen Ereignissen abhängt. Die Materialklasse mit dem geringsten, nämlich überhaupt keinem Gedächtnis bildet die

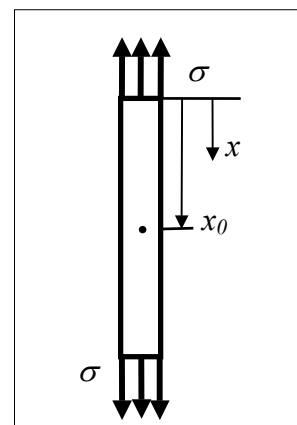
Elastizität: Die *momentanen* Spannungen hängen nur von den *momentanen* Deformationen ab.

Wir betrachten den Meßbereich einer Zugprobe aus elastischem Material unter beliebiger axialer Belastung. Die Spannungen $\sigma(x_0)$ an einer Stelle x_0 hängen von den Verschiebungen $u(x)$, $0 \leq x \leq l$, ab

$$\sigma(x_0) = F(u(x) \Big|_{x=0}^{x=l}).$$

Wir entwickeln nun $u(x)$ in eine TAYLOR-Reihe um x_0

$$u(x) = u(x_0) + u(x_0)'(x - x_0) + \frac{1}{2} u(x_0)''(x - x_0)^2 + \dots$$



Damit lässt sich die Spannung als Funktion der Ableitungen in demselben Punkt x_0 darstellen

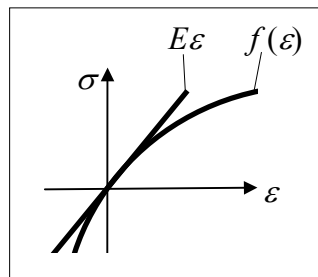
$$\sigma(x_0) = f_\infty(u(x_0), u(x_0)', u(x_0)'', \dots).$$

Verschieben wir nun den Stab starr, so ändert sich allein $u(x_0)$. Da Starrkörperbewegungen die Spannungen nicht beeinflussen sollen (*Prinzip der Invarianz gegen Starrkörpermodifikationen*), können wir das erste Argument $u(x_0)$ streichen. Um nicht alle unendlich vielen Ableitungen mitnehmen zu müssen, bricht man die Argument-Folge nach einem endlichen Glied ab. Ein elastisches Material von der Form

$$\sigma = f_n(u', \dots, u^{(n)})$$

(unter Weglassung des Ortsargumentes) wird **Gradientenmaterial** vom Grade n genannt. Meistens beschränkt man sich jedoch auf das Material vom Grade 1 , das **einfache Material**

$$\sigma = f_1(u') =: f(\varepsilon).$$



Darin kann die Funktion $f(\varepsilon)$ immer noch beliebig (nicht-linear) sein. Man wird jedoch aus Stabilitätsgründen erwarten, dass f monoton steigend ist. Sind die Dehnungen klein (und dies kann bei vielen Ingenieur Anwendungen vorausgesetzt werden), so ersetzt man f durch die Tangente im Ursprung mit der Steigung

$$E := \left. \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

und erhält das Stoffgesetz des einfachen linear-elastischen Materials, das

HOOKEsche⁵ Gesetz (1678)

$$(1.2.1) \quad \sigma = E \varepsilon$$

Aus Stabilitätsgründen ist der **E-Modul** (engl. *YOUNG's⁶ modulus*) E positiv. Er hat die Dimension [Spannung].

Man symbolisiert das linear-elastische Material durch eine Feder



Die spezifische Spannungsleistung dieses Materials besitzt ein Potenzial

⁵ Robert Hooke (1635-1703) "*ut tensio sic vis*"

⁶ Thomas Young (1773-1829)

$$(1.2.2) \quad l_i = \sigma \dot{\varepsilon} = E \varepsilon \dot{\varepsilon} = (\frac{1}{2} E \varepsilon^2) \dot{\quad} =: w(\varepsilon) \dot{\quad} = \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon} \varepsilon \dot{\quad} = (\frac{1}{2} \sigma \varepsilon) \dot{\quad}$$

und das Zeitintegral hierüber ist die Spannungsarbeit

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} a_i &:= \int_0^t l_i d\tau = \int_0^t \sigma(\tau) \varepsilon(\tau) \dot{\quad} d\tau = \int_0^\varepsilon \sigma d\underline{\varepsilon} \\ &= \int_0^\varepsilon E \underline{\varepsilon} d\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 =: w(\varepsilon) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon, \end{aligned}$$

die als **Formänderungsenergie** $w(\varepsilon)$ gespeichert wird.

Die Ergänzungsarbeit ist

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} a_i^* &:= \int_0^t l_i^* d\tau = \int_0^t \varepsilon(\tau) \sigma(\tau) \dot{\quad} d\tau = \int_0^\sigma \varepsilon d\underline{\sigma} \\ &= \int_0^\sigma E^{-1} \underline{\sigma} d\underline{\sigma} = \frac{1}{2} E^{-1} \sigma^2 =: w^*(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \end{aligned}$$

mit der Ergänzungsleistung

$$(1.2.5) \quad l_i^* = \varepsilon \dot{\sigma} = E^{-1} \sigma \dot{\sigma} = (\frac{1}{2} E^{-1} \sigma^2) \dot{\quad} =: w^*(\sigma) \dot{\quad} = \frac{dw^*(\sigma)}{d\sigma} \sigma \dot{\quad} = (\frac{1}{2} \sigma \varepsilon) \dot{\quad},$$

die als **Formänderungsergänzungsenergie** $w^*(\sigma) := \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$ bezeichnet wird. Wegen der Linearität des HOOKEschen Gesetzes sind a_i und a_i^* identisch.

Es gelten nach (1.2.2) bzw. (1.2.5) die Potenzialbeziehungen

$$(1.2.6) \quad \sigma = \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{dw^*(\sigma)}{d\sigma}.$$

1.3 Viskoelastizität (Rheologie)

Literatur

- Backhaus, G.:** *Deformationsgesetze*. Akademie-Verlag, Berlin (1983)
- Bert, C. W.:** *Material damping: An introductory review of mathematical models, measures and experimental techniques*. J. Sound Vibr., 29(2), 129-153 (1973)
- Bland, D. R.:** *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Pergamon Press, Oxford (1960)
- Christensen, R. M.:** *Theory of Viscoelasticity*. Acad. Press (1971)
- Clough, R.W.; Penzin, J.:** *Dynamics of Structures*. Mc Graw-Hill (1982)
- Creus, G. J.:** *Viscoelasticity – Basic Theory and Applications to Concrete Structures*. Springer, Berlin (1986)
- Drozdov, A. D.:** *Mechanics of Viscoelastic Solids*. J. Wiley & S., New York, London (1998)
- Ferry, J.:** *Viscoelastic Properties of Polymers*. J. Wiley & S., New York, London (1961)
- Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K.:** *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. North-Holland Pub., Amsterdam, New York, Oxford (1976)
- Flügge, W.:** *Visco-Elasticity*. Springer, Berlin (1975)
- Francois, D.; Pineau, A.; Zaoui, A.:** *Mechanical Behaviour of Materials*, Bd. II, Kluwer, Dordrecht (1998)
- Freed, A. D.:** *Soft Solids*. Birkhäuser (2014)
- Freudenthal, A. M.:** *Inelastisches Verhalten von Werkstoffen*. VEB Verl. Technik Berlin (1955)
- Giesekus, H.:** *Phänomenologische Rheologie. Eine Einführung*. Springer, Berlin (1994).
- Gurtin, M. E.; Sternberg, E.:** *On the linear theory of viscoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal. 11 (1962)
- Krawietz, A.:** *Materialtheorie*. Springer, Berlin (1986)
- Lazan, B. J.:** *Damping of Material and Members in Structural Mechanics*. Pergamon Press (1968)
- Leitmann, M. J.; Fisher, G. M. C.:** *The Linear Theory of Viscoelasticity*. Handbuch der Physik VI a/3. Hrg. S. Flügge. Springer, Berlin (1973)
- Malmeisters, A., Tamuzs, V.; Teters, G.:** *Mechanik der Polymerwerkstoffe*. Akademie-Verlag Berlin (1977)
- Naumenko, K.; Altenbach, H.:** *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Springer, Berlin (2007)
- Nowacki, W.:** *Theorie des Kriechens*. Franz Deuticke, Wien (1965)
- Odqvist, F. K. G.; Hult, J.:** *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*. Springer, Berlin (1962)
- Phan-Thien, M.:** *Understanding Viscoelasticity. Basics of Rheology*. Springer, Berlin (2002)
- Pipkin, A. C.:** *Lectures on Viscoelasticity Theory*. Springer, Berlin (1972)
- Rabotnov, Y. u. N.:** *Creep Problems in Structural Members*. North-Holland (1969)
- Rabotnov, Ju. N.; Iljuschin, A. A.:** *Methoden der Viskoelastizitätstheorie*. Carl Hanser Verlag, München (1968)
- Schlimmer, M.:** *Zeitabhängiges mechanisches Werkstoffverhalten*. Springer, Berlin (1984).
- Skrzypek, J. J.:** *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)
- Tschoegl, N. W.:** *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. An Introduction*. Springer, Berlin (1989)

Unter den inelastischen Materialien gibt es **Geschwindigkeits-unabhängige** (skleronome), bei denen die Spannungen unabhängig von der Geschwindigkeit des Deformationsprozesses sind, und **Geschwindigkeits-abhängige** (rheonome), bei denen dies nicht der Fall ist.

Geschwindigkeits-unabhängige Modelle werden in der Elastizität und der Plastizität behandelt. Wir wollen uns zunächst aber mit den Geschwindigkeits-abhängigen Modellen befassen. Auch hier stehen wieder die linearen Modelle im Vordergrund unserer Betrachtungen (lineare Viskoelastizität).

1.3.1 Das NEWTON-Element

Einfachster Ansatz für ein Geschwindigkeits-abhängiges Material ist das **linear-viskose Gesetz**

$$(1.3.1) \quad \sigma(t) = D \dot{\varepsilon}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{D} d\tau + \varepsilon(0)$$

mit der positiven Viskositäts- oder Dämpfungskonstante D der Dimension [Spannung \times Zeit]. Man symbolisiert es durch einen stilisierten Dämpfer



und nennt es NEWTON⁷-Element. Unter konstanter Last kriecht dieses Material mit konstanter Geschwindigkeit. Hält man die Bewegung inne, so fällt die Spannung abrupt auf Null ab. Auf plötzlich aufgebrachte Lasten reagiert das NEWTON-Element quasi starr. Das NEWTON-Element besitzt also keine instantane Elastizität. Es besitzt außerdem keine ausgezeichnete Länge und kann infolge einer dauerhaft aufgebrachten Last über alle Grenzen deformiert werden. Darin gleicht es einem Fluid.

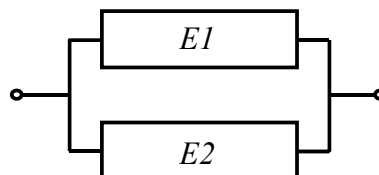
Die Spannungsleistung dieses Elements ist positiv-semidefinit

$$(1.3.2) \quad l_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma^2}{D} = D \dot{\varepsilon}^2 =: \delta(\dot{\varepsilon}) \geq 0 \quad \text{für} \quad D > 0,$$

die vollständig dissipiert wird, d. h. in Wärme verwandelt oder auf andere Weise mechanisch verloren geht.

Man kann andere **linear-viskoelastische Materialien** durch Parallel- oder Reihenschaltungen von Feder- und Dämpferelementen erzeugen. Dabei gelten folgende Regeln:

- für die *Parallelschaltung*



$$(1.3.3) \quad \sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

Die Spannungen der beiden Elemente addieren sich.

$$(1.3.4) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Die Dehnungen sind gleich.

⁷ Isaac Newton (1643-1727)

- für die *Reihenschaltung*:

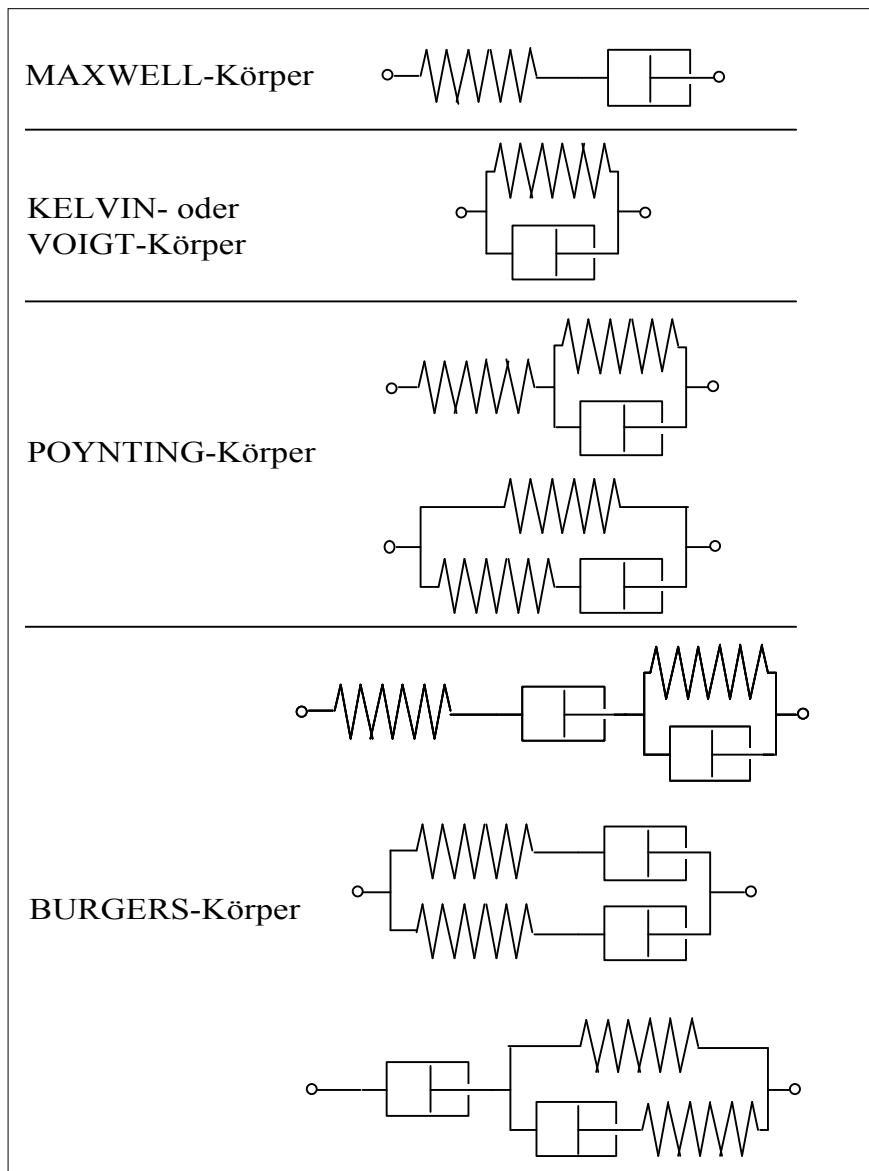


(1.3.5) $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ Die Spannungen sind gleich.

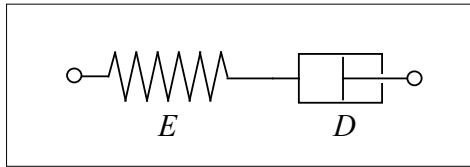
(1.3.6) $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ Die Dehnungen addieren sich.

Mit diesen Regeln kann man beliebige **rheologische Modelle** (s. Tabelle) analysieren. Man beachte, dass in einigen Fällen unterschiedliche rheologische Modelle identisches Materialverhalten zeigen (bei geeigneter Wahl der Konstanten).

Bevor wir auf gemeinsame Eigenschaften aller dieser Modelle kommen, betrachten wir die wichtigsten, weil einfachsten von ihnen genauer.



1.3.2 Der MAXWELL-Körper



Der MAXWELL⁸-Körper besteht aus einer Reihenschaltung von Feder und Dämpfer. Dann gelten nach (1.3.6)

$$(1.3.7) \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_D \quad \text{mit} \quad \sigma_E = E \varepsilon_E \quad \text{und} \quad \sigma_D = D \varepsilon_D \dot{\quad}$$

$$\varepsilon \dot{\quad} = \varepsilon_E \dot{\quad} + \varepsilon_D \dot{\quad} = \frac{\sigma_E \dot{\quad}}{E} + \frac{\sigma_D}{D}$$

und nach (1.3.5)

$$\sigma = \sigma_E = \sigma_D$$

schließlich

$$(1.3.8) \Rightarrow \quad \varepsilon \dot{\quad} = \frac{\sigma \dot{\quad}}{E} + \frac{\sigma}{D} .$$

Wir betrachten nun einen endlichen Spannungs- und begleitenden Dehnungs-Prozess zwischen den Zeitpunkten θ und t , was die Erfassung von Anfangswerten $\sigma(\theta)$ und $\varepsilon(\theta)$ erfordert. Ist der Dehnungsprozess vorgegeben, so möchte man für dieses Modell den Spannungsprozess berechnen, oder umgekehrt. Durch zeitliche Integration von (1.3.8) erhält man die Dehnungs-explizite Form

$$(1.3.9) \quad \varepsilon(t) = \varepsilon(\theta) + \frac{1}{E} [\sigma(t) - \sigma(\theta)] + \frac{1}{D} \int_{\theta}^t \sigma(\tau) d\tau .$$

Um die Spannungs-explizite Form zu erhalten, multipliziert man die Gleichung (1.3.8) mit $E \exp\left(\frac{E}{D}t\right)$ und erhält einen Ausdruck, der als Ergebnis der Produktenregel für Ableitungen angesehen werden kann

$$E \varepsilon \dot{\quad}(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) = \sigma \dot{\quad}(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) + \frac{E}{D} \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) = \left(\sigma(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) \right) \dot{\quad} .$$

Dessen bestimmtes Integral im Zeitintervall von θ bis t ist

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^t E \varepsilon \dot{\quad}(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}\tau\right) d\tau &= \left. \sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}\tau\right) \right|_{\tau=\theta}^t \\ &= \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) - \sigma(\theta) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Spannungs-explizite Version

$$(1.3.10) \quad \sigma(t) = \sigma(\theta) \exp\left(-\frac{E}{D}t\right) + E \int_{\theta}^t \varepsilon(\tau) \dot{\quad} \exp\left(\frac{E}{D}(\tau-t)\right) d\tau .$$

⁸ James Clerk Maxwell (1831-1879)

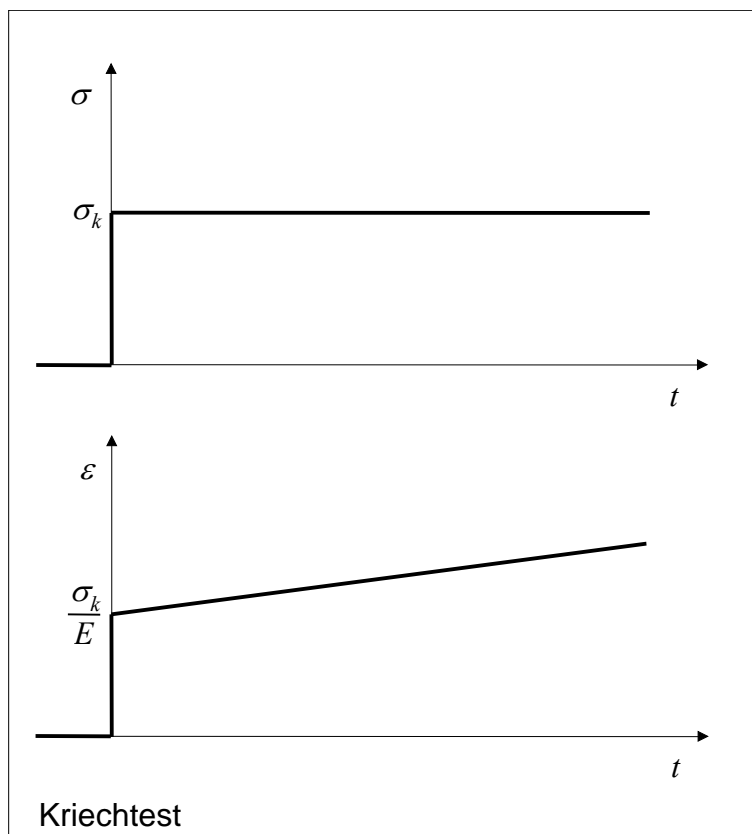
Das Integral lässt sich mittels partieller Integration umformen zu

$$\int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}\tau\right) d\tau = \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}\tau\right) \Big|_{\tau=0}^t - \frac{E}{D} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}\tau\right) d\tau$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma(0) \exp\left(-\frac{E}{D}t\right) + E \exp\left(-\frac{E}{D}t\right) \left[\varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{D}t\right) - \varepsilon(0) \right] - \frac{E^2}{D} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}(\tau-t)\right) d\tau \\ (1.3.11) \quad &= E \varepsilon(t) + [\sigma(0) - E \varepsilon(0)] \exp\left(-\frac{E}{D}t\right) - \frac{E^2}{D} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{D}(\tau-t)\right) d\tau. \end{aligned}$$

Der erste Term in der letzten Zeile repräsentiert den elastischen Spannungsanteil, wenn das MAXWELL-Körper nur aus der Feder bestünde. Der zweite Term repräsentiert den Einfluss der Anfangswerte, der wegen der Exponentialfunktion mit der Zeit abklingt. Der dritte Term ist ein Faltungsintegral (engl. *convolution i.*), in dem die Dehnungen mit der Exponentialfunktion so gewichtet werden, dass Dehnungsereignisse um so weniger Einfluss auf die momentanen Spannungen haben, je weiter sie zurückliegen (schwindendes Gedächtnis).



Die Spannungsleistung des MAXWELL-Körpers setzt sich aus der Änderung der Federenergie und der Dämpferdissipation zusammen nach (1.3.7) und (1.3.8)

$$(1.3.12) \quad l_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \sigma_E \dot{\varepsilon}_E + \sigma_D \dot{\varepsilon}_D = \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_E^2\right) \dot{} + D \varepsilon_D \dot{} = w(\dot{\varepsilon}_E) + \delta(\dot{\varepsilon}_D).$$

Um das Materialverhalten zu charakterisieren, unterwerfen wir den MAXWELL-Körper einem **Kriechtest**. Wir nehmen an, dass bis $t = 0$ die Spannung $\sigma(t) = 0$ und danach $\sigma(t) = \sigma_k = \text{konst.}$ ist. Es folgt aus (1.3.9) für $\varepsilon(0) = 0$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_k}{E} + \frac{\sigma_k}{D} t \quad \text{für } t > 0$$

d. h. er kriecht linear über alle Grenzen, weswegen man auch von einem MAXWELL-*Fluid* spricht. Bei plötzlichen Lastaufbringungen federt er elastisch ab (instantane Elastizität).

Bringt man hingegen sprunghaft eine konstante Dehnung ε_r auf (**Relaxationstest**), so reagiert der Dämpfer zunächst starr und die Feder instantan, so dass man eine anfängliche Spannung $\sigma_0 = E \varepsilon_r$ benötigt. Dann ist wegen (1.3.10)

$$\sigma(t) = E \varepsilon_r \exp\left(-\frac{E}{D} t\right)$$

d. h. die Spannung relaxiert gegen Null.

Die Materialkonstante $t_r := D / E$ (Dimension [Zeit]) wird als **Relaxationszeit** bezeichnet. Für $t \equiv t_r$ ist

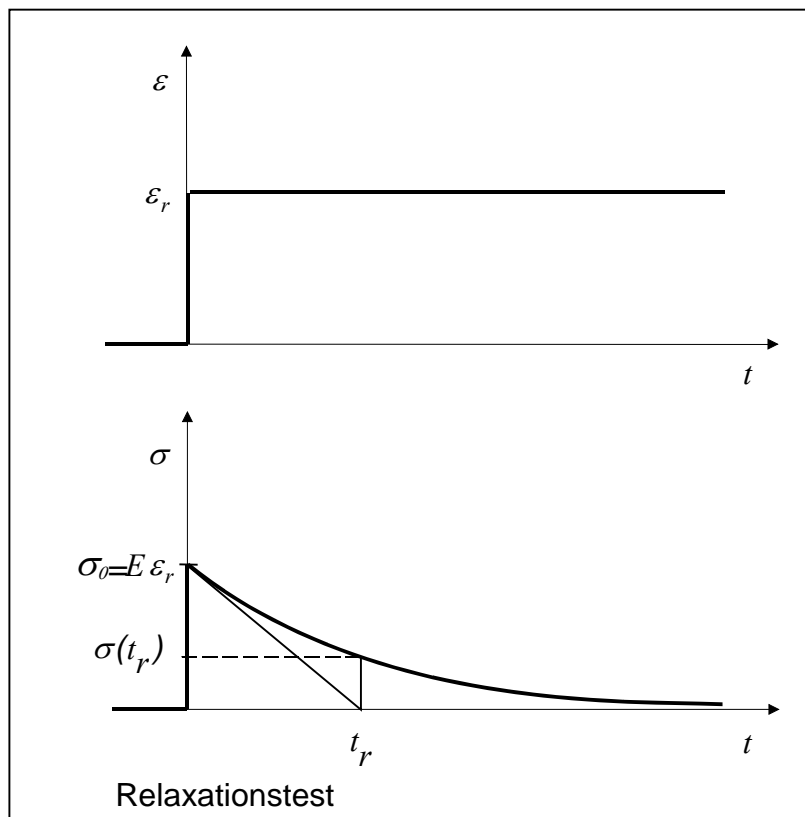
$$\sigma(t_r) = E \varepsilon_r e^{-1} \approx 0,368 \sigma_0 .$$

Es gilt wegen (1.3.8) für $t \geq 0$

$$\sigma(t) = -t_r \sigma(t) \bullet$$

und speziell zur Zeit $t \equiv 0$ für die Anfangstangente

$$\sigma(0) \bullet = -\frac{\sigma_0}{t_r} .$$



Die Relaxationszeit ist also ein inverses Maß für die Schnelligkeit der Relaxation.

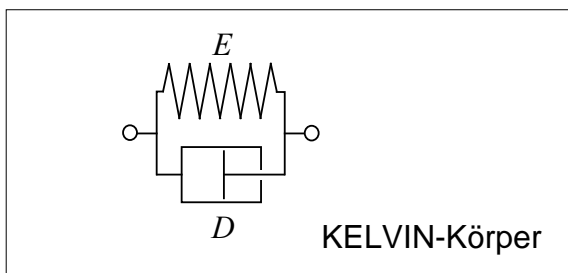
Es gibt viele nicht-lineare Verallgemeinerungen des (linearen) MAXWELL-Körpers. Ein Beispiel dafür ist das DISCHINGER⁹-Gesetz für Beton, bei dem die Viskosität als explizit zeitabhängig eingeführt wird:

$$D(t) = R \exp(C t) \quad R, C > 0 \text{ Konstanten,}$$

was eine zunehmenden Versteifung des Betons beschreiben soll.

1.3.3 Der KELVIN-Körper

Der KELVIN¹⁰-Körper ist definiert als Parallelschaltung von Feder und Dämpfer.



Nach (1.3.3) und (1.3.4) gelten

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_E = \varepsilon_D & \sigma_E &= E \varepsilon \\ \sigma &= \sigma_E + \sigma_D & \sigma_D &= D \varepsilon^\bullet \end{aligned}$$

$$(1.3.13) \Rightarrow \sigma = E \varepsilon + D \varepsilon^\bullet \quad \left| \cdot \frac{1}{D} \exp\left(\frac{E}{D} t\right)\right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{D} \sigma(t) \exp\left(\frac{E}{D} t\right) = \frac{E}{D} \varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{D} t\right) + \varepsilon^\bullet(t) \exp\left(\frac{E}{D} t\right) = \left(\varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{D} t\right) \right)^\bullet$$

$$\frac{1}{D} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{D} \tau\right) d\tau = \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{E}{D} \tau\right) \Big|_0^t = \varepsilon(t) \exp\left(\frac{E}{D} t\right) - \varepsilon(0)$$

$$(1.3.14) \Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon(0) \exp\left(-\frac{E}{D} t\right) + \frac{1}{D} \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{E}{D} (\tau - t)\right) d\tau .$$

Auch hier klingt die Anfangsstörung mit der Zeit exponentiell ab, und die Spannungsgeschichte geht als Faltungsintegral mit Exponentialkern ein.

Die Spannungsleistung ist mit (1.3.13)

$$(1.3.15) \quad l_i = \sigma \varepsilon^\bullet = \sigma_E \varepsilon_E^\bullet + \sigma_D \varepsilon_D^\bullet = \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_E^2\right)^\bullet + D \varepsilon_D^{\bullet 2} = w(\varepsilon)^\bullet + \delta(\varepsilon^\bullet) .$$

Der **Kriechtest** mit Kriechlast σ_k ab $t \equiv 0$ und $\varepsilon(0) \equiv 0$ liefert mit (1.3.14)

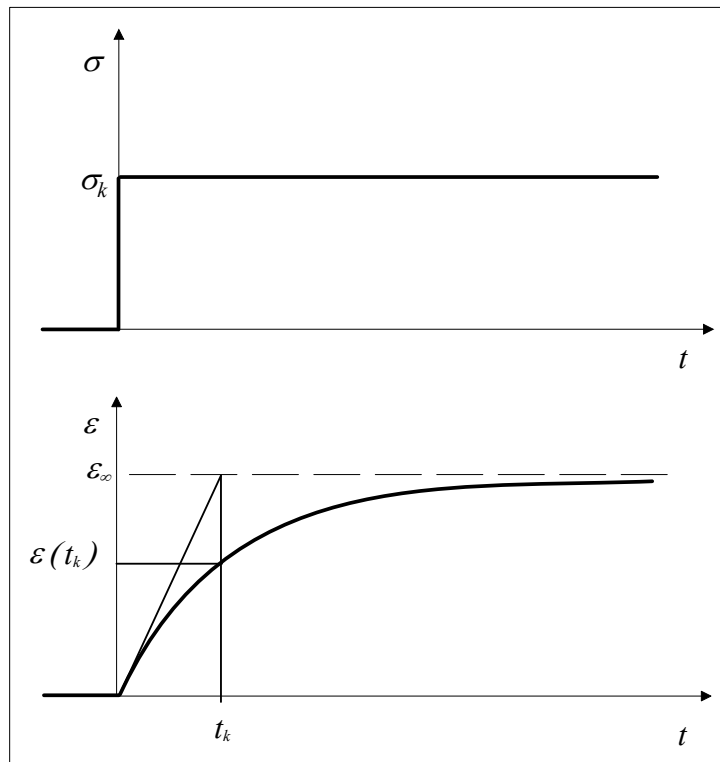
⁹ Franz Dischinger (1887-1953)

¹⁰ Lord Kelvin, Sir William Thomson (1824-1907)

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{1}{D} \sigma_k \int_0^t \exp\left(\frac{E}{D} \tau\right) d\tau \exp\left(-\frac{E}{D} t\right) \\ &= \frac{1}{D} \frac{D}{E} \sigma_k \exp\left(\frac{E}{D} \tau\right) \Big|_0^t \exp\left(-\frac{E}{D} t\right) = \frac{\sigma_k}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{D} t\right)\right) \\ \Rightarrow \quad \varepsilon^\bullet(t) &= \frac{\sigma_k}{D} \exp\left(-\frac{E}{D} t\right) \Rightarrow \varepsilon^\bullet(0) = \frac{\sigma_k}{D} = \frac{\sigma_k}{E t_k} = \frac{\varepsilon_\infty}{t_k}.\end{aligned}$$

Es gibt also keine instantane Elastizität. Die Kriechgeschwindigkeit verlangsamt sich mit der Zeit und die Kriechdehnung konvergiert gegen die elastische Dehnung $\varepsilon_\infty := \sigma_k / E$.

Die **Kriechzeit** (oder Retardationszeit) $t_k := D / E$ (Dimension [Zeit]) gibt diejenige Zeit an, zu der die Kriechdehnung auf



$$\varepsilon(t_k) = \frac{\sigma_k}{E} (1 - e^{-1}) \approx 0,632 \sigma_k / E$$

angewachsen ist. Es gilt der Zusammenhang für die Anfangstangente

$$\varepsilon^\bullet(0) = \varepsilon_\infty / t_k.$$

Der **Relaxationstest** ist hier nicht wie vorher durchführbar, da bei endlichen Kräften keine Dehnungsunstetigkeiten möglich sind. Untersucht man hingegen das Verhalten nach beliebiger Vorgeschichte und anschließend festgehaltener Dehnung, so erhält man eine konstante Spannung $\sigma = E \varepsilon_r$ in der Feder, während der Dämpfer sofort lastfrei ist.

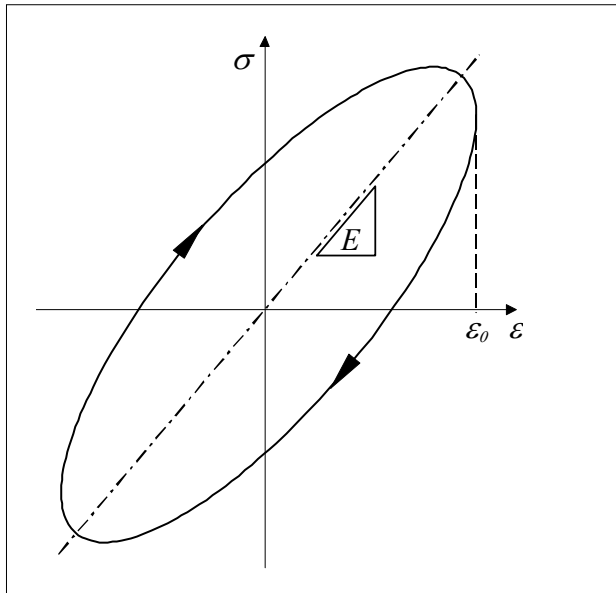
Die Spannungsantwort bei einer **erzwungenen harmonischen Schwingung**

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

ist mit (1.3.13)

$$\sigma(t) = E \varepsilon_0 (\sin(\omega t) + D \frac{\omega}{E} \cos(\omega t)).$$

Im σ - ε -Diagramm ergibt dies eine elliptische Hysterese.



Die bei einem Schwingungszyklus $T = 2\pi/\omega$ geleistete Arbeit wird vollständig dissipiert

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^T \sigma \dot{\varepsilon} dt = \int_0^T \delta dt = \int_0^T D \dot{\varepsilon}^2 dt = \varepsilon_0^2 D \omega^2 \int_0^T \cos^2(\omega\tau) d\tau \\ &= \varepsilon_0^2 D \omega^2 \left[\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega\tau) \right]_0^{2\pi/\omega} = \varepsilon_0^2 D \omega \pi. \end{aligned}$$

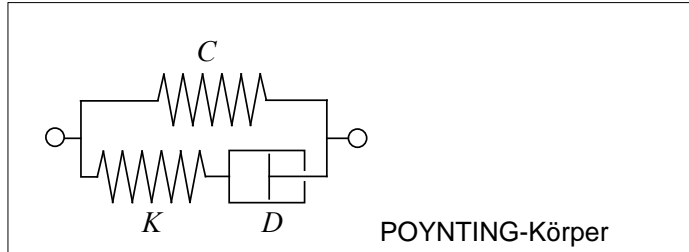
Die maximale Federenergie im Zyklus ist $w_{max} = \frac{1}{2} E \varepsilon_0^2$ und das Verhältnis zwischen dissipierter und maximal gespeicherter Energie ist

$$(1.3.16) \quad \eta := \frac{\varepsilon_0^2 D \omega \pi}{\frac{1}{2} E \varepsilon_0^2} = \frac{2D \omega \pi}{E},$$

also frequenz-, aber nicht amplitudenabhängig. η / π heißt **Verlustfaktor** und stellt ein Dämpfungsmaß dar. Für andere Dämpfungsmaße s. BERT (1973).

1.3.4 Der POYNTING-Körper

Der POYNTING¹¹-Körper (MALVERN-Körper) besteht aus zwei Federn und einem Dämpfer.



Es gelten $\sigma = \sigma_K + \sigma_C = \sigma_D + \sigma_C$

$$\sigma_C = C \varepsilon_C$$

$$\sigma_K = K \varepsilon_K$$

$$\sigma_D = D \varepsilon_D \dot{}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_C = \varepsilon_K + \varepsilon_D$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_C = \dot{\varepsilon}_K + \dot{\varepsilon}_D$$

$$= \frac{\dot{\sigma}_C}{C} = \frac{\dot{\sigma}_K}{K} + \frac{\dot{\sigma}_D}{D}$$

$$= \frac{\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_C}{K} + \frac{\sigma - \sigma_C}{D}$$

$$(1.3.17) \quad = \frac{\dot{\sigma}}{K} - \frac{C}{K} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{D} - \frac{C}{D} \varepsilon$$

$$(1.3.18) \quad \Rightarrow \quad \sigma + \frac{D}{K} \dot{\sigma} = C \varepsilon + D \frac{C+K}{K} \dot{\varepsilon}$$

Es ergeben sich folgende explizite Formen:

(1.3.19)

$$\sigma(t) = (C+K) \varepsilon(t) + \left[\sigma_0 - \frac{K^2}{D} \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp\left(\frac{K}{D}\tau\right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{K}{D}t\right)$$

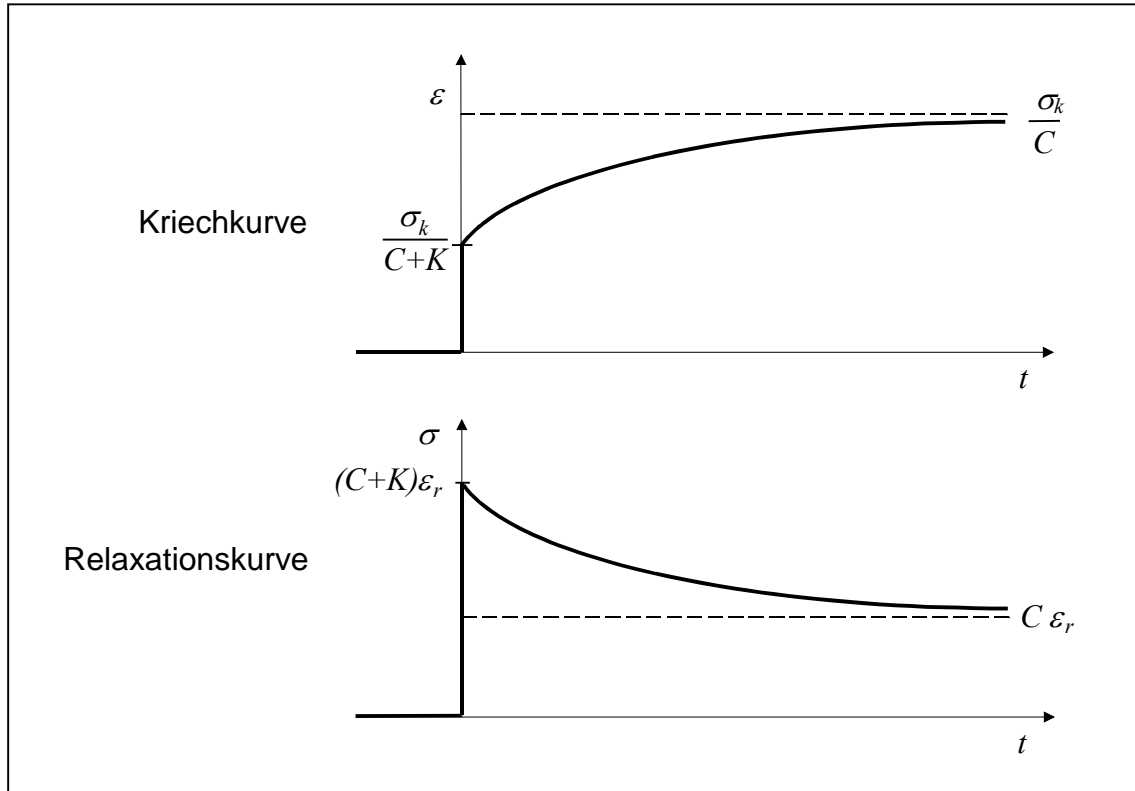
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{C+K} +$$

$$\left[-\frac{\sigma_0}{C+K} + \left(\frac{K}{D(K+C)} - \frac{KC}{D(K+C)^2} \right) \int_0^t \sigma(\tau) \exp\left(\frac{KC}{D(K+C)}\tau\right) d\tau \right] \exp\left(-\frac{KC}{D(K+C)}t\right)$$

mit den Anfangsbedingungen $\sigma(0) = \sigma_0$ und $\varepsilon(0) = 0$.

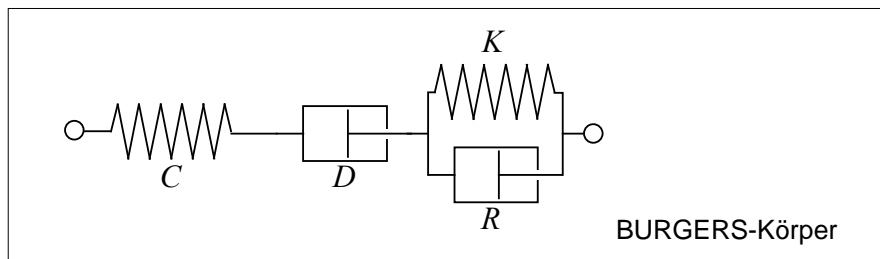
Der POYNTING-Körper zeigt sowohl Kriech- und Relaxationseigenschaften als auch instantane Elastizität. Sein Verhalten wird von BACKHAUS (S. 165, 197) diskutiert, der ihn als linearen Standardkörper bezeichnet.

¹¹ John Henry Poynting (1852-1914)



1.3.5 Der BURGERS¹²-Körper

wird als Reihenschaltung aus MAXWELL- und KELVIN-Körper eingeführt.



Er kann aber auch genauso als Parallelschaltung zweier MAXWELL-Körper angenommen werden. Für ihn gelten

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \sigma_C = \sigma_D = \sigma_K + \sigma_R & \sigma_C &= C \varepsilon_C \\
 & & \sigma_K &= K \varepsilon_K \\
 \varepsilon_R &= \varepsilon_K & \sigma_D &= D \dot{\varepsilon}_D \\
 \varepsilon &= \varepsilon_C + \varepsilon_D + \varepsilon_{K,R} & \sigma_R &= R \dot{\varepsilon}_R \\
 \Rightarrow \sigma \dot{} &= K \varepsilon_K \dot{} + R \varepsilon_R \ddot{} = K (\varepsilon \dot{} - \varepsilon_C \dot{} - \varepsilon_D \dot{}) + R (\varepsilon \ddot{} - \varepsilon_C \ddot{} - \varepsilon_D \ddot{})
 \end{aligned}$$

¹² Johannes Martinus Burgers (1895-1981)

$$= K \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{C} - \frac{\sigma}{D} \right) + R \left(\ddot{\varepsilon} - \frac{\ddot{\sigma}}{C} - \frac{\dot{\sigma}}{D} \right)$$

$$(1.3.20) \Rightarrow \frac{\ddot{\sigma}}{C} + \left(\frac{1}{D} + \frac{K}{CR} + \frac{1}{R} \right) \dot{\sigma} + \frac{K}{DR} \sigma = \ddot{\varepsilon} + \frac{K}{R} \dot{\varepsilon}.$$

Er zeigt eine instantane Elastizität (wegen der Feder C).

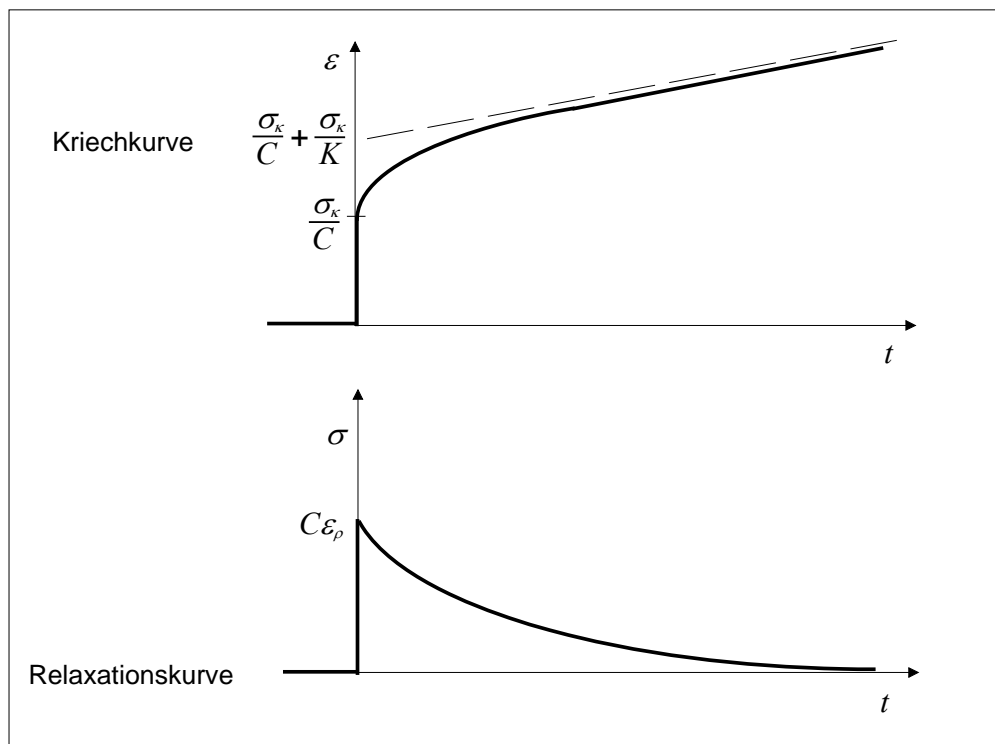
Zur numerischen Integration verwandelt man diese lineare Dgl. 2. Ordnung zweckmäßig in zwei Dgl. 1. Ordnung um, indem man z. B. die Spannung in der Feder K als *innere Variable* einführt

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{C} + \frac{\sigma}{D} + \frac{\dot{\sigma}_K}{R} - \frac{\sigma_K}{R}$$

$$\dot{\sigma}_K = K \dot{\varepsilon} - \frac{K}{C} \dot{\sigma} - \frac{K}{D} \sigma$$

oder auch als explizite Version in den Spannungsinkrementen

$$\dot{\sigma} = C \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma}{D} - \frac{\dot{\sigma}_K}{R} + \frac{\sigma_K}{R} \right) \quad \dot{\sigma}_K = \frac{K}{R} (\sigma - \sigma_K).$$



Die Kriechkurve des BURGERS-Körpers unter einer Kriechspannung σ_k ergibt sich aus der Überlagerung von denjenigen des KELVIN- und des MAXWELL-Körpers zu

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{K} \left[1 - \exp\left(-\frac{K}{R}t\right) \right] + \frac{\sigma_k}{D}t + \frac{\sigma_k}{C}.$$

Am Anfang des Kriechprozesses trägt der Dämpfer R noch zum Kriechen bei (*primäres Kriechen*). Sein Beitrag nimmt jedoch mit der Zeit immer mehr ab, und längerfristig wird das Kriechen durch den Dämpfer D dominiert mit der *stationären Kriechnrate* σ_k / D . Diese Kriechphase heißt *sekundär*.

Bei vielen realen Materialien schließt sich daran noch eine überlineare oder *tertiäre Kriechphase* an, was aber im Gegensatz zu den anderen beiden Kriechphasen durch den BURGERS-Körper allein nicht beschrieben werden kann.

Im Relaxationstest am BURGERS-Körper entlastet sich die Spannung in der Feder C über den Dämpfer D und konvergiert nach Null.

1.3.6 Viskoelastische Modelle vom Differenzial-Typ

Im Folgenden sind die Differenzialgleichungen der betrachteten rheologischen Modelle noch einmal zusammengestellt in ihrer gemeinsamen Form als lineare Dgl. homogen in der Zeit vom Grade p in den Zeitableitungen der Spannungen und q in denjenigen der Dehnungen.

	HOOKE	$P_0 \sigma$	=	$Q_0 \varepsilon$
	NEWTON	$P_0 \sigma$	=	$Q_1 \dot{\varepsilon}$
	MAXWELL	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma}$	=	$Q_1 \dot{\varepsilon}$
	KELVIN	$P_0 \sigma$	=	$Q_0 \varepsilon + Q_1 \dot{\varepsilon}$
	POYNTING	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma}$	=	$Q_0 \varepsilon + Q_1 \dot{\varepsilon}$
	BURGERS	$P_0 \sigma + P_1 \dot{\sigma} + P_2 \ddot{\sigma}$	=	$Q_1 \dot{\varepsilon} + Q_2 \ddot{\varepsilon}$
(1.3.21)	(p, q) -Typ	$P_0 \sigma + \dots + P_p \sigma^{(p)}$	=	$Q_0 \varepsilon + \dots + Q_q \varepsilon^{(q)}$

Die Konstanten $P_0, \dots, P_p, Q_0, \dots, Q_q$ berechnen sich aus denjenigen der Dämpfer- und Federelemente. Dabei kann in allen Fällen eine dieser Konstanten ($\neq 0$) zu Eins normiert werden. Diese System-Differenzialgleichungen beschreiben das Verhalten vollständig, d. h. bei Angabe von Anfangsbedingungen kann man sie für einen gegebenen Spannungsprozess $\sigma(t)$ eindeutig zu einem Dehnungsprozess $\varepsilon(t)$ aufintegrieren, oder umgekehrt (s. GURTIN/ STERNBERG 1962). Dabei wird man bei komplizierteren Modellen oder Prozessen eine numerische Integration bevorzugen.

Es gibt auch Verallgemeinerungen des (p, q) -Typs auf fraktionale Ableitungen, also Ableitungen beliebiger reeller Ordnung. Betrachtet man den Ordnungs-Parameter als weitere Anpassungsgröße, so kann man durch dessen geeignete Wahl bei geringerer Anzahl von Konstanten zu besseren Anpassungen als bei den ganzzahligen Ableitungen gelangen.

Interessiert man sich speziell für das Schwingungs- und Dämpfungsverhalten dieser Modelle, so führt eine komplexe Darstellung oft zu Vereinfachungen. Wird das System harmonisch mit einer Frequenz ω angeregt, so wird die Differenzialgleichung vom (p, q) -Typ durch

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(i \omega t)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i \omega t)$$

gelöst, wobei σ_0 und ε_0 komplex werden. Man erhält durch Einsetzen in die Differenzialgleichung

$$\sum_{j=0}^p P_j \sigma_0 (i\omega)^j \exp(i\omega t) = \sum_{k=0}^q Q_k \varepsilon_0 (i\omega)^k \exp(i\omega t)$$

und somit die pseudo-elastische Beziehung

$$(1.3.22) \quad \varepsilon_0 = G(\omega) \sigma_0 \quad \text{mit} \quad G(\omega) := \frac{\sum_{j=0}^p P_j (i\omega)^j}{\sum_{k=0}^q Q_k (i\omega)^k}.$$

Sowohl Realteil als auch Imaginärteil von $\sigma(t)$ und $\varepsilon(t)$ stellen eine Lösung der erzwungenen Schwingungen dar. Der Quotient $G(\omega)$ wird *komplexe Nachgiebigkeit* genannt und sein Kehrwert *komplexe Steifigkeit*. Man erhält für den

- KELVIN-Körper $G(\omega) = (E - i D \omega) / (E^2 + D^2 \omega^2)$

- MAXWELL-Körper $G(\omega) = 1/E - i/(D \omega)$.

Man kann auch stattdessen eine *komplexe Viskosität* einführen und erhält pseudo-viskose Beziehungen.

Eine Verallgemeinerung des (p, q) -Modells besteht darin, unendlich viele Elemente zusammensetzen (s. KRAWIETZ 1986 S. 13, BETTEN 2001 S. 257).

1.3.7 Viskoelastische Modelle vom Integral-Typ

Ein anderer Zugang zur linearen Viskoelastizität basiert auf der folgenden Annahme, die für die gesamte lineare Viskoelastizität charakteristisch ist.

BOLTZMANNsches¹³ Superpositionsprinzip (1876)

Bewirken Dehnungsprozesse $\varepsilon_i(t)$ Spannungsprozesse $\sigma_i(t)$, $i = 1, 2$, so bewirkt der Dehnungsprozess $\varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ den Spannungsprozess $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$.

Betrachten wir eine konstante Kriechbelastung $\Delta\sigma_i(t)$, die zur Zeit t_i aufgebracht wird, so kann man diesen Spannungsprozess durch die HEAVISIDE¹⁴-Funktion $H(t)$ mit

$$H(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

$$H(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \geq 0$$

darstellen als

$$\sigma_i(t) = \Delta\sigma(t_i) H(t - t_i),$$

¹³ Ludwig Boltzmann (1844-1904)

¹⁴ Oliver Heaviside (1850-1925)

worin $\Delta\sigma(t_i)$ die ab t_i konstante Kriechspannung ist. Ist $J(t - t_i)$ der Dehnungsprozess infolge Einheitslast $H(t - t_i)$ ab t_i , so folgt aus dem Superpositionsprinzip, dass $\Delta\sigma(t_i) H(t - t_i)$ den Dehnungsprozess

$$\varepsilon_i(t) = \Delta\sigma(t_i) J(t - t_i)$$

bewirkt. Darin heißt $J(t)$ **Kriechfunktion** (engl. *creep function*). Ist nun der Lastprozess eine beliebige Zeitfunktion $\sigma(t)$, so approximieren wir sie als Summe von solchen Stufenfunktionen

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(t_i) H(t - t_i)$$

und erhalten als Dehnungsantwort den Prozess

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma(t_i) J(t - t_i).$$

Approximieren wir nun den gegebenen Spannungsprozess immer feiner durch solche Stufenfunktionen, so ergibt sich nach einem Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ das STIELTJES¹⁵-Integral

$$(1.3.23) \quad \varepsilon(t) = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} J(t - \tau) d\sigma(\tau) = \int_0^t J(t - \tau) \sigma(\tau)' d\tau.$$

Vertauschen wir die Rollen von Spannung und Dehnung, so erhalten wir völlig analog

$$(1.3.24) \quad \sigma(t) = \int_{\varepsilon(0)}^{\varepsilon(t)} R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau)' d\tau$$

mit der **Relaxationsfunktion** (engl. *relaxation function*) $R(t)$. Letztere ist nicht unabhängig von der Kriechfunktion. Zwischen ihnen gibt es vielmehr den Zusammenhang

$$t = \int_0^t R(t - \tau) J(\tau) d\tau = \int_0^t J(t - \tau) R(\tau) d\tau.$$

Da die rheologischen Modelle vom (p, q) -Typ ebenfalls das Superpositionsprinzip erfüllen, kann man sie auch immer als STIELTJES-Integral darstellen.

Allen diesen viskoelastischen Modellen ist folgendes gemeinsam:

- Sie sind *linear*. Mathematisch sind ihre Eigenschaften bestens bekannt (siehe GURTIN/STERNBERG 1962).
- Das Verhalten ist *Geschwindigkeits-abhängig* (engl. *rate-dependent*) oder *viskos* (rheonom).
- Sie beschreiben alle ein Verhalten mit *schwindendem Gedächtnis* (engl. *fading memory*). Liegt nämlich ein Spannungs- oder Dehnungsereignis lange genug zurück, so ist sein Einfluss auf die Gegenwart vernachlässigbar klein. Durch einen Grenzübergang kann man die Anfangsbedingungen in Vergessenheit geraten lassen und gelangt so zu einem *Geschichtsfunktional*, das Faltungsintegrale mit *Vergessensfunktionen* (Kriech- oder Relaxationsfunktionen) vom Exponentialtyp enthält.

¹⁵ Thomas Jan Stieltjes (1856-1894)

- Bei ganz schnellen wie auch ganz langsamen Prozessen verhalten sie sich elastisch, weil alle Dämpfer blockieren bzw. nachgeben.
- Ihr Verhalten ist in dem Sinne plausibel, als keine Widersprüche zum Dissipationspostulat ($\delta \geq 0$) auftreten können, wenn man die Differenzialgleichung und insbesondere deren Koeffizienten von rheologischen Modellen ableitet. Setzt man dagegen eine Differenzialgleichung ohne Modell an, so kann bei beliebiger Wahl der Konstanten unsinniges Verhalten herauskommen.

Die gemeinsame Anwendungsgrenze aller dieser rheologischen Modelle ist ihre Linearität. Reales Kriech- und Dämpfungsverhalten ist oft stark nicht-linear, zum Beispiel bei Metallen und Kunststoffen. Es gibt deshalb in der Literatur eine Fülle von nicht-linearen Erweiterungen und Verallgemeinerungen der rheologischen Modelle, wie z. B. die Einführung einer frequenzabhängigen Dämpfung

$$R(\omega) = \frac{R_0}{\omega} \quad R_0 = \text{konstant}$$

(KIMBALL/ LOVELL 1927) oder von spannungsabhängigen Dämpfungen (BERTRAM/ OLSCHESKI 1990)

$$R(\sigma) = R_0 \exp(-A |\sigma|).$$

Andere historische Kriechansätze sind

$$\dot{\varepsilon}(t) = k (|\sigma| / \sigma_0)^N \text{sign } \sigma \quad \text{NORTON (1929), BAILEY (1929)}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = k [\exp(|\sigma| / \sigma_0) - 1] \text{sign } \sigma \quad \text{SODERBERG (1936)}$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = k \sinh(|\sigma| / \sigma_0) \text{sign } \sigma \quad \text{PRANDTL (1928), NADAI (1938)}$$

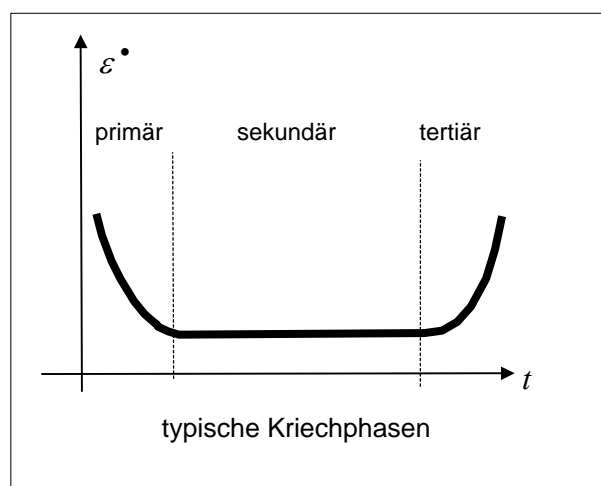
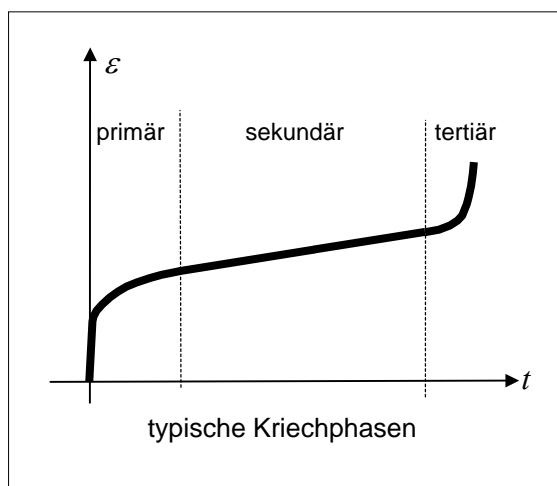
$$\dot{\varepsilon}(t) = k \sinh(|\sigma| / \sigma_0)^N \text{sign } \sigma \quad \text{GAROFALO (1965),}$$

wobei der NORTON-Ansatz bei Metallen viel Verbreitung gefunden hat. Weitere Ansätze siehe SZKRYPEK S. 363 ff.

1.3.8 Kriechschädigung

Literatur

- Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)
- Betten, J.:** *Creep Mechanics*. Springer, Berlin (2002)
- Besson, J.; Cailletaud, G.; Chaboche, J.-L.; Forest, S., Blétry, M.:** *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer, Dordrecht (2010)
- Chaboche, J.-L.; Lemaitre, J.:** *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Univ. Press (1990)
- Danzer, R.:** *Lebensdauerprognose hochfester metallischer Werkstoffe im Bereich hoher Temperaturen*. Gebr. Borntraeger, Stuttgart (1988)
- Francois, D.; Pineau, A.; Zaoui, A.:** *Mechanical Behaviour of Materials*, Bd. II, Kluwer, Dordrecht (1998)
- Kachanov, L. M.:** *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Kluwer Academic Publ., Dordrecht (1986)
- Krajcinovic, D.; Lemaitre, J.:** *Continuum Damage Mechanics*. Springer, Wien (1987)
- Lemaitre, J.:** *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin (1992)
- Lemaitre, J. (Hrg.):** *Handbook of Materials Behavior Models*. Academic Press, San Diego, Bd. 2 (2001)
- Lemaitre, J.; Desmorat, R.:** *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, Berlin (2007)
- Murakami, S.:** *Continuum Damage Mechanics*. Springer, Berlin (2012)
- Naumenko, K.; Altenbach, H.:** *Modeling of Creep for Structural Analysis*. Springer, Berlin (2007)
- Rösler, J.; Harders, H.; Bäker, M.:** *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. B. G. Teubner, Stuttgart (2003)
- Saanouni, K.:** *Damage Mechanics in Metal Forming*. ISTE, London/ Wiley, Hoboken (2012)
- Skrzypek, J. J.:** *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)
- Voyiadjis, G. Z.; Kattan, P. I.:** *Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites*. Elsevier, Amsterdam (1999)



Eine typische Kriechkurve besteht aus einem primären Bereich anfänglichen Kriechens mit hohen Kriechraten, einem sekundären Bereich mit minimaler, stationärer Kriechrate, und einem tertiären Bereich mit überlinearem Kriechen, der bis zum Kriechbruch führt. Während die ersten beiden Bereiche oft mit rheologischen Modellen beschrieben werden können

(z. B. BURGERS-Körper), gelingt dies mit dem tertiären wegen dessen Nichtlinearität nicht. Letztere kann sehr unterschiedliche Ursachen haben, wie zum Beispiel

- Querschnittsverkleinerung (Querkontraktion) und damit Spannungserhöhung
- Bildung und Wachstum von Mikrorissen und Poren
- Gefügeänderungen

u. v. a. mehr. In der (phänomenologischen) Mechanik wird dies alles unter dem Begriff Kriechschädigung pauschal subsummiert.

The term “damage“ will be used to designate the general destructive effect of the various changes occurring in the material which eventually limit its usefulness. Thus, the visible damage may consist of an accumulation of permanent deformation from creep (viscous flow), plastic flow, initiation of corrosion pits, or development of cracks. These visible effects are the result of submicroscopic changes in the crystalline lattice or in the intercrystalline boundary material. The processes designated by the terms slip, diffusion, recrystallization, rotation of grains, phase change, and relaxation involve varying degrees of atomic rearrangement that takes place within the material; any of these processes may constitute the initial stages of „damage“.

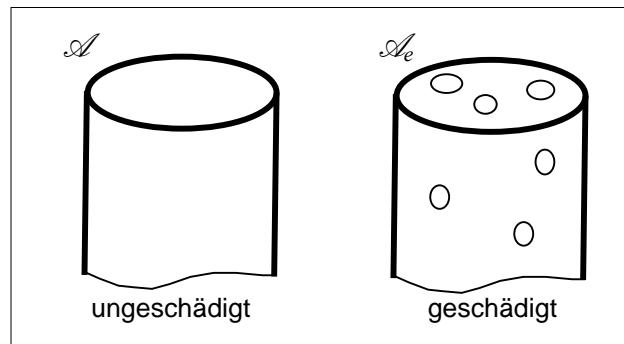
DOLAN (1952)

Ein überaus erfolgreicher Ansatz, um Schädigung zu beschreiben, stammt von KATSCHANOV¹⁶ (1958). Seine grundlegende Vorstellung ist, dass nur ein Teil des Querschnittes \mathcal{A} der Probe, nämlich der durch Risse, Hohlräume usw. reduzierte **effektive Querschnitt** \mathcal{A}_e die Last aufnehmen muss, und man somit zu einer höheren **effektiven Spannung**

$$(1.3.25) \quad \sigma_e = \frac{F}{A_e}$$

als der wahren Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



kommt, die ihrerseits in das Kriechgesetz eingeht und die Kriechgeschwindigkeit erhöht. Dazu wird ein **Schädigungsparameter** d eingeführt als das Verhältnis

$$(1.3.26) \quad d := \frac{A - A_e}{A} = 1 - \frac{A_e}{A} \quad \Leftrightarrow \quad A_e = (1 - d) A,$$

der bei dem ungeschädigten Material den (Anfangs-)Wert $d = 0$ hat und während des Kriechens anwächst. Nähert er sich dem Wert 1 , so wächst die effektive Spannung und damit auch die Dehnung theoretisch über alle Grenzen. Praktisch wird der Kriechbruch schon vorher, bei einem kritischen Schädigungswert

$$0 < d_{kr} < 1$$

¹⁶ Lazar M. Katschanov (1914-1993)

eintreten, der vom Material abhängt. Dieser Schädigungstheorie zugrunde liegt das

Prinzip der Spannungs-Äquivalenz (LEMAITRE 1971)

Das geschädigte Material verhält sich wie das ungeschädigte, wenn man im Kriechgesetz die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt.

Für d benötigt man eine Entwicklungsgleichung, die man analog zu denjenigen des BURGERS-Körper als

$$d^\bullet = \alpha \sigma_e^\bullet + \beta \sigma_e + \gamma d$$

ansetzen kann (BERTRAM 1991). Die Materialkonstanten α , β und γ sollten so bestimmt werden, dass die Schädigung bei Kriechversuchen auch wirklich zunimmt.

Neben obigem Ansatz, der für manche Anwendungen gute Ergebnisse liefert, gibt es den Vorschlag von RABOTNOV (1963)

$$d^\bullet = (|\sigma_e| / \mu)^N$$

mit den beiden positiven Konstanten μ und N . Diese Gleichung begründet zusammen mit (1.3.25, 26) die KATSCHANOV-RABOTNOV-Theorie.

Die Zunahme der effektiven Spannung berechnet sich als

$$(1.3.27) \quad \sigma_e^\bullet = \left(\frac{F}{A_e} \right)^\bullet = \frac{F^\bullet}{A_e} - \frac{F}{A_e^2} A_e^\bullet.$$

Bei einem monotonen Kriechversuch hält man die äußere Last F auf der Probe konstant, womit $F^\bullet = 0$ ist. Die Änderung des effektiven Querschnitts nährt sich nun aus unterschiedlichen Quellen gemäß (1.3.26)

$$(1.3.28) \quad A_e^\bullet = -d^\bullet A + (1-d) A^\bullet,$$

nämlich aus dem Schädigungswachstum d^\bullet und einer Veränderung des äußeren Querschnitts A^\bullet infolge Querkontraktion. Nimmt man an, dass die Kriechverformung (nicht aber der Schädigungsprozess) isochor verläuft, was bei Metallen experimentell bestätigt ist, so berechnet sich die Volumenänderung einer prismatischen Probe bei Vernachlässigung der elastischen Volumenänderung nach (1.1.8) aus der Dehnung

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{l^\bullet}{l_0} = \varepsilon^\bullet$$

mit dem Volumen $V = lA$ zu

$$V^\bullet = 0 = l^\bullet A + l A^\bullet = \varepsilon^\bullet l_0 A + l A^\bullet.$$

Mit

$$A^\bullet = -\frac{\varepsilon^\bullet l_0 A}{l} = -\frac{\varepsilon^\bullet}{1+\varepsilon} A$$

folgt insgesamt

$$(1.3.29) \quad \sigma_e^\bullet = \frac{F^\bullet}{A_e} + \frac{F}{A_e^2} \left[d^\bullet A + (1-d) \frac{\varepsilon^\bullet}{1+\varepsilon} A \right] = \frac{F^\bullet}{A_e} + \frac{F}{A_e} \left[\frac{d^\bullet}{1-d} + \frac{\varepsilon^\bullet}{1+\varepsilon} \right].$$

Die effektive Spannung wächst demnach

- bei Steigerung der Zugkraft

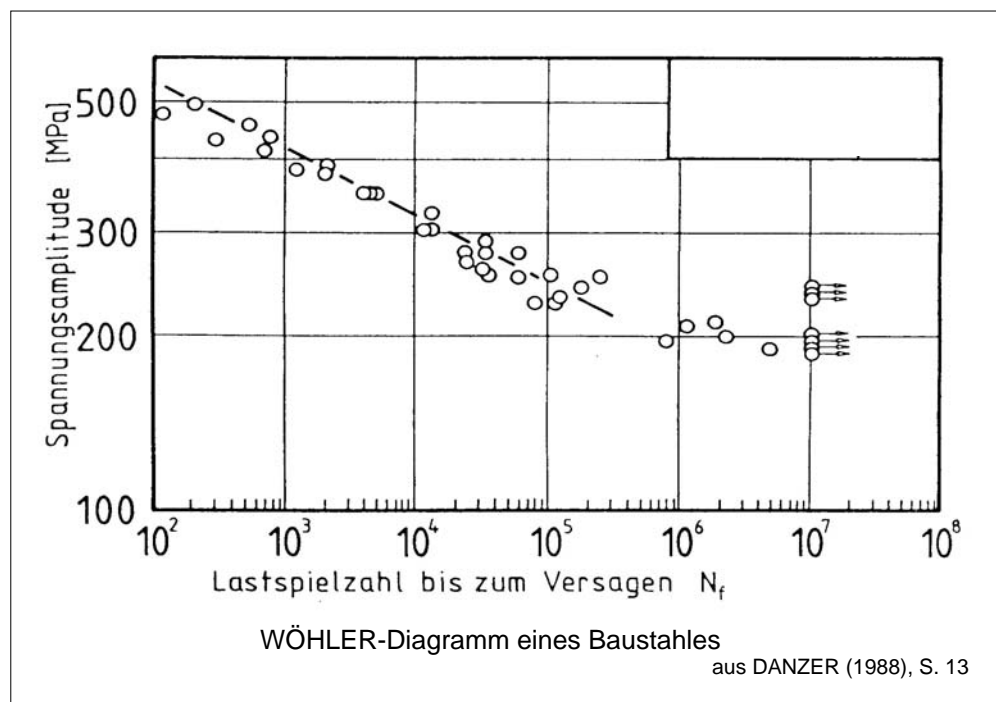
- infolge Schädigungszunahme
- infolge der Querkontraktion

Da im tertiären Kriechbereich die Dehnungen oft nicht mehr als klein betrachtet werden können, muss hier ggf. zwischen den unterschiedlichen Spannungsmaßen unterschieden werden.

1.3.9 Materialermüdung

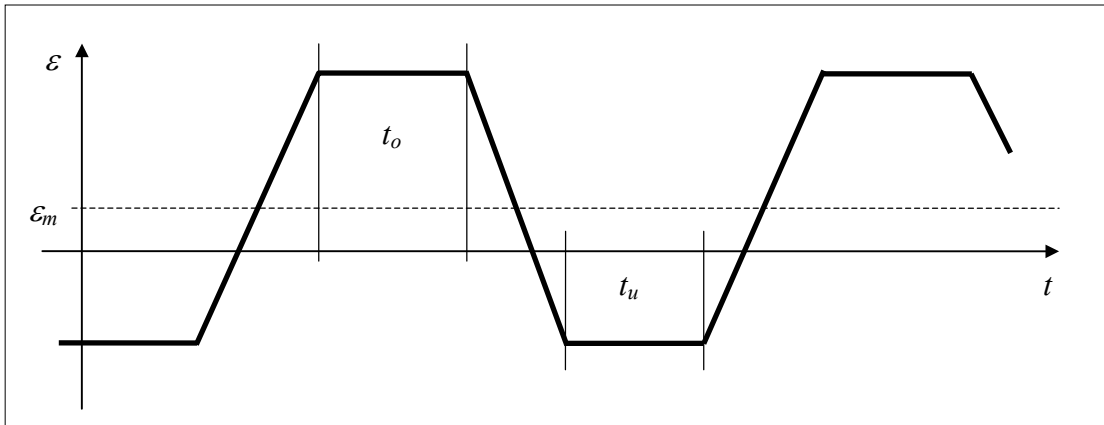
Neben der Schädigung unter Gleichlasten spielen in der Praxis auch Schädigungsmechanismen unter Wechsellasten eine große Rolle, die oft ganz anders als Kriechschädigungen verlaufen und die man nach PONCELET¹⁷ (1839) als Ermüdung (engl. *fatigue*) bezeichnet. Typischerweise nehmen Ermüdungsvorgänge infolge niederfrequenter Wechsellasten bei Metallen ihren Anfang an bereits vorhandenen Mikrorissen an der Oberfläche, die man als Risskeime bezeichnet. Diese wachsen erst langsam, später dann immer schneller zumeist entlang von Korngrenzen in das Innere des Bauteils, vereinigen sich (Koaleszenz) und schwächen schließlich den Querschnitt so stark, dass es zum Ermüdungsversagen kommt.

Um dieses Verhalten im Experiment zu untersuchen, führt man Wechsellastversuche (spannungsgesteuert) oder Wechseldehnversuche (dehnungsgesteuert) durch. Bei Wechsellastversuchen wird ein zyklisches Belastungsprogramm gefahren, das dreieckförmig, sinusförmig oder anders sein kann. Gemessen wird die Lastspielzahl N bis zum Versagen. Derartige Versuche dienen der Bestimmung der **Betriebsfestigkeit** eines Bauteils, speziell seiner **Lebensdauerprognose**.



¹⁷ Jean Victor Poncelet (1788-1867)

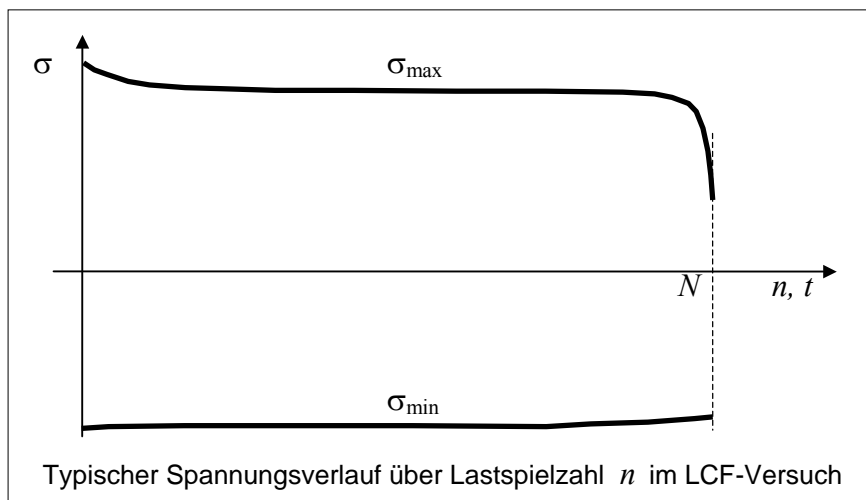
Trägt man die Spannungsamplitude über der Versagenslastspielzahl doppelt-logarithmisch für viele sinus-förmige Wechsellast-Versuche auf, so erhält man die **WÖHLER**¹⁸-Kurve (1862). Sie ist für hohe Spannungsamplituden annähernd gerade und knickt dann auf die konstante minimale Spannungsamplitude ab, die die **Dauerfestigkeit** kennzeichnet.



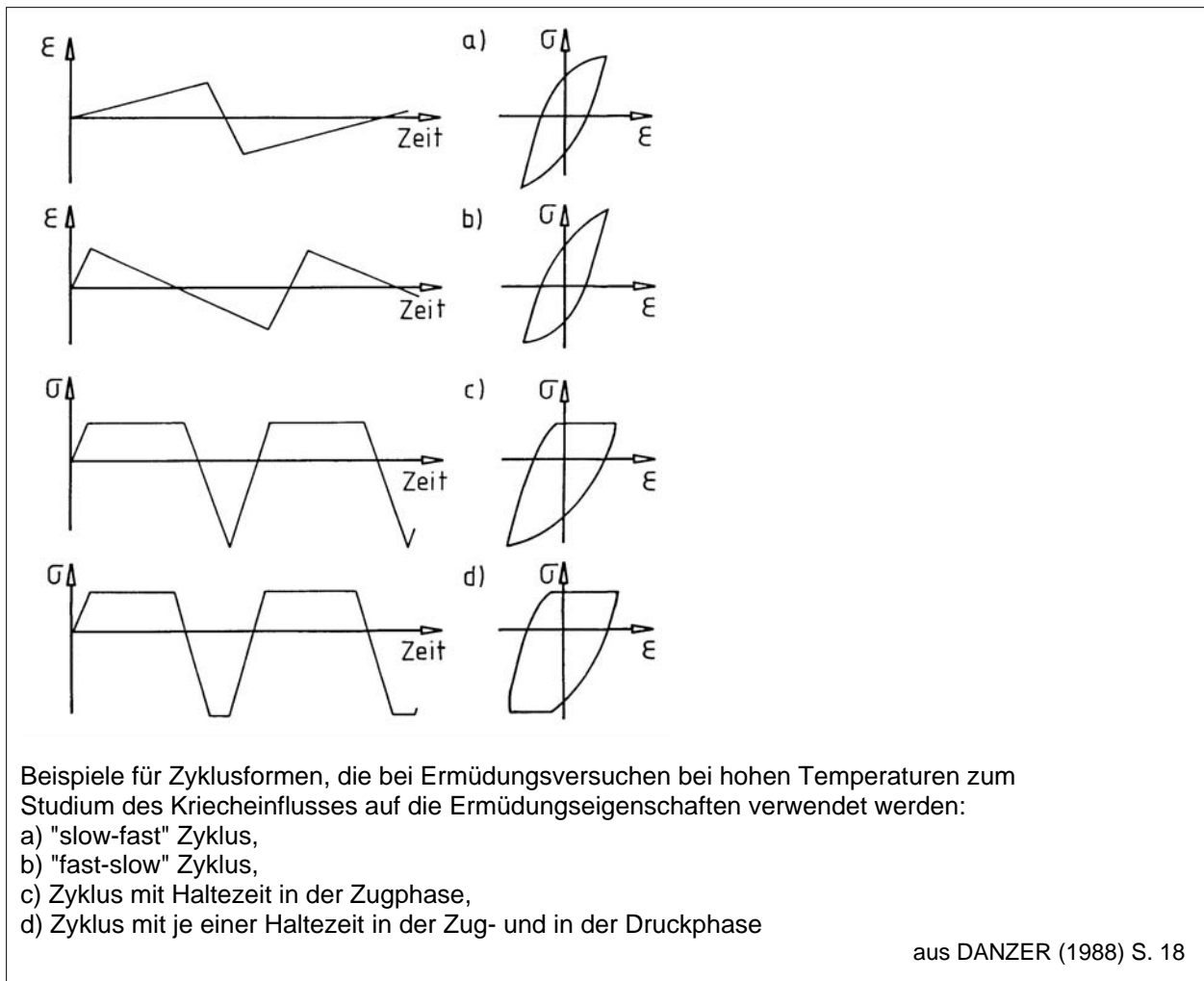
Neuerdings führt man eher **LCF-Tests** durch (*low cycle fatigue*). Dabei wird die Probe einem zyklischen Dehnungsprogramm unterworfen, das idealisiert aus linearen Dehnungsrampen mit/ohne obere und untere Haltezeiten t_o bzw. t_u um eine Mitteldehnung ε_m besteht.

Misst man die Spannung während eines Dehnungszyklus im ungeschädigten Intervall, so erhält man die hierfür typischen Hysterese-Kurven. Die Schädigung wirkt sich hierauf u. a. so aus, dass die Hysterese im Zugbereich abflacht.

Gemessen wird die dazu notwendige Kraft, aus der auf die (Nominal-) Spannung nach (1.1.11) geschlossen werden kann. Nach einem kurzen Einspielvorgang von wenigen Zyklen wird die Spannung zwischen zwei Extremen im Zug- und Druckbereich zyklieren, deren Absolutwerte zunächst annähernd gleich sind. Ist die Probe erst erheblich geschädigt, wird die Maximalspannung zunächst langsam, dann aber sehr schnell abfallen. Die Minimalspannung im Druckbereich wird hingegen durch Mikrorisse, die sich unter Druck schließen, nur wenig beeinflusst.



¹⁸ August Wöhler (1819-1914)



Die Berechnung dieses Zusammenhangs erweist sich als äußerst schwierig, da er nicht nur vom Material abhängt, sondern auch von

- Haltezeiten, Mitteldehnung, Rampenform, usw.
- Proben-, insbesondere Querschnittsform
- Oberflächenbehandlung der Probe
- Umgebung: chemische Bestandteile, Feuchtigkeit, Temperatur, usw.

u. v. a. m.

Aus diesem Grunde sind Ermüdungsprognosen immer noch ziemlich vage und halbempirisch.

Ein historisches Beispiel für eine Ermüdungs-Lebensdauer-Regel geht auf MANSION (1953) und COFFIN (1954) zurück

$$\Delta \varepsilon = \alpha (2N)^{-\beta} \quad \alpha, \beta > 0 \text{ Konstanten}$$

worin $\Delta \varepsilon$ die Amplitude der inelastischen Dehnung ist.

Eine weitere Behandlung dieses komplexen und wichtigen Themas geschieht in der *Betriebsfestigkeit*.

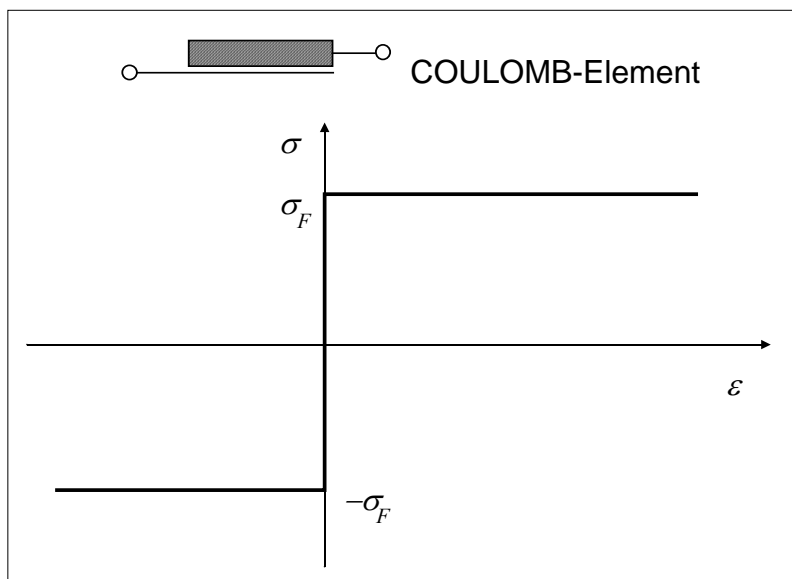
1.4 Plastizität

Literatur

- Backhaus, G.:** *Deformationsgesetze*. Akademie-Verlag, Berlin (1983)
- Besson, J.; Cailletaud, G.; Chaboche, J.-L.; Forest, S.; Blétry, M.:** *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer, Dordrecht (2010)
- Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)
- Burth, K.; Brocks, W.:** *Plastizität*. Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden (1992)
- Chen, W. F.; Han, D. J.:** *Plasticity for Structural Engineers*. Springer, New York, Berlin (1988)
- Francois, D.; Pineau, A.; Zaoui, A.:** *Mechanical Behaviour of Materials*, Bd. I, Kluwer, Dordrecht (1998)
- Fung, Y. C.; Tong, P.:** *Classical and Computational Solid Mechanics*. World Scientific, Singapore (2003)
- Krawietz, A.:** *Materialtheorie*. Springer, Berlin (1986)
- Kreißig, R.:** *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Fachbuchverlag, Leipzig, Köln (1992)
- Lubliner, J.:** *Plasticity Theory*. Macmillan, New York (1990)
- Mang, H.; Hofstetter, G.:** *Festigkeitslehre*. Springer (2000)
- Negahban, M.:** *The Mechanical and Thermodynamical Theory of Plasticity*. CRC Press, Boca Raton (2012)
- Skrzypek, J. J.:** *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)
- Yu, M.-H.:** *Generalized Plasticity*. Springer, Berlin (2006)

1.4.1 Starr-plastische Modelle

Ein gänzlich anderes Verhalten als das viskoelastische wird durch das **COULOMB**¹⁹–(ST. VENANT)-Element (Klotz mit Trockenreibung) beschrieben.



¹⁹ Charles Augustin Coulomb (1736-1806)

Bei ihm ist die Deformationsgeschwindigkeit Null, solange die Spannung betragsmäßig unter einer **Fließspannung** liegt

$$(1.4.1) \quad |\sigma| < \sigma_F \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = 0.$$

Bei Erreichen der **Fließgrenze** (engl. *yield limit*) kann beliebig großes Fließen in Richtung der angelegten Spannung stattfinden:

$$\sigma = +\sigma_F \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad \text{beliebig}$$

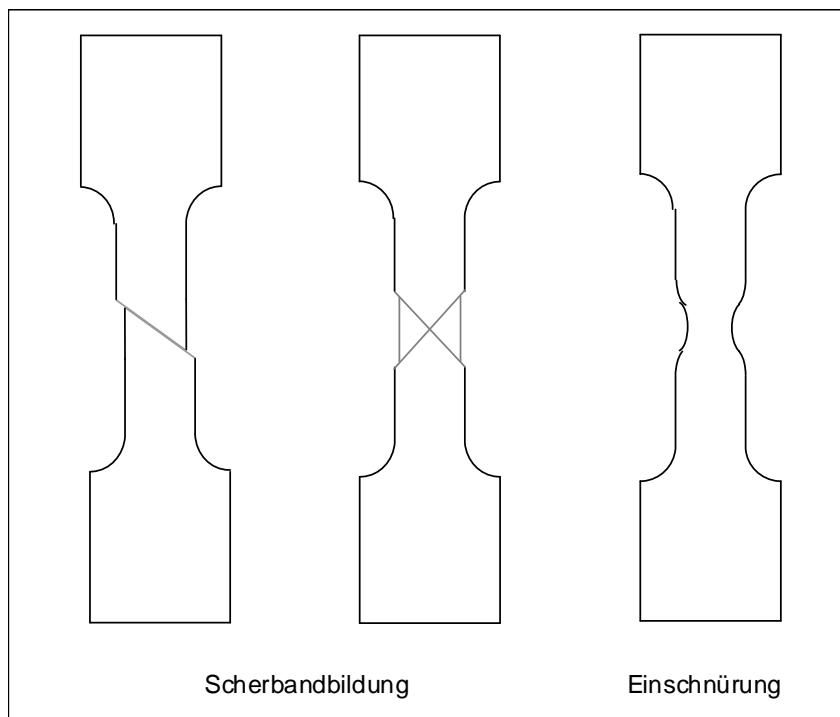
$$\sigma = -\sigma_F \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} \leq 0 \quad \text{beliebig}$$

Bei erneuter Entlastung ist sofort wieder $\dot{\varepsilon} = 0$ und der Klotz bleibt liegen. Beim Fließen wird die gesamte Leistung Geschwindigkeits-unabhängig dissipiert

$$(1.4.2) \quad l_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \sigma_F |\dot{\varepsilon}| = \delta \geq 0.$$

Ein derartiges Verhalten wird als **starr-ideal-plastisch** bezeichnet. Es lässt keinen funktionalen Zusammenhang zwischen den momentanen Spannungen und Dehnungen zu. Das Verhalten ist (nur) stückweise linear und damit insgesamt *nichtlinear*. Außerdem ist es Geschwindigkeits-unabhängig (skleronom).

Bei realen Materialien ist die Fließgrenze nicht konstant, sondern hängt von der (plastischen) Verformung ab, oder genauer: vom Prozess der plastischen Verformung. Nimmt die Fließgrenze mit der plastischen Verformung zu, so handelt es sich um **Verfestigung** (engl. *hardening*), nimmt sie ab, um **Entfestigung** (engl. *softening*). Bei vielen Materialien hat man zunächst ein verfestigendes Verhalten, bis eine Sättigung eintritt, um schließlich zu entfestigen. Damit wird das Verhalten instabil und neigt zu *Lokalisierungen* wie Scherbändern oder Einschnürungen, was die Messung von Spannungs-Dehnungs-Beziehungen äußerst kompliziert macht. Man beachte aber die Abhängigkeit dieser Begriffe von der Wahl der Dehnungs- und Spannungsmaße, da diese Vorgänge bei großen Deformationen stattfinden.



Auch die Berechnung jenseits der Zugfestigkeit wird sehr schwierig, weswegen man sich meist auf den verfestigenden Bereich beschränkt.

Als Ansätze sind lineare Verfestigungsregeln

$$\sigma_F = K |\varepsilon| + \sigma_{F0} \quad K \text{ positive Konstante}$$

oder Potenzgesetze

$$\sigma_F = K |\varepsilon|^n + \sigma_{F0} \quad K, n \text{ positive Konstanten}$$

verbreitet. Sollen auch Lastwechsel beschrieben werden, bei denen es zum (Rück-)Plastizieren in entgegengesetzter Richtung kommen kann, so schreibt man das Gesetz besser inkrementell

$$(1.4.3) \quad \sigma_F^\bullet = \underline{K} |\varepsilon^\bullet| \quad \underline{K} \text{ positive Konstante.}$$

Will man die Verfestigung beschränken, so benutzt man Sättigungsansätze wie z. B.

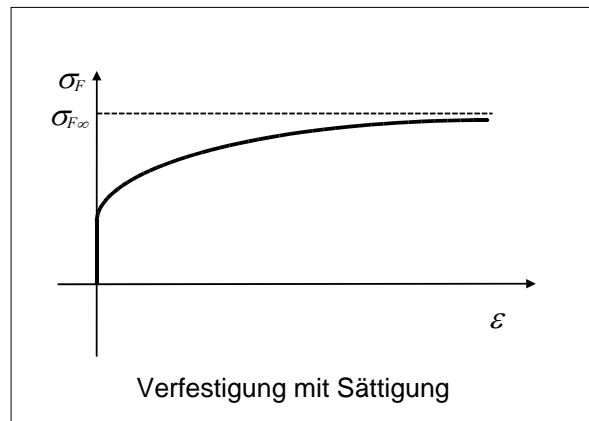
$$\sigma_F^\bullet = K (\sigma_{F\infty} - \sigma_F) |\varepsilon^\bullet| \quad K, \sigma_{F\infty} \text{ positive Konstanten,}$$

bei der σ_F gegen den Sättigungswert $\sigma_{F\infty}$ strebt.

Eine ähnliche (finite) Verfestigungsregel mit Sättigung ist von VOCE (1955) vorgeschlagen worden in der Form

$$\sigma_F = \sigma_\infty - (\sigma_\infty - \sigma_0) \exp(-\varepsilon/\varepsilon_0)$$

mit Konstanten σ_∞ , σ_0 und ε_0 .

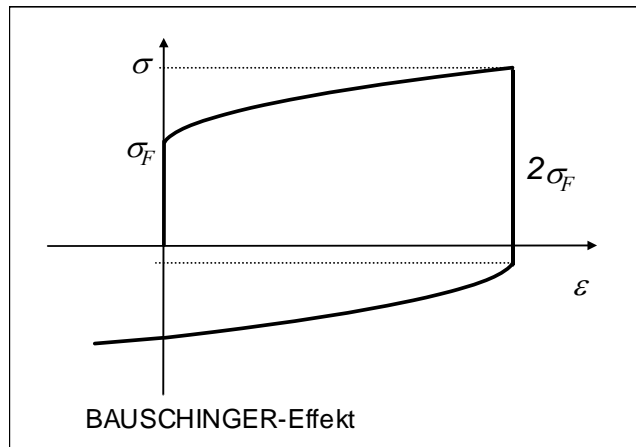


Bei Lastumkehr von Druck auf Zug oder umgekehrt wird man häufig feststellen, dass sich die Fließgrenze absolut verkleinert hat, was **BAUSCHINGER**²⁰-Effekt (1886) genannt wird.

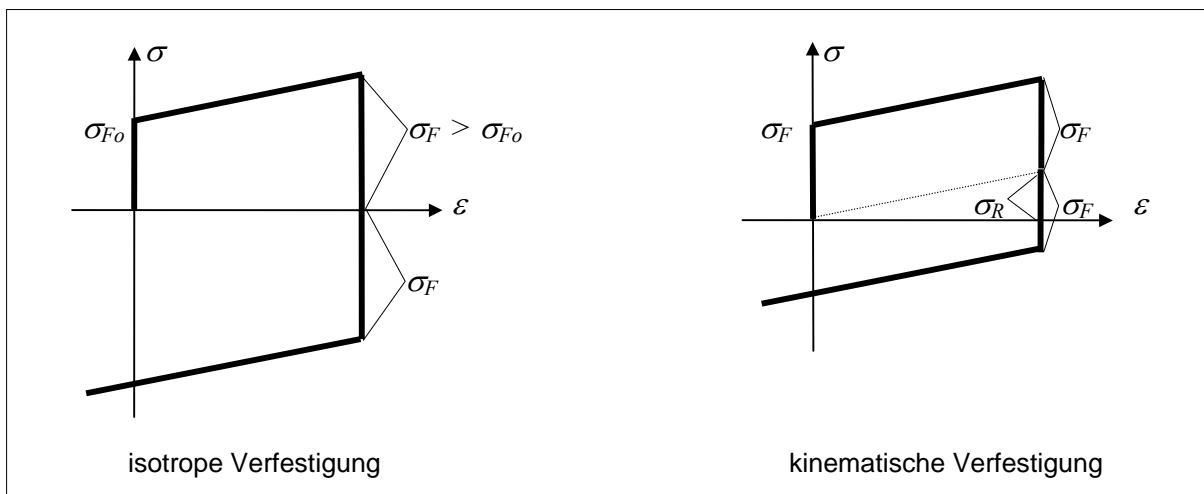
In der Modellierung verwendet man zwei Ansätze, die sich nur bei Lastumkehr mit Rückplastizierung unterscheiden lassen:

1. die **isotrope Verfestigung**, bei der die Fließgrenze unter Zug und Druck gleichermaßen ansteigt; und
2. die **kinematische Verfestigung**, bei der die Fließgrenze im Zugbereich genauso zunimmt, wie sie im Druckbereich abnimmt, oder umgekehrt.

²⁰ Johann Bauschinger (1834-1893)



Da das reale Werkstoffverhalten oft dazwischen liegt, benutzt man häufig Kombinationen aus beiden, wobei für die isotrope Verfestigungsvariable σ_F und die **Rückspannung** σ_R (engl. *back stress*) der kinematischen Verfestigung Entwicklungsgleichungen angesetzt werden müssen, für die man (leider) nicht mehr auf einfache Modellvorstellungen zurückgreifen kann.



1.4.2 Elastisch-plastische Modelle

Viele plastische Materialien zeigen bei sehr kleinen Deformationen wie auch bei Lastumkehr zunächst ein elastisches Verhalten. Erst bei Überschreiten einer **Fließgrenze** σ_F (auch **Elastizitätsgrenze** oder **Streckgrenze** genannt), deformiert sich das Material auch plastisch (**plastisches Fließen**). Dieses Verhalten kann durch eine Reihenschaltung von COULOMB-Element und HOOKE-Element modelliert werden, was auf den PRANDTL²¹- oder JENKIN-Körper führt. Damit kann man die Gesamtdehnung additiv zerlegen in einen elastischen und einen plastischen Anteil

²¹ Ludwig Prandtl (1875-1953)

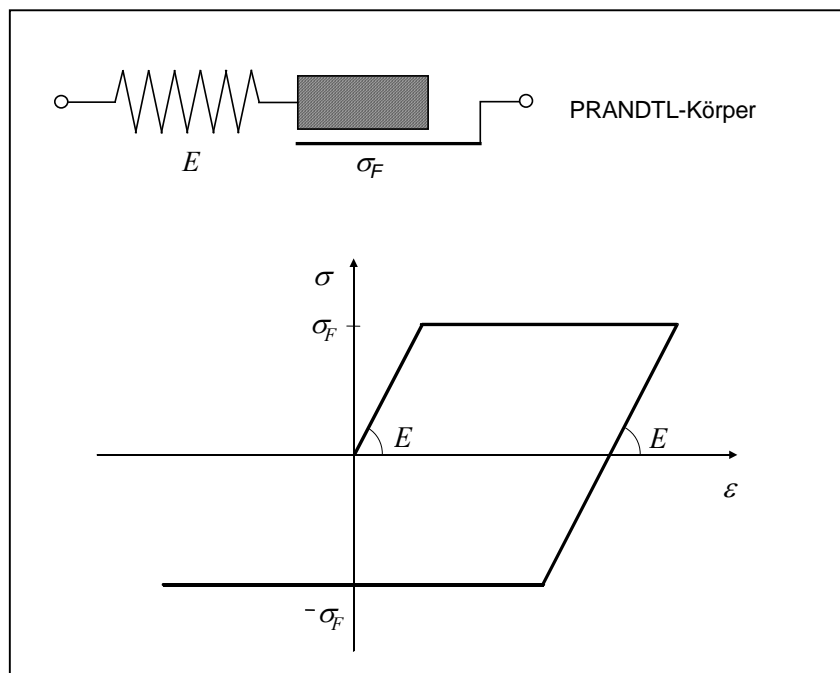
$$(1.4.4) \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad \text{mit } \varepsilon_e = \sigma/E.$$

In den Verfestigungsgesetzen steht dann nur die plastische Deformation ε_p . Die Leistung des PRANDTL-Körpers ist

$$(1.4.5) \quad l_i = \sigma \dot{\varepsilon} = \sigma(\dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p) = E \dot{\varepsilon}_e \varepsilon_e + \sigma_F |\dot{\varepsilon}_p| = w + \delta,$$

setzt sich also aus einem elastischen und einem dissipativen Teil zusammen.

Man spricht von *Materialien mit elastischen Bereichen*, die insbesondere für viele Metalle eine sinnvolle Beschreibung des realen Verhaltens darstellen, wenn man geeignete Verfestigungsmodelle verwendet. Dies gilt vor allem bei niedrigen Temperaturen, während bei hohen Temperaturen (nahe Schmelztemperatur) viskose Effekte ausgeprägt sein können. Mit solchen Beanspruchungen beschäftigt sich die *Viskoplastizität*.



Ein elastisch-plastisches Modell mit kinematischer Verfestigung ist der MASING-Körper. Um die Größe des elastischen Bereiches für ein Beispiel zu zeigen, seien folgende Angaben gemacht:

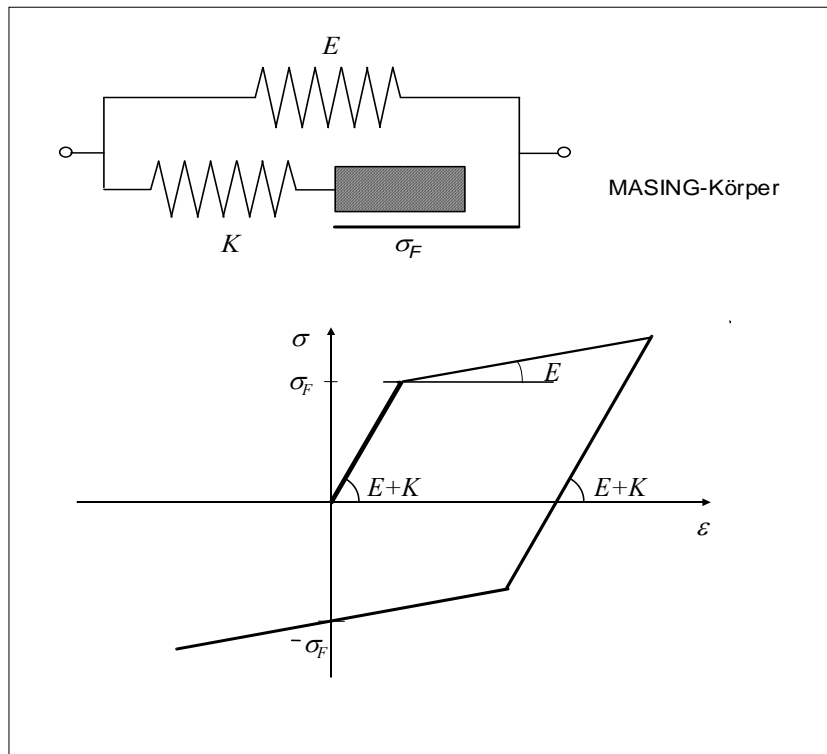
Material: Chrom-Nickel-Stahl

E-Modul: 208 GPa

Fließgrenze: 120 MPa

⇒ Fließdehnung: 0,058 %

Die elastischen Bereiche sind bei Metallen also häufig sehr klein.



