

Mathematische Logik  
und Grundlagenforschung

Eine Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Mathematisch-  
Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität  
in Münster

Vorgelegt von  
Helmut Schwichtenberg  
aus Berlin

## Inhaltsverzeichnis

Übersicht	1
1. Hilfsmittel	4 - 21
1.1 Elementare und subelementare Funktionen	4
1.2 Eine Gödelisierung der endlichen Zahlenfolgen	10
1.3 Registermaschinen und Schrittzahlfunktionen	13
1.4 Konstruktive Ordinalzahlen	18
2. Ansätze zur Verwendung der konstruktiven Ordinalzahlen als "Kompliziertheitsmaß" für rekursive Funktionen; Kollaps - Sätze	22 - 34
2.1 Rekursionen längs rekursiver Wohlordnungen	22
2.2 Die Methode von Kleene	25
2.3 Erweiterungen der Grzegorzcyk - Hierarchie	32
3. Eine Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen vom Typ $\omega^\omega$	35 - 76
3.1 Definitionen	35
3.2 $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha$ für $\alpha < \omega^\omega$	41
3.3 Modifikationen	61
3.4 Zwischenklassen	68
3.5 Elementare Systeme von Fundamentalfolgen	73
Literaturverzeichnis	77

## Übersicht

Nach der Churchschen These ist der mathematische Begriff der rekursiven Funktion eine Präzisierung des naiven Begriffs der berechenbaren Funktion. Es liegt deshalb nahe, daß man versucht, die rekursiven Funktionen nach ihrer "Kompliziertheit" zu klassifizieren. Wir werden uns hier mit verschiedenen Fragen aus diesem Problemkreis befassen.

Nachdem in 1. einige Hilfsmittel bereitgestellt worden sind, behandeln wir in 2. Versuche, die konstruktiven Ordinalzahlen als "Kompliziertheitsmaß" für rekursive Funktionen zu verwenden. Wir beginnen in 2.1 mit dem naheliegendsten derartigen Ansatz, nämlich der Betrachtung von Rekursionen längs rekursiver Wohlordnungen immer höherer Ordnungstypen, und beweisen einen auf Myhill und Routledge zurückgehenden "Kollaps - Satz", der aussagt, daß man jede rekursive Funktion durch elementare Operationen und nur eine Rekursion längs einer rekursiven Wohlordnung vom Typ  $\omega$  erhalten kann. Mit einer ähnlichen Methode ergibt sich, daß ein entsprechender Kollaps auch dann noch auftritt, wenn man nur beschränkte Rekursionen zuläßt.

Weiter behandeln wir in 2.2 einen Ansatz von Kleene zur Klassifikation der rekursiven Funktionen mit Hilfe konstruktiver Ordinalzahlen. Bei diesem Verfahren geht man aus von einer effektiv erzeugten Funktionenklasse, etwa der Klasse der elementaren Funktionen. Eine solche Funktionenklasse kann man erweitern durch Konstruktion einer Aufzählungsfunktion. Betrachtet man dann die in dieser Aufzählungsfunktion elementaren Funktionen, so läßt sich das Verfahren iterieren. Eine Fortsetzung ins Transfinite gelingt durch Diagonalisierung längs Fundamentalfolgen, die die jeweiligen Limeszahlen approximieren. Auf diese Weise erhält man zu jedem Abschnitt der Ordinalzahlen mit zugehörigen System von Fundamentalfolgen erst eine Hierarchie von Funktionen  $E_\alpha$  und dann, indem man die in  $E_\alpha$  elementaren Funktionen zusammenfaßt, auch eine aufsteigende Hierarchie von Funktionenklassen  $\mathcal{L}_\alpha$ . Der kritische Punkt dieser Konstruktion ist offenbar die Wahl der Fundamentalfolgen; wir betrachten hier statt Abschnitten der Ordinalzahlen rekursive Wohlordnungen von natürlichen Zahlen (die gewisse naheliegende Bedingungen erfüllen) und lassen dann nur