Betrachtet man das elastisch-plastische Materialverhalten unter einer einsinnigen Belastung, d. h. ohne Lastumkehr, so kann man es formal nicht von einem stark nicht-linearen (beispielsweise bilinearen), elastischen Verhalten unterscheiden. HENCKY hat deshalb 1924 ein solches *finite Formänderungsgesetz* vorgeschlagen. Ähnlich ist das RAMBERG-OSGOOD-Gesetz (1945)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{k_1} + k_2 \left(\frac{\sigma}{k_3} \right)^N \quad k_1, k_2, k_3, N \text{ Konstanten}$$

Andere historische Ansätze sind (s. KHAN/HUANG S. 11):

$\sigma = \sigma_0 + K \varepsilon^N$	LUDWIK (1909)
$\sigma = \sigma_F \tanh(E \varepsilon / \sigma_F)$	PRAGER (1938)
$\sigma = K \varepsilon^N$	HOLLOMAN (1944)
$\sigma = K (\varepsilon_0 + \varepsilon)^N$	SWIFT (1947)

Wegen der eingeschränkten Anwendbarkeit hat die *Deformationsmethode der Plastizität* nur wenig Anwendung gefunden.

Charakteristisch für alle (elastisch-) plastischen Modelle ist ihre Geschwindigkeits-Unabhängigkeit, die Kriechen und Relaxation ausschließt, sowie ihre Nichtlinearität.

1.5 Viskoplastizität

Literatur

Besson, J.; Cailletaud, G.; Chaboche, J.-L.; Forest, S., Blétry, M.: *Non-Linear Mechanics of Materials*. Springer, Dordrecht (2010)

Betten, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)

Christescu, N.; Suliciu, I.: *Viscoplasticity*. M. Nijhoff Publ., Den Haag (1982)

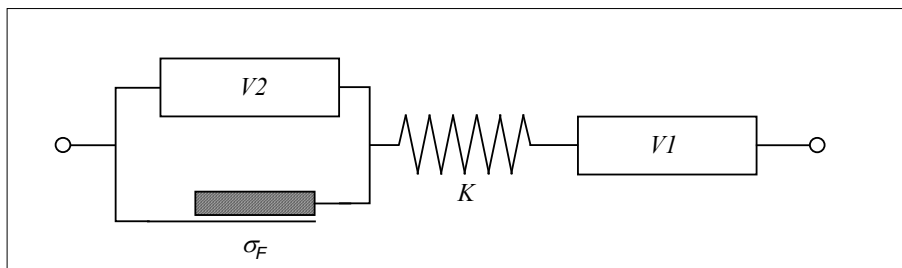
Francois, D.; Pineau, A.; Zaoui, A.: *Mechanical Behaviour of Materials*, Bd. II, Kluwer, Dordrecht (1998)

Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge Univ. Press (1990)

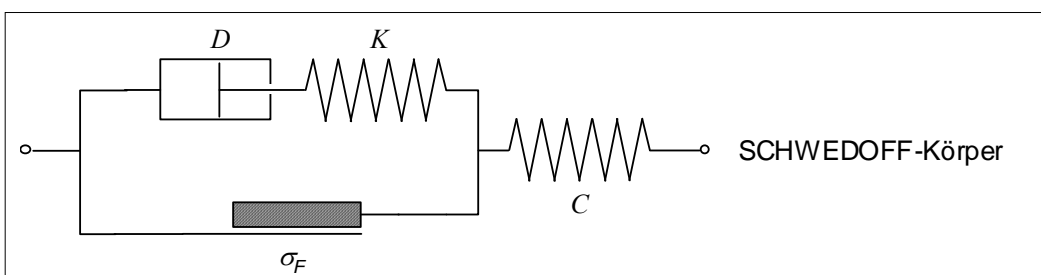
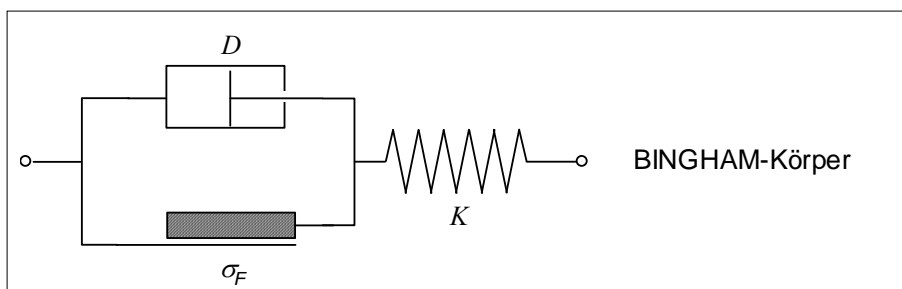
Miller, A. K.: *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*. Elsevier, London (1987)

Skrzypek, J. J.: *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)

Zu einer einfachen Einschließung viskoser Effekte gelangt man durch Anbringung von viskoelastischen Elementen in Reihe ($V1$) oder parallel ($V2$) zum plastischen Element (oder beidem).



Der Effekt von $V1$ ist, dass es keine elastischen, sondern nur noch viskoelastische Bereiche gibt. Ist $V1$ ein Dämpfer, so bildet sich bei Ent-/Belastungszyklen auch unterhalb der Fließspannung eine Hysterese aus (wie beim MAXWELL-Körper).



Wichtiger ist jedoch die Parallelschaltung von $V2$ zum COULOMB-Element (z. B. BINGHAM²²-Körper). $V2$ wird nur aktiviert bei inelastischen Deformationen. Die elastischen Bereiche bleiben also erhalten. Während des Fließens setzt sich die Spannung aus der Fließspannung σ_F und einer viskosen **Überspannung** $\sigma_{\dot{u}}$ (engl. *overstress*) zusammen

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_{\dot{u}} .$$

Die Spannung kann damit beliebig groß oder klein werden, was realistischer ist als die Begrenzung durch $\pm \sigma_F$ beim plastischen Material. Kombiniert man solche Modelle noch mit zusammengesetzten Verfestigungsmechanismen, so gelangt man zu einem recht komplexen Materialverhalten, das vor allem im Hochtemperaturbereich Gegenstand breiter Anwendungen und intensiver Entwicklungen ist. Folgende Modelle wurden u. a. vorgeschlagen:

- das PERZYNA-Modell (1963)
- das BODNER-PARTOM-Modell (1972)
- das HART-MILLER-Modell (1976)
- das CHABOCHE-Modell (1977)
- das ROBINSON-Modell (1978)
- das Überspannungsmodell von CHOI/KREMPLE (1985)
- das EURATOM-Modell von BRUHNS (1987)

Allen gemein ist die Intention, viskoplastisches Materialverhalten bei beliebigen Belastungen (Kriechen, Wechsellasten, zyklisch mit/ohne Haltezeiten, Relaxation usw.) möglichst genau zu beschreiben.

Wegen der Aktualität der Forschungen auf dem Gebiet der Viskoplastizität gibt es noch relativ wenig Übersichtsdarstellungen, ganz im Gegensatz zur Plastizität.

²² Eugene Cook Bingham (1878-1945)

2 EINFÜHRUNG IN DIE TENSORRECHNUNG

In dem ersten Teil dieses Buches haben wir eindimensionale Materialmodelle betrachtet. Der Anwendungsbereich einer eindimensionalen Theorie ist allerdings begrenzt, da im Allgemeinen der Spannungs- und Deformationszustand dreidimensional sind. Für die dreidimensionale Verallgemeinerung aller dieser Konzepte wird ein mathematisches Instrumentarium benötigt, das weit über das Rechnen mit reellen Zahlen hinausgeht. Im Wesentlichen werden wir es mit Vektoren und Tensoren zu tun haben. Für diejenigen Leser, die mit hiermit nicht vertraut sind, geben wir im Folgenden eine kurze Einführung in die Tensoralgebra und -analysis.

Literatur

- Akivis, M. A.; Goldberg, V. V.:** *Tensor Calculus with Applications*. World Scientific Pub., Singapore (2003)
- Betten, J.:** *Tensorrechnung für Ingenieure*. Teubner, Stuttgart (1987)
- De Boer, R.:** *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer, Berlin (1982)
- Duschek, A.; Hochrainer, A.:** *Tensorrechnung in analytischer Darstellung*. Springer, Wien (1961)
- Hackbusch, W.:** *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Berlin (2012)
- Iben, H. K.:** *Tensorrechnung*. Teubner, Stuttgart, Leipzig (1995)
- Itskov, M.:** *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*. Springer, Berlin (2007)
- Lagally, M.:** *Vorlesungen über Vektor-Rechnung*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig (1928)
- Lebedev, L. P.; Cloud, M. J.:** *Tensor Analysis*. World Scientific, New Jersey (2003)
- Marsden, J., Tromba, A. J.:** *Vektoranalysis*. Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford (1995)
- Ruiz-Tolosa, J. R.; Castillo, E.:** *From Vectors to Tensors*. Springer, Berlin (2005)
- Schade, H.:** *Tensoranalysis*. de Gruyter, Berlin (1997), 2. Aufl. (2006) zus. mit K. Neemann.
- Shouten, J. A.:** *Tensor Analysis for Physicists*. Dover Pub., New York (1990)
- Trostel, R.:** *Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik I, Vektor- und Tensoralgebra*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1993)
- Trostel, R.:** *Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik II, Vektor- und Tensoranalysis*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden (1997)

Viele Bücher über Kontinuumsmechanik enthalten eine kurze Einführung in die Tensorrechnung, wie z. B.

- Gonzalez, O.; Stuart, A. M.:** *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press (2008)
- Irgens, F.:** *Continuum Mechanics*. Springer (2008)
- Kienzler, R., Schröder, R.:** *Einführung in die Festigkeitslehre*. Springer, Dordrecht (2009)
- Lai, W. M., Rubin, D., Krempl, E.:** *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1978, 1993)
- Negahban, M.:** *The Mechanical and Thermodynamical Theory of Plasticity*. CRC Press, Boca Raton (2012)

Parisch, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen.* Teubner (2003)

Slaughter, W. S.: *The Linearized Theory of Elasticity.* Birkhäuser, Boston (2002)

2.1 Vektor- und Tensoralgebra

2.1.1 Summenkonvention

Betrachten wir die Summe

$$s = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = \sum_{i=1}^N a_i b_i .$$

Genauso hätte man schreiben können

$$s = \sum_{k=1}^N a_k b_k ,$$

d. h. die Wahl des Summationsindex (i bzw. k) geht nicht in das Ergebnis ein und wird deshalb **stummer Index** genannt. Da wir sehr oft Summen benötigen, führen wir zur Abkürzung folgende Vereinbarung ein:

Summenkonvention:

Steht ein Index in einem Produktterm zweimal, so ist über ihn von 1 bis N zu summieren.

Oder: *über stumme Indizes ist zu summieren.*

Dabei geht N aus dem Zusammenhang hervor und ist im Weiteren meistens gleich 3, der Dimension des physikalischen Raumes.

Für unser Beispiel ist also

$$s = a_i b_i = a_k b_k \text{ usw.}$$

Des Weiteren ist die Komponentendarstellung eines Vektors \mathbf{v} bezüglich einer Basis $\{\mathbf{g}_i\}$

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2 + v^3 \mathbf{g}_3 = v^i \mathbf{g}_i .$$

Sind a_{ij} die Elemente einer 3×3 -Matrix, so heißt die Summe der Diagonalelemente

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

die *Spur* der Matrix. Das Produkt zweier Matrizen mit Elementen a_{ij} und b_{jk} ist

$$a_{ij} b_{jk} = a_{il} b_{lk} = a_{il} b_{lk} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} .$$

Hierin sind nur j und l stumme Indizes, i und k jedoch nicht. i und k heißen **freie Indizes**, weil sie beliebige Werte zwischen 1 und 3 annehmen können. Sie stehen in Produkttermen auf beiden Seiten der Gleichung je einmal.

Die Spur der Ergebnismatrix $a_{ik} b_{ki}$ ist also eine Doppelsumme (über i und k), wobei die Reihenfolge der Summierung bei mehrfachen Summen bekanntlich egal ist:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ik} b_{ki} = a_{ik} b_{ki} .$$

Es ist immer wichtig, zwischen stummen und freien Indizes zu unterscheiden. So kann man für die drei Gleichungen

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

verkürzt schreiben

$$y_i = a_{ik}x_k$$

oder auch

$$y_p = a_{pm}x_m.$$

Darin sind k und m stumm, während i und p frei sind.

Oft kommt es vor, dass ein Ausdruck immer bei Gleichheit zweier bestimmter Indizes 1 ist, sonst aber 0 . Zum Beispiel, wenn gilt:

$$\begin{array}{lll} a_1 b_1 = 1 & a_1 b_2 = 0 & a_1 b_3 = 0 \\ a_2 b_1 = 0 & a_2 b_2 = 1 & a_2 b_3 = 0 \\ a_3 b_1 = 0 & a_3 b_2 = 0 & a_3 b_3 = 1. \end{array}$$

Um ein solches Gleichungssystem kürzer zu schreiben, definieren wir das **KRONECKER**²³-**Symbol** δ_{ij} :

δ_{ij} sind die Komponenten der Einsmatrix

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d. h.

$$(2.1.1) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} = \delta_{ji} = \delta_i^j = \delta_i^j.$$

Es soll also völlig egal sein, ob die Indizes oben oder unten notiert werden. Damit können wir äquivalent für die 9 Gleichungen von oben verkürzt schreiben

$$a_i b_j = \delta_{ij}.$$

Umgekehrt gelten beispielsweise die Erweiterungen

$$a_{ik}x_k = a_{il}\delta_{lk}x_k$$

und

$$a_i b_i = a_i b_k \delta_{ik}$$

sowie

$$a_{ik}x_k - \lambda x_i = a_{ik}x_k - \lambda \delta_{ik}x_k = (a_{ik} - \lambda \delta_{ik})x_k.$$

Außerdem führt man im 3-Dimensionalen oft noch das dreifach-indizierte **Permutations-symbol** oder **LEVI-CIVITA**²⁴-**Symbol** ε_{ijk} ein als

²³ Leopold Kronecker (1828-1891)

$$(2.1.2) \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } ijk \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } ijk \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } ijk \text{ keine Permutation von } 1, 2, 3 \text{ ist} \end{cases}$$

also z. B.

$$\varepsilon_{231} = +1 \quad \varepsilon_{132} = -1 \quad \varepsilon_{122} = 0.$$

Es gilt demnach

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji}$$

usw.

2.1.2 Vektoren

Definition: Ein **Vektorraum** oder **linearer Raum** ist eine Menge \mathcal{V} (von „Vektoren“), auf der eine Addition und eine Skalarenmultiplikation mit Skalaren aus den reellen Zahlen \mathcal{R} mit folgenden Regeln definiert sind

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	(kommutativ)
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	(assoziativ)
$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$	(Nullvektor)
$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$	(Negativelement)
$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$	(assoziativ)
$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	(Einselement)
$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$	(distributiv)
$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$	(distributiv)

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}$$

Ein maximales linear unabhängiges System von Vektoren $\{\mathbf{g}_i\} := \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N\}$ wird **Vektorbasis** in \mathcal{V} genannt. Bezüglich einer solchen können wir jeden Vektor als Linearkombination darstellen

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i \quad \mathbf{b} = b^i \mathbf{g}_i.$$

Dabei heißen die Skalare a^i und b^i die **Komponenten** des Vektors bezüglich dieser Basis. Es gilt dann

$$(2.1.3) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i + b^j \mathbf{g}_j = (a^i + b^i) \mathbf{g}_i$$

und

$$(2.1.4) \quad \alpha \mathbf{a} = \alpha(a^i \mathbf{g}_i) = (\alpha a^i) \mathbf{g}_i.$$

²⁴ Tullio Levi-Civita (1873-1941)

Manche Vektorräume besitzen darüber hinaus noch ein **inneres Produkt** oder **Skalarprodukt**

$$\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{R} \quad | \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

mit folgenden Regeln

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	(kommutativ)
$(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	(assoziativ)
$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$	(distributiv)
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ für $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$	(positiv-definit)
$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathcal{R}.$	

Besitzt der Vektorraum ein Skalarprodukt, so gilt

$$(2.1.5) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i \mathbf{g}_i) \cdot (b^k \mathbf{g}_k) = a^i b^k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k.$$

Ein Skalarprodukt induziert eine **Norm** $|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ (**Betrag, Länge**) eines Vektors. Außerdem kann man mit seiner Hilfe den Winkel φ zwischen zwei Vektoren bestimmen als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi.$$

Sind die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} *orthogonal* oder *senkrecht* zueinander, so gilt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Definition: Zwei Basen $\{\mathbf{g}_i\}$ und $\{\mathbf{g}^k\}$ heißen **dual**, falls gilt

$$(2.1.6) \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k.$$

Damit stehen alle Basisvektoren von $\{\mathbf{g}_i\}$ orthogonal auf denjenigen von $\{\mathbf{g}^k\}$ für $k \neq i$. Ist die eine Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ gegeben, so stellt (2.1.6) ein lineares inhomogenes Gleichungssystem für die Komponenten der dualen Basis $\{\mathbf{g}^k\}$ dar, dessen Koeffizientendeterminante nicht singular sein kann, und das deshalb immer eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz: Zu jeder Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ eines Vektorraums gibt es eindeutig eine duale Basis $\{\mathbf{g}^j\}$.

Die Verwendung von dualen Basen ist also immer möglich und führt oft zu Vereinfachungen. So gilt für das innere Produkt

$$(2.1.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a^i \mathbf{g}_i) \cdot (b_k \mathbf{g}^k) = a^i b_k \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k \\ &= a^i b_k \delta_i^k = a^i b_i = a^k b_k. \end{aligned}$$

Wir haben dabei die stummen Indizes konträr (d. h. oben und unten) gestellt, um deutlich zu machen, auf welche der beiden Basen wir uns beziehen. Es gilt nämlich auch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{g}^i) \cdot (b^k \mathbf{g}_k) = a_i b^i,$$

aber

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_i \mathbf{g}^i) \cdot (b_k \mathbf{g}^k) = a_i b_k (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k).$$

Fällt eine Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ mit ihrer dualen $\{\mathbf{e}^i\}$ zusammen

$$\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}^i \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

so braucht man nicht mehr zwischen oberen und unteren Indizes zu unterscheiden.

Definition: Eine Vektorbasis $\{\mathbf{e}_i\}$ heißt **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn gilt

$$(2.1.8) \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}.$$

In jedem Vektorraum gibt es unendlich viele Basen und speziell auch ONBs. Verwendet man mehrere Basen gleichzeitig, so muss man die Koeffizienten entsprechend kennzeichnen, also z. B.

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = \bar{a}_i \bar{\mathbf{e}}_i$$

mit

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{und} \quad \bar{a}_i = \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{e}}_i.$$

Bezüglich einer ONB gilt wegen (2.1.8)

$$(2.1.9) \quad \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \delta_{ki}$$

$$(2.1.10) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$$

$$(2.1.11) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_i a_i} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Im Dreidimensionalen kann man das **Kreuzprodukt** bezüglich einer positiv-orientierten ONB darstellen mittels des Permutationssymbols

$$(2.1.12) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_i \mathbf{e}_i \times b_j \mathbf{e}_j = a_i b_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k$$

sowie das **Spatprodukt** zwischen drei Vektoren als

$$(2.1.13) \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [a_i \mathbf{e}_i, b_k \mathbf{e}_k, c_l \mathbf{e}_l] = a_i b_k c_l \varepsilon_{ikl}.$$

2.1.3 Dyaden und Tensoren

Definition: Eine vektorwertige Abbildung eines Vektors

$$\mathbf{F}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

heißt **linear**, wenn

$$(2.1.14) \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + \alpha \mathbf{F}(\mathbf{x}_2)$$

für alle Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{V}$ und alle Skalare $\alpha \in \mathcal{R}$ gilt.

Beispiel 1. Linearität

Überprüfen Sie die reelle Funktion

$$y = f(x) := m x + n$$

mit reellen Konstanten m und n auf Linearität.

Lösung:

Der hier verwendete Begriff der Linearität lässt sich für eine reelle Funktion f als

$$(B1.1) \quad f(\alpha a + b) = \alpha f(a) + f(b) \quad \forall a, b \in \mathcal{R}$$

formulieren. Eine Überprüfung der letzten Funktion mit der Bedingung (B1.1) liefert

$$\alpha n = 0.$$

Dies gilt allgemein nur für $n \equiv 0$. Der in der Algebra verwendete Begriff der Linearität ist strenger als der Begriff der linearen Funktion, wie er in der reellen Analysis verwendet wird. Manchmal werden solche Funktionen als affin oder quasilinear bezeichnet. Der etwas strengere Begriff der Linearität in der Algebra wird in der reellen Analysis auch als Proportionalität bezeichnet.

Seien \mathbf{a} und \mathbf{b} festgewählte Vektoren, so kann man mit ihrer Hilfe eine spezielle lineare Abbildung konstruieren, die einen variablen Vektor \mathbf{x} in einen anderen \mathbf{y} abbildet mittels der Vorschrift

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{a}.$$

Dabei ist der Ergebnisvektor \mathbf{y} immer parallel zu \mathbf{a} .

Definition: Das **dyadische Produkt** zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} oder die **einfache** oder **kollineare Dyade** $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ist die Abbildung

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad | \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}),$$

also

$$(2.1.15) \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}) := \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}).$$

Diese Abbildung ist linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_2) &= \mathbf{a} [\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_2)] \\ &= \mathbf{a} [\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_2] \\ &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}_1) + \alpha [\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}_2)] \end{aligned}$$

für alle Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{V}$ und alle Skalare $\alpha \in \mathcal{R}$.

Das dyadische Produkt ist i. Allg. *nicht* kommutativ, denn $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$, falls die beiden Vektoren nicht kollinear (parallel) sind.

Man kann nun die *Summe zweier Dyaden* definieren als diejenige lineare Abbildung, die für alle Vektoren \mathbf{x} leistet

$$(2.1.16) \quad \begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) (\mathbf{x}) &:= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}) + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} (\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{c} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned}$$

sowie die *Multiplikation einer Dyade* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ mit einem Skalar $\alpha \in \mathcal{R}$ als

$$(2.1.17) \quad (\alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) (\mathbf{x}) := \alpha [(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) (\mathbf{x})] = \alpha \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}).$$

Diese beiden Operationen erfüllen die Axiome der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar von Vektorräumen. Außerdem gelten folgende Regeln für alle Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ und alle Skalare $\alpha \in \mathcal{R}$:

$$(2.1.18) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$$

$$(2.1.19) \quad \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}$$

$$(2.1.20) \quad \alpha (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b})$$

Man kann also in der letzten Zeile die Klammern weglassen. Das dyadische Produkt ist demnach linear in beiden beteiligten Vektoren. Daraus folgt

$$(2.1.21) \quad (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}) \otimes (\mathbf{c} + \beta \mathbf{d}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \beta \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} + \alpha \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \alpha \beta \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}.$$

Stellt man \mathbf{a} und \mathbf{b} bezüglich einer Basis $\{\mathbf{g}_i\}$ dar, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= (a^i \mathbf{g}_i) \otimes (b^k \mathbf{g}_k) \\ (2.1.22) \quad &= a^i b^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k \end{aligned}$$

sowie

$$(2.1.23) \quad (\mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = (a^i + \alpha b^i) c^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k$$

und

$$(2.1.24) \quad \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \alpha \mathbf{c}) = a^i (b^k + \alpha c^k) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k.$$

Für ONB vereinfachen sich diese Ausdrücke nicht. Erst wenn Skalarprodukte ausgewertet werden müssen, empfiehlt es sich, auf eine ONB überzugehen oder duale Basen zu verwenden. Wegen der Linearität der Dyade gilt bez. einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} (\mathbf{x}) &= [(a_i \mathbf{e}_i) \otimes (b_k \mathbf{e}_k)] (x_l \mathbf{e}_l) \\ &= x_l a_i b_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_l) \\ (2.1.25) \quad &= a_i b_k x_l \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) \\ &= a_i b_k x_l \mathbf{e}_i \delta_{kl} \\ &= a_i b_k x_k \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Weil eine einfache Dyade $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ alle Vektoren \mathbf{x} in die Richtung von \mathbf{a} abbildet, handelt es sich um eine spezielle lineare Abbildung, eine **kollineare** Dyade.

Die Summe zweier Dyaden $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) + (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d})$ bildet alle Vektoren \mathbf{x} in Linearkombinationen von \mathbf{a} und \mathbf{c} ab, also in die Ebene, die von \mathbf{a} und \mathbf{c} aufgespannt wird. Man nennt eine solche Abbildung deshalb **planare** Dyade.

Def.: Die allgemeine lineare Abbildung von Vektoren in Vektoren wird **Tensor** oder **(vollständige) Dyade** genannt.

Ist \mathbf{T} ein solcher, so gilt also

$$(2.1.26) \quad \mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(x_i \mathbf{e}_i) = x_i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i).$$

Ein Tensor ist also dadurch determiniert, dass seine Wirkung auf alle Basisvektoren gegeben ist. Da die Klammern entbehrlich sind, lassen wir sie weg, und schreiben statt dessen einen Punkt

$$(2.1.27) \quad \mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}.$$

Da $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i$ ein Vektor ist, können wir ihn wieder bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_k\}$ darstellen

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = T_{ki} \mathbf{e}_k$$

mit den Komponenten

$$T_{ki} := \mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i).$$

In diesem Ausdruck kann man die Klammern weglassen, da es keine Verwechslungsmöglichkeiten gibt. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{T} \cdot (x_i \mathbf{e}_i) = x_i \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i = x_i T_{ki} \mathbf{e}_k \\ &= x_i T_{km} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i \\ &= (T_{km} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich erhält man den folgenden

Satz: Jeder Tensor \mathbf{T} lässt sich bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ eindeutig darstellen als

$$(2.1.28) \quad \mathbf{T} = T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i$$

mit den neun (Basis-)Dyaden

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \end{array}$$

und den neun Tensorkomponenten

$$(2.1.29) \quad T_{ki} := \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3.$$

$\{\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i\}$ bilden eine **Tensorbasis**. Die neun **Komponenten des Tensors** bezüglich dieser Basis lassen sich in einer **Komponentenmatrix** anordnen

$$[T_{ij}] := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Speziell ist die Komponentenmatrix von einfachen Dyaden

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

somit

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}.$$

Das dyadische Produkt zwischen zwei Vektoren lässt sich also als Matrizenprodukt im FALKschen Schema darstellen:

	b_1	b_2	b_3
a_1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$
a_2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$
a_3	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$

Dies ist das Matrizenprodukt des Spaltenvektors von \mathbf{a} und des Zeilenvektors von \mathbf{b} .

Man beachte, dass die Komponenten eines Tensors wie auch die eines Vektors von der Wahl der Basis abhängen. Sind nämlich $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ zwei Basen, so ist

$$\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \underline{T}_{ik} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_k$$

mit

$$T_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_k$$

$$\underline{T}_{ik} = \underline{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{\mathbf{e}}_k,$$

wobei T_{ik} und \underline{T}_{ik} i. A. unterschiedlich sind. Der Tensor \mathbf{T} selbst jedoch ist unabhängig von der Basis, bezüglich derer man ihn darstellt.

Will man das Bild \mathbf{y} eines Vektors \mathbf{x} nach der Abbildung mit einem Tensor ermitteln, so stellt man den Tensor wie oben dar und ebenso $\mathbf{x} = x_n \mathbf{e}_n$ und erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \\ &= y_k \mathbf{e}_k = (T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) \cdot (x_n \mathbf{e}_n) \\ &= T_{ki} x_n \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_n) \\ (2.1.30) \quad &= T_{ki} x_n \mathbf{e}_k \delta_{in} \\ &= T_{ki} x_i \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

woraus sich die Komponentengleichung

$$y_k = T_{ki} x_i \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

ergeben. In Matrizenform ist dies

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Nach Wahl einer ONB kann man also die Tensoroperationen auf Matrizenoperationen zurückführen. Dies gilt auch für die Summe zweier Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{T}

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \\ \mathbf{T} &= T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \\ \mathbf{S} + \mathbf{T} &= S_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i + T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \\ (2.1.31) \quad &= (S_{ki} + T_{ki}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

und die Multiplikation eines Tensors \mathbf{T} mit einem Skalar α

$$\alpha \mathbf{T} = \alpha (T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) = (\alpha T_{ki}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i,$$

die genauso definiert sind wie die entsprechenden Operationen zwischen Dyaden gemäß (2.1.16) und (2.1.17).

Sind \mathbf{S} und \mathbf{T} zwei Tensoren und \mathbf{x} ein Vektor, dann ist $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$ ebenso ein Vektor, auf den man wiederum \mathbf{T} anwenden kann

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}).$$

Da die **Hintereinanderschaltung** von mehreren linearen Abbildungen ebenfalls wieder linear ist, handelt es sich bei $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ auch wieder um einen Tensor gemäß

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}) := (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{x}.$$

Seine Komponenten erhalten wir durch die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}) &= (T_{pi} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) \cdot [(S_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (x_m \mathbf{e}_m)] \\ &= (T_{pi} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) \cdot [(S_{kl} x_m \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m)] \\ &= (T_{pi} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) \cdot [S_{kl} x_m \mathbf{e}_k \delta_{lm}] \\ &= (T_{pi} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) \cdot [S_{km} x_m \mathbf{e}_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T_{pi} S_{km} x_m \mathbf{e}_p (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \\
 &= T_{pi} S_{km} x_m \mathbf{e}_p \delta_{ik} \\
 &= T_{pi} S_{im} x_m \mathbf{e}_p \\
 &= T_{pi} S_{iq} \delta_{qm} x_m \mathbf{e}_p \\
 &= (T_{pi} S_{iq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \cdot (x_m \mathbf{e}_m) .
 \end{aligned}$$

Alle Klammern in dieser Rechnung sind unnötig und dienen nur der Verdeutlichung von Zusammenhängen. Durch Vergleich erhalten wir die Darstellung des Tensors

$$(2.1.32) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (T_{pi} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_i) \cdot (S_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = T_{pi} S_{kl} \delta_{ik} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_l = T_{pi} S_{il} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_l ,$$

d. h. man bindet die angrenzenden Basisvektoren durch ein Skalarprodukt und die übrigen durch ein dyadisches Produkt. Seine Komponentenmatrix ergibt sich als Matrizenprodukt zwischen den beiden Komponentenmatrizen. Diese Operation wird **einfache Überschiebung** oder **Kontraktion** genannt.

Es muss betont werden, dass dieses Produkt zweier Tensoren allgemein *nicht* kommutativ ist, d. h. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ ist nicht gleich $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$. Es ist aber assoziativ

$$(2.1.33) \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}) ,$$

weswegen man wieder die Klammern weglassen kann. Außerdem ist es linear in beiden Faktoren

$$(\mathbf{T} + \alpha \mathbf{S}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} + \alpha \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{T} + \alpha \mathbf{S}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} + \alpha \mathbf{R} \cdot \mathbf{S} .$$

Derjenige Tensor, der jeden Vektor in sich selbst abbildet, ist der **Einstensor**. Er hat bezüglich jeder ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ die Einismatrix als Komponentenmatrix gemäß (2.1.1)

$$(2.1.34) \quad \mathbf{I} = \delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i ,$$

weil für jeden Vektor $\mathbf{x} = x_m \mathbf{e}_m$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} &= (\delta_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (x_m \mathbf{e}_m) \\
 &= \delta_{ik} x_m \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m) \\
 &= x_m \mathbf{e}_k \delta_{km} = x_m \mathbf{e}_m = \mathbf{x} .
 \end{aligned}$$

Ist $\mathbf{T} = T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i$ ein beliebiger Tensor und \mathbf{I} der Einstensor, so gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} &= (T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) \cdot (\delta_{lm} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m) \\
 &= (T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) \cdot (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_l) \\
 &= T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) \\
 &= T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \delta_{il} \\
 &= T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \\
 &= \mathbf{T} ,
 \end{aligned}$$

wie auch umgekehrt

$$(2.1.35) \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

für alle Tensoren \mathbf{T} gilt.

Skalare Vielfache $\alpha \mathbf{I}$ von \mathbf{I} heißen **Kugeltensoren** (engl. *spherical tensor*). Sie vervielfachen jeden Vektor

$$(2.1.36) \quad \alpha \mathbf{I} \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} .$$

Speziell ist $\mathbf{0} := 0 \mathbf{I}$ der **Nulltensor**, der jeden Vektor in den Nullvektor abbildet und dessen Koeffizientenmatrix nur mit Nullen besetzt ist. Es gilt also für alle Tensoren \mathbf{T}

$$(2.1.37) \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} .$$

2.1.4 Die Inverse eines Tensors

Es stellt sich die Frage, ob ein Tensor eine Umkehrung hat, d. h. ob es zu einem Tensor \mathbf{T} einen **inversen Tensor** \mathbf{T}^{-1} gibt, so dass

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

ist für alle Vektoren \mathbf{x} . Falls eine solche Abbildung nämlich existiert, so ist sie auch linear (und deshalb wieder ein Tensor). Es muss also

$$(2.1.38) \quad \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$$

gelten. In Komponenten heißt das bez. einer ONB

$$\begin{aligned} (T^{-1}_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (T_{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) &= \delta_{kn} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n \\ &= T^{-1}_{kl} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m T_{mn} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n \\ &= T^{-1}_{km} T_{mn} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

$$(2.1.39) \Rightarrow T^{-1}_{km} T_{mn} = \delta_{kn} .$$

Damit ist die Komponentenmatrix $[T^{-1}_{ik}]$ des inversen Tensor \mathbf{T}^{-1} im Sinne der Matrizenrechnung die inverse Matrix von $[T_{mn}]$, wenn man beide Tensoren bezüglich derselben ONB darstellt.

Man weiß aus der Matrizenrechnung, dass nur die *nicht-singulären* Matrizen invertierbar sind. Das sind solche, deren Determinante ungleich Null ist

$$\det[T_{in}] \neq 0 .$$

Ein Tensor ist also genau dann **invertierbar**, wenn die Determinante seiner Komponentenmatrix bezüglich einer (beliebigen) Basis ungleich Null ist. Ansonsten heißt er **singulär**. Später werden wir die Determinante *eines Tensors* definieren. Damit gelingt uns dann eine basisinvariante Invertierbarkeitsregel.

Eine kollineare oder komplanare Dyade ist grundsätzlich singulär.

Ein Kugeltensor $\alpha \mathbf{I}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Seine Inverse ist dann $\alpha^{-1} \mathbf{I}$.

Sind \mathbf{S} und \mathbf{T} invertierbare Tensoren, dann ist der Produkttensor $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ ebenfalls invertierbar (und umgekehrt), und es gilt

$$(2.1.40) \quad (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} ,$$

weil

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})^{-1} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{I}$$

ist.

2.1.5 Die Transponierte eines Tensors

Zu jedem Tensor \mathbf{T} definiert man den **transponierten Tensor** \mathbf{T}^T über die **Bilinearform**

$$(2.1.41) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})$$

für beliebige Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} . Es reicht, dies für zwei beliebige Basisvektoren zu fordern

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{e}_k)$$

oder

$$(2.1.42) \quad T_{ki} = (T^T)_{ik} \quad i, k = 1, 2, 3$$

d. h. bezüglich einer ONB ist die Komponentenmatrix des transponierten Tensors gleich der transponierten Komponentenmatrix des ursprünglichen Tensors, oder

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k & \Leftrightarrow & \quad \mathbf{T}^T = T_{ik} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \\ &= T_{ki} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i & & \quad = T_{ki} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k . \end{aligned}$$

Es gelten folgende Regeln für alle Tensoren \mathbf{T} und \mathbf{S} , alle Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und alle Skalare α :

$$(2.1.43) \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$$

$$(2.1.44) \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}^T$$

$$(2.1.45) \quad (\mathbf{T} + \mathbf{S})^T = \mathbf{T}^T + \mathbf{S}^T$$

$$(2.1.46) \quad (\alpha \mathbf{T})^T = \alpha (\mathbf{T}^T)$$

$$(2.1.47) \quad (\mathbf{T}^T)^T = \mathbf{T}$$

$$(2.1.48) \quad (\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T =: \mathbf{T}^{-T} \quad \text{für invertierbare Tensoren } \mathbf{T}$$

$$\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{0}^T = \mathbf{0}$$

Man kann damit ein **Linksprodukt** zwischen Vektor und Tensor definieren:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} := \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{v}$$

$$(2.1.49) \quad = (T_{km} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (v_i \mathbf{e}_i) = T_{km} v_i \mathbf{e}_m (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) = T_{km} v_i \mathbf{e}_m \delta_{ki} = v_i T_{im} \mathbf{e}_m$$

$$= (v_i \mathbf{e}_i) \cdot (T_{mk} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_k) = v_i T_{mk} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) \mathbf{e}_k = v_i T_{mk} \delta_{im} \mathbf{e}_k = v_i T_{ik} \mathbf{e}_k .$$

Es gilt für alle Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w}

$$(2.1.50) \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} ,$$

weswegen die Klammern entbehrlich sind. Da das Linksprodukt also auf das Rechtsprodukt zurückgeführt wird, bietet es prinzipiell keine neuen Qualitäten.

Ist ein Tensor gleich seinem Transponierten, so heißt er **symmetrisch**. Ein Kugeltensor ist beispielsweise immer symmetrisch. Die Definition der Symmetrie eines Tensors fällt mit derjenigen der Komponentenmatrix bezüglich ONB zusammen.

Ist ein Tensor gleich dem negativen Transponierten

$$(2.1.51) \quad \mathbf{T} = -\mathbf{T}^T,$$

so heißt er **schiefsymmetrisch** oder **anti(sym)metrisch** (engl. *skew*). Damit gilt für seine Komponenten bez. einer ONB

$$(2.1.52) \quad T_{ik} = -T_{ki}$$

und speziell (keine Summation)

$$T_{ii} = -T_{ii} = 0.$$

Während ein symmetrischer Tensor noch 6 unabhängige Komponenten besitzt

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix},$$

sind es beim schiefsymmetrischen nur noch drei

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Er besitzt also die gleiche Dimension wie der zugrundeliegende Vektorraum. Dies lässt vermuten, dass seine Wirkung auf einen beliebigen Vektor \mathbf{x} durch die Operation eines Vektors auf \mathbf{x} ersetzt werden kann. In der Tat gibt es eindeutig einen **axialen Vektor** \mathbf{t}^A zu einem antisymmetrischen Tensor \mathbf{T} , so dass für alle Vektoren \mathbf{x} gilt

$$(2.1.53) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{t}^A \times \mathbf{x}.$$

Um \mathbf{t}^A zu bestimmen, wählen wir eine ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ und erhalten

$$\begin{aligned} (T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (x_l \mathbf{e}_l) &= t^A_m \mathbf{e}_m \times x_l \mathbf{e}_l \\ &= T_{il} x_l \mathbf{e}_i &= t^A_m x_l \varepsilon_{mli} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

also

$$(2.1.54) \quad T_{il} = t^A_m \varepsilon_{mli}$$

oder

$$\begin{aligned} T_{12} &= t^A_1 \varepsilon_{121} + t^A_2 \varepsilon_{221} + t^A_3 \varepsilon_{321} = -t^A_3 \\ T_{23} &= t^A_1 \varepsilon_{132} + t^A_2 \varepsilon_{232} + t^A_3 \varepsilon_{332} = -t^A_1 \\ T_{31} &= t^A_1 \varepsilon_{113} + t^A_2 \varepsilon_{213} + t^A_3 \varepsilon_{313} = -t^A_2. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^A &= -T_{23} \mathbf{e}_1 - T_{31} \mathbf{e}_2 - T_{12} \mathbf{e}_3 \\ &= +T_{32} \mathbf{e}_1 + T_{13} \mathbf{e}_2 + T_{21} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

und

$$(2.1.55) \quad t^A_m = \frac{1}{2} T_{il} \varepsilon_{mli}.$$

Es gelten folgende Regeln:

- Jede Linearkombination (anti)symmetrischer Tensoren ist wieder (anti)symmetrisch.

Die Hintereinanderschaltung von (anti)symmetrischen Tensoren ist dies jedoch i. A. nicht mehr.

- Die Inverse von symmetrischen invertierbaren Tensoren ist ebenfalls symmetrisch.
- Antimetrische Tensoren sind singulär.

Man kann jeden Tensor \mathbf{T} eindeutig zerlegen in seinen symmetrischen

$$(2.1.56) \quad \text{sym}(\mathbf{T}) := \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)$$

und seinen antimetrischen Anteil

$$(2.1.57) \quad \text{skw}(\mathbf{T}) := \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$$

so dass

$$\mathbf{T} = \text{sym}(\mathbf{T}) + \text{skw}(\mathbf{T})$$

gilt. Speziell gilt für Dyaden die Zerlegung in ihren symmetrischen Anteil

$$\text{sym}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$$

und ihren antimetrischen Anteil

$$\text{skw}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$$

und dem zugehörigen axialen Vektor

$$\mathbf{t}^A = \frac{1}{2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

2.1.6 Quadratische Formen und Tensorflächen

Ist \mathbf{x} Vektor und \mathbf{T} ein Tensor, so ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}$ ein Skalar. Man nennt einen solchen Ausdruck **quadratische Form**. Dabei ist zu beachten, dass von \mathbf{T} nur der symmetrische Anteil eingeht.

Ein Tensor \mathbf{T} heißt

- **positiv-definit**, falls $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} > 0$
- **positiv-semidefinit**, falls $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \geq 0$
- **negativ-definit**, falls $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} < 0$
- **negativ-semidefinit**, falls $\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \leq 0$

für alle Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ist. Ansonsten ist sie **indefinit**.

Ist ein Tensor \mathbf{T} positiv-(semi-)definit, so ist $-\mathbf{T}$ negativ-(semi-)definit. Beispiel für einen positiv-definiten Tensor ist der Einstensor oder ein Kugeltensor $\alpha \mathbf{I}$ mit positivem Skalar α .

Eine geometrische Charakterisierung von Tensoren erhält man durch die Bestimmung von **Tensorflächen**, die folgendermaßen definiert sind: Wir betrachten alle Vektoren \mathbf{x} , die die quadratische Gleichung

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} = 1$$

lösen. Fasst man die Lösungsvektoren als Ortsvektoren auf, so beschreiben sie im Raum i. A. eine Fläche. Ist \mathbf{T} ein Kugeltensor, so ist dies eine Kugeloberfläche. Ist \mathbf{T} positiv-definit, so ist es ein Ellipsoid. Auf weitere Tensorflächen werden wir nach der Behandlung von Eigenwertsystemen eingehen.

2.1.7 Kreuzprodukt zwischen Vektor und Tensor

Für manche Anwendungen benötigt man das Kreuzprodukt zwischen einem Vektor (links) und einem Tensor (rechts)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{T},$$

das durch seine Wirkung auf einen Vektor \mathbf{w} definiert ist als

$$(2.1.58) \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} := \mathbf{v} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}),$$

womit sich die Klammern als entbehrlich erweisen. In Komponenten bezüglich einer ONB gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{w} &= v_i \mathbf{e}_i \times (T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (w_m \mathbf{e}_m) \\ &= v_i \mathbf{e}_i \times T_{km} w_m \mathbf{e}_k \\ &= v_i T_{km} w_m \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \\ &= v_i T_{km} w_m \varepsilon_{ikp} \mathbf{e}_p \\ &= v_i T_{kl} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}_l \cdot (w_m \mathbf{e}_m). \end{aligned}$$

Man erkennt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{T} &= (v_i \mathbf{e}_i) \times (T_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \\ &= (v_i \mathbf{e}_i \times T_{kl} \mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}_l \\ &= v_i T_{kl} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}_l \end{aligned}$$

oder für lineare Dyaden

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}.$$

Dieser Tensor ist in allen drei Faktoren linear. Die Klammern sind entbehrlich. Die Transponierte davon ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T &= \mathbf{b} \otimes (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{b} \otimes (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \\ &=: -(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) \times \mathbf{v} \\ &= -(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T \times \mathbf{v}, \end{aligned}$$

oder allgemein für alle Tensoren \mathbf{T}

$$(2.1.59) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{T} := -(\mathbf{T}^T \times \mathbf{v})^T.$$

Damit haben wir das Kreuzprodukt zwischen einer Dyade (links) und einem Vektor (rechts) eingeführt als

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \times \mathbf{v} := \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{a} \otimes (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T = -[\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T]^T,$$

und in Verallgemeinerung dessen zwischen einem Tensor (links) und einem Vektor (rechts)

$$(2.1.60) \quad \mathbf{T} \times \mathbf{v} := -(\mathbf{v} \times \mathbf{T}^T)^T,$$

was wieder in allen Faktoren linear ist. In Komponenten bezüglich einer ONB erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \times \mathbf{v} &= (T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \times (v_m \mathbf{e}_m) \\ &= T_{ik} v_m \mathbf{e}_i \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_m) \\ &= T_{ik} v_m \varepsilon_{kmp} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_p, \end{aligned}$$

worin alle Klammern entbehrlich sind.

Es gelten folgende Regeln für alle Skalare α , Vektoren \mathbf{v} , \mathbf{w} und Tensoren \mathbf{S} , \mathbf{T} :

(2.1.61)	$(\mathbf{v} \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (\mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) =: \mathbf{v} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}$
(2.1.62)	$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \times \mathbf{w} =: \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \times \mathbf{w}$
(2.1.63)	$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \times \mathbf{v} = \mathbf{T} \times \mathbf{v} + \mathbf{S} \times \mathbf{v}$
(2.1.64)	$\mathbf{v} \times (\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \mathbf{v} \times \mathbf{T} + \mathbf{v} \times \mathbf{S}$
(2.1.65)	$\alpha (\mathbf{T} \times \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{T}) \times \mathbf{v} = \mathbf{T} \times (\alpha \mathbf{v}) =: \alpha \mathbf{T} \times \mathbf{v}$
(2.1.66)	$\alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{T}) = (\alpha \mathbf{v}) \times \mathbf{T} = \mathbf{v} \times (\alpha \mathbf{T}) =: \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{T}$
(2.1.67)	$\mathbf{T} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{T} \times \mathbf{v} + \mathbf{T} \times \mathbf{w}$
(2.1.68)	$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{T} = \mathbf{v} \times \mathbf{T} + \mathbf{w} \times \mathbf{T}$

Als Folge der Regeln für das Spatprodukt gilt außerdem

$$(2.1.69) \quad \mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{T} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

oder bezüglich des Linksproduktes

$$(2.1.70) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{T}).$$

Hier sind die Klammern nicht entbehrlich, weil die Ausführung der Operationen nur in der Weise Sinn machen.

Wählt man für \mathbf{T} speziell den Einstensor \mathbf{I} , so wird für beliebige Vektoren \mathbf{w}

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \mathbf{I}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{v} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ &= \mathbf{I} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{I} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{I} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

und damit

$$(2.1.71) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{v}.$$

Andererseits gilt mit (2.1.60)

$$(2.1.72) \quad \mathbf{I} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{I})^T = -(\mathbf{I} \times \mathbf{v})^T,$$

womit $\mathbf{I} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{I}$ als antimetrisch erkannt wird. Wir schließen durch Vergleich, dass \mathbf{v} der axiale Vektor zum antimetrischen Tensor $\mathbf{v} \times \mathbf{I}$ ist.

Man erhält in Komponenten bezüglich einer ONB

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \times \mathbf{v} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \times v_j \mathbf{e}_j \\ &= v_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \\ (2.1.73) \quad &= \mathbf{v} \times \mathbf{I} = v_j \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ &= v_j \varepsilon_{jik} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Angewendet auf einen Vektor \mathbf{w} erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{w} &= v_j \varepsilon_{jik} \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_i \cdot w_m \mathbf{e}_m) \\
&= v_j w_i \varepsilon_{jik} \mathbf{e}_k \\
&= \mathbf{v} \times \mathbf{w}.
\end{aligned}$$

2.1.8 Orthogonale Tensoren

sind solche, die das innere Produkt erhalten

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}$$

für beliebige \mathbf{a} und \mathbf{b} . Damit muss

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{mi} Q_{mj} = \delta_{ij} \text{ bzgl. ONB}$$

sein oder

$$(2.1.74) \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T.$$

Bei orthogonalen Tensoren ist der Transponierte gleich dem Inversen, weswegen sie auch immer invertierbar sind. Deshalb gilt auch

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{im} Q_{jm} = \delta_{ij} \text{ bzgl. ONB.}$$

Demnach ist der transponierte/inverse Tensor eines orthogonalen Tensors wieder orthogonal. Stellt man einen orthogonalen Tensor bezüglich einer ONB als Komponenten-Matrix dar, so handelt es sich um eine orthogonale Matrix

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{bmatrix}.$$

Diese haben die Eigenschaft, dass sowohl ihre Spaltenvektoren wie auch ihre Zeilenvektoren Orthonormalsysteme bilden.

Orthogonale Tensoren beschreiben im Vektorraum Drehungen und Spiegelungen. Ist beispielsweise $\{\mathbf{e}_j\}$ eine ONB, so auch ihr Bild unter einem orthogonalen Tensor: $\{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i\}$. Eventuell verwandelt aber \mathbf{Q} eine rechtsorientierte Basis in eine linksorientierte.

Beispiele für orthogonale Tensoren:

- $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$
- $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \pm \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1$
- $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \pm \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2$

für jede ONB $\{\mathbf{e}_j\}$.

Ist \mathbf{v} ein Vektor und \mathbf{Q} ein orthogonaler Tensor, so ist $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$ der gedrehte und eventuell gespiegelte Vektor. Bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_j\}$ gilt dann

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot v^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i,$$

d.h. der gedrehte Vektor hat bezüglich der ONB $\{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i\}$ dieselben Komponenten wie der ursprüngliche bezüglich der ONB $\{\mathbf{e}_j\}$.

Analoges kann man mit einem Tensor \mathbf{T} machen. Dreht man die Tensorbasis $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ in $\{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j)\} = \{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Q}^T)\}$, so erhält man den gedrehten Tensor

$$(2.1.75) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Q}^T = T_{ij} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j),$$

ebenfalls mit denselben Komponenten bezüglich der ONB $\{(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j)\}$ wie der ursprüngliche bezüglich der ONB $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$.

Wählt man zur Darstellung von \mathbf{Q} eine spezielle ONB, deren \mathbf{e}_1 -Richtung mit der Drehachse von \mathbf{Q} übereinstimmt, so ist die Komponentenmatrix von \mathbf{Q}

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & +\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

und φ der Drehwinkel. Bei $+1$ handelt es sich um eine reine Drehung und der Tensor wird als **Versor**²⁵ oder als **eigentlich-orthogonal** bezeichnet, bei -1 zusätzlich um eine Spiegelung an der \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 -Ebene. Man sieht, dass auch in dieser Darstellung sowohl die Spalten als auch die Zeilen dieser Matrix als Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

Es gilt dann für die Drehung die folgende Darstellung

$$(2.1.76) \quad \begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \cos \varphi + (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) \sin \varphi \\ &= \cos \varphi \mathbf{I} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{I} \times \mathbf{e}_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Für *kleine Drehungen* kann man in φ linearisieren

$$\begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi \\ \cos \varphi &\approx 1 \end{aligned}$$

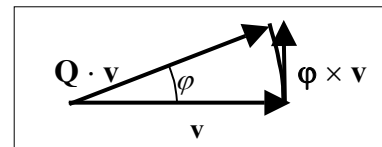
und erhält damit die einfache Darstellung

$$(2.1.77) \quad \mathbf{Q} \approx \mathbf{I} + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{I}$$

mit dem antimetrischen Tensor $\mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi}$, dessen axialer Vektor $\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}_1$ ist. Damit gilt

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} \approx \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}.$$

Dieser linearisierte Tensor ist allerdings nicht mehr orthogonal.



2.1.9 Transformationsregeln für Basiswechsel

Für Tensoren gilt (wie schon für Vektoren), dass sie unabhängig von einer Basis eingeführt werden. Alle Rechenoperationen und Eigenschaften von Tensoren und Vektoren lassen sich unabhängig von Basen und Komponenten notieren (**direkte** oder **symbolische Schreibweise**).

Andererseits haben wir gesehen, dass sie sich nach Wahl einer Basis auf entsprechende Eigenschaften und Regeln von (Komponenten-) Matrizen überführen lassen. Die Komponentendarstellung (**Indexschreibweise**) ist also in dem Sinne allgemein, als die Wahl einer Basis immer möglich ist, aber auch speziell, weil man eine andere Basis genauso gut hätte wählen können.

²⁵ von lat. *vertere* = drehen

Es stellt sich deshalb die Frage, wie sich die Komponenten eines beliebigen Vektors \mathbf{v} oder Tensors \mathbf{T} bei Basiswechsel transformieren. Dabei schränken wir uns (wie bisher) auf ONB ein. Seien also $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\underline{\mathbf{e}}_j\}$ solche ONB, so ist

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = \underline{v}_j \underline{\mathbf{e}}_j$$

$$\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \underline{T}_{lm} \underline{\mathbf{e}}_l \otimes \underline{\mathbf{e}}_m .$$

Dabei kann man immer die eine ONB aus der anderen ONB durch Drehungen und ggf. Spiegelungen erzeugen. Dies wird beschrieben durch einen orthogonalen Tensor \mathbf{Q} . Bildet man beispielsweise

$$\mathbf{Q} = \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \mathbf{e}_i ,$$

so leistet dieser Tensor

$$(2.1.78) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k = \underline{\mathbf{e}}_k$$

und umgekehrt

$$\mathbf{Q}^T \cdot \underline{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k$$

die Rücktransformation. Diese Darstellung von \mathbf{Q} ist allerdings trivial und wenig hilfreich für unseren Zweck, die Regeln für die Komponenten-Transformationen abzuleiten. Wir wählen dazu vielmehr die Darstellung

$$\mathbf{Q} = Q_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s$$

mit

$$Q_{rs} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_r \cdot (\underline{\mathbf{e}}_j \otimes \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_s$$

$$= (\mathbf{e}_r \cdot \underline{\mathbf{e}}_j) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_s) = \mathbf{e}_r \cdot \underline{\mathbf{e}}_s = \cos \angle(\mathbf{e}_r, \underline{\mathbf{e}}_s) .$$

Die Komponente Q_{rs} entspricht also dem Richtungskosinus zwischen den Basisvektoren \mathbf{e}_r und $\underline{\mathbf{e}}_s$. Mit dieser Darstellung von \mathbf{Q} erhalten wir

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r = \underline{v}_j \underline{\mathbf{e}}_j = \underline{v}_j \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i$$

$$= \underline{v}_j (Q_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{e}_i = \underline{v}_j Q_{rs} \mathbf{e}_r \delta_{si}$$

$$= \underline{v}_j Q_{ri} \mathbf{e}_r$$

und durch Komponentenvergleich

$$(2.1.79) \quad v_r = Q_{ri} \underline{v}_i .$$

Umgekehrt würde man erhalten

$$\underline{v}_i = v_r Q_{ri} .$$

Analog erhält man für Tensorkomponenten aus

$$\mathbf{T} = T_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \underline{T}_{lm} \underline{\mathbf{e}}_l \otimes \underline{\mathbf{e}}_m$$

$$= \underline{T}_{lm} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_l) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_m)$$

$$= Q_{il} Q_{km} \underline{T}_{lm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

schließlich

$$(2.1.80) \quad T_{ik} = Q_{il} \underline{T}_{lm} Q_{km} \quad \text{und} \quad \underline{T}_{lm} = Q_{il} T_{ik} Q_{km} .$$

2.1.10 Eigenwertprobleme

In der Mechanik stellt sich oft das folgende Problem: Gibt es für einen gegebenen Tensor \mathbf{T} Vektoren \mathbf{a} , die \mathbf{T} in die Richtung von sich selbst abbildet

$$(2.1.81) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} .$$

Ein solcher Vektor heißt **Eigenvektor** von \mathbf{T} und λ der zugehörige **Eigenwert** von \mathbf{T} .

Zunächst stellt man fest, dass diese Gleichung für den Nullvektor für ein beliebiges λ trivialerweise erfüllt ist. Wir wollen deshalb $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ voraussetzen. Nimmt man nun das α -fache eines Eigenvektors \mathbf{a} , so ist

$$\mathbf{T} \cdot (\alpha \mathbf{a}) = \alpha (\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}) = \alpha \lambda \mathbf{a} = \lambda (\alpha \mathbf{a}) .$$

Jedes skalare Vielfache von einem Eigenvektor ist also wieder ein Eigenvektor zu demselben Eigenwert. Wir können also die Eigenvektoren normieren

$$(2.1.82) \quad |\mathbf{a}| = 1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_i a_i ,$$

wobei aber immer noch der Richtungssinn von \mathbf{a} willkürlich ist. Es wäre also besser von *Eigenrichtungen* als von *Eigenvektoren* zu sprechen.

Wir können obige Eigenwertgleichung auch umformen zu

$$(2.1.83) \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

oder bezüglich einer beliebigen ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ als Matrizenform

$$(2.1.84) \quad (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) a_k = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 .$$

Ausgeschrieben ist das

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) a_1 + T_{12} a_2 + T_{13} a_3 &= 0 \\ T_{21} a_1 + (T_{22} - \lambda) a_2 + T_{23} a_3 &= 0 \\ T_{31} a_1 + T_{32} a_2 + (T_{33} - \lambda) a_3 &= 0 . \end{aligned}$$

Dies sind die bekannten Eigenwertgleichungen der Matrizenrechnung. Es handelt sich um drei lineare homogene Gleichungen in den Komponenten a_i des Eigenvektors \mathbf{a} , die nur dann von 0 verschiedene Lösungen besitzen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix Null ist

$$(2.1.85) \quad \det [T_{ik} - \lambda \delta_{ik}] = \det \begin{bmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 .$$

Dies führt auf das kubische Polynom in λ

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) [(T_{22} - \lambda)(T_{33} - \lambda) - T_{32} T_{23}] \\ - T_{12} [T_{21}(T_{33} - \lambda) - T_{31} T_{23}] \\ + T_{13} [T_{21} T_{32} - T_{31}(T_{22} - \lambda)] &= 0 , \end{aligned}$$

das **charakteristische Polynom** der Matrix $[T_{in}]$. Dieses kann immer in folgender Form geschrieben werden

$$(2.1.86) \quad \lambda^3 - I_{\mathbf{T}} \lambda^2 + II_{\mathbf{T}} \lambda - III_{\mathbf{T}} = 0$$

mit skalaren Koeffizienten $I_{\mathbf{T}}$, $II_{\mathbf{T}}$, $III_{\mathbf{T}}$, die **Hauptinvarianten** von \mathbf{T} heißen. Da die Eigenwertgleichung (2.1.83) basisunabhängig ist, gilt dies auch für das charakteristische Polynom und damit auch für die Hauptinvarianten. Die erste ist die **Spur** des Tensors

$$(2.1.87) \quad I_{\mathbf{T}} = sp \mathbf{T} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}.$$

Die zweite Hauptinvariante ist

$$(2.1.88) \quad \begin{aligned} II_{\mathbf{T}} &= \det \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{bmatrix} \\ &= T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} + T_{22} T_{33} - T_{23} T_{32} + T_{11} T_{33} - T_{13} T_{31} \\ &= \frac{1}{2} (T_{ii} T_{kk} - T_{ik} T_{ki}) \\ &= \frac{1}{2} [sp^2(\mathbf{T}) - sp(\mathbf{T}^2)]. \end{aligned}$$

Die dritte ist die **Determinante** des Tensors

$$(2.1.89) \quad \begin{aligned} III_{\mathbf{T}} &= \det \mathbf{T} = \det \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \\ &= \epsilon_{ikm} T_{1i} T_{2k} T_{3m} \\ &= T_{11} T_{22} T_{33} - T_{11} T_{23} T_{32} - T_{12} T_{21} T_{33} \\ &\quad + T_{12} T_{23} T_{31} + T_{13} T_{21} T_{32} - T_{13} T_{22} T_{31} \\ &= \frac{1}{6} sp^3(\mathbf{T}) - \frac{1}{2} sp(\mathbf{T}) sp(\mathbf{T}^2) + \frac{1}{3} sp(\mathbf{T}^3). \end{aligned}$$

Alle diese Darstellungen (bis auf die jeweils letzte) gelten nur unter Bezugnahme auf eine ONB.

Dreht man den Tensor, so bleibt das charakteristische Polynom gleich

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{I}) = \det[\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Q}^T] = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

und damit sowohl die Invarianten als auch die Eigenwerte unverändert, und lediglich die Eigenvektoren drehen sich.

Es gelten folgende Regeln für alle Skalare α , Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} und orthogonale Tensoren \mathbf{Q} :

$$(2.1.90) \quad sp(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}) = sp(\mathbf{A}) + \alpha sp(\mathbf{B}) \quad \text{Linearität}$$

$$(2.1.91) \quad sp(\mathbf{A}) = sp(\mathbf{A}^T)$$

$$(2.1.92) \quad sp(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

$$(2.1.93) \quad sp(\alpha \mathbf{I}) = 3\alpha \quad \text{im Dreidimensionalen}$$

$$(2.1.94) \quad sp(\mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T) = sp(\mathbf{A})$$

$$(2.1.95) \quad \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$$

$$(2.1.96) \quad \det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det(\mathbf{A}) \quad \text{im Dreidimensionalen}$$

$$(2.1.97) \quad \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad \text{Determinantensatz}$$

$$(2.1.98) \quad \det^{-1}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1}) \quad \text{für invertierbare Tensoren}$$

$$(2.1.99) \quad \det(\mathbf{I}) = 1$$

$$(2.1.100) \quad \det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}^{-1}) = \pm 1 \quad \text{für orthogonale Tensoren}$$

$$(2.1.101) \quad \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = \det(\mathbf{A}) \quad \text{für orthogonale Tensoren } \mathbf{Q} \text{ und beliebige } \mathbf{A}$$

Ein spurfreier Tensor heißt **Deviator**. Man kann jeden Tensor eindeutig in seinen Deviatoranteil und seinen Kugelanteil additiv zerlegen. Der Deviatoranteil ist

$$(2.1.102) \quad \mathbf{T}' := \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{T}) \mathbf{I}.$$

Nach dem VIETA²⁶schen Wurzelsatz kann jedes Polynom durch seine Wurzeln (Nullstellen) dargestellt werden gemäß

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda - \lambda_3) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \lambda - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit dem charakteristischen Polynom folgt dann für die Eigenwerte λ_i die einfachere Darstellung der Hauptinvarianten

$$\begin{aligned} (2.1.103) \quad I_{\mathbf{T}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ II_{\mathbf{T}} &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\ III_{\mathbf{T}} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

Satz: Ein Tensor besitzt

- entweder drei reelle Eigenwerte
- oder einen reellen und zwei konjugiert-komplexe.

Beweis: Aus dem Verhalten des kubischen Polynoms für sehr kleine und sehr große Werte von λ und seiner Stetigkeit schließen wir auf die Existenz mindestens einer reellen Nullstelle λ_1 . Sei \mathbf{e}_1 der zugehörige normierte Eigenvektor. Dann existiert eine ONB $\{\mathbf{e}_i\}$, bezüglich derer der Tensor die folgende Komponentendarstellung hat

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Die Spur des Tensors ist reell:

$$I_{\mathbf{T}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + T_{22} + T_{33}.$$

Damit ist auch die Summe der beiden anderen Eigenwerte

$$\lambda_2 + \lambda_3 = T_{22} + T_{33}$$

ebenfalls reell. Wir machen für sie den komplexen Ansatz mit der imaginären Einheit i

$$\lambda_2 = \alpha_2 + i \beta_2$$

$$\lambda_3 = \alpha_3 + i \beta_3,$$

deren Summe nur dann reell ist, wenn $\beta_2 = -\beta_3$. Auch die Determinante des Tensors ist reell

$$III_{\mathbf{T}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 (T_{22} T_{33} - T_{32} T_{23}) \Rightarrow \lambda_2 \lambda_3 = T_{22} T_{33} - T_{32} T_{23}.$$

²⁶ Francois Viète (1540-1603)

Damit ist auch das Produkt der beiden anderen Eigenwerte

$$\lambda_2 \lambda_3 = (\alpha_2 + i \beta_2) (\alpha_3 - i \beta_2) = \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2^2 + i (\alpha_3 - \alpha_2) \beta_2$$

reell und somit $(\alpha_3 - \alpha_2) \beta_2 = 0$. Ist $\beta_2 = 0$, so sind alle Eigenwerte reell. Ist dagegen $\alpha_3 - \alpha_2 = 0$, so sind die letzten beiden Eigenwerte konjugiert komplex; *q.e.d.*

Sei \mathbf{T} Tensor mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass zu zwei verschiedenen Eigenvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 gleiche Eigenwerte λ gehören:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_1 &= \lambda \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_2 &= \lambda \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_2 &= \lambda \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2 \\ &= \mathbf{T} \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \lambda (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2). \end{aligned}$$

Die Summe zweier Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert bildet auch wieder einen (nicht-normierten) Eigenvektor zum gleichen Eigenwert. Dasselbe gilt für alle Linearkombinationen der beiden Eigenvektoren. Der durch Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert aufgespannte Unterraum ist ein **Eigenraum**.

Beispiele

- Für den *Nulltensor* $\mathbf{0}$ ist wegen

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} = 0 \mathbf{a}$$

jeder Vektor Eigenvektor zum (dreifachen) Eigenwert 0 .

- Für den *Einstensor* \mathbf{I} ist wegen

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} = 1 \mathbf{a}$$

jeder Vektor Eigenvektor zum (dreifachen) Eigenwert 1 .

- Für einen *Kugeltensor* $\alpha \mathbf{I}$ ist jeder Vektor Eigenvektor zum (dreifachen) Eigenwert α .

Da für einen Kugeltensor alle Richtungen Eigenrichtungen sind, gilt der folgende

Satz: Ist \mathbf{T} ein Tensor und $\alpha \mathbf{I}$ ein Kugeltensor, so haben \mathbf{T} und $\mathbf{T} + \alpha \mathbf{I}$ dieselben Eigenrichtungen.

Damit hängen die Eigenvektoren eines Tensors nur von seinem Deviatoranteil ab.

- Für einen *orthogonalen Tensor* (2.1.76) ist der Drehachsenvektor \mathbf{e}_l Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 , wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob es sich um eine reine Drehung handelt ($+1$), oder zusätzlich um eine Spiegelung (-1). Die beiden anderen Eigenwerte sind konjugiert-komplex.
- Für *Dyaden* $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ist \mathbf{a} Eigenvektor zum Eigenwert $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ und jeder zu \mathbf{b} senkrechte Vektor zum doppelten Eigenwert 0 . Steht \mathbf{a} senkrecht auf \mathbf{b} , so gibt es einen dreifachen Eigenwert 0 .

2.1.11 Spektralformen von symmetrischen Tensoren

In der Mechanik stellt sich das Eigenwertproblem hauptsächlich für symmetrische Tensoren. Für sie gilt der wichtige

Satz: *Symmetrische Tensoren besitzen drei (nicht notwendig verschiedene) reelle Eigenwerte.*

Beweis: Man erhält mit den Beziehungen des vorigen Beweises die Gleichung

$$\begin{aligned}(\lambda_2 - \lambda_3)^2 &= \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2 \lambda_2 \lambda_3 \\ &= (\lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4 \lambda_2 \lambda_3 \\ &= (T_{22} + T_{33})^2 - 4 (T_{22} T_{33} - T_{23} T_{32}) \\ &= (T_{22} - T_{33})^2 + 4 T_{23}^2.\end{aligned}$$

Beide Terme auf der rechten Seite sind nicht-negativ und damit auch

$$0 \leq (\lambda_2 - \lambda_3)^2 = (i \beta_2 + i \beta_2)^2 = 4 i^2 \beta_2^2 = -4 \beta_2^2,$$

was nur möglich ist, wenn $\beta_2 = 0$ ist, also alle Eigenwerte reell sind; *q.e.d.*

Betrachten wir nun den Fall zweier Eigenvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 zu zwei *verschiedenen* Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann folgt aus

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$$

und wegen der vorausgesetzten Symmetrie von \mathbf{T} für die Differenz

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}_1 = 0 = (\lambda_2 - \lambda_1) (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)$$

d. h. \mathbf{a}_1 steht senkrecht auf \mathbf{a}_2 . Wir haben damit Folgendes gezeigt:

Satz: *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten symmetrischer Tensoren sind orthogonal zueinander.*

Wir betrachten nun drei unterschiedliche Fälle.

1. **Fall:** drei unterschiedliche Eigenwerte. Dann bilden die Eigenvektoren eine ONB, die **Eigenbasis** des Tensors, die bis auf Vorzeichen und Nummerierung eindeutig ist. Die Eigenräume sind drei eindimensionale wechselseitig orthogonale Vektorräume. Bezüglich der Eigenbasis hat die Komponentenmatrix **Diagonal-** oder **Spektralform**

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die drei Eigenwerte sind.

2. **Fall:** zwei der drei Eigenwerte sind gleich. Der zu den gleichen Eigenwerten gehörige Eigenraum ist zweidimensional. Es handelt sich um die Normalenebene zur Eigenrichtung des dritten Eigenwertes. Eine Spektralform bez. einer ONB ist auch möglich, die bei entsprechender Nummerierung

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ist. Dabei sind die (zueinander senkrechten) Richtungen der ersten beiden Basisvektoren in der Normalenebene beliebig.

3. **Fall:** alle drei Eigenwerte sind gleich. Damit sind alle Richtungen Eigenrichtungen, und der Eigenraum fällt mit dem Vektorraum zusammen. Die Komponentenmatrix hat für jede beliebige ONB Spektralform

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Der Tensor ist der Kugeltensor $\lambda \mathbf{I}$.

In jedem Fall gelten die folgenden Sätze:

Satz: Ein Tensor ist genau dann symmetrisch, wenn eine (Hauptachsen-) ONB $\{\mathbf{e}^H_i\}$ existiert, bezüglich derer der Tensor eine **Spektralform** besitzt

$$(2.1.104) \quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i$$

mit λ_i : reelle Eigenwerte,
 \mathbf{e}^H_i : normierte Eigenvektoren.

Satz: Ein symmetrischer Tensor ist genau dann positiv-definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Er ist genau dann positiv-semidefinit, wenn alle Eigenwerte nicht-negativ sind.

Man erhält folgende Klassifizierung von symmetrischen Tensoren, wenn man die Eigenwerte der Größe nach ordnet, also $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Dabei geben die zweite bis fünfte Spalte die Schnittfiguren mit den benannten Ebenen an. || bedeutet parallel.

Vorzeichen d. Eigenwerte	quadratische Form	$\mathbf{e}^H_1 - \mathbf{e}^H_2$ -Ebene	$\mathbf{e}^H_2 - \mathbf{e}^H_3$ -Ebene	$\mathbf{e}^H_1 - \mathbf{e}^H_3$ -Ebene	Tensor-Fläche
+++	positiv-def.	Ellipse	Ellipse	Ellipse	Ellipsoid
++0	pos.-semidef.	Ellipse	2 Geraden	2 Geraden	ellipt. Zylinder
+00	pos.-semidef.	2 Geraden	-	2 Geraden	2 Ebenen
+-	indef.	Ellipse	Hyperbel	Hyperbel	einschal. Hyperboloid
---	indef.	Hyperbel	-	Hyperbel	zweisch. Hyperboloid

Beispiel 2. Produkte zwischen Vektoren

Es seien die Vektoren $\mathbf{v}_1 = 0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{v}_2 = -0,8 \mathbf{e}_1 + 0,6 \mathbf{e}_3$ bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ gegeben. Gesucht ist \mathbf{v}_3 derart, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ eine ONB bilden. Anschließend ist der Tensor $\mathbf{A} := \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ darzustellen und das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2$ auszuwerten.

Lösung:

Eine ONB ist durch $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$ definiert. Zunächst überprüfen wir ob \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 dies erfüllen:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -0,48 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0,36 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 - 0,64 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + 0,48 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0,36 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0,48 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + 0,48 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + 0,64 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0,64 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - 0,48 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 - 0,48 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 + 0,36 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$$

Dabei liefern die gemischten Produkte $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1$ wegen der Orthogonalität der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ keine Beiträge, während $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ und $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ gelten. Es bleiben zur Bestimmung von \mathbf{v}_3 die Gleichungen $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$, $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = 1$ zu erfüllen. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{v}_3 = v_1^3 \mathbf{e}_1 + v_2^3 \mathbf{e}_2 + v_3^3 \mathbf{e}_3$$

erhält man ein Gleichungssystem für die Komponenten v_1^3, v_2^3 und v_3^3

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0,6 v_1^3 + 0,8 v_3^3 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -0,8 v_1^3 + 0,6 v_3^3 = 0$$

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 = (v_1^3)^2 + (v_2^3)^2 + (v_3^3)^2 = 1.$$

Mit den ersten beiden Gleichungen stellt man schnell fest, dass $v_1^3 = v_3^3 = 0$ sein muss, was für v_2^3 nur

$$(B2.1) \quad v_2^3 = \pm 1$$

übrig lässt. Wir möchten nun \mathbf{v}_3 so bestimmen, dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ein Rechtssystem bilden. Es muss also $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ gelten. Man hätte diese Gleichung auch von vornherein zur expliziten Bestimmung von \mathbf{v}_3 verwenden können gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3) \times (-0,8 \mathbf{e}_1 + 0,6 \mathbf{e}_3) \\ &= -0,48 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + 0,36 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 - 0,64 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + 0,48 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\ &= -0,48 \varepsilon_{11k} \mathbf{e}_k + 0,36 \varepsilon_{13k} \mathbf{e}_k - 0,64 \varepsilon_{31k} \mathbf{e}_k + 0,48 \varepsilon_{33k} \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung liefert nur für $k \equiv 2$ von Null verschiedenes. Mit $\varepsilon_{132} = -1$ und $\varepsilon_{312} = 1$ ($\varepsilon_{11k} = 0$ und $\varepsilon_{33k} = 0$ für alle k) erhält man $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_2$. Wir müssten uns also nach Gl. B2.1 für die -1 für ein Rechtssystem oder für $+1$ für ein Linkssystem entscheiden. Wir fahren mit $\mathbf{v}_3 \equiv -\mathbf{e}_2$ fort. **A** ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1 \\ &= -(0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes (0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3) \\ &= -0,6 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 0,8 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - 0,6 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 0,8 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &= A_{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{32} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + A_{21} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + A_{23} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Man kann die Komponenten des Tensors \mathbf{A} bezüglich dieser Basis in einer Komponentenmatrix anordnen

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -0,6 & 0 \\ -0,6 & 0 & -0,8 \\ 0 & -0,8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen wir nun

$$\mathbf{b} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2$$

$$(B2.2) \quad = (-0,6 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 0,8 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - 0,6 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 0,8 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) \cdot (-0,8 \mathbf{e}_1 + 0,6 \mathbf{e}_3).$$

Da wir \mathbf{v}_2 von rechts an \mathbf{A} heranmultiplizieren, muss der rechte Vektor der Basisdyade mit den Basisvektoren von \mathbf{v}_2 skalar multipliziert werden. Es bleibt nur der in den Basisdyaden links stehende Basisvektor. Da $\{\mathbf{e}_i\}$ eine ONB ist, bleiben nur die zwei Summanden übrig

$$\mathbf{b} = (-0,6)(-0,8) \mathbf{e}_2 + (-0,8)(0,6) \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}.$$

Bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_i\}$ hat \mathbf{A} die Komponentenmatrix

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Berechnung von \mathbf{b} ist bezüglich der Basisvektoren \mathbf{v}_i besonders einfach (Vergleich mit B2.2)

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

wegen der Orthogonalität der Basis $\{\mathbf{v}_i\}$. Da sowohl $\{\mathbf{e}_i\}$ als auch $\{\mathbf{v}_i\}$ ONBs sind, müssen die Komponentenmatrizen bezüglich beider Basen die gleichen Eigenwerte und Hauptinvarianten haben ($I_{\mathbf{A}} = 0$, $II_{\mathbf{A}} = -1$, $III_{\mathbf{A}} = 0$, (2.1.87) bis (2.1.89)).

Beispiel 3. Symbolische und Indexnotation

Formulieren Sie das Produkt $\mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v}$ von einem Vektor \mathbf{v} und einem Tensor \mathbf{T} in Indeschreibweise bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$. Fassen Sie das Ergebnis weitestmöglich zusammen und übertragen Sie es, wenn möglich, in die symbolische Schreibweise.

Lösung:

Die Übertragung in Indeschreibweise liefert

$$\mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \times T_{jk} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \times v_l \mathbf{e}_l = v_i T_{jk} v_l (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l).$$

Da das Kreuzprodukt einen Vektor erzeugt, erhalten wir als Ergebnis Dyaden, also einen Tensor zweiter Stufe. Wir benutzen die Permutationssymbole von (2.1.2) um die Kreuzprodukte zusammenzufassen,

$$(B3.1) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{kln} v_i T_{jk} v_l \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n.$$

Um nun z. B. die zur Basisdyade $\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_2$ gehörende Komponente zu ermitteln, muss man $m \equiv 1$ und $n \equiv 2$ einsetzen und die Summe $\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{kl2} v_i T_{jk} v_l$ bestimmen. Dabei hat man über 4 stumme Indizes zu summieren, erhält also 3^4 Summanden. Offensichtlich verschwinden sehr viele dieser Produkte, da von den 27 möglichen Indexkombinationen in ε_{ijm} nur 6 ungleich 0 sind. Man kann also noch zusammenfassen. Die Regel

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \det \begin{bmatrix} \delta_{ik} & \delta_{jk} & \delta_{mk} \\ \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{ml} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{mn} \end{bmatrix}$$

hilft hier weiter. Man füllt eine Matrix mit den Elementen δ_{ij} , deren Indizes zeilen- und spaltenweise mit den drei Indizes der Permutationssymbole übereinstimmen. Die Determinante dieser Matrix entspricht dem Produkt der beiden Permutationssymbole. Berechnung der Determinante mit der Regel von SARRUS ergibt

$$\varepsilon_{ijm} \varepsilon_{klm} = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{jk} \delta_{ml} \delta_{in} + \delta_{mk} \delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{mk} \delta_{jl} \delta_{in} - \delta_{ik} \delta_{ml} \delta_{jn} - \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn},$$

was eingesetzt in (B3.1) auf

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v} &= (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{jk} \delta_{ml} \delta_{in} + \delta_{mk} \delta_{il} \delta_{jn} \\ &- \delta_{mk} \delta_{jl} \delta_{in} - \delta_{ik} \delta_{ml} \delta_{jn} - \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn}) v_i T_{jk} v_l \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \end{aligned}$$

führt. Jetzt kann mit der Rechenregel (2.1.1) für KRONECKER-Symbole bei stummen Indizes zusammengefasst werden. Dabei kann ein stummer Index in den jeweils anderen am KRONECKER-Symbol stehenden umbenannt und das KRONECKER-Symbol weggelassen werden. Man findet

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v} &= v_j T_{ji} v_i \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m + v_i T_{ij} v_l \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i + v_i T_{jk} v_i \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \\ &- v_i T_{jk} v_j \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i - v_i T_{ji} v_l \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_j - v_i T_{jj} v_i \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m. \end{aligned}$$

Wir haben nun nur noch zwei stumme Indizes pro Basisdyade. Man kann dieses Ergebnis wieder in die symbolische Schreibweise übersetzen

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{T} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + sp(\mathbf{T}) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \\ &+ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{T}^T - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - sp(\mathbf{T}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} v_j T_{ji} v_i &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{I} &= \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_m & T_{jj} &= sp(\mathbf{T}) \\ v_i v_l \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i &= \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} & v_i v_i &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} & T_{jk} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j &= \mathbf{T}^T \end{aligned}$$

sind.

Beispiel 4. Orthogonale Tensoren

Gegeben seien die ONBs $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{v}_i\}$ aus Beispiel B2. Gesucht ist der Tensor \mathbf{Q} , der die Transformation von $\{\mathbf{e}_i\}$ in $\{\mathbf{v}_i\}$ beschreibt. Berechnen Sie die Komponenten

von \mathbf{Q} bezüglich der Basen $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$, $\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ und $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$. Machen Sie sich den Unterschied zwischen Basiswechsel und der Vektortransformation klar.

Lösung:

Man sieht sofort, dass

$$(B4.1) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{e}_i = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

die gewünschte Transformation leistet. Die Darstellung bezüglich $\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ ist

$$[Q^{ve}]_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die Darstellung bezüglich $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ setzen wir die Vektoren \mathbf{v}_i aus B2 ein

$$\mathbf{Q} = (0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_1 + (-0,8 \mathbf{e}_1 + 0,6 \mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3,$$

was auf die Komponenten

$$[Q^{ee}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \end{bmatrix}$$

führt. Die Komponenten bezüglich $\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j\}$ erhält man durch skalare Multiplikation des Tensors mit den Vektoren \mathbf{v}_i von links und \mathbf{v}_j von rechts,

$$\begin{aligned} Q^{vv}_{ij} &= \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}_j \\ &= (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_i) (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}_j) = \delta_{ik} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_j. \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{v}_1 = 0,6 \mathbf{e}_1 + 0,8 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = -0,8 \mathbf{e}_1 + 0,6 \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{v}_3 = -\mathbf{e}_2$ erhält man

$$[Q^{vv}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \end{bmatrix} = [Q^{ee}]_{ij}.$$

Es gilt also $Q^{ee}_{ij} = Q^{vv}_{ij}$. Auf die gleiche Weise findet man

$$Q^{ev}_{ij} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{v}_j = Q^{ee}_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{v}_j = Q^{ee}_{kl} \delta_{ik} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{v}_j = Q^{ee}_{il} \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{v}_j.$$

Mit dem vorherigen Ergebnis $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_j = Q^{ee}_{ij}$ erhält man

$$[Q^{ev}]_{ij} = [Q^{ee}_{il}] [Q^{ee}_{lj}] = \begin{bmatrix} 0,36 & -0,48 & 0,8 \\ -0,8 & -0,6 & 0 \\ 0,48 & -0,64 & -0,6 \end{bmatrix}.$$

Da \mathbf{Q} positiv-orientierte Basen ineinander abbildet, ist es orientierungstreu und damit eigentlich-orthogonal oder ein Versor. Seine Determinante ist $+1$, was man schnell nachrechnen kann. Es gilt

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_i = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}_i.$$

Man sollte sich den Unterschied zum Basiswechsel klarmachen. Bei einem Basiswechsel ändern sich sowohl die Komponenten als auch die Basisvektoren in der Weise, dass der Vektor der gleiche bleibt, man also lediglich seine Darstellung ändert:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= b_i^e \mathbf{e}_i = b_i^e \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{v}_i = b_i^e [Q^{vv}_{jk}]^T \mathbf{v}_j \otimes \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_i \\ &= b_i^e Q^{vv}_{kj} \delta_{ik} \mathbf{v}_j = b_i^e Q^{vv}_{ij} \mathbf{v}_j = b_i^v \mathbf{v}_j. \end{aligned}$$

Bei der Drehung eines Vektors ändern sich bezüglich der gleichen Basis die Komponenten

$$\mathbf{b}^* = b_i^{e^*} \mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = Q^{ee}_{ij} b_k^e \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = Q^{ee}_{ij} b_k^e \delta_{jk} \mathbf{e}_i = Q^{ee}_{ij} b_j^e \mathbf{e}_i.$$

Man hat also beim Basiswechsel wegen $Q^{ee}_{ij} = Q^{vv}_{ij}$

$$\mathbf{b} = b_i^e \mathbf{e}_i = b_i^e Q^{ee}_{ij} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j),$$

während bei der Drehung

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = b_i^{e^*} \mathbf{e}_i = Q_{ij}^{ee} b_j^e \mathbf{e}_i$$

gilt.

Beispiel 5. Eigenwerte und Invarianten

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren und die Hauptinvarianten des Tensors, der bez. einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ gegeben ist als

$$\mathbf{A} = 10 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 5 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + 20 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Stellen Sie \mathbf{A} bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{v}^i\}$ dar. Geben Sie den Tensor \mathbf{Q} für den Basiswechsel von $\{\mathbf{e}_i\}$ zu $\{\mathbf{v}^i\}$ an. Bestimmen Sie die Inverse von \mathbf{A} bezüglich der Basen $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{v}^i\}$.

Lösung:

Die Komponentenmatrix von \mathbf{A} bezüglich $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ ist

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Mit den Formeln (2.1.87) bis (2.1.89) lassen sich die Hauptinvarianten angeben

$$I_{\mathbf{A}} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 40$$

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{A}} &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} + A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} + A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} \\ &= 100 - 25 + 200 + 200 = 475 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} III_{\mathbf{A}} &= A_{11} A_{22} A_{33} - A_{11} A_{23} A_{32} - A_{12} A_{21} A_{33} + \\ &\quad A_{12} A_{23} A_{31} + A_{13} A_{21} A_{32} - A_{13} A_{22} A_{31} \\ &= 2000 - 500 = 1500. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das charakteristische Polynom (2.1.86)

$$(B5.1) \quad \lambda^3 - 40 \lambda^2 + 475 \lambda - 1500 = 0,$$

woraus die Eigenwerte bestimmt werden. Wegen $A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0$ sieht man, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 = 20 \mathbf{e}_3$ ist, man also einen Eigenwert $\lambda = 20$ zum Eigenvektor \mathbf{e}_3 hat. Polynomdivision von (B5.1) durch $\lambda - 20$ ergibt

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 - 40\lambda^2 + 475\lambda - 1500) / (\lambda - 20) = \lambda^2 - 20\lambda + 75 \\ \underline{\lambda^3 - 20\lambda^2} \\ -20\lambda^2 + 475\lambda \\ \underline{-20\lambda^2 + 400\lambda} \\ 75\lambda - 1500 \\ \underline{75\lambda - 1500} \\ 0 \end{array}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = 10 \pm 5.$$

Wir haben also die folgenden Eigenwerte: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 15$, $\lambda_3 = 20$, wobei die Nummerierung willkürlich ist. Den dritten Eigenvektor kennen wir auch schon: $\mathbf{v}^3 = \mathbf{e}_3$. Wir ermitteln \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 mit Hilfe von (2.1.83), was auf die Komponentenform $(A_{ij} - \lambda \delta_{ij}) v_j$ führt. Für λ_1 erhält man

$$\begin{bmatrix} 10-5 & 5 & 0 \\ 5 & 10-5 & 0 \\ 0 & 0 & 20-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man sieht schnell, dass $v_3^1 = 0$ ist, und aus den ersten beiden Komponentengleichungen $v_1^1 = -v_2^1$ folgt. Die Normierung $|\mathbf{v}^1|$ legt v_1^1 und v_2^1 bis auf das Vorzeichen fest, so dass $|v_1^1| = |v_2^1| = 1/\sqrt{2}$. Für λ_2 erhält man auf die gleiche Weise $v_1^2 = v_2^2$, $|v_1^2| = |v_2^2| = 1/\sqrt{2}$, $v_3^2 = 0$. Die Spektraldarstellung von \mathbf{A} ist gemäß (2.1.104)

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^1 + \lambda_2 \mathbf{v}^2 \otimes \mathbf{v}^2 + \lambda_3 \mathbf{v}^3 \otimes \mathbf{v}^3.$$

Man sieht, dass der Richtungssinn der \mathbf{v}^i keine Rolle spielt, da \mathbf{v}^i in allen Basisdyaden zweimal vorkommt. \mathbf{A} hat also bezüglich der Eigenbasis $\{\mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}^j\}$ die Komponenten

$$[A^{vv}]_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Der Basiswechsel von $\{\mathbf{e}_i\}$ zu $\{\mathbf{v}^i\}$ wird durch $\mathbf{Q} = \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{e}_i$ geleistet. Hierfür müssen wir die Richtungen von \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 festlegen:

$$\mathbf{v}^1 = 1/\sqrt{2} \mathbf{e}_1 - 1/\sqrt{2} \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{v}^2 = 1/\sqrt{2} \mathbf{e}_1 + 1/\sqrt{2} \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{v}^3 = \mathbf{e}_3.$$

Einsetzen liefert die Komponenten von \mathbf{Q} bezüglich $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$

$$[Q^{ee}_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Inverse von \mathbf{A} lässt sich am einfachsten in der Spektraldarstellung angeben

$$\mathbf{A}^{-1} = \lambda_1^{-1} \mathbf{v}^1 \otimes \mathbf{v}^1 + \lambda_2^{-1} \mathbf{v}^2 \otimes \mathbf{v}^2 + \lambda_3^{-1} \mathbf{v}^3 \otimes \mathbf{v}^3$$

oder in Matrizen-Darstellung

$$[A^{vv}_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/15 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}.$$

Die Darstellung bezüglich $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ gelingt am schnellsten durch einen Basiswechsel

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= [A^{vv}_{ij}]^{-1} \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}^j = [A^{vv}_{ij}]^{-1} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= [A^{vv}_{ij}]^{-1} Q^{ee}_{lk} Q^{ee}_{mn} (\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_j) \\ &= [A^{vv}_{ij}]^{-1} Q^{ee}_{li} Q^{ee}_{mj} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der Darstellung $\mathbf{A}^{-1} = [A^{ee}_{lm}]^{-1} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m$ zeigt, dass man die Komponenten $[A^{ee}_{lm}]^{-1}$ durch Matrizenmultiplikationen gemäß

$$[A^{ee}_{lm}]^{-1} = Q^{ee}_{li} [A^{vv}_{ij}]^{-1} Q^{ee}_{jm^T}$$

erhält als

$$[A^{ee}_{lm}]^{-1} = \begin{bmatrix} 4/30 & -2/30 & 0 \\ -2/30 & 4/30 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 6. Spektraldarstellung

Die berühmte FIBONACCI²⁷-Zahlenfolge ist durch

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 1$$

definiert. Man kann also matriziell

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

schreiben. Ermitteln Sie mit Hilfe der Spektraldarstellung eine explizite Formel für a_n .

²⁷ Fibonacci (Leonardo von Pisa) etwa 1170-1250

Lösung:

Mit den Startwerten kann

$$(B6.1) \quad \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & I \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}$$

geschrieben werden. Man erhält

$$a_n = [M^{n-2}]_{21} + [M^{n-2}]_{22}.$$

Man kann mit Hilfe der Spektraldarstellung allgemein die $n-2$ te Potenz der Koeffizientenmatrix M bestimmen. Die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-\sqrt{20}}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \end{bmatrix} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+\sqrt{20}}}, \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $[M_{ij}]^{n-2}$ erhält man aus der Spektraldarstellung, indem man den Exponenten auf die Eigenwerte anwendet mit dem FALKschen Schema

$$M_{ij}^{n-2} = \lambda_1^{n-2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} + \lambda_2^{n-2} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix}.$$

Die Rechnung ist etwas aufwendig. Man findet

$$a_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n) / \sqrt{5}.$$

2.1.12 Zeitabhängige Vektoren und Tensoren

und deren Ableitungen werden in der Dynamik benötigt. Sei also t ein Parameter, der beispielsweise, aber nicht notwendig die Zeit bezeichnet. Seien $\alpha(t)$ eine skalarwertige Funktion von t , $\mathbf{v}(t)$ eine vektorwertige und $\mathbf{T}(t)$ eine tensorwertige Funktion. Deren Ableitungen nach t sind definiert als

$$\begin{aligned} \alpha(t)^\bullet &= \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)] \\ \mathbf{v}(t)^\bullet &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)] \\ \mathbf{T}(t)^\bullet &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)], \end{aligned}$$

falls existent.

Es gelten folgende Regeln für alle Skalare α , Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und Tensoren \mathbf{T} und \mathbf{S} , die differenzierbar von der Zeit abhängen:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b})^\bullet &= \mathbf{a}^\bullet + \mathbf{b}^\bullet \\(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^\bullet &= \mathbf{a}^\bullet \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\bullet \\(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^\bullet &= \mathbf{a}^\bullet \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}^\bullet \\(\mathbf{T} + \mathbf{S})^\bullet &= \mathbf{T}^\bullet + \mathbf{S}^\bullet \\(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^\bullet &= \mathbf{T}^\bullet \cdot \mathbf{S} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^\bullet \\(\alpha \mathbf{T})^\bullet &= \alpha^\bullet \mathbf{T} + \alpha \mathbf{T}^\bullet \\(\mathbf{T} \cdot \mathbf{a})^\bullet &= \mathbf{T}^\bullet \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^\bullet \\(\mathbf{a} \cdot \mathbf{T})^\bullet &= \mathbf{a}^\bullet \cdot \mathbf{T} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^\bullet \\(\mathbf{T} \times \mathbf{a})^\bullet &= \mathbf{T}^\bullet \times \mathbf{a} + \mathbf{T} \times \mathbf{a}^\bullet \\(\mathbf{a} \times \mathbf{T})^\bullet &= \mathbf{a}^\bullet \times \mathbf{T} + \mathbf{a} \times \mathbf{T}^\bullet \\(\mathbf{T}^T)^\bullet &= (\mathbf{T}^\bullet)^T\end{aligned}$$

Stellt man einen zeitabhängigen Vektor bezüglich einer zeitunabhängigen ONB dar

$$\mathbf{v} = v^i(t) \mathbf{e}_i,$$

so folgt aus $\mathbf{e}_j^\bullet = \mathbf{0}$

$$\mathbf{v}^\bullet = v^{i\bullet} \mathbf{e}_i,$$

womit die Zeitableitung eines Vektors auf die seiner skalaren Komponenten zurückgeführt ist. Analog erhält man für einen Tensor

$$\mathbf{T} = T^{ij}(t) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

dann

$$\mathbf{T}^\bullet = T^{ij\bullet} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

womit auch die Zeitableitung eines Tensors auf die seiner skalaren Komponenten zurückgeführt ist.

Falls \mathbf{T} zu allen Zeiten invertierbar ist, gilt

$$(2.1.105) \quad (\mathbf{T}^{-1})^\bullet = -\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}^\bullet \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

wegen

$$(\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T})^\bullet = \mathbf{0} = (\mathbf{T}^{-1})^\bullet \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}^\bullet.$$

Betrachten wir einen zeitabhängigen orthogonalen Tensor $\mathbf{Q}(t)$. Aus $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ folgt

$$(2.1.106) \quad (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T)^\bullet = \mathbf{0} = \mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{T\bullet} = \mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T + (\mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T)^T.$$

$\mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T$ ist also antisymmetrisch. Dreht $\mathbf{Q}(t)$ eine feste ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ in eine andere zeitabhängige ONB $\{\underline{\mathbf{e}}_i(t)\}$, so erlaubt dies die Darstellung

$$\mathbf{Q} = \underline{\mathbf{e}}_i(t) \otimes \mathbf{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{e}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_i(t)$$

und somit ist

$$\mathbf{Q}^\bullet = \underline{\mathbf{e}}_i(t)^\bullet \otimes \mathbf{e}_i$$

und

$$\mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T = \underline{\mathbf{e}}_i(t)^\bullet \otimes \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \otimes \underline{\mathbf{e}}_j(t) = \underline{\mathbf{e}}_i(t)^\bullet \otimes \underline{\mathbf{e}}_i.$$

2.1.13 Starrkörperdynamik (Kreiseltheorie)

Betrachten wir einen Körper \mathcal{B} , der sich im Raum bewegt und Kräften und Momenten unterworfen ist. Sei O raumfester Punkt und \mathbf{r}_O Ortsvektor eines Punktes bezüglich O . Der **Massenmittelpunkt** von \mathcal{B} ist definiert durch den Ortsvektor

$$(2.1.107) \quad \mathbf{r}_M := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \rho dV = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O dm$$

mit

m Masse von \mathcal{B}

ρ Massendichte(feld) des Körpers \mathcal{B}

\mathcal{V} momentan von \mathcal{B} eingenommenes Raumgebiet

Setzt man für den Ortsvektor eines beliebigen Körperpunktes $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_M + \mathbf{x}$, so folgt aus der Definition des Massenmittelpunktes

$$(2.1.108) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm = \mathbf{o}$$

und damit auch für die partiellen Zeitableitungen

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^{\bullet} dm = \mathbf{o}, \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm = \mathbf{o}$$

usw.

Der **Impuls** des Körpers ist der zeitabhängige Vektor

$$(2.1.109) \quad \mathbf{p} := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_M^{\bullet} + \mathbf{x}^{\bullet}) dm = \mathbf{r}_M^{\bullet} m$$

und der **Drall** oder Drehimpuls bezüglich O der Vektor

$$(2.1.110) \quad \mathbf{d}_O := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{r}_O^{\bullet} dm.$$

Die **Impulsbilanz** (NEWTON 1687) lautet allgemein

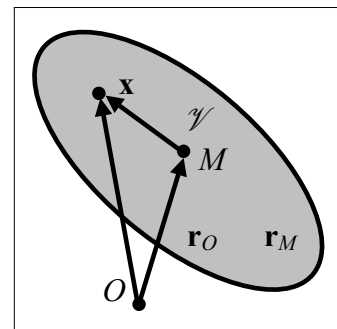
$$(2.1.111) \quad \mathbf{p}^{\bullet} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O^{\bullet\bullet} dm = \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} m$$

= \mathbf{f} = Summe der Kräfte auf den Körper

und die **Drallbilanz** (EULER²⁸ 1775) bezüglich O

$$(2.1.112) \quad \mathbf{d}_O^{\bullet} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{r}_O^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{r}_O^{\bullet\bullet} dm$$

= \mathbf{m}_O = Summe der Momente auf auf den Körper bezüglich O .



²⁸ Leonhard Euler (1707-1783)

Beziehen wir hierin den Ortsvektor mit $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_M + \mathbf{x}$ auf den Massenmittelpunkt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_O^\bullet &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{r}_O^{\bullet\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_M + \mathbf{x}) \times (\mathbf{r}_M + \mathbf{x})^{\bullet\bullet} dm \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_M \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_M \times \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm \\ &= \mathbf{r}_M \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} m + \mathbf{r}_M \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm \end{aligned}$$

und wegen (2.1.108)

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r}_M \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} m + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^{\bullet\bullet} dm \\ &= \mathbf{m}_O, \end{aligned}$$

was nach Einführung eines Versetzungsmoments auch auf M bezogen werden kann

$$= \mathbf{r}_M \times \mathbf{f} + \mathbf{m}_M.$$

Multipliziert man nun den Massenmittelpunktsatz (2.1.111) mit \mathbf{r}_M

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{r}_M^{\bullet\bullet} m = \mathbf{r}_M \times \mathbf{f},$$

so ist die Differenz zur vorigen Gleichung die *Drallbilanz bezüglich des Massenmittelpunktes*

$$(2.1.113) \quad \mathbf{d}_M^\bullet = \mathbf{m}_M \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_M := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^\bullet dm,$$

also von derselben Form wie bezüglich eines raumfesten Punktes (2.1.112). Transformiert man die Drallbilanz dagegen auf einen beliebig bewegten Punkt, so hat sie nicht mehr diese einfache Form, sondern enthält Zusatzterme.

Um die Drallbilanz weiter zu konkretisieren, beschränken wir uns im Weiteren auf **starre Körper**. Die Verschiebung eines beliebigen Körperpunktes eines solchen mit Ortsvektor $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_M + \mathbf{x}$ lässt sich zerlegen in die Verschiebung des Massenmittelpunktes

$$\mathbf{u}_M(t) = \mathbf{r}_M(t) - \mathbf{r}_M(0)$$

und eine Drehung von \mathbf{x} um M , die mit einem Versor $\mathbf{Q}(t)$ dargestellt wird

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{x}(0).$$

Dessen Zeitableitung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\bullet(t) &= \mathbf{Q}^\bullet(t) \cdot \mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}^\bullet(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &= \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

worin $\boldsymbol{\omega}(t)$ der axiale Vektor des antimetrischen Tensors $\mathbf{Q}^\bullet \cdot \mathbf{Q}^T$ ist wegen (2.1.106) und **Winkelgeschwindigkeit** heißt. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Körperpunktes ist demnach

$$(2.1.114) \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}_O^\bullet = \mathbf{r}_M^\bullet(t) + \mathbf{x}^\bullet(t) = \mathbf{v}_M(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}(t)$$

Dies ist die **EULERSche Geschwindigkeitsformel** der Starrkörperbewegung (wobei man sich statt auf den Massenmittelpunkt auch auf jeden beliebigen anderen Körperpunkt beziehen kann). Jeder körperfeste Vektor \mathbf{x} dreht sich also mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{x}^\bullet = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$.

Damit ist der Drall bezüglich M

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_M(t) &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^\bullet \, dm \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm \end{aligned}$$

und nach dem Entwicklungssatz für doppelte Vektorprodukte

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{V}} [\boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega})] \, dm \\ &= \left[\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x}^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \, dm \right] \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

(2.1.115) $\mathbf{d}_M = \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega}$

mit dem **Massenträgheitsmomententensor** bez. M

$$\mathbf{J}_M := \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{x}^2 \mathbf{I} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \, dm .$$

Seine Komponenten bezüglich einer ONB sind die **Trägheitsmomente**

$$J_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J}_M \cdot \mathbf{e}_k = \int_{\mathcal{V}} [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \delta_{ik} - x_i x_k] \, dm ,$$

also

$$\begin{aligned} J_{11} &= \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) \, dm & J_{12} &= J_{21} = - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 \, dm \\ J_{22} &= \int_{\mathcal{V}} (x_3^2 + x_1^2) \, dm & J_{23} &= J_{32} = - \int_{\mathcal{V}} x_2 x_3 \, dm \\ J_{33} &= \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) \, dm & J_{31} &= J_{13} = - \int_{\mathcal{V}} x_3 x_1 \, dm . \end{aligned}$$

Der Massenträgheitsmomententensor ist für alle Körper symmetrisch. Demnach kann er bezüglich seiner Eigenbasis $\{\mathbf{e}^H_i\}$ in Spektralform dargestellt werden

$$\mathbf{J}_M = \sum_{i=1}^3 J^H_i \mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i .$$

Diese **Hauptträgheitsachsen** (HTA) sind für starre Körper für alle Bewegungen körperfest, aber nicht raumfest. Die **Hauptträgheitsmomente** J^H_i sind zeitlich konstant und positiv, womit \mathbf{J}_M positiv-definit ist.

Um die Drallbilanz auszuwerten, benötigen wir die Zeitableitung des Massenträgheitsmomententensors, wozu wir wieder die EULERSche Geschwindigkeitsformel (2.1.114) anwenden:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_M^\bullet &= \sum_{i=1}^3 J^H_i [\mathbf{e}^H_i \bullet \otimes \mathbf{e}^H_i + \mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i \bullet] \\ (2.1.116) \quad &= \sum_{i=1}^3 J^H_i [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^H_i) \otimes \mathbf{e}^H_i + \mathbf{e}^H_i \otimes (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^H_i)] \\ &= \sum_{i=1}^3 J^H_i [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i) - (\mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i) \times \boldsymbol{\omega}] \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_M - \mathbf{J}_M \times \boldsymbol{\omega} . \end{aligned}$$

Demnach ist die Dralländerung

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_M^\bullet &= \mathbf{J}_M^\bullet \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet \\ &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_M - \mathbf{J}_M \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet. \end{aligned}$$

Der mittlere Term ist nach den Regeln des Spatproduktes Null. Damit ist die Drallbilanz bezüglich des Massenmittelpunkts eines starren Körpers

(2.1.117)	$\mathbf{m}_M = \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega}^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega}$
-----------	---

Stellt man die Winkelgeschwindigkeit ebenfalls bezüglich der HTA-Basis $\{\mathbf{e}_i^H\}$ dar

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_i^H(t) \mathbf{e}_i^H(t),$$

so ist deren Zeitableitung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t)^\bullet &= \dot{\omega}_i^H \mathbf{e}_i^H + \omega_i^H \dot{\mathbf{e}}_i^H \\ &= \dot{\omega}_i^H \mathbf{e}_i^H + \omega_i^H (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i^H) \\ &= \dot{\omega}_i^H \mathbf{e}_i^H + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \\ &= \dot{\omega}_i^H \mathbf{e}_i^H. \end{aligned}$$

Analoges gilt für jede körperfeste ONB $\{\mathbf{e}_i\}$. Die Komponentenform der Drallbilanz bezüglich einer solchen Basis ist

$$m_{Mi} = J_{il} \dot{\omega}_l + \omega_l J_{kp} \omega_p \varepsilon_{lki}$$

und speziell bezüglich der HTA-Basis

$$\begin{aligned} m_M^{H_1} &= J^{H_1} \dot{\omega}_1^H + \omega_2^H \omega_3^H (J^{H_3} - J^{H_2}) \\ (2.1.118) \quad m_M^{H_2} &= J^{H_2} \dot{\omega}_2^H + \omega_1^H \omega_3^H (J^{H_2} - J^{H_3}) \\ m_M^{H_3} &= J^{H_3} \dot{\omega}_3^H + \omega_2^H \omega_1^H (J^{H_2} - J^{H_1}). \end{aligned}$$

Dies sind die **EULERSchen Kreiselgleichungen** (1758) bezogen auf den Massenmittelpunkt bezüglich HTA.

Die **kinetische Energie** des starren Körpers ist

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O^\bullet{}^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_M^\bullet + \mathbf{x}^\bullet)^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_M^\bullet + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_M^\bullet{}^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm + \mathbf{r}_M^\bullet \cdot \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} dm \\ (2.1.119) \quad &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_M^\bullet{}^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm \\ &= K_{trans} + K_{rot}, \end{aligned}$$

also die Summe aus translatorischer und rotatorischer Energie. Letztere lässt sich umformen zu

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) dm$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \cdot [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}] dm \\
 (2.1.120) \quad &= \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x}^2 \mathbf{I} - (\mathbf{x} \otimes \mathbf{x})] dm \cdot \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_M \\
 &= \frac{1}{2} (J_{11} \omega_1^2 + J_{22} \omega_2^2 + J_{33} \omega_3^2) \\
 &\quad + (\omega_1 J_{12} \omega_2 + \omega_2 J_{23} \omega_3 + \omega_3 J_{31} \omega_1) .
 \end{aligned}$$

Dies ist eine positiv-definite quadratische Form in der Winkelgeschwindigkeit, d. h. für alle $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ ist die rotatorische Energie positiv. Bezüglich der Hauptträgheitsachsen ist die letzte Klammer Null.

Betrachten wir nun den Spezialfall des *lastfreien Kreisels* ($\mathbf{m}_M \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$). Für ihn gelten

- Impulserhaltung (2.1.121) $\mathbf{p} = \mathbf{v}_M m = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_M = \text{konstant}$
- Drallerhaltung (2.1.122) $\mathbf{d}_M = \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{konstant}$
- Energieerhaltung (2.1.123) $K = \frac{1}{2} \mathbf{v}_M^2 m + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{konstant}$

Es wird später gezeigt, dass die Energieerhaltung aus der Impuls- und Drallerhaltung folgt, also keine weitere unabhängige Bilanzgleichung darstellt.

Aus (2.1.123) folgt mit (2.1.121)

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{konstant} \quad (\text{Energie-Ellipsoid})$$

und aus (2.1.122)

$$\mathbf{d}_M^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_M^2 \cdot \boldsymbol{\omega} = \text{konstant} \quad (\text{Drall-Ellipsoid})$$

Als Tensorflächen bilden \mathbf{J}_M und \mathbf{J}_M^2 zwei Ellipsoide, die beide körperfest sind und dieselben Achsen haben, nämlich die HTA des Kreisels. Die geometrische Deutung ist damit, dass sich $\boldsymbol{\omega}$ auf beiden Ellipsoiden bewegen muss, also auf dem Durchschnitt der beiden Ellipsoide. $\boldsymbol{\omega}$ beschreibt dabei den *Polkegel*. Die Normale \mathbf{n} an das Energie-Ellipsoid geht in Richtung von

$$\mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}_M = \text{konstant}$$

und ist nach (2.1.122) raumfest. Das Energie-Ellipsoid rollt also auf einer raumfesten Tangentialebene ab (POINSOT²⁹sche Rollbewegung).

Andererseits folgt aus (2.1.122)

$$\mathbf{d}_M^2 = \mathbf{d}_M \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{d}_M = \text{konstant} \quad (\text{Kugel})$$

und aus (2.1.123)

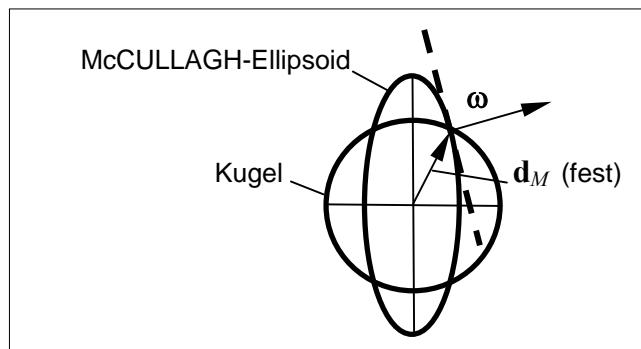
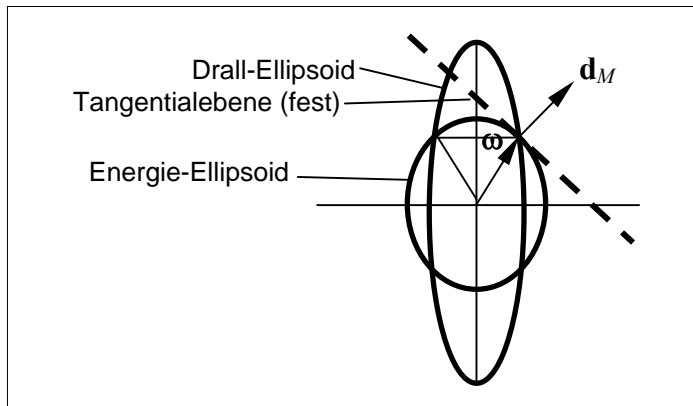
$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}_M \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}_M \cdot \mathbf{J}_M^{-1} \cdot \mathbf{d}_M = \text{konstant} \quad (\text{McCULLAGH-Ellipsoid})$$

Ersteres beschreibt eine raum- und körperfeste Kugel, letzteres das körperfeste McCULLAGH³⁰-Ellipsoid. Der Drallvektor liegt also im Schnitt eines körperfesten Ellipsoids und einer Kugel und beschreibt die *Polhodie*. Die Normale an \mathbf{J}_M^{-1} geht in Richtung von

²⁹ Louis Poinsot (1777-1859)

$$\mathbf{J}_M^{-1} \cdot \mathbf{d}_M = \boldsymbol{\omega}$$

und pendelt im Raum.



³⁰ James McCullagh (1809-1847)

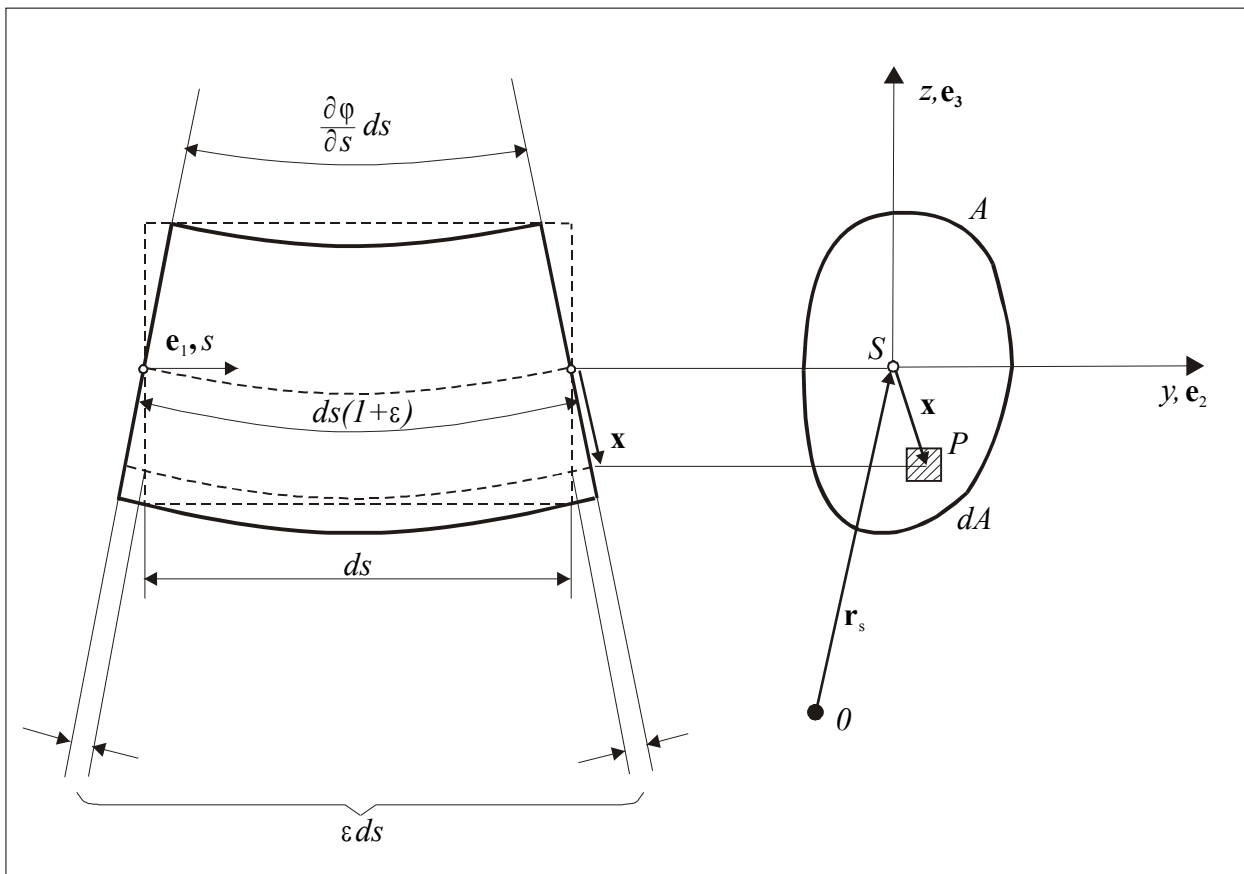
2.1.14 Schiefe Biegung von Stäben

Wir behandeln die räumliche (schiefe) Biegung von ursprünglich geraden Stäben. Es sollen folgende Annahmen gelten:

- BERNOULLI'sche Hypothese: ebene Querschnitte bleiben eben und senkrecht zur Mittelachse des Stabes
- kleine Verschiebungen, kleine Drehungen, kleine Deformationen
- linear-elastisches Materialverhalten: $\sigma = E \varepsilon$ (HOOKE'sches Gesetz)
- keine Axiallasten (Längslasten).

Seien

- s die Bogenlängenkoordinate des unverformten Stabes
- $'$ die Ableitung nach s
- $\varphi(s)$ der (infinitesimale) Drehvektor des Querschnitts in s
- \mathcal{A} der Querschnitt
- $A(s)$ der Querschnittsflächeninhalt
- \mathbf{x} der Ortsvektor von der neutralen Faser zu einem bel. Querschnittspunkt
- \mathbf{t} Tangentenvektor an Stabachse ($|\mathbf{t}| = 1$)



Wir betrachten einen festen Querschnitt $s = \text{konstant}$. Wie wir gesehen haben, kann man eine infinitesimale Drehung (des Querschnitts) durch einen axialen Vektor $\boldsymbol{\varphi}(s)$, der in der Querschnittsebene liegt, darstellen als $\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{x}$. Damit ist die Verschiebung infolge der Stabbiegung

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(s) \times \mathbf{x} + \mathbf{u}_0$$

mit einem konstanten Anteil \mathbf{u}_0 . Die Ableitung des Tangentialanteils der Verschiebung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}$ ergibt die Längsdehnung in axialer Richtung

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{d}{ds} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}' = \boldsymbol{\varphi}(s)' \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}(s) \times \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}(s) \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}' \\ (2.1.124) \quad &= \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} \quad \text{mit } \boldsymbol{\kappa} := \frac{d}{ds} \boldsymbol{\varphi}(s), \end{aligned}$$

weil \mathbf{x} nicht von s abhängt, \mathbf{t}' in der Querschnittsebene liegt, während $\boldsymbol{\varphi}(s) \times \mathbf{x}$ darauf senkrecht steht. Der Normalspannungsvektor auf dem Querschnittspunkt \mathbf{x} ist nach dem HOOKEschen Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_t \mathbf{t} = E \varepsilon_t \mathbf{t} = E [(\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}] \mathbf{t}.$$

Da keine resultierende Normalkraft auf dem Querschnitt lasten soll, gilt

$$\int_{\mathcal{A}} \sigma_t dA = E \int_{\mathcal{A}} (\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} dA = E (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\kappa}) \cdot \int_{\mathcal{A}} \mathbf{x} dA = 0,$$

womit die neutrale Faser also durch den Flächenmittelpunkt geht. Das resultierende Schnittmoment bezüglich des Flächenmittelpunktes ist

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} dA = E \int_{\mathcal{A}} [\boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{t})] \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA \\ &= E \left(\int_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dA \right) \cdot \boldsymbol{\kappa} \end{aligned}$$

(2.1.125) $\mathbf{m} = E \mathbf{J}_F \cdot \boldsymbol{\kappa}$

mit dem **Flächenträgheitstensor**

$$\mathbf{J}_F := \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) \otimes (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dA,$$

der offensichtlich symmetrisch ist. Wählen wir eine ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ mit $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{t}$, so ist

$$\mathbf{x}(y, z) = y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3$$

und

$$\begin{aligned} J_{ik} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{J}_F \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{e}_i \cdot [(y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1] [(y \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1] \cdot \mathbf{e}_k dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} (y \varepsilon_{i21} + z \varepsilon_{i31}) (y \varepsilon_{21k} + z \varepsilon_{31k}) dA, \end{aligned}$$

also

$$J_{yy} = \int_{\mathcal{A}} z^2 dA \quad J_{zz} = \int_{\mathcal{A}} y^2 dA \quad J_{yz} = J_{zy} = - \int_{\mathcal{A}} y z dA,$$

während alle anderen Komponenten bezüglich dieser Basis Null sind:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & J_{yz} \\ 0 & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}.$$

\mathbf{e}_1 ist Eigenvektor von \mathbf{J}_F zum Eigenwert 0 . Die beiden nicht trivialen Eigenwerte J^H_1 und J^H_2 erhalten wir als Lösung der charakteristischen Gleichung von \mathbf{J}_F

$$\begin{aligned} III_{\mathbf{J}} - J^H_i II_{\mathbf{J}} + (J^H_i)^2 I_{\mathbf{J}} - (J^H_i)^3 &= 0 \\ = 0 - J^H_i (J_{yy} J_{zz} - J_{yz}^2) + (J^H_i)^2 (J_{yy} + J_{zz}) - (J^H_i)^3 \end{aligned}$$

mit den Wurzeln

$$\begin{aligned} J^H_{2,3} &= \frac{1}{2} (J_{yy} + J_{zz}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (J_{yy} + J_{zz})^2 - J_{yy} J_{zz} + J_{yz}^2} \\ &= \frac{1}{2} (J_{yy} + J_{zz}) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (J_{yy} - J_{zz})^2 + J_{yz}^2}, \end{aligned}$$

den **Hauptträgheitsmomenten**.

Um die beliebige Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ in die HTA-Basis $\{\mathbf{e}^H_i\}$ zu transformieren, setzen wir die Transformationsformel

$$J^H_{ik} = Q_{il} J_{lm} Q_{km}$$

an mit

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

mit dem Drehwinkel α . Die Matrix hat bezüglich Hauptachsen Spektralform

$$[J^H_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^H_2 & 0 \\ 0 & 0 & J^H_3 \end{bmatrix}$$

Es ist also

$$J^H_{23} = 0 = \sin \alpha \cos \alpha (J_{22} - J_{33}) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) J_{23}.$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos(2\alpha)$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$$

folgt

$$\frac{1}{2} \sin(2\alpha) (J_{22} - J_{33}) + \cos(2\alpha) J_{23} = 0$$

oder

$$\tan(2\alpha) = \frac{2J_{23}}{J_{33} - J_{22}}$$

als Gleichung zur Bestimmung von α und damit der Eigenbasis

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^H_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}^H_2 &= \cos \alpha \mathbf{e}_2 + \sin \alpha \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}^H_3 &= -\sin \alpha \mathbf{e}_2 + \cos \alpha \mathbf{e}_3 . \end{aligned}$$

2.1.15 Tensoren höherer Stufe

Das Skalarprodukt zweier Vektoren - die wir im Weiteren als Tensoren 1. Stufe auffassen - ist die reelle Zahl

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} .$$

Bisher haben wir nur 2-fache oder dyadische Tensorprodukte zwischen zwei Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 durch deren Wirkung auf einen Vektor \mathbf{x} kennengelernt

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} := \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}) \mathbf{v}_1$$

(einfache Überschiebung). Analog definiert man das 3-fache Tensorprodukt zwischen drei Vektoren \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 und \mathbf{v}_3 durch dessen Wirkung auf einen Vektor \mathbf{x} , deren Ergebnis der Tensor 2. Stufe

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x} := \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x})$$

ist (einfache Überschiebung). Das 3-fache Tensorprodukt heißt **Triade** oder **Tensor 3. Stufe**.

Man kann dies fortsetzen bis zum **K-fachen Tensorprodukt** von K Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_K$ durch dessen Wirkung auf einen Vektor \mathbf{x} , deren Ergebnis das $K-1$ -fache Tensorprodukt

$$\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{x} := \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{K-1} (\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{x})$$

ist (einfache Überschiebung).

Wir hatten aber auch schon einfache Überschiebungen von zwei Dyaden eingeführt als Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{x}_2 .$$

Zur *mehrfachen Überschiebung* gelangt man, wenn man mehrere der angrenzenden Vektoren durch Skalarprodukte bindet. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an, die Definitionssache ist. Beispiel ist die doppelte Überschiebung von zwei Dyaden, deren Ergebnis ein Skalar ist:

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 := (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_2) .$$

Dies verallgemeinert man in folgender Weise:

Def.: Die P -fache **Überschiebung** eines K -fachen Tensorprodukts mit einem M -fachen Tensorprodukt für $K \geq P \leq M$ ist das $(K+M-2P)$ -fache Tensorprodukt

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_K) \cdot \dots \cdot (\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_M) \\ (2.1.126) \quad & = \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{K-P} \otimes \mathbf{x}_{P+1} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_M (\mathbf{v}_{K-P+1} \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{v}_{K-P+2} \cdot \mathbf{x}_2) \dots (\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{x}_P) . \end{aligned}$$

Darin bedeutet " \dots " P Skalarprodukt-Punkte.

Beispiele sind

$K=1, M=1, P=1$	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$	ein Skalar
$K=2, M=1, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x})$	ein Vektor
$K=3, M=1, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x})$	eine Dyade
$K=1, M=2, P=1$	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2$	ein Vektor
$K=2, M=2, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{x}_2$	eine Dyade
$K=2, M=2, P=2$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_2)$	ein Skalar
$K=3, M=1, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1)$	eine Dyade
$K=3, M=2, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{x}_2 (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1)$	eine Triade
$K=3, M=2, P=2$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_2)$	ein Vektor
$K=2, M=3, P=1$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_1)$	eine Triade
$K=1, M=3, P=1$	$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3$	eine Dyade
$K=3, M=3, P=3$	$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_1) (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x}_2) (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{x}_3)$	ein Skalar

usw.

Linearkombinationen von Tensorprodukten gleicher Stufe bildet man in Analogie zu denjenigen von Dyaden.

Tensoren K -ter Stufe mit $K \geq 0$ kann man sich aus K -fachen Tensorprodukten zwischen Basisvektoren einer ONB

$$\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_K}$$

als Linearkombinationen erzeugen

$$(2.1.127) \quad \mathbf{C} = C_{i_1 i_2 \dots i_K} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_K}$$

mit 3^K Komponenten im 3-Dimensionalen. Für $K=1$ ist dies ein Vektor, für $K=0$ sei es ein Skalar, also eine reelle Zahl.

Bezeichnungen:

- Tensoren 0. Stufe: **Skalare** mit $3^0 = 1$ Komponente
- Tensoren 1. Stufe: **Vektoren** mit $3^1 = 3$ Komponenten
- Tensoren 2. Stufe: **Dyaden** mit $3^2 = 9$ Komponenten
- Tensoren 3. Stufe: **Triaden** mit $3^3 = 27$ Komponenten
- Tensoren 4. Stufe: **Tetraden** mit $3^4 = 81$ Komponenten.

Ist $\{\underline{\mathbf{e}}_i\}$ eine andere ONB, so können wir einen Tensor K -ter Stufe \mathbf{C} darstellen als

$$\mathbf{C} = \underline{C}_{ij \dots kl} \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \underline{\mathbf{e}}_j \otimes \dots \otimes \underline{\mathbf{e}}_k \otimes \underline{\mathbf{e}}_l.$$

Die Transformation der Komponenten bei ONB-Wechsel ergibt sich mittels der orthogonalen Abbildung

$$\mathbf{Q} := \underline{\mathbf{e}}_i \otimes \mathbf{e}_i = Q_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \Rightarrow \underline{\mathbf{e}}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i = (Q_{rs} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) \cdot \mathbf{e}_i = Q_{ri} \mathbf{e}_r$$

in Verallgemeinerung derjenigen von Vektoren (2.1.79) und Dyaden (2.1.80) als

$$(2.1.128) \quad C_{ij \dots kl} = Q_{im} Q_{jn} \dots Q_{kr} Q_{ls} \underline{C}_{mn \dots rs}.$$

Ein Tensor K -ter Stufe kann auf einen Vektor angewendet werden durch eine einfache Überschiebung gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} &= (C_{ij\dots kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (x_m \mathbf{e}_m) \\ &= C_{ij\dots kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m) x_m \\ &= C_{ij\dots kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k \delta_{lm} x_m \\ &= C_{ij\dots kl} x_l \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k, \end{aligned}$$

was einen Tensor $(K-1)$ -ter Stufe ergibt. Für $K \equiv 2$ fällt diese Operation mit der bisher studierten linearen Abbildung zwischen Vektorräumen zusammen.

Ebenso kann man in Verallgemeinerung der Hintereinanderschaltung zweier Tensoren 2. Stufe einen Tensor K -ter Stufe auf einen Tensor 2. Stufe durch eine einfache Überschiebung anwenden

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} &= (C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (T_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p) \\ &= C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m) T_{mp} \\ &= C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p \delta_{lm} T_{mp} \\ &= C_{i\dots jkl} T_{lp} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_p \end{aligned}$$

und erhält wieder einen Tensor K -ter Stufe. Hierbei werden also die beiden angrenzenden Basisvektoren in einem Skalarprodukt überschoben oder zusammengezogen.

Man kann aber auch einen Tensor K -ter Stufe auf einen Tensor 2. Stufe durch eine zweifache Überschiebung anwenden

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T} &= (C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot \cdot (T_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p) \\ &= C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_p) T_{mp} \\ &= C_{i\dots jkl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j \delta_{km} \delta_{lp} T_{mp} \\ &= C_{i\dots jkl} T_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

was einen Tensor $K-2$ -ter Stufe ergibt.

Man kann dies nun in Analogie zu (2.1.126) weitertreiben bis zur **P -fachen Überschiebung** eines **Tensors K -ter Stufe** mit einem **Tensor M -ter Stufe** ($K, M \geq P$) mit einem **Ergebnistensor $(K+M-2P)$ -ter Stufe**. Die Bedeutung von Tensoren höherer Stufe folgt aus dem folgenden

Satz: Jede lineare Abbildung von einem Tensor M -ter Stufe in einen Tensor L -ter Stufe lässt sich eindeutig darstellen durch einen Tensor $(L+M)$ -ter Stufe, der mit dem Argumenttensor M -fach überschoben wird.

Interessant ist der Spezialfall $L \equiv 0$ und M beliebig, also die M -fache Überschiebung zweier Tensoren M -ter Stufe. Das Ergebnis ist ein Tensor 0 -ter Stufe, also ein Skalar

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \dots \cdot \mathbf{D} &= (C_{ij\dots k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \dots \cdot (D_{mp\dots q} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_q) \\ (2.1.129) \quad &= C_{ij\dots k} D_{mp\dots q} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_p) \dots (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_q) \\ &= C_{ij\dots k} D_{mp\dots q} \delta_{im} \delta_{jp} \dots \delta_{kq} \\ &= C_{ij\dots k} D_{ij\dots k}. \end{aligned}$$

Man kann diese Operation als ein **Skalarprodukt** auf dem Raum der Tensoren L -ter Stufe auffassen, da es die entsprechenden Axiome der Vektorrechnung erfüllt. Dieses induziert eine **Norm** als

$$(2.1.130) \quad |\mathbf{C}| := \sqrt{(\mathbf{C} \cdot \dots \cdot \mathbf{C})}$$

sowie Längen und Winkel zwischen Tensoren analog zu Vektoren.

Für $L \equiv 2$ liefert dies

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} &= (S_{il} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l) \cdot (T_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p) \\ &= S_{il} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_p) T_{mp} \\ &= S_{il} \delta_{im} \delta_{lp} T_{mp} \\ &= S_{il} T_{il}, \end{aligned}$$

was sich durch die Spur ausdrücken lässt als

$$(2.1.131) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = sp(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T) = sp(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{T}) = sp(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S}) = sp(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^T).$$

In der Literatur wird dieses Skalarprodukt zwischen Tensoren übrigens manchmal *Doppelskalarprodukt* genannt (wegen der doppelten Überschiebung). Es ist kommutativ und linear in beiden Argumenten. Man kann dagegen zeigen, dass der Ausdruck $sp(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})$ kein Skalarprodukt definiert, weil er im Falle $\mathbf{S} \equiv \mathbf{T}$ nicht positiv-definit ist.

Speziell gilt mit $\mathbf{T} \equiv \mathbf{I}$ die Darstellung der Spur eines Tensors \mathbf{S}

$$(2.1.132) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{I} = sp(\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}) = sp(\mathbf{S}).$$

Für Dyaden gilt

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}).$$

Bezüglich dieses Skalarprodukts sind die symmetrischen und die antimetrischen Tensoren zueinander orthogonal. Ist nämlich \mathbf{T} ein beliebiger Tensor, \mathbf{S} ein symmetrischer und \mathbf{A} ein antimetrischer, so gelten

$$(2.1.133) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^T) = \mathbf{S} \cdot sym(\mathbf{T}) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{A} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) = \mathbf{A} \cdot skw(\mathbf{T}). \end{aligned}$$

Mit dem Skalarprodukt kann man dann auch tensorielle ONB einführen.

Def.: Eine Tensorbasis $\{\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j\}$ heißt **Orthonormalbasis (ONB)**, wenn gilt

$$\mathbf{f}_i \otimes \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{f}_k \otimes \mathbf{g}_l = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Folgende Beispiele lassen sich geben.

Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ eine vektorielle ONB. Dann bilden

- $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$ eine ONB im 9-dimensionalen Raum der Tensoren 2. Stufe,
- $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \text{ und } \sqrt{2} sym(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), i < j, i, j = 1, 2, 3\}$ eine ONB im 6-dimensionalen Raum der symmetrischen Tensoren,
- $\{\sqrt{2} skw(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), i < j\}$ eine ONB im 3-dimensionalen Raum der antimetrischen Tensoren.

Nur Tensoren gerader Stufe ($2K$) kann man als lineare Abbildungen zwischen Tensoren gleicher Stufe (K) deuten. Ihre Invertierbarkeit wird völlig analog zu derjenigen von Tensoren 2. Stufe definiert. Unter den Tensoren $2K$ -ter Stufe gibt es ein ausgezeichnetes Element, den **Einstensor $2K$ -ter Stufe**

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \delta_{i_1 i_{K+1}} \delta_{i_2 i_{K+2}} \dots \delta_{i_K i_{2K}} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_{2K}} \\ &= \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_K} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_K}. \end{aligned}$$

In Verallgemeinerung der Symmetrie von Tensoren 2. Stufe, definiert man die (haupt-)symmetrische Tensoren $2K$ -ter, also gerader Stufe durch K -fache Überschiebungen von beiden Seiten mit beliebigen Tensoren K -ter Stufe \mathbf{S} und \mathbf{T} mittels

$$\mathbf{S} \cdot \dots \cdot \mathbf{C} \cdot \dots \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \dots \cdot \mathbf{C} \cdot \dots \cdot \mathbf{S}.$$

Dies ist äquivalent zu den Komponentenbedingungen bez. ONB

$$C_{i_1 i_2 \dots i_K i_{K+1} \dots i_{2K}} = C_{i_{K+1} i_{K+2} \dots i_{2K} i_1 \dots i_K}$$

für alle Indizes. *Symmetrie* bedeutet hier also nicht die Invarianz unter beliebigen Indexvertauschungen, sondern lediglich der ersten Indexhalbgruppe gegen die zweite.

Für Tensoren gerader Stufe ($2K$) kann man in Analogie zu Abschnitt 2.1.10 Eigenwertprobleme definieren. Nur handelt es sich hierbei nicht mehr um Eigenrichtungen in einem Vektorraum oder *Eigenvektoren*, sondern um Eigenrichtungen im Raum der Tensoren K -ter Stufe oder **Eigentensoren** K -ter Stufe. Mit der charakteristischen Gleichung erhält man dann wieder als deren Koeffizienten Hauptinvarianten. Für symmetrische Tensoren K -ter Stufe lässt sich analog eine Spektraldarstellung bezüglich der Eigentensoren angeben.

Für Tensoren ungerader Stufe gilt dies alles nicht.

2.1.16 Tetraden

Da wir es in der Mechanik hauptsächlich mit Dyaden zu tun haben werden, sind für uns vor allem noch die Tensoren 4. Stufe interessant, denn **Tetraden** sind die linearen Abbildungen zwischen Dyaden

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{T} &= (C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \cdot \cdot (T_{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p) \\ &= C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_p) T_{mp} \\ (2.1.134) \quad &= C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \delta_{km} \delta_{lp} T_{mp} \\ &= C_{ijkl} T_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

In der linearen Elastizitätstheorie werden Tetraden viel benutzt, weil sie eine lineare Beziehung zwischen einem Deformationstensor und einem Spannungstensor (beide 2. Stufe) vermitteln. Die Hintereinanderschaltung solcher Abbildungen \mathbf{C} und \mathbf{D} bildet einen Tensor 2. Stufe \mathbf{T} ab gemäß

$$(\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{D}) \cdot \cdot \mathbf{T} := \mathbf{C} \cdot \cdot (\mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{T}.$$

Demnach sind auch hier die Klammern entbehrlich.

Der **Nulltensor 4. Stufe** \mathbf{O} bildet alle Tensoren 2. Stufe \mathbf{T} in den Nulltensor 2. Stufe ab

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}.$$

Bei ihm sind alle Komponenten bezüglich jeder Basis Null.

Der **Einstensor 4. Stufe** \mathbf{I} leistet

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

für alle Tensoren 2. Stufe \mathbf{T} . Man erhält als Komponentendarstellung bezüglich einer ONB

$$(2.1.135) \quad \mathbf{I} = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Das *Eigenwertproblem* einer Tetrade besteht darin, Eigentensoren 2. Stufe \mathbf{A} zu Eigenwerten λ zu finden, so dass die Eigenwertgleichung erfüllt ist

$$(2.1.136) \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A}.$$

Hier erwarten wir 9 (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte und dazugehörige 9 Eigentensoren, die auch komplex sein können.

Die Inverse \mathbf{C}^{-1} eines invertierbaren Tensors 4. Stufe \mathbf{C} leistet

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

für alle Tensoren 2. Stufe \mathbf{T} . Damit gilt

$$(2.1.137) \quad \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1}.$$

Im allgemeinen Fall hat eine Tetrade $3^4 = 81$ unabhängige Komponenten C_{ijkl} , $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Um die Komponenten als Matrix darzustellen, müssen wir den Begriff einer Matrix zunächst verallgemeinern durch Einführung einer *Hypermatrix*, d. i. eine Matrix, deren Elemente ebenfalls Matrizen sind. Dies geschieht folgendermaßen:

$$\left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} \\ C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\ C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} \\ C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} \\ C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} \\ C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\ C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} \\ C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} \\ C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} \\ C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} \\ C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{ccc} C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\ C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Die Zahl der 81 unabhängigen Komponenten kann sich erheblich reduzieren, falls Symmetrien existieren. Während es beim Tensor 2. Stufe nur zwei Indizes gab, bezüglich deren Vertauschung Symmetrie bestehen konnte, sind es bei der Tetrade vier Indizes, weswegen wir hier verschiedene Arten von Symmetrien unterscheiden müssen.

Die **Transposition** einer Tetrade ist in Analogie zu Dyaden (2.1.41) definiert durch die Beziehung

$$(2.1.138) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{S},$$

die für alle Tensoren 2. Stufe \mathbf{S} und \mathbf{T} gelten soll. Die Tetrade besitzt die (Haupt-) **Symmetrie**, wenn sie gleich ihrer Transponierten ist. In Komponenten bezüglich einer ONB ist dies äquivalent zu

$$C_{ijkl} = C_{klij}.$$

Dies sind 36 Bedingungen. Somit hat die symmetrische Tetrade $n^2/2 + n/2 = 45$ unabhängige Komponenten, wobei hier $n \equiv 9$ ist.

Unabhängig von der (Haupt-)Symmetrie definieren wir zwei andere Symmetrien von Tetraden, nämlich die **linke Subsymmetrie**, falls

$$(2.1.139) \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}$$

für alle Tensoren \mathbf{T} gilt, und die **rechte Subsymmetrie**, falls

$$(2.1.140) \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^T$$

gilt. In Komponenten bezüglich einer ONB ist dies äquivalent zu

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (\text{linke Subsymmetrie})$$

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (\text{rechte Subsymmetrie}).$$

Diese beiden Subsymmetrien nutzt man insbesondere dann aus, wenn \mathbf{C} *symmetrische* Tensoren 2. Stufe in eben solche abbilden soll. Es gelten nämlich folgende Sätze:

- Eine Tetrade \mathbf{C} besitzt genau dann die linke Subsymmetrie, wenn $\mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$ für beliebige Tensoren \mathbf{T} symmetrisch ist.
- Eine Tetrade \mathbf{C} besitzt genau dann die rechte Subsymmetrie, wenn für jeden antimetrischen Tensor \mathbf{T}^A gilt: $\mathbf{C} \cdot \mathbf{T}^A = \mathbf{0}$. Damit sind alle antimetrischen Tensoren Eigentensoren von \mathbf{C} zum dreifachen Eigenwert 0 .
- Besitzt eine Tetrade eine Subsymmetrie, so ist sie singulär (nicht invertierbar).

In der klassischen Elastizitätstheorie betrachtet man lineare Beziehungen zwischen einem symmetrischen Verzerrungstensor und einem symmetrischen Spannungstensor. Für lineare Abbildungen zwischen symmetrischen Tensoren können wir beide Subsymmetrien annehmen, ohne dadurch diese Abbildung zu verändern. Dadurch lässt sich die Anzahl unabhängiger Komponenten auf $6 \times 6 = 36$ reduzieren. In diesem Fall ist es praktisch, symmetrische Tensoren 2. Stufe in einem 6-dimensionalen linearen Raum darzustellen als

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + T_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ &\quad + T_{23} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \\ (2.1.141) \quad &\quad + T_{31} (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &\quad + T_{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \\ &= T_{11} \mathbf{E}_{V1} + T_{22} \mathbf{E}_{V2} + T_{33} \mathbf{E}_{V3} \\ &\quad + \sqrt{2} T_{23} \mathbf{E}_{V4} + \sqrt{2} T_{31} \mathbf{E}_{V5} + \sqrt{2} T_{12} \mathbf{E}_{V6} \\ &= T_{V\alpha} \mathbf{E}_{V\alpha} \quad (\text{Summe über } \alpha \text{ von } 1 \text{ bis } 6) \end{aligned}$$

mit der Komponentenmatrix

$$\{T_{V1}, T_{V2}, T_{V3}, T_{V4}, T_{V5}, T_{V6}\} := \{T_{11}, T_{22}, T_{33}, \sqrt{2} T_{23}, \sqrt{2} T_{31}, \sqrt{2} T_{12}\}$$

bezüglich der Basis

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{V1} &:= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{E}_{V2} &:= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{E}_{V3} &:= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{E}_{V4} &:= 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2) \\
 \mathbf{E}_{V5} &:= 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \\
 \mathbf{E}_{V6} &:= 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2),
 \end{aligned}$$

wobei die $1/\sqrt{2}$ der Normierung der Tensorbasis $\{\mathbf{E}_{V\alpha}\}$ dient

$$\mathbf{E}_{V\alpha} \cdot \mathbf{E}_{V\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

also z. B.

$$\mathbf{E}_{V6} \cdot \mathbf{E}_{V6} = 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = 1.$$

Damit ist $\{\mathbf{E}_{V\alpha}\}$ eine ONB im 6-dimensionalen Raum der symmetrischen Tensoren. Eine solche **VOIGTsche³¹ Darstellung** (1882)

$$(2.1.142) \quad \mathbf{C} = C_{V\alpha\beta} \mathbf{E}_{V\alpha} \otimes \mathbf{E}_{V\beta}$$

mit der Summation über griechische Indizes von 1 bis 6 ermöglicht nun die Darstellung einer Tetrade mit beiden Subsymmetrien als eine VOIGTsche Dyade mit der 6×6-Komponentenmatrix

$$\begin{bmatrix}
 C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\
 C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\
 C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\
 \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\
 \sqrt{2}C_{1311} & \sqrt{2}C_{1322} & \sqrt{2}C_{1333} & 2C_{1323} & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\
 \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1213} & 2C_{1212}
 \end{bmatrix}$$

Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur die Normierung oft nicht vorgenommen wird und die Darstellung damit etwas anders wird (ohne 2 und $1/\sqrt{2}$).

Man sieht, dass eine Tetrade mit beiden Subsymmetrien genau dann (haupt-)symmetrisch ist, wenn ihre VOIGTsche 6×6-Matrix symmetrisch ist, also nur noch 21 unabhängige Komponenten besitzt.

Beispiele: Der Einstensor 4. Stufe besitzt zwar die (Haupt-)Symmetrie. Eine Subsymmetrie kann jedoch nicht vorliegen, da der Einstensor grundsätzlich invertierbar ist.

Er muss von derjenigen Tetrade \mathbf{I}^S unterschieden werden, die beide Subsymmetrien besitzt und jeden Tensor in seinen symmetrischen Anteil abbildet und **Symmetrisierer** genannt wird

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}^S &= 1/4 \delta_{ik} \delta_{jl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l + \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k) \\
 &= 1/4 (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \\
 (2.1.143) \quad &= 1/2 (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)
 \end{aligned}$$

³¹ Woldemar Voigt (1850-1919)

$$= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i)$$

mit der VOIGT'schen Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Symmetrisierer wird als Identität auf den symmetrischen Tensoren 2. Stufe benutzt.

In Analogie zu Tensoren 2. Stufe definieren wir die folgenden Eigenschaften auch für Tetraden.

Def.: Eine (nicht notwendigerweise symmetrische) Tetrade \mathbf{C} mit der Eigenschaft

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} > 0$	$\forall \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$	heißt positiv-definit
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \geq 0$	$\forall \mathbf{A}$	heißt positiv-semidefinit
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} < 0$	$\forall \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$	heißt negativ-definit
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \leq 0$	$\forall \mathbf{A}$	heißt negativ-semidefinit.

Ansonsten heißt sie **indefinit**. In diese Definitionen geht nur der symmetrische Anteil der Tetrade ein. Ist \mathbf{C} symmetrisch, so ist die positive Definitheit äquivalent zur Bedingung, dass alle ihre Eigenwerte positiv sind. Derartige Klassifikationen kann man für alle Tensoren beliebiger gerader Stufe einführen.

Beispiel 7. Mehrfache skalare Überschiebung

Zwischen Tensoren höherer Stufe wurde die mehrfache skalare Überschiebung eingeführt. Vereinfachen Sie für zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} den Ausdruck

$$(B7.1) \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

weitestmöglich mit $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$.

Lösung:

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ist eine Triade, während $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ eine Dyade ist. Die doppelte skalare Überschiebung reduziert beide Tensoren um 2 Stufen, so dass ein Tensor 1. Stufe, also der Vektor \mathbf{v} übrig bleibt. Der Wechsel in die Indexschreibweise liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \cdot a_m b_n \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = \varepsilon_{ijk} a_m b_n \delta_{jm} \delta_{kn} \mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i \\ &= \varepsilon_{jki} a_j b_k \mathbf{e}_i = \mathbf{a} \times \mathbf{b} . \end{aligned}$$

\mathbf{v} steht also senkrecht auf der von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene. Der Tensor $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ist eine einfache Dyade mit $II_{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}} = III_{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}} = 0$.

2.2 Vektor- und Tensoranalysis

2.2.1 Das Richtungs-Differenzial

Sei f eine reellwertige differenzierbare Funktion einer reellen Variablen. Dann ist deren lineare Approximation an einer Stelle x das Differenzial

$$df(x, dx) = \frac{df}{dx} dx = f'(x) dx$$

mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{df}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [f(x + \Delta x) - f(x)].$$

Diese Vorgehensweise soll nun auf Funktionen beliebiger tensorwertiger Variablen ausgeweitet werden.

Sei \mathbf{r} der Ortsvektor im EUKLIDischen Raum und $\phi(\mathbf{r})$ ein reelles Feld (Skalarfeld), d. h. eine Funktion, die jedem Ortsvektor einen Skalar zuordnet. Beispiele: Temperatur-Feld, Dichte-Feld. Das **Differenzial von ϕ an der Stelle \mathbf{r} in Richtung $d\mathbf{r}$** ist definiert als der Grenzwert

$$(2.2.1) \quad d\phi(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(\mathbf{r} + h d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})] = \left. \frac{d}{dh} \phi(\mathbf{r} + h d\mathbf{r}) \right|_{h=0}$$

Bei hinreichender Glattheit von $\phi(\mathbf{r})$ ist das Differenzial linear in $d\mathbf{r}$, d. h. es existiert ein Vektorfeld $grad \phi(\mathbf{r})$, der **Gradient** von $\phi(\mathbf{r})$, so dass

$$(2.2.2) \quad d\phi(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = grad \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Manchmal schreibt man für den Gradienten auch

$$grad \phi(\mathbf{r}) = \frac{d\phi}{d\mathbf{r}} = \phi'(\mathbf{r}).$$

Ist $\{\mathbf{e}_i\}$ eine feste ONB, dann gelten die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{r} = x_j \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad d\mathbf{r} = dx_i \mathbf{e}_i$$

sowie für das Differenzial von ϕ an der Stelle \mathbf{r} in Richtung $d\mathbf{r} \equiv \mathbf{e}_i$

$$(2.2.3) \quad d\phi(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\phi(\mathbf{r} + h \mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{r})] = grad \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_i,$$

was der i -ten Komponente des Gradienten entspricht. Ist beispielsweise $i = 1$, so hat $\mathbf{r} + h \mathbf{e}_1$ die Komponenten $\{x_1 + h, x_2, x_3\}$, und der Grenzwert ist die **partielle Ableitung** von $\phi(x_i \mathbf{e}_i) = \phi(x_1, x_2, x_3)$ nach x_1 , die oft mit einem Komma als „ $,1$ “ notiert wird

$$\frac{\partial \phi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} := d\phi(\mathbf{r}, \mathbf{e}_1) = grad \phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_1 = \phi_{,1}.$$

Damit erhalten wir für den Gradienten die Komponentendarstellung bezüglich einer ONB

$$(2.2.4) \quad \text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \phi_{,i} \mathbf{e}_i$$

Der Gradient hat folgende Eigenschaft: Betrachten wir eine Isofläche von ϕ , d. h. eine Fläche im EUKLIDischen Raum, auf der ϕ konstant ist. Ist $d\mathbf{r}$ tangential an diese Fläche, so ist

$$d\phi(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \text{grad } \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

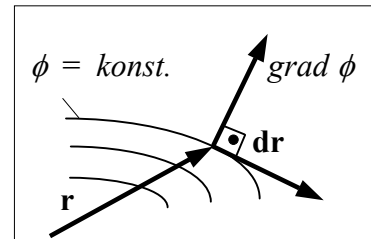
Demnach steht $\text{grad } \phi$ orthogonal oder normal auf der Tangentialebene an die Isofläche in \mathbf{r} und weist in die Richtung, in der ϕ am stärksten zunimmt.

Als Beispiel betrachten wir das **Temperaturfeld**

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \theta(\mathbf{r}).$$

Der **Temperaturgradient**

$$(2.2.5) \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) := \text{grad } \theta(\mathbf{r}) = \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \theta_{,i} \mathbf{e}_i$$



weist in die Richtung des stärksten Temperaturanstiegs. Besteht zwischen \mathbf{g} und dem **Wärmeflussvektor** \mathbf{q} ein linearer Zusammenhang (*FOURIERSches*³² *Wärmeleitungsgesetz*), so kann dieses dargestellt werden durch den Wärmeleitungstensor \mathbf{K} als

$$(2.2.6) \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}.$$

Nach dem *CASIMIR-ONSAGER*³³*schen Reziprozitätssatz* ist \mathbf{K} symmetrisch, erlaubt also eine Spektraldarstellung

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \kappa_i \mathbf{e}_i^H \otimes \mathbf{e}_i^H$$

mit reellen Eigenwerten κ_i . Gemäß der Vorstellung, dass die Wärme immer nur vom Wärmere zum Kälteren fließt, ist der Wärmeleitungstensor positiv-semidefinit (als Folge des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik, wie später gezeigt wird), also

$$\kappa_i > 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Ist die Wärmeleitung in allen Richtungen gleich (isotroper Wärmeleiter), so sind

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 =: \kappa$$

und

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^3 \kappa \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \kappa \mathbf{I}$$

ist ein Kugeltensor. Damit reduziert sich das *isotrope FOURIERSche Wärmeleitungsgesetz* auf

$$(2.2.7) \quad \mathbf{q} = -\kappa \mathbf{g}$$

mit dem positiven Wärmeleitungskoeffizienten κ . Seine Komponenten bezüglich einer ONB sind

³² Jean Baptiste Joseph de Fourier (1768-1830)

³³ Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909-2000), Lars Onsager (1903-1976)

$$(2.2.8) \quad q_i = -\kappa \frac{\partial \theta(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = -\kappa \theta(x_1, x_2, x_3)_{,i}.$$

Betrachten wir als nächstes ein *Vektorfeld* $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Beispiele: Verschiebungsfeld, Geschwindigkeitsfeld, Kraftfeld, Wärmeflussfeld. Wir bilden das **Differenzial** von \mathbf{v} an der Stelle \mathbf{r} in Richtung $d\mathbf{r}$ analog als

$$(2.2.9) \quad d\mathbf{v}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{v}(\mathbf{r} + h d\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})].$$

Auch dieser Ausdruck ist bei hinreichender Glattheit von $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ linear in $d\mathbf{r}$. Es existiert also ein Tensor(-feld) $grad \mathbf{v}(\mathbf{r})$, der **Gradient** von \mathbf{v} , der folgendes leistet:

$$(2.2.10) \quad d\mathbf{v}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = grad \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Nach Wahl einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ ist das Differenzial in Richtung von \mathbf{e}_i

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{e}_i) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{v}(\mathbf{r} + h \mathbf{e}_i) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] = \frac{\partial \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)_{,i} \\ &= grad \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

die partielle Ableitung. Stellt man das Vektorfeld durch seine Komponenten(-felder) bezüglich einer *festen* ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ dar

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i,$$

so lassen sich die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes ausdrücken durch diejenigen seiner skalaren Komponentenfelder

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)_{,i} = [v_j(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_j]_{,i} = v_j(x_1, x_2, x_3)_{,i} \mathbf{e}_j,$$

so dass gilt

$$\begin{aligned} grad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i &= \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)_{,i} = v_j(x_1, x_2, x_3)_{,i} \mathbf{e}_j \\ &= [v_j(x_1, x_2, x_3)_{,k} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k] \cdot \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Somit ist der Gradient eines Vektorfeldes \mathbf{v} das Tensorfeld

$(2.2.11) \quad grad \mathbf{v} = v_j(x_1, x_2, x_3)_{,k} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$
--

Die Komponentenmatrix des Gradienten ist also

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Man notiert das transponierte Gradientenfeld als $grad^T \mathbf{v}$. Der symmetrische Anteil eines Gradienten wird in der Kinematik oft benötigt. Er heißt **Deformator** des Vektorfeldes

$$(2.2.12) \quad def \mathbf{v} := \frac{1}{2} (grad \mathbf{v} + grad^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (v_{j,k} + v_{k,j}) \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k.$$

Seine Komponentenmatrix ist bezüglich einer ONB

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Die Spur des Gradienten eines Vektorfeldes wird als **Divergenz** (-feld) bezeichnet

$$(2.2.13) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} := \operatorname{sp}(\operatorname{grad} \mathbf{v}) = v_{j,j} = v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Skalarfeld.

Die **Rotation** (engl. *curl*) eines Vektorfeldes wird definiert durch den axialen Vektor \mathbf{t}^A des antisymmetrischen Anteils des Gradienten

$$\mathbf{W} := \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{v} - \operatorname{grad}^T \mathbf{v})$$

als

$$(2.2.14) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} := 2 \mathbf{t}^A.$$

Die Komponentenmatrix von \mathbf{W} ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit folgt die Komponentendarstellung

$$(2.2.15) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = (v_{3,2} - v_{2,3}) \mathbf{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1}) \mathbf{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2}) \mathbf{e}_3 = v_{i,k} \varepsilon_{kil} \mathbf{e}_l.$$

Ähnlich definiert man die *Divergenz eines Tensorfeldes* \mathbf{T} als dasjenige Vektorfeld, das einen beliebigen konstanten Vektor \mathbf{a} als

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} = (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} := \operatorname{div}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{a})$$

abbildet. Setzen wir $\mathbf{a} \equiv \mathbf{e}_i$, so ist die i -te Komponente von $\operatorname{div} \mathbf{T}$ mit (2.2.13)

$$\mathbf{e}_i \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}) = \operatorname{div}(T_{im} \mathbf{e}_m) = T_{im,k} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_k = T_{im,m}$$

und deshalb

$$(2.2.16) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} = T_{im,m} \mathbf{e}_i,$$

ein Vektorfeld.

Man definiert analog die *Rotation eines Tensorfeldes* \mathbf{T} durch seine Wirkung auf einen konstanten Vektor \mathbf{a}

$$(2.2.17) \quad (\operatorname{rot} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} := \operatorname{rot}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}) = \operatorname{rot}(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{a}).$$

Setzt man $\mathbf{a} \equiv \mathbf{e}_i$, so ist mit (2.2.15)

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{e}_i &= \operatorname{rot}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}) = \operatorname{rot}(T_{ij} \mathbf{e}_j) = T_{ij,k} \varepsilon_{kjl} \mathbf{e}_l \\ &= T_{mj,k} \varepsilon_{lkj} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

und deshalb

$$(2.2.18) \quad \operatorname{rot} \mathbf{T} = T_{mj,k} \varepsilon_{lkj} \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_m,$$

also ebenfalls ein Tensorfeld.

Später werden wir noch den **Inkompatibilitätstensor** eines symmetrischen Tensorfeldes \mathbf{T} benötigen als

$$(2.2.19) \quad \operatorname{ink} \mathbf{T} := -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T} = \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{lmn} T_{jm, kn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l.$$

Er bildet ein Tensorfeld zweiter Stufe.

Man beachte, dass die Definitionen von *grad*, *div* und *rot* in der Literatur nicht einheitlich sind.

Grundsätzlich gelten die Regeln:

Gradientenbildungen erhöhen die Stufe eines Feldes um 1.

Divergenzbildungen reduzieren sie um 1.

Rotationsbildungen lassen sie unverändert.

Ebenso gelten die Kettenregel und die Produktregel für die Gradienten, Divergenzen und Rotationen.

2.2.2 Der Nabla-Operator

In der Literatur wird die Analysis in linearen Räumen oft durch den **Nabla³⁴-Operator** formalisiert, der einen Doppelcharakter als Differenzialoperator und als (Ko-)Vektor besitzt. Nabla wird eingeführt als

$$(2.2.20) \quad \nabla := \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$$

bezüglich einer festen ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ und mit Feldern beliebiger Stufe algebraisch verknüpft, also durch ein Skalarprodukt oder eine Überschiebung, ein Tensorprodukt, ein Kreuzprodukt, o. ä.

Die Anwendungsvorschrift lautet dann:

1.) Wende den Differenzialoperator $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auf alle diese Felder an (ggf. mit der Produktregel).

2.) Binde \mathbf{e}_i mit dem Ergebnis im Sinne der algebraischen Verknüpfung.

Man beachte, dass die Reihenfolge der beiden Schritte bei krummlinigen KOOS nicht vertauschbar ist.

Als Beispiel wählen wir den *Gradienten eines Skalarfeldes* gemäß (2.2.4):

³⁴ von griechisch $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ = Harfe

$$(2.2.21) \quad \text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \phi_{,i} \mathbf{e}_i = \nabla \phi = \phi \nabla.$$

Hierin ist die algebraische Verknüpfung zwischen ϕ und ∇ die Skalarenmultiplikation eines (Ko-)Vektors, wobei man den Skalar vor oder hinter dem Vektor notieren kann.

Bei dem *Gradienten eines Vektorfeldes* ist diese Reihenfolge nicht mehr beliebig, da hier ein Tensorprodukt verwendet werden muss nach (2.2.11)

$$(2.2.22) \quad \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial v_j(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k = v_{j,k}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_j \otimes \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \mathbf{v} \otimes \nabla.$$

Für die Divergenz (2.2.13) und Rotation (2.2.15) eines Vektorfeldes ergeben sich

$$(2.2.23) \quad \text{div } \mathbf{v} = \text{sp}(\mathbf{v} \otimes \nabla) = \mathbf{v} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$(2.2.24) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \nabla$$

und für die Divergenz eines Tensorfeldes (2.2.16)

$$(2.2.25) \quad \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathbf{T}^T$$

und für die Rotation eines Tensorfeldes (2.2.17)

$$(2.2.26) \quad \text{rot } \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T}^T = -(\mathbf{T} \times \nabla)^T.$$

Die Inkompatibilität (2.2.19) ist in Nabla-Schreibweise

$$(2.2.27) \quad \text{ink } \mathbf{T} := -\text{rot rot } \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T} \times \nabla,$$

woraus man gleich die vektorwertige Identität

$$(2.2.28) \quad \text{div ink } \mathbf{T} = \nabla \times \mathbf{T} \times \nabla \cdot \nabla = \mathbf{0}$$

erkennt. Der Deformator (2.2.12) ist

$$(2.2.29) \quad \text{def } \mathbf{v} := \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad}^T \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}).$$

Gilt die Differenzialoperation von Nabla nicht für den ganzen Ausdruck, sondern nur für einen Teil davon, so wird dies durch Klammer oder durch Anwendungspfeile angezeigt, also beispielsweise für zwei differenzierbaren Skalarfelder ψ und ϕ

$$\nabla(\phi \psi) = (\nabla \phi) \psi + (\nabla \psi) \phi = \nabla \downarrow \phi \psi + \nabla \phi \downarrow \psi$$

gemäß (2.2.31).

Es gelten für alle differenzierbaren Skalarfelder $\psi(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r})$, Vektorfelder $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und Tensorfelder $\mathbf{T}(\mathbf{r})$, $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ die folgenden Regeln:

$$(2.2.30) \quad \text{grad}(\psi + \phi) = \nabla(\psi + \phi) = \nabla \psi + \nabla \phi = \text{grad } \psi + \text{grad } \phi$$

$$(2.2.31) \quad \text{grad}(\psi \phi) = \phi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \phi$$

$$(2.2.32) \quad \text{grad}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \otimes \nabla = \mathbf{u} \otimes \nabla + \mathbf{v} \otimes \nabla = \text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{v}$$

$$(2.2.33) \quad \text{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \nabla = \mathbf{u} \cdot \nabla + \mathbf{v} \cdot \nabla = \text{div } \mathbf{u} + \text{div } \mathbf{v}$$

$$(2.2.34) \quad \text{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{u} + \text{rot } \mathbf{v}$$

$$(2.2.35) \quad \text{grad}(\phi \mathbf{v}) = (\phi \mathbf{v}) \otimes \nabla = \phi (\mathbf{v} \otimes \nabla) + \mathbf{v} \otimes (\phi \nabla) = \phi \text{grad } \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \text{grad } \phi$$

$$(2.2.36) \quad \text{div}(\phi \mathbf{v}) = (\phi \mathbf{v}) \cdot \nabla = \phi (\mathbf{v} \cdot \nabla) + \mathbf{v} \cdot (\phi \nabla) = \phi \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi$$

$$(2.2.37) \quad \text{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \nabla = (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \\
 &= \text{grad}^T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \text{grad}^T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} \\
 (2.2.38) \quad \text{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \nabla = \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \nabla) + (\mathbf{u} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \text{ div } \mathbf{v} + \text{grad}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\
 (2.2.39) \quad \text{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \cdot \nabla = \mathbf{T} \cdot \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \\
 &= \text{sp}(\mathbf{T} \cdot \text{grad } \mathbf{v}) + \text{div}(\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{T}^T) \cdot \mathbf{v} \\
 (2.2.40) \quad \text{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \cdot \nabla = \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla) \\
 &= \text{sp}(\mathbf{T}^T \cdot \text{grad } \mathbf{v}) + \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{v} + \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \\
 (2.2.41) \quad \text{div}(\varphi \mathbf{T}) &= (\varphi \mathbf{T}) \cdot \nabla = \varphi (\mathbf{T} \cdot \nabla) + \mathbf{T} \cdot (\varphi \nabla) = \varphi \text{ div } \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \text{grad } \varphi \\
 (2.2.42) \quad \text{div}(\mathbf{T} + \mathbf{S}) &= (\mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \nabla = \mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{S} \cdot \nabla = \text{div } \mathbf{T} + \text{div } \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

Mit der Nabla-Schreibweise sieht man folgende Identitäten für alle differenzierbaren Skalarfelder $\varphi(\mathbf{r})$, Vektorfelder $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und Tensorfelder $\mathbf{T}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned}
 (2.2.43) \quad \text{rot grad } \varphi &= \nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0} \\
 (2.2.44) \quad \text{rot grad}^T \mathbf{v} &= \nabla \times (\mathbf{v} \otimes \nabla) = (\nabla \times \mathbf{v}) \otimes \nabla = \text{grad rot } \mathbf{v} \\
 (2.2.45) \quad \text{rot grad } \mathbf{v} &= \nabla \times (\nabla \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{0} \\
 (2.2.46) \quad \text{div rot } \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{v} = 0 \\
 (2.2.47) \quad \text{rot rot } \mathbf{v} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla - (\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot \nabla = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{div grad } \mathbf{v} \\
 (2.2.48) \quad \text{div grad}^T \mathbf{v} &= (\nabla \otimes \mathbf{v}) \cdot \nabla = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \nabla = \text{grad div } \mathbf{v} \\
 (2.2.49) \quad \text{div grad grad } \varphi &= [(\nabla \varphi) \otimes \nabla] \cdot \nabla = [(\nabla \varphi) \cdot \nabla] \nabla = \text{grad div grad } \varphi \\
 (2.2.50) \quad \text{div grad grad } \mathbf{v} &= [(\mathbf{v} \otimes \nabla) \otimes \nabla] \cdot \nabla = [(\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot \nabla] \otimes \nabla = \text{grad div grad } \mathbf{v} \\
 (2.2.51) \quad \text{div div grad } \mathbf{v} &= \nabla \cdot [(\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot \nabla] = [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla] \cdot \nabla = \text{div grad div } \mathbf{v} \\
 (2.2.52) \quad \text{div grad rot } \mathbf{v} &= [(\nabla \times \mathbf{v}) \otimes \nabla] \cdot \nabla = \nabla \times [(\mathbf{v} \otimes \nabla) \cdot \nabla] = \text{rot div grad } \mathbf{v} \\
 (2.2.53) \quad \text{div}(\text{rot } \mathbf{T})^T &= -\mathbf{T} \times \nabla \cdot \nabla = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Der **LAPLACE³⁵-Operator** ist definiert als

$$(2.2.54) \quad \Delta := \nabla \cdot \nabla,$$

was der Operation *div grad* entspricht. Beispiele:

Sei φ ein Skalarfeld, so ist

$$(2.2.55) \quad \Delta \varphi = \varphi \nabla \cdot \nabla = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \varphi = \phi_{,ii}$$

ein Skalarfeld.

Sei \mathbf{v} ein Vektorfeld, so ist

$$(2.2.56) \quad \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v} \Delta = \mathbf{v} (\nabla \cdot \nabla) = \mathbf{v} \otimes \nabla \cdot \nabla = \text{div grad } \mathbf{v}$$

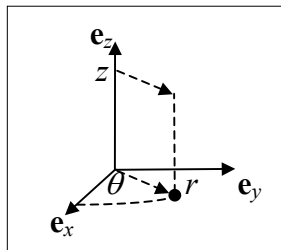
ein Vektorfeld.

³⁵ Pierre Simon Laplace (1749-1827)

2.2.3 Zylinderkoordinaten

Will man Punkte im geometrischen Raum beschreiben, so kann man dafür Koordinaten verwenden. Am einfachsten ist die Verwendung von kartesischen Koordinaten. Besitzt jedoch ein physikalisches Problem eine Rotationssymmetrie, so kann es vorteilhaft sein, Zylinderkoordinaten zu verwenden. Wir leiten deshalb die wichtigsten Darstellungen kurz in Zylinderkoordinaten her.

Ein Punkt wird durch die Angabe von drei Zahlen r , θ , z beschrieben, worin r der Abstand von der z -Achse, z die Höhe über der Grundfläche und θ der eingezeichnete Winkel in der Grundfläche ist, der zwischen 0° und 360° liegt. Da in den Endwerten die Winkelangabe nicht eindeutig ist, lässt man diese Punkte aus und betrachtet nur das offene Intervall. Genau so lässt man Punkte auf der z -Achse aus, für die auch kein eindeutiger Winkel zugeordnet werden kann.



Zylinderkoordinaten sind rechtwinklig und krummlinig. Sei $\{x, y, z\}$ kartesisches KOOS mit ONB $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, so gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 & \theta &= \arctan \frac{y}{x} \quad \text{für } r \neq 0, \end{aligned}$$

während z für beide Systeme identisch ist. Man kann in jedem Punkt mit den Koordinaten $\{r, \theta, z\}$ eine lokale ONB einführen durch

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(\theta) &:= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta(\theta) &:= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &. \end{aligned}$$

Man stellt folgendes fest

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} d\theta = d\theta \mathbf{e}_\theta \\ d\mathbf{e}_\theta &= \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} d\theta = -d\theta \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Der Ortsvektor ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \\ &= r \mathbf{e}_r(\theta) + z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Damit ist das Differenzial des Ortsvektors

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z$$

$$= dr \mathbf{e}_r(\theta) + r d\mathbf{e}_r(\theta) + dz \mathbf{e}_z = dr \mathbf{e}_r(\theta) + r d\theta \mathbf{e}_\theta(\theta) + dz \mathbf{e}_z.$$

Den *Gradienten eines Skalarfeldes* $\phi(r, \theta, z)$ erhält man über das Differenzial

$$\begin{aligned} d\phi(r, \theta, z) &= \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \phi_{,r} dr + \phi_{,\theta} d\theta + \phi_{,z} dz \\ &= \text{grad } \phi \cdot (dr \mathbf{e}_r(\theta) + r d\theta \mathbf{e}_\theta(\theta) + dz \mathbf{e}_z) \\ &= \phi_{,r} \mathbf{e}_r \cdot dr \mathbf{e}_r + \phi_{,\theta} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot r d\theta \mathbf{e}_\theta + \phi_{,z} \mathbf{e}_z \cdot dz \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

und durch Vergleich

$$(2.2.57) \quad \text{grad } \phi = \phi_{,r} \mathbf{e}_r + \phi_{,\theta} \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta + \phi_{,z} \mathbf{e}_z.$$

Den *Gradienten eines Vektorfeldes* $\mathbf{v}(r, \theta, z)$ erhält man über das Differenzial als

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) &= \mathbf{v}_{,r} dr + \mathbf{v}_{,\theta} d\theta + \mathbf{v}_{,z} dz \\ &= \text{grad } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Darin sind

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,r} &= (v^i \mathbf{e}_i)_{,r} = v^r_{,r} \mathbf{e}_r + v^\theta_{,r} \mathbf{e}_\theta + v^z_{,r} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}_{,\theta} &= (v^i \mathbf{e}_i)_{,\theta} = v^r_{,\theta} \mathbf{e}_r + v^r \mathbf{e}_{r,\theta} + v^\theta_{,\theta} \mathbf{e}_\theta + v^\theta \mathbf{e}_{\theta,\theta} + v^z_{,\theta} \mathbf{e}_z \\ &= v^r_{,\theta} \mathbf{e}_r + v^r \mathbf{e}_\theta + v^\theta_{,\theta} \mathbf{e}_\theta - v^\theta \mathbf{e}_r + v^z_{,\theta} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v}_{,z} &= (v^i \mathbf{e}_i)_{,z} = v^r_{,z} \mathbf{e}_r + v^\theta_{,z} \mathbf{e}_\theta + v^z_{,z} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Komponentenvergleich erhält man die Komponentenmatrix von $\text{grad } \mathbf{v}$ als

$$(2.2.58) \quad \begin{bmatrix} v^r_{,r} & \frac{1}{r}(v^r_{,\theta} - v^\theta) & v^r_{,z} \\ v^\theta_{,r} & \frac{1}{r}(v^\theta_{,\theta} + v^r) & v^\theta_{,z} \\ v^z_{,r} & \frac{1}{r}v^z_{,\theta} & v^z_{,z} \end{bmatrix}.$$

Die Divergenz ist dann

$$(2.2.59) \quad \text{div } \mathbf{v} = v^r_{,r} + \frac{1}{r} (v^\theta_{,\theta} + v^r) + v^z_{,z}$$

und die Rotation

$$(2.2.60) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r} v^z_{,\theta} - v^\theta_{,z} \right) \mathbf{e}_r + (v^r_{,z} - v^z_{,r}) \mathbf{e}_\theta + \left[v^\theta_{,r} + \frac{1}{r} (v^\theta - v^r_{,\theta}) \right] \mathbf{e}_z.$$

Für die *Divergenz eines Tensorfeldes* erhält man

$$(2.2.61) \quad \begin{aligned} \text{div } \mathbf{T} &= (T^{rr}_{,r} + \frac{1}{r} T^{r\theta}_{,\theta} + \frac{T^{rr} - T^{\theta\theta}}{r} + T^{rz}_{,z}) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (T^{\theta r}_{,r} + \frac{1}{r} T^{\theta\theta}_{,\theta} + \frac{T^{r\theta} + T^{\theta r}}{r} + T^{\theta z}_{,z}) \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

$$+ (T^{zr},r + \frac{1}{r} T^{z\theta},\theta + \frac{T^{zr}}{r} + T^{zz},z) \mathbf{e}_z.$$

Der Nabla-Operator ist in Zylinderkoordinaten

$$(2.2.62) \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{r\partial\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

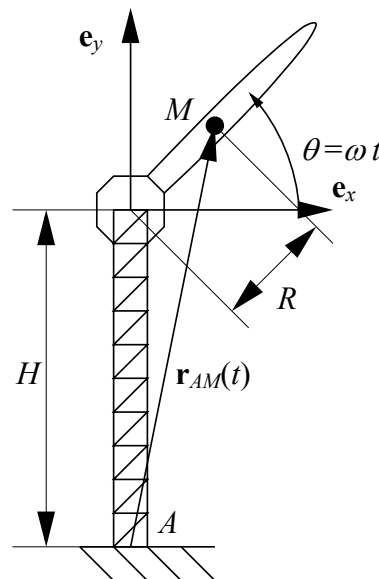
und der LAPLACE-Operator

$$(2.2.63) \quad \Delta := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Analoge Beziehungen für Kugelkoordinaten findet man beispielsweise bei TROSTEL (1993).

Beispiel 8. Zylinderkoordinaten I

Das abgebildete Windrad mit nur einem Rotorblatt drehe sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω . Das Rotorblatt habe die Masse m , und kann näherungsweise als homogener Stab mit dem Massenträgheitsmoment J bezüglich der in den Stabmittelpunkt verschobenen Drehachse \mathbf{e}_z angesehen werden. Es greifen keine Momente und Kräfte an. Berechnet werden soll das durch die Unwucht verursachte resultierende Moment am Fundament A .



Lösung:

Als erstes müssen wir das Windrad freischneiden. Dies tun wir am Fußpunkt A , wodurch das Schnittmoment $\mathbf{m}_A(t)$ eingeführt wird. Dies ist das einzige angreifende Moment. Der Drall bezüglich A ist durch

$$\mathbf{d}(t) = m \mathbf{r}_{AM}(t) \times \dot{\mathbf{r}}_{AM}(t) + J \omega(t) \mathbf{e}_z$$

gegeben. Der erste Summand erfasst die Bewegung des Massenmittelpunktes des Rotorblattes (STEINER³⁶-Anteil), der zweite Summand berücksichtigt die Drehung des Rotorblattes um seinen Massenmittelpunkt. Das Massenträgheitsmoment eines

³⁶ Jakob Steiner (1796-1863)

homogenen Stabes bezüglich einer Achse senkrecht zur Längsachse durch den Massenmittelpunkt ist

$$J = m l^2 / 12 = m (2R)^2 / 12 = m R^2 / 3.$$

Die Drehachse ist laut Skizze die \mathbf{e}_z -Richtung. Laut Drallsatz ist die Summe der angreifenden Momente gleich der Dralländerung.

$$\mathbf{m}_A(t) = \mathbf{d}(t)^\bullet = [m \mathbf{r}_{AM}(t) \times \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet]^\bullet + J \omega(t)^\bullet \mathbf{e}_z.$$

Bei konstanter Drehzahl ist $\omega(t)^\bullet = 0$, und es bleibt

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_A(t) &= m \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet \times \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet + m \mathbf{r}_{AM}(t) \times \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet \\ \text{(B8.1)} \quad &= m \mathbf{r}_{AM}(t) \times \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet. \end{aligned}$$

Den Ortsvektor geben wir bezüglich einer Basis in der Nabe des Windrades an. Dabei lässt sich der Abstand vom Fundament am besten bezüglich der festen kartesischen Basis angeben, während für den Ort des Rotorblattes ein Zylinderkoordinatensystem in der Nabe verwendet wird. Für den Ortsvektor erhalten wir

$$\mathbf{r}_{AM}(t) = H \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_r(\theta).$$

Der Winkel θ ergibt sich mit der Anfangsbedingung $\theta(0) = 0$ zu $\theta = \omega t$. Zum Ermitteln von $\mathbf{r}_{AM}^\bullet(t)$ bilden wir mit Hilfe der Kettenregel die Zeitableitung, wobei

$$\frac{d\mathbf{e}_r(\theta)}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta(\theta) \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta(\theta)}{d\theta} = -\mathbf{e}_r(\theta)$$

zu beachten sind (Abschnitt 2.2.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet &= [H \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_r(\theta)]^\bullet = R \omega \mathbf{e}_\theta(\theta) \\ \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet^\bullet &= -R \omega^2 \mathbf{e}_r(\theta). \end{aligned}$$

Nun kann Gleichung (B8.1) ausgewertet werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_A(t) &= m \mathbf{r}_{AM}(t) \times \mathbf{r}_{AM}(t)^\bullet^\bullet = -R \omega^2 m [H \mathbf{e}_y + R \mathbf{e}_r(\theta)] \times \mathbf{e}_r(\theta) \\ &= -R \omega^2 m H \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_r(\theta), \end{aligned}$$

was mit $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$ zu

$$\mathbf{m}_A(t) = R \omega^2 m H \cos \theta \mathbf{e}_z$$

zusammengefasst wird. Dieses muss vom Fundament aufgenommen werden.

Beispiel 9. Zylinderkoordinaten II

Berechnet werden soll der Drall einer mit ω um \mathbf{e}_z rotierenden homogenen Kreisscheibe der Dicke D , Radius R und Dichte ρ bezüglich der Drehachse.

Lösung:

Wir stellen den durch (2.1.110) definierten Drall zunächst als Volumenintegral in Zylinderkoordinaten dar

$$\mathbf{d} = \int_0^D \int_0^R \int_0^{2\pi} \mathbf{r} \times \mathbf{r}^\bullet \rho r d\theta dr dz.$$

Der Ortsvektor ist $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\omega t)$, womit sich \mathbf{r}^\bullet mit der Kettenregel und

$$\frac{d\mathbf{e}_r(\theta)}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta(\theta)$$

zu

$$\mathbf{r}' = r \omega \mathbf{e}_\theta(\omega t)$$

ergibt. Damit ist der Drall

$$\mathbf{d} = \omega D\rho \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta d\theta dr.$$

Mit $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z$, welches unabhängig von r und θ ist, findet man schließlich

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \pi \omega D\rho R^4 \mathbf{e}_z.$$

2.2.4 Integraltransformationen

werden oft benötigt, um Volumenintegrale in Oberflächenintegrale und umgekehrt zu transformieren.

Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI³⁷: Sei \mathcal{V} ein dreidimensionales reguläres Volumengebiet im EUKLIDischen Raum und \mathcal{A} dessen Oberfläche mit äußerer Flächennormale \mathbf{n} . Sei weiterhin \mathbf{U} ein Tensorfeld beliebiger Stufe und \oplus ein beliebiges Produkt zwischen \mathbf{U} und \mathbf{n} . Dann gilt

$$(2.2.64) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{U} \oplus \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} \oplus \nabla dV$$

Dabei sind folgende Spezialfälle für uns wichtig:

- \mathbf{U} ist ein Skalarfeld ϕ und \oplus die Skalarmultiplikation zwischen Skalar und Vektor. Dann gilt

$$(2.2.65) \quad \int_{\mathcal{A}} \phi \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \phi \nabla dV = \int_{\mathcal{V}} \text{grad } \phi dV.$$

- \mathbf{U} ist ein Vektorfeld \mathbf{u} und \oplus das Skalarprodukt zwischen Vektoren. Dann gilt

$$(2.2.66) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \nabla dV = \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{u} dV.$$

Wir wollen für diesen Fall, aus dem die anderen leicht zu folgern sind, eine Beweisskizze geben. Wir schreiben in Komponenten bezüglich einer ONB

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{u} dV = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Dazu nehmen wir zunächst an, dass das Volumengebiet konvex ist. Projizieren wir es in die x_2 - x_3 -KOO-Ebene, so erhalten wir die Projektionsfläche \mathcal{A}_{23} . Wir teilen nun die Oberfläche

³⁷ Carl Friedrich Gauß (1777-1855), Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801-1862)

von \mathcal{V} auf in den bezüglich x_1 positiven Teil \mathcal{A}' und den negativen Teil \mathcal{A}'' . Ein zur x_1 -Achse paralleler Projektionsstrahl durchdringt die Oberfläche \mathcal{A} von \mathcal{V} in den Punkten P' und P'' . In diesen Punkten bezeichnen wir die Flächenelemente mit dA' bzw. dA'' und die Normalen mit \mathbf{n}' bzw. \mathbf{n}'' . Die Projektion der beiden Flächenelemente in die x_2-x_3 -Ebene sei $dA_{23} = dx_2 dx_3$. Für sie gilt

$$dA_{23} = dA' \cos(\mathbf{n}', \mathbf{e}_1) = dA'' \cos(\mathbf{n}'', -\mathbf{e}_1),$$

wobei sich der Cosinus des von \mathbf{n}' und \mathbf{e}_1 eingeschlossene Winkel durch das Skalarprodukt berechnen lässt

$$\cos(\mathbf{n}', \mathbf{e}_1) = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{e}_1$$

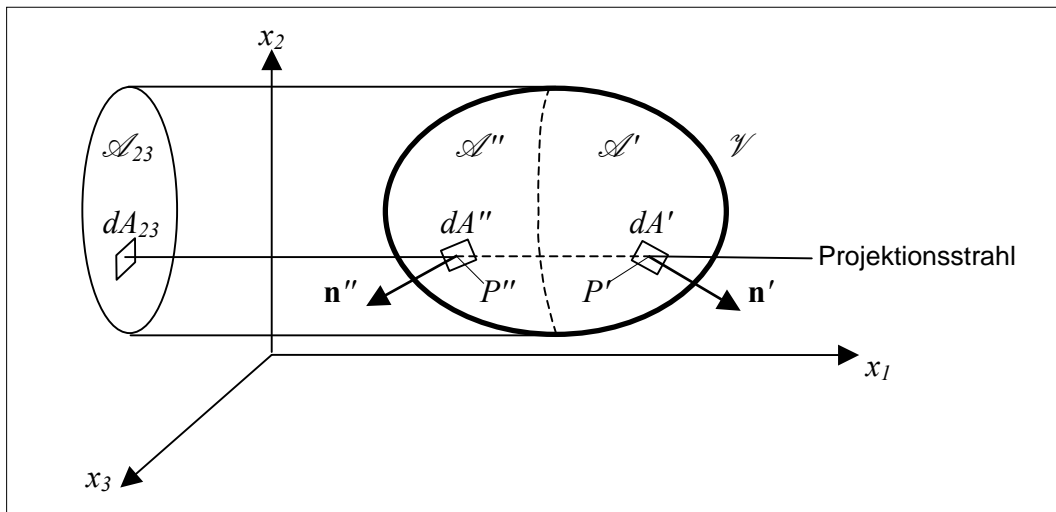
und analog

$$\cos(\mathbf{n}'', -\mathbf{e}_1) = -\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{e}_1,$$

so dass

$$dA_{23} = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{e}_1 dA' = -\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{e}_1 dA''$$

ist.



Damit ist der erste Term des Integrals nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_{\mathcal{A}_{23}} \int_{P''}^{P'} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dA_{23} = \int_{\mathcal{A}_{23}} [u_1(P') - u_1(P'')] dA_{23} \\ &= \int_{\mathcal{A}'} u_1 \mathbf{n}' \cdot \mathbf{e}_1 dA' - \int_{\mathcal{A}''} u_1 (-\mathbf{n}'' \cdot \mathbf{e}_1) dA'' = \int_{\mathcal{A}} u_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n} dA. \end{aligned}$$

Für die anderen beiden Terme des Integrals erhalten wir analog

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\mathcal{A}} u_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n} dA$$

und

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\mathcal{A}} u_3 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n} dA$$

und damit insgesamt in der Summe

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Ist das Gebiet nicht konvex, so durchdringt es der Projektionsstrahl möglicherweise mehr als zweimal. Dann müssen auch diese Teile von \mathcal{A} in die \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 -Ebene projiziert werden. Man erhält aber insgesamt wieder die Formel von GAUSS-OSTROGRADSKI. Enthält das Gebiet zudem noch innere Oberflächen, so muss auch über diese integriert werden.

Für $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ mit einem Vektorfeld \mathbf{v} und eine Tensorfeld \mathbf{T} folgt aus dem Integralsatz mit (2.2.40)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA &= \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \, dV = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{T} \cdot (\mathbf{v} \otimes \nabla) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{T} \cdot \nabla)] \, dV \\ (2.2.67) \quad &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T}) \, dV. \end{aligned}$$

- \mathbf{U} ist ein Vektorfeld \mathbf{u} und \otimes das Kreuzprodukt zwischen Vektoren. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \times \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \times \nabla \, dV = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dV$$

oder

$$(2.2.68) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} \times \mathbf{u} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{rot} \mathbf{u} \, dV.$$

- \mathbf{U} ist ein Vektorfeld \mathbf{u} und \otimes das Tensorprodukt zwischen Vektoren. Dann gilt

$$(2.2.69) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \otimes \nabla \, dV = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{grad} \mathbf{u} \, dV.$$

- \mathbf{U} ist ein Tensorfeld und \cdot die einfache Kontraktion. Dann gilt

$$(2.2.70) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{U} \cdot \nabla \, dV = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{U} \, dV.$$

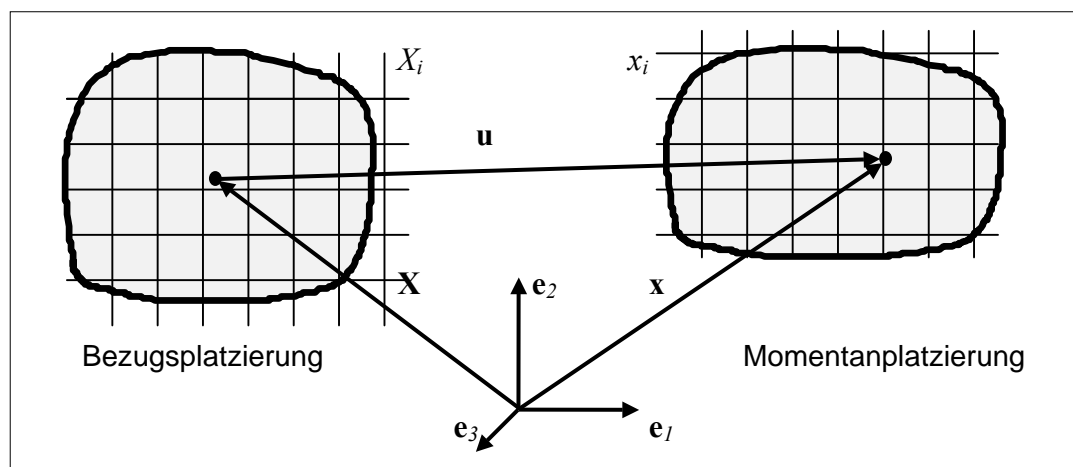
3 GRUNDLAGEN DER KONTINUUMSMECHANIK

Literatur

- Altenbach, H.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer Vieweg, 2. Aufl., Berlin (2012)
- Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)
- Fung, Y. C.; Tong, P.:** *Classical and Computational Solid Mechanics*. World Scientific, Singapore (2003)
- Gonzalez, O.; Stuart, A. M.:** *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press (2008)
- Irgens, F.:** *Continuum Mechanics*. Springer (2008)
- Karasudhi, P.:** *Foundations of Solid Mechanics*. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1991)
- Lai, W. M.; Rubin, D.; Krempl, E.:** *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1993)
- Mang, H.; Hofstetter, G.:** *Festigkeitslehre*. Springer (2000)
- Parisch, H.:** *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Teubner (2003)
- Shames, I. H.; Cozzarelli, F. A.:** *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1992)
- Slaughter, W. S.:** *The Linearized Theory of Elasticity*. Birkhäuser, Boston (2002)
- Stark, R.:** *Festigkeitslehre - Aufgaben und Lösungen*. Springer (2006)

3.1 Deformationsgeometrie

In der Kontinuumsmechanik betrachten wir materielle Körper, die kontinuierlich ein Gebiet des dreidimensionalen EUKLIDischen Raumes ausfüllen und auf deren Innerem und Oberfläche physikalische Größen als Felder definiert sind. Die Punkte des Körpers bezeichnen wir als **materielle Punkte**.



In der *bezogenen Beschreibungsweise* betrachten wir den Körper in seinen verschiedenen Momentanplatzierungen bezüglich einer Bezugsplatzierung zu einer Bezugszeit. Sei also χ

diejenige Abbildung, die den Ortsvektor \mathbf{X} eines materiellen Punktes in der Bezugsplatzierung in dessen Ortsvektor \mathbf{x} zu einer Zeit t in der Momentanplatzierung abbildet

$$(3.1.1) \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t).$$

Zur Bezugszeit t_0 gilt dann speziell

$$(3.1.2) \quad \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t_0).$$

Der Differenzvektor

$$(3.1.3) \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, t_0) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$$

heißt **Verschiebungsvektor**. Nach Wahl einer ONB gelten die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i = (x_i - X_i) \mathbf{e}_i$$

und der Zusammenhang

$$(3.1.4) \quad x_i = \chi(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{e}_i =: \chi_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

mit

$$(3.1.5) \quad X_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t_0).$$

Da die kartesischen Koordinaten $\{X_i\}$ (\equiv Komponenten des Ortsvektors \mathbf{X} bezüglich einer ONB $\{\mathbf{e}_i\}$) für einen Körperpunkt zu allen Zeiten dieselben sind, nennt man sie **materielle Koordinaten**. Demgegenüber ändern sich die kartesischen Koordinaten $\{x_i\}$ (\equiv Komponenten des Ortsvektors \mathbf{x} bezüglich der ONB) eines materiellen Punktes, wenn sich der Körper im Raum bewegt. $\{x_i\}$ heißen **räumliche Koordinaten**.

Halten wir in $\chi(\mathbf{X}, t)$ den Ortsvektor \mathbf{X} fest und lassen die Zeit t laufen, so erhalten wir die **Bahn** desjenigen materiellen Punktes im Raum, der in der Bezugsplatzierung durch \mathbf{X} beschrieben wurde.

Da sich zwei materielle Punkte zu einer Zeit nicht an einer Stelle gleichzeitig aufhalten können, ist die Funktion χ im Körpergebiet für festes t invertierbar:

$$(3.1.6) \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad \text{falls} \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$$

oder komponentenweise

$$(3.1.7) \quad X_i = \chi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{falls} \quad x_i = \chi_i(X_1, X_2, X_3, t).$$

Sei nun ϕ eine physikalische Größe, die in jedem Körperpunkt definiert ist und die sich mit der Zeit ändern kann. Die Darstellung dieser Größe als Funktion der materiellen KOO

$$(3.1.8) \quad \phi_L(\mathbf{X}, t) = \phi_L(X_1, X_2, X_3, t)$$

heißt **materielle** oder **LAGRANGE³⁸sche Darstellung** von ϕ . Transformieren wir hingegen die materiellen Koordinaten in die momentanen räumlichen KOO desselben materiellen Punktes, so erhalten wir die **räumliche** oder **EULERSche Darstellung** von ϕ als

$$(3.1.9) \quad \begin{aligned} \phi_L(X_1, X_2, X_3, t) &= \phi_L(\chi_1^{-1}(x_1, x_2, x_3, t), \chi_2^{-1}(x_1, x_2, x_3, t), \chi_3^{-1}(x_1, x_2, x_3, t), t) \\ &=: \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) = \phi_E(\chi_1(X_1, X_2, X_3, t), \chi_2(X_1, X_2, X_3, t), \chi_3(X_1, X_2, X_3, t), t). \end{aligned}$$

Speziell gelten

³⁸ Jean Louis Lagrange (1736-1813)

$$\mathbf{x} = \chi_L(\mathbf{X}, t) = \chi_E(\mathbf{x}, t),$$

so dass letztere Funktion trivialerweise die Identität im Ortsargument ist.

In der räumlichen Darstellung beschreiben die räumlichen KOO $\{x_i\}$ einen Raumpunkt, der im Laufe der Zeit von verschiedenen materiellen Punkten okkupiert wird. ϕ_E ist also die Größe von ϕ an einer Stelle im Raum ohne Rücksicht darauf, welcher materielle Punkt sich dort gerade befindet. Da man mit χ_i oder χ_i^{-1} die materiellen in die räumlichen Koordinaten bzw. umgekehrt transformieren kann, sind beide Darstellungen äquivalent. Es hängt von der Art des betrachteten Vorganges ab, welche Darstellung praktisch vorteilhafter ist.

Betrachtet man die zeitliche Änderung von ϕ_L für einen festen materiellen Punkt \mathbf{X} , so erhält man die **materielle Zeitableitung**

$$(3.1.10) \quad \phi_L(\mathbf{X}, t)^\bullet := \partial \phi_L(\mathbf{X}, t) / \partial t = \partial \phi_L(X_1, X_2, X_3, t) / \partial t = \phi_{L,t}$$

als partielle Ableitung der LAGRANGESchen Darstellung von ϕ_L nach der Zeit. Dies führt nach Transformation (3.1.9) in die EULERSche Darstellung mit der Kettenregel auf

$$\begin{aligned} \phi_L(\mathbf{X}, t)^\bullet &:= \phi_E(\chi_1(X_1, X_2, X_3, t), \chi_2(X_1, X_2, X_3, t), \chi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)^\bullet \\ &= \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial t + \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial x_i \partial \chi_i / \partial t \\ &= \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial t + \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial x_i \chi_i^\bullet \\ &= \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial t + \partial \phi_E(x_1, x_2, x_3, t) / \partial x_i v_i \\ &= \phi_{E,t} + \phi_{E,i} v_i \\ &= \phi_{E,t} + \phi_{E,j} \mathbf{e}_j \cdot v_i \mathbf{e}_i = \end{aligned}$$

$$(3.1.11) \quad \phi^\bullet = \frac{\partial \phi_E}{\partial t} + \text{grad } \phi_E \cdot \mathbf{v}_E$$

mit dem **Geschwindigkeitsfeld**

$$(3.1.12) \quad \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i := \chi(\mathbf{X}, t)^\bullet = \chi_i(\mathbf{X}, t)^\bullet \mathbf{e}_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \mathbf{e}_i = u_i^\bullet \mathbf{e}_i.$$

Danach setzt sich die **substantielle Änderung** ϕ_E^\bullet von ϕ_E zusammen aus der **lokalen Änderung** $\frac{\partial \phi_E}{\partial t}$ und der **konvektiven Änderung** $\text{grad } \phi_E \cdot \mathbf{v}$ infolge des Durchlaufens von materiellen Punkten mit unterschiedlichen ϕ -Werten.

- Ist ϕ_E ein skalares Feld, so ist $\text{grad } \phi_E$ ein Vektorfeld, das mit \mathbf{v} einen Skalar ergibt.
- Ist ϕ_E ein Vektorfeld, so ist $\text{grad } \phi_E$ ein Tensorfeld, das durch die einfache Kontraktion mit \mathbf{v} wieder ein Vektorfeld ergibt.
- Ist ϕ_E ein Tensorfeld K -ter Stufe, so ist $\text{grad } \phi_E$ ein Tensorfeld $K+1$ -ter Stufe, das durch die einfache Kontraktion mit \mathbf{v} wieder ein Tensorfeld K -ter Stufe ergibt.

Das Ergebnis ist in jedem Fall ein Tensorfeld derselben Stufe wie ϕ_E selbst.

Die Ortsableitungen in der LAGRANGESchen Darstellung können mit der materiellen Zeitableitung vertauscht werden, diejenigen in der EULERSchen hingegen mit der lokalen Zeitableitung.

Beispiele:

1.) Sei $\phi \equiv \rho$ die momentane Dichte in dem Körperpunkt

$$\rho := \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{dV_0} \frac{dV_0}{dV} = \rho_0 \frac{dV_0}{dV},$$

wobei $\rho_0 := dm/dV_0$ die Dichte in der Bezugsplatzierung ist. Hierbei wurde die *Erhaltung der Masse* vorausgesetzt

$$dm = dm_0.$$

Dann gilt für die substantielle Änderung

$$(3.1.13) \quad \rho_E^\bullet = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{grad } \rho_E \cdot \mathbf{v}_E.$$

2.) Sei $\phi \equiv \chi$ das räumliche Ortsvektorfeld. Dessen Zeitableitung ergibt das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} mit den Darstellungen

$$\chi^\bullet = \mathbf{v}_L = \frac{\partial \chi_L}{\partial t} = \frac{\partial \chi_E}{\partial t} + \text{grad } \chi_E \cdot \mathbf{v}_E = \frac{\partial \chi_E}{\partial t} + \mathbf{I} \cdot \mathbf{v}_E = \mathbf{v}_E.$$

Da $\chi_E(\mathbf{x}, t)$ die Abbildung ist, die \mathbf{x} sich zeitunabhängig selbst zuordnet, also die Identität, ist deren partielle Zeitableitung Null.

3.) Sei $\phi \equiv \mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld. Dessen Zeitableitung ergibt das **Beschleunigungsfeld** \mathbf{a} mit den Darstellungen

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}^\bullet = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{v}_E.$$

Der Gradient des Verschiebungsfeldes ist nach (2.2.11) in jedem Punkt der **Verschiebungsgradient**

$$(3.1.14) \quad \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) := \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

bezüglich einer ONB. Für ihn gilt

$$(3.1.15) \quad \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad } (\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}) = \text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t) - \text{Grad } \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{I}$$

mit dem **Deformationsgradienten** nach (2.2.11)

$$(3.1.16) \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k.$$

Darin wird als *Grad* die Ableitung bezüglich der materiellen Koordinaten $\{X_i\}$ gekennzeichnet, wie auch für *Div*, *Rot*, *Def*, *Ink*. Der dazugehörige **materielle** oder **LAGRANGEsche Nabla-Operator** ist dann

$$(3.1.17) \quad \nabla_L = \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{e}_k .$$

Dieser Operator kann folglich nur auf Größen in der LAGRANGEschen Darstellung angewendet werden.

Dies soll unterschieden werden von *grad*, *div*, *rot*, *def*, *ink*, was sich auf die Ableitung bezüglich der räumlichen Koordinaten $\{x_i\}$ bezieht, wie auch den **räumlichen** oder **EULERSchen Nabla-Operator**

$$(3.1.18) \quad \nabla_E = \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k ,$$

der nur bei Anwendung auf Größen in der EULERSchen Darstellung definiert ist.

Zwischen beiden gilt die Beziehung nach der Kettenregel

$$(3.1.19) \quad \begin{aligned} \nabla_L &= \frac{\partial}{\partial X_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \chi_i}{\partial X_k} \mathbf{e}_k = \left(\frac{\partial \chi_j}{\partial X_k} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \right) = \mathbf{F}^T \cdot \nabla_E \\ &= \nabla_E \cdot \mathbf{F} . \end{aligned}$$

Wir erhalten gemäß (2.2.10) bei festem t für das räumliche und das materielle Linienelement die Beziehung

(3.1.20) $\mathbf{dx} = d\chi(\mathbf{X}, t, \mathbf{dX}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{dX}$	(EULER 1762)
--	--------------

\mathbf{F} bildet also die Linienelemente der Bezugsplatzierung in diejenigen der Momentanplatzierung ab. Symbolisch kann man dies schreiben als

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dX}} \quad \text{und} \quad \nabla_L = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dX}} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \cdot \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dX}} = \nabla_E \cdot \mathbf{F} .$$

Das Quadrat der Länge eines Linienelementes \mathbf{dx} ist

$$|\mathbf{dx}|^2 = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}) = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}$$

und die Differenz gegenüber der Bezugsplatzierung ist

$$(3.1.21) \quad \begin{aligned} |\mathbf{dx}|^2 - |\mathbf{dX}|^2 &= \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX} \\ &= \mathbf{dX} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX} = \mathbf{dX} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dX} . \end{aligned}$$

$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}$ ist also ein Maß für die Längenänderung des Linienelementes gegenüber desselben materiellen Linienelementes in der Bezugsplatzierung.