elementare Systeme von Fundamentalfolgen zu. Trotzdem ergibt sich ein " $\omega$  - Kollaps", d.h. jede rekursive Funktion ist schon in einem  $\mathcal{L}_\omega$  enthalten. An einer späteren Stelle (in 3.5) wird gezeigt, daß kein Kollaps mehr auftritt, wenn man eine spezielle, "natürliche" Wohlordnung vom Typ  $\omega^\omega$  zugrunde legt. In 2.2 beweisen wir noch, daß für dieses Resultat die Beschränkung auf elementare Systeme von Fundamentalfolgen wesentlich ist. Verlangt man nur, daß jede einzelne Fundamentalfolge elementar ist, so erhält man einen Kollaps bei  $\omega^2$ . Ein ähnlicher Satz ist mit einer anderen Methode von Feferman in [2] bewiesen worden.

In 2.3 konstruieren wir auf dieselbe Weise Erweiterungen der Grzegorzcyk - Hierarchie: Wir gehen aus von einem Abschnitt der Ordinalzahlen mit zugehörigem System von Fundamentalfolgen, definieren Funktionen  $F_\alpha$ , und zwar aus  $F_0(x)=2^x$  durch Iteration an der Stelle Null bei Nachfolgerzahlen und Diagonalisierung bei Limeszahlen und betrachten die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  der in  $F_\alpha$  elementaren Funktionen. Es zeigt sich dann, daß auch bei diesen Hierarchien entsprechende Kollapse auftreten.

Unter dem Eindruck dieser Kollaps - Sätze ziehen wir uns in 3. auf speziellere, eingeschränkte Formen der drei Ansätze zurück. In 3.1 definieren wir im Anschluß an Robbin Grzegorzcyk - Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  und Kleene - Klassen  $\mathcal{L}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ , und zwar unter Verwendung spezieller, naheliegender Fundamentalfolgen. Weiter ordnen wir wie Heineremann gewissen Definitionen mehrfach - rekursiver Funktionen Rekursionszahlen  $\alpha < \omega^\omega$  zu - der Grundgedanke ist, daß eine k-fache Rekursion die Rekursionszahl um  $\omega^{k-1}$  im Sinne der Ordinalzahladdition vergrößert - und fassen die Funktionen, die sich mit Rekursionszahlen  $\leq \alpha$  definieren lassen, zu einer Klasse  $\mathcal{R}_\alpha$  zusammen. In Erweiterung des Péterschen Begriffs der eingeschachtelten Rekursion lassen wir dabei "elementare Rekursionen" zu; darunter verstehen wir solche Rekursionen, bei denen "auf der rechten Seite der Rekursionsgleichung" noch Summen und Produkte auftreten können. Unter diesen Typ Rekursion fällt auch die Definition der Kleeneschen Aufzählungsfunktion.



In 3.2 beweisen wir dann  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ . Dies ist eine Verschärfung von Ergebnissen von Robbin, der ähnliche Gleichheiten "im Limes" für  $\alpha \rightarrow \omega^n$  erhalten hat, und von Axt, der gezeigt hat, daß eine Variante der Methode von Kleene unterhalb  $\omega$  auf Grzegorzcyk - Klassen führt.

In 3.3 untersuchen wir, wie sich einige Modifikationen der Definitionen der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  und  $\mathcal{E}_\alpha$  auswirken; dabei zeigt sich eine deutliche Stabilität dieser Begriffsbildungen. Negativ fällt nur der Versuch aus, die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  durch Abschluß mit beschränkten mehrfachen Rekursionen zu definieren. Es ergibt sich, daß die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  gegen solche Rekursionen und auch gegen beschränkte 1-fache Rekursionen mit Einsetzungen an Parameterstellen nicht abgeschlossen sind.

Weiter behandeln wir in 3.4 die Frage, ob die erhaltene Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen in irgendeinem Sinn die feinste ist. Es zeigt sich, daß man die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  einbetten kann in ein bzgl.  $\subset$  vollständig geordnetes, dichtes System ganz ähnlich definierter Funktionenklassen, und daß für irgend zwei dieser Funktionenklassen die größere eine Aufzählungsfunktion für die kleinere enthält. In der Definition der Kleene - Klassen  $\mathcal{L}_\alpha$  ist also die Art der Konstruktion von Aufzählungsfunktionen wesentlich.