Genauso geht mit $\mathbf{dx} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}$ und $\mathbf{dx} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}$ in

$$\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dy} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dY} = \mathbf{dX} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{dY}$$

die Änderung des Winkels zwischen zwei materiellen Linienelementen \mathbf{dX} und \mathbf{dY} ein, was ebenfalls durch den (symmetrischen) **GREEN³⁹schen Verzerrungstensor**

$$(3.1.22) \quad \mathbf{E}^G := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \mathbf{H})^T \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})$$

³⁹ George Green (1793-1841)

beschrieben wird. Er ist wegen des letzten Terms nichtlinear in \mathbf{H} und damit auch in den Verschiebungen \mathbf{u} . Linearisiert man ihn für kleine Verschiebungen, so erhält man mittels der **Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (VVB)** den (linearen) **Verzerrungstensor**

$$(3.1.23) \quad \mathbf{E} := \text{Def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla_L + \nabla_L \otimes \mathbf{u}) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k =: \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k ,$$

der dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten entspricht. Er hat bezüglich einer ONB die Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} .$$

Besteht die Bewegung aus einer reinen **Translation**, so ist das Verschiebungsfeld zu allen Zeiten ein räumlich konstantes Feld

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{u}_0(t)$$

und somit

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}^G \equiv \mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv \mathbf{0} .$$

Für den Spezialfall reiner Rotationen oder **Starrkörperdrehungen** ändern sich weder Längen noch Winkel zwischen beliebigen Linienelementen und somit ist $\mathbf{E}^G \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \equiv \mathbf{I}$, womit \mathbf{F} als orthogonal erkannt wird. Bei einer geeigneten Wahl einer ONB mit \mathbf{e}_3 als Drehachse und φ als Drehwinkel erhalten wir die Koeffizientenmatrizen

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [H_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [E_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Damit folgt für kleine Drehwinkel mit $\cos \varphi \approx 1$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{0} ,$$

während der antimetrische Anteil des Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{\Omega} := \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{F}^T + \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)$$

mit der antimetrischen Koeffizientenmatrix

$$[\Omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

auch für kleine Drehungen von Null verschieden sein kann. Er beschreibt (den linearen Anteil von) Starrkörperdrehungen, die immer verzerrungsfrei sind.

Eine (infinitesimale) **Starrkörperbewegung** besteht aus einer Translation und einer Drehung (s. EULERSche Geschwindigkeitsformel (2.1.114)). Das zugehörige (infinitesimale) Verschiebungsfeld lässt sich darstellen als

$$(3.1.24) \quad \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \mathbf{c}(t)$$

mit $\boldsymbol{\Omega}(t)$ antimetrischer Tensor
 \mathbf{X}_0 Ortsvektor eines gewählten Bezugspunkts
 $\mathbf{c}(t)$ raumfester Vektor (Verschiebung des Bezugspunkts).

In der **Theorie kleiner Verzerrungen** oder **geometrisch linearen Theorie** benutzen wir also den (linearisierten GREENSchen) Verzerrungstensor \mathbf{E} zur Beschreibung von Deformationen und vernachlässigen alle Terme von höherer Ordnung in \mathbf{u} gegenüber den linearen.

Wie für jeden symmetrischen Tensor können wir für \mathbf{E} eine Spektraldarstellung finden

$$(3.1.25) \quad \mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^H \mathbf{e}_i^H \otimes \mathbf{e}_i^H$$

mit ε_i^H : Hauptverzerrungen oder Hauptdehnungen
 \mathbf{e}_i^H : Hauptdehnungsachsen (ONB).

Stellen wir das Volumenelement als Spatprodukt bezüglich der Hauptachsenbasis dar und nehmen an, dass $\mathbf{H} \equiv \mathbf{E}$, weil Rotationen das Volumen nicht verändern, so ist bezüglich Hauptdehnungsachsen

$$\begin{aligned} dV - dV_0 &= dx_1 dx_2 dx_3 - dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= [\mathbf{dx}_1, \mathbf{dx}_2, \mathbf{dx}_3] - [\mathbf{dX}_1, \mathbf{dX}_2, \mathbf{dX}_3] \\ &= [\mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}_1, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}_2, \mathbf{F} \cdot \mathbf{dX}_3] - [\mathbf{dX}_1, \mathbf{dX}_2, \mathbf{dX}_3] \\ &= [(\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{dX}_1, (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{dX}_2, (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{dX}_3] - [\mathbf{dX}_1, \mathbf{dX}_2, \mathbf{dX}_3] \\ (3.1.26) \quad &= [(\mathbf{I} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dX}_1, (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dX}_2, (\mathbf{I} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dX}_3] - [\mathbf{dX}_1, \mathbf{dX}_2, \mathbf{dX}_3] \\ &= [(1 + \varepsilon_1^H) \mathbf{dX}_1, (1 + \varepsilon_2^H) \mathbf{dX}_2, (1 + \varepsilon_3^H) \mathbf{dX}_3] - [\mathbf{dX}_1, \mathbf{dX}_2, \mathbf{dX}_3] \\ &= (1 + \varepsilon_1^H) (1 + \varepsilon_2^H) (1 + \varepsilon_3^H) dX_1 dX_2 dX_3 - dX_1 dX_2 dX_3 \\ &\approx (\varepsilon_1^H + \varepsilon_2^H + \varepsilon_3^H) dX_1 dX_2 dX_3 \\ &= sp(\mathbf{E}) dV_0 = sp(\mathbf{H}) dV_0 = Div \mathbf{u} dV_0. \end{aligned}$$

Die Spur des Verzerrungstensors steht also bei kleinen Verformungen für die **Dilatation** oder **Kompression** des Volumenelementes

$$(3.1.27) \quad Div \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} = sp \mathbf{H} = sp \mathbf{E} \approx \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = \frac{\rho_0}{\rho} - 1.$$

Demnach beschreibt der Kugelanteil von \mathbf{E} Dilatationen und der (spurfreie) Deviatoranteil \mathbf{E}' isochore Deformationsanteile oder **Distorsionen**.

Beispiel: Kompression oder Dilatation

Eine reine Kompression ($\alpha < 0$) oder Dilatation ($\alpha > 0$) ist durch einen Kugeltensor gekennzeichnet:

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{E} \equiv \alpha \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{\Omega} \equiv \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad sp \mathbf{H} = sp \mathbf{E} \equiv 3 \alpha.$$

Beispiel: Einfache Scherung

Als *einfache Scherung* bezeichnet man ein Verschiebungsfeld, das bezüglich einer ONB die Darstellung

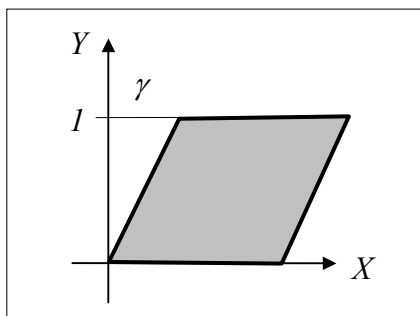
$$u_x = \gamma Y, \quad u_y = u_z = 0$$

hat mit der **Scherzahl** γ . Daraus ergibt sich der räumlich konstante Verschiebungsgradient

$$\mathbf{H} = \gamma \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y,$$

sowie der Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = sym(\gamma \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y) = \gamma sym(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y) = \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x).$$



Beide sind spurfrei oder deviatorisch

$$sp \mathbf{E} = 0$$

und deshalb volumenerhaltend oder isochor. Der GREENsche Verzerrungstensor enthält dagegen noch einen quadratischen Term

$$\mathbf{E}^G = \frac{1}{2} (\gamma \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x + \gamma^2 \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y).$$

Bezüglich anderer ONBs sind diese Darstellungen nicht mehr so einfach. Grundsätzlich gilt für Scherverzerrungen der folgende

Satz: BLINOWSKI/RYPCHLEWSKI (1998)

Ein Verzerrungstensor \mathbf{E} beschreibt genau dann eine einfache Scherung, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- *Es gibt eine ONB bezüglich derer \mathbf{E} die Komponentenmatrix besitzt*

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Es gibt eine ONB bezüglich derer \mathbf{E} die Komponentenmatrix besitzt*

$$\begin{bmatrix} 0 & s & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $sp \mathbf{E} = 0$ und $det \mathbf{E} = 0$.
- $sp \mathbf{E} = 0$ und $sp(\mathbf{E}^3) = 0$.
- Es existiert ein orthogonaler Tensor \mathbf{Q} derart, dass $\mathbf{E} = -\mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{Q}^T$ gilt.
- \mathbf{E} ist eben (s. u.) und deviatorisch.

Alle Distorsionen kann man infolge des folgenden Satzes als Überlagerungen von nur zwei Scherungen auffassen.

Satz: Jeder Verzerrungstensor \mathbf{E} kann additiv zerlegt werden gemäß

$$(3.1.28) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{3} sp(\mathbf{E}) \mathbf{I} + sym(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) + sym(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2)$$

in

- einen dilatatorischen Anteil $\frac{1}{3} sp(\mathbf{E}) \mathbf{I}$ und
- zwei Scheranteile $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_i$ mit $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i = 0, i = 1, 2$.

Beweis: Zunächst kann man jeden symmetrischen Tensor in seinen Kugeltensoranteil ($\alpha \mathbf{I}$) und seinen deviatorischen Anteil zerlegen. Sei letzterer \mathbf{E}' . Stellen wir diesen nun spektral dar

$$\mathbf{E}' = \sum_{i=1}^3 \varepsilon'_i{}^H \mathbf{e}_i^H \otimes \mathbf{e}_i^H$$

mit beliebiger Nummerierung der Eigenwerte. Wegen dessen Spurfreiheit gilt

$$\varepsilon'_3{}^H = -\varepsilon'_1{}^H - \varepsilon'_2{}^H$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \varepsilon'_1{}^H \mathbf{e}_1^H \otimes \mathbf{e}_1^H + \varepsilon'_2{}^H \mathbf{e}_2^H \otimes \mathbf{e}_2^H - (\varepsilon'_1{}^H + \varepsilon'_2{}^H) \mathbf{e}_3^H \otimes \mathbf{e}_3^H \\ &= \varepsilon'_1{}^H (\mathbf{e}_1^H \otimes \mathbf{e}_1^H - \mathbf{e}_3^H \otimes \mathbf{e}_3^H) + \varepsilon'_2{}^H (\mathbf{e}_2^H \otimes \mathbf{e}_2^H - \mathbf{e}_3^H \otimes \mathbf{e}_3^H) \\ &= \varepsilon'_1{}^H sym[(\mathbf{e}_1^H + \mathbf{e}_3^H) \otimes (\mathbf{e}_1^H - \mathbf{e}_3^H)] + \varepsilon'_2{}^H sym[(\mathbf{e}_2^H + \mathbf{e}_3^H) \otimes (\mathbf{e}_2^H - \mathbf{e}_3^H)]. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die in runden Klammern stehenden Vektoren paarweise orthogonal sind und es sich deshalb um zwei Scherungen handelt; *q.e.d.*

Demnach bestehen alle Verzerrungszustände aus der Überlagerung von Dilatationen und Scherungen. Allerdings ist die Überlagerung von zwei Scherungen i. A. keine Scherung.

In manchen Fällen kann man die Dimension eines Problems reduzieren.

Def.: Als **ebenen Deformationszustand** bezeichnen wir einen solchen, bei dem das Verschiebungsfeld parallel zu einer Ebene ist und unabhängig von dem Abstand zu dieser.

Wählen wir beispielsweise das KOOS so, dass die X_1 - X_2 -Ebene eine solche Ebene bildet, so ist der ebene Verschiebungszustand präsentiert durch die beiden Funktionen

$$u_1(X_1, X_2) \quad u_2(X_1, X_2) \quad u_3 = 0.$$

Damit folgt für den ebenen Deformationszustand

$$(3.1.29) \quad [\varepsilon_{ik}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Manche Materialien, wie z. B. zähe Fluide, sind sensitiv gegenüber der Geschwindigkeit eines Deformationsprozesses. Um hierfür eine geeignete Größe zu finden, bilden wir die materielle Zeitableitung der EULERSchen Beziehung (3.1.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{dx}^\bullet &= \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{dX} \\ &= \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx} \\ &= (\text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t))^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx} \\ &= \text{Grad}(\chi(\mathbf{X}, t)^\bullet) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx} \\ &= \text{Grad } \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx} \\ &= (\mathbf{v}_L \otimes \nabla_L) \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx} \end{aligned}$$

und mit (3.1.19)

$$\begin{aligned} &= \mathbf{v}_E \otimes \nabla_E \cdot \mathbf{dx} \\ &= \text{grad } \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{dx} \\ &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{dx} \end{aligned}$$

mit dem räumlichen **Geschwindigkeitsgradienten** (engl. *velocity gradient*)

$$(3.1.30) \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) := \text{grad } \mathbf{v}_E = \mathbf{v}_E \otimes \nabla_E = \mathbf{F}^\bullet \cdot \mathbf{F}^{-1},$$

der die Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

bezüglich einer ONB besitzt. Wir zerlegen ihn in seinen symmetrischen Anteil, den **Deformationsgeschwindigkeitstensor** (engl. *rate of deformation tensor, stretching*)

$$(3.1.31) \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \text{def}(\mathbf{v})$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

und seinen antimetrischen Anteil, den **Wirbeltensor** (engl. *spin tensor*)

$$(3.1.32) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{I}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Um die Bedeutung der beiden Anteile zu separieren, erinnern wir uns daran, dass für eine Starrkörperrotation $\mathbf{F} \equiv \mathbf{Q}$ (orthogonal) und

$$d\mathbf{x}^\bullet = \mathbf{Q}(t)^\bullet \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{Q}(t)^\bullet \cdot \mathbf{Q}(t)^T \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{W}(t) \cdot d\mathbf{x}$$

wird. Damit ist $\mathbf{L} \equiv \mathbf{W}$ antimetrisch und $\mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$. Der Wirbeltensor beschreibt also Starrkörperrotationen, die den Deformationsgeschwindigkeitstensor nicht beeinflussen.

Wir haben gesehen, dass das Skalarprodukt die momentanen Längen und Winkel zwischen Linienelementen beschreibt. Dessen Zeitableitung ist

$$\begin{aligned} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y})^\bullet &= d\mathbf{x}^\bullet \cdot d\mathbf{y} + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y}^\bullet \\ &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L}^T \cdot d\mathbf{y} + d\mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \cdot d\mathbf{y} \\ &= d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot d\mathbf{y} \\ &= d\mathbf{x} \cdot 2\mathbf{D} \cdot d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Betrachten wir speziell zwei Linienelemente, die momentan mit dem ersten Basisvektor zusammenfallen $d\mathbf{x} \equiv \mathbf{e}_1 \equiv d\mathbf{y}$, so folgt

$$(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y})^\bullet = \mathbf{e}_1 \cdot 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_1 = 2D_{11}.$$

Die Diagonalkomponenten D_{ii} von \mathbf{D} geben also die **Dehnungsgeschwindigkeiten** von Linienelementen an, die momentan in Richtung \mathbf{e}_i liegen. Setzen wir hingegen $d\mathbf{x} \equiv \mathbf{e}_1$ und $d\mathbf{y} \equiv \mathbf{e}_2$, so geht in

$$(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y})^\bullet = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^\bullet = \cos(\angle_{1,2})^\bullet = \mathbf{e}_1 \cdot 2\mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_2 = 2D_{12}$$

auch die Änderungsgeschwindigkeit des momentan rechten Winkels zwischen Linienelementen in \mathbf{e}_1 - bzw. \mathbf{e}_2 -Richtung ein, bekannt als **Scherrate**.

In dem obigen Beispiel der **einfachen Scherung** ist

$$\mathbf{v} = \dot{\gamma} y \mathbf{e}_x$$

und damit

$$\mathbf{L} = \dot{\gamma} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y$$

und

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x)$$

sowie

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} (\mathbf{u}^\bullet) = \operatorname{sp} \mathbf{L} = \operatorname{sp} \mathbf{D} = 0,$$

weil die Scherung isochor ist.

Ist ϕ ein beliebiges differenzierbares Feld, so ist dessen materieller Gradient nach (3.1.19)

$$\begin{aligned} \operatorname{Grad} \phi_L &= \phi_L \otimes \nabla_L \\ &= (\phi_E \otimes \nabla_E) \cdot \mathbf{F} = (\phi_E \otimes \nabla_E) \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}) \\ &= \operatorname{grad} \phi_E \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Ist nun $|\mathbf{H}| \ll |\mathbf{I}|$ (kleine Verzerrungen), so ist der Unterschied zwischen $\operatorname{Grad} \phi_L$ und $\operatorname{grad} \phi_E$ vernachlässigbar

$$(3.1.33) \quad \operatorname{Grad} \phi_L \approx \operatorname{grad} \phi_E$$

wie auch

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \phi_L &\approx \operatorname{div} \phi_E \\ \operatorname{Def} \phi_L &\approx \operatorname{def} \phi_E \\ \operatorname{Rot} \phi_L &\approx \operatorname{rot} \phi_E. \end{aligned}$$

In diesen Fällen können wir die partiellen Ableitungen durch ",_i" notieren, weil nicht zwischen den Ableitungen nach X_i und x_i unterschieden werden muss.

Es gilt also beispielsweise für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{grad} \mathbf{v}_E \approx \operatorname{Grad} \mathbf{v}_L = v_{i,k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \operatorname{Grad} (\mathbf{u}^\bullet) = (\operatorname{Grad} \mathbf{u})^\bullet = \mathbf{H}^\bullet$$

mit der Koeffizientenmatrix gegenüber einer ONB

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{D} \approx \mathbf{E}^\bullet.$$

3.1.1 Kompatibilitätsbedingungen

Kennt man das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$, so kann man mit

$$\mathbf{E} = \text{Def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial X_k + \partial u_k / \partial X_i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k$$

die 6 unabhängigen Komponenten ε_{ik} des (symmetrischen) Verzerrungstensors berechnen. Manchmal stellt sich das umgekehrte Problem, nämlich 6 Verzerrungsfelder so zu bestimmen, dass sich daraus ein Verschiebungsfeld integrieren lässt. Dies ist allerdings nicht für beliebige symmetrische Tensorfelder möglich, sondern nur dann, wenn die folgende **Kompatibilitätsbedingung** erfüllt ist

$$(3.1.34) \quad \text{Ink } \mathbf{E} = \mathbf{0} = \nabla_L \times \mathbf{E} \times \nabla_L = -\text{Rot Rot } \mathbf{E}$$

nach (2.2.27). Da dieser Tensor symmetrisch und divergenzfrei ist, entspricht dies 3 voneinander unabhängigen Gleichungen. Bezüglich einer ONB ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla_L \times \mathbf{E} \times \nabla_L = \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{e}_i \times \varepsilon_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \times \frac{\partial}{\partial X_m} \mathbf{e}_m \\ &= \varepsilon_{kl,im} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \times \mathbf{e}_m = \varepsilon_{kl,im} \varepsilon_{ikp} \varepsilon_{lmr} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_r. \end{aligned}$$

Man unterscheide dabei zwischen den zweifach indizierten Tensorkomponenten ε_{ij} von \mathbf{E} (3.1.23) und dem dreifach indizierten Permutationssymbol ε_{kij} nach (2.1.2). Im Einzelnen ergeben sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} &= 2 \varepsilon_{12,12} \\ \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} &= 2 \varepsilon_{23,23} \\ \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} &= 2 \varepsilon_{31,31} \\ \varepsilon_{11,23} + \varepsilon_{23,11} &= \varepsilon_{31,12} + \varepsilon_{12,13} \\ \varepsilon_{22,31} + \varepsilon_{31,22} &= \varepsilon_{12,23} + \varepsilon_{23,21} \\ \varepsilon_{33,12} + \varepsilon_{12,33} &= \varepsilon_{23,31} + \varepsilon_{31,32}. \end{aligned}$$

Satz (DE ST. VENANT⁴⁰, BELTRAMI⁴¹):

Die Bedingung $\text{Ink } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ist für einfach zusammenhängende Gebiete notwendig und hinreichend für die Existenz eines kompatiblen Verschiebungsfeldes \mathbf{u} .

Beweis: a) notwendig

Sei \mathbf{u} ein Verschiebungsfeld und

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla_L + \nabla_L \otimes \mathbf{u}),$$

dann ist wegen der Identität (2.2.45)

$$\nabla_L \times \nabla_L \otimes \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

und

$$\mathbf{u} \otimes \nabla_L \times \nabla_L = \mathbf{0}$$

und damit auch

$$\text{Ink } \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

⁴⁰ Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

⁴¹ Eugenio Beltrami (1835-1900)

b) hinreichend (BELTRAMI 1886)

Angenommen, es gelte für ein symmetrisches Tensorfeld \mathbf{E}

$$- \text{Ink } \mathbf{E} = \text{Rot Rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

oder mit $\mathbf{A} := \text{Rot } \mathbf{E}$

$$\text{Rot } \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

Dann ist bezüglich einer ONB wegen der Symmetrie von \mathbf{E}

$$\begin{aligned} sp \mathbf{A} &= sp(\text{Rot } \mathbf{E}) = sp(\nabla_L \times \mathbf{E}^T) \\ &= sp(\nabla_L \times \mathbf{E}) = sp(\partial / \partial X_k \mathbf{e}_k \times \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = sp(\varepsilon_{ij,k} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= sp(\varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{kim} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ji,k} \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{kji} = 0 . \end{aligned}$$

Also ist \mathbf{A} ein spurfreies und rotorfreies (irrotationales) Tensorfeld. Wir setzen $\mathbf{a}_i := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}$ für $i = 1, 2, 3$, also $\mathbf{A} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{a}_i$. Dann sind mit (2.2.17)

$$\text{Rot } \mathbf{a}_i = \text{Rot}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}) = \text{Rot}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e}_i) = \text{Rot}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

und damit sind alle \mathbf{a}_i irrotationale oder konservative Vektorfelder. Solche besitzen Potenziale v_i

$$\mathbf{a}_i = \text{Grad } v_i .$$

Dann gilt mit (2.2.35)

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i \otimes \text{Grad } v_i = \text{Grad}(v_i \mathbf{e}_i) = \text{Grad } \mathbf{v}$$

mit $\mathbf{v} := v_i \mathbf{e}_i$. Da mit (2.2.13)

$$sp \mathbf{A} = 0 = \text{Div } \mathbf{v}$$

gilt, ist \mathbf{v} divergenzfrei. Sei $\mathbf{\Omega}$ das antimetrische Tensorfeld, dessen axiales Vektorfeld gemäß (2.1.53) \mathbf{v} ist

$$\mathbf{v} \times \mathbf{x} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x}$$

für alle konstanten Vektoren \mathbf{x} , so folgt

$$\begin{aligned} (\text{Rot } \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{x} &= \text{Rot}(\mathbf{\Omega}^T \cdot \mathbf{x}) \\ &= -\text{Rot}(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{x}) \\ &= -\text{Rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{x}) \\ &= -\nabla_L \times (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) \end{aligned}$$

und mit der Regel für doppelte Kreuzprodukte

$$\begin{aligned} &= -\mathbf{v} (\nabla_L \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{x} (\nabla_L \cdot \mathbf{v}) \\ &= -\mathbf{v} \otimes \nabla_L \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} (\nabla_L \cdot \mathbf{v}) \\ &= -(\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} + (\text{Div } \mathbf{v}) \mathbf{x} \\ &= -(\text{Grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

und somit

$$\text{Rot } \mathbf{\Omega} = -\text{Grad } \mathbf{v} = -\mathbf{A} .$$

Also ist

$$\text{Rot}(\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}) = \text{Rot } \mathbf{E} + \text{Rot } \mathbf{\Omega} = \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

Wir haben bereits gesehen, dass zu einem irrotationalen Tensorfeld ein Vektorfeld \mathbf{u} existiert, so dass

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} = \text{Grad } \mathbf{u}$$

ist. Der symmetrische Anteil dieser Gleichung ist das gesuchte

$$\mathbf{E} = \text{Def } \mathbf{u} ; \quad \text{q.e.d.}$$

Es ist beachtenswert, dass in diesem Beweis an keiner Stelle eine Linearisierung vorgenommen wurde. Der obige Satz gilt für beliebig große Deformationen, nur die Anwendbarkeit des linearisierten Verzerrungstensors \mathbf{E} ist auf kleine Deformationen begrenzt.

Ein analoges Kompatibilitätsproblem stellt sich, wenn man aus 6 Komponenten des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors 3 Geschwindigkeitskomponenten bestimmen will. Hier gilt analog

$$D_{11,22} + D_{22,11} = 2 D_{12,12}$$

usw. oder

$$(3.1.35) \quad \nabla_{\mathbf{E}} \times \mathbf{D} \times \nabla_{\mathbf{E}} = \mathbf{0} = \text{ink } \mathbf{D} .$$

Beispiel 10. Kompatibilitätsbedingungen

Es seien die Komponenten eines Verzerrungstensors \mathbf{E} bezüglich der ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ durch

$$(B10.1) \quad [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 3x^2/2 & -ye^{-x}/4 & 0 \\ -ye^{-x}/4 & -1/2 + e^{-x}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gegeben. Es ist zu ermitteln ob dieses Verzerrungsfeld ein kompatibles Verschiebungsfeld besitzt, und dieses gegebenenfalls zu bestimmen (Verschiebungskomponenten u, v, w), wobei $\mathbf{u}(\mathbf{x} \equiv \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ gelten soll.

Lösung:

Sind die Kompatibilitätsbedingungen (3.1.34) erfüllt, so existiert ein Verschiebungsfeld \mathbf{u} , aus welchem sich $\mathbf{E} = \text{def } \mathbf{u}$ ergibt. Da \mathbf{E} ein ebener Verzerrungszustand in z ist, muss nur eine der sechs Gleichungen (3.1.34) nachgewiesen werden

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2 \varepsilon_{xy,xy} .$$

Einsetzen und Ableiten der Komponenten aus (B10.1) zeigt, dass letztere Gleichung erfüllt ist. Wir bestimmen nun das Verschiebungsfeld. Zunächst folgt

$$u = \int \varepsilon_{xx} dx = x^3/2 ,$$

wobei die Integrationskonstante sich wegen $\mathbf{u}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ zu Null ergibt. Auf die gleiche Weise wird v ermittelt

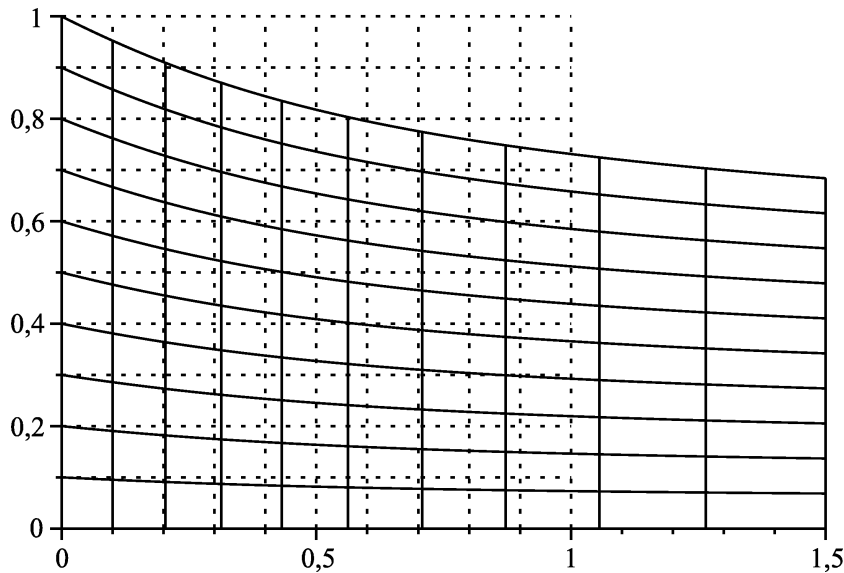
$$v = \int \varepsilon_{yy} dy = y(e^{-x} - 1) / 2 .$$

Damit ergibt sich die Dehnungskomponente

$$\varepsilon_{xy} = 1/2 (u_{,y} + v_{,x}) = -y e^{-x} / 4$$

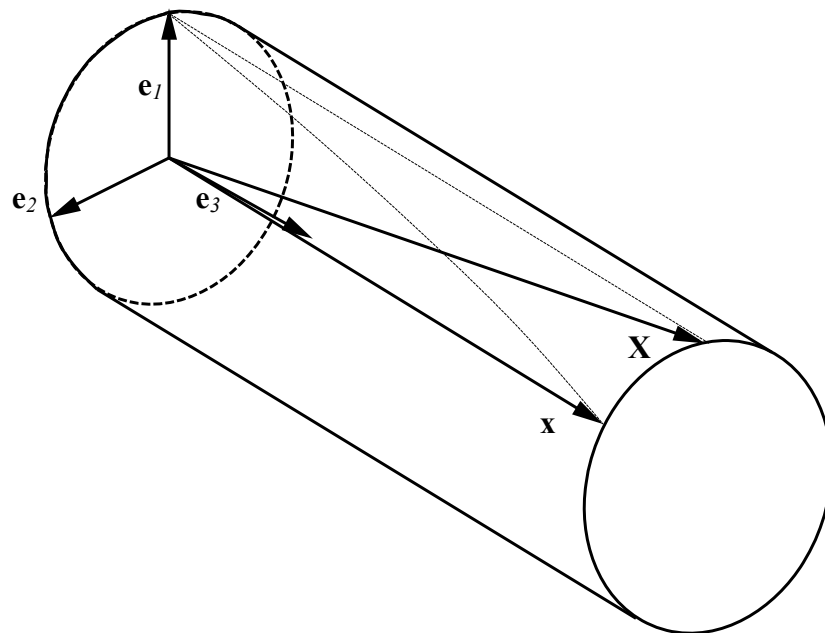
wie in der Aufgabenstellung gegeben.

Wir können nun mit Hilfe des Verschiebungsfeldes eine Darstellung der Deformation erhalten. Hierfür stellen wir die undeformierte und die deformierte Lage des Ausschnittes $\{0 < y < 1, 0 < x < 1, z \text{ beliebig}\}$ in der x - y -Ebene dar.



Beispiel 11. Torsion

Gesucht sind der Verschiebungsgradient \mathbf{H} und die Verzerrungsfelder \mathbf{E} und \mathbf{E}^G eines Torsionsstabes mit konstanter Drillung D entlang der Richtung von \mathbf{e}_3 . Dabei gelte die Verschiebungs-Randbedingung $\mathbf{u}(X_1, X_2, 0) = \mathbf{0}$.



Lösung:

Als erstes muss die ortsabhängige Funktion $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$ ermittelt werden. Offenbar unterscheiden sich Ebenen senkrecht zu \mathbf{e}_3 mit verschiedenen Koordinaten X_3 nur durch eine Starrkörperdrehung von der undeformierten Lage (wölbfreie Torsion). Wir können

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}$$

schreiben mit einem orthogonalen Tensor $\mathbf{Q}(X_3)$, der eine Drehung um die \mathbf{e}_3 -Achse beschreibt, wobei der Drehwinkel mit der Drillung als Proportionalitätsfaktor mit X_3 linear zunimmt

$$\mathbf{Q} = \cos(D X_3) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \sin(D X_3) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Das Verschiebungsfeld ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ &= [X_1 \cos(D X_3) - X_2 \sin(D X_3) - X_1] \mathbf{e}_1 + [X_1 \sin(D X_3) + X_2 \cos(D X_3) - X_2] \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Der Gradient hiervon bezüglich der materiellen Koordinaten X_i ist

$$[H_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos(DX_3) - 1 & -\sin(DX_3) & -X_1 D \sin(DX_3) - X_2 D \cos(DX_3) \\ \sin(DX_3) & \cos(DX_3) - 1 & X_1 D \cos(DX_3) - X_2 D \sin(DX_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$. Bestimmt man nun $\mathbf{E} = \text{sym}(\mathbf{H})$, so findet man ein von X_3 abhängiges Dehnungsfeld

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos(DX_3) - 1 & 0 & (-X_1 D \sin(DX_3) - X_2 D \cos(DX_3)) / 2 \\ & \cos(DX_3) - 1 & (X_1 D \cos(DX_3) - X_2 D \sin(DX_3)) / 2 \\ \text{sym} & & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies steht im Widerspruch zu der angenommenen konstanten Drillung. Die Ursache hierfür ist die mit X_3 anwachsende überlagerte Starrkörperdrehung, die beim linearisierten Verzerrungstensor nur für kleine Drehungen verschwindet.

Die GREENSchen Verzerrungen ergeben sich durch (3.1.22) und die mehrfache Anwendung von $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$ zu

$$[E_{ij}^G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -DX_2/2 \\ 0 & 0 & DX_1/2 \\ -DX_2/2 & DX_1/2 & D^2(X_1^2 + X_2^2)/2 \end{bmatrix}.$$

Man findet nun zwar eine vom Radius abhängige Längsdehnung in \mathbf{e}_3 -Richtung, allerdings hängt die Dehnung nicht mehr von X_3 ab, wie es der Anschauung entspricht. Für kleine D ist D^2 gegenüber D vernachlässigbar, so dass die Längsdehnung in \mathbf{e}_3 -Richtung vernachlässigbar ist und \mathbf{E}^G in \mathbf{E} übergeht.

Für die Darstellung in Zylinderkoordinaten hat man mit den materiellen Koordinaten R, Θ, Z und den räumlichen Koordinaten r, θ, z die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= r \mathbf{e}_r(\theta) + z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{X} &= R \mathbf{e}_R(\Theta) + Z \mathbf{e}_Z. \end{aligned}$$

Die Torsion wird durch $r = R, z = Z$ und $\theta = \Theta + DZ$ beschrieben. Mit dem Nabla-Operator bezüglich Zylinderkoordinaten und einer normierten ONB

$$\nabla_L = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{e}_Z$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \otimes \nabla_L = R [\mathbf{e}_r(\theta) - \mathbf{e}_R(\Theta)] \otimes \left(\frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{e}_Z \right) \\ &= [\mathbf{e}_r(\theta) - \mathbf{e}_R(\Theta)] \otimes \mathbf{e}_R(\Theta) + (\mathbf{e}_r(\theta),_\theta \frac{\partial \theta}{\partial \Theta} - \mathbf{e}_R(\Theta),_\Theta) \otimes \mathbf{e}_\Theta(\Theta) + R \mathbf{e}_r(\theta),_\theta \frac{\partial \theta}{\partial Z} \otimes \mathbf{e}_Z, \end{aligned}$$

was sich mit den Rechenregeln für Zylinderkoordinaten $\mathbf{e}_{r,\theta} = \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_{\theta,\theta} = -\mathbf{e}_r$ und $\theta = \Theta + DZ$ zusammenfassen lässt

$$\mathbf{H} = [\mathbf{e}_r(\theta) - \mathbf{e}_R(\Theta)] \otimes \mathbf{e}_R(\Theta) + [\mathbf{e}_\theta(\theta) - \mathbf{e}_\Theta(\Theta)] \otimes \mathbf{e}_\Theta(\Theta) + RD \mathbf{e}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{e}_Z.$$

Hier erkennt man, dass für $\theta \equiv \Theta$ eine Scherung $RD \mathbf{e}_\theta(\theta) \otimes \mathbf{e}_Z$ erfolgt. Dabei wächst die Scherzahl linear mit R . Die Scherrichtung ist tangential (\mathbf{e}_θ), und die Scherebenen-normale parallel zur Zylinderachse (\mathbf{e}_Z).

3.2 Spannungs-Analyse

Es soll das **Schnittprinzip** gelten, nachdem wir jeden Körper aus dem Universum heraus-schneiden können, dabei aber die mechanische Wirkung der Außenwelt auf den Körper durch das Anbringen von Kräften simulieren. In der Kontinuumsmechanik geht man davon aus, dass alle am Körper angreifenden Kräfte aus kontinuierlich verteilten Kraftdichten resultieren, die entweder im Körperinneren (*Massenkräfte*, wie die Gewichtskraft) oder auf der Körper-oberfläche (*Kontaktkräfte*, wie der Außendruck) angreifen.

Betrachten wir zunächst die **Massenkräfte**. Sei Δm die Masse eines Teilkörpers und $\Delta \mathbf{f}_m$ die angreifende Massenkraft. Die spezifische Massenkraft (engl. *body force*) ist definiert als der Grenzwert

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{f}_m}{dm} := \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}_m}{\Delta m}$$

so dass umgekehrt

$$(3.2.1) \quad \mathbf{f}_m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \rho dV$$

die am Körper mit Volumen \mathcal{V} angreifende resultierende Massenkraft ist. Wichtigstes Beispiel ist die Gravitationskraft, für die \mathbf{b} das auf den Erdmittelpunkt weisende Gravitationsfeld angenommen wird. Ein anderes Beispiel bilden magnetische Anziehungskräfte.

Die zweite Klasse von Kräften sind die **Kontakt- oder Oberflächenkräfte** \mathbf{f}_k . Sei $\Delta \mathcal{A}$ ein Oberflächenbereich der Größe ΔA und $\Delta \mathbf{f}_k$ die auf ihn wirkende Kontaktkraft. Deren Kraftdichte

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}_k}{dA} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}_k}{\Delta A}$$

heißt **Spannung** (engl. *tension*). Die resultierende Kontaktkraft auf den Körper ist dann das Integral der Spannung über die gesamte Körperoberfläche \mathcal{A}

$$(3.2.2) \quad \mathbf{f}_k = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \, dA.$$

Die **Impulsbilanz** der Kontinuumsmechanik (2.1.111) besagt nun, dass die zeitliche Änderung des Impulses des Körpers bei Annahme der Massenerhaltung

$$\mathbf{p}^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \, dm$$

gleich der Summe der am Körper angreifenden Kräfte ist

$$\mathbf{p}^\bullet = \mathbf{f} = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_m.$$

Die Integralform ergibt sich damit zu

$$(3.2.3) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \, dm = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \, dm.$$

Um die Spannungen weiter zu konkretisieren, nimmt man an, dass \mathbf{t} außer von Ort und Zeit auch eine Funktion der Orientierung der Schnittfläche im Raum ist, ausgedrückt durch die äußere Flächennormale \mathbf{n} .

Wir schneiden nun in einem beliebigen, aber fest gewählten Punkt im Inneren des Körpers ein kleines Tetraeder frei. Dazu legen wir in diesen Punkt eine ONB und betrachten das durch die Achsen mit den Längen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ aufgespannte Tetraeder.

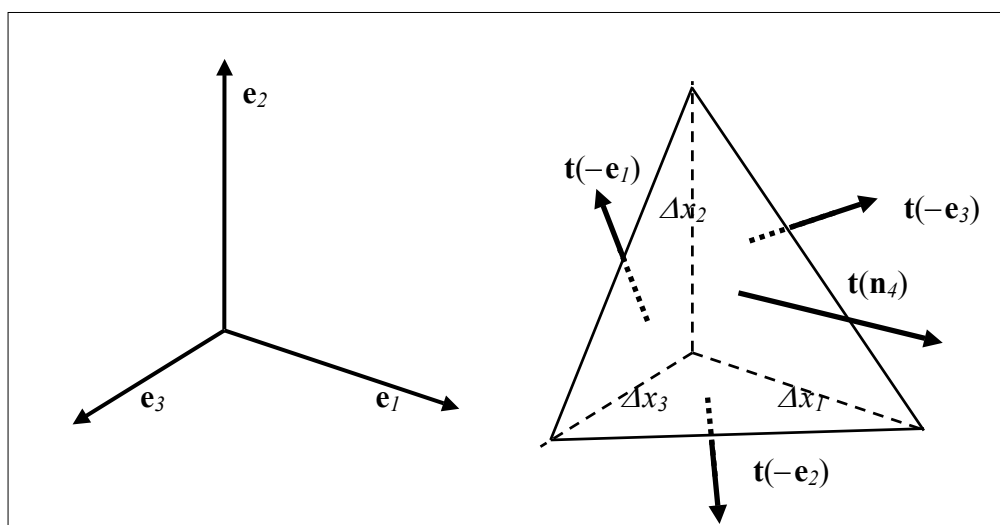
Ist \mathbf{t} der Mittelwert der Spannung auf der von Δx_1 und Δx_2 aufgespannten Seite mit der Dreiecksfläche

$$\Delta A_3 = \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2,$$

so ist diese von der äußeren Flächennormalen $\mathbf{n} \equiv -\mathbf{e}_3$ abhängig. Die Kontaktkraft ist mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) \Delta A_3 = \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_2,$$

wobei diese irgendwo auf dieser Oberfläche angenommen wird. Hier haben wir das Orts- und das Zeitargument nicht mehr notiert.



Analog ergeben sich für die beiden anderen Seiten die Kontaktkräfte

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) \Delta A_2 = \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) \frac{1}{2} \Delta x_1 \Delta x_3$$

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) \Delta A_1 = \mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) \frac{1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 .$$

Die vierte Fläche habe den Normalenvektor \mathbf{n}_4 und den Flächeninhalt ΔA_4 . Für eine geschlossene Fläche gilt (Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI (2.2.65) mit $\phi \equiv 1$)

$$(3.2.4) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{n} dA = \mathbf{o} = -\mathbf{e}_1 \Delta A_1 - \mathbf{e}_2 \Delta A_2 - \mathbf{e}_3 \Delta A_3 + \mathbf{n}_4 \Delta A_4$$

und deshalb

$$\mathbf{n}_4 = \frac{1}{\Delta A_4} (\mathbf{e}_1 \Delta A_1 + \mathbf{e}_2 \Delta A_2 + \mathbf{e}_3 \Delta A_3).$$

Wenden wir nun die Impulsbilanz auf dieses Tetraeder an

$$\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) \Delta A_1 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) \Delta A_2 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) \Delta A_3 + \mathbf{t}(\mathbf{n}_4) \Delta A_4 + \rho \mathbf{b} \Delta V = \rho \mathbf{a} \Delta V$$

mit dem Tetraedervolumen

$$\Delta V = \frac{1}{6} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 .$$

Dabei wurden auch für $\rho \mathbf{b}$ und \mathbf{a} Mittelwerte genommen. Wir bilden dann den Grenzwert für $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$. Die volumenspezifischen Anteile sind von höherer Ordnung klein und es verbleibt

$$\begin{aligned} & \mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) \Delta A_1 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) \Delta A_2 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) \Delta A_3 \\ & + \mathbf{t}\left(\frac{1}{\Delta A_4} (\mathbf{e}_1 \Delta A_1 + \mathbf{e}_2 \Delta A_2 + \mathbf{e}_3 \Delta A_3)\right) \Delta A_4 = \mathbf{o} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta A_4} (\mathbf{t}(-\mathbf{e}_1) \Delta A_1 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_2) \Delta A_2 + \mathbf{t}(-\mathbf{e}_3) \Delta A_3) \\ & = -\mathbf{t}\left(\frac{1}{\Delta A_4} (\mathbf{e}_1 \Delta A_1 + \mathbf{e}_2 \Delta A_2 + \mathbf{e}_3 \Delta A_3)\right), \end{aligned}$$

was für beliebige Δx_i und damit auch beliebige ΔA_i genau dann erfüllt ist, wenn \mathbf{t} eine *lineare* Funktion von \mathbf{n} ist. Da eine lineare Funktion zwischen Vektoren als Tensor eingeführt wurde, gibt es also einen Tensor, der diesen Zusammenhang repräsentiert.

Satz von CAUCHY⁴² (1823)

Die Spannung in einem Punkt \mathbf{X} zur Zeit t auf einer Fläche mit Normale \mathbf{n} ist gegeben durch

$$(3.2.5) \quad \mathbf{t}(\mathbf{X}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}$$

mit dem (CAUCHYschen) Spannungstensor \mathbf{T} (engl. *stress tensor*).

Der vom lateinisch *tendere* = *ziehen, festhalten* abgeleitete Begriff *Tensor* bezieht sich bereits auf die Spannung.

Betrachtet man die entgegengesetzte Fläche mit der Normalen $-\mathbf{n}$, so ergibt sich nach diesem Satz mit dem Schnittprinzip auch die entgegengesetzte Spannung. Dies ist bekannt als

⁴² Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Lemma von CAUCHY

Auf gegenüberliegenden Schnittufern sind die Spannungen gleich groß und entgegengesetzt

$$(3.2.6) \quad \mathbf{t}(\mathbf{X}, t, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{X}, t, \mathbf{n}).$$

Die Komponentendarstellung des Spannungstensors bezüglich einer ONB sei

$$\mathbf{T} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Wenn $\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_l$ derjenige Spannungsvektor ist, der auf einer Fläche mit äußerer Normale \mathbf{e}_l wirkt, so sind

$$\sigma_{1l} := \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_l$$

dessen Normalspannungsanteil und

$$\sigma_{2l} := \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_l$$

$$\sigma_{3l} := \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_l$$

die beiden Schubspannungsanteile. Allgemein ist σ_{ik} die Spannung auf einer \mathbf{e}_k -orientierten Fläche in \mathbf{e}_i -Richtung, für $i = k$ eine **Normalspannung** (engl. *normal stress*), für $i \neq k$ dagegen eine **Schubspannung** (engl. *shear stress*).

Berechnen wir nun mit dem Satz von CAUCHY die resultierende Kontaktkraft auf den Körper, so lässt sich dieses Oberflächenintegral mit Hilfe des Satzes von GAUSS-OSTROGRADSKI in ein Volumenintegral umformen

$$\mathbf{f}_k = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} dA = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{T} dV.$$

Setzen wir dies in die Integralform der Impulsbilanz (3.2.3) ein

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{T} dV + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} dV = \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{a} dV,$$

der für den Körper und jeden Teilkörper gelten muss, so folgt bei stetigen Integranden die **lokale Impulsbilanz**

$$(3.2.7) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (CI)$$

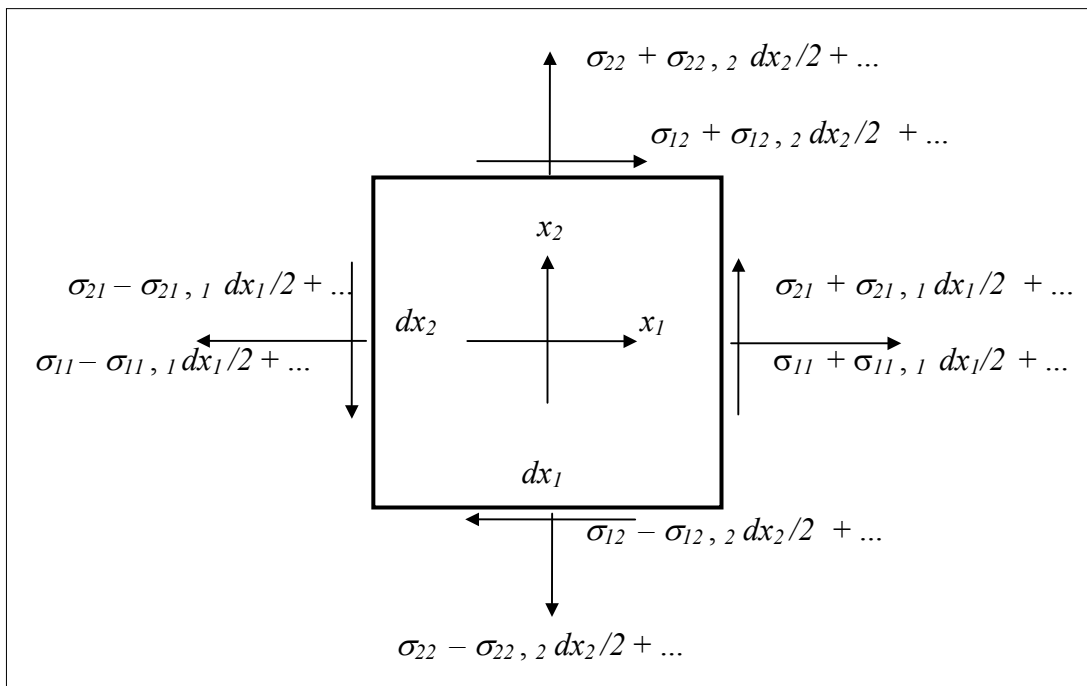
auch **1. CAUCHYsche Bewegungsgleichung** (1823) genannt, die wohl wichtigste Gleichung der Kontinuumsmechanik. In Komponentenform bezüglich einer ONB lautet sie

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho b_i = \rho a_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Im statischen Fall ist die Beschleunigung $\mathbf{a} \equiv \mathbf{o}$ und man erhält die **lokalen Kraft-Gleichgewichts-Bedingungen**

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Unter der Annahme, dass weder im Innern des Körpers noch auf seiner Oberfläche reine Momentenverteilungen existieren, folgt die Symmetrie des Spannungstensors aus der Drallbilanz (2.1.112). Dies macht man sich leicht an einem infinitesimalen Volumenelement klar, bezüglich dessen Mittelpunkt man die Summe aller Momente bildet. Dazu entwickelt man die Spannungen um den Konvergenzpunkt in eine TAYLOR-Reihe.



In e_3 -Richtung ergibt sich aus der Drallbilanz bezüglich des KOO-Ursprungs bis auf von höherer Ordnung kleine Glieder

$$\begin{aligned} & 2 \sigma_{21} dx_2 dx_3 (dx_1/2) - 2 \sigma_{12} dx_1 dx_3 (dx_2/2) \\ & = (\sigma_{21} - \sigma_{12}) dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \end{aligned}$$

woraus

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}$$

folgt, wie auch analog

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \quad \text{und} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}.$$

Zu einer alternativen Herleitung dieses Resultats gelangt man vermittels der Drallbilanz der Kontinuumsmechanik (2.1.112), nach der die zeitliche Änderung des Dralls eines Körpers bez. eines raumfesten Punktes O mit Ortsvektor \mathbf{r}_O

$$\mathbf{d}_O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{v} dm$$

gleich der Summe der am Körper angreifenden äußeren Momente ist

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_O^\bullet &= \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{v} dm \right)^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{a} dm \\ &= \mathbf{m}_O = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{t} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{b} \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{b} \rho dV \end{aligned}$$

und mit dem Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI

$$= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r}_O \times \mathbf{T}) \cdot \nabla_E dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O \times \mathbf{b} \rho dV.$$

Multiplizieren wir nun die Impulsbilanz in lokaler Form (3.2.7) vektoriell mit dem Ortsvektor, so erhalten wir

$$\mathbf{r}_O \times \mathbf{a} \rho = \mathbf{r}_O \times (\mathbf{T} \cdot \nabla_E) + \mathbf{r}_O \times \mathbf{b} \rho.$$

Das Integral über das Volumengebiet ergibt einen Ausdruck, dessen Differenz zur Drallbilanz in

$$\int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{r}_O \times \mathbf{T}) \cdot \nabla_E - \mathbf{r}_O \times (\mathbf{T} \cdot \nabla_E)] dV = \mathbf{o}$$

besteht. Da dies für alle (Teil-) Körper gelten muss, ist der Integrand gleich Null. Mit der Produktregel folgt daraus

$$\mathbf{o} = \downarrow \mathbf{r}_O \times \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla_E - \mathbf{r}_O \times (\downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla_E) = \downarrow \mathbf{r}_O \times \mathbf{T} \cdot \nabla_E.$$

Zur Auswertung dieses Ausdrucks benutzen wir eine ONB

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \downarrow \mathbf{r}_O \times \mathbf{T} \cdot \nabla_E \\ &= \downarrow x_i \mathbf{e}_i \times \sigma_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{e}_m \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \mathbf{e}_i \times \sigma_{km} \mathbf{e}_k \\ &= \delta_{im} \sigma_{km} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \\ &= \sigma_{ki} \varepsilon_{ikp} \mathbf{e}_p \\ &= (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \mathbf{e}_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \mathbf{e}_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Damit folgt dann der

Satz: BOLTZMANNsches Axiom, 2. CAUCHYsche Gleichung (1823)

Die Drallbilanz ist lokal identisch erfüllt, wenn der Spannungstensor symmetrisch ist

$$(3.2.8) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (C2)$$

Der Spannungstensor kann also auf Spektralform gebracht werden

$$(3.2.9) \quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sigma^H_i \mathbf{e}^H_i \otimes \mathbf{e}^H_i$$

mit den

$$\begin{aligned} \sigma^H_i &: \text{Hauptspannungen} \\ \mathbf{e}^H_i &: \text{Hauptspannungsachsen.} \end{aligned}$$

Bezüglich der Hauptspannungsachsen verschwinden also die Schubspannungen und zwei Normalspannungen sind extremal.

Gilt die Reihenfolge

$$\sigma^H_1 \geq \sigma^H_2 \geq \sigma^H_3,$$

so tritt in der Ebene mit $\mathbf{n} = \pm 1/\sqrt{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$ die maximale Schubspannung

$$(3.2.10) \quad \tau_{max} = 1/2 (\sigma^H_1 - \sigma^H_3)$$

auf.

Für manche Zwecke spaltet man vom Spannungstensor einen Kugeltensor, den **Druckanteil**

$$(3.2.11) \quad -p \mathbf{I} = \frac{1}{3} sp(\mathbf{T}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} (\sigma^{H_1} + \sigma^{H_2} + \sigma^{H_3}) \mathbf{I}$$

ab und erhält den (spurfreien) **Spannungsdeviator** gemäß (2.1.102)

$$(3.2.12) \quad \mathbf{T}' := \mathbf{T} - \frac{1}{3} sp(\mathbf{T}) \mathbf{I} = \mathbf{T} + p \mathbf{I}.$$

Auch bei den Spannungen gelingt manchmal eine Dimensionsreduktion.

Def.: Als **ebenen Spannungszustand** bezeichnen wir einen solchen, bei dem der Spannungsvektor einer Ebene Null ist, und alle anderen Spannungen nicht vom Abstand von dieser Ebene abhängen.

Wählen wir beispielsweise das KOOS so, dass die X_1 - X_2 -Ebene eine solche Ebene bildet, so ist der ebene Spannungszustand durch folgende Koeffizientenmatrix des Spannungstensors gekennzeichnet

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \sigma_{ij}(X_1, X_2).$$

3.2.1 Prinzipien der Mechanik

Wir hatten die (globale) Impulsbilanz (2.1.111)

$$\mathbf{p}^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \, dm = \mathbf{f}$$

und die globale Drallbilanz bezüglich eines raumfesten Punktes O (2.1.112) oder - in gleicher Form - bezüglich des Massenmittelpunktes M (2.1.113)

$$\mathbf{d}_{O,M}^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{a} \, dm = \mathbf{m}_{O,M}$$

axiomatisch eingeführt. In dieser Form gelten sie sowohl für starre als auch für deformierbare Körper unabhängig von deren Materialeigenschaften. Wir können die rechten Seiten der beiden Bewegungsgleichungen weiter konkretisieren:

- globale Impulsbilanz

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \, dA$$

- globale Drallbilanz

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{a} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{b} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{t} \, dA.$$

Gelten diese beiden Gesetze für den Körper und alle seine Teilkörper, so sind sie (unter hinreichenden Stetigkeitsannahmen) äquivalent zu den beiden Feldgleichungen:

- lokale Impulsbilanz (3.2.7)

$$(CI) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}$$

- lokale Drallbilanz (3.2.8)

$$(C2) \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (\text{Symmetrie des Spannungstensors}).$$

Multiplizieren wir nun die vorletzte Gleichung mit einem beliebigen differenzierbaren Vektorfeld $\delta \mathbf{v}$

$$\rho(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} = \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{v},$$

so können wir das Volumenintegral hierüber mittels der Produktregel und des Satzes von GAUSS-OSTROGRADSKI umformen

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dm &= \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \delta \mathbf{v}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{v} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{L} \, dV \end{aligned}$$

mit

$$\delta \mathbf{L} := \text{grad} \delta \mathbf{v}.$$

Ist der Spannungstensor symmetrisch, so geht in den letzten Term von $\delta \mathbf{L}$ auch nur der symmetrische Anteil

$$\delta \mathbf{D} := \frac{1}{2} (\delta \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T) = \text{def} \delta \mathbf{v}$$

ein. Interpretiert man das Vektorfeld $\delta \mathbf{v}$ als gedachtes oder *virtuelles Geschwindigkeitsfeld*, so wären obige Integrale *virtuelle Leistungen*. Damit erhalten wir das

Prinzip der virtuellen Leistung (*PdvL*)

Die Bewegungsgesetze (2.1.111) und (2.1.113) sind für einen Körper genau dann erfüllt, wenn

$$(3.2.13) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{def} \delta \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, dA$$

für alle virtuellen Geschwindigkeitsfelder $\delta \mathbf{v}$ gilt.

Beweis: Die eine Richtung wurde bereits gezeigt. Um zu zeigen, dass aus dem *PdvL* umgekehrt C1 und C2 folgen, formulieren wir den letzten Term um

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{v} \, dA = \int_{\mathcal{A}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{grad} \delta \mathbf{v} \, dV.$$

Es verbleibt damit vom *PdvL* nach der Zerlegung des Gradienten in seinen symmetrischen und antimetrischen Anteil

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{W} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{v} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm$$

mit dem antimetrischen Anteil des virtuellen Geschwindigkeitsgradienten

$$\delta \mathbf{W} := \text{grad} \delta \mathbf{v} - \text{def} \delta \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\text{grad} \delta \mathbf{v} - \text{grad}^T \delta \mathbf{v}).$$

Dies muss für beliebige Felder $\delta \mathbf{v}$ gelten, was notwendig und hinreichend auf die punktweise Aussage

$$(\text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} - \rho \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{v} = -\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{W}$$

führt. Die erste Klammer (C1) muss Null sein, wenn wir für $\delta \mathbf{v}$ drei linear-unabhängige konstante Vektorfelder einsetzen. Aus dem Rest folgt für beliebige antisymmetrische Tensoren $\delta \mathbf{W}$ resultierend aus einem rotatorischen Feld $\delta \mathbf{w}$ die Symmetrie von \mathbf{T} (C2); *q.e.d.*

Statt vom Prinzip der *virtuellen Leistung* spricht man auch vom Prinzip der

- virtuellen Arbeit
- virtuellen Geschwindigkeiten
- virtuellen Verrückungen

o. ä.

Der Nutzen dieses Prinzips wird insbesondere dort deutlich, wo man parametrische Ansätze für das Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsfeld in der Form

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(q_1, \dots, q_n)$$

macht. Deren Variation ist

$$\delta \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Eingesetzt in das Prinzip muss die Gleichung für alle Werte von $\delta \mathbf{v}$ und damit auch von allen δq_i gelten, was auf n skalare Gleichungen in den Parametern q_1, \dots, q_n führt. Ein solches Vorgehen kann bei Näherungsverfahren wie RITZ-Ansätzen oder Finiten Elementen gewählt werden. Dabei werden die Feldgleichungen nicht exakt erfüllt (starke Form), sondern nur bestmöglich im integralen Mittel (schwache Form). Man beachte im Übrigen, dass das Spannungsfeld im *PdvL* nicht mehr differenzierbar sein muss, im Gegensatz zu C1.

Setzt man im *PdvL* für $\delta \mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} ein, so erhält man die mechanische Arbeits- oder Leistungsbilanz

Satz: Leistungsbilanz (LB)

Bei jeder Bewegung eines Körpers gilt zu allen Zeiten

$$(3.2.14) \quad L_a = L_i + K^\bullet$$

mit der Leistung der Kräfte

$$(3.2.15) \quad L_a := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dA,$$

der Spannungsleistung (engl. stress power)

$$(3.2.16) \quad L_i := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{def} \mathbf{v} \, dV$$

und der kinetischen Energie

$$K := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^2 \, dm.$$

Deren zeitliche Ableitung ist nämlich

$$K^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^\bullet \cdot \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \, dm.$$

Die Leistungsbilanz ist wegen der speziellen Wahl von $\delta \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}$ nicht mehr hinreichend, sondern nur noch notwendig für die Erfüllung der Bewegungsgesetze.

Ersetzt man im *PdvL* (3.2.13) $\delta \mathbf{v}$ in Analogie zu dem Verschiebungsdifferenzial $d\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$ durch ein *zeitabhängiges* infinitesimales virtuelles Verrückungsfeld

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \delta \mathbf{v} dt,$$

so gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{def}(\delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}'' \cdot \delta \mathbf{u} dm \\ &= \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{u} dm \right)' - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{u}' dm. \end{aligned}$$

Integriert man diese Gleichung zwischen zwei beliebig gewählten Zeitpunkten t_1 und t_2 und wählt nur diejenigen Funktionen $\delta \mathbf{u}$, die bei Null anfangen und aufhören, so erhält man das

HAMILTONsche⁴³ Prinzip

Die Bewegungsgleichungen sind zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 genau dann erfüllt, wenn

$$(3.2.17) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta A_a - \delta A_i + \delta K) dt = 0$$

gilt mit

$$\delta A_a := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA$$

$$\delta A_i := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \text{def}(\delta \mathbf{u}) dV$$

$$\delta K := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}' \cdot \delta \mathbf{u}' dm = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \delta(\mathbf{u}'^2) dm$$

für alle zeitabhängigen differenzierbaren Vektorfelder $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ mit den Anfangs- und Endbedingungen

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) = \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_2) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Der Fall des *Gleichgewichts* ist in allen Formen der Bewegungsgesetze enthalten, wenn man die Geschwindigkeiten überall und jederzeit Null setzt. Daraus folgen

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_O \equiv \mathbf{0}$$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{D} \equiv \mathbf{0}$$

$$K \equiv L_a \equiv L_i \equiv 0$$

und damit die *Gleichgewichtsbedingungen*

- global:

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} dm = \mathbf{0}$$

⁴³ William Rowan Hamilton (1805-1865)

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_{O,M} \times \mathbf{b} \, dm = \mathbf{0}$$

- oder lokal:

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T.$$

Aus dem $PdvL$ wird im Gleichgewicht das

Prinzip der virtuellen Verrückungen ($PdvV$)

Die Gleichgewichtsbedingungen sind für einen Körper genau dann erfüllt, wenn

$$(3.2.18) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \operatorname{def}(\delta \mathbf{u}) \, dV$$

für alle differenzierbaren Vektorfelder $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ gilt.

Man interpretiert die Testfunktionen "virtuelle Verrückungen" $\delta \mathbf{u}$ als

- zeitunabhängige,
- infinitesimale,
- gedachte

Verschiebungen. Ist für bestimmte Körperpunkte die Verschiebung infolge von Einspannungen, Lagern, usw. zu Null vorgeschrieben, so nennt man die hier entstehenden Kräfte **Reaktionskräfte**, im Gegensatz zu den übrigen **eingepprägten Kräften**. Erfüllen nun auch die virtuellen Verrückungen diese Verschiebungsrandbedingungen, so leisten die Reaktionsgrößen bei keiner virtuellen Verrückung Arbeit. Man kann dann also im $PdvV$ die Kräfte auf die eingepprägten einschränken.

Intepretiert man im Nichtgleichgewichtsfall die negativen Beschleunigungen als massenspezifische **Trägheitskräfte** und fasst sie mit den Massenkraften zu den **generalisierten Kräften**

$$\mathbf{b}_{gen} := (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

zusammen, so erfüllen diese *auch im Nichtgleichgewichtsfall* die Gleichgewichtsbedingungen:

- entweder global für den Körper und alle seine Teilkörper

$$\mathbf{f}_{gen} := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_{gen} \, dm = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{gen} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{b}_{gen} \, dm = \mathbf{0}$$

bezüglich eines raumfesten Punktes oder des Massenmittelpunktes

- oder äquivalent lokal

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}_{gen} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T.$$

Setzt man die generalisierten Kräfte in das $PdvV$ ein, so erhält man das

Prinzip von D'ALEMBERT⁴⁴ in der LAGRANGEschen Fassung

Die Bewegungsgesetze sind für einen Körper genau dann erfüllt, wenn

$$(3.2.19) \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_{gen} \cdot \delta \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \cdot \text{def}(\delta \mathbf{u}) \, dV$$

für alle differenzierbaren Vektorfelder $\delta \mathbf{u}$ für den Körper und alle seine Teilkörper gilt.

Auch hier gilt wieder, dass die Reaktionskräfte bei keiner mit den äußeren Zwangsbedingungen verträglichen virtuellen Verrückung Arbeit leisten.

Alle bisher aufgeführten Prinzipien und Gesetze gelten für beliebige Materialien (Fluide, Festkörper, etc.) und lassen sich auch für große Verformungen formulieren.

Bei der Ableitung des folgenden Prinzips müssen wir uns allerdings auf kleine Verzerrungen beschränken. Wir betrachten die Ergänzungsarbeit, die eine virtuelle Kraftgruppe an der tatsächlichen Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ leistet. Dazu benutzen wir ein Tensorfeld $\delta \mathbf{T}$ und ein Vektorfeld $\delta \mathbf{b}$, die beide Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{div } \delta \mathbf{T} + \rho \delta \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

und

$$\delta \mathbf{T} = \delta \mathbf{T}^T$$

überall in \mathcal{V} erfüllen, ansonsten aber beliebig sind und keine Randbedingungen befriedigen müssen. Wir nennen ein solches Paar von Feldern $\{\delta \mathbf{T}, \delta \mathbf{b}\}$ **virtuelle Gleichgewichtsgruppe**. Wir multiplizieren nun die erste Gleichgewichtsbedingung mit dem tatsächlichen Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ und integrieren über den Körper

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \text{div}(\delta \mathbf{T}) \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b} \, dm \\ &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} \, dV - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \nabla_{\mathbf{E}} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b} \, dm \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \text{grad } \mathbf{u} \cdot \cdot \delta \mathbf{T} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b} \, dm \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \cdot \delta \mathbf{T} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b} \, dm, \end{aligned}$$

wobei die Symmetrie von $\delta \mathbf{T}$ und die Kompatibilität von $\mathbf{E} = \text{Def } \mathbf{u} \approx \text{def } \mathbf{u}$ benutzt wurde. Wir erhalten damit das

Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK)

Die Kompatibilitätsbedingungen zwischen \mathbf{u} und \mathbf{E} sind genau dann erfüllt, wenn für alle virtuellen Gleichgewichtsgruppen $\{\delta \mathbf{T}, \delta \mathbf{b}\}$ gilt

$$(3.2.20) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{b} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \cdot \delta \mathbf{T} \, dV$$

Da die Verträglichkeitsbedingungen bei Bewegungen und statischen Zuständen gleichermaßen gelten, kann das PdvK in gleicher Weise auch auf Bewegungen, d. h. zeitabhängige Felder \mathbf{u} und \mathbf{E} angewendet werden.

⁴⁴ Jean le Rond d'Alembert (1717 - 1783)

Treten im Körper Inkompatibilitäten wie Klaffungen, Risse und Hohlräume auf, so ist das $PdvK$ in der vorliegenden Form allerdings verletzt und muss modifiziert werden.

Im Vergleich zum $PdvV$ ergibt sich folgendes Schema:

Das bilanziert die virtuellen die die virtuellen die die bedingungen erfüllen, an den tatsächlichen leisten, und sichern damit deren bedingungen.	$PdvV$ Arbeiten, Verrückungen u. Dehnungen, Verträglichkeits- Kräften Gleichgewichts-	$PdvK$ Ergänzungsarbeiten, Kräfte, Gleichgewichts- Verrückungen u. Dehnungen Verträglichkeits-
---	--	---

Eigentlich handelt es sich in beiden Fällen nicht um endliche (Ergänzungs-)Arbeiten, sondern nur um (Ergänzungs-)Arbeitsinkremente oder (Ergänzungs-)Leistungen.

Während das $PdvV$ auch analog für finite Deformationen gilt (mit $\delta \mathbf{L} = \text{grad } \delta \mathbf{v}$), gilt das $PdvK$ nur für infinitesimale Verformungen (geometrisch linear: $\mathbf{E} \approx \text{def } \mathbf{u}$).

3.2.2 Spannungsfunktionen

Wir wollen im Folgenden versuchen, die Spannungen in Körpern nur mit den Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen. Dabei werden Darstellungen für die Spannungsverteilungen gesucht, die die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen und *Spannungsfunktionen* genannt werden. Hier kann man aber grundsätzlich nur Spannungs-Randbedingungen vorschreiben. Derartige Gleichgewichtslösungen sind im 2- und 3-Dimensionalen allerdings nicht eindeutig.

Bei vielen praktischen Problemen sind die Trägheiten und die Massenkräfte vernachlässigbar gegenüber den Kontaktkräften. Damit reduzieren sich im Feld die Bewegungsgleichungen $C1$ und $C2$ auf die speziellen Gleichgewichtsaussagen

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T,$$

d. h. man sucht ein divergenzfreies symmetrisches Tensorfeld $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ im Innern des Körpers, das auf dessen Rand vorgegebene Randbedingungen bezüglich der Kontaktkraft $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ erfüllt. Zunächst sieht man sofort, dass jeder *homogene Spannungszustand* divergenzfrei ist

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{\text{hom}},$$

wobei \mathbf{T}_{hom} ein symmetrischer Tensor (ggf. schwach zeitabhängig) ist, der nicht vom Ort abhängt.

Etwas allgemeiner ist die

Spannungsfunktion von BELTRAMI (1892)

Sei $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ein differenzierbares symmetrisches Tensorfeld in \mathcal{V} und

$$(3.2.21) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}) := \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

Dann gelten

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^T.$$

Beweis: Für die Rotation eines (nicht notwendig symmetrischen) Tensorfeldes \mathbf{B} nach (2.2.26) gelten die folgenden Identitäten

- $\text{ink } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B} \times \nabla = -\text{rot rot } \mathbf{B}$
- $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}^T = -(\mathbf{B} \times \nabla)^T$
- $\text{div rot } \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}^T) \cdot \nabla = \nabla \times (\mathbf{B}^T \cdot \nabla) = \text{rot div } \mathbf{B}^T$
- $\text{div}(\text{rot } \mathbf{B})^T = (\nabla \times \mathbf{B}^T)^T \cdot \nabla = -\mathbf{B} \times \nabla \cdot \nabla = -\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \nabla) = \mathbf{0}$
- $(\text{rot rot } \mathbf{B})^T = \text{rot rot } (\mathbf{B}^T).$

Daraus folgt

$$\text{div } \mathbf{T} = \text{div rot rot } \mathbf{A} = \text{rot div}(\text{rot } \mathbf{A})^T = \mathbf{0}.$$

Außerdem gilt für ein symmetrisches Tensorfeld \mathbf{A}

$$\mathbf{T}^T = (\text{rot rot } \mathbf{A})^T = \text{rot rot}(\mathbf{A}^T) = \text{rot rot } \mathbf{A} = \mathbf{T}; \text{ q.e.d.}$$

In Komponenten bezüglich ONB lautet die BELTRAMI-Lösung dann

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jpq} A_{mp, nq}.$$

Sie enthält folgende Spezialfälle:

- Die **MAXWELLSche Spannungsfunktion** (1868)

$$(3.2.22) \quad \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) \equiv A_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \text{mit } A_i(x_1, x_2, x_3)$$

so dass

$$\sigma_{11} = A_{2,33} + A_{3,22}$$

$$\sigma_{22} = A_{1,33} + A_{3,11}$$

$$\sigma_{33} = A_{1,22} + A_{2,11}$$

$$\sigma_{12} = -A_{3,12}$$

$$\sigma_{23} = -A_{1,23}$$

$$\sigma_{31} = -A_{2,31}.$$

Sie produziert einen räumlichen Spannungszustand.

- Die **MORERA⁴⁵sche Spannungsfunktion** (1892) mit $\omega_i(x_1, x_2, x_3)$

$$(3.2.23) \quad \mathbf{A} \equiv \omega_3 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \\ + \omega_2 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1) \\ + \omega_1 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2),$$

so dass

$$\sigma_{11} = -2 \omega_{1,23}$$

⁴⁵ Giacinto Morera ((1856-1909)

$$\begin{aligned}\sigma_{22} &= -2 \omega_{2,31} \\ \sigma_{33} &= -2 \omega_{3,12} \\ \sigma_{12} &= (\omega_{1,1} + \omega_{2,2} - \omega_{3,3}),_3 \\ \sigma_{23} &= (\omega_{2,2} + \omega_{3,3} - \omega_{1,1}),_1 \\ \sigma_{31} &= (\omega_{3,3} + \omega_{1,1} - \omega_{2,2}),_2.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass die BELTRAMI-Lösung nicht alle divergenzfreien symmetrischen Tensorfelder umfasst, falls man nur stetige Spannungsfunktionen zulässt. Von SCHAEFER⁴⁶ (1953) stammt die Komplettierung:

BELTRAMI-SCHAEFERSche-Spannungsfunktion

Jedes divergenzfreie symmetrische Tensorfeld in \mathcal{V} lässt sich darstellen als

$$(3.2.24) \quad \mathbf{T} = \text{rot rot } \mathbf{A} + (\nabla \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \nabla) - \text{div}(\mathbf{h}) \mathbf{I}$$

mit

\mathbf{A} : symmetrisches Tensorfeld in \mathcal{V}

\mathbf{h} : harmonisches Vektorfeld in \mathcal{V} , d. h.

$$\Delta \mathbf{h} = \text{div grad } \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Umgekehrt erzeugt jedes differenzierbare symmetrische Tensorfeld und jedes harmonische Vektorfeld gemäß obiger Darstellung ein divergenzfreies symmetrisches Tensorfeld.

Beweis s. GURTIN (1972) S. 58.

- Die AIRY⁴⁷sche Spannungsfunktion (1863)

$$(3.2.25) \quad \mathbf{A} \equiv \varphi(x_1, x_2) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

Sie produziert einen ebenen Spannungszustand mit

$$(3.2.26) \quad \begin{aligned}\sigma_{11} &= \varphi_{,22} \\ \sigma_{22} &= \varphi_{,11} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = -\varphi_{,12} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0.\end{aligned}$$

Man zeigt im Übrigen, dass die Kompatibilitätsbedingungen für die nach dem isotropen HOOKEschen Gesetz aus dem Spannungsfeld resultierenden Dehnungen erfüllt sind, wenn die Spannungsfunktion die Bipotenzialgleichung

$$\Delta \Delta \varphi = 0$$

erfüllt⁴⁸.

Die AIRYschen Spannungsfunktion kann auch benutzt werden, wenn eine konstante Massenkraft $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2$ in der Ebene angreift. Dafür wählt man den Ansatz

⁴⁶ Herrmann Schaefer (1907-1969)

⁴⁷ George Biddell Airy (1801-1892)

⁴⁸ s. Szabo, I.: *Höhere Technische Mechanik*. Springer (1964) S. 153

$$(3.2.27) \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\varphi_{,12} - \rho b_1 x_2 - \rho b_2 x_1.$$

Folgende homogenen Spannungszustände lassen sich mit AIRYSchen Spannungsfunktionen leicht darstellen:

1) einachsiger Zug in x_1 -Richtung:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sigma_{11} x_2^2 \Rightarrow \sigma_{11} = \varphi_{,22}$$

2) biaxialer Zug:

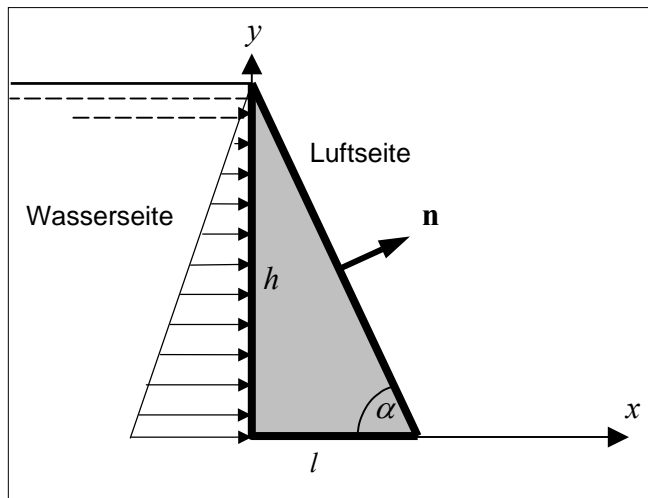
$$\varphi(x^1, x^2) = \frac{1}{2} (\sigma_{11} x_2^2 + \sigma_{22} x_1^2) \Rightarrow \sigma_{11} = \varphi_{,22} \text{ und } \sigma_{22} = \varphi_{,11}$$

3) reiner Schub:

$$\varphi(x_1, x_2) = -\sigma_{12} x_1 x_2 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} = -\varphi_{,12}$$

während alle anderen Spannungen immer Null sind.

Beispiel zur AIRYSchen Spannungsfunktion⁴⁹: Wir betrachten den ebenen Spannungszustand einer dreieckigen prismatischen Staumauer unter Eigengewicht und einseitigem Wasserdruck, der linear von der Wassertiefe abhängt.



Die lokale Gleichgewichtsbedingung (3.2.7) mit spez. Gewicht γ_M der Mauer lautet

$$(CI) \quad \text{div } \mathbf{T} - \gamma_M \mathbf{e}_y = \mathbf{0},$$

was identisch erfüllt wird mit dem AIRYSchen Ansatz nach (3.2.26) und (3.2.27)

$$\sigma_{xx} = \varphi_{,yy} \quad \sigma_{yy} = \varphi_{,xx} \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -\varphi_{,xy} + \gamma_M x.$$

Als Ansatz für die Spannungsfunktion wählen wir ein Polynom 3. Grades in den beiden Koordinaten:

⁴⁹ s. Szabo, I.: *Höhere Technische Mechanik*. Springer (1964)

$$\varphi(x, y) = a x^2 + b x^3 + c y^2 + d y^3 + e x y + f x y^2 + g x^2 y,$$

wobei wir gleich alle Terme weggelassen haben, die beim zweimaligen Differenzieren wegfallen. Damit ergeben sich die Spannungsfelder

$$\sigma_{xx} = 2c + 6dy + 2fx$$

$$\sigma_{yy} = 2a + 6bx + 2gy$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -e - 2fy - 2gx + \gamma_M x.$$

Die Konstanten a bis g werden nun durch die Spannungs-Randbedingungen bestimmt.

Auf der Wasserseite soll ein hydrostatischer Druckspannungszustand herrschen, womit die Schubspannungen Null sein müssen:

$$\sigma_{xy}|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 0; \quad f = 0.$$

Statt dessen sollen die Normalspannungen hier als Druck linear mit der Wassertiefe anwachsen (spez. Gewicht des Wassers: γ_W)

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = -\gamma_W(h-y) = 2c + 6dy \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{2}\gamma_W h \quad d = \frac{1}{6}\gamma_W.$$

Damit verbleiben folgende von Null verschiedene Spannungsfelder:

$$\sigma_{xx} = \gamma_W(y-h)$$

$$\sigma_{yy} = 2a + 6bx + 2gy$$

$$\sigma_{xy} = (\gamma_M - 2g)x.$$

Auf der Luftseite des Damms herrscht bei Vernachlässigung des Luftdrucks Spannungsfreiheit. Wir benötigen die äußere Flächennormale auf die Dammoberfläche

$$\mathbf{n} = \sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \quad \text{mit } \tan \alpha = h/l.$$

Damit berechnet sich der Spannungsvektor mit dem Satz von CAUCHY (3.2.5) zu

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = (\sigma_{xx} \sin \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha) \mathbf{e}_x + (\sigma_{xy} \sin \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha) \mathbf{e}_y.$$

Dieser muss Null sein an den Stellen mit $y = h - (h/l)x$. Mit dieser Koordinatenbeziehung können wir die y -KOO durch die x -KOO ausdrücken und erhalten zwei skalare Gleichungen mit in x linearen und konstanten Termen. Durch einen Koeffizientenvergleich können wir dann die übrigen Konstanten bestimmen zu

$$a = \frac{1}{2}(h^3/l^2 \gamma_W - h \gamma_M)$$

$$b = \frac{1}{6}(h/l \gamma_M - 2h^3/l^3 \gamma_W)$$

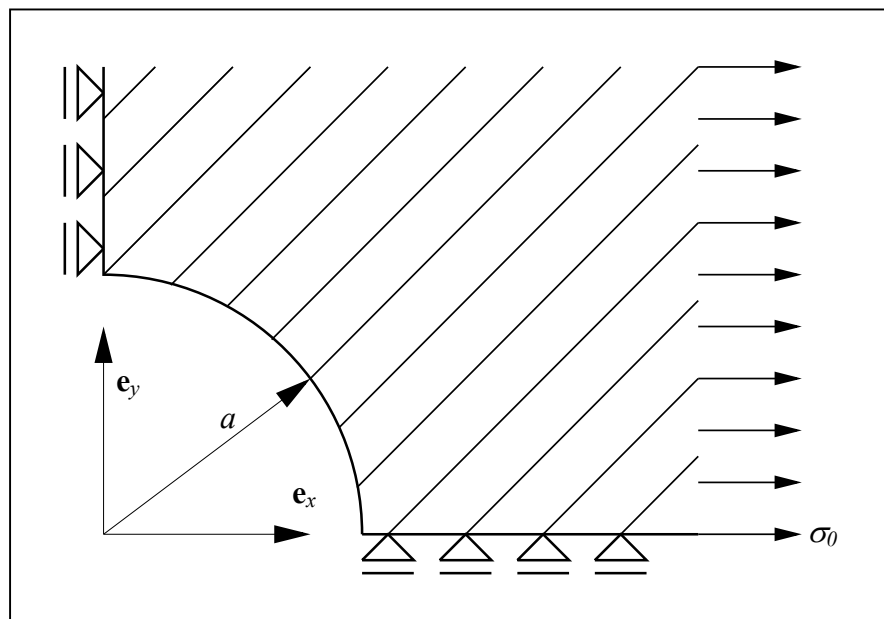
$$g = \frac{1}{2}(\gamma_M - h^2/l^2 \gamma_W).$$

Diese Lösung des Randwertproblems ist ein partikulärer Anteil des Spannungsfeldes, der die Randbedingungen an lediglich zwei der drei Dammsseiten erfüllt, aber noch nicht an die Spannungs- oder Verschiebungsverteilung an der Dammsohle angepasst wurde. Letzteres

kann jedoch erst nach Festlegung eines Materialgesetzes für den Damm (etwa des HOOKE-schen Gesetzes) gelingen.

Beispiel 12. Spannungsfunktionen (KIRSCH⁵⁰ 1898)

Es sei mit Hilfe einer geeigneten Spannungsfunktion das Spannungsfeld in einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit einem Loch (Radius a) unter der Fern-Zugspannung σ_0 in einer Richtung zu ermitteln. Dabei reicht es aus Symmetrie-Gründen, lediglich einen Viertel der Scheibe zu betrachten.



Lösung:

Bei diesem Problem sind alle Randbedingungen dynamisch, beziehen sich also auf Spannungen. Damit ist das Problem statisch bestimmt. Da der Spannungszustand eben ist, kommen wir mit der AIRYschen Spannungsfunktion nach (3.2.21) mit (3.2.25) aus

$$\mathbf{T} = -\nabla \times \mathbf{A} \times \nabla = -\nabla \times \varphi \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \times \nabla.$$

Aufgrund des kreisrunden Loches ist die Verwendung von Zylinderkoordinaten $\{r, \theta, z\}$ vorteilhaft, wobei wir wieder die bereits bekannte ONB verwenden. Da φ nicht von z abhängt, können wir die Ableitung nach z von vornherein weglassen.

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -\left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta\right) \times \varphi \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta\right) \\ &= \left(\varphi_{,r} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} \mathbf{e}_r\right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_r\right) \end{aligned}$$

⁵⁰ E. G. Kirsch: *Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre*. Zeitschrift d. VDI, **42**, 797-807 (1898)

$$= \varphi_{,rr} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \varphi_{, \theta} - \frac{1}{r} \varphi_{, \theta r} \right) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r} (\varphi_{,r} \mathbf{e}_\theta)_{, \theta} \otimes \mathbf{e}_r + \frac{1}{r^2} (\varphi_{, \theta} \mathbf{e}_r)_{, \theta} \otimes \mathbf{e}_r.$$

Bei der Auswertung sind noch zwei Produktregeln und die Abhängigkeit von \mathbf{e}_r und \mathbf{e}_θ bezüglich θ zu berücksichtigen. Man erhält

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2} \varphi_{, \theta\theta} + \frac{1}{r} \varphi_{, r} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \varphi_{, \theta} - \frac{1}{r} \varphi_{, \theta r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \varphi_{, rr}. \end{aligned}$$

Nun kann ein Ansatz für φ gemacht werden. Dieser muss in jedem Fall in hinreichender Entfernung vom Loch den einachsigen Spannungszustand enthalten. Wir benutzen zweckmäßiger Weise kartesische Koordinaten. Mit der Zugrichtung \mathbf{e}_x hat man also

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 = \varphi_{\infty, yy},$$

nach (3.2.26), woraus man nach zweimaligem Integrieren

$$\varphi_\infty = \sigma_0 y^2 / 2$$

erhält. Mit $y = r \sin \theta$ und $\sin^2 \theta = (1 - \cos(2\theta)) / 2$ findet man

$$\varphi_\infty = \sigma_0 r^2 (1 - \cos(2\theta)) / 4.$$

Diesem Term müssen nun, um die Störung des einachsigen Spannungszustandes am Loch zu beschreiben, weitere Terme hinzugefügt werden. Da der auf den konstanten Spannungszustand führende Term von der Ordnung r^2 ist, klingen alle Terme mit niedrigerer Ordnung in r mit $r \rightarrow \infty$ ab. Fügen wir Terme höherer Ordnung hinzu, stören wir den angestrebten einachsigen Spannungszustand. Gleichzeitig ist aufgrund der Symmetrie klar, dass die Störterme mit der Periode 2θ auftreten müssen. Prinzipiell kann man beliebige Ansätze machen. Es ist jedoch sinnvoll, nur Lösungen der Bipotenzialgleichung $\Delta\Delta\varphi = 0$ zu verwenden, da nur diese bei einem isotropen elastischen Materialverhalten auf kinematisch zulässige Dehnungsfelder führen. Dementsprechend sind wir bei der Wahl der Ansatzfunktion schon recht eingeschränkt. Man kann als Ansatz alle Lösungen der Bipotenzialgleichung mit Parametern skaliert aufsummieren und sieht dann beim Anpassen der Randbedingungen, welche Terme eine Rolle spielen. Dies wäre aber zuviel Aufwand, weshalb wir hier mit einer kleineren Auswahl an Termen arbeiten, wie beispielsweise

$$\varphi = \sigma_0 \{ r^2 [1 - \cos(2\theta)] / 4 + C_1 \ln(r) + C_2 \cos(2\theta) / r^2 + C_3 \cos(2\theta) \}.$$

Dieser Ansatz führt auf

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_0 \left(\cos(2\theta) \left(\frac{1}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4C_3}{r^2} \right) + \frac{1}{2} + \frac{C_1}{r^2} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{C_1}{r^2} + \cos(2\theta) \left(\frac{6C_2}{r^4} - \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_0 \sin(2\theta) \left(-\frac{1}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{2C_3}{r^2} \right).$$

Wir können C_1 , C_2 und C_3 an die einzige Randbedingung – den spannungsfreien Lochrand – anpassen. Hier muss gelten

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

Es sind somit an der Stelle $r = a$ die Spannungskomponenten $\sigma_{rr} = 0$ und $\sigma_{r\theta} = 0$. Man erhält hiermit zwei Gleichungen für die drei Unbekannten C_1 , C_2 und C_3 . Mit der zusätzlichen Forderung, dass C_1 , C_2 und C_3 nicht von θ abhängen dürfen, erhält man durch einen Koeffizientenvergleich die drei Gleichungen

$$\frac{1}{2} + \frac{C_1}{a^2} = 0 \quad \frac{1}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4C_3}{a^2} = 0 \quad \frac{1}{2} + \frac{6C_2}{a^4} + \frac{2C_3}{a^2} = 0,$$

was schließlich auf

$$C_1 = -a^2/2 \quad C_2 = -a^4/4 \quad C_3 = a^2/2$$

führt. Nun kann zum Beispiel die Spannungsspitze am Lochrand betrachtet werden. Bei $\theta \equiv \pi/2$ und $r \equiv a$ findet man $\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma_0$, also eine beträchtliche Mehrbelastung. Ein Blick auf $\sigma_{\theta\theta}$ an der Stelle $\theta \equiv 0$ ist ebenfalls interessant: Man findet $\sigma_{\theta\theta} = -\sigma_0$, also eine der Fern-Zugspannung betragsmässig gleiche, aber vom Vorzeichen her umgekehrte Spannung. Sollte σ_0 eine Druckspannung sein ergibt sich bei $\theta \equiv 0$ also eine Zugbeanspruchung. Man erkennt das in beiden Fällen (σ_0 größer oder kleiner als Null) eine Zugbelastung am Lochrand entsteht, entweder mit Faktor 3 ($\sigma_0 > 0$) oder mit Faktor 1 ($\sigma_0 < 0$).

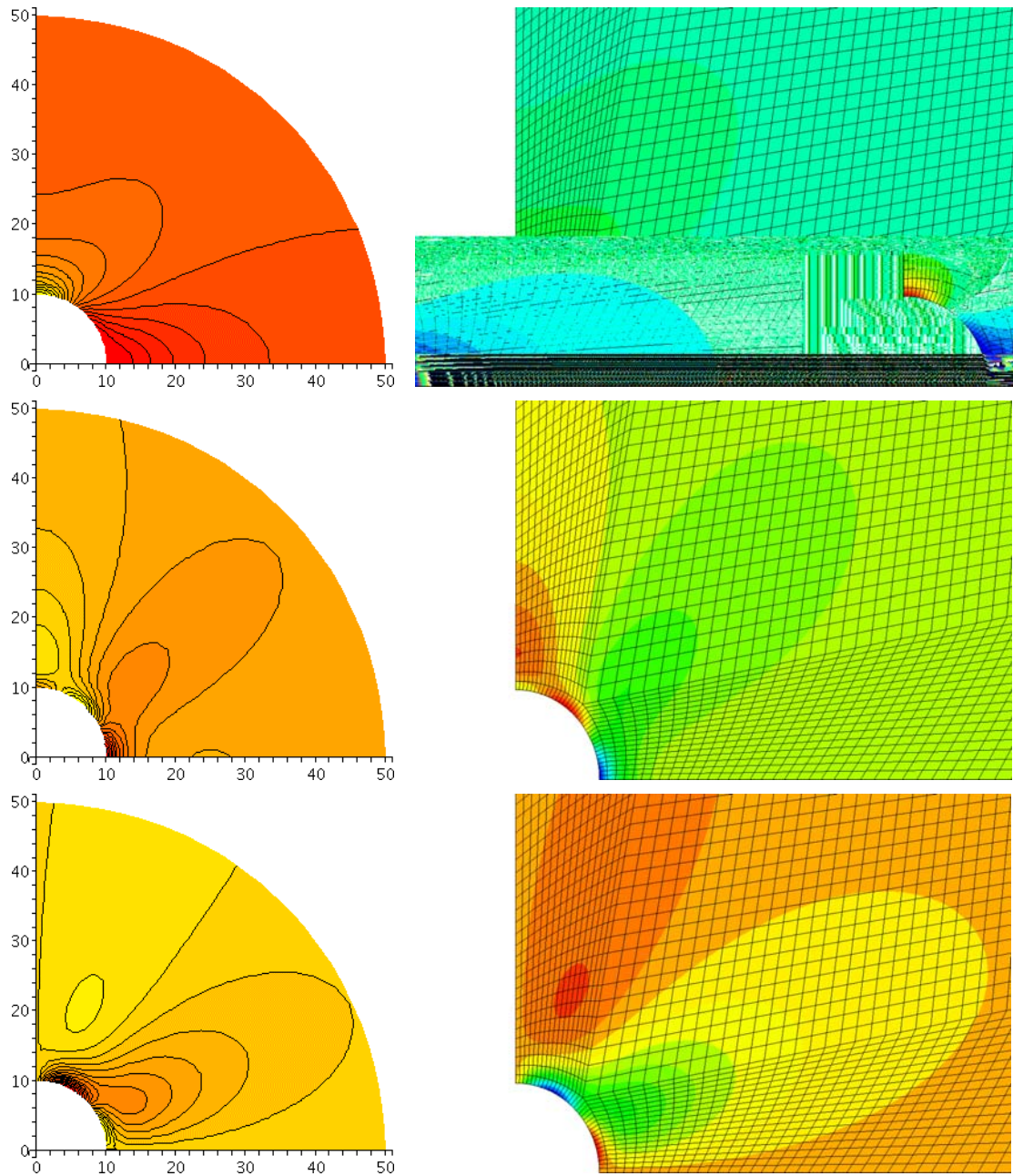
Die Lösung soll mit dem Ergebnis einer Finite-Elemente-Rechnung verglichen werden. Hierfür müssen die Komponenten von \mathbf{T} bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ dargestellt werden. Wir berechnen die Komponenten $\sigma^{e_{ij}}$ mit

$$\sigma^{e_{ij}} = Q_{ik}^T \sigma_{kl} Q_{lj}$$

wie im Beispiel B4 mit dem den Basiswechsel beschreibenden orthogonalen Tensor bez. $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In den Abbildungen sieht man links die Lösung mit der Spannungsfunktion, rechts die FE-Lösung mit $0 < \sigma_{xx} < 300 \text{ MPa}$ (oben), $-100 \text{ MPa} < \sigma_{yy} < 56,25 \text{ MPa}$ (Mitte), $-88,01 \text{ MPa} < \sigma_{xy} < 18,45 \text{ MPa}$ (unten). Die angegebenen Bereiche betreffen die Lösung mit der Spannungsfunktion. Die FE-Lösung wurde für ein isotropes elastisches Material ermittelt. Sie weicht minimal von unserer (exakten) Lösung ab, was unter anderem an der endlichen Plattengröße des FE-Modells liegt. Als Rechenwerte wurden $a = 10 \text{ mm}$ und $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$ verwendet.



4 DREIDIMENSIONALE MATERIALTHEORIE

Als grundlegende mechanische Feldgrößen haben wir bisher

- das Verschiebungsfeld \mathbf{u} (3 skalare Größen)
- das Spannungstensorfeld \mathbf{T} (9 skalare Größen)
- das spezifische Massenkraftfeld \mathbf{b} (3 skalare Größen)

eingeführt. Während das Massenkraftfeld häufig vorgegeben ist (z. B. als Gravitationsfeld), gibt es für die beiden anderen Felder mit 3+9 reellen Unbekannten lediglich die Bewegungsgleichungen Impulsgesetz (3) und Drallgesetz (3). Uns fehlen also noch 6 weitere Feldgleichungen. Auch die Einführung des Deformationstensors (6) hilft uns nicht weiter, da hierfür 6 Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen existieren.

Es ist andererseits aber auch nicht zu erwarten, dass sich das mechanische Verhalten von materiellen Körpern vollständig durch allgemeine Gleichungen determinieren lässt, da die Materialindividualität hier noch in keiner Weise berücksichtigt ist. Wir benötigen also noch 6 **Materialgleichungen**, die den Zusammenhang zwischen den kinematischen (\mathbf{u} , \mathbf{E} , ...) und den dynamischen (\mathbf{b} , \mathbf{T} , ...) Feldgrößen in Material-individueller Weise vermitteln.

Da sich uns in der Natur im weitesten Sinne eine unüberschaubare Mannigfaltigkeit von unterschiedlichen Materialverhalten bietet, muss auch der Rahmen der Materialgleichungen entsprechend weit sein. Es lassen sich aber doch einige Erfahrungs- und Plausibilitätsaussagen vornehmen, die für alle Materialien bereits zu erheblichen Konkretisierungen der Materialgleichungsstruktur führen. Sind diese Aussagen, die als *Prinzipien der Materialtheorie* aufgestellt wurden, ausgeschöpft, so können wir nur noch durch einschränkende Klassifizierungen weitere Konkretisierungen vornehmen. Wichtig ist, dass alle Annahmen deutlich herausgestellt und nach Möglichkeit physikalisch motiviert werden.

Zunächst gilt es, überhaupt einen deterministischen Zusammenhang zwischen kinematischen und dynamischen Variablen zu postulieren. Dabei wählen wir als unabhängige Variable das zeitabhängige Verschiebungsfeld des Körpers. Hieraus lassen sich dann beliebige Deformationstensoren, Geschwindigkeitsgradienten usw. ableiten. Als abhängige Variable wählen wir den gegenwärtigen lokalen Spannungstensor eines festgewählten Punktes im Inneren des Körpers.

Prinzip des Determinismus

Die Spannung in einem Punkt des Körpers ist determiniert durch das Verschiebungsfeld des Körpers in der Vergangenheit bis zur Gegenwart.

Damit schließen wir aus, dass zukünftige Vorgänge die Gegenwart beeinflussen. Andererseits ist ausdrücklich zugelassen, dass vergangene Bewegungen, die beliebig lange zurückliegen können, immer noch einen Einfluss auf die gegenwärtigen Spannungen haben (Nachwirkungsprinzip, materielles Erinnerungsvermögen).

Neben der zeitlichen Einschränkung soll auch eine räumliche vorgenommen werden.

Prinzip der lokalen Wirkung

Die Spannungen in einem Körperpunkt sind determiniert durch die Bewegung einer endlichen Umgebung dieses Punktes.

Damit wird ausgeschlossen, dass beliebig weit entfernte Deformationsvorgänge das lokale Verhalten beeinflussen.

Das dritte und letzte der allgemeinen Prinzipien soll festschreiben, dass die Spannungen nur von den Deformationen, nicht aber von Starrkörperbewegungen (Translationen und Rotationen) beeinflusst werden.

Prinzip der Invarianz gegen überlagerte Starrkörperbewegungen

Spannungen im Körper entstehen nicht direkt durch Translationen oder Rotationen des Körpers.

Indirekt können Spannungen infolge von Trägheiten natürlich durch Starrkörperbewegungen bewirkt werden. Hier geht es lediglich um den Ausschluss von einer direkten Abhängigkeit der Spannungen von Starrkörperbewegungen.

Bevor wir die Konsequenzen aus diesen drei Prinzipien ziehen, schränken wir uns auf eine spezielle Materialklasse ein, die uns eine weitere Konkretisierung der Materialgleichung erlaubt.

4.1 Elastizität

Literatur

- Atanackovic, T. M.; Guran, A.:** *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers.* Birkhäuser, Boston (2000)
- Barber, J. R.:** *Elasticity.* Kluwer Acad. Pub., Dordrecht (1992)
- Becker, W.; Gross, D.:** *Mechanik elastischer Körper und Strukturen.* Springer, Berlin (2002)
- Eschenauer, H.; Schnell, W.:** *Elastizitätstheorie.* BI, Mannheim. 3. Aufl. (1993)
- Fung, Y. C.; Tong, P.:** *Classical and Computational Solid Mechanics.* World Scientific, Singapore (2003)
- Göldner, H.:** *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1. Grundlagen der Elastizitätstheorie.* 3. Auflage. Fachbuchverlag Leipzig (1991)
- Gould, P. L.:** *Introduction to Linear Elasticity.* Springer, New York (1989)
- Gurtin, M. E.:** *The Linear Theory of Elasticity.* In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer (1972)
- Hahn, H. G.:** *Elastizitätstheorie.* Teubner, Stuttgart (1985)
- Hetnarski, R. B.; Ignaczak, J.:** *The Mathematical Theory of Elasticity.* CRC Press (2004, 2011)
- Irgens, F.:** *Continuum Mechanics.* Springer (2008)
- Kienzler, R., Schröder, R.:** *Einführung in die Festigkeitslehre.* Springer, Dordrecht (2009)
- Kreißig, R.; Benedix, U.:** *Höhere Technische Mechanik. Lehr- und Übungsbuch.* Springer Wien/New York (2002)
- Leipholtz, H.:** *Theory of Elasticity.* Noordhoff, Leyden (1974)
- Love, A. E. H.:** *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Dover, New York (1944)
- Maceri, A.:** *Theory of Elasticity.* Springer (2010)
- Mang, H.; Hofstetter, G.:** *Festigkeitslehre.* Springer (2000)
- Mußchelischwili, N. I.:** *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie.* Fachbuchverlag Leipzig (1971)
- Slaughter, W. S.:** *The Linearized Theory of Elasticity.* Birkhäuser, Boston (2002)
- Sneddon, I. N.; Berry, D. S.:** *The Classical Theory of Elasticity.* In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VI, Springer (1958)

Sokolnikoff, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York (1956)

Stark, R.: *Festigkeitslehre - Aufgaben und Lösungen*. Springer (2006)

Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, Neuaufgabe (1970)

Siehe auch alle Bücher zur Kontinuumsmechanik.

Die strengste Verschärfung des Determinismus-Prinzips in zeitlicher Hinsicht führt auf die Elastizität.

Definition: Ein Material heißt **elastisch**, wenn die gegenwärtige Spannung nur vom gegenwärtigen Deformationszustand abhängt.

Elastische Materialien zeigen also keinerlei Nachwirkungseigenschaften, haben also keinerlei Gedächtnis an vergangene Ereignisse.

Für elastische Materialien hängen die Spannungen $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ also nur von dem *gleichzeitigen* Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{Y}, t)$ der Körperpunkte \mathbf{Y} ab. Nach dem Prinzip der lokalen Wirkung brauchen wir jedoch nur die Punkte \mathbf{Y} einer endlichen Umgebung von \mathbf{X} einzubeziehen. Wir wollen annehmen, dass die Verschiebungen in dieser Umgebung in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden können

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{Y}, t) = & \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \\ & + \frac{1}{2} \text{Grad Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \otimes (\mathbf{Y} - \mathbf{X}) + \dots \end{aligned}$$

Damit kann $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ nur noch von den *lokalen* Größen

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \\ & \text{Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) =: \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \\ & \text{Grad Grad } \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

abhängen.

Da $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ in der TAYLOR-Reihe eine Translation darstellt, die nach dem Prinzip der Invarianz gegen überlagerte Starrkörperbewegungen keine Spannungen erzeugt, kann der erste Term nicht in das Spannungsgesetz eingehen.

Die folgende Annahme stellt die stärkste nicht-triviale Verschärfung des Prinzips der lokalen Wirkung dar.

Definition: Ein Material heißt **einfach**, wenn die Spannungen nur von der Verschiebung und vom ersten (oder einfachen) Gradienten des Verschiebungsfeldes an dieser Stelle abhängen.

Damit werden sogenannte *Gradientenmaterialien* ausgeschlossen, bei denen auch die höheren Verschiebungsgradienten Einfluss haben.

Bei *einfachen elastischen Materialien* gibt es also eine Materialfunktion f , die als

$$\mathbf{T} = f(\mathbf{H})$$

dem Tensor \mathbf{H} einen symmetrischen Tensor \mathbf{T} zuordnet. f heißt **elastisches Stoffgesetz**.

Inelastische einfache Materialien, mit denen wir uns später ebenfalls befassen werden, sind innerhalb dieser Systematik also diejenigen, bei denen die gegenwärtigen Spannungen vom vergangenen bis gegenwärtigen \mathbf{H} -Prozess abhängen.

Doch zunächst zu einfachen *elastischen* Materialien. Wir zerlegen den Verschiebungsgradienten in seinen symmetrischen und antimetrischen Anteil nach (3.1.31) und (3.1.32)

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$$

mit $\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad}^T \mathbf{u}) = \text{Def } \mathbf{u}$

$$\mathbf{\Omega} := \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} - \text{Grad}^T \mathbf{u}) .$$

Darin beschreibt \mathbf{E} die (infinitesimalen) Deformationen und $\mathbf{\Omega}$ die (infinitesimalen) Rotationen. Bei reinen Translationen ist das Verschiebungsfeld räumlich konstant $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_0(t)$, was weder zu \mathbf{E} noch zu $\mathbf{\Omega}$ beiträgt. Nach dem Invarianz-Prinzip gegen überlagerte Starrkörperbewegungen können die Spannungen aber nicht von den Rotationen $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$ abhängen. Also verbleibt im Stoffgesetz lediglich die Abhängigkeit $\mathbf{T} = f(\mathbf{E})$.

Da wir uns in diesem Buch auf kleine Verzerrungen kapriziert haben, ist es legitim, dieses zunächst beliebig nicht-lineare Gesetz um eine als (lokal) spannungsfrei angenommene Bezugsplatzierung ($\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$ für $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$) herum *linear* zu approximieren. Da sich eine lineare Funktion zwischen Tensoren 2. Stufe immer als Tensor 4. Stufe (Tetrade) darstellen lässt, erhält man die folgende Form für das allgemeine linear-elastische Stoffgesetz oder das

HOOKESche Gesetz

$$(4.1.1) \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E} \quad (\text{HOOKE})$$

Darin wird \mathbf{C} als (elastische) **Steifigkeits-Tetrade** (engl. *stiffness tensor*) bezeichnet. Ist diese invertierbar zu

$$(4.1.2) \quad \mathbf{S} := \mathbf{C}^{-1},$$

so beschreibt die (elastische) **Nachgiebigkeits-Tetrade** \mathbf{S} (engl. *compliance tensor*) den umgekehrten Zusammenhang

$$(4.1.3) \quad \mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{T} \quad (\text{HOOKE})$$

Wir werden uns im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie mit den Eigenschaften und Klassifikationen von \mathbf{C} und \mathbf{S} befassen, soweit es die Materialtheorie betrifft.

Fassen wir \mathbf{C} gemäß $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{H}$ auf, so muss es wegen $\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$ die rechte Subsymmetrie besitzen und ist damit nicht mehr invertierbar.

Fassen wir \mathbf{C} aber gemäß $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E}$ gleich als Abbildung zwischen *symmetrischen* Tensoren auf, so können wir über die antimetrischen Abbildungsanteile beliebig verfügen. Hierfür bieten sich zwei natürliche Möglichkeiten an:

1.) Wir verfügen, dass \mathbf{C} jeden antimetrischen Tensor in sich selbst abbildet. Wegen C2 soll \mathbf{C} jeden symmetrischen Tensor \mathbf{E} in einen symmetrischen Tensor \mathbf{T} abbilden. Damit ist die Einschränkung von \mathbf{C} auf die antimetrischen Tensoren die Identität

$$\mathbf{C} \cdot \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i$$

für $i, j = 1, 2, 3$, dessen Inverse auf den antimetrischen Tensoren immer existiert und ebenfalls die identische Abbildung leistet

$$\mathbf{S} \cdot \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i .$$

Ist auch der symmetrische Teil invertierbar, so sind diese Tetraden insgesamt invertierbar.

2.) Wir verfügen, dass \mathbf{C} jeden antimetrischen Tensor in den (symmetrischen) Nulltensor abbildet. Damit besitzt \mathbf{C} die rechte Subsymmetrie. Da \mathbf{C} jeden symmetrischen Tensor \mathbf{E} in einen symmetrischen Tensor abbilden soll und jeden antimetrischen in den (symmetrischen) Nulltensor, besitzt \mathbf{C} auch die linke Subsymmetrie. Mit den beiden Subsymmetrien verliert \mathbf{C} allerdings seine allgemeine Invertierbarkeit. Auf den symmetrischen Unterraum eingeschränkt kann aber ein solches \mathbf{C} immer noch invertierbar⁵¹ sein als

$$\mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}.$$

Für \mathbf{S} können wir dann ebenfalls beide Subsymmetrien fordern.

Vorteil dieser 2. Alternative ist, dass wir für \mathbf{C} und \mathbf{S} VOIGTsche Darstellungen (2.1.142) als Tensoren auf 6-dimensionalen Vektorräumen benutzen können, die dann die beiden Subsymmetrien identisch erfüllen. Diese Annahme wird in der Literatur meistens getroffen und soll von uns auch im Weiteren benutzt werden. Damit besitzen die elastischen Tetraden im Allgemeinen $6 \times 6 = 36$ unabhängige Komponenten.

Außerdem wird angenommen, dass die elastischen Tetraden (haupt-)symmetrisch sind

$$(4.1.4) \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T$$

und damit auch eine *symmetrische* VOIGTsche Darstellung zulassen. Die physikalischen Implikationen der Symmetrie-Annahme werden in Kap. 4.1.5 untersucht. Damit geht man also insgesamt von folgenden Symmetrie-Eigenschaften aus:

$$(4.1.5) \quad \begin{array}{ll} C_{ijkl} = C_{jikl} & \text{linke Subsymmetrie} \\ C_{ijkl} = C_{ijlk} & \text{rechte Subsymmetrie} \\ C_{ijkl} = C_{klij} & \text{Symmetrie} \end{array}$$

bezüglich jeder ONB. Eine Tetrade mit diesen Symmetrie-Eigenschaften hat nur noch 21 unabhängige Komponenten.

Weitere Eigenschaften oder Vereinfachungen der elastischen Tetraden lassen sich ohne Einschränkungen der Materialklasse nicht angeben.

4.1.1 Materielle Symmetrie

Literatur zur anisotropen Elastizität

Böhlke, T.; Brüggemann, C.: *Graphical representation of the generalized Hooke's law.* Techn. Mech. 21,2, 145-158 (2001)

Forté, S.; Vianello, M.: *Symmetry classes for elasticity tensors.* J. Elast. 43, 81-108 (1996)

Hearmon, R.: *The elastic constants of anisotropic materials.* Rev. Mod. Phys. 18, 409-440 (1946)

Lekhnitskij, S. G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body.* Holden-Day (1963) (englische Ausgabe).

Nye, J. F.: *Physical Properties of Crystals.* Oxford University Press, Ely House, London (1957)

⁵¹ Diese Pseudoinverse wird als MOORE-PENROSE-Inverse bezeichnet.

Simmons, G.; Wang H.: *Single Crystal Elastic Constants and Calculated Aggregate Properties: A Handbook.* The M. I. T. Press (1971)

Ting, T. C. T.: *Anisotropic Elasticity.* Oxford Univ. Press (1996)

Voigt, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik.* Teubner, Leipzig (1910)

Sind die Eigenschaften eines Körpers in allen Richtungen gleich, so nennt man ihn *isotrop*. Dies ist bei Stählen, bei Gummi, bei unbewehrtem Beton und bei vielen anderen Materialien oft eine praktische und zutreffende Annahme. Andere Materialien hingegen sind deutlich richtungsabhängig, wie Holz, bewehrter Beton, verstärktes Gummi und mineralische oder metallische Kristalle. Sie werden *anisotrop* genannt. Unter ihnen gibt es wiederum verschiedene Anisotropie-Klassen. Dies alles soll nun für elastische Materialien präzisiert und klassifiziert werden.

Ausgangspunkt ist das lineare elastische Materialgesetz (4.1.1) oder (4.1.3)

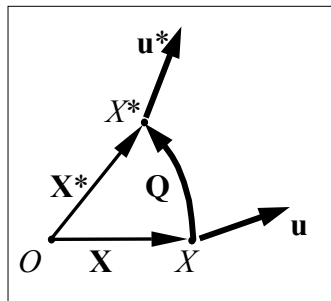
$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \quad \text{oder} \quad \mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}.$$

Seien X ein Raumpunkt und $\mathbf{u}(X)$ ein beliebiges Verschiebungsfeld des Körpers und \mathbf{Q} ein festgewählter orthogonaler Tensor. Ein zweites Verschiebungsfeld sei dann

$$\mathbf{u}^*(X^*) := \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(X) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}(X) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{u}^*(X^*),$$

also das mit \mathbf{Q} gegenüber $\mathbf{u}(X)$ um O gedrehte Verschiebungsfeld mit der Transformation von X auf X^*

$$\begin{aligned} \vec{OX^*} &= \mathbf{Q} \cdot \vec{OX} & \Leftrightarrow & \vec{OX} = \mathbf{Q}^T \cdot \vec{OX^*} \\ &= \mathbf{X}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} & \Leftrightarrow & \mathbf{X} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{X}^* \end{aligned}$$



Wegen

$$\mathbf{H} := \text{Grad } \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}}$$

und infolge der Kettenregel

$$\mathbf{H}^* = \text{Grad}^* \mathbf{u}^* = \frac{d\mathbf{u}^*}{d\mathbf{X}^*} = \frac{d\mathbf{u}^*}{d\mathbf{u}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}^*} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}^T$$

sind die zu diesen beiden Feldern zugehörigen Deformationstensoren

$$\mathbf{E}(X) = \text{Def } \mathbf{u}(X)$$

und

$$\mathbf{E}^*(X^*) = \text{Def}^* \mathbf{u}^*(X^*) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Diese Beziehungen gelten auch, wenn man um X dreht, also wenn $O \equiv X \equiv X^*$ ist.

Das Verhalten des elastischen Gesetzes ist nun bezüglich dieser Drehung symmetrisch, wenn die Spannungen \mathbf{T}^* in $X \equiv X^*$ in Folge \mathbf{E}^* gegenüber denjenigen $\mathbf{T} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ in $X \equiv X^*$ in Folge \mathbf{E} auch nur gedreht sind:

$$\mathbf{T}^* = \sigma_{ij} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Dies führt auf die

Definition: Ein orthogonaler Tensor \mathbf{Q} heißt **Symmetrie-Transformation** des linear-elastischen Gesetzes $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$, falls

$$(4.1.6) \quad \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T$$

für alle Deformationen \mathbf{E} gilt. Die Menge aller Symmetrie-Transformationen von \mathbf{C} heißt **Symmetriegruppe** \mathcal{S} des Materials.

Wir haben uns hier auf Festkörper eingeschränkt, wo nicht-orthogonale Symmetrie-Transformationen keine Rolle spielen. Bei Fluiden und Gasen ist dies nicht mehr der Fall. Da aber für die Elastizitätstheorie speziell die Festkörper interessant sind, ist diese Einschränkung gerechtfertigt.

Die Symmetriegruppe \mathcal{S} erfüllt die folgenden Axiome einer Gruppe, wie man leicht verifiziert:

- | | |
|------|--|
| (G1) | $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{S}$ |
| (G2) | $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 \in \mathcal{S} \Rightarrow (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) \cdot \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 \cdot (\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_3)$ |
| (G3) | $\mathbf{I} \in \mathcal{S}$ |
| (G4) | $\mathbf{Q} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1} \in \mathcal{S}$ |

Eine Transformations-Menge mit diesen vier Eigenschaften wird in der Algebra **Gruppe** genannt.

Da \mathbf{Q} auf jeder Seite der Symmetrie-Bedingung wegen der Tensorwertigkeit der Variablen zweimal auftritt und $(-\mathbf{Q})^T = -(\mathbf{Q}^T)$ gilt, folgt

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow -\mathbf{Q} \in \mathcal{S}.$$

Damit sind neben reinen Drehungen auch Spiegelungen/Inversionen in der Symmetrie-Gruppe. Dies gilt jedoch nur für Materialfunktionen, in denen ausschließlich Tensoren gerader Ordnung miteinander verknüpft werden.

Ist das elastische Gesetz invertierbar, dann sieht man sofort, dass die Symmetrien auch für die Nachgiebigkeitstetraden gelten, indem man (4.1.6) mit \mathbf{S} multipliziert und (4.1.1) einsetzt

$$\mathbf{Q} \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T).$$

Wir brauchen also nicht die Symmetrie-Gruppen von \mathbf{C} und \mathbf{S} zu unterscheiden.

Um zur Wirkung der Symmetrie-Transformation auf die Komponenten der Tetraden bezüglich einer (beliebigen) ONB zu gelangen, benutzt man die Darstellungen

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$$

und

$$\mathbf{S} = S_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l.$$

Dann folgt aus (4.1.6)

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \cdot [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T)] \cdot \mathbf{Q}$$

für beliebige symmetrische Tensoren \mathbf{E} , und demzufolge

$$(4.1.7) \quad \mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = C_{ijkl} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_l)$$

und analog

$$\mathbf{S} = S_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = S_{ijkl} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_l).$$

Die Tetraden haben also bezüglich einer ONB dieselben Komponenten wie bezüglich der mit einer Symmetrie-Transformation gedrehten.

Man kann die Symmetrie-Forderung an die Steifigkeitstetradе auch bezüglich einer beliebigen ONB äquivalent formulieren als

$$(4.1.8) \quad \text{sym}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{C} \cdot \text{sym}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) = \text{sym}[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_j)] \cdot \mathbf{C} \cdot \text{sym}[(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_l)]$$

für $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Die kleinste vorstellbare Symmetriegruppe besteht aus \mathbf{I} und $-\mathbf{I}$. Ist $\mathcal{S} \equiv \{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$, so heißt das Material **triklin**. Diese Gruppe ist in jeder anderen Symmetriegruppe als Untergruppe enthalten.

Wir nennen \mathbf{C} (und \mathbf{S}) **isotrop**, falls ihre Symmetriegruppe alle orthogonalen Tensoren (**orthogonale Gruppe**) enthält. Gibt es hingegen orthogonale Tensoren, die nicht in \mathcal{S} enthalten sind, so ist das Material **anisotrop**.

Alle anderen Symmetriegruppen von Festkörpern liegen zwischen den beiden Extremen, der triklinen Gruppe als Minimum, und der orthogonalen Gruppe als (isotropes) Maximum.

Algebraisch lassen sich beliebig viele Untergruppen der orthogonalen Gruppe konstruieren. In der Kristallographie sind 32 Kristallklassen bekannt. Da - wie gesehen - in der mechanischen Theorie mit einer Gruppe auch alle Spiegelungen/Inversionen dazugehören, verbleiben nur noch 6 Klassen. Hinzu kommen dann noch die isotropen und die transversal-isotropen (hexagonalen) Materialien (s. u.), so dass für uns außer der orthogonalen Gruppe nur noch 7 Untergruppen von Interesse sind.

In der folgenden Tabelle sind die 11 Kristallklassen definiert durch ihre Erzeugenden. Darin ist $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eine ONB und $\mathbf{d} := (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) / \sqrt{3}$ die normierte Raumdiagonale. \mathbf{Q}_n^φ ist derjenige orthogonale Tensor, der eine φ -Rechts-Drehung um eine \mathbf{n} -Achse beschreibt mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Die entsprechende Gruppe \mathcal{S} entsteht aus den Erzeugenden durch Spiegelungen und Kombinationen gemäß den Gruppenaxiomen.

Für alle diese Gruppen sind nur Drehungen um diskrete Winkel zugelassen, weswegen es sich um *diskrete Gruppen* handelt. Lediglich die isotrope und die folgende transversal-isotrope Gruppe sind *kontinuierlich*.

Die **transversal-isotrope** Gruppe wird erzeugt durch Drehungen \mathbf{Q}_k^φ um eine feste Achse \mathbf{k} mit beliebigem Winkel φ .

Es verbleiben also im linear-elastischen Falle nur 7 anisotrope und 1 isotrope Symmetrie-Klassen, die im Folgenden untersucht werden sollen. Dabei beziehen wir uns in allen Komponentendarstellungen auf eine rechts-orientierte ONB $\{\mathbf{e}_i\}$, die in den meisten Fällen

aber nicht beliebig, sondern durch die Kristallstruktur ausgezeichnet ist (wie vorher $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$).

Tabelle der Symmetriegruppen für verschiedene Kristallklassen⁵²

Nr.	Kristallklasse	Erzeugenden	Elementanzahl
1.	trikline Systeme	I	2
2.	monokline Systeme	Q_k^π	4
3.	rhombische Systeme	Q_i^π, Q_j^π	8
4.1	tetragonale Systeme tetragonal-disphänoidal tetragonal-pyramidal tetragonal-dipyramidal	$Q_k^{\pi/2}$	8
4.2	tetragonal-skalenohedral ditetragonal-pyramidal tetragonal-trapezohedral ditetragonal-dipyramidal	$Q_k^{\pi/2}, Q_i^\pi$	16
5.1	kubische Systeme tetratoidal diploidal	$Q_i^\pi, Q_j^\pi, Q_d^{2\pi/3}$	24
5.2	hextetrahedral gyroidal hexoktahedral	$Q_i^{\pi/2}, Q_j^{\pi/2}$	48
6.1	trigonale Systeme trigonal-pyramidal rhomboid-hedral	$Q_k^{2\pi/3}$	6
6.2	ditrigonal-pyramidal trigonal-trapezohedral hexagonal-skalenohedral	$Q_k^{2\pi/3}, Q_i^\pi$	12
6.3	trigonal-dipyramidal hexagonal-pyramidal hexagonal-dipyramidal	$Q_k^{\pi/3}$	12
6.4	ditrigonal-dipyramidal dihexagonal-pyramidal hexagonal-trapezohedral dihexagonal-dipyramidal	$Q_k^{\pi/3}, Q_i^\pi$	24

⁵² nach COLEMAN, B. D.; NOLL, W.: *Material symmetry and thermodynamic inequalities in finite elastic deformations*. Arch. Rational Mech. Anal. **15**, 87-111 (1964)

Die VOIGTsche Darstellung von **C** erfolgt als symmetrische 6×6-Matrix

$$(4.1.9) \quad \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1113} & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2213} & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3313} & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 2C_{2312} \\ & & & & 2C_{1313} & 2C_{1312} \\ & & & & & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Es soll nun dargestellt werden, welche Einschränkungen an die Komponenten von **C** durch die 8 Symmetrie-Klassen erfolgen.

1.) **trikline Elastizität:** keine Einschränkungen, also 21 unabhängige Konstanten. Hier können alle Winkel der kristallographischen Elementarzelle, die die Kristallstruktur beschreibt, schief sein.

2.) **monokline Elastizität:** \mathcal{S} wird durch Drehungen $\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi$ erzeugt und durch $-\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi$ ergänzt, also durch Spiegelungen an der \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 -Ebene. Hier sind zwei der drei Winkel der Elementarzelle rechte und nur einer schief. Somit gilt

$$(-\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \quad (-\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \quad (-\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi) \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3.$$

Damit müssen alle Komponenten, die den Index 3 ungradzahligfach enthalten, Null sein. Die VOIGTsche Matrix wird zu

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{2212} \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & \sqrt{2}C_{3312} \\ & & & 2C_{2323} & 2C_{2313} & 0 \\ & & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Es verbleiben damit 13 unabhängige Konstanten. Mit ähnlichen Methoden erhält man die übrigen Darstellungen.

3.) **rhombische Elastizität (Orthotropie)** erzeugt durch $\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_2}^\pi$, $\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^\pi$ mit 9 unabhängigen Konstanten

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{1313} & 0 \\ & & & & & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Hier ist die Elementarzelle ein Quader.

4.) **tetragonale Elastizität** erzeugt durch $\mathbf{Q}_{e_3}^{\pi/2}$ und $\mathbf{Q}_{e_1}^{\pi}$ mit 6 unabhängigen Konstanten

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 2C_{2323} & 0 \\ & & & & & 2C_{1212} \end{bmatrix}$$

Hier besteht die Elementarzelle aus einem Quader mit zwei gleichlangen Seiten.

5.) **kubische Elastizität** erzeugt durch $\mathbf{Q}_{e_1}^{\pi/2}$, $\mathbf{Q}_{e_2}^{\pi/2}$ mit 3 unabhängigen Konstanten

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 2C_{2323} & 0 \\ & & & & & 2C_{2323} \end{bmatrix}$$

Hier besteht die Elementarzelle aus einem Würfel.

6.) **trigonale Elastizität** erzeugt durch $\mathbf{Q}_{e_3}^{2\pi/3}$, $\mathbf{Q}_{e_1}^{\pi}$ mit 6 unabhängigen Konstanten

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & -\sqrt{2}C_{1123} & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 2C_{2323} & 2C_{1123} \\ & & & & & C_{1111} - C_{1122} \end{bmatrix}$$

7.) **transversal-isotrope Elastizität** erzeugt durch $\mathbf{Q}_{e_3}^{\varphi}$, φ beliebig, mit 5 unabhängigen Konstanten

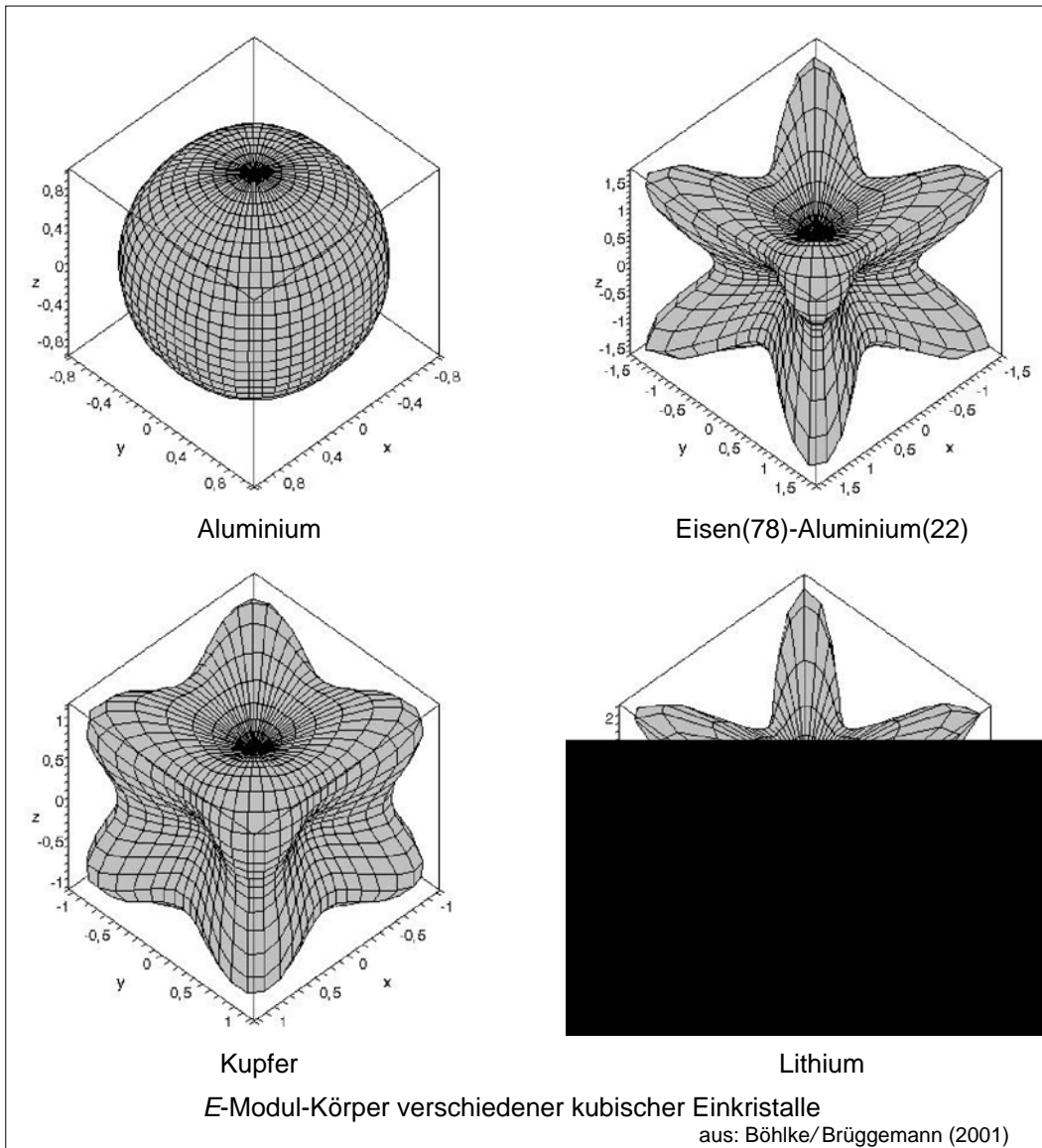
$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 2C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{1111} - C_{1122} \end{bmatrix}$$

Die obigen Darstellungen der Steifigkeitsmatrix gelten aber nur bezogen auf spezielle Basen. Im allgemeinen Falle sind sie voll besetzt, und es ist oft nicht leicht, die zugehörige Symmetriegruppe zu bestimmen, insbesondere dann, wenn die Daten unscharf sind, also beispielsweise mit Messfehlern behaftet.

8.) **isotrope Elastizität** erzeugt durch \mathbf{Q}_V^φ mit \mathbf{v} und φ beliebig mit 2 unabhängigen Konstanten

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1111}-C_{1122} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & C_{1111}-C_{1122} & 0 \\ & & & & & C_{1111}-C_{1122} \end{bmatrix}$$

Die folgenden Grafiken veranschaulichen die Anisotropie verschiedener kubischer Kristalle. In ihnen wird die (richtungsabhängige) Steifigkeit des einachsigen Zugversuchs in verschiedenen Richtungen aufgetragen. Je mehr der entstehende Körper von der Kugel abweicht, desto größer ist die Anisotropie der axialen Steifigkeit (n. BÖHLKE/BRÜGGEMANN 2001).



Wir werden im Weiteren vor allem die Isotropie und als einfachste anisotrope Klasse die kubische betrachten.

Die folgenden Tabellen wurde entnommen aus:

W. F. Hosford: *The Mechanics of Crystals and Textured Polycrystals*. Oxford Science Pub. (1993). Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur hiervon abweichende Kennwerte existieren, z.B. für Kupfer.

Elastische Konstanten verschiedener kubischer Kristalle

Kristall	c_{11} (GPa)	c_{12} (GPa)	$c_{44}/2$ (GPa)	s_{11} (TPa ⁻¹)	s_{12} (TPa ⁻¹)	$s_{44}/2$ (TPa ⁻¹)
Cr	339,8	58,6	99,0	3,10	-0,46	10,10
Fe	231,4	134,7	116,4	7,56	-2,78	8,59
K	3,70	3,14	1,88	1223,9	56,19	53,19
Li	13,50	11,44	8,78	332,8	-152,7	113,9
Mo	441,6	172,7	121,9	2,90	-0,816	8,21
Na	6,15	4,96	5,92	581,0	-259,4	168,9
Nb	240,2	125,6	28,2	6,50	-2,23	35,44
Ta	260,2	154,5	82,6	6,89	-2,57	12,11
W	522,4	204,4	160,8	2,45	-0,69	6,22
Ag	122,2	90,7	45,4	22,26	-9,48	22,03
Al	107,3	60,9	28,3	15,82	-5,73	35,34
Au	192,9	163,8	41,5	23,55	-10,81	24,10
Cu	166,1	199,0	75,6	15,25	-6,39	13,23
Ni	248,1	154,9	124,2	7,75	-2,98	8,05
Pb	49,5	42,3	14,9	94,57	-43,56	67,11
Pd	227,1	176,0	71,7	13,63	-5,95	13,94
Pt	346,7	250,7	76,5	7,34	-3,08	13,07
C	949,0	151,0	521,0	1,10	-1,51	1,92
Ge	128,4	48,2	66,7	9,80	-2,68	15,00
Si	166,2	64,4	79,7	7,67	-2,14	12,54
MgO	287,6	87,4	151,4	4,05	-0,94	6,60
MnO	223,0	120,0	79,0	7,19	-2,52	12,66
LiF	114,0	47,7	63,6	11,65	-3,43	15,71
KCl	39,5	4,9	6,3	26,00	-2,85	158,6
NaCl	49,0	12,6	12,7	22,80	-4,66	78,62
NaBr	40,4	10,1	10,2	27,54	-5,53	98,52
NaI	30,1	9,12	7,33	38,72	-9,011	136,4
NaF	97,0	23,8	28,2	11,41	-2,29	35,43
ZnS	103,2	64,8	46,2	18,77	-7,24	21,65
InP	102,2	57,6	46,0	16,48	-5,94	21,74
GaAs	118,8	53,7	59,4	11,72	-3,65	16,82

Elastische Nachgiebigkeiten verschiedener hexagonaler Kristalle in TPa^{-1}

Material	s_{11}	s_{12}	$s_{44}/2$	s_{33}	s_{13}
Cadmium	12,9	- 1,5	64,0	36,9	- 9,3
Hafnium	4,25	0,398	17,95	6,13	- 1,56
Magnesium	22,15	- 7,7	60,3	19,75	- 4,93
Titan	4,41	0,507	21,41	6,97	- 1,89
Zink	8,40	1,1	26,4	28,7	- 7,75
Zirkonium	5,32	0,719	31,25	7,96	- 2,39

4.1.2 Isotrope Elastizität

Bei isotropen Materialien enthält die Symmetriegruppe alle orthogonalen Transformationen, also beliebige Drehungen und Spiegelungen. Wir zerlegen nun den Spannungs- und den Verzerrungstensor gemäß (2.1.102) in ihren Kugeltensoranteil und ihren Deviatoranteil

$$(3.2.12) \quad \mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}' \quad \text{mit } -p := \frac{1}{3} sp \mathbf{T} \quad \text{hydrostatischer Druck}$$

$$(4.1.10) \quad \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{E}' \quad \text{mit } \varepsilon := \frac{1}{3} sp \mathbf{E} \quad \text{Volumendilatation}$$

$$\text{und} \quad sp \mathbf{T}' = 0 \quad \text{und} \quad sp \mathbf{E}' = 0$$

(Deviatoren sind spurfrei). Für symmetrische Tensoren sind beide Zerlegungsanteile wieder symmetrisch.

Satz: Eine invertierbare Steifigkeits-Tetrade \mathbf{C} und zugehörige Nachgiebigkeits-Tetrade \mathbf{S} sind genau dann isotrop, wenn es zwei Konstanten k und G gibt, so dass für alle Spannungen und Deformationen gelten

$$(4.1.11) \quad \mathbf{C} \cdot [\varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{E}'] = \varepsilon 3k \mathbf{I} + 2G \mathbf{E}'$$

$$(4.1.12) \quad \mathbf{S} \cdot [-p \mathbf{I} + \mathbf{T}'] = -p/(3k) \mathbf{I} + 1/(2G) \mathbf{T}'$$

Die beiden Tetraden sind auf den symmetrischen Tensoren invertierbar, wenn k und G verschieden von Null sind.

Beweis: Zunächst gilt wegen der Linearität

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot [\varepsilon \mathbf{I} + \mathbf{E}'] = \varepsilon \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}'.$$

Wir wollen annehmen, dass \mathbf{C} einen Kugeltensor $\alpha \mathbf{I}$ in einen Kugeltensor $\beta \mathbf{I}$ und einen Deviator \mathbf{T}' abbildet

$$\mathbf{C} \cdot (\alpha \mathbf{I}) = \beta \mathbf{I} + \mathbf{T}'.$$

Es muss die Isotropie-Bedingung gelten

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot [\mathbf{Q} \cdot (\alpha \mathbf{I}) \cdot \mathbf{Q}^T] &= \mathbf{Q} \cdot (\beta \mathbf{I} + \mathbf{T}') \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{C} \cdot (\alpha \mathbf{I}) = \beta \mathbf{I} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q}^T. \end{aligned}$$

Die Differenz zu obiger Gleichung ist

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Wir stellen nun \mathbf{T} spektral dar

$$\mathbf{T} = \sigma_1^H \mathbf{e}_1^H \otimes \mathbf{e}_1^H + \sigma_2^H \mathbf{e}_2^H \otimes \mathbf{e}_2^H + \sigma_3^H \mathbf{e}_3^H \otimes \mathbf{e}_3^H.$$

Sind alle drei Hauptspannungen σ_i^H gleich, so ist der Tensor ein Kugeltensor (ohne Deviatoranteil). Damit ein von Null verschiedener Deviatoranteil existiert, müssen zwei Eigenwerte verschieden sein. Sei beispielsweise $\sigma_1^H \neq \sigma_2^H$. Dann ist

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^{\pi/2} = \mathbf{e}_2^H \otimes \mathbf{e}_1^H - \mathbf{e}_1^H \otimes \mathbf{e}_2^H + \mathbf{e}_3^H \otimes \mathbf{e}_3^H$$

eine Drehung, die

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_1^H = \mathbf{e}_2^H \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_2^H = -\mathbf{e}_1^H \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_3^H = \mathbf{e}_3^H$$

leistet. Damit gilt

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q}^T \neq \mathbf{T}'.$$

Damit kann obige Gleichung nur dann für alle orthogonalen \mathbf{Q} erfüllt sein, wenn $\mathbf{T}' = \mathbf{0}$ ist. *Das Bild eines Kugeltensors unter einer isotropen Abbildung ist wieder ein Kugeltensor.* Da mit \mathbf{C} auch \mathbf{S} isotrop ist, gilt auch die Umkehrung: *das Urbild eines Kugeltensors unter einer isotropen linearen Abbildung ist wieder ein Kugeltensor.* Damit gilt auch: *das (Ur-)Bild eines Deviators unter einer isotropen linearen Abbildung ist ein Deviator.*

Die Abbildung des Kugelanteils lässt sich wegen

$$\mathbf{C} \cdot (\alpha \mathbf{I}) = \alpha \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} = \beta \mathbf{I}$$

$$\Rightarrow \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} = \beta/\alpha \mathbf{I} =: 3k \mathbf{I}$$

auf eine reelle Konstante k reduzieren. Ist \mathbf{C} invertierbar, so ist notwendig $k \neq 0$.

Wir zeigen nun die Gültigkeit der folgenden Behauptung: *Ist \mathbf{C} isotrop, so bilden alle Deviatoren Eigentensoren von \mathbf{C} , d. h. \mathbf{E}' und $\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}'$ sind parallel.* Dazu benutzen wir die Tatsache von (3.1.28), dass jeder Deviator aus einfachen Scherungen kombiniert werden kann und für eine vektorielle ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ die drei Tensoren $\text{sym}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, $i < j$, zueinander orthogonale Deviatoren sind, die einfache Scherungen beschreiben. Sei also

$$\mathbf{E}' = \text{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)$$

eine solche. Wir nehmen zunächst an, dass

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' = r \mathbf{E}' + s \underline{\mathbf{E}}'$$

mit einem $\underline{\mathbf{E}}'$ orthogonal zu \mathbf{E}' ergibt, also beispielsweise

$$\underline{\mathbf{E}}' = \text{sym}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Dann leistet das orthogonale

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_{\mathbf{e}_3}^{\pi} = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

für dieses \mathbf{E}'

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}' \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}'$$

und

$$\mathbf{Q} \cdot \underline{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{Q}^T = -\underline{\mathbf{E}}'.$$

Dann gilt infolge der Isotropie-Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}' \cdot \mathbf{Q}^T] &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' = r \mathbf{E}' + s \underline{\mathbf{E}}' \\ &= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}') \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (r \mathbf{E}' + s \underline{\mathbf{E}}') \cdot \mathbf{Q}^T = r \mathbf{E}' - s \underline{\mathbf{E}}', \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn $s = 0$ ist. Analog gilt dies dann für alle zu \mathbf{E}' orthogonalen Deviatoren. Da aber jeder Deviator aus einfachen Scherungen superponiert werden kann, ist gezeigt, dass jeder Deviator Eigentensor von \mathbf{C} ist

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' = r \mathbf{E}'.$$

Wir zeigen nun noch, dass der zugehörige Eigenwert r bei isotropen Steifigkeitstensoren für alle Deviatoren derselbe ist. Es reicht, wenn wir dies für ein beliebiges \mathbf{E}' und ein dazu nicht paralleles $\underline{\mathbf{E}}'$ zeigen. Seien also \mathbf{E}' und $\underline{\mathbf{E}}'$ wie vorher und

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' = r \mathbf{E}'$$

und

$$\mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{E}}' = \underline{r} \underline{\mathbf{E}}'.$$

Dann leistet die Drehung um die Raumdiagonale um $2\pi/3$

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$$

schließlich

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}' \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \text{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{Q}^T = \text{sym}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3) = \underline{\mathbf{E}}'.$$

Es gilt in Folge der Isotropie-Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}' \cdot \mathbf{Q}^T) &= \mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{E}}' = \underline{r} \underline{\mathbf{E}}' \\ &= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}') \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (r \mathbf{E}') \cdot \mathbf{Q}^T = r \underline{\mathbf{E}}', \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn $r = \underline{r}$ ist. Damit gilt auch für jede Linearkombination von Deviatoren, dass die Eigenwerte gleich sind. Wir setzen $G := r/2$. Die Abbildung auf den Deviatoren ist invertierbar, wenn $G \neq 0$ ist, was den Beweis vervollständigt; *q.e.d.*

Eine isotrope lineare Funktion bildet also Kugeltensoren in Kugeltensoren und Deviatoren in Deviatoren ab. Kugeltensoren und Deviatoren sind die Eigentensoren von \mathbf{C} und \mathbf{S} .

Da die Kugeltensoranteile die Eigenrichtungen von Tensoren nicht beeinflussen, gilt:

Satz: Bei isotropen elastischen Materialien fallen die Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtungen zusammen.

Wenden wir die Darstellungen des vorigen Satzes auf verschiedene Spezialfälle an.

1.) reine (Volumen-) Dilatation

Hier ist

$$\mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{I}$$

ein Kugeltensor, was einen Druckspannungszustand erzeugt

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot (\varepsilon \mathbf{I}) = 3 k \varepsilon \mathbf{I} = -p \mathbf{I},$$

und mit (3.1.27)

$$(4.1.13) \quad -p = 3 k \varepsilon = k sp \mathbf{E} \approx k \frac{dV - dV_0}{dV_0}$$

mit dem **Kompressionsmodul** (engl. *bulk modulus*) $k \neq 0$ der Dimension [Spannung]. Wenn wir unter Druck eine Kompression erwarten, so ist k positiv.

2.) einfache Scherung

Hier ist

$$\mathbf{E} \equiv \frac{1}{2} \gamma_{xy} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) = \mathbf{E}',$$

so dass

$$sp \mathbf{E} = 0.$$

Dann ist mit (4.1.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{C} \cdot [\frac{1}{2} \gamma_{xy} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x)] \\ &= G \gamma_{xy} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \\ &= \tau_{xy} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) \end{aligned}$$

oder

$$(4.1.14) \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 2 G \varepsilon_{xy}.$$

G heißt **Schubmodul** (engl. *shear modulus*) und besitzt die Dimension [Spannung].

3.) einachsiger Zug

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\equiv \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ &= \frac{1}{3} \sigma_{11} \mathbf{I} + \frac{2}{3} \sigma_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \frac{1}{3} \sigma_{11} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

und damit

$$-p = \sigma_{11}/3$$

und

$$\mathbf{T}' = \frac{1}{3} \sigma_{11} (2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Daraus folgen die Dehnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \sigma_{11} \frac{1}{9k} \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \frac{1}{3} \sigma_{11} (2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &= \sigma_{11} \left(\frac{1}{9k} + \frac{1}{3G} \right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \sigma_{11} \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9k} \right) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &= \sigma_{11} \frac{3k+G}{9kG} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - \sigma_{11} \frac{3k-2G}{18kG} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \\ &= \varepsilon_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \varepsilon_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \varepsilon_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Das Verhältnis von Spannung zu Längsdehnung $\sigma_{11} / \varepsilon_{11}$ ist der **E-Modul** (engl. *YOUNG'S modulus*)

⁵³ Thomas Young (1773-1829)

$$(4.1.15) \quad E := \frac{9kG}{3k+G} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{EG}{9G-3E},$$

während das Verhältnis von Querkontraktion zur Längsdehnung die **Querkontraktionszahl** (1.1.7) (engl. *POISSON's ratio*) ist

$$(4.1.16) \quad \nu := \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{3k-2G}{6k+2G}$$

$$\Leftrightarrow \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)},$$

die im isotropen Falle in allen Querrichtungen gleich groß ist.

Das isotrope linear-elastische Gesetz ist allgemein darstellbar als

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= 3k \varepsilon \mathbf{I} + 2G \mathbf{E}' \\ &= (3k - 2G) \varepsilon \mathbf{I} + 2G \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$(4.1.17) \quad \mathbf{T} = \lambda \operatorname{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} \right]$$

mit $\mu := G$ und $\lambda := k - \frac{2}{3}G$. λ und μ heißen LAMÉ⁵⁴sche Konstanten.

Der Kugelanteil dieses Gesetzes enthält

$$-3p = \operatorname{sp}(\mathbf{T}) = (3\lambda + 2\mu) \operatorname{sp}(\mathbf{E}) = 3k \operatorname{sp}(\mathbf{E})$$

und der Deviatoranteil ist

$$\mathbf{T}' = 2\mu \mathbf{E}' = 2G \mathbf{E}'.$$

In Komponenten lautet dies

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{11} \\ \sigma_{22} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} &= \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu \varepsilon_{33} \\ \sigma_{12} &= 2\mu \varepsilon_{12} = \mu \gamma_{12} \\ \sigma_{13} &= 2\mu \varepsilon_{13} = \mu \gamma_{13} \\ \sigma_{23} &= 2\mu \varepsilon_{23} = \mu \gamma_{23}. \end{aligned}$$

Die inverse Form ergibt sich zu

$$(4.1.18) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \operatorname{sp}(\mathbf{T}) \mathbf{I} \right] = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \mathbf{T} - \nu \operatorname{sp}(\mathbf{T}) \mathbf{I} \right]$$

Daraus folgen die Darstellungen der elastischen Tetraden

$$(4.1.19) \quad \mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I}$$

$$(4.1.20) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right],$$

⁵⁴ Gabriel Lamé (1795-1870)

wobei man statt der Identität 4. Stufe auch den Symmetrisierer \mathbf{I}^S nach (2.1.143) nehmen kann. Die Eigenwerte von \mathbf{C} , die manchmal als KELVIN-Moduln bezeichnet werden, sind $3k = 2\mu + 3\lambda$ (einfach) und $2\mu = 2G$ (fünffach). Die Eigenwerte von \mathbf{S} sind deren Kehrwerte.

Für die Komponenten von \mathbf{C} und \mathbf{S} ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} C_{1111} &= \lambda + 2\mu & S_{1111} &= \frac{1}{E} \\ C_{1122} &= \lambda & S_{1122} &= -\frac{\nu}{E} \\ C_{1212} &= \mu = G & S_{1212} &= \frac{1}{4\mu} \end{aligned}$$

Daraus folgt als VOIGT'sche Darstellung für die Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & 2\mu & 0 \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix}$$

und für die Nachgiebigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & (2G)^{-1} & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & & (2G)^{-1} & 0 \\ & & & & & (2G)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Wichtig ist, dass die isotrope lineare Elastizität durch genau 2 Materialkonstanten determiniert wird, wobei es jedem selbst überlassen bleibt, welche er dafür wählt.

In den folgenden Tabellen sind die Umrechnungsformeln der wichtigsten von ihnen angegeben (nach GURTIN, 1972, S. 79) und einige Beispiele (nach LAI/RUBIN/KREMPL, 1993). Es sei darauf hingewiesen, dass in der Literatur hiervon abweichende Kennwerte existieren, z.B. für Stahl.

Die Querkontraktionszahl ν ist als Längenverhältnis dimensionslos. Alle anderen in der Tabelle vorkommenden Elastizitätskonstanten sind Steifigkeiten und besitzen damit die Dimension [Spannung = Kraft / Fläche].

	λ	$G = \mu$	E	ν	k
λ, G			$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\frac{3\lambda + 2G}{3}$
λ, E		$\frac{(E - 3\lambda)/4 + \sqrt{(E - 3\lambda)^2 + 8\lambda E}}{4}$		$\frac{-(E + \lambda)/(4\lambda) + \sqrt{(E + \lambda)^2 + 8\lambda^2}}{4\lambda}$	$\frac{(E + 3\lambda)/6 + \sqrt{(E + 3\lambda)^2 - 4\lambda E}}{6}$
λ, ν		$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$
λ, k		$\frac{3(k - \lambda)}{2}$	$\frac{9k(k - \lambda)}{3k - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3k - \lambda}$	
G, E	$\frac{(2G - E)G}{E - 3G}$			$\frac{E - 2G}{2G}$	$\frac{GE}{3(3G - E)}$
G, ν	$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$		$2G(1 + \nu)$		$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$
G, k	$\frac{3k - 2G}{3}$		$\frac{9kG}{3k + G}$	$\frac{1}{2} \frac{3k - 2G}{3k + G}$	
E, ν	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$			$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
E, k	$\frac{3k(3k - E)}{9k - E}$	$\frac{3kE}{9k - E}$		$\frac{1}{2} \frac{3k - E}{3k}$	
ν, k	$\frac{3k\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3k(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3k(1 - 2\nu)$		

Elastische Konstanten einiger isotroper Materialien

Material	Zusammensetzung	E [GPa]	ν [-]	G [GPa]	λ [GPa]	k [GPa]
Aluminium	rein und legiert	68,2 – 78,5	0,32 – 0,34	25,5 – 26,53	46,2 – 62,7	63,4 – 80,6
Messing	60 – 70 % Cu 40 – 30 % Zn	99,9 – 109,6	0,33 – 0,36	36,6 – 41,3	73,0 – 103,4	97,1 – 130,9
Kupfer		117 – 124	0,33 – 0,36	40,0 – 46,2	85,4 – 130,9	112,3 – 148,1
Gusseisen	2,7 – 3,6 % C	90 – 145	0,21 – 0,30	35,8 – 56,5	26,9 – 83,4	51,0 – 121,3
Stahl	Kohlenstoff und niedrig legiert	106,1 – 114,4	0,34	41,3	84,1 – 90,9	111,6 – 118,5
rostfreier Stahl	18 % Cr, 8 % Ni	193 – 207	0,30	73,0	111,6 – 119,2	160,5 – 168,1
Titan	rein und legiert	106,1 – 114,4	0,34	41,3	84,1 – 90,9	111,6 – 118,5
Glas	verschieden	49,6 – 79,2	0,21 – 0,27	26,2 – 32,4	15,2 – 36,5	32,4 – 57,9
Methyl Methacrylate		2,41 – 3,45	-	-	-	-
Polyäthylen		0,14 – 0,38	-	-	-	-
Gummi		0,00076 – 0,00413	0,50	0,00028 – 0,00138	∞	∞

4.1.3 Darstellung linearer Gesetze mit der Projektionsmethode

Literatur

Halmos, P.: *Finite-Dimensional Vector Spaces*. D. van Nostrand Comp., New York (1958) § 41 ff.

Bertram, A.; Olschewski, J.: *Zur Formulierung linearer anelastischer Stoffgleichungen mit Hilfe einer Projektionsmethode*. Z. ang. Math. Mech. **73**, 4-5, T401-3 (1993)

Sutcliffe, S.: *Spectral decomposition of the elasticity tensor*. J. Appl. Mech. **59**, 762-773 (1992)

Wir wollen einige isotrope Ansätze verallgemeinern und versuchen, sie zur Beschreibung anisotroper Gesetze zu benutzen.

Es wurde gezeigt, dass das Bild eines Kugeltensors unter \mathbf{C} und \mathbf{S} wieder ein Kugeltensor ist, wie auch dasjenige eines Deviators wieder deviatorisch ist. Die Tetrade

$$(4.1.21) \quad \mathbf{P}_1 := \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

ordnet jedem Tensor seinen Kugelanteil zu

$$\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{P}_1 \cdot \left[\frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + \mathbf{E}' \right] = \frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I},$$

so wie die Tetrade

$$(4.1.22) \quad \mathbf{P}_2 := \mathbf{I} - \mathbf{P}_1$$

jedem Tensor seinen Deviatoranteil zuordnet

$$\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{E} = \mathbf{P}_2 \cdot \left[\frac{1}{3} \text{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + \mathbf{E}' \right] = \mathbf{E}'.$$

Die beiden Tetraden haben folgende Eigenschaften:

$$(P1) \quad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \quad i = 1, 2 \quad (\text{projektiv})$$

$$(P2) \quad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \mathbf{0} \quad i \neq j = 1, 2 \quad (\text{orthogonal})$$

$$(P3) \quad \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I} \quad (\text{vollständig})$$

\mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 bilden also ein **vollständiges orthogonales Projektorensystem**. Mit seiner Hilfe können wir jede isotrope Steifigkeitstetrade darstellen als

$$(4.1.23) \quad \mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2$$

mit den Eigenwerten

$$\alpha_1 = 3k = 2\mu + 3\lambda \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 2\mu = 2G,$$

und die Nachgiebigkeitstetrade als

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{P}_2.$$

Die Inversion einer Tetrade in dieser Darstellung lässt sich auf diejenige reeller Zahlen zurückführen.

Darstellungssatz: Jede isotrope lineare Abbildung zwischen symmetrischen Tensoren \mathbf{E} und \mathbf{T} lässt sich darstellen als

$$(4.1.24) \quad \mathbf{T} = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}$$

mit zwei skalaren Konstanten α_1 und α_2 .

Man sieht, dass jeder Kugeltensor Eigentensor zum Eigenwert α_1 und jeder Deviator Eigentensor zum Eigenwert α_2 ist. Der Eigenraum zu α_1 ist eindimensional, der zu α_2 5-dimensional. Die obige Darstellung ist also eine Eigenprojektordarstellung. Wichtig ist, dass die beiden Eigenräume für alle isotropen Tetraden identisch sind, also nicht von Materialkonstanten abhängen. Diese Tatsache ist für die Frage von Bedeutung, ob man eine ähnliche Darstellung auch für die Anisotropie-Klassen finden kann.

Es folgt zwar aus der linearen Algebra, dass jede symmetrische VOIGTsche Matrix auf Spektralform

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{P}_i$$

mit orthogonalen Eigenraumprojektoren \mathbf{P}_i und $N \leq 6$ verschiedenen reellen Eigenwerten α_i gebracht werden kann, nur hängen i. A. auch die Projektoren von den Materialkonstanten ab. Es ist aufwendig zu zeigen, dass nur noch im Falle **kubischer Anisotropie** grundsätzlich eine solche Darstellung mit $N \equiv 3$ existiert, bei der die Projektoren zwar von den Anisotropie-Achsen des Materials, nicht aber von den (drei) Materialkonstanten abhängen. Hier sind die Projektoren folgendermaßen erklärt: Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ ONB, die mit den kubischen Kristallachsen zusammenfällt, und

$$\mathbf{P}_1 := \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad \text{wie vorher}$$

$$\mathbf{P}_2 := \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i - \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{P}_3 := \mathbf{I} - \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1.$$

Diese bilden ebenfalls ein vollständiges orthogonales Projektorensystem.

Stellen wir einen symmetrischen Tensor 2. Stufe \mathbf{E} dar bezüglich dieser ONB $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j,$$

so erhalten wir folgende Komponentendarstellungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{E} &\cong \frac{1}{3} sp \mathbf{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{E} &\cong \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} sp \mathbf{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{E} &\cong \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } sp \mathbf{E} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} .
\end{aligned}$$

Auch im kubischen Fall sind die Eigenräume bezüglich der Kristallstruktur für alle Materialien gleich. Wir erhalten also

$$(4.1.25) \quad \mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \alpha_2 \mathbf{P}_2 + \alpha_3 \mathbf{P}_3$$

und als Inverse

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\alpha_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\alpha_2} \mathbf{P}_2 + \frac{1}{\alpha_3} \mathbf{P}_3$$

mit drei Materialkonstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Man erhält daraus wieder den isotropen Spezialfall für $\alpha_2 \equiv \alpha_3$.

Diese Darstellungen werden insbesondere in der linearen Viskoelastizität äußerst praktisch. (s. Kap. 4.3).

4.1.4 Identifikation der elastischen Konstanten

Als Materialidentifikation bezeichnet man die Bestimmung der Materialfunktionen und Materialkonstanten aus Experimenten. Während die allgemeinen Formen der anisotropen linearen elastischen Gesetze seit rund einem Jahrhundert schon exakt bekannt sind, müssen die Anisotropie-Achsen (Kristallachsen) sowie die 2 (isotrop) bis 21 (triklin) elastischen Konstanten für jedes Material aufs Neue identifiziert werden. Im isotropen Fall ist dies relativ einfach. Anisotropie-Achsen gibt es nicht, und die zwei Konstanten kann man durch 2 unabhängige Messungen bestimmen. Beispielsweise misst man im einachsigen Zugversuch die Längs- und eine Querdehnung. Bei anisotropen Stoffen stößt man relativ schnell an die Grenzen der experimentellen Möglichkeiten. Schon die Bestimmung der Kristallachsen kann apparativ aufwendig sein (z. B. von-LAUE-Aufnahmen mit RÖNTGEN-Strahlen). Und die gezielte Bestimmung der Konstanten durch statische Dehnversuche kann praktisch nahezu unmöglich werden.

Eine elegante Methode zur elastischen Materialidentifikation ist die **FÖRSTER⁵⁵sche Resonanzmethode** (1937). Dazu wird ein Stäbchen mit definierter Geometrie (meistens Kreiszyylinder) zu Schwingungen angeregt und die niedrigsten Resonanzfrequenzen (= Eigenfrequenzen) gemessen. Im isotropen Falle sind hierfür unter entsprechenden Annahmen (BERNOULLI'sche Hypothese der Balkenbiegung, de St.-VENANT'sche Torsionsannahmen, usw.) die Lösungen bekannt. So berechnet man die i -ten Eigenfrequenzen ($i = 1, 2, \dots$) des longitudinal schwingenden schlanken Stabes mit Länge L und Dichte ρ als

$$(4.1.26) \quad f_i = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\frac{i}{2L} \right),$$

die der transversalen Schwingung in guter Näherung

$$(4.1.27) \quad f_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left(\frac{2i-1}{L} \right)^2 \frac{\pi}{8}$$

und die der torsionalen Schwingung eines Vollkreiszyinders zu

$$(4.1.28) \quad f_i = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \left(\frac{i}{2L} \right),$$

woraus man sich leicht E und G ermittelt.

Im anisotropen Fall sind i. A. weder die Schwingungsformen bekannt noch die Eigenfrequenzen analytisch berechenbar. Man ist aber mittels Näherungsverfahren wie der Finite-Elemente-Methode in der Lage, auch hier die Schwingungsformen und Eigenfrequenzen genau genug zu berechnen, wenn man das elastische Gesetz kennen würde.

Es handelt sich also um ein *inverses Problem*:

⁵⁵ Friedrich Förster (1908-1999)

Bestimme die Anisotropie-Achsen und elastischen Konstanten so, dass die damit berechneten Eigenfrequenzen den gemessenen entsprechen. Praktisch minimiert man das Fehlerquadrat der Differenzen zwischen gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen $\omega_R(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, die von den gesuchten Materialparametern α_i abhängen, durch deren systematische Variation. Die führt numerisch auf ein nicht-lineares Optimierungsproblem, für dessen Lösung es zahlreiche Strategien gibt, wie z. B. Gradientenverfahren, Simplex-Methoden oder Evolutionsstrategien.

Die folgende Zeichnung mit den Eigenformen eines zylindrischen einkristallinen Stabes wurde entnommen aus:

J. OLSCHESKI: *Die Ermittlung der elastischen Konstanten kubisch einkristalliner Stoffe als Beispiel einer Systemidentifikation.* Aus: *Mechanik - Beiträge zu Theorie und Anwendungen*, Hrg. A. Bertram, M. Nasser, R. Sievert, TU Berlin, S. 162 (1988)

Literatur

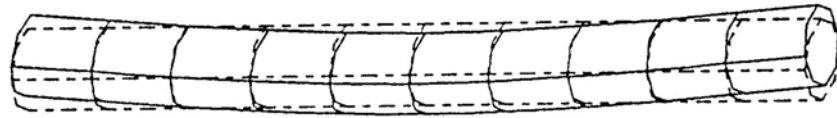
Förster, F.: *Ein neues Messverfahren zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung.* Z. für Metallkunde, 29, 109-115 (1937)

Han, J.: *Identifikation der elastischen Kennwerte anisotroper Hochtemperaturlegierungen mittels Resonanzmessungen und Finite-Elemente-Simulation.* VDI Vlg. Reihe 5, Nr. 404, Düsseldorf (1995)

Bertram, A.; Han, J.; Olschewski, J.; Sockel, H.-G.: *Identification of elastic constants of single crystals by resonance measurements and FE-analysis.* Int. J. Comp. Appl. Techn. 7, 3/4, 285-292 (1994)

Da auch andere Identifikationsmethoden auf nicht-lineare Optimierungsprobleme führen, sei auch hierfür eine Literatur-Stelle empfohlen:

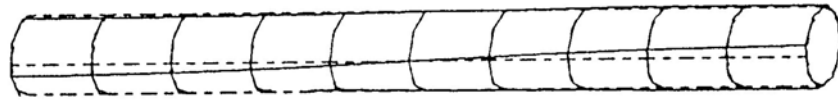
Schwefel, H.-P.: *Numerische Optimierung von Computer-Modellen mittels der Evolutionsstrategie.* Birkhäuser Vlg. Basel, Stuttgart (1977)



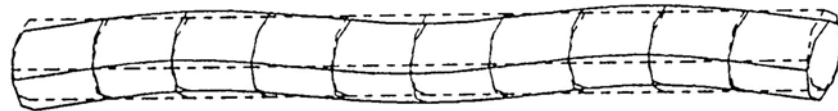
Erste transversale Eigenform



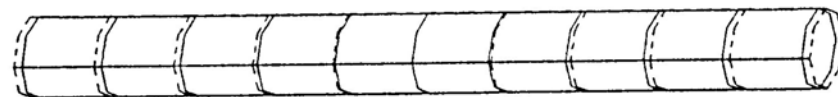
Zweite transversale Eigenform



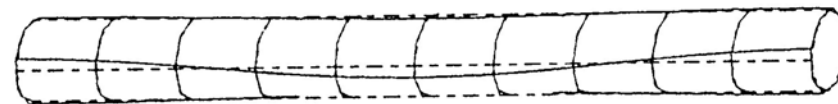
Erste torsionale Eigenform



Dritte transversale Eigenform



Erste longitudinale Eigenform



Zweite torsionale Eigenform

4.1.5 Elastische Energie

Wir hatten bereits in der einachsigen Theorie in Kap. 1.2 die Begriffe Spannungsleistung, elastische Energie usw. kennengelernt. Im Weiteren werden wir uns mit den Eigenschaften von deren dreidimensionalen Formen befassen.

In der Leistungsbilanz taucht die Spannungsleistung (3.2.16)

$$L_i = \int_{\mathcal{V}} l_i dV$$

mit der volumenspezifischen Leistungsdichte

$$l_i := \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$$

auf. In der Theorie kleiner Verformungen können wir

$$\mathbf{D} = \text{sym}(\text{grad } \mathbf{v}) = \text{def } \mathbf{v} = \text{def } \mathbf{u}^\bullet \approx (\text{Def } \mathbf{u}^\bullet) = (\text{Def } \mathbf{u})^\bullet = \mathbf{E}^\bullet$$

setzen. Damit erhalten wir nach Einsetzen des HOOKEschen Gesetzes (4.1.1)

$$(4.1.29) \quad l_i = \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet = \mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E},$$

was nur dann der Zeitableitung von einer Funktion

$$(4.1.30) \quad w(\mathbf{E}) := \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + w_0$$

mit einer Konstanten w_0 entspricht, wenn \mathbf{C} symmetrisch ist und deshalb

$$\mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet$$

ist für alle \mathbf{E} und \mathbf{E}^\bullet . Dann gilt nämlich

$$(4.1.31) \quad \begin{aligned} w(\mathbf{E})^\bullet &= \frac{dw}{d\mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}^\bullet = \frac{1}{2} \mathbf{E}^\bullet \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet \\ &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet = l_i. \end{aligned}$$

Gilt dies für alle Zuwächse \mathbf{E}^\bullet , so folgt die Potenzialbeziehung

$$(4.1.32) \quad \mathbf{T} = \frac{dw(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}.$$

Ist $\mathbf{E}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, ein Dehnungsprozess und $\mathbf{T}(t)$ der begleitende Spannungsprozess, so ist die volumenspezifische **Spannungsarbeit** von t_0 nach t_1 nach (1.1.14) definiert als das Wegintegral

$$a \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} l_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{E}^\bullet(t) dt.$$

Mit dem HOOKEschen Gesetz können wir für linear-elastische Materialien hieraus die Spannungen oder die Dehnraten eliminieren

$$a \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}] \cdot \mathbf{E}'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T} \cdot [\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}'] dt$$

und im Falle einer symmetrischen Steifigkeit integrieren zu

$$(4.1.33) \quad a \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} w(\mathbf{E})' dt = w(\mathbf{E}(t_1)) - w(\mathbf{E}(t_0)) .$$

Definition (GREEN 1839): Als (potenzielle) **elastische Energie** bezeichnen wir eine skalare Funktion des Deformationstensors $w(\mathbf{E})$, wenn entlang eines beliebigen Deformationsprozesses für die dabei geleistete Spannungsarbeit

$$a \Big|_{t_0}^{t_1} = w(\mathbf{E}(t_1)) - w(\mathbf{E}(t_0))$$

gilt.

Da in derartigen Ausdrücken nur Differenzen auftreten, ist die absolute Größe der elastischen Energie unbestimmt. Man **normiert** sie deshalb beispielsweise durch

$$w(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_0 = 0 .$$

Existenzsatz für die elastische Energie

Die folgenden Aussagen sind für jedes linear elastische Material äquivalent:

- 1.) die Spannungsarbeit auf jedem Dehnungskreisprozess ($\mathbf{E}(t_1) = \mathbf{E}(t_0)$) ist Null;
- 2.) die Spannungsarbeit auf jedem Dehnungsprozess hängt nur von dessen Anfangs- und Endwert ab;
- 3.) die Steifigkeitstetrade ist symmetrisch: $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$
- 4.) die Nachgiebigkeitstetrade ist symmetrisch: $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$
- 5.) es existiert eine elastische Energie

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$$

als Potenzial für die Spannungen $\mathbf{T} = \frac{dw(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}$.

Beweis:

"(3) \Rightarrow (5)": Man lernt in der Potenzialtheorie, dass ein Feld \mathbf{T} genau dann ein Potenzialfeld ist, wenn überall seine Rotation verschwindet. Die Rotation entspricht aber gerade dem anti-symmetrischen Anteil des Gradienten

$$\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} = \frac{d^2w(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}^2}.$$

"(5) \Rightarrow (3)": Die zweifache Differentiation einer Funktion $w(\mathbf{E})$ führt immer auf eine symmetrische Tetrade \mathbf{C} .

"(3) \Leftrightarrow (4)": \mathbf{C} ist genau dann symmetrisch, wenn seine Inverse \mathbf{S} symmetrisch ist (die Invertierbarkeit vorausgesetzt).

"(2) \Rightarrow (5)": Besitzt ein Material eine elastische Energie, so kann man sich diese auch dadurch konstruieren, dass man für jedes symmetrische \mathbf{E}_I die Arbeit von

$$w(\mathbf{E}_I) := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt$$

für proportionale Prozesse $\mathbf{E}(t) := t \mathbf{E}$, $t \in [0, I]$, berechnet, die voraussetzungsgemäß nur vom Endwert von $\mathbf{E}(I) \equiv \mathbf{E}_I$ abhängt. Man sieht, dass die Darstellung für $w(\mathbf{E})$ aus (5) genau auf ein linear-elastisches Gesetz führt.

"(5) \Rightarrow (2)": Gilt für \mathbf{T} die Potenzialbeziehung mit $w(\mathbf{E})$ aus (5), so ist die Leistung integrierbar und hängt nur vom Endwert vom \mathbf{E} -Prozess ab.

"(2) \Rightarrow (5)": Sind der Anfangs- und Endwert des Dehnungsprozesses gleich (Dehnungskreisprozess), so folgt speziell aus (2)

$$a \Big|_{t_0}^{t_1} = w(\mathbf{E}(t_1)) - w(\mathbf{E}(t_0)) = w(\mathbf{E}) - w(\mathbf{E}) = 0.$$

"(1) \Rightarrow (2)": Gilt 1 und sind \mathbf{E}_I und \mathbf{E}_0 beliebige Deformationen, so gibt es sicherlich einen Dehnungskreisprozess $\mathbf{E}(t)$, der von $\mathbf{E}(t_0) = \mathbf{E}_0$ über $\mathbf{E}(t_1) = \mathbf{E}_I$ nach $\mathbf{E}(t_2) = \mathbf{E}_0$ führt mit $t_0 < t_1 < t_2$. Die dabei geleistete Arbeit ist

$$\begin{aligned} a \Big|_{t_0}^{t_2} = 0 &= \int_{t_0}^{t_2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt - \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt = \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^\bullet dt$$

für alle Prozesse mit gleichem Anfangs- und gleichem Endwert, also (2); *q.e.d.*

Mit Hilfe der Nachgiebigkeitstetrade können wir auch im Spannungsraum ein Potenzial für die Dehnungen einführen als

$$w(\mathbf{E}) = w(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} =: w^*(\mathbf{T}),$$

so dass

$$\mathbf{E} = \frac{dw^*(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}.$$

$w^*(\mathbf{T})$ ist die **elastische Ergänzungsenergie**.

Die Potenzialeigenschaft der Spannungen oder äquivalent der Dehnungen stellt eine zusätzliche Eigenschaft elastischer Materialien (*CAUCHY-elastischer*) dar. Solche Materialien werden **hyperelastisch** (manchmal auch *perfekt elastisch* oder *GREEN-elastisch*) genannt. Man hat also die Implikation

$$\text{hyperelastisch} \Rightarrow \text{elastisch},$$

aber nicht umgekehrt. In vielen Fällen wird in der Literatur allerdings Hyperelastizität gemeint, wenn (nur) von Elastizität geschrieben wird. Elastische, aber nicht hyperelastische Materialgesetze zeigen unphysikalische Eigenschaften und werden deshalb wenig genutzt.

Die elastische Energie lässt sich im *isotropen Fall* durch die LAMÉschen Konstanten ausdrücken als

$$(4.1.34) \quad w(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I})^2 + \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2} sp^2(\mathbf{E}) + \mu sp(\mathbf{E}^2),$$

so dass

$$\frac{dw(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}} = \lambda (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \mathbf{T}$$

ist. Dies entspricht gemäß der Zerlegung (2.1.102)

$$(4.1.35) \quad \begin{aligned} w(\mathbf{E}) &= \frac{\lambda}{2} sp^2(\mathbf{E}) + \mu sp\left[\frac{1}{9} sp^2(\mathbf{E}) \mathbf{I} + \mathbf{E}'^2\right] \\ &= \left(\frac{\mu}{3} + \frac{\lambda}{2}\right) sp^2(\mathbf{E}) + \mu sp(\mathbf{E}'^2) \\ &= w_K(sp \mathbf{E}) + w_G(\mathbf{E}'), \end{aligned}$$

was einer Zerlegung in **Kompressionsenergie** und **Gestaltänderungsenergie** entspricht. Im isotropen Fall gibt es also immer eine elastische Energie. Es gilt also: *Isotrope linear-elastische Materialien sind auch hyperelastisch.*

Neben der Symmetrie ist eine weitere Eigenschaft von elastischen Tetraden physikalisch bedeutungsvoll. Eine (nicht notwendigerweise symmetrische) Tetrade \mathbf{C} mit der Eigenschaft

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} > 0 \quad \forall \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$$

heißt **positiv-definit**. In diese Definitionen geht nur der symmetrische Anteil der Tetrade ein. Ist \mathbf{C} symmetrisch, so ist die positive Definitheit äquivalent zur Bedingung, dass alle ihre Eigenwerte positiv sind.

Man hat die Vorstellung, dass man bei einem elastischen Material (positive) Arbeit aufwenden muss, wenn man es aus dem spannungs- und verzerrungsfreien Zustand heraus deformiert. Der folgende Satz liefert hierfür ein Kriterium.

Satz: Für ein linear elastisches Material ist die Arbeit entlang eines beliebigen Deformationsprozesses, der bei $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ beginnt, aber kein Kreisprozess ist, genau dann positiv, wenn die Steifigkeitstetrade symmetrisch und positiv-definit ist.

Den Beweis findet man beispielsweise bei GURTIN (1972) S. 84.

Im isotropen Fall ist die Steifigkeitstetrade genau dann positiv-definit, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen an die Materialkonstanten erfüllt sind:

- $G > 0$ \wedge $k > 0$
- $\mu > 0$ \wedge $3\lambda + 2\mu > 0$
- $E > 0$ \wedge $-1 < \nu < 1/2$
- $G > 0$ \wedge $-1 < \nu < 1/2$.

Dies kann man schnell über die Positivität der beiden Eigenwerte von \mathbf{C} zeigen. Man beachte, dass $\nu > 0$ nicht verlangt wird. Materialien mit negativer Querkontraktionszahl existieren und werden **auxetisch**⁵⁶ genannt.

4.1.6 Randwertprobleme der Elastostatik

Literatur

Gurtin, M. E.: *The Linear Theory of Elasticity*. In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer (1972)

Hetnarski, R. B.; Ignaczak, J.: *The Mathematical Theory of Elasticity*. CRC Press (2004, 2011)

Fichera, G.: *Existence Theorems in Elasticity*. In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer (1972)

Knops, R. J.; Payne, L. E.: *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer, Berlin (1971)

Im Weiteren schränken wir uns ein auf

- **statische** und quasi-statische Probleme, also solche, für die der Trägheitsterm $\rho \mathbf{a}$ im Vergleich mit den anderen Termen der lokalen Impulsbilanz vernachlässigt werden kann;
- isotrope oder anisotrope linear elastische Körper, für die das HOOKEsche Gesetz gilt;
- diese seien auch immer **hyperelastisch**, so dass es eine Formänderungsenergie gibt;

⁵⁶ von griechisch ἀξητός (dehnbar)

- außerdem soll der Körper **homogen** sein, d. h. die elastischen Konstanten sind an allen Stellen gleich, und
- beziehen uns auf eine **spannungsfreie Bezugsplatzierung** ($\mathbf{u} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{T} \equiv \mathbf{0}$).

Damit gelten im Inneren des Körpers folgende Gleichungen:

- Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen (3.1.23)

$$(VVB) \quad \mathbf{E} \approx \text{def } \mathbf{u} := \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u})$$

und daraus folgend die

- Kompatibilitäts-Bedingungen (3.1.34)

$$(INK) \quad \text{ink } \mathbf{E} := \nabla \times \mathbf{E} \times \nabla = \mathbf{0}$$

- sowie die Gleichgewichts-Bedingungen (3.2.7)

$$(CI) \quad \text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- und das HOOKEsche Gesetz (4.1.1)

$$(HOOKE) \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E}$$

oder im isotropen Falle (4.1.17)

$$\mathbf{T} = \lambda \text{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}.$$

Dabei soll grundsätzlich das Massenkraftfeld \mathbf{b} als bekannt vorausgesetzt werden, wenn es nicht sogar vernachlässigbar ist.

Das Drallgesetz wird durch die Symmetrie des Spannungstensors im HOOKEschen Gesetz identisch erfüllt und deshalb im Weiteren nicht mehr aufgeführt.

Zwei alternative Methoden zur weiteren Behandlung elastostatischer Probleme bieten sich an.

1.) Elimination der Spannungen

Wir setzen *HOOKE* in *CI* ein und *VVB* in *HOOKE* und erhalten die Verschiebungsgleichung

$$(4.1.36) \quad \text{div}(\mathbf{C} \cdot \cdot \text{def } \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Im isotropen Falle wird hieraus

$$\text{div} [\lambda \text{sp}(\text{def } \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \text{def } \mathbf{u}] + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Mit

$$\text{sp}(\mathbf{E}) = \text{sp}(\text{def } \mathbf{u}) = \text{sp}(\text{grad } \mathbf{u}) = \text{div } \mathbf{u}$$

und der Produktregel für jedes Skalarfeld φ und jedes Tensorfeld \mathbf{T}

$$(2.2.41) \quad \text{div}(\varphi \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{T}$$

folgt

$$\operatorname{div}[sp(\operatorname{def} \mathbf{u}) \mathbf{I}] = \mathbf{I} \cdot \operatorname{grad} sp(\operatorname{def} \mathbf{u}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} .$$

Wegen (2.2.47) ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$$

und wegen (2.2.48)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}^T \mathbf{u} = (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \nabla = \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{def} \mathbf{u} &= \frac{1}{2} (\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{div} \operatorname{grad}^T \mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} . \end{aligned}$$

Es folgt daraus die **NAVIER⁵⁷sche Verschiebungsgleichung** (1821) (*NV*)

$$\begin{aligned} (4.1.37) \quad (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{o} \\ &= (\lambda + \mu) (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \\ &= (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b} = \mathbf{o} .$$

Sind die Massenkkräfte vernachlässigbar ($\mathbf{b} \equiv \mathbf{o}$) oder $\rho \mathbf{b}$ räumlich konstant, so ist die Divergenz von *NV* mit der Identität (2.2.51)

$$(\lambda + \mu) \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 .$$

Daraus folgt, dass die Spur des Verzerrungstensors eine harmonische Funktion ist

$$(4.1.38) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta sp \mathbf{E} = 0 .$$

Wenden wir stattdessen den LAPLACE-Operator auf *NV* an, so erhalten wir mit der Identität (2.2.49) aus *NV*

$$\begin{aligned} &(\lambda + \mu) \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} \\ (4.1.39) \quad &= (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} . \end{aligned}$$

Mit dem vorigen Ergebnis zusammen führt dies auf die Bipotenzialgleichung

$$\Delta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{o} ,$$

⁵⁷ Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836)

weshalb bei konstanten Massenkräften die Verschiebungen biharmonische Funktionen sind.

Diese Feldgleichungen heißen *Verschiebungsgleichungen* und werden durch geeignete Ansätze für die Verschiebungen gelöst.

2.) Elimination der Verschiebungen

Hierzu nimmt man die inverse Form des HOOKEschen Gesetzes und setzt diese in *INK* (3.1.34) ein

$$\mathit{ink} \mathbf{E} = \mathit{ink}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{0} .$$

Im isotropen Falle wird hieraus

$$\mathit{ink} \mathbf{E} = \frac{I}{E} \{ (I + \nu) \mathit{ink} \mathbf{T} - \nu \mathit{ink}[sp(\mathbf{T}) \mathbf{I}] \} = \mathbf{0} .$$

Bei fehlenden ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) oder räumlich konstanten Massenkräften kann dies identisch umgeformt werden zu

$$(4.1.40) \quad \mathit{div} \mathit{grad} \mathbf{T} + \frac{I}{I + \nu} \mathit{grad} \mathit{grad} sp \mathbf{T} = \mathbf{0} ,$$

der **BELTRAMischen Gleichung** (1892). Bei konstanten Massenkräften erhalten wir unter zweimaliger Anwendung des LAPLACE-Operators, dass die Spannungen biharmonische Funktionen sind

$$\Delta \Delta \mathbf{T} = \mathbf{0} ,$$

während die Spur des Spannungstensors harmonisch ist

$$\Delta sp \mathbf{T} = 0 .$$

Benutzt man Ansätze für die Spannungsfelder, so muss man also sicherstellen, dass die sich hieraus ergebenden Spannungen obige Bedingungen erfüllen.

Um diese Feldgleichungen eindeutig lösen zu können, benötigen wir **Randbedingungen**. Dabei werden grundsätzlich zwei Arten unterschieden:

- 1.) **geometrische** oder **Verschiebungs-Randbedingungen** oder **DIRICHLET⁵⁸sche Randbedingungen**: es sind einzelne Komponenten des Verschiebungsvektors oder der gesamte Vektor \mathbf{u} für die Randpunkte vorgeschrieben;
- 2.) **dynamische** oder **Spannungs-Randbedingungen** oder **NEUMANN⁵⁹sche Randbedingungen**: es sind einzelne Komponenten des Spannungsvektors oder der gesamte Vektor $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ für die Randpunkte vorgeschrieben.

Es können auch beide Arten von Randbedingungen für dieselben Randpunkte vorgeschrieben werden, wobei aber in jedem Randpunkt drei linear-unabhängige Komponenten der Spannungen oder Verschiebungen gegeben sein müssen. In diesem Fall spricht man von **gemischten Randbedingungen**.

⁵⁸ Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

⁵⁹ Carl Gottfried Neumann (1832-1925)

Sind auf dem gesamten Rand des Körpers nur geometrische Bedingungen vorgeschrieben, so handelt es sich um ein **Verschiebungs-Randwertproblem**. Sind nur dynamische Bedingungen vorgeschrieben, handelt es sich um ein **Spannungs-Randwertproblem**. In den übrigen Fällen handelt es sich um ein **gemischtes Randwertproblem**. Da dies der praktisch wichtigste Fall ist, soll er folgendermaßen eingeführt sein:

Vorgeschrieben sind:

- die spezifische Massenkraft \mathbf{b} im Innern des Körpers \mathcal{V}
- die Oberflächenkraftdichte \mathbf{t}_v auf einem Teil \mathcal{A}_d der Oberfläche
- die Verschiebungen \mathbf{u}_v auf dem anderen Teil \mathcal{A}_g der Oberfläche.

Beide Oberflächenbereiche seien fast überall disjunkt und bilden die gesamte Oberfläche

$$\mathcal{A}_d \cup \mathcal{A}_g = \mathcal{A}.$$

Wir wollen im Weiteren einige wichtige Eigenschaften dieser Randwertprobleme betrachten.

Da alle Feldgleichungen der klassischen Elastizitätstheorie linear sind, gilt das

Superpositionsprinzip

Seien $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{E}_i, \mathbf{T}_i\}$ für $i = 1, 2$ Lösungen der zwei gemischten Randwertprobleme für gegebene Massenkraft \mathbf{b}_i , Oberflächenkräfte \mathbf{t}_i auf einem Teil \mathcal{A}_d der Oberfläche, Verschiebungen \mathbf{u}_i auf dem anderen Teil \mathcal{A}_g der Oberfläche.

Dann erfüllen für alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}$ auch $\{\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2, \alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2, \alpha_1 \mathbf{T}_1 + \alpha_2 \mathbf{T}_2\}$ dieselben Gleichungen für die Massenkraft $\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2$, Oberflächenkräfte $\alpha_1 \mathbf{t}_1 + \alpha_2 \mathbf{t}_2$ auf \mathcal{A}_d und Verschiebungen $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$ auf \mathcal{A}_g .

Der folgende Satz gilt für alle linearen hyperelastischen Stoffe.

Vertauschungssatz von BETTI⁶⁰ (1872)

Seien $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{E}_i, \mathbf{T}_i\}$ für $i = 1, 2$ Lösungen des Randwertproblems für gegebene Massenkraft \mathbf{b}_i und Oberflächenkräfte \mathbf{t}_i . Dann gilt für alle hyperelastischen Materialien

$$(4.1.41) \quad \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{u}_2 dm = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{u}_1 dm$$

Beweis: Für lineare hyperelastische Stoffe ist die Steifigkeitstetrade symmetrisch. Damit gilt für zwei beliebige Zustände

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{E}_2 &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{E}_2 = (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1 \\ &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{E}_1 = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{E}_1. \end{aligned}$$

Aus dem $PdvV$ (3.2.18) für beide Zustände folgt dann der Vertauschungssatz; *q.e.d.*

Satz von CLAPEYRON⁶¹ (LAMÉ 1852)

Für einen Körper aus homogenem linearen hyperelastischen Material gilt in einem durch Oberflächenspannungen \mathbf{t} und Massenkraft \mathbf{b} belasteten Zustand und dem daraus resultierenden Verschiebungsfeld \mathbf{u}

$$(4.1.42) \quad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} dm + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} dA = \int_{\mathcal{V}} w(\mathbf{E}) dV$$

⁶⁰ Enrico Betti (1823-1892)

⁶¹ Benoit Paul Emile Clapeyron (1799-1864)

Beweis: Aus dem $PdvV$ (3.2.18) folgt für $\delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_{\mathcal{V}} 2 w \, dV$$

q.e.d.

Zur Interpretation dieses Satzes kann man sich Folgendes überlegen. Da das Superpositionsprinzip gilt, folgern wir für einen linear elastischen Körper:

- wenn Lasten (\mathbf{t}, \mathbf{b}) ein Verschiebungsfeld \mathbf{u} bewirken,
- dann bewirken die Lasten $(\alpha \mathbf{t}, \alpha \mathbf{b})$ ein Verschiebungsfeld $\alpha \mathbf{u}$ für jeden reellen Faktor α .

Wir lassen jetzt $\alpha(t)$ eine beliebige differenzierbare Zeitfunktion auf einem Einheitszeitintervall sein, die bei $\alpha(0) = 0$ beginnt und bei $\alpha(1) = 1$ endet. Dann ist die Leistung der Kräfte nach (3.2.15) während des Belastungsprozesses $(\alpha \mathbf{t}, \alpha \mathbf{b})$

$$\begin{aligned} L_\alpha(t) &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{u}^\bullet \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{u}^\bullet \, dA \\ &= \int_{\mathcal{V}} \alpha(t) \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, \alpha^\bullet(t) \, dm + \int_{\mathcal{A}} \alpha(t) \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, \alpha^\bullet(t) \, dA \\ &= \left[\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \alpha(t) \alpha^\bullet(t). \end{aligned}$$

Das Zeitintegral hierüber ist die Arbeit bei dem Lastprozess, der im unbelasteten Zustand beginnt und proportional gesteigert wird und dabei Gleichgewichtszustände durchläuft, also quasistatisch abläuft

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^1 L_\alpha(t) \, dt &= \left[\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \int_{t=0}^1 \alpha(t) \alpha^\bullet(t) \, dt \\ &= \left[\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA \right] \int_{t=0}^1 \frac{1}{2} \alpha(t)^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA. \end{aligned}$$

Dies ist die linke Seite der Gleichung des Satzes. Die rechte Seite bildet die bei diesem Prozess gespeicherte elastische Energie. Damit bilanziert der Satz die an einem hyperelastischen System geleisteten inneren und äußeren Arbeiten.

Eindeutigkeitssatz (KIRCHHOFF⁶² 1859)

Für ein linear-elastisches Material mit positiv-definiten Steifigkeitstetraden unterscheiden sich zwei Lösungen \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 des gemischten Randwertproblems nur durch eine infinitesimale Starrkörpermodifikation

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{X}) + \mathbf{u}_0 + \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)$$

mit zwei konstanten Vektoren \mathbf{u}_0 und \mathbf{X}_0 und einem konstanten antisymmetrischen Tensor $\mathbf{\Omega}$. Sind die Verschiebungen für mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, vorgeschrieben, so ist die Lösung sogar eindeutig

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_2(\mathbf{X}).$$

⁶² Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt aus dem Superpositionsprinzip, dass $\delta \mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ das gemischte Randwertproblem für $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{t} \equiv \mathbf{0}$ auf \mathcal{A}_d und $\delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ auf \mathcal{A}_g erfüllt. Nach dem $PdvV$ (3.2.18) gilt für dieses Nullrandwertproblem

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dm + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV = 0$$

mit $\delta \mathbf{E} = \text{def } \delta \mathbf{u}$, weil in den Integralen der linken Seite mindestens ein Faktor im Integrationsgebiet Null ist. Wegen der positiven Definitheit der Steifigkeitstetrad kann der Integrand

$$\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E} = (\mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E}$$

nirgends negativ sein. Das Integral hierüber kann nur dann gleich Null sein, wenn der Integrand überall gleich Null ist

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Damit kann das Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ nur verzerrungsfrei sein, also gem. (3.1.24)

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2.$$

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Enthält \mathcal{A}_g drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, für die die Verschiebungen vorgeschrieben sind, dann muss $\delta \mathbf{u}$ auf diesen Punkten verschwinden, womit $\delta \mathbf{u}$ insgesamt als Nullfeld erkannt wird; *q.e.d.*

Beispiel 13. Elastostatisches Randwertproblem

Man stelle die quasistatische lokale Impulsbilanz ohne Massenkräfte $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ und das HOOKEsche Gesetz (4.1.1) für isotropes Materialverhalten bezüglich zylindrischer Koordinaten dar, wobei Rotationssymmetrie aller Felder vorausgesetzt werden soll. Setzen Sie die Spannungen aus dem HOOKEschen Gesetz in die Impulsbilanz ein. Vereinfachen Sie das Ergebnis weiter, indem Sie eine Rotation oder Torsion des Körpers ausschließen und sich auf von θ und z unabhängige Verzerrungszustände beschränken. Geben Sie eine allgemeine Lösung für die resultierende Dgl. an.

Lösung:

Wir beginnen mit $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$, was in kartesischen Koordinaten als

$$\text{div } \mathbf{T} = (\sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \mathbf{0}$$

geschrieben werden kann. In Zylinderkoordinaten entsprechen $x_1 \equiv r$, $x_2 \equiv \theta$, $x_3 \equiv z$. Weiterhin muss bei jeder Ableitung nach θ der Faktor $1/r$ eingefügt und die Abhängigkeit $\mathbf{e}_{1,2} = \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_{2,2} = -\mathbf{e}_1$ beachtet werden. Die Produktregel liefert

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T} &= \sigma_{ij,k} \delta_{jk} \mathbf{e}_i + \sigma_{ij} \delta_{jk} \mathbf{e}_{i,k} + \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{j,k} \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i + \sigma_{ij} \mathbf{e}_{i,j} + \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{j,k} \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

Da die Ableitungen der Basisvektoren nur für $\mathbf{e}_{1,2}$ und $\mathbf{e}_{2,2}$ einen Faktor ungleich Null liefern, ergibt sich

$$\text{div } \mathbf{T} = \sigma_{ij,j} \mathbf{e}_i + \sigma_{12} \mathbf{e}_{1,2} + \sigma_{22} \mathbf{e}_{2,2} + \sigma_{i1} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_2 + \sigma_{i2} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_2.$$

Der letzte Summand ist wegen $\mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_2 = -1/r \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, so dass sich beim Ausführen der Summationen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= (\sigma_{rr,r} + 1/r \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z}) \mathbf{e}_r \\ &+ (\sigma_{\theta r,r} + 1/r \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z}) \mathbf{e}_\theta \\ &+ (\sigma_{zr,r} + 1/r \sigma_{z\theta,\theta} + \sigma_{zz,z}) \mathbf{e}_z \\ &+ 1/r \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta - 1/r \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_r + 1/r (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta r} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zr} \mathbf{e}_z) \\ &= [\sigma_{rr,r} + 1/r \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rz,z} + 1/r (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})] \mathbf{e}_r \\ &+ (\sigma_{\theta r,r} + 1/r \sigma_{\theta\theta,\theta} + \sigma_{\theta z,z} + 2/r \sigma_{\theta r}) \mathbf{e}_\theta \\ &+ (\sigma_{zr,r} + 1/r \sigma_{z\theta,\theta} + \sigma_{zz,z} + 1/r \sigma_{zr}) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

ergibt. Diese Ausdrücke lassen sich durch die verlangte Rotationssymmetrie stark vereinfachen. Erstens verschwinden alle Ableitungen von σ_{ij} nach θ . Zweitens sind alle θ -Ebenen (θ festhalten, r und z beliebig) Symmetrieebenen bezüglich der Deformation, und daher frei von Scherdeformationen. Bei isotropen Materialien müssen dann auch die zugehörige Schubspannung verschwinden, also ist $\sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0$. Es bleiben lediglich

$$(B13.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{T} = [\sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + 1/r (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})] \mathbf{e}_r + (\sigma_{zr,r} + \sigma_{zz,z} + 1/r \sigma_{zr}) \mathbf{e}_z$$

übrig.

Ausgehend vom Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ ergeben sich die Verzerrungen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{sym}(u_i \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{e}_j) = \operatorname{sym}(u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + u_i \mathbf{e}_{i,j} \otimes \mathbf{e}_j) \\ &= \operatorname{sym}(u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + u_1 \mathbf{e}_{1,2} \otimes \mathbf{e}_2 + u_2 \mathbf{e}_{2,2} \otimes \mathbf{e}_2) \\ &= \operatorname{sym}(u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + u_1/r \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - u_2/r \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Durch die Annahme der Rotationssymmetrie verschwinden wieder alle Ableitungen nach θ . Weiterhin können wir $u_\theta = 0$ annehmen, wenn wir Torsion und Rotation des Körpers ausschließen. Es ergibt sich

$$\mathbf{E} = u_{r,r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u_{z,z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + u_r/r \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + 1/2 (u_{z,r} + u_{r,z}) (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r).$$

Dies können wir nun mit dem HOOKEschen Gesetz in die Spannungen umrechnen, wobei sich die Darstellung mit den LAMÉschen Konstanten (4.1.17) anbietet. Mit

$$sp \mathbf{E} = u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r$$

erhält man

$$(B13.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r) + 2\mu u_{r,r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r) + 2\mu u_r/r \\ \sigma_{zz} &= \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r) + 2\mu u_{z,z} \\ \sigma_{rz} &= \mu (u_{z,r} + u_{r,z}). \end{aligned}$$

Setzen wir (B13.2) in (B13.1) ein, so erhalten wir zwei gekoppelte partielle Dgl. für die zwei Funktionen u_r und u_z . Für die \mathbf{e}_r -Komponente ergibt sich

$$0 = \lambda (u_{r,rr} + u_{z,zr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2) + \mu (u_{z,rz} + u_{r,zz}) + 2\mu (u_{r,rr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2)$$

und für die \mathbf{e}_z -Komponente

$$0 = \mu (u_{z,rr} + u_{r,zr}) + \lambda (u_{r,rz} + u_{z,zz} + u_{r,z}/r) + 2\mu u_{z,zz} + \mu (u_{z,r}/r + u_{r,z}/r).$$

Viele ingenieurmässig interessante Probleme weisen keine Abhängigkeit der Geometrie, Randbedingungen, Spannungen und Dehnungen in \mathbf{e}_z -Richtung auf. Dann gelten wegen $\mathbf{E}_{,z} = \mathbf{0}$

$$\varepsilon_{rr,z} = u_{r,rz} = 0$$

$$\varepsilon_{\theta\theta,z} = u_{r,z}/r = 0$$

$$\varepsilon_{zz,z} = u_{z,zz} = 0.$$

Außerdem ist dann die \mathbf{e}_z -Ebene eine Spiegelsymmetrieebene für \mathbf{E} , woraus wieder das Verschwinden der letzten verbliebenen Schubspannungskomponente

$$\sigma_{rz} = 0 = \mu (u_{z,r} + u_{r,z})$$

folgt. Insgesamt ergibt sich damit $u_{r,z} = u_{z,r} = u_{r,rz} = u_{z,zz} = 0$. Dies liefert

$$(B13.3) \quad u_z = c + dz.$$

mit zwei Konstanten c und d . Wir wollen Starrkörperverschiebungen entlang \mathbf{e}_z ausschließen, und gehen davon aus, dass der KOOS-Ursprung in der in \mathbf{e}_z -Richtung fixiert ist. Dann folgt unmittelbar $c = 0$. Die verbliebene lineare Abhängigkeit mit dem Proportionalitätsfaktor d entspricht einer konstanten Längsdehnung in \mathbf{e}_z -Richtung. Von der Gleichgewichtsbedingung $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0}$ bleibt lediglich die Dgl.

$$0 = \sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r$$

für die unbekannte Funktion $u_r(r)$, welche sich zu

$$(B13.4) \quad 0 = (\lambda + 2\mu) (u_{r,rr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2)$$

ergibt. Das Ergebnis ist deswegen bemerkenswert, weil die Elastizitätskonstanten offenbar aus der finalen Dgl. eliminiert werden können. Das heißt aber nicht, dass sie keine Rolle spielen, denn bei Spannungsrandbedingungen gehen sie über diese in die Lösung ein. Die Lösung der Dgl. lässt sich relativ einfach durch einen polynomialen Ansatz ermitteln

$$u_r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i r^i \quad u_{r,r} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i a_i r^{i-1} \quad u_{r,rr} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i(i-1) a_i r^{i-2}.$$

Setzt man dies in die obige Dgl. ein, so stellt man fest, dass die Terme mit $i=1$ und $i=-1$ herausfallen. Dementsprechend können $a_1 = a$ und $a_{-1} = b$ beliebige Werte annehmen, während alle anderen $a_i = 0$ sein müssen. Da wir zwei Parameter für eine gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung identifiziert haben, sollte die Lösung

$$(B13.5) \quad u_r = ar + b/r$$

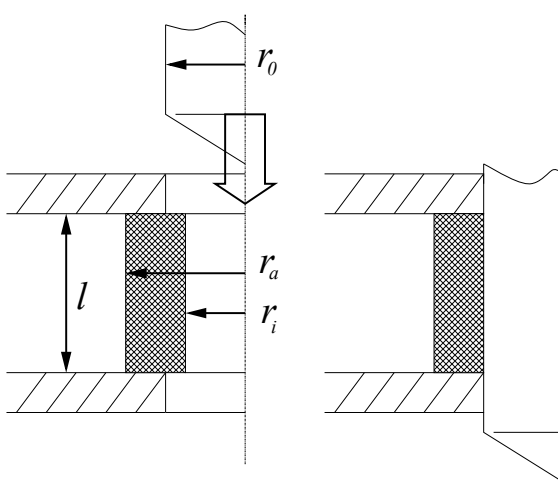
vollständig sein.

Die Sonderfälle ebener Spannungen oder ebener Verzerrungen in der \mathbf{e}_z -Ebene erhält man durch das Setzen von $\sigma_{zz} = 0$ bzw. $\varepsilon_{zz} = 0 = d$. In jedem Fall wird zur vollständigen Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungsfeldes eine Gleichung benötigt, die ε_{zz} mit σ_{zz} koppelt, oder eine von beiden Größen vorschreibt.

Durch die Annahme, dass keine Gradienten in \mathbf{T} und \mathbf{E} in \mathbf{e}_z -Richtung vorliegen, haben wir keine gekoppelten partiellen Dgl. mehr für $u_r(r, z)$ und $u_z(r, z)$, sondern zwei gewöhnliche Dgl. für jeweils $u_r(r)$ und $u_z(z)$, deren Lösungen wir mit den Gleichungen (B13.3) und (B13.5) bereits angegeben haben.

Beispiel 14. Herausziehen einer Stange

Benutzen Sie das Ergebnis aus Beispiel 13 zur näherungsweisen Bestimmung der Kraft, welche zum Herausziehen einer Stange (unverformter Außenradius r_0) aus einer Manschette (Innenradius r_i , Außenradius r_a , Länge l) benötigt wird. Die Manschette sei aus einem weichen Material (LAMÉsche Konstanten λ und μ), demgegenüber die Stange als starr angenommen werden kann. Der Haftreibungskoeffizient ist als μ_0 gegeben. Die Manschette wird konstruktiv an einer Dehnung in Längsrichtung gehindert.



Die in Beispiel 13 gefundenen Lösung $u_r = a r + b / r$ (B13.4) muss für die Manschette an die Randbedingungen angepasst werden. Diese sind

$$\begin{aligned} u_r(r_i) &= r_0 - r_i \\ \sigma_{rr}(r_a) &= 0, \end{aligned}$$

da der Innenradius auf den Radius r_0 der Stange aufgeweitet wird, während der Außenrand der Manschette spannungsfrei ist. Die erste Randbedingung liefert

$$(B14.1) \quad r_0 - r_i = a r_i + b / r_i.$$

Die zweite Randbedingung wird in (B13.2) eingesetzt, was mit $u_{r,r} = a - b/r^2$ vereinfacht wird

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r / r) + 2\mu u_{r,r} \\ &= 2\lambda a + 2\mu(a - b/r^2) + \lambda u_{z,z}. \end{aligned}$$

Da sich die Manschette nicht axial dehnen kann, ist $u_{z,z} = 0$. Mit $\sigma_{rr}(r_a) = 0$ ergibt sich

$$(B14.2) \quad 0 = 2a\lambda + 2\mu(a - b/r_a^2).$$

Die Gleichungen (B14.1) und (B14.2) bilden ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Koeffizienten a und b , welches folgende Lösung hat

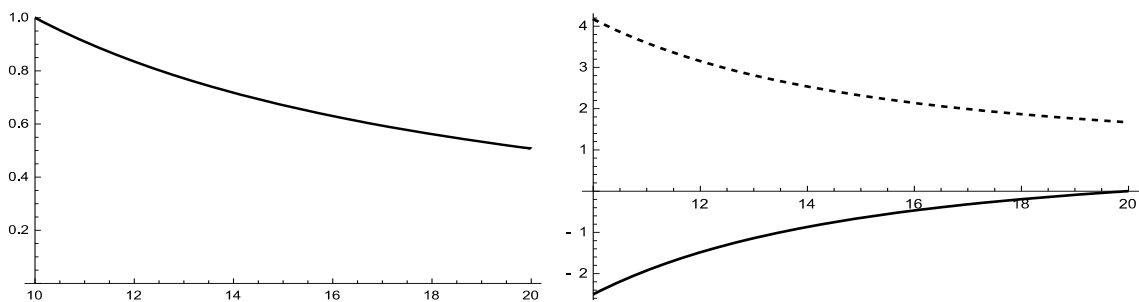
$$a = r_i(r_0 - r_i) / [r_a^2(I + \lambda/\mu) + r_i^2]$$

$$b = r_i(r_0 - r_i) / [I + \mu(r_i/r_a)^2 / (\mu + \lambda)].$$

Damit sind u_r und σ_{rr} bekannt. Für die radialen Spannungen am Innenrand findet man nach Zusammenfassen

$$\sigma_{rr}(r_i) = \frac{2\mu(r_0 - r_i)(r_i^2 - r_a^2)}{r_a^2 r_i + \mu r_i^3 / (\mu + \lambda)}.$$

Zur Veranschaulichung des Ergebnisses setzen wir die Werte $r_i = 10 \text{ mm}$, $r_a = 20 \text{ mm}$, $r_0 = 11 \text{ mm}$, $E = 50 \text{ MPa}$ und $\nu = 0,49$ ein und stellen $\sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta}(r)$ und $u_r(r)$ dar. Dabei entsprechen E und ν näherungsweise den Elastizitätskonstanten von Gummi. Es ergeben sich $\mu = 16,8 \text{ MPa}$ und $\lambda = 822 \text{ MPa}$ (siehe die Umrechnungstabelle in Kapitel 4.1.2).