In 3.5 gehen wir schließlich von unseren speziell gewählten Fundamentalfolgen wieder ab und betrachten stattdessen ein beliebiges elementares System von von Fundamentalfolgen bzgl. einer gewissen "natürlichen" Wohlordnung vom Typ  $\omega^\omega$ . Wir beweisen dann, daß die zugehörigen Klassen  $\mathcal{E}_\alpha^*$  und  $\mathcal{L}_\alpha^*$  in  $\mathcal{E}_\alpha$  enthalten sind; ein Kollaps tritt also nicht mehr auf.

## 1. Hilfsmittel

### 1.1 Elementare und subelementare Funktionen

Der Begriff der elementaren Funktion wurde von Csillag und Kalmar eingeführt; "subelementar" nennen wir die Funktionen aus der von Grzegorzcyk in [3] definierten Funktionenklasse  $\mathcal{E}^2$ . Dieser Abschnitt enthält Definitionen der elementaren, der in anderen Funktionen elementaren, und der subelementaren Funktionen und eine Zusammenstellung einiger ihrer grundlegenden Eigenschaften. Die Beweise sind fast durchweg aus [3] übernommen.

Definition:  $\mathcal{E}$  (bzw.  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r)$ ) sei die kleinste Klasse zahlentheoretischer Funktionen, die

1) die Ausgangsfunktionen  $U_n^i = \lambda x_1 \dots x_n x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  
 $C_n^i = \lambda x_1 \dots x_n i$  ( $n \geq 0, i \geq 0$ ),  $\lambda xy x+y$  und  $\lambda xy x-y$  (bzw. noch  $f_1, \dots, f_r$ ) enthält,

2) abgeschlossen ist gegen (simultane) Einsetzungen, also mit  $g$  ( $m$ -stellig,  $m \geq 1$ ) und  $h_1, \dots, h_m$  ( $n$ -stellig,  $n \geq 1$ ) stets auch die durch

$$f(\mathcal{E}) = g(h_1(\mathcal{E}), \dots, h_m(\mathcal{E})) \quad 1)$$

definierte Funktion  $f$  enthält,

3) abgeschlossen ist gegen beschränkte Summen- und Produktbildungen, also mit  $g$  ( $n+1$ -stellig,  $n \geq 0$ ) stets auch die durch

$$f_1(\mathcal{E}, y) = \sum_{i < y} g(\mathcal{E}, i)$$

$$f_2(\mathcal{E}, y) = \prod_{i < y} g(\mathcal{E}, i)$$

definierten Funktionen  $f_1, f_2$  enthält.

Die Funktionen aus  $\mathcal{E}$  nennen wir elementar, die aus  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r)$  elementar in  $f_1, \dots, f_r$ .

---

1) Wir schreiben hier und im folgenden  $\mathcal{E}$  für  $x_1, \dots, x_n$ . Entsprechend verwenden wir  $\mathcal{E}, \mathcal{Z}$  usw. .

Definition:  $\mathcal{A}$  sei eine Klasse zahlentheoretischer Funktionen.  
 $\text{Rel}(\mathcal{A})$  bestehe dann aus allen zahlentheoretischen Relationen  $R$ ,  
 zu denen es ein  $f \in \mathcal{A}$  gibt mit  $R(\xi) \leftrightarrow f(\xi)=0$ . Die Relationen  
 aus  $\text{Rel}(\mathcal{E})$  nennen wir elementar, die aus  $\text{Rel}(\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r))$   
 elementar in  $f_1, \dots, f_r$ .

Mir beweisen zunächst, daß gewisse Prozesse nicht aus den elementaren  
 (bzw. den in  $f_1, \dots, f_r$  elementaren) Funktionen und Relationen  
 hinausführen.

Satz: a)  $\mathcal{E}$  (bzw.  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r)$ ) ist abgeschlossen gegen Anwendungen  
 des beschränkten  $\mu$ -Operators. Das heißt: Mit  $g$  ( $n+1$ -stellig,  $n \geq 0$ )  
 liegt stets auch die durch

$$f(\xi, z) = \mu_{y < z} [ g(\xi, z)=0 ]$$

= das kleinste  $y < z$  mit  $g(\xi, y)=0$ , falls es  
 ein solches  $y$  gibt, und 0 sonst.

definierte Funktion  $f$  in  $\mathcal{E}$  (bzw. in  $\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r)$ ).

b)  $\text{Rel}(\mathcal{E})$  (bzw.  $\text{Rel}(\mathcal{E}(f_1, \dots, f_r))$ ) ist abgeschlossen gegen die  
 Operationen der Aussagenlogik und gegen beschränkte Quantifikationen  
 der Form  $\bigwedge_{y < z}$ ,  $\bigvee_{y < z}$ .