Aufweitung in mm (links) und Radial- und Tangentialspannung in MPa über dem Manschettenradius in mm.

Die Kraft F_z , die zum Herausziehen der Stange nötig ist, kann mit dem COLOUMB-schen Haftreibungsgesetz abgeschätzt werden: $|F_z| < \mu_0 |F_n|$. Der kritische Wert ist offenbar bei $|F_z| = \mu_0 |F_n|$ erreicht. Dabei ergibt sich F_n aus dem Produkt von radialer Spannung am Innenrand und der Fläche der Innenwand der Manschette

$$F_n = \sigma_{rr}(r_i) A_i = \sigma_{rr}(r_i) 2\pi r_i l.$$

Dies kann jedoch nur ein Schätzwert sein, da beim Herausziehen der Stange der in z homogene Zustand gestört wird, wodurch ein praxisrelevanter Wert für F_z von dem hier angegebenen Ergebnis abweichen wird.

Es sei angemerkt, dass bei diesem Beispiel Spannungsfunktionen nicht weiterhelfen, da Verschiebungsrandbedingungen eingearbeitet werden müssen.

Beispiel 15. Rotierende Scheibe

Erweitern Sie die Lösung aus Beispiel B13 so, dass die Spannungen in einer rotierenden Scheibe berechnet werden können. Wenden Sie die Lösung auf eine frei rotierende CD (Polycarbonat) an ($n = 15.000 \text{ U/min}$, $\rho = 1,2 \text{ g/cm}^3$, $E = 2,2 \text{ GPa}$, $\nu = 0,37$, $r_i = 7,5 \text{ mm}$, $r_a = 60 \text{ mm}$, maximale Zugspannung 55 bis 75 MPa⁶³) und bestimmen sie die Radial- und Tangentialspannungen sowie die Aufweitung über dem Radius.

Lösung:

⁶³ die Materialparameter sind der englischen Wikipedia für *polycarbonate* entnommen

Wollen wir auf die Ergebnisse von Beispiel 13 aufbauen, so ist es notwendig, die durch die Rotation verursachte Fliehkraft als eingeprägte Massenkraftdichte aufzufassen, da wir Rotationen bereits in Beispiel 13 ausgeschlossen haben.

Die durch die Rotation verursachte Zentripetal-Beschleunigung ist radial nach innen gerichtet und steigt quadratisch mit der Drehzahl und linear mit dem Radius an

$$\mathbf{r}^{\bullet\bullet} = -r \omega^2 \mathbf{e}_r.$$

Die lokale Impulsbilanz ist nun

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \rho \mathbf{r}^{\bullet\bullet} = -\rho r \omega^2 \mathbf{e}_r.$$

Wir haben $\operatorname{div} \mathbf{T}$ bereits im Beispiel 13 berechnet. Der Koeffizientenvergleich in \mathbf{e}_r liefert

$$-\rho r \omega^2 = (\lambda + 2\mu) (u_{r,rr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2)$$

analog zu Gleichung B13.3. Normieren der höchsten Ableitung liefert die Dgl.

$$0 = u_{r,rr} + u_{r,r}/r - u_r/r^2 + C r \quad \text{mit} \quad C = \rho \omega^2 / (\lambda + 2\mu),$$

welche analog zu der Vorgehensweise in Beispiel 13 durch einen Polynomansatz gelöst wird

$$u_r = a r + b/r - C r^3/8.$$

Diese Lösung wird wieder rückwärts in die ermittelten Radial- und Tangentialspannungen eingesetzt

$$\begin{aligned} \text{(B15.1)} \quad \sigma_{rr} &= \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r) + 2\mu u_{r,r} \\ &= \lambda (2a - C r^2/2 + u_{z,z}) + 2\mu (a - b/r^2 - 3 C r^2/8) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda (2a - C r^2/2 + u_{z,z}) + 2\mu (a + b/r^2 - C r^2/8). \end{aligned}$$

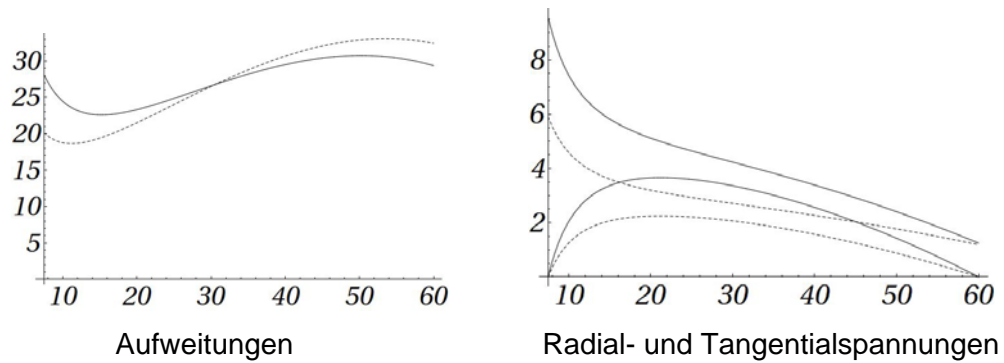
Für die z -Richtung liegen die Annahmen $u_{z,z} = 0$ oder $\sigma_{zz} = 0$ nahe. Dies entspricht jeweils der Annahme eines ebenen Verzerrungs- oder Spannungszustandes. Letztere Gleichung liefert

$$\sigma_{zz} = \lambda (u_{r,r} + u_{z,z} + u_r/r) + 2\mu u_{z,z} = 0,$$

was mit der bekannten Lösung für u_r

$$u_{z,z} = (C \lambda r^2/2 - 2 a \lambda) / (\lambda + 2\mu)$$

liefert. Als Randbedingungen verwenden wir $\sigma_{rr}(r_i) = 0$ und $\sigma_{rr}(r_a) = 0$. Wieder ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Parameter a und b , dessen Lösung von der gewählten Variante (ebener Verzerrungs- oder Spannungszustand) abhängt. Die Konstante C ergibt sich mit den gegebenen Werten zu $0,761 \text{ m}^{-2}$, wobei E und ν wieder mit Hilfe der Tabelle in Kapitel 4.1.2 umgerechnet werden, und $\omega = 2\pi n$ zu berücksichtigen ist. Für den Fall der ebenen Verzerrungen ergeben sich $a = 0,786 \cdot 10^{-3}$ und $b = 0,167 \text{ mm}^2$, für den ebenen Spannungszustand findet man $a = 0,855 \cdot 10^{-3}$ und $b = 0,103 \text{ mm}^2$. Dies kann rückwärts in σ_{rr} und $\sigma_{\theta\theta}$ eingesetzt werden. Nun können wir die Aufweitung in μm (links) und die Radial- und Tangentialspannungen in MPa über dem Radius in mm (rechts) darstellen.



Die Radialspannung verschwindet gemäß den Randbedingungen an den Rändern, während die Spannungen in Umfangsrichtung am Innenrand maximal werden. Die gestrichelten Linien entsprechen der Lösung des ebenen Spannungszustandes, die durchgezogenen der des ebenen Verzerrungszustandes. Die Spannungen sind im Fall des ebenen Spannungszustandes geringer. Dies ist nicht verwunderlich, stellt die Verhinderung der Querdehnung schließlich einen Zwang dar. Die Aufweitung ist relativ konstant über dem Radius. Die normalerweise von CD-Laufwerken erreichten Drehzahlen können Werte bis 11.200 U/min annehmen (56-fach). Legt man eine für Polycarbonat realistische maximale Zug-Spannung von 50 MPa zugrunde, setzt diesen Wert gleich der Tangentialspannung am Innenrand und sucht die dazugehörige Drehzahl, so findet man $n \approx 34.300 \text{ U/min}$ für den Fall ebener Verzerrungen und $n \approx 43.700 \text{ U/min}$ für den Fall ebener Spannungen. Experimentell ermittelte Drehzahlen, bei welchen CDs unter der Zentrifugalkraft zerrissen werden, liegen meist zwischen 23.000 und 25.000 U/min . Die Diskrepanz vom Faktor 2 zur Rechnung mit $\sigma_{zz} = 0$ ist durch nicht betrachtete Mikrorisse, die eher unrealistische Randbedingung $\sigma_{rr}(r_i) = 0$, aber größtenteils wohl durch die Vernachlässigung des Schwingverhaltens bedingt.

4.1.7 Variationsprinzipien der Elastostatik

Literatur

Gurtin, M. E.: *The Linear Theory of Elasticity*. In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer (1972)

Hetnarski, R. B.; Ignaczak, J.: *The Mathematical Theory of Elasticity*. CRC Press (2004, 2011)

Slaughter, W. S.: *The Linearized Theory of Elasticity*. Birkhäuser, Boston (2002)

Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford (1968)

Für die Formulierung von Näherungsverfahren wie das Finite-Elemente-Verfahren oder das Rand-Elemente-Verfahren ist es hilfreich, statt der Gleichgewichtsbedingungen äquivalente variationelle Aussagen auszunutzen.

Dabei machen die Variationsprinzipien Aussagen über Extremaleigenschaften von Funktionalen. Als Funktional bezeichnet man in diesem Zusammenhang skalarwertige

Integralausdrücke, die von Feldern abhängen, die auf dem Körper definiert sind. Ein typisches Beispiel einer variationellen Aussage ist das

Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie

Der Körper bestehe in jedem Punkt aus einem hyperelastischen Material mit positiv-definiten Steifigkeit \mathbf{C} . Sei \mathcal{U} die Menge aller Vektorfelder $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ im Körpergebiet, die die Verschiebungs-Randbedingungen erfüllen.

Auf \mathcal{U} definieren wir das folgende Funktional

$$(4.1.43) \quad \Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R} \mid \Phi(\mathbf{u}) := \int_{\mathcal{V}} w \, dV - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dm - \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{u} \, dA$$

mit $w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$ und $\mathbf{E} = \text{def } \mathbf{u}$

für \mathbf{b} in \mathcal{V} und \mathbf{t}_v auf \mathcal{A}_d vorgeschrieben.

Dann besitzt Φ an der Stelle der Lösung für das Verschiebungsfeld \mathbf{u}_0 des gemischten Randwertproblems ein Minimum:

$$\Phi(\mathbf{u}_0) \leq \Phi(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} .$$

Gilt die Gleichheit, so unterscheiden sich \mathbf{u}_0 und \mathbf{u} nur durch eine Starrkörper-Verschiebung

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \mathbf{c} + \mathbf{\Omega} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad \mathbf{c}, \mathbf{X}_0 \text{ räumlich konstante Vektoren}$$

$$\mathbf{\Omega} \text{ antisymmetrischer Tensor.}$$

Beweis: Sei \mathbf{u}_0 die Lösung, $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ beliebig und $\delta \mathbf{u} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$. Dann erfüllt $\delta \mathbf{u}$ die Null-Verschiebungs-Randbedingungen auf \mathcal{A}_g . Seien

$$\delta \mathbf{E} := \text{def } \delta \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{T} := \mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{E} .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}) \, dV - \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}_0) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \text{def } \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} \cdot \text{def } \mathbf{u} \, dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \text{def } \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \text{def } \mathbf{u}_0 \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\text{def } \mathbf{u} - \text{def } \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{def } \mathbf{u} - \text{def } \mathbf{u}_0) \, dV \\ & \quad + \int_{\mathcal{V}} (\text{def } \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{C} \cdot (\text{def } \mathbf{u} - \text{def } \mathbf{u}_0) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}_0 \cdot \delta \mathbf{E} \, dV \quad \text{mit } \mathbf{T}_0 := \mathbf{C} \cdot \text{def } \mathbf{u}_0 \\ &= \int_{\mathcal{V}} w(\delta \mathbf{E}) \, dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}_0 \cdot \delta \mathbf{E} \, dV . \end{aligned}$$

Aus dem Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI (2.2.67) folgt mit $C2$ und der Kettenregel für Null-Verschiebungsrandbedingungen an $\mathcal{A}_g = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_d$

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}_0 \cdot \delta \mathbf{E} \, dV &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T}_0 \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{V}} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}_0) \cdot \nabla \, dV - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}_0 \cdot \nabla) \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{A}} \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n}) \, dA - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{T}_0) \, dV \\
 &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{T}_0) \, dV \quad \text{mit } \mathbf{t}_0 = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n} \\
 &= \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{T}_0) \, dV.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}_0) &= \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}) \, dV - \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{u} \, dA \\
 &\quad - \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}_0) \, dV + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_0 \, dV + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{u}_0 \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}} w(\delta \mathbf{E}) \, dV + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot \text{div}(\mathbf{T}_0) \, dV \\
 &\quad - \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}} w(\delta \mathbf{E}) \, dV + \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}_v) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \\
 &\quad - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} \cdot (\text{div } \mathbf{T}_0 + \rho \mathbf{b}) \, dV.
 \end{aligned}$$

Da \mathbf{u}_0 voraussetzungsgemäß das gemischte Randwertproblem löst, sind die letzten beiden Integrale Null. Wegen der positiven Definitheit von \mathbf{C} ist $w(\delta \mathbf{E}) \geq 0$ und somit

$$\Phi(\mathbf{u}) \geq \Phi(\mathbf{u}_0).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\text{def } \mathbf{u} = \text{def } \mathbf{u}_0.$$

Damit können sich die beiden Verschiebungsfelder nur um eine (infinitesimale) Starrkörperrotation und -translation unterscheiden; *q.e.d.*

Das Prinzip sagt aus, dass die Differenz zwischen der Formänderungsenergie und der Endwertarbeit der Massenkräfte und der (vorgegebenen) Flächenlasten einen kleineren Wert

für die Lösung des gemischten Randwertproblems als für jeden anderen Verschiebungszustand annimmt. Übrigens folgt der Eindeutigkeitsatz ebenfalls hieraus.

Man zeigt, dass auch die Umkehrung des Prinzips des Minimums der potenziellen Energie gilt: Ist $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}$ und ist $\Phi(\mathbf{u}_0)$ nicht größer als $\Phi(\mathbf{u})$ für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, so ist \mathbf{u}_0 eine Lösung des gemischten Randwertproblems.

Das komplementäre Energieprinzip zum obigen ist das

Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie

Der Körper bestehe in jedem Punkt aus einem hyperelastischen Material mit positiv-definiten Nachgiebigkeitstetrade \mathbf{S} . Sei \mathcal{T} die Menge der symmetrischen Spannungsfelder, die die Gleichgewichtsbedingungen

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

und die Spannungs-Randbedingungen $\mathbf{t}_v = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ auf \mathcal{A}_d erfüllen. Dann nimmt das Funktional

$$(4.1.44) \quad \Psi(\mathbf{T}) := \int_{\mathcal{V}} w^*(\mathbf{T}) dV - \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{t} dA$$

mit der Formänderungsergänzungsenergie $w^*(\mathbf{T})$ für die Lösung \mathbf{T} des gemischten Randwertproblems in \mathcal{T} ein Minimum an.

Die Umkehrung dieses Prinzips ist bisher nur für einfach zusammenhängende und konvexe (bez. \mathcal{A}_g) Körpertopologien gezeigt worden (s. GURTIN, 1972 S. 117).

Während die Minimal-Prinzipien dazu benutzt werden können, untere Grenzen für die (verallgemeinerten) Energien Φ und Ψ zu konstruieren, liefern uns Maximum-Prinzipien obere Grenzen. Hierfür soll ein Beispiel gegeben werden.

Prinzip vom Maximum der potenziellen Energie

Der Körper bestehe in jedem Punkt aus einem hyperelastischen Material mit symmetrischer positiv-definiten Steifigkeit \mathbf{C} . Sei \mathbf{u}_0 Lösung des gemischten Randwertproblems mit \mathbf{b} in \mathcal{V} , \mathbf{t}_v in \mathcal{A}_d und \mathbf{u}_v in \mathcal{A}_g vorgeschrieben. Sei \mathbf{u} ein anderer Verschiebungszustand, der dasselbe Randwertproblem mit Ausnahme der geometrischen Randbedingungen löst. Für letztere gelte die Bedingung

$$(4.1.45) \quad \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}_v - \mathbf{u}) dA \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = [\mathbf{C} \cdot (\operatorname{def} \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n}.$$

Dann gilt für das Funktional (4.1.43)

$$\Phi(\mathbf{u}_0) \geq \Phi(\mathbf{u}).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn sich \mathbf{u} und \mathbf{u}_0 nur durch eine (infinitesimale) Starrkörperbewegung unterscheiden.

Beweis: Sei $\delta \mathbf{u} := \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}$, also anders definiert als oben. Wir hatten bereits im Beweis des Minimalprinzips gezeigt, dass

$$\int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}_0) dV - \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}) dV = \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E} dV$$

ist. Nach dem Prinzip der virtuellen Leistung (*PdvL*) gilt

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E} dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA .$$

Da $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_v$ auf \mathcal{A}_g und $\mathbf{t} \equiv \mathbf{t}_v$ auf \mathcal{A}_d sind, folgt

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{u}_0) - \Phi(\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}_0) dV - \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \mathbf{u}) dV - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) dm - \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) dA \\ &= \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dm + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ & \quad - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dm - \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \delta \mathbf{u} dA \\ &= \int_{\mathcal{V}} w(\text{def } \delta \mathbf{u}) dV + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}_v - \mathbf{u}) dA . \end{aligned}$$

Da beide Terme voraussetzungsgemäß nicht negativ sein können, erhalten wir für $\Phi(\mathbf{u}_0)$ das Maximum; *q.e.d.*

Völlig analog erhält man für Verschiebungszustände \mathbf{u} , die

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_v \quad \text{auf } \mathcal{A}_g \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t}_v - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{u} dA \geq 0$$

erfüllen, ein Maximum des Funktionals Ψ an der Stelle \mathbf{u}_0 der Lösung des gemischten Randwertproblems (*Prinzip vom Maximum der Ergänzungsenergie*).

Bei den bisher aufgeführten Prinzipien wurde von den zulässigen Verschiebungsfeldern bereits die Erfüllung bestimmter Feldgleichungen oder Randbedingungen gefordert. Man ist jedoch aus praktischen Gründen daran interessiert, für die zu variierenden Funktionen möglichst wenig oder keine Einschränkungen vornehmen zu müssen. Für solche Prinzipien ohne Einschränkungen sollen zwei Beispiele gegeben werden.

Prinzip von DE VEUBEKE⁶⁴ (1951) – HU (1955) – WASHIZU (1955)

Der Körper bestehe aus hyperelastischem Material und unterliege gemischten Randbedingungen: \mathbf{b} im Innern, \mathbf{u}_v auf \mathcal{A}_g , \mathbf{t}_v auf \mathcal{A}_d vorgeschrieben. An der Stelle der Gleichgewichtslösung $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{T}_0\}$ besitzt das Funktional

$$(4.1.46) \quad \Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \, dV \\ - \int_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_v \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t} - \mathbf{t}_v) \cdot \mathbf{u} \, dA$$

mit $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ einen stationären Wert unter allen glatten Feldern

\mathbf{u} : Vektorfeld

\mathbf{E} : symmetrisches Tensorfeld

\mathbf{T} : symmetrisches Tensorfeld;

und umgekehrt.

Beweis: Notwendige und hinreichende Bedingung für einen stationären Wert ist das Verschwinden der Ableitung an einer Stelle $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ in Richtung von beliebigen $\{\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{E}, \delta\mathbf{T}\}$ nach (2.2.1)

$$\delta\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{E}, \delta\mathbf{T}) := \frac{d}{d\lambda} \Lambda(\mathbf{u} + \lambda \delta\mathbf{u}, \mathbf{E} + \lambda \delta\mathbf{E}, \mathbf{T} + \lambda \delta\mathbf{T}) \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Wegen der Symmetrie der Steifigkeitstetrade \mathbf{C} folgt für den ersten Term in Λ

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \lambda \delta\mathbf{E}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E} + \lambda \delta\mathbf{E}) \, dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV \\ + \lambda \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV + \lambda^2 \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \delta\mathbf{E} \, dV.$$

Nach dem Differenzieren nach λ an der Stelle $\lambda \equiv 0$ wird hieraus

$$\int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV.$$

Damit ist

$$\delta\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{E}, \delta\mathbf{T}) \\ = \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \delta\mathbf{E} - \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{div} \delta\mathbf{T}] \, dV$$

⁶⁴ Baudouin M. Fraeijs de Veubeke (1917-1976), Hu Haichang (1928-2011), Kyuichiro Washizu (1921-1981)

$$+ \int_{\mathcal{A}_g} \delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_v \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} [\delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{t} - \mathbf{t}_v) \cdot \delta \mathbf{u}] \, dA$$

mit $\delta \mathbf{t} = \delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. Mit der Kettenregel, dem Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI und der Symmetrie von $\delta \mathbf{T}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \delta \mathbf{T}) \cdot \mathbf{u} \, dV &= \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} (\delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \, dV - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{A}} \delta \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{T} \cdot (\operatorname{def} \mathbf{u}) \, dV \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\delta \Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}, \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{T}) \\ &= \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{E} - (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\operatorname{def} \mathbf{u} - \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{T}] \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{A}_g} \delta \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u}_v - \mathbf{u}) \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t} - \mathbf{t}_v) \cdot \delta \mathbf{u} \, dA. \end{aligned}$$

Wenn $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ das gemischte Randwertproblem löst, so ist $\delta \Lambda = 0$ für alle $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{E}$ und $\delta \mathbf{T}$. Ist umgekehrt $\delta \Lambda = 0$, so müssen wegen der Beliebigkeit von $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{E}$ und $\delta \mathbf{T}$ alle Ausdrücke in runden Klammern verschwinden, womit $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ Lösung ist; *q.e.d.*

Während bei dem vorstehenden Variationsprinzip keine Bedingungen an die Felder \mathbf{u} , \mathbf{E} , \mathbf{T} geknüpft waren (außer ihrer Differenzierbarkeit), werden beim nachstehenden die *VVB* vorausgesetzt.

Prinzip von HELLINGER-REISSNER⁶⁵ (1950)

Der Körper bestehe aus hyperelastischem Material und unterliege gemischten Randbedingungen (wie vorher). An der Stelle der Gleichgewichtslösung des Randwertproblems besitzt das Funktional

$$(4.1.47) \quad \Theta(\mathbf{u}, \mathbf{T}) := \int_{\mathcal{V}} (\frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \, dV \\ + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_v) \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \mathbf{u} \, dA$$

mit $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ und $\mathbf{E} = \operatorname{def} \mathbf{u}$ einen stationären Wert unter allen glatten Feldern

\mathbf{u} : Vektorfeld

\mathbf{T} : symmetrisches Tensorfeld ;

und umgekehrt.

⁶⁵ Ernst David Hellinger (1883-1950), Eric Reissner (1913-1996)

Beweis: Man bildet analog zum vorigen Beweis die Richtungsableitung des Funktionals in Richtung $\{\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{T}\}$ beliebig an der Stelle $\{\mathbf{u}, \mathbf{T}\}$ und erhält mit Hilfe des Satzes von GAUSS–OSTROGRADSKI

$$\begin{aligned}
 & \delta\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{T}, \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{T}) \\
 &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{T} - \delta\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{E} + \rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u}) dV \\
 &+ \int_{\mathcal{A}_g} \delta\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_v) dA + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \delta\mathbf{u} dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}} [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{E}) \cdot \delta\mathbf{T} + (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u}] dV \\
 &- \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{A}_g} \delta\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_v) dA + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{A}_d} \mathbf{t}_v \cdot \delta\mathbf{u} dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{E}) \cdot \delta\mathbf{T} dV + \int_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} dV \\
 &+ \int_{\mathcal{A}_g} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_v) \cdot \delta\mathbf{t} dA + \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t}_v - \mathbf{t}) \cdot \delta\mathbf{u} dA .
 \end{aligned}$$

Diese Variation ist genau dann Null, wenn $\{\mathbf{u}, \mathbf{T}\}$ das Problem löst; *q.e.d.*

Prinzip vom	Lösung für	Nebenbedingungen an zulässigen Feldern	Randbedingungen an zulässige Felder
Minimum der potenziellen Energie	Verschiebungen	<i>VVB, HOOKE</i>	Verschiebungs-RB.
Minimum der Ergänzungsenergie	Spannungen	<i>CI</i>	Spannungs-RB.
Maximum der potenziellen Energie	Verschiebungen	<i>VVB, HOOKE, CI</i>	Spannungs-RB. Verschiebungs-RB. in schwacher Form
Maximum der Ergänzungsenergie	Verschiebungen	<i>VVB, HOOKE, CI</i>	Verschiebungs-RB. Spannungs-RB. in schwacher Form
DE VEUBEKE-HU-WASHIZU	Verschiebungen Spannungen Verzerrungen	-	-
HELLINGER-REISSNER	Verschiebungen Spannungen	<i>VVB</i>	-

Die Tabelle gibt einen Überblick über die Variationsprinzipien und ihre Bedingungen (nach GURTIN, 1972).

4.1.8 Verschiebungsfunktionen

Eliminiert man mit dem Stoffgesetz *HOOKE* die Spannungen in den Gleichgewichtsbedingungen *CI* und ersetzt die Verzerrungen durch die Verschiebungen mit *VVB*, so erhält man eine partielle Differentialgleichung in den Verschiebungen, im isotropen Falle speziell die *NAVIER*schen Verschiebungsgleichungen *NV*. Diese gilt auch im Nichtgleichgewicht, wenn man statt der Massenkraft \mathbf{b} die generalisierten Kräfte $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ einsetzt, nur kann dieses Feld dann zeit- und ortsabhängig werden. Die verbleibende Verschiebungsgleichung impliziert also im Feld alle Feldgleichungen und reduziert das Problem auf das Auffinden eines Verschiebungsfeldes, das sie löst und nur noch an die Randbedingungen angepasst werden muss.

Im allgemeinen linear elastischen Fall existieren für ein solches Verschiebungsfeld kaum allgemeine Darstellungen. Wir schränken uns deshalb auf den (wichtigsten) Fall der *Isotropie* ein. Die Verschiebungsgleichung *NV* kann dann auf folgende Form gebracht werden

$$(NV) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\rho}{\mu} \mathbf{b},$$

wobei die Massenkraft \mathbf{b} gegeben sei. Wir gehen im Weiteren davon aus, dass $\mu > 0$ und $\frac{1}{2} > \nu > -1$ sind und die Steifigkeiten damit positiv-definit. Gesucht werden Lösungen $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ von *NV* in \mathcal{V} , die dort zweimal stetig differenzierbar sind. Dafür sollen zwei allgemeine Ansätze vorgestellt werden.

Zunächst einmal wenden wir auf das Feld der Massenkraft \mathbf{b} den folgenden Darstellungssatz an.

Darstellungssatz von HELMHOLTZ⁶⁶

Jedes glatte Vektorfeld \mathbf{b} auf \mathcal{V} lässt sich als Summe eines Potenzial- und eines Rotorfeldes darstellen

$$(4.1.48) \quad \mathbf{b} = \operatorname{grad} \alpha + \operatorname{rot} \mathbf{g}$$

mit α Skalarfeld auf \mathcal{V}

\mathbf{g} divergenzfreies Vektorfeld auf \mathcal{V} .

Beweis: Zu jedem Skalarfeld $\alpha(\mathbf{x})$ hat das NEWTONsche Potenzial

$$\psi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\alpha(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} dV$$

die Eigenschaft, dass $\Delta\psi(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})$. Analoge Potenziale gibt es für Vektor- und Tensorfelder. Also gibt es für ein Vektorfeld \mathbf{b} auch ein Potenzialfeld \mathbf{v} , und mit (2.2.47) gilt dann

$$\mathbf{b} = \Delta\mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Mit $\alpha := \operatorname{div} \mathbf{v}$ und $\mathbf{g} := -\operatorname{rot} \mathbf{v}$ erhalten wir den Darstellungssatz; *q.e.d.*

⁶⁶ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)

Satz: HELMHOLTZsche Verschiebungsfunktion

Sei

$$(4.1.49) \quad \rho \mathbf{b} = \text{grad } \alpha + \text{rot } \mathbf{g}$$

die HELMHOLTZsche Darstellung der Massenkraftdichte, so löst der Ansatz für die Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{w}$$

mit

$$\text{div grad } \varphi = - \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}$$

und

$$\text{div grad } \mathbf{w} = - \frac{\mathbf{g}}{\mu}$$

die NV.

Beweis: Wir setzen den Ansatz ein in NV

$$\begin{aligned} & \text{div grad } \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} \\ &= \text{div grad grad } \varphi + \text{div grad rot } \mathbf{w} \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} (\text{grad div grad } \varphi + \text{grad div rot } \mathbf{w}) \end{aligned}$$

mit (2.2.46), (2.2.47) und (2.2.52)

$$\begin{aligned} &= \text{grad div grad } \varphi - \text{rot rot grad } \varphi + \text{rot div grad } \mathbf{w} \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} (\text{grad div grad } \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit (2.2.43)} \quad &= \left(1 + \frac{1}{1-2\nu}\right) \text{grad} \left(-\frac{\alpha}{\lambda+2\mu}\right) + \text{rot} \left(-\frac{\mathbf{g}}{\mu}\right) \\ &= -\frac{2-2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{\lambda+2\mu} \text{grad } \alpha - \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{g}. \end{aligned}$$

Eine Umrechnung der elastischen Konstanten ergibt $\frac{2-2\nu}{1-2\nu} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}$, und damit weiter

$$= -\frac{1}{\mu} \text{grad } \alpha - \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{g} = -\frac{\rho}{\mu} \mathbf{b},$$

und erfüllt somit die NV; *q.e.d.*

Allerdings ist dieser Ansatz nicht allgemein, im Gegensatz zum Folgenden.

Satz: Verschiebungsfunktion von BOUSSINESQ (1885) – SOMIGLIANA (1889) – GALERKIN⁶⁷ (1930)

Sei \mathbf{g} ein Vektorfeld auf \mathcal{V} , das die Bipotenzialgleichung

$$(4.1.50) \quad \Delta \Delta \mathbf{g} = - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b}$$

erfüllt. Dann löst die Verschiebungsfunktion

$$(4.1.51) \quad \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} \quad (\text{BSG})$$

die Verschiebungsgleichung NV vollständig.

Beweis: Wir setzen den BSG-Ansatz ein in NV

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g}) \end{aligned}$$

mit (2.2.50), (2.2.51)

$$\begin{aligned} &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} \\ & \quad + \frac{1}{1-2\nu} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g}) \end{aligned}$$

Eine Nebenrechnung ergibt, dass $-\frac{1}{2-2\nu} + \frac{1}{1-2\nu} (1 - \frac{1}{2-2\nu}) = 0$, und damit weiter

$$= \Delta \Delta \mathbf{g} = - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b},$$

also die Erfüllung von NV . Wir zeigen nun die Vollständigkeit von BSG. Setzen wir in dem BSG-Ansatz

$$\nu' := \frac{3}{2} - \nu \quad \text{und} \quad \rho \mathbf{b}' := -\mu \mathbf{u}$$

ein, so erhalten wir mit $-\frac{1}{2-2\nu} = \frac{1}{1-2\nu'}$

⁶⁷ Valentin Joseph Boussinesq (1842-1929), Carlo Somigliana (1860-1955), Boris Grigorievich Galerkin (1871-1945)

$$\mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{g} + \frac{1}{1-2\nu'} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} = -\frac{\rho}{\mu} \mathbf{b}'.$$

Löst also \mathbf{g} die *NV* für ein Ersatzmaterial unter Massenkraft \mathbf{b}' , so löst \mathbf{u} in *BSG* folglich *NV* bezüglich \mathbf{b} ; *q.e.d.*

Satz: Verschiebungsfunktion von BOUSSINESQ (1885) – PAPKOVITSCH (1932) – NEUBER (1934)⁶⁸

Seien

- φ ein Skalarfeld mit $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\rho}{\mu} \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$
- \mathbf{w} ein Vektorfeld mit $\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} = -\frac{\rho}{\mu} \mathbf{b}$ (inhomogene LAPLACEsche Dgl.)

mit dem Ortsvektor \mathbf{x} und dem Massenkraftfeld \mathbf{b} . Dann löst die Verschiebungsfunktion

$$(4.1.52) \quad \mathbf{u} := \mathbf{w} - \frac{1}{4-4\nu} \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \varphi) \quad (\text{BPN})$$

vollständig die Verschiebungsgleichung *NV*.

Beweis: Durch Einsetzen von *BPN* in *NV* erhält man

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} \\ & \quad - \frac{1}{4-4\nu} \left[\operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \varphi) + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \varphi) \right] \end{aligned}$$

$$\text{mit (2.2.50)} \quad = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} + \varphi).$$

Mit der Umformung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) \nabla \cdot \nabla = (x^i w^j) \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^k \partial x^k} w^j + \frac{\partial^2 w^j}{\partial x^k \partial x^k} x^i + 2 \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \frac{\partial w^j}{\partial x^k} \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{w} \otimes \nabla \cdot \nabla) + 2 \frac{\partial w^j}{\partial x^i} \\ &= \mathbf{x} \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} + 2 \operatorname{div} \mathbf{w} = -\mathbf{x} \cdot \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b} + 2 \operatorname{div} \mathbf{w} \\ &= -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + 2 \operatorname{div} \mathbf{w} \end{aligned}$$

folgt, dass obiger Ausdruck gleich

⁶⁸ Pyotr Feodorovich Papkowitch (1887-1946), Heinz Neuber (1906-1989)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} = - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b}$$

ist und damit NV erfüllt. Um die Vollständigkeit des Ansatzes zu beweisen, überführen wir den BSG -Ansatz, dessen Vollständigkeit bereits gezeigt wurde, in den BPN -Ansatz. Dazu setzen wir

$$\varphi = 2 \operatorname{div} \mathbf{g} - \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{g}$$

$$\mathbf{w} = \Delta \mathbf{g} .$$

Dann folgt aus

$$\Delta \Delta \mathbf{g} = \Delta \mathbf{w} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{w} = - \frac{\rho}{\mu} \mathbf{b}$$

und aus BSG

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{g} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{g} = \mathbf{w} - \frac{1}{2-2\nu} \frac{1}{2} \operatorname{grad}(\varphi + \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{g}) \\ &= \mathbf{w} - \frac{1}{4-4\nu} \operatorname{grad}(\varphi + \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) , \end{aligned}$$

also BPN ; *q.e.d.*

Im Vergleich ist die BPN leichter handhabbar als die BSG , und deshalb weiter verbreitet.

Die folgenden Ansätze sind für $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$ ebenfalls vollständige Lösungen des Gleichgewichts-Problems.

Satz: Verschiebungsfunktion von FREIBERGER (1949)

Sei

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

und

$$\Delta \alpha = \operatorname{div} \mathbf{w} ,$$

so ist

$$(4.1.53) \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{1}{2-2\nu} \operatorname{grad} \alpha$$

vollständige Lösung von NV mit $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$.

Satz: Verschiebungsfunktion von KORN (1915)

Sei

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

und

$$\Delta \mathbf{c} = \operatorname{rot} \mathbf{w} ,$$

so ist

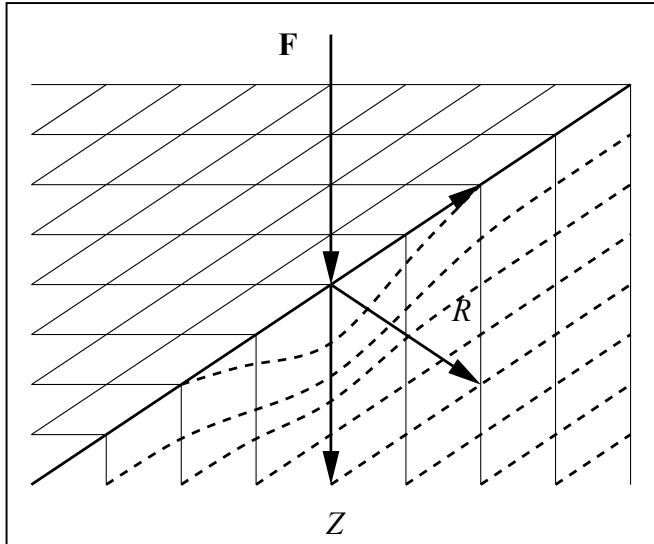
$$(4.1.54) \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} - \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{rot} \mathbf{c}$$

vollständige Lösung von NV mit $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$.

Zu weiteren Konkretisierungen der Verschiebungsfunktionen gelangt man unter einschränkenden Annahmen wie ebene Spannungszustände (LOVE/NOLL, GOURSAT) oder Rotationssymmetrie (BOUSSINESQ) wie im folgenden Beispiel.

Beispiel 16. Kraft auf elastischen Halbraum

Bestimmen Sie das Verschiebungsfeld nach BOUSSINESQ-SOMIGLIANA-GALERKIN (4.1.51), das sich unter einer Einzelkraft auf einen elastischen Halbraum einstellt. Untersuchen Sie das Ergebnis bezüglich der Kompatibilität der Verschiebungen.



Lösung:

Mit $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ bleibt von der allgemeinen BSG-Lösung (4.1.50)

$$\Delta \Delta \mathbf{g} = \mathbf{0}.$$

Da das Problem Rotationssymmetrie um die Kraftwirkungslinie aufweist, verwenden wir Zylinderkoordinaten. Der LAPLACE-Operator ergibt sich durch die Skalarmultiplikation des Nabla-Operators mit sich selbst,

$$\begin{aligned} \Delta &= \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{e}_Z \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \Theta} \mathbf{e}_\Theta + \frac{\partial}{\partial Z} \mathbf{e}_Z \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \end{aligned}$$

wobei die gemischten Skalarprodukte verschwinden und durch $\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_\Theta = \mathbf{e}_\Theta \cdot \mathbf{e}_R = 0$ ein Summand hinzukommt. Mit dem Ansatz $\mathbf{g} = g(R, Z) \mathbf{e}_Z$ wird das Problem auf die Bipotentialgleichung

$$(B16.1) \quad \Delta \Delta g = 0$$

reduziert. Leider kann für die Bipotentialgleichung B16.1 keine allgemeine Lösung angegeben werden. Wir verwenden daher von vornherein die von BOUSSINESQ durch Probieren gefundene Lösung

$$(B16.2) \quad g = C_1 D + C_2 Z \ln(Z+D), \quad D = \sqrt{R^2 + Z^2}.$$

Dies eingesetzt in die Berechnungsvorschrift (4.1.51) für \mathbf{u} liefert

$$\mathbf{u} = \text{div grad}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2-2\nu} \text{grad div}(\mathbf{g})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{g} \mathbf{e}_Z \otimes \nabla) \cdot \nabla - \frac{I}{2-2\nu} (\mathbf{g} \mathbf{e}_Z \cdot \nabla) \nabla \\
 &= \Delta \mathbf{g} \mathbf{e}_Z - \frac{I}{2-2\nu} \mathbf{g}_{,Z} \nabla \\
 &= (\mathbf{g}_{,RR} + \mathbf{g}_{,ZZ} + \mathbf{g}_{,R}/R + \mathbf{g}_{,\Theta\Theta}/R^2) \mathbf{e}_Z \\
 &\quad - \frac{I}{2-2\nu} (\mathbf{g}_{,ZR} \mathbf{e}_R + \mathbf{g}_{,Z\Theta}/R \mathbf{e}_\Theta + \mathbf{g}_{,ZZ} \mathbf{e}_Z).
 \end{aligned}$$

Streicht man wegen der Rotationssymmetrie alle Ableitungen nach Θ und fasst zusammen, so bleibt

$$(B16.3) \quad \mathbf{u} = -\frac{I}{2-2\nu} \mathbf{g}_{,ZR} \mathbf{e}_R + (\mathbf{g}_{,RR} + \mathbf{g}_{,R}/R + \frac{I-2\nu}{2-2\nu} \mathbf{g}_{,ZZ}) \mathbf{e}_Z.$$

Als Nächstes müssen wir die in der letzten Gleichung enthaltenen Ableitungen von \mathbf{g} berechnen. Wir werden wegen der Abhängigkeit über D (B16.2) oft die Kettenregel benötigen,

$$\frac{\partial D}{\partial R} = \frac{R}{D} \quad \frac{\partial D}{\partial Z} = \frac{Z}{D}.$$

Man erhält nach längerer Rechnung die Ableitungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_{,R} &= R[C_1 + C_2 Z/(Z+D)]/D \\
 \mathbf{g}_{,Z} &= Z(C_1 + C_2)/D + C_2 \ln(Z+D) \\
 \mathbf{g}_{,RR} &= (1 - R^2/D^2) [C_1 + C_2 Z/(Z+D)]/D - R^2 C_2 Z / [(Z+D)^2 D^2] \\
 \mathbf{g}_{,ZZ} &= (1 - Z^2/D^2) (C_1 + C_2)/D + C_2/D \\
 \mathbf{g}_{,ZR} &= C_2 R / (ZD + D^2) - ZR(C_1 + C_2)/D^3.
 \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (B16.3) liefert das Verschiebungsfeld \mathbf{u} . Mit den in Beispiel 13 gegebenen Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen in Zylinderkoordinaten können wir die von Null verschiedenen Komponenten des Verzerrungstensors bezüglich der Zylinderbasis angeben

$$\varepsilon_{RR} = u_{R,R} \quad \varepsilon_{\Theta\Theta} = u_{R}/R \quad \varepsilon_{ZZ} = u_{Z,Z} \quad \varepsilon_{RZ} = (u_{Z,R} + u_{R,Z})/2.$$

Dies wird wiederum in das HOOKEsche Gesetz (4.1.17) eingesetzt, um die Spannungen zu bestimmen. Dabei wurde eine für die Rechnung günstige Darstellung mit den elastischen Konstanten G und ν gewählt. Mit dem ermittelten Spannungs- und Verschiebungsfeld können nun die Parameter C_1 und C_2 an die Randbedingungen angepasst werden. Offenbar gibt es keine Verschiebungsrandbedingungen. Als Spannungsrandbedingungen findet man

$$(B16.4) \quad T_{RZ} = 0 \quad \text{bei } Z \equiv 0$$

$$(B16.5) \quad \int_{\mathcal{A}} T_{ZZ} dA = -F \quad \text{bei } Z \geq 0,$$

wobei \mathcal{A} die Schnittfläche zur Flächennormalen \mathbf{e}_Z ist.

Gleichung B16.4 ergibt sich aus der Forderung, dass der freie Rand schubspannungsfrei sein soll, also aus $0 = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}_R$ und $0 = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_Z) \cdot \mathbf{e}_\Theta$. Wegen $T_{Z\Theta} = 0$ bleibt nur

Gleichung B16.4. Gleichung B16.5 ergibt sich durch Freischneiden an einer beliebigen Stelle Z und Auswerten der Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{F} + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_Z dA = \mathbf{0}.$$

Beginnen wir mit der Auswertung von B16.4.

$$\begin{aligned} 0 &= 2 G \varepsilon_{RZ} \\ &= G (u_{Z,R} + u_{R,Z}) \\ &= G (g_{,RR} + g_{,R/R} + \frac{1-2\nu}{2-2\nu} g_{,ZZ})_{,R} - \frac{G}{2-2\nu} g_{,ZRZ}. \end{aligned}$$

In der ersten Klammer dürfen wir bereits $Z=0$ einsetzen, während der letzte Summand erst nach Z abgeleitet werden muss. Bei $Z \equiv 0$ sind $g_{,RR} = 0$, $g_{,ZZ} = (C_1 + 2 C_2) / R$ und $g_{,R} = C_1$. Die Ableitung $g_{,ZRZ}$ ergibt sich zu

$$g_{,ZRZ} = (C_1 + C_2) (3 R Z^2 / D^2 - R) / D^3 - C_2 (R + R Z / D) / (Z D^2 + D^3).$$

Unter Berücksichtigung von $D = R$ bei $Z \equiv 0$ lässt sich die auszuwertende Gleichgewichtsbedingung zu

$$0 = \frac{2\nu}{2-2\nu} (C_1 + 2 C_2) / R^2 - C_1 / R^2$$

zusammenfassen. Sie führt auf den Zusammenhang

$$C_2 = C_1 \frac{1-2\nu}{2\nu}.$$

Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingung B16.5 erfordert die Kenntnis von

$$\begin{aligned} T_{ZZ} &= 2G [u_{Z,Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{R,R} + u_R/R + u_{Z,Z})] \\ &= 2G [\frac{1-\nu}{1-2\nu} u_{Z,Z} + \frac{\nu}{1-2\nu} (u_{R,R} + u_R/R)]. \end{aligned}$$

Die Auswertung ist langwierig, aber prinzipiell problemlos, da u_R und u_Z durch Gleichung B16.3 gegeben sind. Bilden der Ableitungen und Zusammenfassen liefert

$$T_{ZZ} = \frac{-3G}{2\nu(1-\nu)} C_1 \frac{Z^3}{D^5}.$$

Man sieht hier sehr schön, dass bei $Z \equiv 0$ die Normalspannung T_{ZZ} für $R > 0$ verschwindet, und an der Stelle $R \equiv 0$ (also dem Kraftangriffspunkt) gegen unendlich strebt. Wir setzen nun T_{ZZ} in die Gleichgewichtsbedingung B16.5 ein

$$-F = \int_{\mathcal{A}} T_{ZZ} dA = \frac{-3GZ^3 C_1}{2\nu(1-\nu)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty R/D^5 dR d\Theta.$$

Wegen $D = (R^2 + Z^2)^{1/2}$ gilt $dD/dR = R/D$, also $dR = D/R dD$, wodurch das Integral als

$$-F = \frac{-3GZ^3 C_1 \pi}{\nu(1-\nu)} \int_0^\infty 1/D^4 dD$$

geschrieben werden kann. Man findet letztlich

$$-F = \frac{GZ^3 C_1 \pi}{\nu(1-\nu)} [D^{-3}]_{R=0}^{R=\infty} = \frac{GZ^3 C_1 \pi}{\nu(1-\nu)} (0 - Z^{-3}) = -\frac{GC_1 \pi}{\nu(1-\nu)},$$

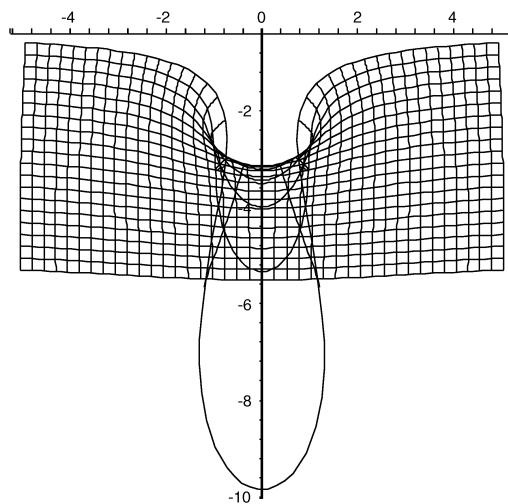
wodurch $C_1 = F \nu(1-\nu)/(G \pi)$ bestimmt ist. Somit sind C_1 und C_2 bekannt, und das Problem kann als gelöst angesehen werden.

$$(B16.6) \quad u_R = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{RZ}{D^3} - \frac{R(1-2\nu)}{D(D+Z)} \right)$$

$$(B16.7) \quad u_Z = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{Z^2}{D^3} + \frac{2-2\nu}{D} \right)$$

Man stellt fest, dass an der Stelle $\mathbf{X} \equiv \mathbf{o}$ die Verschiebung u_Z gegen unendlich strebt. Diese offensichtliche Inkompatibilität im Verschiebungsfeld ist durch die punktuelle Kräfteinleitung bedingt.

Bei der Darstellung des deformierten Halbraumes wurde die obere Schicht ($Z < 0,25$) weggelassen. Wir wollen die Zone unzulässiger Verschiebungen eingrenzen. Hierfür bieten sich verschiedene Möglichkeiten, wie zum Beispiel die Kompatibilitätsbedingungen (Kapitel 3.1.1). Deren Prüfung ist, zumal wir in Zylinderkoordinaten arbeiten, mit etwas Aufwand verbunden.



Alternativ kann ein anschauliches Kriterium verwendet werden: Nahe der Kraftangriffsstelle wird das Volumen umgestülpt. Im Grenzfall fallen zwei materielle Punkte in der deformierten Lage zusammen, es gilt also

$$\chi(\mathbf{X}_1) = \chi(\mathbf{X}_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_1 + \mathbf{u}(\mathbf{X}_1) = \mathbf{X}_2 + \mathbf{u}(\mathbf{X}_2).$$

Auch dieses Kriterium ist schwieriger auszuwerten als ein Drittes, nämlich die Spur des Dehnungstensors

$$sp \mathbf{E} = u_{R, R} + u_R/R + u_{Z, Z},$$

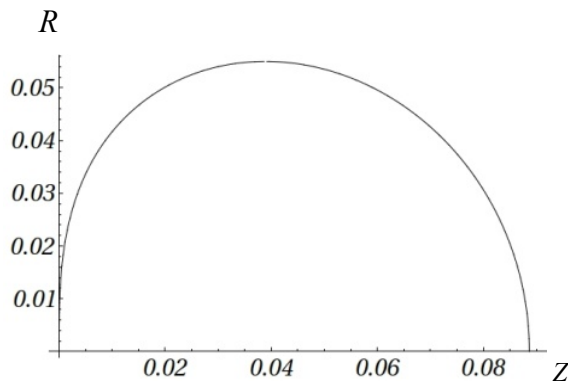
welche ein Maß für die Volumendehnungen ist. Setzt man

$$sp \mathbf{E} = \varepsilon_{krit},$$

so erhält man eine implizite Funktion zwischen R und Z . Diese lässt sich unter Ausschluss negativer und komplexer Lösungen nach $R(Z)$ auflösen

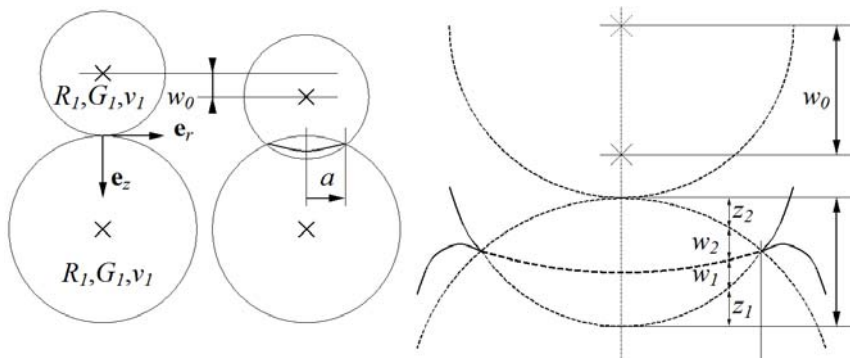
$$R = \sqrt{-Z^2 + \left(\frac{F(2\nu-1)Z}{2G\pi\varepsilon_{krit}} \right)^{2/3}}.$$

Man kann nun eine Darstellung für die Zone erhalten, in welcher die Volumendehnungen den kritischen Wert ε_{krit} unterschreiten. Für die Darstellung wurden die Zahlenwerte $G = 81.000 \text{ MPa}$, $F = 1000 \text{ N}$, $\nu = 0,3$ und $\varepsilon_{krit} = -0,1$ verwendet. Für dieses Beispiel erhält man eine nur wenige hundertstel Millimeter kleine Zone. Selbst für $\varepsilon_{krit} = -0,01$ ist diese Zone nur $0,28 \text{ mm}$ tief.



Beispiel 17. HERTZscher Kontakt

Wir wollen die Lösung von BOUSSINESQ benutzen, um die Pressung zweier Kugeln (Radius $R_{1,2}$, elastische Konstanten $\nu_{1,2}$ und $G_{1,2}$) zu ermitteln. Die Kugelmittelpunkte werden um w_0 zueinander verschoben. Es bildet sich eine Kontaktzone mit dem Radius a aus. Bestimmen Sie a , die resultierende Kraft und das Verschiebungsfeld in der Kontaktzone.

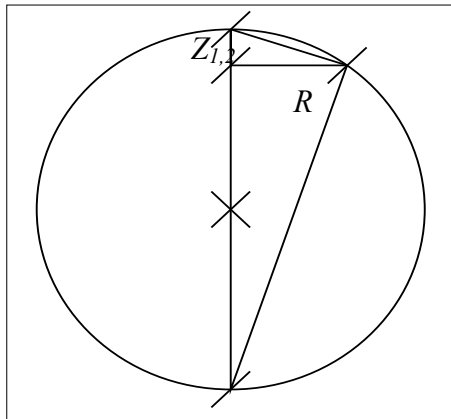


Lösung:

Wir verwenden wieder Zylinderkoordinaten. Die Kontaktbedingung ist: Die Annäherung der Kugelmittelpunkte w_0 ist gleich der anfänglichen Aufklaffung $z_1(R)$ und $z_2(R)$ plus der beiden Eindrückungen $w_1(R)$ und $w_2(R)$. Wir rechnen mit den Beträgen von $z_{1,2}$ und $w_{1,2}$

$$z_1 + z_2 + w_1 + w_2 = w_0$$

Um die Kontaktbedingung auswerten zu können benötigen wir $z_{1,2}(R)$ und $w_{1,2}(R)$.



Mit dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck berechnen wir

$$R^2 = Z_{1,2} (2R_{1,2} - Z_{1,2}) = 2R_{1,2} Z_{1,2} - Z_{1,2}^2.$$

Da $Z_{1,2}$ gegenüber den Radien sehr klein sind, kann der quadratische Term $Z_{1,2}^2$ vernachlässigt werden. Dies führt auf die Näherung

$$Z_{1,2} = R^2 / (2R_{1,2}).$$

Um die Eindrückungen w_1 und w_2 zu berechnen, verwenden wir die Lösung von BOUSSINESQ (B16.7). Wir fassen $p(R) dA = dF(R)$ als kleine Kraft auf einen elastischen Halbraum auf, wobei $p(R)$ dem Anpressdruck entspricht. Mit dem Superpositionsprinzip erhalten wir die Verschiebung an einer Stelle in der Kontaktfläche durch Überlagerung der Verschiebungen, die durch alle $dF(R)$ im Kontaktgebiet verursacht werden. Die BOUSSINESQ-Lösung für die Verschiebung in Z -Richtung ist

$$w(R, Z) = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{Z^2}{D^3} + \frac{2-2\nu}{D} \right) \quad D = \sqrt{R^2 + Z^2}.$$

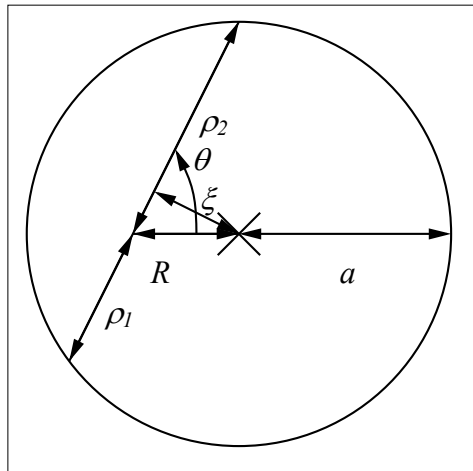
Wir interessieren uns für die Lösung bei $Z \equiv 0$. Außerdem ersetzen wir die Kraft F durch $p(R) dA$, und erhalten die an der Stelle R resultierende differentielle Verschiebung

$$dw(R) = \frac{p(R) dA}{4\pi G} \left(\frac{2-2\nu}{R} \right).$$

Die Gesamtverschiebung an einer beliebigen Stelle R wird durch Integration über alle differentielle Kräfte in der Kontaktfläche ermittelt. Für die Verschiebung im Mittelpunkt erhalten wir mit $dA = R dR d\Theta$

$$w = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_0^a \int_0^{2\pi} p(R) dR d\Theta,$$

wobei R ein mal gekürzt wird. Wir wollen aber die Deformation der gesamten Kontaktfläche ermitteln. Daher transformieren wir das zentrale Polarkoordinatensystem an eine Stelle in der Kontaktfläche mit dem Radius R , an welcher wir den Winkel θ und den Radius ρ verwenden (Ansicht Kontaktfläche).



Wir können somit die Integration an der Stelle R durch

$$w(R) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_0^{\rho_2} \int_{-\rho_1}^{\rho_2} p(\rho) d\rho d\theta$$

ausdrücken, wobei die Abhängigkeit von R durch die Funktionen $\rho_1(R, \theta)$ und $\rho_2(R, \theta)$ eingeht. Wir ersetzen das innere Integral durch die mittlere Flächenpressung \bar{p} multipliziert mit der Länge des von θ abhängigen Abschnittes

$$\eta(R, \theta) = \rho_1(R, \theta) + \rho_2(R, \theta)$$

$$w(R) = \frac{1-\nu}{2\pi G} \int_0^{\pi} \bar{p} \eta(R, \theta) d\theta.$$

Wir können mit dem Satz des PYTHAGORAS η als Funktion von ξ schreiben,

$$a^2 = \xi^2 + (\eta/2)^2 \quad \Rightarrow \quad \eta = 2 \sqrt{(a^2 - \xi^2)}.$$

ξ lässt sich als $\xi = R \sin \theta$ angeben, was eingesetzt

$$w(R) = \frac{1-\nu}{\pi G} \int_0^{\pi} \bar{p} \sqrt{a^2 - R^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

liefert. Nun benötigen wir einen Ansatz für \bar{p} . Es ist klar, dass die mittlere Flächenpressung \bar{p} nur vom Lot ξ auf den Mittelpunkt abhängt. Dabei muss \bar{p} am Rand (bei $\xi \equiv a$) verschwinden, und in der Mitte (bei $\xi \equiv 0$) das Maximum annehmen. Wir verwenden als Formfunktion eine kugelförmige Druckverteilung, die mit dem Parameter κ skaliert wird, $\bar{p} = \kappa \sqrt{a^2 - \xi^2}$. Das Integral lässt sich nun leicht lösen

$$\begin{aligned} w(R) &= \frac{1-\nu}{\pi G} \kappa \int_0^\pi \left[a^2 - R^2 \sin^2(\theta) \right] d\theta \\ &= \frac{1-\nu}{G} \kappa (a^2 - R^2/2). \end{aligned}$$

Die Verschiebungen $w_{1,2}$ sowie die Approximationen der Kugeloberflächen $Z_{1,2}$ können nun in die Kontaktbedingung eingesetzt werden. Dem Schnittprinzip nach muss die Druckverteilung auf beiden Kugeln betragsmäßig gleich und entgegengesetzt sein, es gibt also nur einen Parameter κ .

$$R^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) + \kappa (a^2 - R^2/2) \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right) - w_0 = 0.$$

Dies muss in der gesamten Kontaktzone, also unabhängig von R gelten. Dementsprechend muss nach Ausklammern von R^2 der Koeffizient vor R^2 und der absolute Anteil unabhängig voneinander verschwinden. Man findet

$$\begin{aligned} w_0 &= \kappa a^2 \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right) \\ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= \kappa \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right), \end{aligned}$$

woraus sich schließlich κ und a errechnen lassen

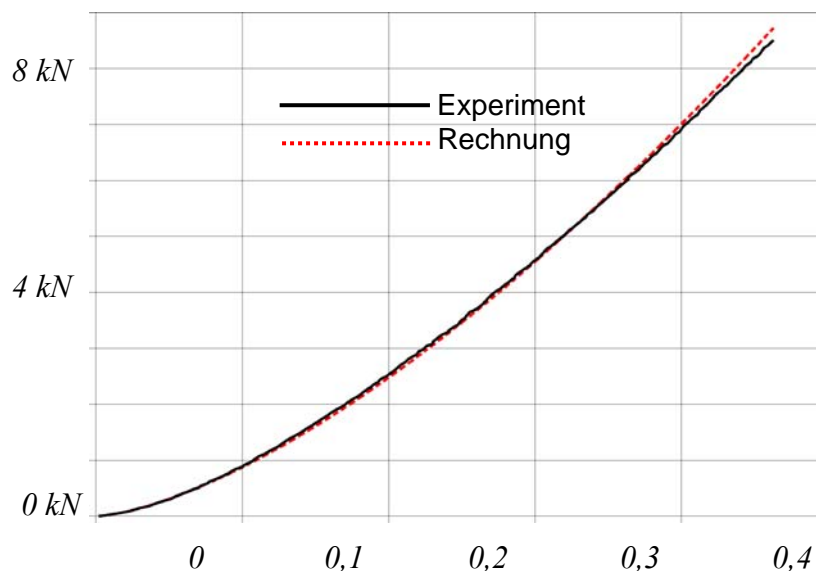
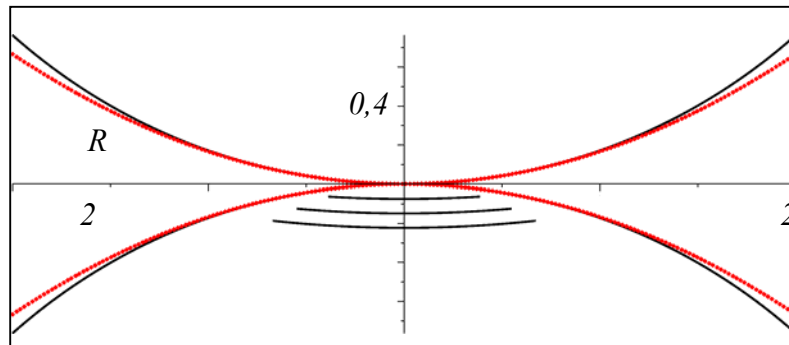
$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 \left((1-\nu_1)/G_1 + (1-\nu_2)/G_2 \right)} \\ a &= \sqrt{w_0 R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}. \end{aligned}$$

Interessanterweise hängt bei gegebenem w_0 die Größe der Kontaktzone nicht von den elastischen Konstanten ab. κ ist ein Form- und Materialparameter. Die Reaktionskraft kann als

$$\begin{aligned} F &= \int_{-a}^a \bar{p}(\xi) \eta d\xi = 2\kappa \int_{-a}^a (a^2 - \xi^2) d\xi \\ &= 8a^3 \kappa / 3 = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{w_0^3 R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

ermittelt werden. Man findet trotz linearem Materialverhalten eine nichtlineare Kraft-Verschiebungs-Kurve. Dies ist ein geometrischer Effekt, bedingt durch die von der

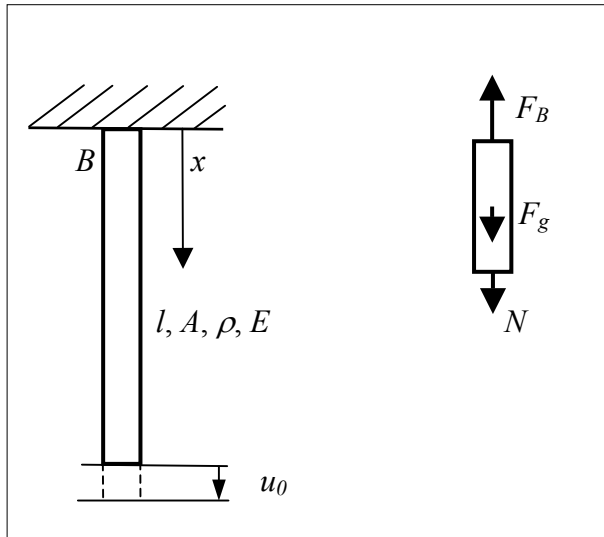
Zusammendrückung abhängige Kontaktflächengröße. Für zwei Kugeln mit $R_1 = R_2 = 3 \text{ mm}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $E_1 = 200 \text{ GPa}$, $E_2 = 70 \text{ GPa}$ (entspricht in etwa Stahl und Aluminium), die jeweils um $w_0 = 0,1$, $0,2$ und $0,3 \text{ mm}$ zusammengedrückt werden, sind die Kontaktzonen sowie die Approximationen der Kugeloberflächen im Vergleich zur Kugeloberfläche im folgenden Bild dargestellt. Dabei wird die obere Kugel aus Stahl in Richtung der unteren Kugel aus Aluminium verschoben.



Um die Ergebnisse einschätzen zu können, wurde die Kraft-Verschiebungs-Kurve für die Paarung Stahl-Stahl ($R = 5 \text{ mm}$) experimentell aufgenommen. Aufgrund der unbekannteren Maschinensteifigkeit, die gegenüber den Kugeln wesentlich niedriger sein muss, wurde das rechnerische Ergebnis so skaliert, dass es dicht an der experimentellen Lösung lag. Man erkennt eine qualitativ gute Übereinstimmung zwischen Messung (durchgezogene Linie) und Rechnung (gestrichelte Linie), trotz aller Annahmen und Vereinfachungen, die bei der Rechnung notwendig sind. Die Abweichung bei größeren Verschiebungen (ab $w_0 > 0,4 \text{ mm}$) ist durch plastische Deformation zu erklären. An den Kugeln blieben kleine Abdrücke zurück.

Beispiel 18. Variationsprinzipien im Vergleich

Gegeben sei ein vertikal ausgerichteter Stab der Länge l mit einer Querschnittsfläche A , einer Massendichte ρ und einem Elastizitätsmodul E . Das obere Ende wird festgehalten, während das untere Ende um u_0 verschoben wird.



Man ermittle die Verschiebung $u(x)$ und die Normalkraft $N(x)$ im Stab aus der Dgl. des eindimensionalen elastostatischen Randwertproblems mit Hilfe (1) des Prinzips vom Minimum der potenziellen Energie, (2) des Prinzips vom Minimum der Ergänzungsenergie und (3) des Prinzips von DE VEUBEKE – HU – WASHIZU.

Lösung:

Im Modell des Stabs vereinfachen sich die Verschiebungs-Verzerrungsrelation und das Materialgesetz zu

$$(B18.1) \quad \varepsilon = u_{,x} \quad \sigma = E \varepsilon.$$

Die Schnittkraft N ergibt sich aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht

$$N = F_B - F_g = F_B - g \rho A x.$$

Die Spannungen werden als gleichmässig im Querschnitt verteilt angenommen. Man erhält ohne und mit Berücksichtigung der Querkontraktion

$$\sigma = N/A \quad \text{oder} \quad \sigma = N/[A(1 - u_{,x} \nu)^2].$$

Mit (B18.1) erhält man

$$(B18.2) \quad u_{,x} = (F_B - g \rho A x)/(EA)$$

$$\text{oder} \quad u_{,x} = (F_B - g \rho A x)/(EA(1 - u_{,x} \nu)^2),$$

also entweder eine Dgl., die einfach aufintegriert werden kann, oder eine Dgl., in der die Ableitung der gesuchten Funktion als Polynom dritten Grades steht. Wir fahren in der geometrisch linearen Theorie mit Gleichung (B18.2-1) fort, vernachlässigen also die Querdehnung. Die Integration über x liefert

$$u = (F_B x - \frac{1}{2} g \rho A x^2)/(EA) + c$$

mit einer Integrationskonstanten c . Die zwei Unbekannten F_B und c ergeben sich aus den zwei Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(l) = u_0$ zu

$$c = 0$$

$$F_B = u_0 EA/l + \rho l g A/2,$$

womit die Gesamtlösung

$$(B18.3) \quad u(x) = u_0 x / l + 1/2 \rho g (l x - x^2) / E$$

ist.

Verwenden wir nun das *Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie*. Ihm zufolge hat das Funktional $\Phi(\mathbf{u})$ aus (4.1.43) an der Stelle der Lösung ein Minimum. Wir müssen letztere Gleichung für den eindimensionalen Stab umschreiben, wobei der letzte Term entfällt, da wir keine Kraft- oder Spannungsrandbedingungen haben.

$$(B18.4) \quad \begin{aligned} \Phi(\bar{u}) &= 1/2 \int_{\mathcal{V}} E \varepsilon^2 dV - \int_{\mathcal{V}} g \bar{u} dm \\ &= 1/2 \int_0^l EA \bar{u}_{,x}^2 dx - \int_0^l g \bar{u} \rho A dx . \end{aligned}$$

Mit der konstanten Querschnittsfläche können die Volumenintegrale in Linienintegrale umgeschrieben werden. Das Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie benötigt einen parametrisierter Ansatz für $\bar{u}(x)$, welcher bereits die Randbedingungen erfüllt. Hierbei ist es wichtig, dass der Ansatz linear im Sinne der Analysis in den anzupassenden Parametern ist. So wird sichergestellt, dass die Parameter eindeutig als Lösung eines linearen Gleichungssystem identifiziert werden können. Wir setzen

$$\bar{u}(x) = a x^2 + b x + c$$

mit drei Parametern a , b und c an. Mit $\bar{u}(0) = 0$ und $\bar{u}(l) = u_0$ bleibt ein anzupassender Parameter a

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= a x^2 + (u_0/l - a l) x \\ \bar{u}(x)_{,x} &= 2a x + u_0/l - a l . \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in Gleichung B18.4 liefert

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{u}) &= 1/2 \int_0^l EA (2a x + u_0/l - a l)^2 dx - \int_0^l g \rho A (a x^2 + (u_0/l - a l) x) dx \\ &= 1/2 EA [4 a^2 l^3/3 + 2 a l^2 (u_0/l - a l) + l (u_0/l - a l)^2] \\ &\quad - g \rho A [a l^3/3 + l^2 (u_0/l - a l)/2] . \end{aligned}$$

Nun kann Φ über a minimiert werden. Notwendig dafür ist, dass die Ableitung des Funktionals nach a Null wird

$$\Phi(\bar{u})_{,a} = 2 EA a l^3/6 + g \rho A l^3/6 = 0 ,$$

aus welcher

$$a = -1/2 g \rho / E$$

bestimmt wird. Rückwärts eingesetzt in unseren Ansatz für $\bar{u}(x)$ ergibt sich

$$\bar{u}(x) = u_0 x / l + 1/2 (\rho l g x - g \rho x^2) / E .$$

Man findet also die exakte Lösung, die bereits aus der Dgl. bestimmt wurde (Gleichung B18.3). Dies liegt daran, dass die exakte Lösung in unserem Funktionsansatz enthalten war. In solchen Fällen liefert die Variationsformulierung grundsätzlich die exakte Lösung.

Als Ausgangspunkt für die Lösung mit dem *Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie* dient Gleichung (4.1.44),

$$\Psi(\mathbf{T}) = \int_{\mathcal{V}} w^*(\mathbf{T}) dV - \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{t} dA \quad \text{mit} \quad w^*(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}.$$

Wir schreiben wieder für den eindimensionalen Fall um

$$(B18.5) \quad \Psi(\bar{\sigma}) = \frac{l}{2E} \int_0^l \bar{\sigma}^2 A dx - u_0 A \bar{\sigma}(l).$$

Dabei wird aus dem Volumenintegral ein Linienintegral, während das Oberflächenintegral über den Rand mit Verschiebungsrandbedingungen zu einer Auswertung an einem diskreten Punkt wird. Beim Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie wird ein Ansatz $\bar{\sigma}$ für die Spannungen gemacht. Dieser muss die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Man ist also schon auf diejenigen Funktionen beschränkt die lokale Impulsbilanz und Drallbilanz sicher stellen, siehe hierzu auch Abschnitt 3.2.2. Im eindimensionalen Fall bleibt von der Impulsbilanz im statischen Fall lediglich

$$\bar{\sigma}_{,x} = -g\rho,$$

wodurch

$$\bar{\sigma} = -g\rho x + d$$

als Ansatz vorgegeben ist. Der einzige noch zu ermittelnde Parameter ist d . Setzt man in Gleichung (B18.5) ein und fasst zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(\bar{\sigma}) &= \frac{A}{2E} \int_0^l [(g\rho x)^2 - 2d g\rho x + d^2] dx - u_0 A d + A u_0 g\rho l \\ &= \frac{A}{2E} [(g\rho)^2 l^3/3 - d g\rho l^2 + l d^2] - A u_0 d + A u_0 g\rho l. \end{aligned}$$

Im Minimum von Ψ muss dessen Ableitung nach d Null sein

$$0 = \frac{A}{2E} (-g\rho l^2 + 2ld) - A u_0,$$

woraus d und letztlich $\bar{\sigma}$ ermittelt werden

$$\begin{aligned} d &= E u_0 / l + g\rho l / 2 \\ \bar{\sigma} &= E u_0 / l + g\rho l / 2 - g\rho x. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Lösung nun mit den vorherigen Ergebnissen vergleichen. Offenbar ist es einfacher, die Lösung von u auf $\bar{\sigma}$ umzurechnen, da wir in diesem Fall lediglich ableiten müssen. Umgekehrt wäre es notwendig, eine Integrationskonstante zu bestimmen. Dies ist einer der Gründe, weshalb bevorzugt $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ als unabhängige Variable verwendet wird. Ableiten der Lösung (B18.3) nach x (Ermitteln der Dehnung mit $\varepsilon = u_{,x}$) und Multiplikation mit E (Materialgesetz $\sigma = E\varepsilon$) liefert

$$\sigma = E u_0 / l + g\rho l / 2 - g\rho x.$$

$\bar{\sigma}$ fällt also mit der exakten Lösung zusammen. Dies ist nicht weiter verwunderlich. Wir waren bei der Wahl der Ansatzfunktion derart eingeschränkt, dass wir keinen anderen Ansatz wählen konnten. Dies liegt an der einfachen Form der Impulsbilanz im 1D-Fall und an der Homogenität des Stabes. Im Allgemeinen (3D) ist dies nicht der Fall.

Beim *Prinzip von DE VEUBEKE – HU – WASHIZU* muss das Funktional

$$\Lambda(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{V}} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} \, dV \\ + \int_{\mathcal{A}_g} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}_v \, dA + \int_{\mathcal{A}_d} (\mathbf{t} - \mathbf{t}_v) \cdot \mathbf{u} \, dA$$

ausgewertet werden (4.1.46). Dabei werden Ansätze fürs Verschiebungsfeld, Verzerrungsfeld und Spannungsfeld benötigt. Dies mag etwas ungewöhnlich erscheinen, da man ja \mathbf{E} und \mathbf{T} mit der Verschiebungs-Verzerrungs-Relation und dem Materialgesetz aus \mathbf{u} bestimmen kann. Die Stärke dieses Prinzips liegt jedoch gerade darin, dass die Ansätze, im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen, keinen Restriktionen unterworfen sind. Außerdem erhält man direkt Lösungen für alle interessierenden Felder, so dass man nachträglich nicht umrechnen muss. Die Auswertung dieses Prinzip lässt sich daher gut automatisieren. Wir formulieren wieder für unser eindimensionales Beispiel um

$$\Lambda(\bar{u}, \bar{\varepsilon}, \bar{\sigma}) = \frac{1}{2} A \int_0^l \bar{\varepsilon}^2 E \, dx - A \int_0^l \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} \, dx - A \int_0^l (\bar{\sigma}_{,x} + \rho g) \bar{u} \, dx + A \bar{\sigma}(l) u_0$$

Dabei entfällt das Integral über die Spannungsrandbedingungen wieder. Nun müssen Ansätze für \bar{u} , $\bar{\sigma}$ und $\bar{\varepsilon}$ gemacht werden. Da die Rechnung sehr aufwendig wird, wählen wir diesmal eine etwas andere Vorgehensweise. Wir bilden die erste Variation von Λ und setzen diese Null. Dabei behandeln wir $\bar{\sigma}_{,x}$ erst einmal als unabhängige Ansatzfunktion. Die Variation des Funktionals entspricht dem Richtungs-Differenzial nach allen unabhängigen Feldern. Diese Variation muss an der Stelle der Lösung Null sein

$$(B18.6) \quad \int_0^l [(\bar{\varepsilon} E - \bar{\sigma}) \delta \bar{\varepsilon} - (\bar{\sigma}_{,x} + \rho g) \delta \bar{u} - \bar{\varepsilon} \delta \bar{\sigma} - \bar{u} \delta \bar{\sigma}_{,x}] \, dx + \delta \bar{\sigma}(l) u_0 = 0.$$

Der Faktor A kann bereits gestrichen werden. Erst jetzt machen wir Ansätze für $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ und \bar{u} . Hierfür wählen wir einheitliche polynomialen Ansätze

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^3 u_i p^i \quad \bar{\varepsilon} = \sum_{i=0}^3 \varepsilon_i p^i \quad \bar{\sigma} = \sum_{i=0}^3 \sigma_i p^i \quad \bar{\sigma}_{,x} = \sum_{i=0}^3 \sigma_i p^{i,x}$$

mit $p := x/l$. Damit können die Variationen $\delta \bar{\varepsilon}$, $\delta \bar{u}$, $\delta \bar{\sigma}$ und $\delta \bar{\sigma}_{,x}$ angegeben werden

$$\delta \bar{u} = \sum_{i=0}^3 \delta u_i p^i \quad \delta \bar{\varepsilon} = \sum_{i=0}^3 \delta \varepsilon_i p^i \quad \delta \bar{\sigma} = \sum_{i=0}^3 \delta \sigma_i p^i \quad \delta \bar{\sigma}_{,x} = \sum_{i=0}^3 \delta \sigma_i p^{i,x}$$

Wir können nun in Gleichung B18.6 die zwölf einzelnen $\delta u_{0,\dots,3}$, $\delta \varepsilon_{0,\dots,3}$ und $\delta \sigma_{0,\dots,3}$ ausklammern und erhalten im Integral eine Summe aus zwölf Summanden, die jeweils ein Produkt aus einer Variation und einem Faktor sind. Wir integrieren nun die Summanden einzeln, wobei wir die Parameter $\delta u_{0,\dots,3}$, $\delta \varepsilon_{0,\dots,3}$ und $\delta \sigma_{0,\dots,3}$ vor die Integrale ziehen. Damit $\delta \Lambda = 0$ erfüllt ist, müssen die Integrale unabhängig voneinander verschwinden, da die Variationen $\delta u_{0,\dots,3}$, $\delta \varepsilon_{0,\dots,3}$ und $\delta \sigma_{0,\dots,3}$ unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen können. Dies soll ausführlich am Beispiel δu_3 gezeigt werden.

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_0^l [(\bar{\sigma}_{,x} + \rho g) \delta u_3 p_3] dx \\ &= - \delta u_3 \int_0^l [(\sigma_0 p_{0,x} + \sigma_1 p_{1,x} + \sigma_2 p_{2,x} + \sigma_3 p_{3,x} + \rho g) p_3] dx \\ &= - \delta u_3 \int_0^l [(\sigma_1/l + 2 \sigma_2 x/l^2 + 3 \sigma_3 x^2/l^3 + \rho g) x^3/l^3] dx \\ &= - \delta u_3 \int_0^l [\sigma_1 x^3/l^4 + 2 \sigma_2 x^4/l^5 + 3 \sigma_3 x^5/l^6 + \rho g x^3/l^3] dx \\ &= - \delta u_3 [\sigma_1 x^4/(4 l^4) + 2 \sigma_2 x^5/(5 l^5) + 3 \sigma_3 x^6/(6 l^6) + \rho g x^4/(4 l^3)]_0^l \\ &= - \delta u_3 (\sigma_1/4 + 2\sigma_2/5 + 3\sigma_3/6 + \rho g l/4). \end{aligned}$$

Somit muss

$$0 = \sigma_1/4 + 2\sigma_2/5 + 3\sigma_3/6 + \rho g l/4$$

gelten, und wir haben die erste Berechnungsgleichung für unsere Koeffizienten $u_{0,\dots,3}$, $\varepsilon_{0,\dots,3}$ und $\sigma_{0,\dots,3}$ erhalten. Die Auswertung aller Variationen liefert folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 2/3 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/4 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 2/5 & 3/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI & -EI/2 & -EI/3 & -EI/4 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI/2 & -EI/3 & -EI/4 & -EI/5 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI/3 & -EI/4 & -EI/5 & -EI/6 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI/4 & -EI/5 & -EI/6 & -EI/7 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 2/4 & 2/5 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3/4 & 3/5 & 3/6 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho g l \\ -\rho g l/2 \\ -\rho g l/3 \\ -\rho g l/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_V \\ u_V \\ u_V \\ u_V \end{bmatrix}$$

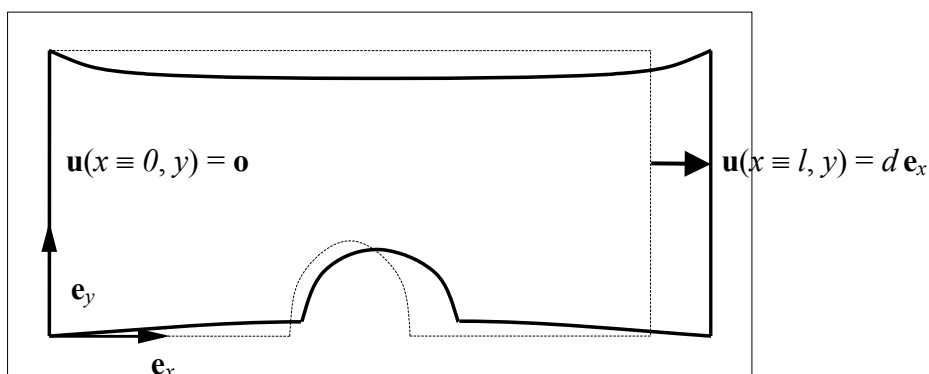
Die Koeffizientenmatrix ist bei entsprechender Sortierung und Skalierung der Gleichungen symmetrisch. Sie hat den Rang 11, weswegen keine eindeutige Lösung angegeben werden kann. Dies liegt in unserem Beispiel daran, dass die vier Parameter des Verschiebungsfeldes \bar{u} nur in drei Gleichungen auftauchen. Dies kommt daher, dass der Ansatz für die Verschiebungen in Gl. (B18.6) nur mit dem Faktor $\bar{\sigma}_{,x}$ auftaucht, was nur noch drei Parameter enthält. Man muss also die Ansätze für \bar{u} und $\bar{\sigma}$ aneinander angepasst wählen. In unserem Beispiel müsste man entweder einen Parameter bei \bar{u} entfernen oder einen bei $\bar{\sigma}$ hinzufügen. Der Ansatz für \bar{u} darf also nicht mehr Parameter als der Ansatz für $\bar{\sigma}$ haben. Umgekehrt gilt diese Beschränkung nicht. Bei der Verwendung des Prinzips von DE VEUBEKE – HU – WASHIZU sind die Ansätze also nicht von vorneherein an bestimmte Gleichungen oder Randbedingungen angepasst zu wählen. Dennoch gibt es Einschränkungen. Vervollständigen wir das Gleichungssystem mit der Randbedingung $\bar{u}(0) = 0$, so entspricht dies dem Entfernen des Parameters u_0 , woraufhin eine Lösung angegeben werden kann:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 & u_1 &= \rho g l^2 / (2E) + u_0 & u_2 &= -\rho g l^2 / (2E) & u_3 &= 0 \\ \varepsilon_0 &= \rho g l / (2E) + u_0 / l & \varepsilon_1 &= -\rho g l / E & \varepsilon_2 &= 0 & \varepsilon_3 &= 0 \\ \sigma_0 &= \rho g l / 2 + E u_0 / l & \sigma_1 &= -\rho g l & \sigma_2 &= 0 & \sigma_3 &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder die exakte Lösung. Wie wir gesehen haben, ist die Verwendung des Prinzips von DE VEUBEKE – HU – WASHIZU in diesem Beispiel mit mehr Aufwand verbunden. Dies liegt daran, dass wir gleich für drei Felder Ansätze wählen mussten, und diese hier von höherer Ordnung gewählt wurden, als in den beiden vorherigen Beispielen. Allerdings ist die algorithmische Auswertung des Prinzips einfacher, da keine Randbedingungen in die Ansätze eingearbeitet werden müssen.

Beispiel 19. Minimum der elastischen Energie bei einer gekerbten Zugprobe

Anhand eines numerischen Beispiels soll gezeigt werden, wie sich mit Hilfe der Variationsprinzipien algorithmisch Näherungslösungen konstruieren lassen. Ein Streifen mit den Abmessungen $l \times l/2$ ($0 < x < l$, $0 < y < l/2$) soll in x -Richtung gedehnt werden.



Dabei werden die Stirnflächen starr gegeneinander um den Betrag d verschoben. In z -Richtung wird ein ebener Verzerrungszustand angenommen, es gilt also überall

$u_z = 0$. Der Streifen besitzt mittig an der Stelle $x \equiv l/2$ eine Kerbe. Es soll das *Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials* verwendet werden.

Lösung:

Wir machen einen Doppelreihen-Ansatz für die Verschiebungen u_x und u_y . Dabei müssen wir die Randbedingungen $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ an der Stelle $x \equiv 0$ und $\mathbf{u} = d \mathbf{e}_x$ an der Stelle $x \equiv l$ bereits einarbeiten. Dies wird leicht realisiert, indem wir die ganze Doppelreihe mit entsprechenden Faktoren multiplizieren

$$u_y = x(l-x) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{yij} x^i y^j$$

$$u_x = x d/l + x(l-x) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n C_{xij} x^i y^j.$$

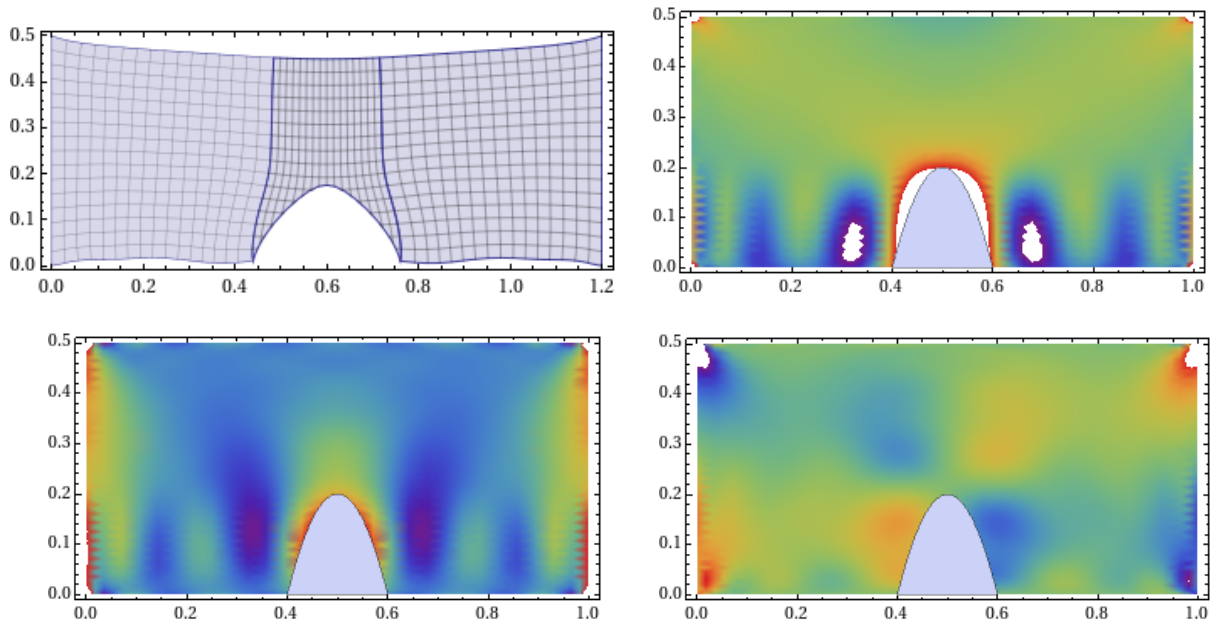
Nun sind die $2(n+1)^2$ Parameter C_{xij} und C_{yij} zu ermitteln, was analog zur Vorgehensweise in Beispiel B18 erfolgt. Dabei steigt die Qualität der Lösung mit n . Dies kann algorithmisch in einem Computer-Algebra-System erfolgen, wobei hier MATHEMATICA verwendet wurde.

```
Remove["Global`*"]
n=11;      (* maximaler Polynomgrad *)
l=1;      (* Länge des Streifens *)
G=40;     (* Schubmodul *)
K=120;    (* Kompressionsmodul *)
disp=1/5; (* Verschiebung *)
ykerbe=20*(-(1/2-x)^2+(1/10)^2); (* Form der Kerbe an der
    Stelle x=1/2, zwischen 2/5 l und 3/5 l angenommen *)
Print["Integrand w für Ploynomansatz der Ordnung ", n, "
    mit ", 2*(n+1)^2, " Koeffizienten aufbauen..."]
CX=Array[cxval,{n+1,n+1}]; (* Felder der Koeffizienten und
    Gleichungen anlegen *)
CY=Array[cyval,{n+1,n+1}];
eqb1=Array[e1,{n+1,n+1}];
eqb2=Array[e2,{n+1,n+1}];
ux=x/l*disp+x*(x-1)*Sum[CX[[i+1,j+1]]*x^i*y^j,{i,0,n},{j,0,n}];
(* Ansatz für ux *)
uy=x*(x-1)*Sum[CY[[i+1,j+1]]*x^i*y^j,{i,0,n},{j,0,n}];
(* Ansatz für uy *)
exx=Simplify[D[ux,x]];
(* Dehnungen aus Verschiebungen bestimmen *)
eyy=Simplify[D[uy,y]];
exy=Simplify[(D[ux,y]+D[uy,x])/2];
spe=exx+eyy;
txx=Simplify[3*K*spe/3+2*G*(exx-spe/3)];
(* Spannungen aus den Dehnungen berechnen *)
tyy=Simplify[3*K*spe/3+2*G*(eyy-spe/3)];
txy=Simplify[2*G*exy];
integrand=Expand[exx*txx+eyy*tyy+2*exy*txy];
(* Elastische Energie = T .. E *)
Print["Integrieren 1..."];
w1=Integrate[Expand[Integrate[integrand,{y,0,1/2}]],
    {x,0,2/5*1}];
Print["Integrieren 2..."];
w2=Integrate[Expand[Integrate[integrand,{y,ykerbe,1/2}]],
```

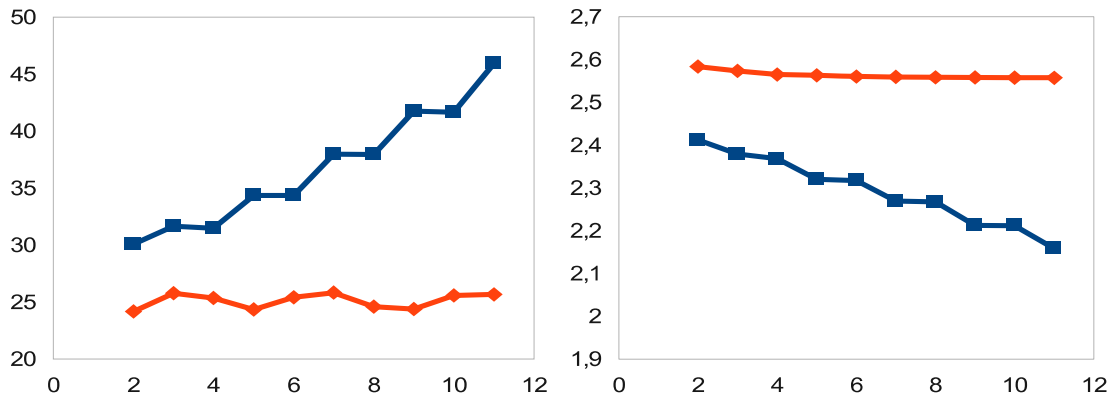
```

{x,2/5*1,3/5*1}];
Print["Integrieren 3..."];
w3=Integrate[Expand[Integrate[integrand,{y,0,1/2}]],
{x,3/5*1,1}];
w=w1+w2+w3;
Print["Gleichungssystem aufbauen und lösen..."]
For[i=1,i<n+2,i++,
  For[j=1,j<n+2,j++,
    eqb1[[i,j]]=Simplify[D[w,CX[[i,j]]]];
    eqb2[[i,j]]=Simplify[D[w,CY[[i,j]]]];
  ]];
alleqs=Flatten[Union[eqb1,eqb2]]; (* Gleichungen und
  Variablen in einer Liste zusammenfassen *)
allvars=Flatten[Union[CX,CY]];
erg=Solve[alleqs,allvars]; (* Koeffizienten ermitteln *)
Print["Ergebnisse zuweisen..."]
For[i=1,i<n+2,i++,
  For[j=1,j<n+2,j++,
    cxval[i,j]=CX[[i,j]]/.erg[[1]];
    cyval[i,j]=CY[[i,j]]/.erg[[1]];
  ]];
Print["Deformierten Körper plotten ..."]
xe=Simplify[x+ux];
ye=Simplify[y+uy];
part1=ParametricPlot[{xe,ye},{y,0,1/2},{x,0,2/5*1}];
cf[x_,y_]=txx;
part2=ParametricPlot[{xe,ye},{x,2/5*1,3/5*1},
  {y,ykerbe,1/2}];
part3=ParametricPlot[{xe,ye},{y,0,1/2},{x,3/5*1,1}];
Show[part1,part2,part3,PlotRange->{{0,1+disp},{0,1/2}}]
x=0.5;y=ykerbe;txxmax=N[txx];Clear[x];Clear[y];
Print["Txx am Kerbengrund: ",txxmax]
txxplot=DensityPlot[txx,{x,0,1},{y,0,1/2},
  AspectRatio->Automatic,ColorFunctionScaling->False,
  ColorFunction->(ColorData["Rainbow"]
  [Rescale[#, {0,txxmax}]]&),
  PlotRange->{0,txxmax}];
tyyplot=DensityPlot[tyy,{x,0,1},{y,0,1/2},
  AspectRatio->Automatic,ColorFunction->"Rainbow"];
txyplot=DensityPlot[txy,{x,0,1},{y,0,1/2},
  AspectRatio->Automatic,ColorFunction->"Rainbow"];
kerbeverdecken=RegionPlot[y<ykerbe,{x,0,1},{y,0,1/2},
  AspectRatio->Automatic];
Show[txxplot,kerbeverdecken]
Show[tyyplot,kerbeverdecken]
Show[txyplot,kerbeverdecken]
  Integrant w für Ploynomansatz der Ordnung 9 mit 200
  Koeffizienten aufbauen...
  Integrieren 1...
  Integrieren 2...
  Integrieren 3...
  Gleichungssystem aufbauen und lösen...
  Ergebnisse zuweisen...
  Deformierten Körper plotten
  Txx am Kerbengrund: 45.9449

```



Von oben links nach unten rechts: verformter Körper, Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} .



Spannung σ_{xx} am Kerbengrund in MPa (links) und elastische Energie w (rechts) über dem Polynomgrad für die gekerbte (dunkel) und die ungekerbte Platte (hell). Man sieht deutlich, dass bei der ungekerbten Platte bereits ab dem Polynomgrad 3 keine wesentliche Änderung mehr eintritt, während für die gekerbte Platte eine Konvergenz noch nicht erkennbar ist. Hier wird der Vorteil der FEM gegenüber dem Verwenden eines globalen Ansatzes deutlich: Erstere erlaubt eine an das Problem angepasste Diskretisierung, was bei der zweiten Methode nicht ohne weiteres möglich ist.

4.1.9 Wellenausbreitung in elastischen Medien

Literatur

- Achenbach, J. D.:** *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier, North Holland (1984)
Chen, P. J.: *Growth and Decay of Waves in Solids*. In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/3, Springer (1973)
Chen, P. J.: *Selected Topics in Wave Propagation*. Noordhoff Int. Pub. (1976)
Dieulesaint, E., Royer, D.: *Elastic Waves in Solids*. John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto (1980)

- Fedorov, F. I.:** *Theory of Elastic Waves in Crystals*. Plenum Press, New York (1968)
Graff, K. F.: *Wave motion in elastic solids*. Oxford University Press (1975)
Gurtin, M. E.: *The Linear Theory of Elasticity*. In: Handbuch der Physik. Hrg. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer (1972) Sect. 70, S. 243 ff.
Harker, A. H.: *Elastic Waves in Solids*. Adam Hilger, Bristol and Philadelphia (1988)
Hetnarski, R. B.; Ignaczak, J.: *The Mathematical Theory of Elasticity*. CRC Press (2004, 2011)
Pollard, H. F.: *Sound Waves in Solids*. Pion, London (1977)
Stephan, W.; Postl, R.: *Schwingungen elastischer Kontinua*. B.G.Teubner, Stuttgart (1995)
Wauer, J.: *Kontinuumsschwingungen*. Springer (2008)

Wir betrachten als Beispiel aus der Elastodynamik die Ausbreitung von ebenen periodischen Wellen in homogenen elastischen isotropen oder anisotropen Medien. Dafür soll CI für den Fall ohne Massenkräfte ($\mathbf{b} \equiv \mathbf{o}$) gelöst werden

$$\operatorname{div}(\mathbf{C} \cdot \operatorname{def} \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u}''$$

durch den folgenden speziellen Ansatz für die Verschiebungen

$$(4.1.58) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\Phi(\mathbf{x}, t)) \underline{\mathbf{u}}$$

mit

$\varphi(\Phi)$	der Wellenfunktion , einer skalaren Funktion der
$\Phi(\mathbf{x}, t) := \omega t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$	Phase , die von Ort und Zeit abhängt
$\underline{\mathbf{u}}$	dem (konstanten) Amplitudenvektor
\mathbf{n}	dem (konstanten) Wellenvektor
$n := \mathbf{n} $	der Wellenzahl
ω	der skalaren (konstanten) Kreisfrequenz
$c := \omega / n$	der skalaren (Phasen-) Geschwindigkeit

Die Wellenfunktion gibt die Form der Welle vor (z.B. als harmonisch). Ihre Amplitude kann normiert werden. Die Phase determiniert die Bewegung der Welle durch den Körper. Da sich die Ortsabhängigkeit auf den Term $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ beschränkt, geht hier nur der Abstand zu einer Ebene durch den Ursprung ein. Der Amplitudenvektor hat eine doppelte Funktion. Seine Richtung determiniert die Auslenkungsrichtung der materiellen Punkte, seine Größe die Amplitude der Welle. Genauso determiniert der Wellenvektor sowohl die Ausbreitungsrichtung der Welle wie auch über seinen Betrag die Wellenlänge. Damit handelt es sich um eine *ebene Wellenfront* mit Verschiebungen in Richtung $\underline{\mathbf{u}}$, die sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung \mathbf{n} bewegt.

Speziell wird eine **harmonische Welle** beschrieben durch die Wellenfunktion

$$(4.1.59) \quad \varphi(\Phi) = \sin(\omega t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}}{l} \right) \right]$$

mit $\mathbf{e} := \mathbf{n} / n$ dem Einsvektor in Richtung von \mathbf{n}

$$T = 2\pi / \omega \quad \text{der Periode}$$

$$l = 2\pi / n \quad \text{der Wellenlänge}$$

$$f = 1/T = \omega / 2\pi \quad \text{der Frequenz.}$$

Mit dem obigen Ansatz erhalten wir als Ortsableitung der Wellenfunktion mit der Kettenregel

$$\text{grad } \varphi(\Phi(\mathbf{x}, t)) = \varphi(\Phi)' \text{ grad } (\omega t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = -\varphi(\Phi)' \mathbf{n}$$

und

$$\text{grad } \varphi(\Phi)' = -\varphi(\Phi)'' \mathbf{n}$$

und als Zeitableitung

$$\varphi(\Phi(\mathbf{x}, t))^\bullet = \varphi(\Phi)' (\omega t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})^\bullet = \omega \varphi(\Phi)' \Rightarrow \varphi^{\bullet\bullet} = \omega^2 \varphi(\Phi)''$$

und damit die Beschleunigung

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^{\bullet\bullet} = \varphi(\Phi)'' \omega^2 \underline{\mathbf{u}}$$

und für den Verschiebungsgradienten mit (2.2.35) die einfache Dyade

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \otimes \text{grad } \varphi = -\varphi(\Phi)' \underline{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n}$$

sowie mit (2.1.92)

$$\text{div } \mathbf{u} = \text{sp } \mathbf{H} = -\varphi(\Phi)' \underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$$

und für die Rotation als axialem Vektor des antimetrischen Anteils des Gradienten gemäß (2.1.53) und (2.2.14)

$$\text{rot } \mathbf{u} = -\varphi(\Phi)' \mathbf{n} \times \underline{\mathbf{u}} = \varphi(\Phi)' \underline{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}.$$

Damit wird die linke Seite von CI unter Ausnutzung der üblichen Subsymmetrien für die Steifigkeitstetrad

$$\text{div}(\mathbf{C} \cdot\cdot \text{def } \mathbf{u}) = \text{div}(\mathbf{C} \cdot\cdot \text{grad } \mathbf{u}) = \text{div}(-\varphi(\Phi)' \mathbf{C} \cdot\cdot \underline{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})$$

$$\text{mit (2.2.41)} \quad = -(\mathbf{C} \cdot\cdot \underline{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n}) \cdot \text{grad}(\varphi(\Phi)') = \varphi'' \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \underline{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n}$$

$$= \varphi'' n^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}) \cdot \underline{\mathbf{u}} = \varphi'' n^2 \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

mit dem **akustischer Tensor** \mathbf{A} definiert als

$$(4.1.60) \quad \mathbf{A}(\mathbf{e}) := \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}.$$

Der Tensor akustische Tensor erbt folgende Eigenschaften von der Steifigkeitstetrad:

- \mathbf{C} ist symmetrisch $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ ist symmetrisch für alle \mathbf{e}

- \mathbf{C} ist streng-elliptisch $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ ist positiv-definit für alle \mathbf{e}
- \mathbf{Q} ist Symmetrie-Transformation von \mathbf{C} $\Leftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{A}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e})$

Ein Tensor vierter Stufe \mathbf{C} wird als **streng-elliptisch** bezeichnet, wenn für alle von Null verschiedene Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gilt

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} > 0.$$

Damit müssen alle Komponenten des Steifigkeitstensors von der Art C_{ijij} positiv sein, was den Diagonalelementen der VOIGT'schen Matrix entspricht. Diese Bedingung unterscheidet sich von der positiven Definitheit nur dadurch, dass sie nicht für allgemeine Tensoren gefordert wird, sondern nur für einfache Dyaden. Da diese eine Untermenge der Tensoren sind, gilt die Implikation

$$\mathbf{C} \text{ ist positiv-definit} \Rightarrow \mathbf{C} \text{ ist streng-elliptisch}$$

aber nicht die Umkehrung.

Wir erhalten aus CI (3.2.7)

$$\varphi'' n^2 \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \rho \varphi'' \omega^2 \underline{\mathbf{u}}$$

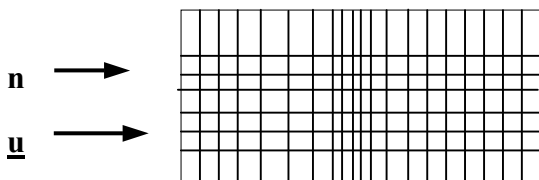
und damit die **FRESNEL – HADAMARD⁶⁹ – Bedingung zur Wellenausbreitung**

$$(4.1.61) \quad \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \rho c^2 \underline{\mathbf{u}}$$

nach der unser Verschiebungs-Ansatz die Bewegungsgleichung für alle Wellenfunktionen genau dann erfüllt, wenn $\underline{\mathbf{u}}$ Eigenvektor des akustischen Tensors \mathbf{A} zum Eigenwert ρc^2 ist. Da \mathbf{A} im hyperelastischen Fall symmetrisch ist, findet man drei orthogonale Eigenrichtungen zu reellen Eigenwerten. Die strenge Elliptizität des Elastizitätstensor ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die zugehörigen Eigenwerte positiv und damit die **Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten** reell sind.

Dabei sind folgende Spezialfälle wichtig:

1) **Longitudinal-Wellen** (Verdichtungswellen)



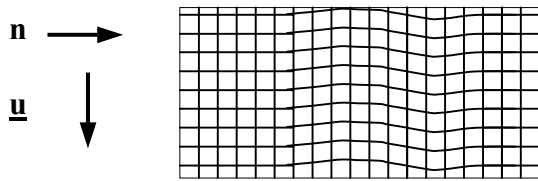
Hier ist $\underline{\mathbf{u}}$ parallel zu \mathbf{n} . Damit fallen die Bewegungsrichtung und die Wellenausbreitungsrichtung zusammen. Dann ist

$$\text{rot } \mathbf{u} = \varphi(\Phi)' \underline{\mathbf{u}} \times \mathbf{n} = \mathbf{o}.$$

⁶⁹ Augustin Jean Fresnel (1788-1827), Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Longitudinal-Wellen sind also irrotational.

2) Transversal-Wellen (Scherwellen)



Hier ist $\underline{\mathbf{u}}$ senkrecht zu \mathbf{n} . Damit erfolgt die Bewegung quer zur Ausbreitungsrichtung. Dann ist

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\varphi(\Phi)' \underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Scherwellen sind also isochor gemäß (3.1.26).

Aus dem Spektralsatz für positiv-definite symmetrische Tensoren folgt der

Satz von FEDOROV⁷⁰ (1964)

Ist \mathbf{C} symmetrisch und streng elliptisch, dann gibt es transversale und longitudinale Wellen in jedem anisotropen homogenen elastischen Medium.

Man sieht außerdem, dass eine Symmetrie-Richtung des Materials immer eine Ausbreitungsrichtung von transversalen und longitudinalen Wellen ist.

Isotrope Wellenausbreitung

Im isotropen Falle ist der akustische Tensor

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{e}) &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I}^S) \cdot \mathbf{e} \\ (4.1.62) \quad &= (\lambda + \mu) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu \mathbf{I} \\ &= (\lambda + 2\mu) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \end{aligned}$$

weil für einen beliebigen Vektor \mathbf{v} gilt

$$\begin{aligned} &[\mathbf{e} \cdot 2 \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{e}] \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{e} \cdot 2 \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{v} \otimes \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{e} \otimes \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Die Wellengeschwindigkeiten für die Verdichtungswelle und Scherwelle sind

⁷⁰ Fedor Ivanovich Fedorov (1911-1994)

$$(4.1.63) \quad c_p := \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad c_s := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Diese beiden Eigenwerte sind genau dann positiv, wenn \mathbf{C} streng elliptisch ist. Die beiden Wellengeschwindigkeiten hängen also nur vom Material ab, nicht aber von der Form der Welle, der Wellenlänge oder der Amplitude.

Für das Verhältnis der beiden Wellenausbreitungs-Geschwindigkeiten von Scher- und Verdichtungswelle erhält man

$$\frac{c_s}{c_p} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}}.$$

Ist beispielsweise $\nu = 0,3$, so ist die Scherwelle etwa halb so schnell wie die Druckwelle. Bei Stahl liegt letztere bei 5 km/s .

4.2 Thermomechanik

Literatur

- Bermudez de Castro, A.:** *Continuum Thermomechanics*. Birkhäuser, Basel (2005)
- Boley, B. A.; Weiner, J. H.:** *Theory of Thermal Stresses*. Wiley, New York (1960)
- Carlson, D. E.:** *Linear Thermoelasticity*. In: Handbuch der Physik. Edt. S. Flügge. Bd. VIa/2, Springer-Verlag (1972)
- Ieşan, D.:** *Thermoelastic Models of Continua*. Kluwer Adac. Pub. (2004)
- Melan, E.; Parkus, H.:** *Wärmespannungen*. Springer-Verlag, Wien (1953)
- Müller, I.:** *Grundzüge der Thermodynamik*. Springer-Verlag, Berlin (1999)
- Nowacki, W.:** *Thermoelasticity*. Addison-Wesley (1962)
- Nowacki, W.:** *Dynamic Problems of Thermoelasticity*. Noordhoff Pub., Leyden (1975)
- Parkus, H.:** *Thermoelasticity*. Springer-Verlag, Wien (1976)
- Sneddon, I. N.:** *The Linear Theory of Thermoelasticity*. CISM Course 119, Springer-Verlag (1974)

4.2.1 Thermodynamische Bilanzen

Um auch nicht-mechanische Energie-Umwandlungen bilanzieren zu können, erweitern wir den Satz der mechanischen Feldvariablen um die thermodynamischen:

$\varepsilon(\mathbf{x}, t)$	die spezifische innere Energie (ein Skalarfeld)
$r(\mathbf{x}, t)$	die spezifische Wärmequelle (ein Skalarfeld)
$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$	der Wärmefluss pro Zeit- und Flächeneinheit (ein Vektorfeld)
$\theta(\mathbf{x}, t)$	die absolute Temperatur (ein positives Skalarfeld)
$\eta(\mathbf{x}, t)$	die spezifische Entropie (ein Skalarfeld) .

Hierbei heißt "spezifisch" immer "pro Masseneinheit".

Ähnlich dem Spannungsprinzip von CAUCHY wird angenommen, dass die **Wärmezufuhr** oder Wärmeleistung Q eines Körpers auf zweierlei Weise geschieht:

- durch Wärmequellen ($r > 0$) oder -senken ($r < 0$) im Innern infolge von Phasenumwandlungen, chemischen Prozessen, innerer Strahlungsabsorption, Zufuhr OHMscher Wärme, etc.,
- durch Wärmeflüsse durch die Oberfläche, weil der Körper im thermischen Kontakt mit seiner Umwelt steht. Man kann mit einer zum Tetraeder-Argument der Spannungsanalyse, das zum Satz von CAUCHY führte, analogen Argumentation zeigen, dass die Wärmeflüsse durch die Oberfläche eine lineare Funktion der Flächennormale sind. Damit existiert ein Vektorfeld $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, das in jedem Punkt den **Wärmeflussvektor** angibt. Ist \mathbf{n} die äußere Flächennormale, so ist also $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ ein Maß für die momentane Wärmezufuhr durch die Körperoberfläche (Satz von FOURIER).

Insgesamt ergibt sich die momentane (globale) Wärmezufuhr eines Körpers pro Zeiteinheit als

$$(4.2.1) \quad Q = \int_{\mathcal{V}} r \, dm - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA .$$

Das Oberflächenintegral kann mit dem Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI in ein Volumenintegral umgewandelt werden, so dass auch gilt

$$(4.2.2) \quad Q = \int_{\mathcal{V}} (\rho r - \operatorname{div} \mathbf{q}) \, dV .$$

Die thermodynamische Energiebilanz (**1. Hauptsatz der Thermodynamik**⁷¹) besagt, dass die dem Körper von außen zugeführte Wärme Q und mechanische Leistung L_a dessen kinetische Energie K oder dessen innere Energie E_i verändern

$(4.2.3) \quad Q + L_a = K^\bullet + E_i^\bullet \qquad (1.HS)$

mit der (globalen) inneren Energie

$$E_i := \int_{\mathcal{V}} \varepsilon \, dm .$$

Dabei kann die innere Energie als Wärme gespeichert werden, was zu einer Erhöhung der Temperatur des Körpers führt, wie auch in chemischen Bindungen, in Phasenumwandlungen oder anderen Änderungen der Mikrostruktur gebunden oder daraus freigesetzt werden. Mit der mechanischen Leistungsbilanz (3.2.14)

$$(LB) \quad L_a = L_i + K^\bullet ,$$

die unabhängig vom 1. HS gilt, kann man die kinetische Energie im 1. HS eliminieren

$$(4.2.4) \quad Q + L_i = E_i^\bullet$$

oder lokal

$(4.2.5) \quad \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet = \rho \varepsilon^\bullet \qquad (1.HS)$

In Analogie zur Wärmezufuhr definieren wir den **Entropiefluss** (-vektor) pro Zeit- und Flächeneinheit als $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$ und die spezifische **Entropiequelle** als $\frac{r}{\theta}$. Nach dem **2. Hauptsatz der Thermodynamik** ist die Entropie-Zufuhr eines Körpers niemals größer als seine Entropie-Änderung

⁷¹ Julius Robert Mayer (1814-1878), James Prescott Joule (1818-1889), Herman Ludwig Ferdinand v. Helmholtz (1821-1894)

$$\begin{aligned}
 (4.2.6) \quad \left(\int_{\mathcal{V}} \eta \, dm \right)^{\bullet} &\geq \int_{\mathcal{V}} \frac{r}{\theta} \, dm - \int_{\mathcal{A}} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \, dA \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{r}{\theta} \rho - \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) dV \quad (2.HS)
 \end{aligned}$$

oder lokal

$$(4.2.7) \quad \eta^{\bullet} \rho \geq \frac{r \rho}{\theta} - \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta}.$$

Zusammen mit dem 1. HS und der Quotientenregel

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} = \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta}{\theta^2}$$

sowie der Einführung der spezifischen **freien (HELMHOLTZ) Energie**

$$(4.2.8) \quad \psi := \varepsilon - \theta \eta$$

erhält man als lokale Form des 2.HS die **CLAUSIUS-DUHEM⁷²-Ungleichung**

$$(4.2.9) \quad \psi^{\bullet} + \eta \theta^{\bullet} - \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{\bullet} + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta} \leq 0 \quad (CDU)$$

Darin ist $\mathbf{g} := \operatorname{grad} \theta$ der **Temperaturgradient** nach (2.2.5).

Sie besagt, dass die spezifische **Dissipation**, die sich aus der mechanische Dissipation

$$(4.2.10) \quad \delta_m := \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{\bullet} - \psi^{\bullet} - \eta \theta^{\bullet} = \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{\bullet} - \varepsilon^{\bullet} + \theta \eta^{\bullet}$$

$$\text{mit (4.2.5)} \quad = \theta \eta^{\bullet} - r + \frac{I}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q}$$

und der thermischen Dissipation

$$\delta_{th} := - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta}$$

zusammensetzt, die **Dissipations-Ungleichung**

$$(4.2.11) \quad \delta_m + \delta_{th} \geq 0$$

erfüllen muss. Im isothermen Fall ($\theta = \text{konst.}$) reduziert sich diese auf die **CLAUSIUS – PLANCK⁷³-Ungleichung**

⁷² Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822-1888), Pierre Maurice Marie Duhem (1861-1916)

⁷³ Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

$$(4.2.12) \quad \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \geq \dot{\psi}.$$

Manchmal wird dann noch die spezifische **Enthalpie**

$$(4.2.13) \quad h := \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - \varepsilon$$

eingeführt sowie die spezifische **freie Enthalpie** oder freie GIBBS⁷⁴-Energie

$$(4.2.14) \quad \varphi := \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} - \psi,$$

sodass

$$(4.2.15) \quad h + \varepsilon = \varphi + \psi$$

gilt.

Alle bisherigen Ergebnisse gelten allgemein für alle Materialien (bei kleinen Verformungen). Als nächstes spezialisieren wir uns auf

4.2.2 Thermoelastizität

Um das individuelle thermodynamische Verhalten verschiedener Materialien zu beschreiben, benötigen wir neben den allgemeinen Bilanz(un)gleichungen individuelle Materialgleichungen. Dabei spezialisieren wir uns gleich auf elastisches Verhalten, also auf Materialien ohne Gedächtnis.

Als unabhängige Variablen wählen wir in jedem Punkt den lokalen **thermo-kinematischen Zustand**, bestehend aus

- der Deformation $\mathbf{E} = \text{def } \mathbf{u}$
- der Temperatur θ
- dem Temperaturgradienten $\mathbf{g} = \text{grad } \theta$.

Die spezifische Massenkraft \mathbf{b} und die Wärmequelle r werden als gegeben angenommen. Als abhängige Variablen wählen wir den lokalen **kaloro-dynamischen Zustand**, bestehend aus

- dem Spannungstensor \mathbf{T}
- dem Wärmeflussvektor \mathbf{q}
- der spezifische freien Energie ψ
- der spezifische Entropie η .

Prinzip des Determinismus für einfache thermo-elastische Materialien

Der thermo-kinematische Zustand in einem materiellen Punkt bestimmt seinen kaloro-dynamischen Zustand.

⁷⁴ Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

Demnach existieren vier Materialfunktionen

$$\mathbf{T} = T(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g})$$

$$\mathbf{q} = q(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g})$$

$$\psi = \psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g})$$

$$\eta = \eta(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g}) .$$

Hier wird zwischen Funktion (kursiv) und Wert (nicht kursiv) durch die Schreibweise unterschieden. Diese Variablenauswahl erfüllt bereits in sinngemäßer Weise das Prinzip der lokalen Wirkung.

Wir wollen als Nächstes untersuchen, welche Folgerungen sich aus der Dissipationsungleichung für die thermo-elastischen Materialfunktionen ziehen lassen. Dafür gehen wir davon aus, dass der thermo-kinematische Prozess $\{\mathbf{E}(t), \theta(t), \mathbf{g}(t)\}$ in einem Punkt stetig und stückweise stetig nach der Zeit differenzierbar ist, ansonsten aber beliebig vorgegeben werden kann. Mit

$$\psi(\mathbf{E}, \theta, \mathbf{g})^\bullet = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}^\bullet + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \theta^\bullet + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^\bullet$$

erhalten wir aus der *CDU*

$$(4.2.16) \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{E}^\bullet + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \theta^\bullet + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \right) \cdot \mathbf{g}^\bullet + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta} \leq 0 .$$

Da \mathbf{E}^\bullet , θ^\bullet , \mathbf{g}^\bullet beliebig und die in Klammern stehenden Ausdrücke hiervon unabhängig sind, müssen Letztere einzeln gleich Null sein.

Satz: Die *CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung* ist für thermo-elastische Materialien für alle thermo-kinematischen Prozesse genau dann erfüllt, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

- für die Spannungen bildet die freie Energie ein Potenzial

$$(4.2.17) \quad \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$$

- für die Entropie bildet die freie Energie ein Potenzial

$$(4.2.18) \quad \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

- die freie Energie, die Spannungen und die Entropie hängen nicht vom Temperaturgradienten ab
- der Wärmeflussvektor und der Temperaturgradient schließen keinen spitzen Winkel ein

$$(4.2.19) \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \leq 0 \quad (\text{Wärmeleitungs-Ungleichung})$$

Die mechanische Dissipation (4.2.10) ist also in der Elastizität Null: $\delta_m = 0$.

Durch nochmaliges Differenzieren der freien Energie erhält man aus den beiden Potenzialbeziehungen die MAXWELL-Beziehung

$$(4.2.20) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mathbf{T}}{\rho} \right) = - \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}} .$$

Setzt man die Potenzialbeziehungen in die Definition der freien Energie ein, so erhält man die GIBBS-Gleichung

$$(4.2.21) \quad \psi^\bullet = \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet - \theta^\bullet \eta$$

oder alternativ mit (4.2.8)

$$(4.2.22) \quad \varepsilon^\bullet = \frac{I}{\rho} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet + \theta \eta^\bullet ,$$

womit aus dem 1. HS (4.2.5) folgt

$$(4.2.23) \quad \rho \theta \eta^\bullet = \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} .$$

Auch die innere Energie ist nunmehr darstellbar als Funktion der Deformation und der Temperatur

$$(4.2.24) \quad \varepsilon = \psi(\mathbf{E}, \theta) + \theta \eta(\mathbf{E}, \theta) =: \varepsilon(\mathbf{E}, \theta) .$$

Ihre Ableitung nach der Temperatur wird **spezifische Wärmekapazität** genannt

$$(4.2.25) \quad c(\mathbf{E}, \theta) := \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta(\mathbf{E}, \theta) + \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = - \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} .$$

Alternative: Nimmt man an, dass $\eta(\mathbf{E}, \theta)$ für alle \mathbf{E} in θ invertierbar ist, so kann $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}$ nicht das Vorzeichen wechseln. Damit gilt

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad c(\mathbf{E}, \theta) > 0$$

in allen thermo-kinematischen Zuständen. Unter dieser Annahme könnte man die Rollen von Temperatur und Entropie als unabhängige bzw. abhängige Variablen vertauschen (LEGENDRE⁷⁵-Transformation) und erhalte als alternativen Satz thermo-elastischer Materialgleichungen

$$\mathbf{T} = \underline{T}(\mathbf{E}, \eta)$$

$$\mathbf{q} = \underline{q}(\mathbf{E}, \eta, \operatorname{grad} \eta)$$

$$\varepsilon = \underline{\varepsilon}(\mathbf{E}, \eta)$$

$$\theta = \underline{\theta}(\mathbf{E}, \eta) .$$

⁷⁵ Adrien Marie Legendre (1752-1833)

Dabei sind

$$(4.2.26) \quad \psi(\mathbf{E}, \theta) = \psi(\mathbf{E}, \underline{\theta}(\mathbf{E}, \eta)) =: \underline{\psi}(\mathbf{E}, \eta)$$

$$(4.2.27) \quad \underline{\varepsilon}(\mathbf{E}, \eta) := \underline{\psi}(\mathbf{E}, \eta) + \eta \underline{\theta}(\mathbf{E}, \eta)$$

und somit

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \mathbf{E}} + \eta \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \eta} + \underline{\theta}(\mathbf{E}, \eta) + \eta \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \eta}.$$

Daraus folgen die Potenzialbeziehungen für die Spannungen

$$(4.2.28) \quad \frac{\mathbf{T}}{\rho} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \mathbf{E}} + \eta \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \mathbf{E}}$$

sowie nach (4.2.26)

$$\frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\eta \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \eta} + \theta - \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \eta}$$

und daraus diejenige für die Temperatur

$$(4.2.29) \quad \underline{\theta}(\mathbf{E}, \eta) = \frac{\partial \underline{\varepsilon}}{\partial \eta}.$$

4.2.3 Lineare Thermoelastizität

Zur linearen Thermoelastizität gelangen wir mit der Annahme, dass die folgenden Größen klein sind:

$$|\mathbf{u}|, |\mathbf{b}|, |\theta - \theta_0|, |r|$$

sowie alle ihre benötigten Orts- und Zeitableitungen, wobei θ_0 eine beliebige, fest gewählte Bezugstemperatur ist. Dies bedeutet, dass wir gegenüber linearen Termen in diesen Größen diejenigen von höherer Ordnung vernachlässigen. Die **Differenz-Temperatur**

$$(4.2.30) \quad \Delta\theta := \theta - \theta_0$$

ist demnach betragsmäßig klein, kann aber beide Vorzeichen annehmen. Nach einer Reihenentwicklung und Abbruch nach dem linearen Term sieht man

$$\frac{I}{\theta} = \frac{I}{\theta_0 + \Delta\theta} = \frac{I}{\theta_0} \frac{1}{1 + \Delta\theta/\theta_0} \approx \frac{I}{\theta_0} \left(1 - \frac{\Delta\theta}{\theta_0}\right).$$

Man kann also im Produkt mit einer kleinen Größe $\frac{I}{\theta}$ durch $\frac{I}{\theta_0}$ ersetzen.

Damit ist die Dichte ρ nahe der Bezugsdichte ρ_0 . Man kann also ebenso im Produkt mit einer kleinen Größe ρ_0 durch ρ und $\frac{I}{\rho}$ durch $\frac{I}{\rho_0}$ ersetzen.

Wir nehmen zudem an, dass die Bezugsplatzierung bei Bezugstemperatur spannungsfrei ist

$$T(\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}, \theta \equiv \theta_0) = \mathbf{0},$$

was zumindest lokal bei Festkörpern immer möglich sein sollte.

Wir linearisieren nun die Materialgleichungen an der Stelle $\{\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}, \theta \equiv \theta_0, \mathbf{g} \equiv \mathbf{o}\}$. Für die Funktion für die Spannungen ergibt sich die DUHAMEL⁷⁶-NEUMANN-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T(\mathbf{E}, \Delta\theta) \approx \frac{\partial T}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \Delta\theta \approx \frac{\partial(T\rho_0/\rho)}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial(T\rho_0/\rho)}{\partial \theta} \Delta\theta \\ (4.2.31) \quad &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \Delta\theta \mathbf{M} \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{C} := \rho_0 \frac{\partial(T/\rho)}{\partial \mathbf{E}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (\text{Elastizitätstetrad})$$

und mit der MAXWELL-Beziehung (4.2.20)

$$\mathbf{M} := \rho_0 \frac{\partial(T/\rho)}{\partial \theta} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{E} \partial \theta} = -\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{Spannungs-Temperatur-Tensor})$$

Hierbei sind alle Ableitungen an der Stelle $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}, \rho \equiv \rho_0, \theta \equiv \theta_0$ auszuwerten. Beide Tensoren werden in der linearen Theorie als konstant angesehen. Dabei ist Ersterer als Folge der *CDU* symmetrisch, Letzterer als Folge von *C2* (3.2.8).

Untersuchen wir nun die Abhängigkeit des Wärmeflusses vom Temperaturgradienten an derselben Stelle. Dazu entwickeln wir $q(\mathbf{E}, \theta, \cdot)$ an der Stelle $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}, \rho_0 \equiv \rho, \theta \equiv \theta_0$ in eine Reihe um $\mathbf{g} \equiv \mathbf{o}$, die wir nach dem linearen Term abbrechen

$$q(\mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{g}) \approx \mathbf{q}_0 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{g}$$

mit $\mathbf{q}_0 := q(\mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{o})$ und dem konstanten **Wärmeleitensor**

$$\mathbf{K} := - \left. \frac{\partial q}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g} \equiv \mathbf{o}},$$

⁷⁶ Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872)

von dem meistens angenommen wird, dass er symmetrisch ist (ONSAGER (1931) – CASIMIRsche (1945) Reziprozitätsbeziehungen) . Multiplizieren wir die Reihe mit \mathbf{g} , so ergibt sich aus der Wärmeleitungsungleichung (4.2.19)

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \approx \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} \leq 0 ,$$

was für alle \mathbf{g} als Folge des 2.HS kleiner oder gleich Null sein muss. Daraus folgen notwendig und hinreichend die beiden folgenden Bedingungen

- $\mathbf{q}_0 = q(\mathbf{0}, \theta_0, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$

Gibt es keinen Temperaturgradienten, so auch keinen Wärmefluss (Nichtexistenz des piezokalorischen Effektes).

- $\mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} \geq 0$

Der Wärmeleittensor ist positiv-semidefinit.

In der linearen Thermoelastizität gilt also das **FOURIERsche Wärmeleitungsgesetz** in der Form

(4.2.32)

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}$$

(FOURIER)

mit einem konstanten positiv-semidefiniten Wärmeleittensor \mathbf{K} , der als symmetrisch angenommen wird.

Außerdem folgt aus dem 1.HS (4.2.23) mit (4.2.25) und (4.2.31)

$$\begin{aligned} r - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} &\approx r - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \mathbf{q} = \theta \eta^\bullet = \theta \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \theta^\bullet + \theta \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet \\ (4.2.33) \quad &= c \Delta \theta^\bullet - \frac{\theta}{\rho_0} \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet \approx c \Delta \theta^\bullet - \frac{\theta_0}{\rho_0} \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet \end{aligned}$$

oder

$$(1.HS) \quad c \Delta \theta^\bullet = \frac{1}{\rho_0} (\theta \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet - \operatorname{div} \mathbf{q}) + r .$$

Hieraus kann man sich die Temperaturänderung infolge Deformationsänderung und zugeführter Wärme aufintegrieren.

Wir erhalten die **Feldgleichungen der linearen Thermoelastizität**

(VVB)

$$\mathbf{E} = \operatorname{def} \mathbf{u}$$

(2.2.5)

$$\mathbf{g} = \operatorname{grad} \Delta \theta$$

(CI)

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho_0 (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{o}$$

(1.HS)

$$\rho_0 r - \operatorname{div} \mathbf{q} + \theta_0 \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^\bullet = \rho_0 c \Delta \theta^\bullet$$

$$(HOOKE) \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E} + \Delta\theta \mathbf{M}$$

$$(FOURIER) \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}$$

mit den Materialkonstanten \mathbf{C} , \mathbf{M} , \mathbf{K} und c , oder durch Einsetzen die beiden Bilanzgleichungen

$$(CI) \quad \text{div}(\mathbf{C} \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{u}) + \text{div}(\Delta\theta \mathbf{M}) + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \mathbf{u}^{\bullet\bullet}$$

$$(I.HS) \quad \rho_0 r + \text{div}(\mathbf{K} \cdot \text{grad } \Delta\theta) + \theta_0 \mathbf{M} \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{u}^{\bullet} = \rho_0 c \Delta\theta^{\bullet}$$

für den Impuls und die Energie, die linear in \mathbf{u} und $\Delta\theta$ sind. Die mechanischen und thermodynamischen Gleichungen sind demnach gekoppelt. Multiplizieren wir den *I.HS* mit $\Delta\theta$, so erhalten wir mit der Produktregel

$$\text{div}(\Delta\theta \mathbf{K} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} + \Delta\theta \text{div}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{g})$$

die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\begin{aligned} \rho_0 \Delta\theta r + \Delta\theta \text{div}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{g}) + \theta_0 \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} &= \rho_0 c \Delta\theta \Delta\theta^{\bullet} \\ (4.2.34) \quad &= \rho_0 \Delta\theta r - \text{div}(\Delta\theta \mathbf{q}) - \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} + \theta_0 \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} = \frac{1}{2} \rho_0 c (\Delta\theta^2)^{\bullet} \end{aligned}$$

Ist \mathbf{C} auf dem Raum der symmetrischen Tensoren invertierbar, so folgt die inverse Form des HOOKEschen Gesetzes

$$(4.2.35) \quad \mathbf{E} = \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{T} + \Delta\theta \mathbf{A}$$

mit $\mathbf{S} := \mathbf{C}^{-I}$ (Nachgiebigkeitstensor)

$$\mathbf{A} := -\mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{M} \quad (\text{Wärmedehnungstensor})$$

wobei \mathbf{S} und \mathbf{A} symmetrisch sind.

Es ergibt sich durch Integration der Potenzialbeziehung die freie Energie bis auf eine additive Konstante (die wir Null gesetzt haben)

$$(4.2.36) \quad \psi(\mathbf{E}, \Delta\theta) = \frac{I}{2\rho_0} \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E} + \frac{I}{\rho_0} \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{2\theta_0} \Delta\theta^2$$

und die Entropie ebenfalls bis auf eine additive Konstante

$$(4.2.37) \quad \eta(\mathbf{E}, \Delta\theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{I}{\rho_0} \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E} + \frac{c}{\theta_0} \Delta\theta.$$

Aus *HOOKE* (4.2.31) folgt

$$\Delta\theta \mathbf{M} \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} - (\mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E}^{\bullet} - (\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{E})^{\bullet}$$

und mit der mechanischen Leistungsbilanz *LB* (3.2.14)

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{\bullet} dV + \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}^{\bullet} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} dm \right)^{\bullet}$$

und der Wärmeleitungsgleichung (4.2.34)

$$\Delta\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}^{\bullet} = \frac{I}{\theta_0} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0 c (\Delta\theta^2)^{\bullet} + \operatorname{div}(\Delta\theta \mathbf{q}) - \Delta\theta \rho_0 r + \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} \right\}$$

nach Division durch θ_0 und Integration über den Körper erhalten wir die **thermo-elastische Energiebilanz** in der Form

$$\begin{aligned} \Pi^{\bullet} &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} dm \\ (4.2.38) \quad &+ \frac{I}{\theta_0} \left\{ - \int_{\mathcal{A}} \Delta\theta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\mathcal{V}} r \Delta\theta dm - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} dV \right\} \end{aligned}$$

mit der totalen Energie

$$(4.2.39) \quad \Pi := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \left(\mathbf{u}^{\bullet} \cdot \mathbf{u}^{\bullet} + \frac{I}{\rho_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \frac{I}{\theta_0} c \Delta\theta^2 \right) dm .$$

4.2.4 Isotrope lineare Thermoelastizität

Weitere Konkretisierungen der beiden Stoffgleichungen lassen sich durch materielle Symmetrie-Eigenschaften erreichen. Eine orthogonale Symmetrie-Transformation leistet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T & \mathbf{T}^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \\ (4.2.40) \quad \mathbf{g}^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{q}^* &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q} \\ \Delta\theta^* &= \Delta\theta & \psi^* &= \psi \end{aligned}$$

(s. 4.1.6). Wird dies auf die beiden Stoffgleichungen angewendet, so führt dies auf folgende

Definition: Ein orthogonaler Tensor \mathbf{Q} heißt **Symmetrie-Transformation** des linearen thermo-elastischen Materials, falls

$$(4.2.41) \quad \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \Delta\theta \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T) + \Delta\theta \mathbf{M}$$

und

$$(4.2.42) \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{K}$$

für alle \mathbf{E} , $\Delta\theta$ und \mathbf{g} gelten. Sie bilden die Symmetrie-Gruppe \mathcal{S} des Materials.

Für den besonders wichtigen **isotropen** Fall besteht \mathcal{S} aus der gesamten orthogonalen Gruppe. Für ihn gilt der folgende Darstellungssatz.

Satz. Das lineare thermo-elastische Material ist genau dann isotrop, falls gelten

$$(4.2.43) \quad \mathbf{T} = \lambda \operatorname{sp}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} + \zeta \Delta\theta \mathbf{I} \quad (\text{HOOKE})$$

und

$$(4.2.44) \quad \mathbf{q} = -\kappa \mathbf{g} \quad (\text{FOURIER})$$

mit den LAMÉschen Konstanten λ und μ , dem Spannungs-Temperatur-Koeffizienten ζ und dem Wärmeleitungs-Koeffizienten κ .

Beweis: Setzt man im HOOKESchen Gesetz $\Delta\theta \equiv 0$, so erhält man das mechanische Gesetz, für das wir die isotrope Darstellung (4.1.17) bereits nachgewiesen haben. Setzen wir stattdessen $\mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$, so folgt aus der Symmetrie-Bedingung, dass \mathbf{M} ein isotroper Tensor ist

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{M}.$$

\mathbf{M} besitzt mindestens einen reellen Eigenwert ζ . Sei $\{\mathbf{e}_i\}$ ONB und \mathbf{e}_1 der zu ζ gehörige Eigenvektor. Dann ist

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3$$

orthogonal und

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_1 = \zeta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_1 = \zeta \mathbf{e}_2.$$

$\{\zeta, \mathbf{e}_2\}$ löst also auch das Eigenwert-Problem von \mathbf{M} . Genauso löst es dann auch $\{\zeta, \mathbf{e}_3\}$, womit alle Eigenwerte gleich und alle Vektoren Eigenvektoren sind. Das gilt aber nur für den Kugeltensor

$$\mathbf{M} = \zeta \mathbf{I}.$$

Genauso wird gezeigt, dass der Wärmeleitensor ein Kugeltensor ist

$$\mathbf{K} = \kappa \mathbf{I}$$

mit einem reellen Wärmeleitkoeffizienten κ ; *q.e.d.*

κ ist als Folge des 2.HS nicht-negativ.

Für $\mu \neq 0$ und $3\lambda + 2\mu \neq 0$ existiert die inverse Form des HOOKESchen Gesetzes

$$(4.2.45) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \operatorname{sp}(\mathbf{T}) \mathbf{I} \right] + \alpha \Delta\theta \mathbf{I}$$

mit dem **thermischen Ausdehnungskoeffizienten**

$$\alpha := -\frac{\zeta}{3\lambda + 2\mu}.$$

Die freie Energie ist im isotropen Falle nach (4.2.36) und (4.1.34)

$$(4.2.46) \quad \psi(\mathbf{E}, \Delta\theta) = \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\lambda}{2} sp^2(\mathbf{E}) + \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \zeta \Delta\theta sp(\mathbf{E}) \right] - \frac{c}{2\theta_0} \Delta\theta^2$$

und die Entropie nach (4.2.37)

$$(4.2.47) \quad \eta(\mathbf{E}, \Delta\theta) = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = - \frac{1}{\rho_0} \zeta sp(\mathbf{E}) + \frac{c}{\theta_0} \Delta\theta .$$

Mit den isotropen Darstellungen eliminieren wir in *CI* und dem *I.HS* die Spannungen und Wärmeflüsse und erhalten in Erweiterung der *NV* (4.1.37) für homogene lineare isotrope thermo-elastische Materialien die

Temperatur-Verschiebungs-Beziehungen

$$(4.2.48) \quad \begin{aligned} \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \zeta \operatorname{grad} \Delta\theta + \rho_0 (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0} \\ \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \Delta\theta + \theta_0 \zeta \operatorname{div} \mathbf{u}^\bullet + \rho_0 r &= \rho_0 c \Delta\theta^\bullet \end{aligned}$$

Dies ist ein Satz von vier gekoppelten linearen partiellen Dgls. in \mathbf{u} und $\Delta\theta$. Das thermische Problem ist nur für $\zeta \equiv 0$ ($\alpha \equiv 0$) vom mechanischen grundsätzlich entkoppelt.

4.2.5 Das gemischte Rand- und Anfangswertproblem der linearen Thermoelastizität

Zur Formulierung des Rand- und Anfangswertproblems der linearen Thermoelastizität werden vorgeschrieben:

- die Massenkraftdichte \mathbf{b} und die Wärmequelle r im Innern des Körpergebietes
- die Anfangswerte der folgenden Felder

$$\text{Verschiebung} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t \equiv 0)$$

$$\text{Geschwindigkeit} \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t \equiv 0)$$

$$\text{Temperaturdifferenz} \quad \Delta\theta(\mathbf{x}, t \equiv 0)$$

im Innern des Körpergebietes \mathcal{V}

und zu allen Zeiten die Randbedingungen für

- die Verschiebungen \mathbf{u}_v eines Teils \mathcal{A}_g der Oberfläche \mathcal{A}
- die Spannungen \mathbf{t}_v des anderen Teiles \mathcal{A}_d der Oberfläche \mathcal{A}
- die Temperaturdifferenz $\Delta\theta_v$ eines Teils \mathcal{A}_θ der Oberfläche \mathcal{A}
- der Wärmefluss $\mathbf{q}_v \cdot \mathbf{n}$ über den anderen Teil \mathcal{A}_q der Oberfläche \mathcal{A}

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_d \cup \mathcal{A}_g & \mathcal{A}_d \cap \mathcal{A}_g &= \emptyset \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\theta \cup \mathcal{A}_q & \mathcal{A}_\theta \cap \mathcal{A}_q &= \emptyset . \end{aligned}$$

Die Lösung $\{\mathbf{u}, \Delta\theta\}$ dieses Problems muss neben den Rand- und Anfangsbedingungen zu allen Zeiten die Bilanzgleichung für Impuls und Energie erfüllen. Im homogenen und isotropen Fall werden hieraus die Temperatur-Verschiebungs-Beziehungen (4.2.48). Es lässt sich folgendes zeigen.

Existenz- und Eindeigkeitsatz. Ist \mathbf{C} positiv-semidefinit und $c > 0$, dann hat das gemischte Rand- und Anfangswertproblem genau eine Lösung.

Beweis: siehe C. M. Dafermos: *On the existence and asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal. **29**, 241-71, 1986.

Im **thermostatischen Fall** sind

$$\Delta\theta^{\bullet} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{\bullet} \equiv \mathbf{0}$$

für den ganzen Körper zu allen Zeiten. Die Feldgleichungen reduzieren sich auf die thermostatischen Gleichgewichtsbedingungen

$$(4.2.49) \quad \operatorname{div}(\mathbf{C} \cdot \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} + \Delta\theta \mathbf{M}) + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (CI)$$

$$(4.2.50) \quad \operatorname{div}(\mathbf{K} \cdot \operatorname{grad} \Delta\theta) + \rho_0 r = 0. \quad (I.HS)$$

Die erste Gleichung kann formal in die elastische Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{T}} + \rho_0 \underline{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$$

überführt werden durch die Einführung einer *reduzierten Spannung*

$$\underline{\mathbf{T}} := \mathbf{C} \cdot \cdot \operatorname{def} \mathbf{u} = \mathbf{T} - \Delta\theta \mathbf{M}$$

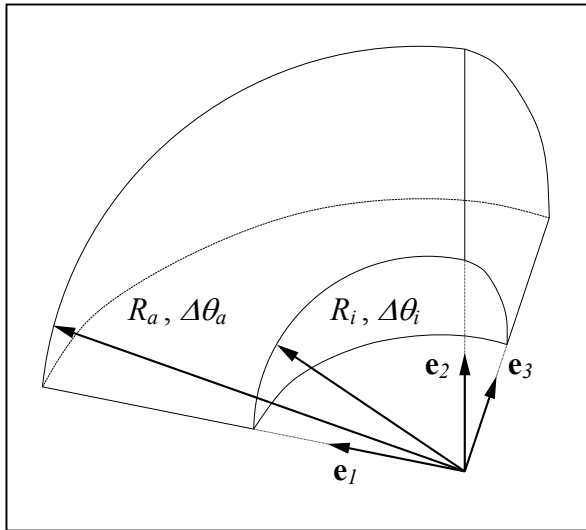
und einer *reduzierten Massenkraft*

$$\underline{\mathbf{h}} := \mathbf{b} + \operatorname{div}(\Delta\theta \mathbf{M}) / \rho_0.$$

Mit dieser Analogie können wir die Ergebnisse der Elastostatik auch auf die Thermoelastostatik übertragen.

Beispiel 20. Thermo-elastisches Randwertproblem

Eine Hohlkugel sei durch einen statischen radialen Temperaturgradienten thermoelastisch beansprucht. Das thermische und elastische Materialverhalten sei isotrop. Bestimmen Sie bei gegebener Innen- und Außentemperaturdifferenz unter der Annahme isotroper FOURIERScher Wärmeleitung das Temperaturfeld. Ermitteln Sie das dadurch induzierte Spannungsfeld, wobei Innen- und Außenrand als spannungsfrei angenommen werden.



Lösung:

Wir verwenden bei diesem Beispiel kartesische Koordinaten. Die Basisvektoren hängen nicht von den Koordinaten ab, was die Rechnung vereinfacht. Dafür spiegelt sich die Richtungsunabhängigkeit nicht direkt in einer Unabhängigkeit von Koordinaten wieder. Dieser Nachteil wird dadurch ausgeglichen, dass wir alle Felder als Funktionen von R ansetzen können mit

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Mit FOURIERScher Wärmeleitung ohne Quellen und Senken und im statischen Fall ($\mathbf{u}^\bullet = \mathbf{0}$) wird aus (4.2.48)

$$\Delta \theta^\bullet = a \operatorname{div} \operatorname{grad} \Delta \theta$$

mit der Temperaturleitfähigkeit $a := \kappa / (\rho_0 c)$, dem Quotienten aus Wärmeleitfähigkeit κ und volumenbezogener Wärmekapazität $\rho_0 c$. Im stationären Fall ist $\Delta \theta^\bullet = 0$, also ist

$$(B20.1) \quad 0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Delta \theta = \Delta \theta_{,ii}$$

Im Folgenden wird die Abhängigkeit von R nicht mitgeschrieben, und ' steht für die Ableitung nach R . Beim Ableiten nach x_i wird immer mit der Kettenregel über R abgeleitet

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{x_i}{R}.$$

Damit kann B20.1 ausgewertet werden

$$0 = \Delta \theta_{,ii} = (\Delta \theta' \frac{x_i}{R})_{,i} = \Delta \theta'' \frac{x_i x_i}{R^2} + \Delta \theta' \frac{\delta_{ii} R - x_i \frac{x_i}{R}}{R^2} = \Delta \theta'' + 2 \Delta \theta' / R.$$

Dabei ist aufgrund der Summenkonvention $\delta_{ii} = 3$ und $x_i x_i = R^2$. Durch Substitution mit $\Delta \theta' = P(R)$ erhält man eine gewöhnliche Dgl. erster Ordnung

$$0 = P' + 2P/R.$$

Sie wird durch $P(R) = -\lambda_1 / R^2$ gelöst. Die Integration zu $\Delta \theta$ liefert

$$\Delta\theta = \lambda_1/R + \lambda_2$$

mit den an die Randtemperaturen anzupassenden Parametern $\lambda_{1,2}$. Mit $\Delta\theta_i = \Delta\theta(R_i)$ und $\Delta\theta_a = \Delta\theta(R_a)$ ergeben sich für sie

$$\lambda_1 = -R_i R_a (\Delta\theta_a - \Delta\theta_i) / (R_a - R_i)$$

$$\lambda_2 = (R_a \Delta\theta_a - R_i \Delta\theta_i) / (R_a - R_i).$$

Für linear thermo-elastisches isotropes Material sind die Spannungen nach Gleichung (4.2.43) in Indexschreibweise bezüglich einer kartesischen Basis durch

$$(B20.2) \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \zeta \Delta\theta \delta_{ij}$$

gegeben mit den LAMÉschen Konstanten λ und μ und dem Spannungs-Temperatur-Koeffizienten ζ . Letzterer entspricht $\zeta = -3K\alpha$. Die Dehnungen sind durch

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i}) / 2$$

gegeben. Wir müssen nun einen Ansatz für $u(R)$ machen. Da sich die Kugel gleichförmig ausdehnt, sollte das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ parallel zum Ortsvektor \mathbf{x} sein, woraus wir

$$u_i = F(R) x_i$$

schlussfolgern können. Diesen Ansatz können wir in (B20.2) einsetzen.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda u_{r,r} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \zeta \Delta\theta \delta_{ij} \\ &= \lambda (F' x_r x_r / R + F \delta_{rr}) \delta_{ij} + \mu (F' x_j x_i / R + F \delta_{ij} + F' x_j x_i / R + F \delta_{ij}) \\ &\quad + \zeta \Delta\theta \delta_{ij} \\ (B20.3) \quad &= [\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F] \delta_{ij} + 2\mu F' x_j x_i / R + \zeta \Delta\theta \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Als nächstes muss die Gleichgewichtsbedingung ausgewertet werden

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0 \\ &= [\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F]_{,i} + 2\mu (F' x_j x_i / R)_{,j} + \zeta \Delta\theta_{,i} \\ &= [\lambda F'' x_i + \lambda F' x_i / R + (2\mu + 3\lambda) F' x_i / R] \\ &\quad + 2\mu (F'' x_j x_i x_j / R + F' \delta_{jj} x_i + F' \delta_{ij} x_j) / R - 2\mu F' x_j x_j x_i / R^3 \\ &\quad + \zeta \Delta\theta' x_i / R \\ &= [\lambda F'' x_i + \lambda F' x_i / R + (2\mu + 3\lambda) F' x_i / R] \\ &\quad + 2\mu (F'' x_i R + 3 F' x_i + F' x_i) / R - 2\mu F' x_i / R + \zeta \Delta\theta' x_i / R \\ &= x_i [(\lambda + 2\mu)(F'' + 4 F' / R) + \zeta \Delta\theta' / R]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Klammer verschwindet. Es muss also die Dgl.

$$F'' + 4 F' / R = C / R^3 \quad \text{mit} \quad C := \zeta \lambda_1 / (\lambda + 2\mu)$$

gelöst werden. Durch Substitution $F' = P$ erhält man wieder eine gewöhnliche Dgl.

$$P' = C / R^3 - 4 P(R) / R = A(R) + B(R) P(R),$$

wobei wir

$$A(R) = C / R^3$$

$$B(R) = -4/R$$

identifizieren. Die allgemeine Lösung lautet

$$P = P_1 + P_2 \quad P_1 = P_0 e^{\int B dR} \quad P_2 = \frac{P_1}{P_0} \int \frac{AP_0}{P_1} dR.$$

Die Integration kann ohne Integrationskonstanten erfolgen, da bereits P_0 als anzupassender Parameter eingeplant ist. Es ergeben sich

$$P_1 = P_0/R^4 \quad P_2 = C/(2R^2).$$

Um F zu erhalten müssen wir $P_1 + P_2$ noch ein mal über R integrieren, wobei eine Integrationskonstante K_2 auftaucht. Der Form halber ersetzen wir $K_1 = -P_0/3$,

$$F = K_1/R^3 - C/(2R) + K_2.$$

K_1 und K_2 müssen an die Randbedingungen angepasst werden. Wir wollen von spannungsfreien Rändern ausgehen, haben also

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \sigma_{ij} n_j = 0$$

bei $R \equiv R_i$ und $R \equiv R_a$ zu gewährleisten. Der Vektor \mathbf{n} ist aufgrund der Kugelform wieder parallel zum Ortsvektor. Da $\sigma_{ij} n_j = 0$ sein soll, brauchen wir \mathbf{n} auch nicht zu normieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{ij} x_j \\ &= \{[\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F] \delta_{ij} + 2\mu F' x_j x_i / R + \zeta \Delta\theta \delta_{ij}\} x_j \\ &= [\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F + 2\mu R F' + \zeta \Delta\theta] x_i. \end{aligned}$$

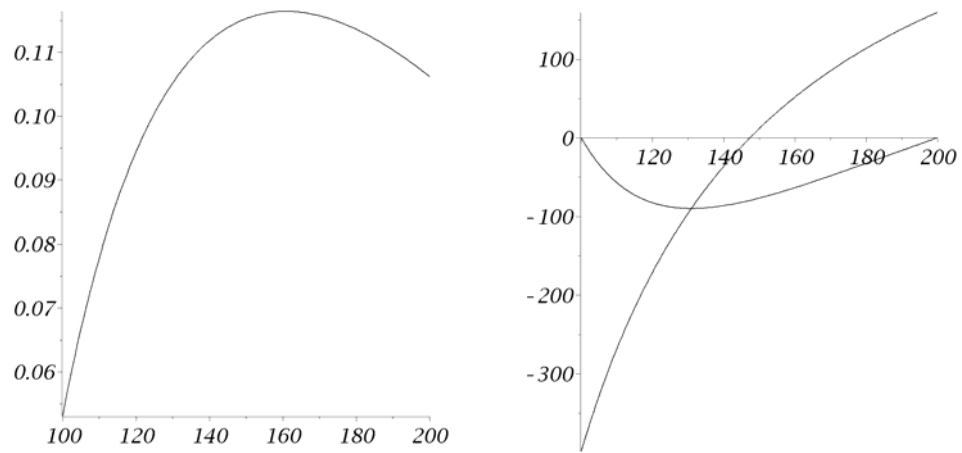
Wir müssen also dafür sorgen, dass die eckige Klammer bei $R \equiv R_i$ und $R \equiv R_a$ verschwindet. Dieses aus zwei Gleichungen bestehende Gleichungssystem liefert

$$\begin{aligned} K_1 &= R_i^2 R_a^2 (\zeta \lambda_1 - C\lambda) / [4\mu (R_i^2 + R_i R_a + R_a^2)] \\ K_2 &= [\zeta \{\lambda_1 (R_a + R_i) + \lambda_2 (R_i^2 + R_i R_a + R_a^2)\} \\ &\quad - C\lambda (R_a + R_i)] / [(2\mu + 3\lambda) (R_i^2 + R_i R_a + R_a^2)] \end{aligned}$$

Für $R_i = 100 \text{ mm}$ und $R_a = 200 \text{ mm}$, die Materialkennwerte $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\zeta = -2,44 \text{ MPa/K}$ und die thermische Belastung $\Delta\theta_i = 400 \text{ K}$, $\Delta\theta_a = 0 \text{ K}$ erhält man die unten dargestellten Ergebnisse. Die Spannungen wurden dabei durch Betrachten der Richtung $x_1 = R$, $x_2 = x_3 = 0$ aus B20.3 ermittelt. Dies führt auf die Normal- und Tangentialspannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F) + 2\mu F' R + \zeta \Delta\theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = (\lambda F' R + (2\mu + 3\lambda) F) + \zeta \Delta\theta \end{aligned}$$

und alle Schubspannungen ergeben sich zu Null.



Radiale Verschiebung (links) in mm , Radial- und Tangentialspannung (rechts) in MPa über R in mm .

4.3 Lineare Viskoelastizität

Aus der einachsigen Theorie der linearen Viskoelastizität in Kap. 1.3 kennen wir bereits die folgenden allgemeinen Darstellungen

- als Faltungsintegral nach BOLTZMANN

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau)^\bullet d\tau$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \sigma(\tau)^\bullet d\tau$$

- als gewöhnliche Differentialgleichung vom (p, q) -Typ

$$M_0 \sigma + M_1 \sigma^\bullet + \dots + M_p \sigma^{(p)} = Q_0 \varepsilon + Q_1 \varepsilon^\bullet + \dots + Q_q \varepsilon^{(q)},$$

wobei sich die Koeffizienten M_i und Q_i aus den elementaren Federkonstanten E_α und Dämpferkonstanten D_β berechnen lassen.

Um die einachsige Theorie dreidimensional zu verallgemeinern, ersetzen wir die

- einachsige Spannung σ durch den Spannungstensor \mathbf{T}
- ebenso die Zeitableitungen $\sigma^\bullet, \sigma^{\bullet\bullet}, \dots$ durch $\mathbf{T}^\bullet, \mathbf{T}^{\bullet\bullet}, \dots$
- einachsige Dehnung ε durch den Verzerrungstensor \mathbf{E}
- ebenso die Zeitableitungen $\varepsilon^\bullet, \varepsilon^{\bullet\bullet}, \dots$ durch $\mathbf{E}^\bullet, \mathbf{E}^{\bullet\bullet}, \dots$
- sowie alle Linearfaktoren M_i, Q_i, E_α und D_β durch Tetraden $\mathbf{M}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{E}_\alpha$ und \mathbf{D}_β als lineare Abbildungen zwischen Tensoren.

Da alle diese Tensoren 2. Stufe symmetrisch sind, können wir für alle Materialtetraden die beiden Subsymmetrien annehmen und die einfachere Darstellung durch VOIGT'sche Matrizen benutzen.

Zu einer weiteren, nicht unerheblichen Vereinfachung gelangen wir mittels der *Projektionsmethode* von Abschnitt 4.1.3. Dazu treffen wir folgende

Koaxialitätsannahme

Alle Materialtensoren des Materials besitzen dieselben Eigenräume.

Bei isotropen Materialtensoren ist dies grundsätzlich der Fall, da hier die Kugeltensoren und die Deviatoren immer Eigenräume sind. Bei anisotropen Materialien werden die Eigenräume beispielsweise durch die Kristallstruktur bestimmt. Im - besonders wichtigen - Fall kubischer Symmetrie ist die Annahme ebenfalls grundsätzlich erfüllt, wenn die Anisotropie-Richtungen übereinstimmen. Bei allen anderen Symmetrie-Klassen kann die Koaxialität hingegen nicht abgeleitet werden, sondern stellt eine zusätzliche Annahme dar, die in vielen Fällen aber mindestens plausibel ist.

Aufgrund dieser Annahme können wir nun die Stoffgesetze der Elemente unserer rheologischen Modelle folgendermaßen darstellen:

- lineare Feder ($\sigma = E \varepsilon$):

$$(4.3.1) \quad \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\alpha = C_\alpha^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_\alpha = C_\alpha^i \mathbf{E}_{\alpha i}$$

mit den Projektionen von \mathbf{E}_α in die Eigenräume

$$\mathbf{E}_{\alpha i} := \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_\alpha$$

und den Elastizitätskonstanten $C_\alpha^i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, N$ und der Spektralform

$$\mathbf{C}_\alpha = C_\alpha^i \mathbf{P}_i$$

- linearer Dämpfer ($\sigma = D \dot{\varepsilon}$):

$$(4.3.2) \quad \mathbf{T}_\beta = \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{} = D_\beta^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{} = D_\beta^i \mathbf{E}_{\beta i} \dot{}$$

mit den Dämpfungskonstanten $D_\beta^i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, N$ und der Spektralform

$$\mathbf{D}_\beta = D_\beta^i \mathbf{P}_i.$$

Dabei ist die Anzahl N der Projektionsrichtungen gleich der Anzahl der Eigenräume und hängt damit vom Material ab (isotrop: $N \equiv 2$; kubisch: $N \equiv 3$). Wir wollen außerdem annehmen, dass die elastischen Steifigkeitskonstanten C_α^i aller Federelemente und die Dämpfungskonstanten D_β^i aller Dämpferelemente positiv sind. Damit sind \mathbf{C}_α und \mathbf{D}_β positiv-definit und auf den symmetrischen Tensoren invertierbar. Dadurch wird die Dissipationsleistung der Dämpfer

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} l &= \sum_{\beta} \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{} = \sum_{\beta} (\mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{}) \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{} = \sum_{\beta} \mathbf{E}_\beta \dot{} \cdot \mathbf{D}_\beta \cdot \mathbf{E}_\beta \dot{} \\ &= \sum_{\beta} D_\beta^i \mathbf{E}_{\beta i} \dot{} \cdot \mathbf{E}_{\beta i} \dot{} \end{aligned}$$

positiv für alle Verzerrungsgeschwindigkeiten $\mathbf{E}_\beta \dot{} \neq \mathbf{0}$, was im Einklang mit der Dissipationsungleichung der Thermodynamik steht.

Wenden wir nun auf das Feder- und Dämpfergesetz einen Projektor \mathbf{P}_i an, so erhalten wir

$$\mathbf{T}_{\alpha i} := \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{T}_\alpha = C_\alpha^i \mathbf{E}_{\alpha i} \quad i = 1, \dots, N$$

bzw.

$$\mathbf{T}_{\beta i} = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{T}_\beta = D_\beta^i \mathbf{E}_{\beta i} \dot{} \quad i = 1, \dots, N$$

(keine Summe). Der Vorteil dieser Projektionen ist, dass wir in den Eigenräumen die tensoriellen Materialkonstanten auf skalare reduziert haben bei identischer Erfüllung der Symmetrie-Bedingung.

Als Beispiel für diese Methode betrachten wir den BURGERS-Körper aus Abschnitt 1.3.5. Die Stoffgesetze für die beiden Federn und beiden Dämpfern schreiben wir in Analogie zum einachsigen Fall als

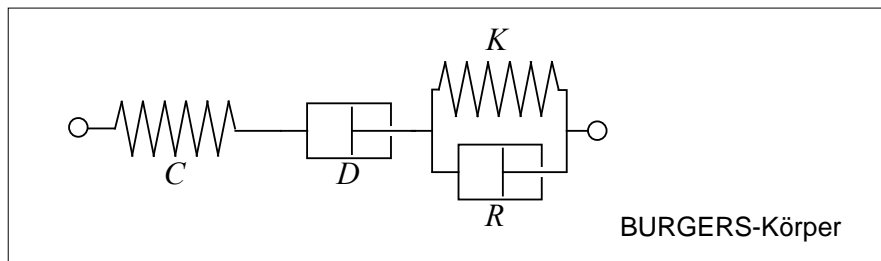
$$(4.3.4) \quad \mathbf{T}_C = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_C = C^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_C \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{Ci} = C^i \mathbf{E}_{Ci} \quad (\text{keine Summe})$$

$$(4.3.5) \quad \mathbf{T}_K = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_K = K^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_K \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{Ki} = K^i \mathbf{E}_{Ki} \quad (\text{keine Summe})$$

$$(4.3.6) \quad \mathbf{T}_D = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}_D \cdot = D^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_D \cdot \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{Di} = D^i \mathbf{E}_{Di} \cdot \quad (\text{keine Summe})$$

$$(4.3.7) \quad \mathbf{T}_R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E}_R \cdot = R^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}_R \cdot \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}_{Ri} = R^i \mathbf{E}_{Ri} \cdot \quad (\text{keine Summe})$$

mit den Materialkonstanten $C^1, C^2, \dots, C^N, K^1, \dots, K^N, D^1, \dots, D^N, R^1, \dots, R^N$, die allesamt positiv sind.



Dabei gilt aufgrund der Koaxialitäts-Annahme, dass *alle* in diesen Gleichungen vorkommenden Tetraden koaxial sind, und deshalb alle Verknüpfungen zwischen ihnen kommutativ sind, also beispielsweise

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{K}$$

usw. gelten. Die Systemgleichungen des BURGERS-Körpers sind dann

$$\mathbf{E}_{Ri} = \mathbf{E}_{Ki}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{Ci} + \mathbf{E}_{Di} + \mathbf{E}_{Ri} \quad i = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_{Ci} = \mathbf{T}_{Di} = \mathbf{T}_{Ki} + \mathbf{T}_{Ri}$$

und damit (keine Summen)

$$\mathbf{E}_i \cdot = \frac{1}{C^i} \mathbf{T}_i \cdot + \frac{1}{D^i} \mathbf{T}_i + \frac{1}{R^i} (\mathbf{T}_i - \mathbf{T}_{Ki})$$

$$\mathbf{T}_{Ki} \cdot = K^i \mathbf{E}_{Ki} \cdot = K^i \mathbf{E}_{Ri} \cdot = K^i (\mathbf{E}_i \cdot - \mathbf{E}_{Ci} \cdot - \mathbf{E}_{Di} \cdot) = K^i \mathbf{E}_i \cdot - \frac{K^i}{C^i} \mathbf{T}_i \cdot - \frac{K^i}{D^i} \mathbf{T}_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}_i \cdot \cdot = \frac{1}{C^i} \mathbf{T}_i \cdot \cdot + \frac{1}{D^i} \mathbf{T}_i \cdot + \frac{1}{R^i} \mathbf{T}_i \cdot - \frac{K^i}{R^i} \mathbf{E}_i \cdot + \frac{K^i}{C^i R^i} \mathbf{T}_i \cdot + \frac{K^i}{D^i R^i} \mathbf{T}_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{K^i}{D^i R^i} \mathbf{T}_i + \left(\frac{1}{D^i} + \frac{K^i}{C^i R^i} + \frac{1}{R^i} \right) \mathbf{T}_i \cdot + \frac{1}{C^i} \mathbf{T}_i \cdot \cdot = \frac{K^i}{R^i} \mathbf{E}_i \cdot + \mathbf{E}_i \cdot \cdot,$$

was der Differentialgleichung vom (2,2)–Typ

$$M_0^i \mathbf{T}_i + M_1^i \mathbf{T}_i^\bullet + M_2^i \mathbf{T}_i^{\bullet\bullet} = Q_0^i \mathbf{E}_i + Q_1^i \mathbf{E}_i^\bullet + Q_2^i \mathbf{E}_i^{\bullet\bullet} \quad (\text{keine Summe})$$

entspricht mit den Konstanten (keine Summen)

$$\begin{aligned} M_0^i &:= \frac{K^i}{D^i R^i} & M_1^i &:= \frac{I}{D^i} + \frac{K^i}{C^i R^i} + \frac{I}{R^i} & M_2^i &:= \frac{I}{C^i} \\ Q_0^i &:= 0 & Q_1^i &:= \frac{K^i}{R^i} & Q_2^i &:= I \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N$. Superponiert man nun wieder die Systemgleichungen in den N Eigenrichtungen, so ergibt sich (Summe über i)

$$\begin{aligned} M_0^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{T} + M_1^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{T}^\bullet + M_2^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{T}^{\bullet\bullet} &= Q_0^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E} + Q_1^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}^\bullet + Q_2^i \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{E}^{\bullet\bullet} \\ (4.3.8) \quad &= \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{T} + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{T}^\bullet + \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{T}^{\bullet\bullet} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{E}^\bullet + \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{E}^{\bullet\bullet} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_j &:= M_j^i \mathbf{P}_i & (\text{Summe über } i) \\ \mathbf{Q}_j &:= Q_j^i \mathbf{P}_i. \end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{M}_1 &= \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{R}^{-1} + \mathbf{R}^{-1} \\ (4.3.9) \quad \mathbf{M}_2 &= \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Dank der Projektionsmethode können wir also (nach Projektion in die Eigenräume) die Stoffgesetze im 3-dimensionalen Fall genauso umformen wie im 1-dimensionalen Fall. Man kann auch die einachsigen Materialgleichungen (nach obigem Schema) direkt in die Tensornotation übertragen. Wir können es uns deshalb sparen, die verschiedenen rheologischen Modelle noch einmal zu behandeln. Es lassen sich alle im Eindimensionalen abgeleiteten Eigenschaften (z. B. Kriech- und Relaxations-) analog aufs Dreidimensionale übertragen.

Diese Anwendung der Projektionsmethode ist für alle linearen Materialgesetze mit Koaxialitätseigenschaft anwendbar. Die linearen viskoelastischen Modelle führen dann immer auf eine (tensorielle) Dgl. vom (p, q) –Typ

$$(4.3.10) \quad \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{T} + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{T}^\bullet + \dots + \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{T}^{(p)} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{E}^\bullet + \dots + \mathbf{Q}_q \cdot \mathbf{E}^{(q)}.$$

Die tensorielle Form der Faltungsintegrale nach BOLTZMANN ist

$$(4.3.11) \quad \mathbf{T}(t) = \int_0^t \mathbf{F}(t-\tau) \cdot \mathbf{E}(\tau) \cdot d\tau$$

$$(4.3.12) \quad \mathbf{E}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \cdot \mathbf{T}(\tau) \cdot d\tau$$

mit

$$\mathbf{F}(t) = f_i(t) \mathbf{P}_i \quad (\text{Summe über } i)$$

$$\mathbf{G}(t) = g_i(t) \mathbf{P}_i,$$

worin f_i und g_i eindimensionale Relaxations- und Kriechfunktionen sind.

Bei nichtlinearen Zusammenhängen werden die Beziehungen allerdings wieder komplizierter.

Literatur zur Projektionsmethode

Bertram, A.; Olschewski, J.: *Zur Formulierung linearer anelastischer Stoffgleichung mit Hilfe einer Projektionsmethode.* Zeit. ang. Math. Mech. **73**,4-5, T 401-3 (1993)

zur nicht-linearen Verallgemeinerung

Bertram, A.; Olschewski, J.: *A phenomenological anisotropic creep model for cubic single crystals.* In: Handbook of Materials Behavior Models. Hrg.: J. Lemaitre. Academic Press. Bd. 1, 303-307 (2001)

4.4 Plastizität

Literatur

- Backhaus, G.:** *Deformationsgesetze*. Akademie-Verlag, Berlin (1983)
- Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin (1993), 2. erweiterte Aufl. (2001)
- Burth, K.; Brocks, W.:** *Plastizität*. Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden (1992)
- Chakrabarty, J.:** *Theory of Plasticity*. McGraw-Hill (1987)
- Chen, W. F.; Han, D. J.:** *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, New York, Berlin (1988)
- Francois, D.; Pineau, A.; Zaoui, A.:** *Mechanical Behaviour of Materials*, Bd. I, Kluwer, Dordrecht (1998)
- Fung, Y. C.; Tong, P.:** *Classical and Computational Solid Mechanics*. World Scientific, Singapore (2003)
- Hashiguchi, K.:** *Elastoplasticity Theory*. Springer (2009, 2014)
- Hill, R.:** *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford (1950)
- Irgens, F.:** *Continuum Mechanics*. Springer (2008)
- Ismar, H.; Mahrenholz, O.:** *Technische Plastomechanik*. Vieweg, Braunschweig (1979)
- Krawietz, A.:** *Materialtheorie*. Springer, Berlin (1986)
- Kreißig, R.:** *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Fachbuchverlag, Leipzig, Köln (1992)
- Lubliner, J.:** *Plasticity Theory*. Macmillan, New York (1990)
- Mang, H.; Hofstetter, G.:** *Festigkeitslehre*. Springer (2000)
- Negahban, M.:** *The Mechanical and Thermodynamical Theory of Plasticity*. CRC Press, Boca Raton (2012)
- Pawelski, H. u. O.:** *Technische Plastomechanik*. Verlag Stahleisen, Düsseldorf (2000)
- Prager, W.; Hodge, P. G.:** *Theorie ideal plastischer Körper*. Springer, Wien (1954)
- Rösler, J.; Harders, H.; Bäker, M.:** *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. B. G. Teubner, Stuttgart (2003)
- Skrzypek, J. J.:** *Plasticity and Creep*. CRC Press, Boca Raton (1993)
- Stark, R.:** *Festigkeitslehre - Aufgaben und Lösungen*. Springer (2006)
- Yang, W.; Lee, W. B.:** *Mesoplasticity and its Applications*. Springer, Berlin (1993)
- Yu, M.-H.:** *Generalized Plasticity*. Springer, Berlin (2006)

Eine klassische Plastizitätstheorie besteht aus folgenden Anteilen:

- 1.) einer **Zerlegungsannahme**, nach der sich die Deformationen \mathbf{E} zerlegen lassen in einen elastischen \mathbf{E}_e und einen plastischen Anteil \mathbf{E}_p in Analogie zu (1.4.4)

$$(4.4.1) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$$

- 2.) einem **elastischen Gesetz**, das das Verhalten innerhalb der elastischen Bereiche beschreibt. Genauer: das den Zusammenhang zwischen elastischer Verzerrung und Spannung angibt

$$(4.4.2) \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e$$

Das elastische Gesetz kann je nach Materialklasse isotrop oder anisotrop sein. Wichtig ist die weithin und auch von uns benutzte Annahme, das die plastische Verzerrung ohne Einfluss auf

C ist. Für viele plastische Werkstoffe, wie Metalle, ist diese Annahme durch Experimente selbst für große Deformationen gestützt.

3.) einer **Fließgrenze** (Fließkriterium), die die Grenze des momentanen elastischen Bereiches bildet. Während man hierfür im Einachsigen lediglich eine Fließspannung σ_F zu ermitteln braucht, so dass im elastischen Bereich $|\sigma| \leq \sigma_F$ gilt, muss im Dreidimensionalen der Mehrachsigkeit des Spannungszustandes Rechnung getragen werden. Wir machen für das **Fließkriterium** (engl. *yield criterion*) den Ansatz einer skalarwertigen Funktion

$$\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z}),$$

worin \mathbf{Z} skalare oder tensorielle Zusatzvariablen sind (im Weiteren notiert als Tensor 2. Stufe), die ggf. die Verfestigung des Materials beschreiben, also den Einfluss der vorausgegangenen Deformation auf den Fließbeginn. Die Fließgrenze (Fließfläche) sei durch die Nullstellen

$$(4.4.3) \quad \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = 0$$

gekennzeichnet, während (nur) im Innern des elastischen Bereiches $\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) < 0$ gilt.

4.) einer **Fließregel** (engl. *flow rule*), die die Entwicklung der plastischen Deformation angibt. Die allgemeine Form einer Entwicklungsgleichung hierfür ist

$$\mathbf{E}_p^\bullet = F(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p, \mathbf{E}_e, \mathbf{T}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}^\bullet).$$

Da mit den ersten beiden Gleichungen dieses Abschnitts \mathbf{E}_e und \mathbf{E}_p durch die Gesamtverzerrung \mathbf{E} und die Spannung \mathbf{T} ausgedrückt werden können, genügt der Ansatz

$$(4.4.4) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = f(\mathbf{E}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}^\bullet).$$

5.) einer **Verfestigungsregel** (engl. *hardening rule*) für \mathbf{Z} , die analog als Entwicklungsgleichung von der Form

$$(4.4.5) \quad \mathbf{Z}^\bullet = z(\mathbf{E}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}^\bullet)$$

angesetzt werden soll. Wichtigste Beispiele für Verfestigungsmodelle sind die *isotrope* und die *kinematische Verfestigung*, die - wie später gezeigt wird - durch einen Skalar bzw. einen symmetrischen Tensor beschrieben werden.

4.4.1 Fließgrenzen

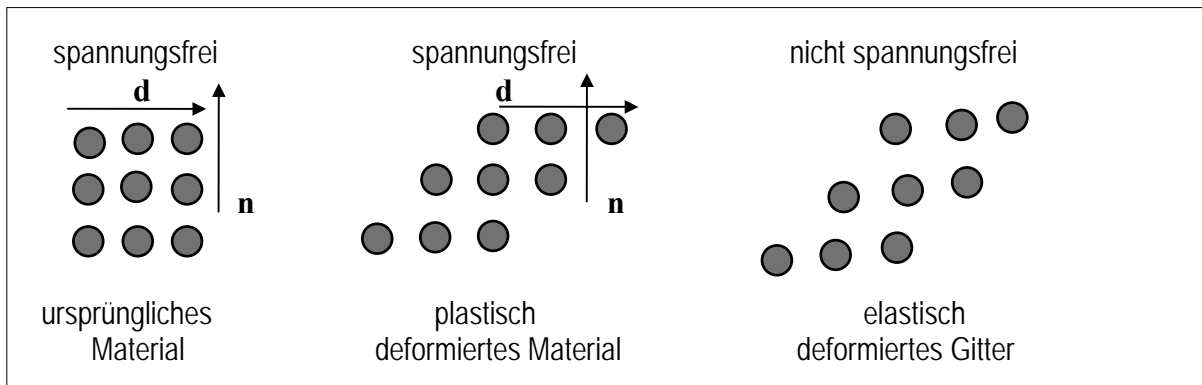
Viele Festkörper zeigen auf der Mikroebene regelmäßigen Atomanordnungen, die man als **Kristallgitter** bezeichnet. Man weiß aus der Kristallphysik zwei wichtige Tatsachen:

- Spannungen im Kristall ergeben sich aus Deformationen dieses Gitters. Die Gitterverformungen bestimmen also \mathbf{E}_e .
- Plastische Deformationen finden unter Erhalt des Kristallgitters statt. \mathbf{E}_p beschreibt also die Verformung des Materials gegenüber dem Gitter.

Wesentliche Anteile der plastischen Verformungen beruhen auf Gleitungen (Scherungen) in bestimmten Ebenen (**Gleitebenen**) und Richtungen (**Gleitrichtungen**), die durch die engste Atomanordnung gekennzeichnet sind. Beschreibt man die Gleitebene durch ihren Normalenvektor $\pm \mathbf{n}^\alpha$ und die Gleitrichtung durch den Richtungsvektor $\pm \mathbf{d}_\alpha$, dann bildet das Paar $\{\mathbf{d}_\alpha, \mathbf{n}^\alpha\}$ ein **Gleitsystem**. Dabei muss die Gleitrichtung in der Gleitebene liegen, d. h.

$$(4.4.6) \quad \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha = 0.$$

Man normiert beide Vektoren zu $|\mathbf{d}_\alpha| = 1 = |\mathbf{n}^\alpha|$. Der Richtungssinn von \mathbf{d}_α und \mathbf{n}^α ist für die wichtigsten Gleitsysteme ohne Bedeutung. Der Index α ist eine Nummerierung der Gleitsysteme, die aufgrund der Kristallsymmetrie immer in festen Anzahlen N vorhanden sind.



Ein Gleitsystem kann nach dem **SCHMID**⁷⁷-Gesetz (1924) aktiviert werden, wenn die Schubspannung in ihm

$$(4.4.7) \quad \tau^\alpha = \mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha = \mathbf{T} \cdot \text{sym}(\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha),$$

die **SCHMID-Spannung** (engl. *resolved shear stress*) genannt wird, in ihm einen bestimmten Wert, genannt **kritische SCHMID-Spannung**, erreicht

$$|\tau^\alpha| = \tau_k^\alpha.$$

Algebraisch stellt die Berechnung der SCHMID-Spannung eines bestimmten Gleitsystems eine Projektion im Spannungsraum dar. Allerdings sind die verschiedenen SCHMID-Spannungen nicht linear unabhängig, da ihre Anzahl N größer als die Dimension 6 des Spannungsraumes ist. τ_k^α verändert sich infolge des Gleitens im selben Gleitsystem (**Eigenverfestigung**, engl. *self-hardening*) wie auch in den anderen Gleitsystemen (**Wechselverfestigung**, engl. *cross h.* oder *latent h.*). Die τ_k^α sind also nur anfänglich als Materialkonstanten zu betrachten, später dann als Verfestigungsvariablen. Demnach wäre hier die Verfestigungsvariable \mathbf{Z} mit dem Vektor

$$\mathbf{Z} = \{\tau_k^1, \tau_k^2, \dots, \tau_k^N\}$$

zu identifizieren. Damit ist die SCHMIDsche Fließbedingung darstellbar als

$$(4.4.8) \quad \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = \max_\alpha (|\tau^\alpha| - \tau_k^\alpha) = \max_\alpha (|\mathbf{T} \cdot \text{sym}(\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha)| - \tau_k^\alpha) = 0.$$

⁷⁷ Erich Schmid (1896-1983)

Ist sie für ein Gleitsystem $\{\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha\}$ erfüllt, so gelten

$$(4.4.9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} = \pm \text{sym}(\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_k^\alpha} = -1.$$

Erfüllen mehrere Gleitsysteme gleichzeitig das Fließkriterium, so ist $\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ an dieser Stelle des Spannungsraumes nicht differenzierbar. Liegt $|\tau^\alpha|$ unterhalb von τ_k^α , so ist dieses spezifische Gleitsystem inaktiv.

Die SCHMID'sche Fließgrenze ist die am besten (mikro-)physikalisch begründete. Ihr Anwendungsbereich ist allerdings begrenzt, da die Körner mit Kristallstruktur bei den wichtigen Materialien sehr klein gegenüber den Bauteilabmessungen sind. Es würde einen nicht zu bewältigenden Rechenaufwand bedeuten, wollte man die plastischen Verformungen auf Kristallgleitungen in den Körnern zurückführen. Zwei wichtige Anwendungsgebiete der Kristallphysik seien jedoch erwähnt:

- einkristalline Körper, die heute schon in großen Abmessungen produziert werden, z. B. als Turbinenschaufeln;
- mikro-physikalische Untersuchungen, um das Verhalten der Körner im Kornverbund zu studieren.

Ein **Polykristall** besitzt auf der Mikroebene (im Korn) eine (ein-)kristalline Struktur. Auf der Makroebene, d. h. im Kornverbund, wirken sich nur noch Mittelwerte der Mikrogrößen aus. Der Polykristall kann also auf der Makroebene eine von der Kristallstruktur seiner Körner unterschiedliche Anisotropie besitzen oder sogar isotrop sein. Eine Anisotropie auf der Makroebene kann aus einer ungleichmäßigen Anordnung der Kornkristallite (Textur) resultieren, wie sie z. B. infolge von Umformungen auftritt (induzierte Anisotropie).

Betrachten wir zunächst ein makrophysikalisch isotropes Material.

Einer der ersten Vorschläge für eine (isotrope) Fließgrenze geht auf **COULOMB** (1773) zurück in Anlehnung an das Reibungsgesetz von AMONTONS⁷⁸/COULOMB. Danach kann ein Abgleiten in einer beliebigen **Gleitschicht** stattfinden, sobald die Reibungsspannung betragsmäßig gleich einem kritischen Wert ist mit dem Ansatz

$$(4.4.10) \quad |\tau_k| = \tau_0 + \mu |\sigma| = \tau_0 + |\sigma| \tan \alpha$$

mit der Normalspannung σ in der Gleitschicht, dem Reibungswinkel α , dem Reibungskoeffizienten $\mu = \tan \alpha$ und einer Konstanten τ_0 .

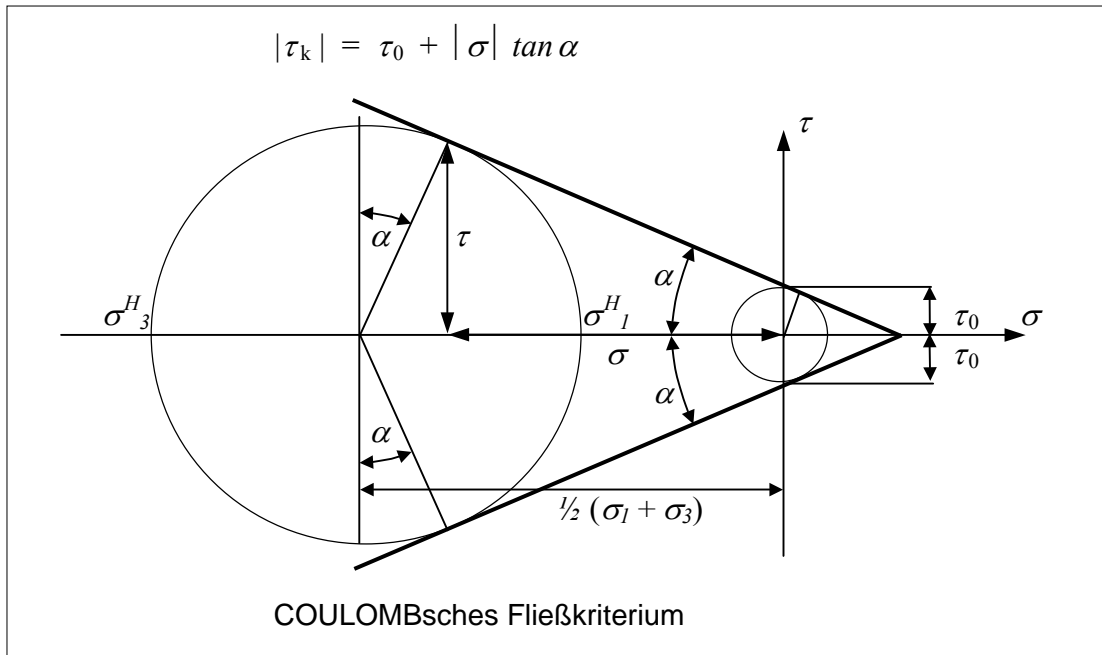
MOHR⁷⁹ (1900) hat eine allgemeine Abhängigkeit von der Normalspannung als

$$\tau_k = \tau_0 + f(\sigma)$$

vorgeschlagen. Diese Fließgrenzen haben in der Bodenmechanik eine große Bedeutung erlangt, jedoch nicht bei Metallen, da hier die kritische Schubspannung nicht wesentlich von der Normalspannung in der Gleitschicht abhängt.

⁷⁸ Guillaume Amontons (1663-1705)

⁷⁹ Otto Mohr (1835-1918)



In der Metallplastizität viel erfolgreicher war der Vorschlag von **TRESCA**⁸⁰ (1865), als Fließgrenze nur die maximale Schubspannung gegenüber einem kritischen Wert abzuschätzen:

$$(4.4.11) \quad \tau_{max} = \tau_k .$$

Ausgedrückt durch die Hauptspannungen ergibt dies eines der drei folgenden Kriterien

$$|\tau_{13}| = \frac{1}{2} |\sigma_1^H - \sigma_3^H| = \tau_k$$

$$|\tau_{23}| = \frac{1}{2} |\sigma_2^H - \sigma_3^H| = \tau_k$$

$$|\tau_{12}| = \frac{1}{2} |\sigma_1^H - \sigma_2^H| = \tau_k$$

oder kompakter

$$(4.4.12) \quad \varphi(\mathbf{T}, \tau_k) = [(\sigma_1^H - \sigma_3^H)^2 - 4 \tau_k^2] [(\sigma_2^H - \sigma_3^H)^2 - 4 \tau_k^2] [(\sigma_1^H - \sigma_2^H)^2 - 4 \tau_k^2] = 0 .$$

Geht man nicht auf Hauptspannungen, so gilt für den ebenen Spannungszustand

$$(4.4.13) \quad \tau_{13max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + \tau_{13}^2} .$$

Im einachsigen Zugversuch verbleibt hiervon

$$(4.4.14) \quad \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2} = \frac{|\sigma_{xx}|}{2} .$$

⁸⁰ Henri Edouard Tresca (1814-1885)

Nachteil der TRESCAschen Fließbedingung ist, dass die durch die Fließgrenze definierte Hyperfläche im Spannungsraum zwar stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist, weil sie bei Gleichheit zweier Hauptspannungen einen Knick besitzt.

Wichtige Eigenschaft dieser Fließbedingung ist ihre **Druckunabhängigkeit**, da in τ_{max} nur die Differenz der Normalspannungen eingeht. Zerlegt man den Spannungszustand in den Druck- und den Deviatoranteil $\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}'$, so können solche Materialien also nicht von ganz \mathbf{T} , sondern nur von den Deviatorspannungen \mathbf{T}' abhängen. Da im isotropen Falle eine skalare Tensorfunktion nur von den Invarianten $I_{\mathbf{T}}, II_{\mathbf{T}}, III_{\mathbf{T}}$ abhängen kann, verbietet die Druckunabhängigkeit die Abhängigkeit von $I_{\mathbf{T}}$, also

$$\varphi_{iso}(II_{\mathbf{T}}, III_{\mathbf{T}}).$$

Wir können aber auch gleich auf die Hauptinvarianten des Deviators übergehen, die man mit

$$\begin{aligned} J_1 &:= I_{\mathbf{T}'} = 0 \\ (4.4.15) \quad J_2 &:= -II_{\mathbf{T}'} \geq 0 \\ J_3 &:= III_{\mathbf{T}'} \end{aligned}$$

bezeichnet. Plastizitätstheorien, die bei denen nur eine Abhängigkeit von J_2 vorliegt, nennt man **J_2 -Theorien**. Dies führt auf die Fließgrenze von **HUBER**⁸¹ (1904) und **v. MISES**⁸² (1913), die als

$$(4.4.16) \quad \sigma_V^2 := 3 J_2 \leq \sigma_F^2$$

oder als

$$(4.4.17) \quad \varphi(\mathbf{T}, \sigma_F) = \sigma_V^2 - \sigma_F^2 = 3 J_2 - \sigma_F^2$$

notiert werden kann. Darin wird σ_V als **v. MISESsche Vergleichsspannung** bezeichnet (engl. *equivalent stress*). Die Fließgrenze ist demnach durch $\sigma_V \equiv \sigma_F$ gekennzeichnet.

Setzt man als Spezialfall einen einachsigen Spannungszustand ein (mit $\sigma_{ij} \equiv 0$ außer σ_{xx}), so folgt

$$J_2 = \frac{1}{3} \sigma_{xx}^2 = \frac{1}{3} \sigma_V^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_V = |\sigma_{xx}|.$$

Die Vergleichsspannung ist so skaliert, dass sie also der kritischen Zugspannung im einachsigen Zugversuch entspricht. Bei reiner Schubbelastung (nur $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ verschieden von Null) erhält man hingegen

$$J_2 = \tau_{xy}^2 = \frac{1}{3} \sigma_V^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_V = \sqrt{3} |\tau_{xy}|.$$

Eine Schubspannung geht also mit dem Faktor $\sqrt{3}$ in die Vergleichsspannung ein. Es gilt allgemein

$$(4.4.18) \quad J_2 = -II_{\mathbf{T}'} = -\sigma'_{xx} \sigma'_{yy} + \tau'_{xy}{}^2 - \sigma'_{xx} \sigma'_{zz} + \tau'_{xz}{}^2 - \sigma'_{yy} \sigma'_{zz} + \tau'_{yz}{}^2$$

mit den Deviatorikkomponenten

⁸¹ Maksymilian Tytus Huber (1872-1950)

⁸² Richard M. E. von Mises (1883-1953)

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{T}} = \frac{2}{3} \sigma_{xx} - \frac{1}{3} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \sigma'_{yy} &= \sigma_{yy} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{T}} = \frac{2}{3} \sigma_{yy} - \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \sigma'_{zz} &= \sigma_{zz} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{T}} = \frac{2}{3} \sigma_{zz} - \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz} \quad \tau'_{xz} = \tau_{xz} .\end{aligned}$$

Setzt man dies in J_2 ein, so ergibt sich

$$(4.4.19) \quad J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 ,$$

woraus man erkennt, dass J_2 nicht negativ sein kann. Bezüglich Hauptspannungen wird hieraus

$$(4.4.20) \quad J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma^H_1 - \sigma^H_2)^2 + (\sigma^H_2 - \sigma^H_3)^2 + (\sigma^H_3 - \sigma^H_1)^2] .$$

Benutzt man die Spurfreiheit des Spannungsdeviators

$$J_1 = \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0 ,$$

so folgt

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{1}{3} \sigma_V^2 = -II_{\mathbf{T}'} = \frac{1}{2} sp(\mathbf{T}'^2) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}' = \frac{1}{2} |\mathbf{T}'|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma'^2_{xx} + \sigma'^2_{yy} + \sigma'^2_{zz} + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{xz}^2) \geq 0\end{aligned}$$

$\sqrt{J_2}$ ist also proportional zur Norm des Deviators. Damit ist die Vergleichsspannung

$$\sigma_V = \sqrt{(3 J_2)} = \sqrt{(3/2 \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}')} = \sqrt{(3/2)} |\mathbf{T}'|$$

und das HUBER-v. MISESsche Fießkriterium ist

$$(4.4.21) \quad \varphi(\mathbf{T}, \sigma_F) = \frac{3}{2} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}' - \sigma_F^2 = \frac{3}{2} |\mathbf{T}'|^2 - \sigma_F^2$$

und demzufolge

$$(4.4.22) \quad \begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} &= 2\sigma_V \frac{\partial \sigma_V}{\partial \mathbf{T}} = 2\sigma_V \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \sqrt{(3/2 \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}')} = 2\sigma_V \frac{1}{2} (3/2 \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}')^{-1/2} \cdot 3/2 \cdot 2 \mathbf{T}' \\ &= 3 \mathbf{T}' ,\end{aligned}$$

weil

$$d(\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}') = 2\mathbf{T}' \cdot d\mathbf{T}' = 2\mathbf{T}' \cdot d\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}') \cdot d\mathbf{T}$$

ist. Eine andere Bedeutung erhält diese Vergleichsspannung, wenn man die Formänderungsenergie des isotropen elastischen Körpers gemäß (4.1.35) in Gestaltänderungsenergie und Kompressionsenergie aufspaltet. Dann ist

$$(4.4.23) \quad w_G(\mathbf{E}') = \mu sp(\mathbf{E}'^2) = \frac{1}{4\mu} sp(\mathbf{T}'^2) = \frac{J_2}{2\mu} .$$

Das HUBER–v. MISES-Fließkriterium begrenzt also die Gestaltänderungsenergie bei isotropen Materialien und ist unabhängig von der Kompressionsenergie, was auch die ursprüngliche Idee ihrer Urheber war.

Diese Fließbedingung hat gegenüber der TRESCAschen den Vorteil, dass sie überall differenzierbar ist. Erweiterungen der HUBER–v. MISES-Fließbedingung bestehen entweder darin, eine mögliche Druckabhängigkeit dadurch zu berücksichtigen, dass man die kritische Vergleichsspannung als Funktion $\sigma_k(p)$ des Drucks modelliert, oder indem man sie anisotrop verallgemeinert. Die anisotrope Fließbedingung von v. MISES (1928) und die orthotrope von HILL⁸³ (1948) beinhalten eine quadratischen Form des Spannungsdeviators

$$(4.4.24) \quad \varphi(\mathbf{T}, \sigma_F) = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}' - \sigma_F^2.$$

Dabei ist \mathbf{K} eine symmetrische und positiv-semidefinite Materialtetrad mit der der jeweiligen Symmetriegruppe entsprechenden Symmetrie. Darstellungen hierfür sind uns für die Steifigkeitstetraden bestens bekannt, z. B. mittels der Projektionsmethode. Setzt man \mathbf{K} als Vielfaches von \mathbf{I} an, so erhält man wieder das HUBER–v. MISES-Kriterium. Nimmt man dagegen eine orthotrope Tetrad, so entspricht das Fließkriterium dem von HILL (1948). Allgemein gilt dann

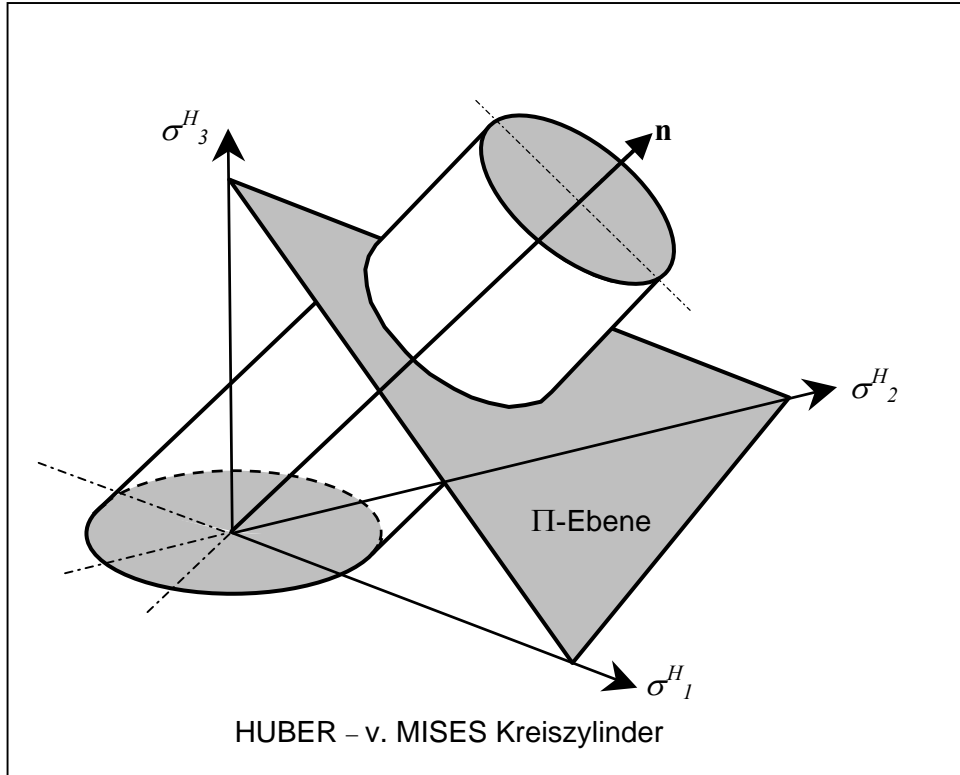
$$(4.4.25) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} = 2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{T}'.$$

Graphische Darstellungen der Fließflächen sind deshalb schwierig, da die Deviatoren einen 5-dimensionalen Unterraum des 6-dimensionalen Raumes der symmetrischen Tensoren bilden. Ist das Fließkriterium *isotrop*, so gelingt eine Darstellung als Fläche im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen σ^H_1, σ^H_2 und σ^H_3 , die obendrein gegen deren Vertauschung invariant sein muss. Bezeichnen wir die Diagonale bezüglich dieser Achsen mit

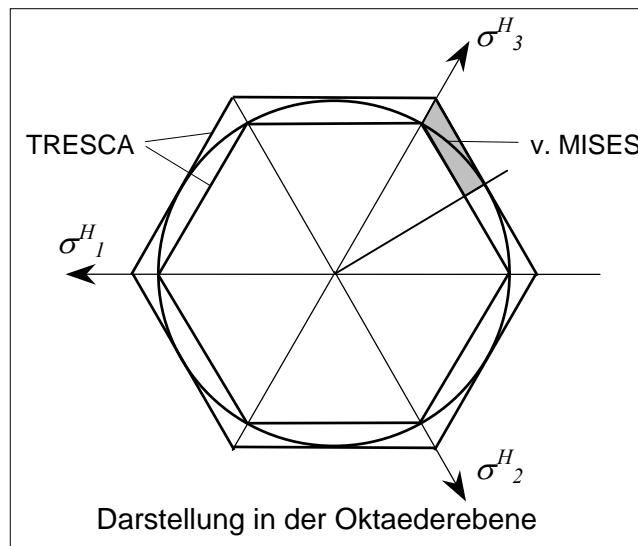
$$\mathbf{n} := \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \sigma^H_1 \equiv 1, \sigma^H_2 \equiv 1, \sigma^H_3 \equiv 1 \},$$

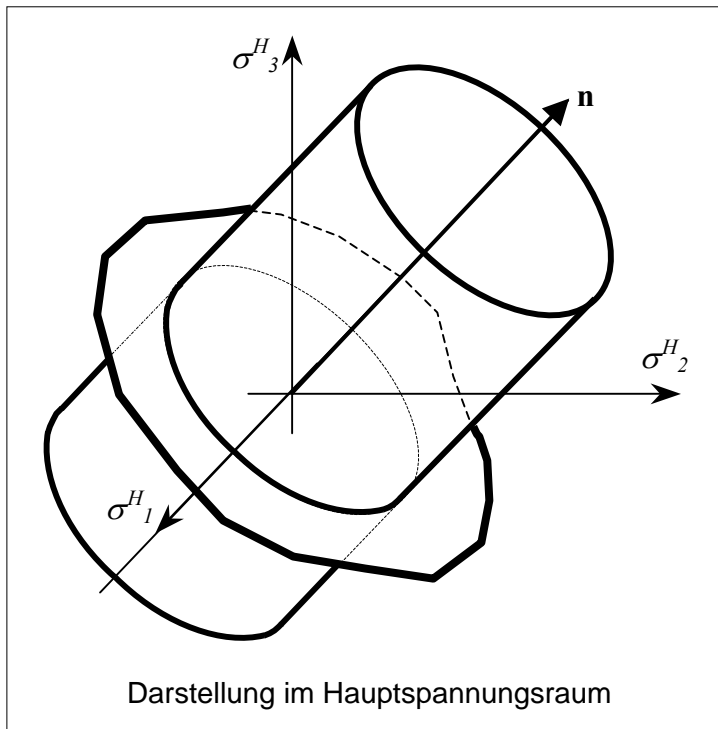
so muss aus Isotropie-Gründen die Fließfläche invariant gegen Drehungen $\mathbf{R}_n^{2\pi/3}$ sein. Ist das Fließkriterium auch noch *druckunabhängig*, so muss die Fläche obendrein prismatisch bezüglich der Diagonalen \mathbf{n} sein. Beispiele dafür sind der Kreiszyylinder nach HUBER–v. MISES und das Sechskant-Prisma nach TRESCA. Es geht also keine Information bei der Projektion des Prismas in eine Ebene mit der Normalen \mathbf{n} verloren, der **Hauptspannungsebene** (Oktaederebene, HAIGH–WESTERGAARD–Ebene, Π -Ebene).

⁸³ Rodney Hill (1921-2011)

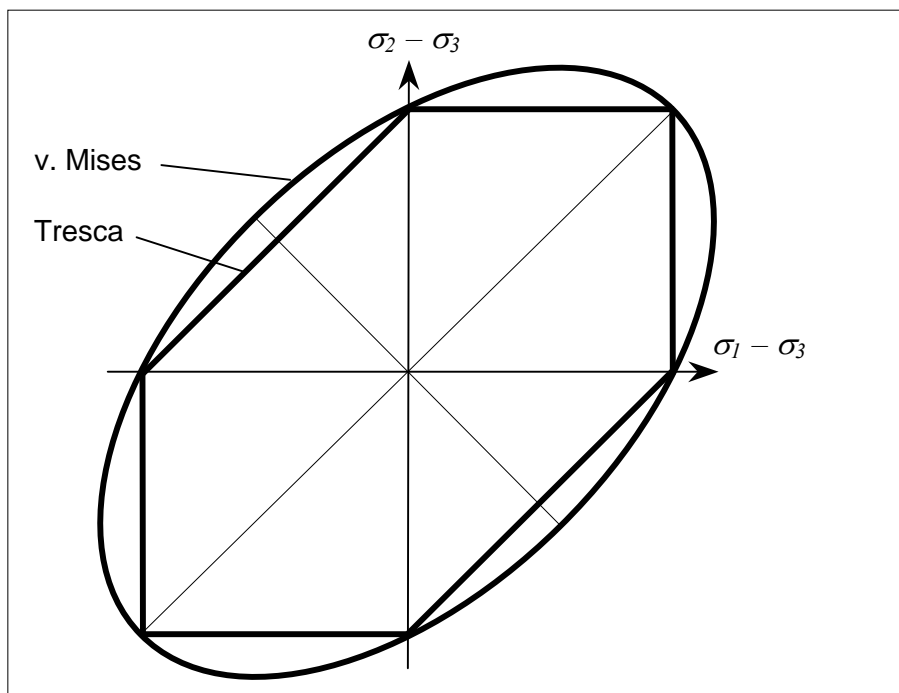


In der Π -Ebene wird aus den Fließgrenzen von HUBER – v. MISES ein Kreis und von TRESCA ein regelmäßiges Sechseck.





Betrachtet man nun den Schnitt der Fließflächen mit einer durch zwei Deviator-Hauptspannungen aufgespannten Ebene, so erhält man für HUBER – v. MISES eine Ellipse, und für TRESCA ein Sechseck.



Dies erlaubt einen Vergleich dieser beiden wichtigen Fließbedingungen. Normiert man sie dadurch, dass sie im Scherversuch den selben Wert liefern, so ist der HUBER – v. MISES-Kreis in das TRESCA-Sechseck eingeschrieben. Normiert man sie dagegen dadurch, dass sie im einachsigen Zugversuch denselben Wert liefern, so ist das TRESCA-Sechseck in den

HUBER-v. MISES-Kreis einbeschrieben. Die größten Abweichungen ergeben sich dann für einen reinen Schubspannungszustand, wie

$$\sigma^H_1 \equiv -\sigma^H_2 \quad \sigma^H_3 \equiv 0.$$

Wir erhalten nach

- HUBER – v. MISES $\sigma^H_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_V$

- TRESCA $\sigma^H_1 = \pm \frac{1}{2} \sigma_V$

also einen (maximalen) Unterschied von ca. 15 %.

Experimente an isotropen Metallen liefern Werte, die zumeist zwischen den beiden Kriterien liegen.

4.4.2 Fließregeln

Innerhalb der Fließfläche, also unterhalb der Fließgrenze, befindet sich der elastische Bereich, wo das elastische Gesetz $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e$ alles beschreibt. Erreicht der Spannungszustand aber die Fließgrenze, so können (plastische) Fließzustände eintreten. Diese sind durch folgende **Belastungsbedingung** gekennzeichnet: Wenn das Deformationsinkrement rein elastisch realisiert würde, so führte dies zu Spannungszuständen, die außerhalb des elastischen Bereiches liegen, also nicht möglich sind. Also muss das Gegenteil gelten: Es muss auch plastische Deformationsinkremente geben, die so gewählt werden, dass der Spannungszustand immer auf der momentanen Fließgrenze liegt. Formelmäßig führt das auf folgende Bedingung für $\mathbf{E}^\bullet \equiv \mathbf{E}_e^\bullet$ und $\mathbf{Z}^\bullet \equiv \mathbf{0}$

$$\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z})^\bullet = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{T}^\bullet = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet > 0$$

(Belastungsbedingung im Dehnungsraum).

Man unterscheidet drei Fälle:

1. Entlastung $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet < 0$
2. neutrale Spannungsänderung $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet = 0$
3. Belastung $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet > 0.$

Während die Zustände 1. und 2. rein elastisch sind, kommt es bei 3. zwangsläufig zum Fließen. Damit das Material fließt, ist es also notwendig und hinreichend, dass die Fließ- und die Belastungsbedingung gleichzeitig gelten

$$(4.4.26) \quad \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet > 0.$$

Ist der Zuwachs der Gesamtverzerrung \mathbf{E}^\bullet vorgegeben, so bedarf es eines konstitutiven Ansatzes, der dessen Aufteilung auf elastische und plastische Deformationen regelt. Hierzu wird also noch zusätzlich eine *Fließregel* benötigt.

Im Falle der Gleitsystemtheorie der Kristallplastizität geht man davon aus, dass die plastische Deformation in einem aktivierten Gleitsystem $\{\mathbf{d}_\alpha, \mathbf{n}^\alpha\}$ als Scherung stattfindet mit der Rate

$$\gamma_\alpha^\bullet \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha$$

mit der Scherzahl γ_α . Sind mehrere Gleitsysteme gleichzeitig aktiv, so addieren sich deren Scherraten zu

$$\sum_\alpha \gamma_\alpha^\bullet \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha$$

auf. Dessen symmetrischer Anteil beschreibt die plastische Deformationsgeschwindigkeit

$$(4.4.27) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \sum_\alpha \frac{1}{2} \gamma_\alpha^\bullet (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha),$$

die grundsätzlich spurfrei oder isochor ist. Da die spurfreien und symmetrischen Tensoren \mathbf{E}_p^\bullet fünf Freiheitsgrade besitzen, werden im Allgemeinen mindestens fünf geeignete Gleitsysteme benötigt. Die einzelnen Schergeschwindigkeiten γ_α^\bullet werden aus der Konsistenzbedingung bestimmt, die besagt, dass während des Fließens die Spannungen kritisch bleiben. Reichen diese Bedingungen zur Bestimmung der Schergeschwindigkeiten nicht aus, so muss man sie mit Hilfe eines *Auswahlkriteriums* bestimmen (TAYLOR-Problem).

Integriert man die plastischen Deformationsgeschwindigkeiten während des Deformationsprozesses auf, so erhält man die resultierende plastische Deformation

$$(4.4.28) \quad \mathbf{E}_p = \int_0^t \mathbf{E}_p^\bullet dt.$$

Die Abhängigkeit dieser Größe vom Deformationsprozess (Wegabhängigkeit) ist ein Merkmal von Plastizität.

Betrachten wir den Fall eines einzigen aktiven Gleitsystems, so ist die Richtung des plastischen Gleitens \mathbf{E}_p^\bullet gleich der Richtung der Ableitung der SCHMID'schen Fließregel nach der Spannung

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z})}{\partial \mathbf{T}} \parallel \text{sym}(\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha) \parallel \mathbf{E}_p^\bullet.$$

Eine solche Beziehung nennt man **assozierte Fließregel**. Sind mehrere Gleitsysteme aktiv, so gilt die assoziierte Fließregel zwar für jedes einzelne von ihnen, nicht jedoch für deren Überlagerung.

Wenden wir uns nun der phänomenologischen Beschreibung der allgemeinen Plastizität zu. Wichtigste Fließregel ist diejenige eines **plastischen Potentials** (MELAN⁸⁴ 1938), einer

⁸⁴ Ernst Melan (1890-1963)

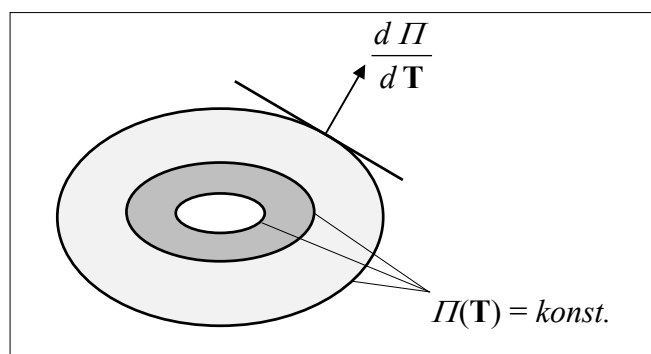
skalaren Funktion des Spannungstensors $\Pi(\mathbf{T})$, nach der der plastische Deformationszuwachs \mathbf{E}_p^\bullet in Richtung des Gradienten von $\Pi(\mathbf{T})$ geht, also

$$\mathbf{E}_p^\bullet = \lambda \frac{d\Pi}{d\mathbf{T}}$$

mit einem noch zu bestimmenden Skalar λ , der **plastischer (Konsistenz-) Parameter** genannt wird. Fasst man die Potenzialflächen mit

$$\Pi(\mathbf{T}) = \text{konst.}$$

als 5-dimensionale Hyperflächen im 6-dimensionalen Spannungsraum auf, so geht der Gradient von Π in die Normalenrichtung auf dieser Fläche.



Wählt man für das plastische Potenzial $\Pi(\mathbf{T})$ das Fließkriterium $\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ selbst, so erhält man die **assozierte Fließregel** nach v. MISES (1928)

$$(4.4.29) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}.$$

Diese spielt u. a. in der Metallplastizität eine wichtige Rolle, während beispielsweise in der Bodenmechanik nicht-assozierte Fließregeln gelten.

In jedem Falle gelten die **KUHN-TUCKER-Bedingungen**:

$$\lambda \varphi = 0 \quad \text{mit } \lambda \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi \leq 0.$$

Die zum HUBER-v. MISES-Fließkriterium assoziierte Fließregel ist dann

$$(4.4.30) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \lambda 3 \mathbf{T}'$$

und zusammen mit dem isotropen HOOKEschen Gesetz

$$(4.4.31) \quad \mathbf{E}^\bullet = \mathbf{E}_p^\bullet + \mathbf{E}_e^\bullet = 3\lambda \mathbf{T}' + \frac{I}{2G} \mathbf{T}'' - \frac{I}{3k} p^\bullet \mathbf{I}$$

Dies ist die PRANDTL⁸⁵–REUSSsche⁸⁶ Gleichung von 1924 bzw. 1930. Ihr Kugelanteil entspricht dem Kompressionsanteil des HOOKEschen Gesetzes (4.1.13), während der Deviatoranteil

⁸⁵ Ludwig Prandtl (1875-1953)

⁸⁶ Endre Reuss (1900-1968)

$$\mathbf{E}' = 3\lambda \mathbf{T}' + \frac{1}{2G} \mathbf{T}'$$

ist.

4.4.3 Verfestigungsregeln

Bevor wir uns der vollständigen Bestimmung der plastischen Deformation (und nicht nur deren Richtung) zuwenden, müssen wir uns vorher noch der Beschreibung des Verfestigungsverhaltens widmen. Wir hatten bereits in der eindimensionalen Theorie die Begriffe kinematische und isotrope Verfestigung kennengelernt. Diese sollen nun dreidimensional verallgemeinert werden.

Bei der **isotropen Verfestigung** weitet sich die Fließortkurve affin auf. Schreibt man das Fließkriterium wie in (4.4.17), so ist σ_F nicht mehr eine Materialkonstante (wie in der idealen Plastizität), sondern kann sich während des plastischen Deformationsprozesses entwickeln, beispielsweise in Analogie zu (1.4.3) als lineare Verfestigung

$$(4.4.32) \quad \sigma_F' = K \varepsilon_p' \quad K : \text{Materialkonstante}$$

oder nichtlinear

$$(4.4.33) \quad \sigma_F' = K(\varepsilon_p) \varepsilon_p' \quad K(\varepsilon_p) : \text{Materialfunktion}$$

oder mit Sättigung

$$(4.4.34) \quad \sigma_F' = K (\sigma_{F\infty} - \sigma_F) \varepsilon_p' \quad K, \sigma_{F\infty} : \text{Materialkonstanten}$$

mit der **plastischen Vergleichsdehnung**

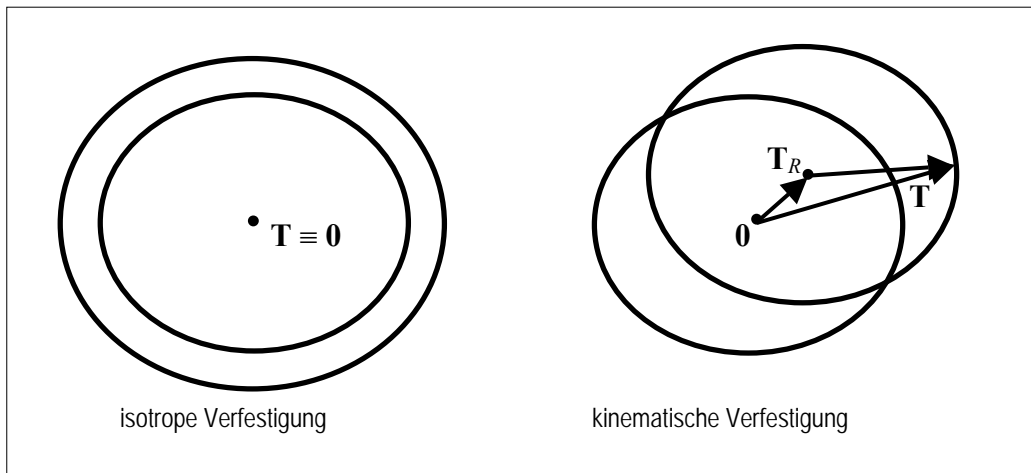
$$\varepsilon_p := \int_0^t |\mathbf{E}_p'| d\tau \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_p' = |\mathbf{E}_p'|.$$

Ein anderer Verfestigungsansatz ist die plastische Arbeitsverfestigung

$$\sigma_F' = K \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_p' \quad K : \text{Materialkonstante}$$

mit einer reellen Konstanten K . Ist K positiv, so handelt es sich um einen **Verfestigungsprozess** (engl. *work hardening*). Ist K negativ, so handelt es sich um **Entfestigung** (engl. *softening*).

Für die isotrope Verfestigung besteht die Identifikation $\mathbf{Z} \equiv \sigma_F$. Sie bewirkt eine in allen Richtungen gleichmäßige („isotrope“) Aufweitung der Fließfläche.



Bei der **kinematischen Verfestigung** verschiebt sich die Fließgrenze als starres Ganzes im Spannungsraum. Beschrieben werden kann dieser Vorgang durch eine Verschiebung ihres Mittelpunktes \mathbf{T}_R als

$$(4.4.35) \quad \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{Z} \equiv \mathbf{T}_R) = [\sigma_V(\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)]^2 - \sigma_F^2.$$

$\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R$ wird als **effektive Spannung** bezeichnet und \mathbf{T}_R als **Rückspannung** (engl. *back stress*). \mathbf{T}_R ist anfänglich Null, kann aber während des plastischen Deformationsprozesses anwachsen. Sie soll grundsätzlich symmetrisch und bei druckunabhängiger Plastizität deviatorisch sein. Für ihre Entwicklung gibt es von PRAGER⁸⁷ (1955) den Vorschlag

$$(4.4.36) \quad \dot{\mathbf{T}}_R = c(\varepsilon_p) \dot{\mathbf{E}}_p,$$

wonach der Zuwachs der Rückspannung in Richtung des plastischen Verzerrungszuwachses geht. Die skalare Materialfunktion $c(\varepsilon_p)$ bestimmt die Größe der Ver- oder Entfestigung.

Danach hat ZIEGLER⁸⁸ (1959) die Entwicklungsgleichung

$$(4.4.37) \quad \dot{\mathbf{T}}_R = \lambda C (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)$$

mit einer Konstanten C und dem plastischen Parameter λ vorgeschlagen, der aus der Konsistenzbedingung bestimmbar ist (s. u.).

Alle diese Verfestigungsregeln lassen ein beliebiges Anwachsen der Rückspannung zu. Dagegen lässt ein Ansatz von ARMSTRONG-FREDERICK (1966)

$$(4.4.38) \quad \dot{\mathbf{T}}_R = C [\dot{\mathbf{E}}_p - g(\varepsilon_p) \mathbf{T}_R \dot{\varepsilon}_p]$$

mit einer geeigneten Funktion $g(\varepsilon_p)$ eine Sättigung zu.

Bei vielen Materialien hat sich eine Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung als günstig erwiesen. Hier besteht die Identifikation $\mathbf{Z} \equiv \{\mathbf{T}_R, \sigma_F\}$. Damit hat das Fließkriterium die Form

⁸⁷ William Prager (1903-1980)

⁸⁸ Hans Ziegler (1910-1985)

$$(4.4.39) \quad \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{T}_R, \sigma_F) = \sigma_V (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)^2 - \sigma_F^2$$

und es sind

$$(4.4.40) \quad \frac{\partial \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \mathbf{T}} = 2\sigma_V \frac{\partial \sigma_V (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)}{\partial \mathbf{T}} = - \frac{\partial \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \mathbf{T}_R}$$

deviatorisch und

$$(4.4.41) \quad \frac{\partial \varphi(\mathbf{T}, \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \sigma_F} = -2\sigma_F.$$

Davon wollen wir im Weiteren ausgehen.

4.4.4 Konsistenzbedingung und inkrementelle Stoffgesetze

Betrachten wir ein elastisch-plastisches Material beim Fließen ($\sigma_V \equiv \sigma_F$) mit

- dem HOOKEschen Gesetz (4.4.2) $\mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_p)$
- dem Fließkriterium (4.4.39) $\varphi(\mathbf{T}, \mathbf{T}_R, \sigma_F) = \sigma_V (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)^2 - \sigma_F^2 = 0$
- mit isotroper Verfestigung (4.4.33) $\sigma_F^\bullet = K(\varepsilon_p) \varepsilon_p^\bullet$
- und kinematischer nach ZIEGLER (4.4.37) $\mathbf{T}_R^\bullet = \lambda C (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)$
- und der assoziierten Fließregel (4.4.29) $\mathbf{E}_p^\bullet = \lambda \frac{\partial \varphi(\mathbf{T} - \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \mathbf{T}}.$

Man kann den Skalar λ , der die Größe des plastischen Verformungszuwachses bestimmt, aus der **Konsistenz-Bedingung** (PRAGER 1949) berechnen, nach der die Spannung während des Fließens an der Fließgrenze bleibt und deshalb

$$(4.4.42) \quad 0 = \varphi(\mathbf{T} - \mathbf{T}_R, \sigma_F)^\bullet \\ = \frac{\partial \varphi(\mathbf{T} - \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \mathbf{T}} \cdot (\mathbf{T}^\bullet - \mathbf{T}_R^\bullet) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{T} - \mathbf{T}_R, \sigma_F)}{\partial \sigma_F} \sigma_F^\bullet \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{E}^\bullet - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}) - \lambda C (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R)] + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_F} K(\varepsilon_p) \lambda \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \right|,$$

woraus

$$(4.4.43) \quad \lambda = \alpha^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^\bullet$$

mit der Abkürzung

$$(4.4.44) \quad \alpha := \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} + C \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) + 2\sigma_F K(\varepsilon_p) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \right|$$

für die konsistente Fließregel folgt. Im Rahmen der assoziierten druckunabhängigen *isotropen* Plastizität ist gemäß (4.4.40) $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}$ deviatorisch und damit auch \mathbf{E}_p^\bullet . Mit dem deviatorischen Anteil des isotropen HOOKEschen Gesetz (4.1.17) erhält man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} = 2G \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}$$

und damit für die Fließregel (4.4.29)

$$(4.4.45) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \alpha^{-1} 2G \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{E}^\bullet.$$

Benutzt man das HUBER-v.MISES-Fließkriterium, indem man die Spannung durch die effektive Spannung ersetzt, so wird hieraus mit (4.4.22) und (4.4.21)

$$(4.4.46) \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \alpha^{-1} 18G (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \otimes (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot \mathbf{E}^\bullet$$

mit

$$(4.4.47) \quad \alpha := [12G + 2C + 2\sqrt{6}K(\varepsilon_p)] \sigma_F^2.$$

Manchmal ist es in der assoziierten Elastoplastizität für die numerische Integration des (immer nichtlinearen) isotropen oder anisotropen elastoplastischen Stoffgesetzes vorteilhaft, eine Raten-Form zu erzeugen. Diese ergibt sich beim Fließen mit (4.4.29) und (4.4.43) zu

$$(4.4.48) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^\bullet &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E}^\bullet - \mathbf{E}_p^\bullet) \\ &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^\bullet \end{aligned}$$

mit
$$\mathbf{H} := \mathbf{C} - \alpha^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \otimes \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}.$$

Hierin ist \mathbf{H} die symmetrische elastisch-plastische **infinitesimale Steifigkeits-Tetrade**, die i. A. von dem gesamten Deformationsprozess abhängt, also von den elastischen und plastischen Deformationen und den Verfestigungsvariablen, sowie außerdem von der Richtung des Deformationszuwachses. Im isotropen Fall gilt für den deviatorischen Teil dieser Gleichung

$$(4.4.49) \quad \mathbf{T}^\bullet = 2G \left(\mathbf{I} - \alpha^{-1} 2G \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \otimes \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} \right) \cdot \mathbf{E}^\bullet,$$

während sich der Kugelanteil rein elastisch entwickelt. Findet kein Fließen statt, so ist mit λ auch der zweite Term Null und es verbleibt lediglich die isotrop-elastische Beziehung

$$(4.4.50) \quad \mathbf{T}^\bullet = 2G \mathbf{E}^\bullet.$$

Im Innern des elastischen Bereichs und bei Entlastungen von der Fließgrenze aus fällt also \mathbf{H} mit der elastischen Steifigkeitstetrad \mathbf{C} zusammen. Bei Belastungen an der Fließgrenze hingegen gehen auch die Verfestigungsgesetze mit ein. \mathbf{H} ist also an der Fließgrenze nicht nur eine Funktion der momentanen Zustandswerte, sondern immer auch des Deformationszuwachses \mathbf{E}^\bullet , der eine Aussage darüber erlaubt, ob es sich um einen Be- oder Entlastungsprozess handelt.

Man kann für die infinitesimale Steifigkeitstetrad allgemein ansetzen

$$\mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}, \mathbf{E}^\bullet).$$

Ein inkrementelles Stoffgesetz von der speziellen Form

$$(4.4.51) \quad \mathbf{T}^\bullet = \mathbf{H}_t(\mathbf{E}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{E}^\bullet$$

heißt **hypoelastisch**. Da hier die Tangentialsteifigkeit nicht mehr von \mathbf{E}^\bullet abhängt, kann man mit hypoelastischen Gesetzen nicht die klassische Plastizitätstheorie beschreiben.

Hypoelastizität enthält als Spezialfall die nicht-lineare Elastizität in Raten-Form

$$(4.4.52) \quad \mathbf{T}^\bullet = \mathbf{C}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}^\bullet.$$

Hängt \mathbf{C} nicht einmal mehr von \mathbf{E} ab, so handelt es sich um ein linear-elastisches Material.

4.4.5 Das Postulat von DRUCKER

Betrachtet man das eindimensionale σ - ε -Diagramm des elastisch-plastischen Materials, so gilt im (stabilen) Verfestigungsbereich sowie innerhalb des elastischen Bereiches (die Positivität des Elastizitätsmoduls vorausgesetzt)

$$d\sigma d\varepsilon > 0,$$

während im (instabilen) Entfestigungsbereich

$$d\sigma d\varepsilon < 0$$

gilt. Das Vorzeichen des Produkts aus Verzerrungs- und Spannungsinkrement bestimmt also die **materielle Stabilität** eines elastisch-plastischen Materials.

In Verallgemeinerung dessen hat DRUCKER⁸⁹ (1951) als materielle Stabilitätsbedingung folgendes postuliert:

⁸⁹ Daniel C. Drucker (1918-2001)

DRUCKERsches Postulat

Für jeden Spannungskreisprozess, beginnend und endend mit einer beliebigen Spannung \mathbf{T}_A im momentanen elastischen Bereich und nur wenig über diesen hinausgehend (so dass auch \mathbf{T}_A den elastischen Bereich während des Prozesse nicht verlässt), sei das Ringintegral

$$(4.4.53) \quad \oint_{\mathbf{T}_A} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}$$

nie negativ.

Damit kann dem Material durch einen solchen Kreisprozess nie Arbeit entzogen werden. Ist das elastische Gesetz invertierbar, so handelt es sich ebenfalls um einen Kreisprozess in der elastischen Verzerrung. Zur Auswertung dieses Postulats zerlegen wir das Verzerrungsincrement in elastische und plastische Anteile

$$d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_e + d\mathbf{E}_p$$

und damit das Integral in

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathbf{T}_A} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}_e + \oint_{\mathbf{T}_A} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}_p \\ &= \oint_{\mathbf{E}_A} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{E}_e - \mathbf{T}_A \cdot \oint_{\mathbf{E}_A} d\mathbf{E}_e + \oint_{\mathbf{T}_A} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}_p \quad \text{mit } \mathbf{E}_A := \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}_A . \end{aligned}$$

Ersteres ist für hyperelastische Abhängigkeiten der Spannungen von den elastischen Verzerrungen gleich Null, das zweite ebenfalls. Letzteres kann nur beim Fließen verschieden von Null sein. Da das Postulat für alle Spannungskreisprozesse gelten soll, die nur wenig über die Fließgrenze hinausgehen (damit bleibt der Zuwachs von \mathbf{E}_p inkrementell), darf der Integrand nie negativ sein

$$(4.4.54) \quad (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E}_p \geq 0$$

oder

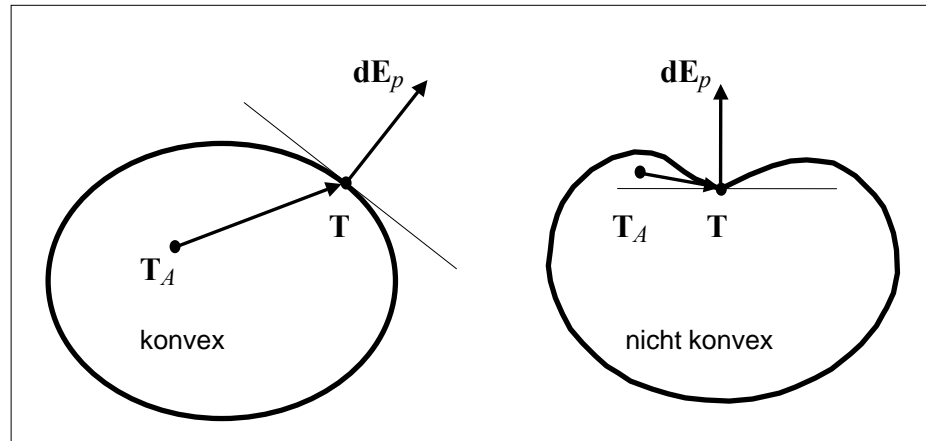
$$(4.4.55) \quad \mathbf{T} \cdot d\mathbf{E}_p \geq \mathbf{T}_A \cdot d\mathbf{E}_p$$

für alle Spannungen innerhalb und auf dem Rand der Fließgrenze. Innerhalb ist dies erfüllt, weil hier $d\mathbf{E}_p \equiv \mathbf{0}$ ist. Die Annahme, dass \mathbf{E}_p bei dem betrachteten Prozess nicht beliebig anwachsen kann, soll sicherstellen, dass \mathbf{T}_A auch weiterhin im anfänglichen elastischen Bereich bleibt.

Man folgert drei notwendige und hinreichende Bedingungen:

- 1.) die **Konvexität** der Fließfläche im Spannungsraum;
- 2.) die **Normalenregel**: die Fließregel ist assoziiert

$$d\mathbf{E}_p \parallel \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}} ;$$



3.) die Ungleichung

$$d\mathbf{T} \cdot d\mathbf{E} \geq 0.$$

Betrachten wir nämlich ein proportionales Prozess-Segment der Dauer Δt beginnend mit \mathbf{T}_A und \mathbf{E}_A auf der Fließgrenze und endend mit \mathbf{T}_E und \mathbf{E}_E gemäß

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_A + t/\Delta t (\mathbf{T}_E - \mathbf{T}_A) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_A + t/\Delta t (\mathbf{E}_E - \mathbf{E}_A),$$

dann sind an dessen Anfang die Inkremente

$$d\mathbf{T} = (\mathbf{T}_E - \mathbf{T}_A) dt/\Delta t \quad \text{und} \quad d\mathbf{E} = (\mathbf{E}_E - \mathbf{E}_A) dt/\Delta t.$$

Damit ergibt sich für das Integral aus dem Postulat in der Tat

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}_A}^{\mathbf{E}_E} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_A) \cdot d\mathbf{E} &= \int_{t=0}^{\Delta t} t/\Delta t (\mathbf{T}_E - \mathbf{T}_A) \cdot (\mathbf{E}_E - \mathbf{E}_A) dt/\Delta t \\ &= \Delta t^2/2 (\mathbf{T}_E - \mathbf{T}_A) \cdot (\mathbf{E}_E - \mathbf{E}_A) / \Delta t = 1/2 (\Delta t/dt)^2 d\mathbf{T} \cdot d\mathbf{E}, \end{aligned}$$

woraus die obige Ungleichung folgt. Die beiden anderen Bedingungen 1.) und 2.) macht man sich leicht an obiger Skizze klar.

Weniger streng als DRUCKERS Postulat ist **ILYUSHINS⁹⁰ Postulat** (1961), bei dem gefordert wird, dass die Spannungsarbeit für beliebige *Verzerrungskreisprozesse*, die plastische Anteile enthalten, immer positiv ist. Daraus kann man ebenfalls Normalität folgern, aber nicht die Konvexität der Fließfläche. Erst wenn man noch annimmt, dass sich das elastische Verhalten nicht durch das Fließen verändert, kann man auch auf die Konvexität schließen, wie von KRAWIETZ (1981, 1986) gezeigt wurde.

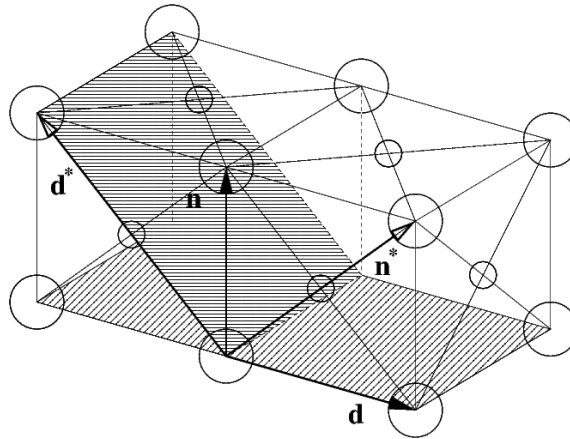
Es sei aber betont, dass beide Postulate keine Naturgesetze sind, sondern auch verletzt werden können. So ist bei vielen realen Materialien und Materialmodellen die Normalität nicht gültig. Beispiel dafür ist die Plastizität von granularen Medien wie trockenem Sand.

Beispiel 21. SCHMID-Gesetz

Ein auf Zug beanspruchtes Bauteil soll aus einem kubisch raumzentrierten Einkristall mit den Gleitsystemen $\langle 001 \rangle \{001\}$ einer kritischen SCHMID-Spannung von

⁹⁰ Alexey Antonovich Ilyushin (1911-1998)

$\tau_k = 100 \text{ MPa}$ (Primärgleitsysteme) und $\langle 011 \rangle \{011\}$ mit $\tau_k^* = 150 \text{ MPa}$ (Sekundär-
 gleitsysteme) gefertigt werden. (Geschweifte Klammern $\{ \}$ schließen kristallographisch
 äquivalente Gleitebenen, Winkel $\langle \rangle$ schließen kristallographisch äquivalente Gleit-
 richtungen ein). Für die Gleitsysteme gelte das SCHMID-Gesetz (4.4.8). In dem Bauteil
 liegt ein einachsiger Zugspannungszustand vor. Man bestimme die optimale
 Ausrichtung des Kristallgitters bezüglich der Belastungsrichtung, so dass eine
 möglichst große Zugspannung aufgebracht werden kann.



Lösung: Zunächst müssen alle Gleitsysteme ermittelt werden. Sinnvolle Kombinationen
 von Gleitsystemvektoren sind alle Kombinationen mit $\mathbf{d}_\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha = 0$. Dies sind in beiden
 Fällen sechs Varianten. Die SCHMID-Spannung ergibt sich als $\tau_\alpha = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_\alpha$ gemäß
 (4.4.7) mit den SCHMID-Tensoren $\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{n}^\alpha$. Aufgrund der Symmetrie von \mathbf{T}
 geht von \mathbf{M}_α nur der symmetrische Anteil ein. Da \mathbf{d}_α und \mathbf{n}^α in beiden Gleitsystem-
 familien kristallographisch äquivalent sind, erhält man jeweils Paare von Gleitsystemen,
 deren SCHMID-Tensoren \mathbf{M}_α sich nur durch eine Transposition unterscheiden. Daher
 sind die symmetrischen Anteile von \mathbf{M}_α , die bei der Berechnung von τ_α eingehen, i-
 dentisch, was auf paarweise identische SCHMID-Spannung führt. Daher müssen nicht
 jeweils sechs, sondern nur drei Varianten beachtet werden. Für die Primärgleitsysteme
 erhält man

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{M}_{13} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{M}_{23} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3$$

und für die Sekundärgleitsysteme

$$\mathbf{M}_{12}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{M}_{13}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{M}_{23}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \otimes (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3).$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ resultiert aus der Normierung der Vektoren \mathbf{d}_α und \mathbf{n}^α . Als nächstes
 parametrisieren wir die Zugrichtung \mathbf{z} mit den Winkeln θ und φ auf der Einheits-
 kugel

$$\mathbf{z} = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3.$$

Damit können wir den einachsigen Spannungszustand angeben als

$$\mathbf{T} = \sigma \mathbf{z} \otimes \mathbf{z}$$

$$= \sigma \begin{bmatrix} \cos^2\theta \cos^2\varphi & \sin\varphi \cos\varphi \cos^2\theta & \cos\varphi \cos\theta \sin\theta \\ & \cos^2\theta \sin^2\varphi & \sin\varphi \cos\theta \sin\theta \\ \text{symmetrisch} & & \sin^2\theta \end{bmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Nun können wir die Schubspannungen in allen Gleitsystemen bestimmen

$$\tau_{12} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{12} = \sigma_{12} = \sigma \cos\varphi \cos^2\theta \sin\varphi$$

$$\tau_{13} = \sigma \cos\varphi \cos\theta \sin\theta$$

$$\tau_{23} = \sigma \sin\varphi \cos\theta \sin\theta$$

$$\tau_{12}^* = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_{12}^* = (\sigma_{11} + \sigma_{21} - \sigma_{21} - \sigma_{22}) / 2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) / 2$$

$$= \sigma \cos^2\theta (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) / 2$$

$$\tau_{13}^* = \sigma (\cos^2\varphi \cos^2\theta - \sin^2\theta) / 2$$

$$\tau_{23}^* = \sigma (\sin^2\varphi \cos^2\theta - \sin^2\theta) / 2$$

Die auf der rechten Seite bei σ stehenden Faktoren, für die wir $|f_{ij}(\varphi, \theta)|$ schreiben, werden als SCHMID-Faktoren bezeichnet. Setzen wir nun die sechs SCHMID-Spannungen in das SCHMID-Gesetz $|\tau_\alpha| \leq \tau_k$ ein, so erhalten wir sechs Ungleichungen der Form

$$\sigma \leq \tau_k / |f_{12}(\varphi, \theta)|$$

$$\sigma \leq \tau_k / |f_{13}(\varphi, \theta)|$$

$$\sigma \leq \tau_k / |f_{23}(\varphi, \theta)|$$

$$\sigma \leq \tau_k^* / |f_{12}^*(\varphi, \theta)|$$

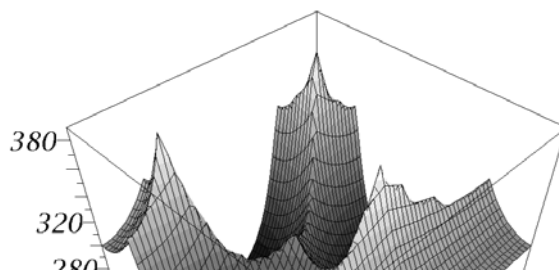
$$\sigma \leq \tau_k^* / |f_{13}^*(\varphi, \theta)|$$

$$\sigma \leq \tau_k^* / |f_{23}^*(\varphi, \theta)|.$$

Von diesen sechs Ungleichungen ist diejenige am restriktivsten, deren rechte Seite am kleinsten ist. Wir müssen also dafür sorgen, dass die kleinste der sechs rechten Seiten möglichst groß wird, wenn wir die ertragbare Zugspannung σ maximieren wollen.

$$\begin{aligned} \max_{\varphi, \theta} \{ & \min [\tau_k / | \cos^2\theta \cos\varphi \sin\varphi | , \\ & \tau_k / | \cos\varphi \cos\theta \sin\theta | , \\ & \tau_k / | \sin\varphi \cos\theta \sin\theta | , \\ & 2\tau_k^* / | \cos^2\theta (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) | , \\ & 2\tau_k^* / | \cos^2\varphi \cos^2\theta - \sin^2\theta | , \\ & 2\tau_k^* / | \sin^2\varphi \cos^2\theta - \sin^2\theta |] \} . \end{aligned}$$

Dies geschieht am einfachsten, indem man die innere Funktion $\min(\dots)$ über φ und θ mit einem Computer-Algebra-System darstellt. Aus Symmetriegründen reicht es, wenn man die Funktion von φ und θ jeweils von 0 bis $\pi/2$ betrachtet:



$$0 < \theta < \pi/2$$

$$0 < \varphi < \pi/2$$

Man erkennt, dass es eine Dreifachsymmetrie mit jeweils drei globalen Maxima gibt. Wir können uns nun z. B. auf $\varphi = \pi/4$ festlegen und über θ maximieren. Das Maximum liegt bei $\varphi = 45^\circ$ und $\theta = 66,82^\circ$ und beträgt ca. $390,83 \text{ MPa}$. Dies ist also die maximal mögliche Zugspannung bei entsprechender Orientierung des Einkristalls bezüglich der Spannungsrichtung. Die maximal ertragbare Zugspannung nimmt den kleinstmöglichen Wert ($\sigma = 200 \text{ MPa}$) an, wenn man in einer der $\langle 110 \rangle$ -Richtungen zieht. Für Zug in der $\langle 111 \rangle$ -Richtung (z. B. bei $\varphi = \pi/4$, $\theta = 35,12^\circ$) ergibt sich $\sigma_{max} = 300 \text{ MPa}$.

Beispiel 22. J_2 -Plastizität

Eine Kugelschale (Innenradius r_i , Außenradius r_a) stehe unter einem Innendruck p_i . Der Außendruck wird zu Null angenommen. Das Material sei isotrop elastisch mit den LAMÉschen Konstanten λ und μ und fließe plastisch nach dem J_2 -Kriterium bei einer Fließspannung σ_F . Bestimmen Sie, bei welchem Innendruck plastisches Fließen einsetzt. Ermitteln Sie den Radius r_p , der die plastische Zone begrenzt, als Funktion des Innendruckes p_i . Wie groß ist p_i , wenn die Kugelschale sich voll plastisch verformt?

Lösung: Wir arbeiten mit einem an das Problem angepassten KOOS, nämlich Kugelkoordinaten.

$$x_1 = r \cos \theta \cos \varphi$$

$$x_2 = r \cos \theta \sin \varphi$$

$$x_3 = r \sin \theta$$

In ihnen benötigen wir die Divergenz und den Deformator. Die normierte Tangentebasis ergibt sich durch

$$\mathbf{e}_r = \partial(x_i \mathbf{e}_i)/\partial r \quad \mathbf{e}_\varphi = \partial(x_i \mathbf{e}_i)/\partial \varphi \quad \mathbf{e}_\theta = \partial(x_i \mathbf{e}_i)/\partial \theta$$

mit anschließender Normierung

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \sin \theta \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{B22.1}$$

Die Ableitungen der Basisvektoren bezüglich der Kugelkoordinaten sind Null bis auf

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{r, \varphi} &= \cos \theta \mathbf{e}_{\varphi} \\
 \mathbf{e}_{r, \theta} &= \mathbf{e}_{\theta} \\
 \text{(B22.2)} \quad \mathbf{e}_{\varphi, \varphi} &= -\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_{\theta} \\
 \mathbf{e}_{\theta, \varphi} &= -\sin \theta \mathbf{e}_{\varphi} \\
 \mathbf{e}_{\theta, \theta} &= -\mathbf{e}_r.
 \end{aligned}$$

Den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten erhält man, indem man die Gleichungen (B22.1) nach $\mathbf{e}_{(1,2,3)}$ auflöst und in (2.2.20) \mathbf{e}_i durch $\mathbf{e}_{(r, \varphi, \theta)}$ ersetzt. Außerdem müssen die partiellen Ableitungen ersetzt werden mit der Kettenregel

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}.$$

Die partiellen Ableitungen $\partial(r, \varphi, \theta)/\partial x_i$ kann man der Inversen der JACOBI-Matrix

$$J_{ij} = \partial x_i / \partial(r, \varphi, \theta)$$

entnehmen. Letztere Rechnung ist aufwendig und fehleranfällig, weswegen wir auf die Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (Mathematica) zurückgreifen:

```

Remove["Global`*"]; (* Cache leeren *)
(* Normierte Kugelkoordinaten-Basis invertieren *)
sol=FullSimplify[Solve[{er==Cos[t]*Cos[p]*ex+Cos[t]*Sin[p]*ey+
  Sin[t]*ez, ep== -Sin[p]*ex+Cos[p]*ey, et== -Sin[t]*Cos[p]*ex-
  Sin[t]*Sin[p]*ey+Cos[t]*ez}, {ex, ey, ez}]];
ex=ex/.sol[[1]];
ey=ey/.sol[[1]];
ez=ez/.sol[[1]];
(* Koordinatenwechsel *)
x=r*Cos[t]*Cos[p];
y=r*Cos[t]*Sin[p];
z=r*SIN[t];
(* Jacobimatrix und deren Inverse ermitteln *)
J=FullSimplify[{{D[x, r], D[x, p], D[x, t]}, {D[y, r], D[y, p],
  D[y, t]}, {D[z, r], D[z, p], D[z, t]}}];
Jinv=FullSimplify[Inverse[J]];
(* Partielle Ableitungen nach r,p,t als Vektor von links an
  Jinv heranmultiplizieren um die partiellen Ableitungen nach
  x,y,z zu erhalten *)
partdiffs=FullSimplify[{ddr, ddp, ddt}.Jinv];
(* Jetzt liegen die Basisvektoren und die partiellen Ableitungen
  nach x,y,z vor: Nablaoperator aufbauen und zusammenfassen *)
FullSimplify[ex*partdiffs[[1]]+
  ey*partdiffs[[2]]+
  ez*partdiffs[[3]]]

```

Als Ausgabe erhält man

$$(\text{ddt et} + \text{ddr er} + \text{ddp ep} \sec[t]) / r,$$

also

$$\nabla = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial(\cdot)}{r \partial \theta} \mathbf{e}_{\theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\varphi}.$$

Wegen der Kugelsymmetrie ist klar, dass $\sigma_{rad} = \sigma_{rr}$ und $\sigma_{tang} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ Hauptspannungen sind, die Schubspannungskomponenten also bezüglich der gewählten Basis verschwinden. Mit dem Nabla-Operator und den Regeln (B22.2) für die Ableitungen

können wir nun die Divergenz des Spannungstensors angeben

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} = & [\sigma_{rr, r} + (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) / r] \mathbf{e}_r + [\sigma_{\varphi\varphi, \varphi} \frac{1}{r \cos \theta}] \mathbf{e}_\varphi \\ & + [\sigma_{\theta\theta, \theta} + \tan \theta (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta})] / r \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Wegen der Kugelsymmetrie verschwinden die Ableitungen nach φ und θ , und $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{tang}$, so dass von der statischen lokalen Impulsbilanz ohne Massenkraftdichte nur

$$(B22.3) \quad \sigma_{rad, r} + 2(\sigma_{rad} - \sigma_{tang}) / r = 0$$

übrig bleibt. Wir nehmen ein kugelsymmetrisches Verschiebungsfeld an

$$\mathbf{u} = u(r) \mathbf{e}_r.$$

Die Abhängigkeit von r schreiben wir im folgenden nicht aus. Mit $\mathbf{E} = \operatorname{def} \mathbf{u}$ erhält man

$$\mathbf{E} = u_{, r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + u / r (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta).$$

Nun können wir zuerst den rein elastischen Fall untersuchen. Setzen wir letztere Gleichung in das elastische Gesetz (4.1.17) ein, so erhalten wir den Spannungstensor. Diesen setzen wir in (B22.3) ein und erhalten (analog zur Vorgehensweise im Beispiel 13) eine Differentialgleichung für u

$$0 = (\lambda + 2\mu) (u_{, rr} + 2u_{, r} / r - 2u / r^2).$$

Deren Lösung ist

$$(B22.4) \quad u = a r + b / r^2.$$

Die Spannungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \sigma_{rad} &= a (3\lambda + 2\mu) - 4b\mu / r^3 \\ \sigma_{tang} &= a (3\lambda + 2\mu) + 2b\mu / r^3. \end{aligned}$$

Als Randbedingungen haben wir $\sigma_{rad}(r_a) = 0$ und $\sigma_{rad}(r_i) = -p_i$, womit wir

$$\begin{aligned} a &= p_i r_i^3 / [(3\lambda + 2\mu) (r_a^3 - r_i^3)] \\ b &= p_i r_i^3 r_a^3 / [4\mu (r_a^3 - r_i^3)] \end{aligned}$$

ermitteln können. Wegen $p_i, r_a, r_i, \lambda, \mu > 0$ und $r_a > r_i$ sind $a, b > 0$, woraus man $\sigma_{tang} > \sigma_{rad}$ und $u > 0$ schließen kann. Dies stimmt mit der Anschauung überein, dass sich die Kugel unter Innendruck aufweitet.

Wir wollen nun wissen, bei welcher Belastung und an welcher Stelle die HUBER – v. MISESsche Vergleichsspannung der Fließspannung entspricht. Mit den Schubspannungskomponenten gleich Null ergibt sich J_2 nach Gleichung (4.4.20) zu

$$J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_{rad} - \sigma_{tang})^2.$$

Laut Gleichung (4.4.16) ist der Grenzfall durch

$$3J_2 = \sigma_F^2$$

gegeben, es gilt also $\sigma_F = |\sigma_{rad} - \sigma_{tang}|$. Wir hatten schon festgestellt das $\sigma_{tang} > \sigma_{rad}$, also

$$\sigma_F = \sigma_{tang} - \sigma_{rad} = 6b\mu / r^3.$$

Diese Formel ergibt sich auch für die TRESCA-Fließregel, wenn σ_F im Zugversuch ermittelt wird. Der kritische Radius ergibt sich zu

$$r_{plast} = (6b\mu/\sigma_F)^{1/3} = k p_i^{1/3} \quad \text{mit} \quad k = r_a r_i \{3/[2\sigma_F(r_a^3 - r_i^3)]\}^{1/3}.$$

Da r_{plast} mit ansteigendem Innendruck monoton von Null an wächst, ist der elastische Grenzfall durch $r_{plast} \equiv r_i$ gekennzeichnet. Dies führt auf

$$(B22.5) \quad p_{i \text{ krit elast}} = 2\sigma_F (1 - r_i^3/r_a^3) / 3.$$

Betrachten wir nun den Fall $p_i > p_{i \text{ krit elast}}$. Offenbar bildet sich bei $r_i < r < r_{plast}$ ein Bereich plastischer Deformationen aus, wohingegen in $r_{plast} < r < r_a$ die Verzerrungen elastisch bleiben. Für letzteren haben wir bereits alle notwendigen Gleichungen beisammen. Im plastischen Bereich muss die lokale Gleichgewichts-Bedingung (B22.3) gelten, was mit $\sigma_F = \sigma_{tang} - \sigma_{rad}$ auf

$$0 = \sigma_{rad, r} - 2\sigma_F/r$$

führt. Die Integration über r liefert

$$(B22.6) \quad \sigma_{rad} = 2\sigma_F \ln r + c$$

mit einer Konstanten c . Dies muss an die Randbedingungen angepasst werden. Betrachten wir erstmal den Grenzfall $r_{plast} \equiv r_a$. Dann können wir letztere Gleichung analog zum Vorgehen im rein elastischen Fall an die Randbedingungen $\sigma_{rad} = 0$ bei $r \equiv r_a$ und $\sigma_{rad} = -p_i$ bei $r \equiv r_i$ anpassen

$$0 = 2\sigma_F \ln r_a + c$$

$$-p_i = 2\sigma_F \ln r_i + c.$$

Die Elimination von c liefert einen kritischen Innendruck

$$(B22.7) \quad p_{i \text{ krit plast}} = 2\sigma_F \ln (r_a/r_i),$$

bei welchem die Hohlkugel sich voll plastisch verformt. Nun kann man bereits die plastische Reserve angeben, die wir hier als das Verhältnis von $p_{i \text{ krit plast}}$ zu $p_{i \text{ krit elast}}$ definieren

$$R = p_{i \text{ krit plast}}/p_{i \text{ krit elast}} = 3 \ln(r_a/r_i) / [1 - (r_i/r_a)^3].$$

Wir haben nun die Extremfälle $r_{plast} \equiv r_i$ und $r_{plast} \equiv r_a$ abgehandelt und wenden uns nun dem Fall $r_i < r_{plast} < r_a$ zu. Die Verzerrungen werden additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil gem. (4.4.1) zerlegt. \mathbf{E}_p ist koaxial zu den Hauptspannungen, kugelsymmetrisch, und aufgrund der Volumenkonstanz unter plastischer Verzerrung spurfrei, woraus

$$\mathbf{E}_p = \varepsilon_p \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r - 1/2 \varepsilon_p (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta)$$

folgt. Somit lässt sich der Spannungszustand wieder über das elastische Gesetz darstellen

$$(B22.8) \quad \sigma_{rad} = \lambda (u_{,r} + 2u/r) + 2\mu (u_{,r} - \varepsilon_p)$$

$$(B22.9) \quad \sigma_{tang} = \lambda (u_{,r} + 2u/r) + 2\mu (u/r + \varepsilon_p/2).$$

Setzt man (B22.6) und (B22.8) gleich, findet man die erste Dgl. für die zwei unbekannt Funktionen ε_p und u

$$(B22.10) \quad \lambda (u_{,r} + 2u/r) + 2\mu (u_{,r} - \varepsilon_p) = 2\sigma_F \ln r + c.$$

Das Gleichungssystem wird durch die Konsistenzbedingung $\sigma_F = \sigma_{tang} - \sigma_{rad}$ im gesamten plastischen Bereich komplettiert

$$(B22.11) \quad \sigma_F = 2 \mu (u/r + \varepsilon_p/2 - u_{,r} + \varepsilon_p).$$

Letztere Gleichung lässt sich leicht nach

$$\varepsilon_p = \sigma_F/(3\mu) + 2(u_{,r} - u/r)/3$$

umstellen und in (B22.10) einsetzen, was schließlich eine Dgl. für u liefert

$$(3\lambda + 2\mu)(u_{,r} + 2u/r)/3 = \sigma_F(2 \ln r + \frac{2}{3}) + c.$$

Deren Lösung ist

$$(B22.12) \quad u = d/r^2 + r(c + 2\sigma_F \ln r)/(3\lambda + 2\mu),$$

woraus sich wiederum

$$(B22.13) \quad \varepsilon_p = \sigma_F(\lambda + 2\mu)/(3\lambda\mu + 2\mu^2) - 2d/r^3$$

ergibt. Wir haben also zwei Funktionen für das gesamte Verschiebungsfeld, (B22.12) für $r_i < r < r_{plast}$ und (B22.4) für $r_{plast} < r < r_a$ mit insgesamt 5 zu ermittelnden Parametern a, b, c, d und r_{plast} . Wir benötigen deshalb 5 Rand- und Übergangsbedingungen. Dies sind erstmal die schon im rein elastischen Teil benötigten Randbedingungen

$$\sigma_{radEP}(r_i) = -p_i$$

$$\sigma_{radE}(r_a) = 0,$$

die kinematische Kompatibilität

$$u_{EP}(r_{plast}) = u_E(r_{plast}),$$

die Gleichgewichtsbedingung am Übergang vom plastischen zum elastischen Bereich

$$\sigma_{radEP}(r_{plast}) = \sigma_{radE}(r_{plast})$$

und dem Verschwinden der plastischen Dehnungen bei r_{plast}

$$\varepsilon_p(r_{plast}) = 0.$$

Zur Unterscheidung wurden die Funktionen mit EP für den elastoplastischen Bereich $r < r_{plast}$ und mit E für den elastischen Bereich $r_{plast} < r$ indiziert. Letztere Gleichungen werden mit den Lösungen für $u_E(r)$, $u_{EP}(r)$ und $\varepsilon_p(r)$ (B22.4, B22.12 und B22.13) zu

$$(B22.14) \quad c + 2 \sigma_F \ln r_i = -p_i$$

$$(B22.15) \quad a(3\lambda + 2\mu) = 4b\mu / r_a^2$$

$$(B22.16) \quad (d - b)/r_p^2 + r_p(c + 2 \sigma_F \ln r_p)/(3\lambda + 2\mu) = a r_p$$

$$(B22.17) \quad c + 2 \sigma_F \ln r_p = a(3\lambda + 2\mu) - 4b\mu / r_p^3$$

$$(B22.18) \quad -2d/r_p^3 + \sigma_F(\lambda/\mu + 2)/(3\lambda + 2\mu) = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist linear in a, b, c, d . (B22.14) kann direkt nach c aufgelöst werden

$$c = -p_i - 2 \sigma_F \ln r_i.$$

d ergibt sich direkt aus (B22.18),

$$d = r_p^3 \sigma_F (\lambda / \mu + 2) / (6\lambda + 4\mu).$$

Setzt man c und d in (B22.16) ein, so liefert dies zusammen mit (B22.15) ein lineares Gleichungssystem für a und b , dessen Lösung

$$a = 2 r_p^3 (\sigma_F (\lambda + 2\mu + 4\mu \ln(r_p/r_i)) - 2\mu p_i) / \{(3\lambda + 2\mu)[(3\lambda + 2\mu) r_a^3 + 4\mu r_p^3]\}$$

$$b = r_p^3 r_a^3 (\sigma_F (\lambda + 2\mu + 4\mu \ln(r_p/r_i)) - 2\mu p_i) / \{2\mu[(3\lambda + 2\mu) r_a^3 + 4\mu r_p^3]\}$$

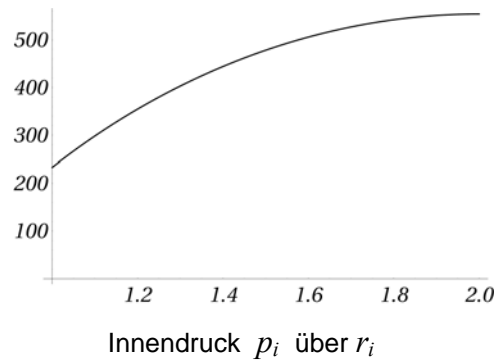
ist. Setzen wir nun a , b , c und d in die einzige noch nicht benutzte Gleichung (B22.17) ein, so erhalten wir

$$0 = (\lambda + 2\mu) [3 p_i r_a^3 - 2\sigma_F (r_a^3 - r_p^3) - 6\sigma_F r_a^3 \ln(r_p/r_i)] / [(3\lambda + 2\mu) r_a^3 + 4\mu r_p^3].$$

Dies lässt sich nicht nach r_p auflösen. Man kann aber $p_i(r_p)$ angeben

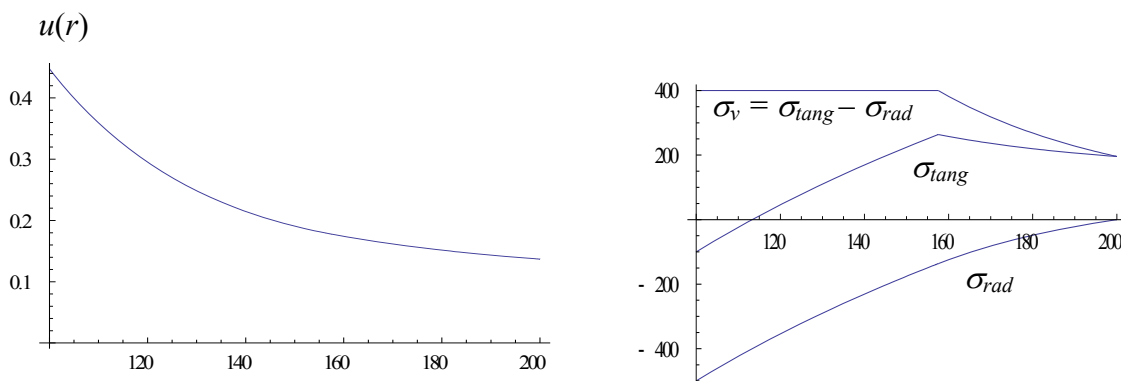
$$p_i(r_p) = \sigma_F [2/3 - 2r_p^3/(3r_a^3) + 2 \ln(r_p/r_i)].$$

Hier finden wir die Grenzfälle $r_p = r_i$ (B22.5) und $r_p = r_a$ (B22.7) wieder. Letztere Funktion ist für die Parameter $r_a = 2r_i$, $\sigma_F = 400 \text{ MPa}$ dargestellt, wobei der Radius auf r_i bezogen wurde.



Die Grenzfälle ergeben sich zu $p_i = 233,3 \text{ MPa}$ am Beginn plastischer Verformung im Inneren und $p_i = 554,5 \text{ MPa}$ bei voller plastischer Verformung. Die größte plastische Verzerrung beträgt dann $\epsilon_p \approx -0,019$ und ist am Innenradius zu finden.

Werfen wir noch einen Blick auf den Verschiebungs- und Spannungszustand. Für $r_i = r_a/2 = 100 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$, $\sigma_F = 400 \text{ MPa}$ und $p_i = 500 \text{ MPa}$ ergeben sich die im Folgenden dargestellten Verläufe.



Aufgetragen ist die radiale Verschiebung in mm (links) und Vergleichs-, Radial- und

Tangentialspannung (rechts) über dem Radius in *mm*. Bei den Spannungen ist bei $r_{plast} = 158 \text{ mm}$ deutlich der Übergang vom plastischen zum elastischen Bereich zu erkennen.

4.4.6 Thermoplastizität

Literatur

Bertram, A., Krawietz, A.: *On the Introduction of Linear Thermoplasticity*. Acta Mechanica **223**,10, 2257-2268, (2012)

Farren, W. S., Taylor, G. I.: *The heat developed during plastic extension of metals*. Proc. Royal Soc. London, Series A. **107**, 422-451 (1925)

Lemaitre, J., Chaboche, J.-L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press (1990)

Maugin, G. A.: *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press (1992)

Negahban, M.: *The Mechanical and Thermodynamical Theory of Plasticity*. CRC Press, Boca Raton (2012)

Taylor, G. I., Quinney, H.: *The latent heat remaining in a metal after cold working*. Proc. Roy. Soc. London **A163**, 157-181 (1937)

Wenn in einem Material plastisches Fließen auftritt, so wird ein großer Teil der mechanischen Arbeit dissipiert, d. h. entweder in Wärme umgewandelt oder durch Änderungen der Mikrostruktur verbraucht, wie bereits in den historischen Experimenten von FARREN/TAYLOR (1925) und TAYLOR/QUINNEY (1937) gezeigt wurde. Dies kann lokal zu größeren Temperaturänderungen führen, die wiederum auch das Verhalten beeinflussen. Aus diesem Grunde ist es erforderlich, eine thermo-mechanische Plastizitätstheorie zu entwickeln. Eine solche bietet dann auch die Möglichkeit, die Restriktionen zu untersuchen, die durch die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung an die Materialgesetze gestellt werden. Dadurch gelangt man dann zu einer *thermodynamisch konsistenten* Plastizitätstheorie.

Im Gegensatz zur Thermoelastizität benötigt man bei elastoplastischem Verhalten außer dem thermokinematischen Zustand (Temperatur und Deformation) noch weitere innere Variablen, von denen wir annehmen, dass sie durch Entwicklungsgleichungen in Abhängigkeit vom thermokinematischen Prozess bestimmt werden können. Die inneren Variablen der Elastoplastizität sind die plastische Deformation $\mathbf{E}_p = \mathbf{E} - \mathbf{E}_e$ gemäß (4.4.1) und der Vektor der Verfestigungsvariablen \mathbf{Z} (hier tensorwertig notiert).

Der Satz der Materialgleichungen für ein thermoplastisches Material wird angesetzt als

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= T(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) && \text{für die Spannungen} \\
 \mathbf{q} &= q(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) && \text{für den Wärmefluss} \\
 \eta &= \eta(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) && \text{für die Entropie}
 \end{aligned}
 \tag{4.4.56}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) \quad \text{für die innere Energie}$$

oder
$$\psi = \psi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) \quad \text{für die freie Energie.}$$

Wir nehmen an, dass das Material thermo-elastische Bereiche besitzt mit zugehörigem

$$(4.4.57) \quad \bullet \text{ Fließkriterium} \quad \varphi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}),$$

die genau dann gewechselt werden, wenn

$$(4.4.58) \quad \bullet \text{ die Fließbedingung} \quad \varphi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) = 0$$

$$(4.4.59) \quad \bullet \text{ und die Belastungsbedingung} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}' + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \theta' > 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Das Fließkriterium kann mit dem elastischen Gesetz (4.4.56₁) in den Spannungsraum transformiert werden, falls dies gewünscht wird. Ein typisches Beispiel dafür ist die Verallgemeinerung des HUBER – v. MISES-Fließkriteriums (4.4.21)

$$\varphi(\mathbf{T}, \sigma_F) = \sqrt[3]{2} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}' - \sigma_F(\theta)^2$$

mit einer Temperatur-abhängigen Fließspannung $\sigma_F(\theta)$.

Falls nicht beide Bedingungen erfüllt sind, handelt es sich um einen elastischen Zustand und es sind $\mathbf{E}_p' \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{Z}' \equiv \mathbf{0}$. Ansonsten handelt es sich um einen Fließzustand. Demnach müssen die Entwicklungsgleichungen für \mathbf{E}_p und \mathbf{Z} einen Schalter enthalten, der zwischen elastischen und Fließzuständen die Entwicklung dieser beider plastischen Variablen an oder abschaltet.

Wir wollen als Nächstes untersuchen, welche Folgerungen sich aus der *CDU* für die thermo-elastischen Materialfunktionen ziehen lassen. Mit dem obigen Ansatz (4.4.56₅) für die freie Energie erhalten wir aus der *CDU* (4.2.9) mit der Zerlegung (4.4.1)

$$(4.4.60) \quad \begin{aligned} 0 &\geq \psi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})' + \eta \theta' - \frac{1}{\rho} \mathbf{T}' \cdot \mathbf{E}' + \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}_e' + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \theta' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_p} \cdot \mathbf{E}_p' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}' \\ &\quad + \eta \theta' - \frac{1}{\rho} \mathbf{T}' \cdot (\mathbf{E}_e' + \mathbf{E}_p') + \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta}. \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst einen elastischen Zustand mit $\mathbf{E}_p' \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{Z}' \equiv \mathbf{0}$ unterhalb der Fließgrenze ($\varphi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) < 0$), so verbleibt hiervon lediglich der reversible Anteil analog zu (4.2.16)

$$(4.4.61) \quad 0 \geq \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_e} - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \right) \cdot \mathbf{E}_e' + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta \right) \theta' + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}' + \frac{\mathbf{q}' \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta}.$$

Daraus folgen wieder als notwendige und hinreichende Bedingungen analog zu (4.2.17-19) die thermo-elastischen Beziehungen, nämlich die Unabhängigkeit der freien Energie vom Temperaturgradienten $\psi = \psi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$ und die Potenzialbeziehungen

$$(4.4.62) \quad \mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_e} = T(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

$$(4.4.63) \quad \eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \eta(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

sowie die Wärmeleitungs-Ungleichung

$$(4.4.64) \quad q(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) \cdot \mathbf{g} \leq 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen müssen diese Gleichungen auch auf der Fließgrenze und speziell beim Fließen gelten. Hier muss dann noch zusätzlich für die irreversiblen Anteile von (4.4.60) die **Dissipations-Restungleichung** (DU) gelten

$$0 \geq \left(- \frac{\mathbf{T}}{\rho} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_p} \right) \cdot \mathbf{E}_p \cdot + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z} \cdot + \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho \theta}. \quad (DU)$$

Diese Ungleichung muss für jeden Wert des Temperaturgradienten \mathbf{g} gelten. Da nur der letzte Term von \mathbf{g} abhängt, ist die DU für beliebige Prozesse nur dann erfüllt, wenn sowohl die Wärmeleitungs-Ungleichung (4.4.64) und davon unabhängig die mechanische Dissipations-Restungleichung

$$(4.4.65) \quad \delta_m := \left(\frac{\mathbf{T}}{\rho} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_p} \right) \cdot \mathbf{E}_p \cdot - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z} \cdot \geq 0 \quad (DU)$$

gelten. Darin kann der Term $\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_p}$ als Rückspannung gedeutet werden (s. 4.4.35) und die

Klammer als eine effektive Spannung. Die hieraus folgenden Einschränkungen für die Materialfunktionen werden wir später betrachten.

Für viele Materialien, insbesondere für Metalle, ist es eine sowohl mikrophysikalisch als auch experimentell gut abgesicherte Tatsache, dass sich das elastische Verhalten innerhalb der thermo-elastischen Bereiche auch bei größeren plastischen Verformungen nur wenig ändert, weshalb man es meistens als invariant annimmt.

Annahme:

In allen thermo-elastischen Bereichen ist das thermo-elastische Materialverhalten identisch.

Konkret soll dies heißen, dass in elastischen Zuständen bei vorgegebenen Massenkräften \mathbf{b} und vorgegebener Wärmezufuhr Q alle mit Hilfe der Bilanzgleichungen CI und $I.HS$ messbaren Größen wie

- die Spannungen \mathbf{T}
- der Zuwachs der inneren Energie $\varepsilon \cdot$
- die Wärmeflüsse \mathbf{q}

nur von der elastischen Verzerrung und der Temperatur abhängen, nicht aber von den plastischen inneren Variablen \mathbf{E}_p und \mathbf{Z} .

Für elastische Zustände ist die mechanische Dissipation in (4.4.65) gleich Null und somit folgt aus ihrer Definition (4.2.10)

$$(4.4.66) \quad \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} = \rho \theta \dot{\eta}.$$

Mit (4.2.18) ist die rechte Seite für elastische Zustände

$$\rho \theta \dot{\eta} = \rho \theta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \dot{\mathbf{E}}_e + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \dot{\theta} \right),$$

was nach der obigen Annahme unabhängig von \mathbf{E}_p und \mathbf{Z} sein muss. Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgende Zerlegung der Entropie in einen elastischen und einen plastischen Anteil existiert

$$(4.4.67) \quad \eta = \eta_e(\mathbf{E}_e, \theta) + \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z}).$$

Für die Spannungen bedeutet die obige Annahme, dass sie ebenfalls nicht von \mathbf{E}_p und \mathbf{Z} abhängen können

$$\mathbf{T} = T(\mathbf{E}_e, \theta)$$

und mit (4.4.62) erhalten wir

$$(4.4.68) \quad T(\mathbf{E}_e, \theta) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}_e}.$$

Mit (4.4.63) und (4.4.67) gilt deshalb

$$(4.4.69) \quad \eta_e(\mathbf{E}_e, \theta) + \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

was zu einer Aufspaltung der freien Energie führt

$$(4.4.70) \quad \psi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) = \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) - \theta \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) + \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

mit
$$\eta_e(\mathbf{E}_e, \theta) = - \frac{\partial \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)}{\partial \theta}$$

oder
$$\psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) := - \int \eta_e(\mathbf{E}_e, \theta) d\theta$$

mit einer zunächst beliebigen Funktion ε_p der plastischen Variablen. Die innere Energie ist gemäß (4.2.8) dann auch aufspaltbar

$$(4.4.71) \quad \varepsilon(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) = \varepsilon_e(\mathbf{E}_e, \theta) + \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

mit
$$\varepsilon_e(\mathbf{E}_e, \theta) := \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) + \theta \eta_e(\mathbf{E}_e, \theta).$$

Auch die Wärmeleitung kann nach der Annahme weder von \mathbf{E}_p noch von \mathbf{Z} abhängen, was zu der reduzierten Version von (4.4.56₂)

$$(4.4.72) \quad \mathbf{q} = q(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g})$$

führt.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz: Die Annahme des gleichen thermo-elastischen Verhaltens in allen thermo-elastischen Bereichen ist für thermoplastische Materialien genau dann erfüllt, wenn die folgenden Darstellungen gelten für die

- Entropie $\eta = -\frac{\partial \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)}{\partial \theta} + \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$
- innere Energie $\varepsilon = \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) - \theta \frac{\partial \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)}{\partial \theta} + \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$
- freie Energie $\psi = \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) - \theta \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) + \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$
- Wärmeleitung $\mathbf{q} = q(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g})$
- Spannungen $\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)}{\partial \mathbf{E}_e}$.

Demnach konstituieren die folgenden Materialfunktionen ein thermoplastisches Material:

- die elastische freie Energie $\psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)$
- die plastische Entropie $\eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$
- die plastische innere Energie $\varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$
- die Wärmeleitung $q(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{g})$
- das Fließkriterium $\varphi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$

zuzüglich der Fließ- und Verfestigungsregel.

Aus der Dissipations-Restungleichung (4.4.65) wird mit (4.4.70)

$$(4.4.73) \quad 0 \leq (\mathbf{T} - \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{E}_p} + \rho \theta \frac{\partial \eta_p}{\partial \mathbf{E}_p}) \cdot \mathbf{E}_p^\bullet + (-\rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{Z}} + \rho \theta \frac{\partial \eta_p}{\partial \mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{Z}^\bullet$$

$$= \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet + \rho \theta \eta_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})^\bullet - \rho \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})^\bullet. \quad (DU)$$

Um die Temperaturänderung des betrachteten materiellen Punktes zu bestimmen, benutzen wir den 1.HS (4.2.5) zusammen mit (4.4.71)

$$(4.4.74) \quad \mathbf{q} = \varepsilon^\bullet - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}^\bullet = \varepsilon_e(\mathbf{E}_e, \theta)^\bullet - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet + \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{Z})^\bullet - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet.$$

Demnach kann man die Wärmezufuhr zerlegen

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_e + \mathbf{q}_p$$

in den elastischen Anteil mit (4.4.71)

$$(4.4.75) \quad q_e(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_e^\bullet, \theta^\bullet) := \varepsilon_e(\mathbf{E}_e, \theta)^\bullet - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet = \theta \eta_e(\mathbf{E}_e, \theta)^\bullet \\ = -\theta \frac{\mathbf{M}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet + c \theta^\bullet$$

wegen (4.4.66) mit

- der spezifischen Wärmekapazität analog (4.2.25) mit (4.4.70)

$$(4.4.76) \quad c(\mathbf{E}_e, \theta) := \theta \frac{\partial \eta_e}{\partial \theta} = -\theta \frac{\partial^2 \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta)}{\partial \theta^2}$$

- und dem Spannungs-Temperatur-Tensor

$$(4.4.77) \quad \mathbf{M}(\mathbf{E}_e, \theta) := -\rho \frac{\partial \eta_e}{\partial \mathbf{E}_e}$$

sowie den plastischen Anteil

$$(4.4.78) \quad q_p := \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, \mathbf{H})^\bullet - \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet.$$

(4.4.75) kann aufgelöst werden nach

$$(4.4.79) \quad c \theta^\bullet = q - q_p + \theta \frac{\mathbf{M}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet.$$

Aus dieser Bilanzgleichung lässt sich die aktuelle Temperatur durch Integration entlang des Prozesses ermitteln. Die Temperaturänderung nährt sich demnach aus

- 1.) der von außen zu- oder abgeführten Wärme q ,
- 2.) der Dissipationswärme $-q_p$ infolge plastischen Fließens und Verfestigung, und
- 3.) thermo-elastischer Umwandlungen gemäß dem letzten Term in (4.4.79).

Da wir annehmen, dass die Spannungen und die Wärmezufuhr bei elastischen Prozessen messbar sind, können die Raten der elastischen Teile von innerer Energie und Entropie durch (4.4.75) bestimmt werden. ε_e und η_e sind dagegen nur bis auf additive Konstanten eindeutig, die durch keine Messung bestimmbar sind und deshalb auch keinen Einfluss auf das thermomechanische Verhalten haben. Ersetzen wir ε_e durch $\varepsilon_e + c_1$ und η_e durch $\eta_e + c_2$, dann müssten wir den elastischen Teil der freien Energie durch $\psi_e + c_1 - c_2 \theta$ gemäß (4.4.71) ersetzen. Der elastische Teil der freien Energie ist deshalb nur eindeutig bis auf eine lineare Funktion der Temperatur.

Da die Wärmeerzeugung infolge plastischen Fließens q_p auch messbar ist, ist die Rate der plastischen inneren Energie durch (4.4.78) determiniert, während ε_p wieder nur bis auf eine additive Konstante eindeutig ist.

Wir machen nun einen Ansatz für die Geschwindigkeits-unabhängigen Entwicklungsgleichungen der plastischen Variablen, nämlich für

$$(4.4.80) \quad \text{die Fließregel:} \quad \mathbf{E}_p^\bullet = \lambda P(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

$$(4.4.81) \quad \text{die Verfestigungsregel:} \quad \mathbf{Z}^\bullet = \lambda Z(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})$$

mit einem nicht-negativen plastischen Parameter λ . Er ist genau dann null, wenn kein Fließen stattfindet. Es gelten also immer die KUHN-TUCKER-Bedingungen:

$$(4.4.82) \quad \lambda \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi \leq 0.$$

Während des Fließens wird der plastische Parameter bestimmt durch die **Konsistenz-Bedingung** analog zu (4.4.42)

$$(4.4.83) \quad \begin{aligned} 0 &= \varphi(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z})^\bullet \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_p} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z}^\bullet \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_p} \cdot \lambda P(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \lambda Z(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

die aufgelöst werden kann nach

$$(4.4.84) \quad \lambda = \alpha^{-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}_e^\bullet + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta^\bullet \right)$$

$$\text{mit} \quad \alpha(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) := - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_p} \cdot P(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{Z}} \cdot Z(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}).$$

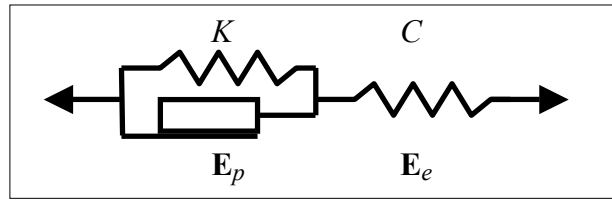
Wegen der Belastungsbedingung (4.4.59) ist $\lambda \alpha$ während des Fließens positiv. Nach (4.4.82) ist λ allein auch positiv, weswegen auch α positiv sein muss. Nach (4.4.84) ist dies eine Restriktion an die Funktionen P und Z .

Eine andere Restriktion erhalten wir durch die Dissipations-Restungleichung (4.4.73) bei positivem λ

$$(4.4.85) \quad \begin{aligned} & \left(\mathbf{T} - \rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{E}_p} + \rho \theta \frac{\partial \eta_p}{\partial \mathbf{E}_p} \right) \cdot P(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) \\ & + \left(-\rho \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{Z}} + \rho \theta \frac{\partial \eta_p}{\partial \mathbf{Z}} \right) \cdot Z(\mathbf{E}_e, \theta, \mathbf{E}_p, \mathbf{Z}) \geq 0. \end{aligned} \quad (DU)$$

Ihre Bedeutung wird am folgenden Beispiel erläutert.

Beispiel:



Wir verallgemeinern das skizzierte **PRAGER-Modell** mit zwei Feder-Elementen und einem Trockenreibungs-Element dreidimensional. Die Dehnung in der Feder C nennen wir \mathbf{E}_e , diejenige in der Feder K und dem parallelen Reibungs-Element sei \mathbf{E}_p .

Für den elastischen Teil der freien Energie setzen wir die in der linearen Thermoelastizität übliche quadratische Form ähnlich (4.2.36) an

$$\psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e + \frac{1}{\rho} \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_e - \frac{c}{2\theta_0} \Delta\theta^2$$

mit einer isotropen oder anisotropen positiv-definiten Steifigkeitstetrade \mathbf{C} der Feder C , einem konstanten symmetrischen Spannungs-Temperatur-Tensor \mathbf{M} , einer konstanten spezifischen Wärme c , einer Bezugstemperatur θ_0 und der Temperaturdifferenz hierzu $\Delta\theta := \theta - \theta_0$. Um jedoch zu garantieren, dass c wirklich eine spezifische Wärme repräsentiert, muss (4.4.76) gelten, was der obige Ansatz nicht leistet. Wir ersetzen ihn deshalb durch

$$(4.4.86) \quad \psi_e(\mathbf{E}_e, \theta) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e + \frac{1}{\rho} \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_e + c \left(\Delta\theta - \theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} \right),$$

wobei der Unterschied zwischen beiden Ansätzen für kleine $|\Delta\theta|$ vernachlässigbar ist.

Wir erhalten infolge (4.4.68)

$$(4.4.87) \quad \mathbf{T} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e + \Delta\theta \mathbf{M}$$

und mit (4.4.69)

$$\eta_e(\mathbf{E}_e, \theta) = -\frac{1}{\rho} \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_e + c \ln \frac{\theta}{\theta_0}$$

und nach (4.4.71)

$$\varepsilon_e(\mathbf{E}_e, \theta) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e - \frac{1}{\rho} \theta_0 \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_e + c \Delta\theta.$$

Betrachten wir nun die plastischen Anteile der konstitutiven Gleichungen. Die Spannungen in der Feder K entsprechen der Rückspannung

$$(4.4.88) \quad \mathbf{T}_R = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_p$$

mit einer als positiv-semidefinit angenommenen Elastizitätstetrade \mathbf{K} . \mathbf{T}_R wird als deviatorisch angenommen, genau wie \mathbf{E}_p .

Wir definieren die spezifische **plastische Arbeit** in einem Zeitintervall $[t_0, t_I]$ als die Arbeit in dem Reibungselement, an dem die Spannung $\mathbf{T} - \mathbf{T}_R$ angreift,

$$(4.4.89) \quad w_p := \int_{t_0}^{t_I} \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_R}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p \cdot dt \quad \Rightarrow \quad w_p \cdot = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_R}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p \cdot$$

Diese plastische Arbeit wird als skalare Verfestigungsvariable \mathbf{Z} erwählt.

Benutzen wir das HUBER – v. MISES-Fließkriterium (J_2 -Theorie) (4.4.17) in der Form

$$\varphi = (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) - \sigma_F(w_p, \theta)^2$$

mit dem Spannungsdeviator \mathbf{T}' , dann ist die assoziierte Fließregel ähnlich (4.4.30)

$$(4.4.90) \quad \mathbf{E}_p \cdot = \lambda (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R).$$

Die Konsistenzbedingung (4.4.83) verlangt mit (4.4.87), (4.4.88), (4.4.89)

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \cdot = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_e} \cdot \mathbf{E}_e \cdot + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \theta \cdot + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{E}_p} \cdot \mathbf{E}_p \cdot + \frac{\partial \varphi}{\partial w_p} \cdot w_p \cdot \\ &= 2 (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e \cdot + \mathbf{M} \theta \cdot - \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_p \cdot) \\ &\quad - 2 \sigma_F \left(\frac{\partial \sigma_F}{\partial w_p} \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_R}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p \cdot + \frac{\partial \sigma_F}{\partial \theta} \theta \cdot \right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e \cdot + \mathbf{M} \theta \cdot) - \sigma_F \frac{\partial \sigma_F}{\partial \theta} \theta \cdot \\ &= (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot \left(\mathbf{C} + \mathbf{K} + \sigma_F \frac{\partial \sigma_F}{\rho \partial w_p} \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{E}_p \cdot \\ &= (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R) \cdot \left(\mathbf{C} + \mathbf{K} + \sigma_F \frac{\partial \sigma_F}{\rho \partial w_p} \mathbf{I} \right) \cdot \lambda (\mathbf{T}' - \mathbf{T}_R). \end{aligned}$$

Während des Fließens ist die linke Seite positiv infolge der Belastungsbedingung (4.4.59). Verfestigt das Material

$$\frac{\partial \sigma_F}{\partial w_p} \geq 0,$$

so ist die Tetrade auf der rechten Seite positiv-definit und die Bedingung $\alpha > 0$ ist erfüllt. Man beachte, dass (4.4.89) und (4.4.90) implizieren, dass die plastische Leistung und damit auch die plastische Arbeit beim Fließen positiv sind

$$(4.4.91) \quad w_p^\bullet > 0 \quad \Rightarrow \quad w_p > 0.$$

Dies ist eine Konsequenz aus der Belastungsbedingung und nicht der Dissipations-Ungleichung.

Nur ein Teil der plastischen Arbeit wird in Wärme verwandelt. Der Rest kann für Änderungen der Mikrostruktur wie Phasenumwandlungen, Verbindungen oder Trennungen etc. verbraucht werden. Nach den klassischen Experimenten von FARREN/TAYLOR (1925) und TAYLOR/QUINNEY (1937) liegt der Anteil, der in Wärme verwandelt wird, bei Metallen typischerweise in der Größenordnung von 85-95 %. Dies kann in unsere Theorie implementiert werden durch einen **TAYLOR–QUINNEY–Faktor** β mit Werten zwischen 0 und 1, der hier als konstant angenommen wird. Andererseits kann auch Energie in der Feder K gespeichert werden. Wir machen deshalb den folgenden Ansatz für den plastischen Teil der inneren Energie

$$\varepsilon_p(\mathbf{E}_p, w_p) = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_p + (1 - \beta) w_p.$$

Die Wärme infolge plastischen Fließens ist dann mit (4.4.78), (4.4.88) und (4.4.91) tatsächlich

$$(4.4.92) \quad \begin{aligned} -q_p &= \frac{\mathbf{T}}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet - \varepsilon_p(\mathbf{E}_p, w_p)^\bullet \\ &= \frac{\mathbf{T} - \mathbf{T}_R}{\rho} \cdot \mathbf{E}_p^\bullet - (1 - \beta) w_p^\bullet = \beta w_p^\bullet > 0. \end{aligned}$$

Die Dissipations-Restungleichung (4.4.73) wird mit (4.4.78) und (4.4.92)

$$(4.4.93) \quad -q_p + \theta \eta_p^\bullet = \beta w_p^\bullet + \theta \eta_p^\bullet \geq 0 \quad (DU)$$

und beinhaltet eine Restriktion an die plastische Entropie. Der triviale Ansatz $\eta_p \equiv 0$ erfüllt diese Ungleichung. Allerdings wäre auch der Ansatz

$$\eta_p(w_p) \equiv \gamma w_p$$

mit einer positiven reellen Konstante γ eine möglich Wahl, die auf eine Dissipations-Restungleichung

$$(\beta + \gamma \theta) w_p^\bullet \geq 0 \quad (DU)$$

führt.

Weitere Konkretisierungen für die plastische Entropie sind auf der Basis von Messungen nicht möglich. Wir sehen, dass die plastische Entropie ziemlich unbestimmt bleibt, was ebenfalls für die plastische freie Energie gilt. Um die thermodynamische Konsistenz nachzuweisen, genügt es, überhaupt eine plastische Entropie zu finden, die die DU erfüllt. Ihre konkrete Wahl hat jedoch keinerlei Einfluss auf das messbare thermomechanische Verhalten.

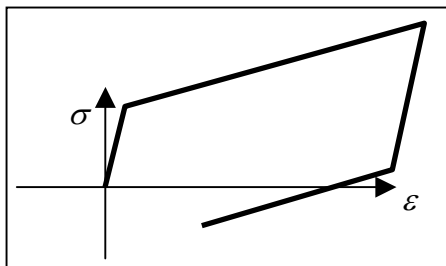
Mit (4.4.70) erhalten wir für die vollständige freie Energie unseres Modells

$$(78) \quad \psi = \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_e + \frac{1}{\rho} \Delta\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_e + c \left(\Delta\theta - \theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} \right)$$

$$+ \frac{1}{2\rho} \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_p + (1 - \beta - \theta \gamma) w_p .$$

Zusammen mit einem FOURIERSchen Wärmeleitungsgesetz (2.2.6) sind damit die Materialgleichungen für unser Beispiel vollständig angegeben.

In diesem Model ist *Fließen gegen die Spannung* möglich, d. h. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{T}$ kann negativ sein ohne Widerspruch zur Dissipations-Ungleichung. Für diesen Effekt gibt es experimentelle Bestätigungen bei Materialien mit starkem BAUSCHINGER-Effekt (wie unten dargestellt). In manchen Publikationen wird die positive Semi-Definitheit dieses Ausdrucks als Bedingung für die Gültigkeit der Dissipations-Ungleichung erklärt. Wir sehen hier jedoch, dass sie hierfür weder notwendig noch hinreichend ist.



Ende

Index

AIRYSche Spannungsfunktion.....	145	Dehnung, logarithmische.....	11
akustischer Tensor.....	226	Determinante.....	68
Amplitudenvektor.....	225	Deviator.....	69
anisotrop.....	159	Diagonalform.....	71
anti(sym)metrischer Tensor.....	59	Dichte.....	117
Arbeit.....	13	Differenzial.....	100
Arbeit, plastische.....	289	Differenzial-Typ.....	29
ARMSTRONG-FREDERICKSche		Differenztemperatur.....	236
Verfestigungsregel.....	267	Dilatation.....	120, 167
assoziierte Fließregel.....	264	DISCHINGER-Gesetz.....	23
Ausdehnungskoeffizient.....	241	Dissipation.....	232
auxenisch.....	182	Dissipation, mechanische.....	283
axialer Vektor.....	60	Dissipations-Ungleichung.....	232, 283, 285
Bahn eines Punktes.....	115	Dissipationswärme.....	286
BAUSCHINGER-Effekt.....	41	Distorsion.....	120
Belastungsbedingung.....	263, 282	Divergenz.....	103
BELTRAMI-SCHAEFERSche Spannungsfunktion		Drall.....	82
.....	145	Drallbilanz.....	82, 135
BELTRAMIsche Gleichung.....	185	Drehimpuls.....	82
BELTRAMIsche Spannungsfunktion.....	144	Druck.....	136
BERNOULLIsche Hypothese.....	88	DRUCKERsches Postulat.....	271
Beschleunigung.....	117	duale Vektorbasen.....	51
Betrag eines Vektors.....	51	DUHAMEL-NEUMANN-Gleichung.....	237
Betriebsfestigkeit.....	36	Dyade.....	53
BETTIscher Vertauschungssatz.....	186	dyadisches Produkt.....	53
Bezugsplatzierung.....	115	ebener Deformationszustand.....	122
Bilanzen, thermodynamische.....	230	ebener Spannungszustand.....	137
BINGHAM-Körper.....	45	effektiver Querschnitt.....	34
BODNER-PARTOM-Modell.....	46	Eigenraum.....	70
BOLTZMANNsches Axiom.....	136	Eigensoren.....	95
BOLTZMANNsches Superpositionsprinzip.....	30	Eigenvektor.....	67
BOUSSINESQ-PAPKOVITSCH-NEUBERSche		Eigenverfestigung.....	255
Verschiebungsfunktion.....	205	Eigenwert.....	67
BOUSSINESQ-SOMIGLIANA-GALERKINSche		Eigenwertproblem.....	96
Verschiebungsfunktion.....	204	einachsiger Zug.....	168
BRUHNS-Modell.....	46	Eindeutigkeitssatz.....	243
BRUGERS-Körper.....	27, 250	Eindeutigkeitssatz von KIRCHHOFF.....	187
CASIMIR-ONSAGERscher Reziprozitätssatz	101,	einfache Dyade.....	53
238		einfache Scherung.....	121, 168
CAUCHYSche Bewegungsgleichung.....	134	einfaches Material.....	15, 154
CAUCHYScher Spannungstensor.....	133	eingeprägte Kräfte.....	141
CDU.....	232	Einstensor.....	57, 96
CHABOCHE-Modell.....	46	elastisch.....	154
charakteristisches Polynom.....	67	elastische Energie.....	179
CHOI-KREMPL-Modell.....	46	Elastizität.....	14
CLAPEYRONscher Satz.....	186	Elastizitätsgrenze.....	42
CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung.....	232, 234	Elimination der Spannungen.....	183
CLAUSIUS-PLANCK-Ungleichung.....	232	Elimination der Verschiebungen.....	185
COULOMB-Element.....	39	E-Modul.....	15, 168
COULOMBSche Reibung.....	256	Endwertarbeit.....	14
Dämpfungsmaß.....	25	Energie, elastische.....	179
Darstellungssatz von HELMHOLTZ.....	202	Energie, freie.....	232, 284
Dauerfestigkeit.....	37	Energie, innere.....	230, 231, 284
Deformationsgeschwindigkeitstensor.....	123	Energie, kinetische.....	85, 139
Deformationsgradient.....	117	Energiebilanz, thermodynamische.....	231
Deformator.....	102	Energiebilanz, thermoelastische.....	240
Dehnung, lineare.....	10, 119	Energieerhaltung.....	86

Entfestigung	40, 266	HEAVISIDE-Funktion	30
Enthalpie	233	HELMHOLTZ	231
Entropie	230, 290	HELMHOLTZ-Energie	232
Entropiefluss	231	HELMHOLTZsche Verschiebungsfunktion.....	203
Entropiequelle	231	HELMHOLTZscher Darstellungssatz	202
Ergänzungsarbeit	13	HENCKY-Dehnung	11
Ergänzungsleistung	13	HERTZsche Pressung	211
Ermüdung	36	HILL 's yield criterion	260
EUKLIDischer Raum.....	114	HILLSche Fließbedingung	260
EULERSche Darstellung	115	HOLLOMAN-Gesetz	44
EULERSche Geschwindigkeitsformel	83	HOOKE-Element.....	15
EULERSche Kreisgleichungen.....	85	HOOKEsches Gesetz.....	15, 155
EURATOM-Modell.....	46	HTA	84
Existenzsatz.....	243	HUBER-v. MISES-Fließkriterium	282
FALKSches Schema.....	55	HUBER-V. MISESsche Fließgrenze	258
Faltungintegral.....	21, 248	HUBER-v. MISESsches Fließkriterium	289
FEDOROVscher Satz	228	hyperelastisch.....	181
Flächenträgheitsmomententensor.....	89	hypoelastisch.....	270
Fließgrenze	40, 42, 254	ILYUSHINs Postulat	272
Fließkriterium	254, 282	Impuls	82
Fließregel	254, 287	Impulsbilanz.....	82, 132
Fließspannung.....	40	Impulsbilanz, lokale.....	134
Formänderungsenergie.....	16	indefinite	61, 99
Formänderungsergänzungsenergie	16	Indexschreibweise.....	65
FOURIERSches Wärmeleitungsgesetz.....	101, 238	Ingenieurspannung.....	13
FREIBERGERsche Verschiebungsfunktion.....	206	Inkompatibilitätstensor	104
freie Energie.....	232, 284	innere Energie.....	230, 231, 284
freier Index.....	48	innere Variable.....	28
FRESNEL-HADAMARD-Bedingung.....	227	inneres Produkt	50
GAROFALO-Gesetz.....	32	Integraltransformationen.....	111
GAUSSscher Integralsatz	111	Integral-Typ	30
gemischte Randbedingung	185	inverser Tensor	58
geometrisch linear.....	120	isotrop	159, 240
Geschichtsfunktional.....	31	isotrope Elastizität.....	165
Geschwindigkeit	117	isotrope Verfestigung.....	41, 266
Geschwindigkeits-abhängig	17	J_2 -Theorie	258
Geschwindigkeitsgradient.....	123	JENKIN-Körper.....	42
Geschwindigkeits-unabhängig.....	17	JOULE	231
Gestaltänderungsenergie	181	kaloro-dynamischer Zustand.....	233
GIBBS-Energie	233	KATSCHANOV-RABOTNOV-Theorie.....	35
GIBBS-Gleichung.....	235	KELVIN-Körper.....	23
Gleitsystem	255	KELVIN-Modul	170
G-Modul.....	168	kinematische Verfestigung.....	41, 267
Gradient	100	kinetische Energie.....	139
Gradientenmaterial.....	15	kinetische Energie des Kreisels	85
GREEN-elastisch	181	KIRCHHOFFscher Eindeutigkeitsatz	187
GREENscher Verzerrungstensor	118	kleine Verzerrungen.....	120
Gruppe	158	Koaxialitätsannahme.....	248
HAIGH-WESTERGAARD-Ebene.....	260	kollineare Dyade	53
Halbraum, elastischer.....	207	Kompatibilitätsbedingungen	126
HAMILTONsches Prinzip.....	140	komplexe Nachgiebigkeit	30
harmonische Welle.....	225	komplexe Steifigkeit	30
HART-MILLER-Modell.....	46	komplexe Viskosität	30
Hauptinvarianten.....	68	Komponentenmatrix eines Tensors.....	55
Hauptsatz der Thermodynamik, 1.....	231	Kompression	120, 167
Hauptsatz der Thermodynamik, 2.....	231	Kompressionsenergie.....	181
Hauptspannung	136	Konsistenz-Bedingung.....	268, 287
Hauptträgheitsachsen	84	Konsistenzparameter.....	265
Hauptträgheitsmomente	84, 90	Kontaktkraft.....	131

Kontraktion	57	Nominalspannung	13
konvektive Änderung	116	Norm	94
Konvexität	271	Norm eines Vektors	51
KORNsche Verschiebungsfunktion	206	Normalenregel	271
Kreiselgleichungen	85	Normalspannung	134
Kreiseltheorie	82	NORTON-BAILEY-Gesetz	32
Kreisfrequenz	225	Nulltensor	57, 95
Kreuzprodukt	52, 62	Oberflächenkraft	131
Kriechen	22, 23, 26	Oktaederebene	260
Kriechfunktion	31	ONB	51, 94
Kriechschädigung	33	orthogonaler Tensor	64
Kriechzeit	24	Orthonormalbasis	51, 94
Kristallplastizität	255	OSTROGRADSKIs Integralsatz	111
KRONECKER-Symbol	49	Permutations-Symbol	49
kubisch	160	PERZYNA-Modell	46
Kugeltensor	57	Phase	225
KUHN-TUCKER-Bedingungen	265, 287	piezokalorischer Effekt	238
LAGRANGEsche Darstellung	115	planare Dyade	54
LAMÉsche Konstanten	169	plastisches Potenzial	264
LAPLACE-Operator	106	Plastizität	39, 253
LCF-Test	37	POINSONtsche Rollbewegung	86
Lebensdauerprognose	36	Polarkoordinaten	109
LEGENDRE-Transformation	235	Polkegel	86
Leistung der Kräfte	139	positiv-definit	99, 181
Leistung der Spannungen	139	positiv-definiten Tensor	61
Leistungsbilanz	139	positiv-semidefinit	99
Lemma von CAUCHY	134	positiv-semidefiniten Tensor	61
LEVI-CIVITA-Symbol	49	POYNTING-Körper	26
lineare Abbildung	52	PRAGER-Gesetz	44
linearer Raum	50	PRAGER-Modell	288
linke Subsymmetrie	97	PRAGERsche Verfestigungsregel	267
Linksprodukt	59	PRANDTL-Körper	42
lokale Änderung	116	PRANDTL-NADAI-Gesetz	32
Lokalisierung	40	PRANDTL-REUSSsche Gleichungen	265
Longitudinal-Welle	227	primäres Kriechen	29, 33
LUDWIK-Gesetz	44	Prinzip der Invarianz gegen überlagerte Starrkörperbewegungen	153
MALVERN-Körper	26	Prinzip der lokalen Wirkung	152
MANSON-COFFIN-Regel	38	Prinzip der virtuellen Kräfte	142
MASING-Körper	43	Prinzip der virtuellen Leistung	138
Massenkraft	131	Prinzip der virtuellen Verrückungen	141
Massenmittelpunkt	82	Prinzip des Determinismus	152, 233
Massenträgheitsmomententensor	84	Prinzip vom Maximum der potenziellen Energie	197
Materialermüdung	36	Prinzip vom Minimum der elastischen Energie	221
materielle Darstellung	115	Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie	197
materielle Koordinaten	115	Prinzip vom Minimum der potenziellen Energie	195
materielle Symmetrie	157	Prinzip von D'ALEMBERT in der LAGRANGEschen Fassung	142
MAXWELL-Beziehung	235	Prinzip von DE VEUBEKE-HU-WASHIZU ...	199
MAXWELL-Körper	20	Prinzip von HAMILTON	140
MAXWELLSche Spannungsfunktion	144	Prinzip von HELLINGER-REISSNER	200
MAYER	231	Projektionsmethode	172, 249
McCULLAGH-Ellipsoid	86	quadratische Form	61
MOHRsche Fließbedingung	256	Querkontraktionszahl	12, 169
Momentanplatzierung	115	RAMBERG-OSGOOD-Gesetz	44
monoklin	160	Randbedingung	185, 242
MORERAsche Spannungsfunktion	144	räumliche Darstellung	115
Nabla	104, 118	räumliche Koordinaten	115
Nachgiebigkeits-Tetrade	155		
NAVIERsche Verschiebungsgleichungen	184		
NEWTON-Element	18		

Reaktionskräfte	141	Summenkonvention	48
rechte Subsymmetrie	97	Superpositionsprinzip	30, 186
Relaxation	22, 24, 26	SWIFT-Gesetz	44
Relaxationsfunktion	31	Symmetriegruppe	158
Relaxationszeit	22	Symmetrie-Transformation	158, 240
rheologische Modelle	19	symmetrischer Tensor	59
rhombisch	160	Symmetrisierer	98
Richtungsdifferenzial	100	Tangentialsteifigkeit	269
ROBINSON-Modell	46	TAYLOR-Problem	264
Rotation	103	TAYLOR-QUINNEY-Faktor	290
Rückspannung	42, 267	Temperatur	230
Sättigung	41	Temperaturgradient	101, 232
Satz von CAUCHY	133	Temperatur-Verschiebungs-Beziehungen	242
Satz von CLAPEYRON	186	Tensor	54
Satz von FEDOROV	228	Tensoranalysis	100
Satz von FOURIER	230	Tensorbasis	55
Satz von GAUSS–OSTROGRADSKI	111	Tensorfläche	61
Schädigungsparameter	34	Tensorkomponenten	55
Scherrate	124	Tensorprodukt	53
Scherung	121, 168	tertiäres Kriechen	29, 33
Scherwelle	228	Tetrade	92, 95
Scherzahl	121	tetragonal	160
schiefsymmetrischer Tensor	59	thermoelastische Bereiche	282, 283
SCHMID-Gesetz	255	Thermoelastizität	233
SCHMIDsche Fließregel	264	thermo-kinematischer Zustand	233
Schnittprinzip	131	Thermoplastizität	281
Schubmodul	168	thermostatisch	243
Schubspannung	134	Trägheitskräfte	141
SCHWEDOFF-Körper	45	Trägheitsmomente	84
schwindendes Gedächtnis	31	Translation	119
sekundäres Kriechen	29, 33	transponierte Tetrade	96
singulärer Tensor	58	transponierter Tensor	59
Skalarprodukt	50, 94	transversal-isotrop	159
SODERBERG-Gesetz	32	Transversalwelle	228
Spannung	131	TRESCAsche Fließbedingung	257
Spannung, effektive	34	Triade	91
Spannung, einachsig	12	trigonal	160
Spannungs-Äquivalenz	35	triklin	159
Spannungsarbeit	13	Überschiebung	57
Spannungsdeviator	137	Überspannung	46
Spannungshauptachse	136	Überspannungs-Modell	46
Spannungsleistung	13, 139	Umformgrad	11
Spannungs-Randbedingung	185	Vektorbasis	50
Spannungs-Temperatur-Tensor	237, 286	Vektor-Komponenten	50
Spannungstensor	133	Vektorraum	50
Spatprodukt	52	Verfestigung	40
Spektralform	71	Verfestigung, isotrope	41, 266
Spur	68	Verfestigung, kinematische	41, 267
Stabilität, materielle	270	Verfestigungsregel	254, 287
starr-ideal-plastisch	40	Vergessensfunktion	31
Starrkörperbewegung	120	Vergleichsdehnung, plastische	266
Starrkörperdrehung	119	Vergleichsspannung	258
Starrkörperdynamik	82	verlorene Kräfte	141
Steifigkeits-Tetrade	155	Verlustfaktor	25
STIELTJES-Integral	31	Verschiebung	115
Streckgrenze	42	Verschiebungsfunktion	202
streng-elliptisch	227	Verschiebungsgleichungen	184
stummer Index	48	Verschiebungsgradient	117
Subsymmetrie	97	Verschiebungs-Randbedingung	185

Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen.....	119	Wärmeleitungsgleichung	239
Versor.....	65	Wärmequelle.....	230
Vertauschungssatz.....	186	Wärmezufuhr	230
Verzerrungstensor, linearer.....	119	Wechselverfestigung.....	255
VIETAscher Wurzelsatz	69	Wellenausbreitung	225
Viskoelastizität.....	17, 248	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit.....	227
Viskoplastizität	45	Wellenfunktion	225
VOCE-Gesetz	41	Wellenvektor.....	225
VOIGTsche Darstellung	98	Wellenzahl	225
vollständige Dyade.....	54	Winkelgeschwindigkeit	83
VON MISESsche Vgleichsspannung	258	Wirbeltensor	124
Wärmedehnungstensor.....	239	WÖHLER-Kurve	37
Wärmefluss	230	Zeitablenkung, materielle	116
Wärmekapazität	235, 286	ZIEGLERsche Verfestigungsregel	267
Wärmeleitkoeffizient	241	Zylinderkoordinaten.....	107
Wärmeleitensor	237		