Beweis zu a)

Mit  $h(\xi, z) := \text{Anzahl der } y \leq z \text{ mit } g(\xi, y)=0$

$$= \sum_{y \leq z} (1 + g(\xi, y))$$

wird  $f(\xi, z) = \left( \sum_{y \leq z} (1 + h(\xi, y)) \right) \cdot \left( 1 + \left( \sum_{y \leq z} (1 + h(\xi, y)) \right) \div z \right)$

zu b)

$$\neg(f(\xi)=0) \leftrightarrow 1 + f(\xi)=0$$

$$(f(\xi)=0) \wedge (g(\xi)=0) \leftrightarrow f(\xi) + g(\xi)=0$$

$$\bigwedge_{y < z} (f(\xi, y)=0) \leftrightarrow \sum_{y < z} f(\xi, y) = 0$$

Beispiele für elementare Funktionen und Relationen:

$x \cdot y$	$x \cdot y = \sum_{i < y} x$
$x^y$	$x^y = \prod_{i < y} x$
$x=y$	$x=y \leftrightarrow x+y=0 \wedge y+x=0$

$$x|y \quad x|y \leftrightarrow \bigvee_{z \leq y} x \cdot z = y$$

$$\begin{aligned} \text{Pr}(x) \quad \text{Pr}(x) &: \leftrightarrow x \text{ ist Primzahl} \\ &\leftrightarrow x \geq 2 \wedge \bigwedge_{y \leq x} (y|x \rightarrow y=1 \vee y=x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &:= \text{die } (x+1)\text{-te Primzahl} \\ &= \mu_{y \leq 2^{2^x}} (\text{Pr}(y) \wedge x = \sum_{z < y} (1 - \chi_{\text{Pr}}(z))), \\ \chi_{\text{Pr}}(z) &:= \begin{cases} 0 & \text{falls Pr}(z) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweis zu  $p_x \leq 2^{2^x}$ : Für  $x=0,1$  ist das richtig. Schluß von  $x$  auf  $x+1$ : Man überlegt sich leicht, daß  $p_{x+1} \leq p_0 p_1 \dots p_x - 1$ .

$$\text{Also: } p_{x+1} \leq 2^{2^0 + 2^1 + \dots + 2^x} = 2^{2^{x+1} - 1} \leq 2^{2^{x+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{exp}(i,x) \quad \text{exp}(i,x) &:= \text{Exponent von } p_i \text{ in der} \\ &\quad \text{Darstellung } x = \prod_{j \leq 1} p_j^{y_j} \\ &= \mu_{y \leq x} (p_i^y | x \wedge \neg p_i^{y+1} | x) \end{aligned}$$

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wie stark die elementaren Funktionen höchstens wachsen können.

Satz: Zu jeder elementaren Funktion  $f$  gibt es ein  $k \geq 0$ , so daß für alle  $\xi$  gilt

$$f(\xi) \leq 2^{\underbrace{2^{\dots 2^{\max \xi}}}_k}$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir mit  $\vartheta$  die  $k$ -fach iterierte Zweierpotenz, also  $\vartheta_0(x) = x$ ,  $\vartheta_{k+1}(x) = 2^{\vartheta_k(x)}$ . Wir führen den Beweis durch Induktion über den Aufbau von  $\xi$ . Für die Ausgangsfunktionen ist die Behauptung trivial. Einsetzungen führen offenbar von Funktionen mit der angegebenen Eigenschaft zu ebensolchen. Im Fall der beschränkten Summen- oder Produktbildung kann man wie folgt schließen:

$$\begin{aligned} \sum_{i < y} g(\xi, i) &\leq \sum_{i < y} \vartheta_k(\max(\xi, i)) \\ &\leq y \cdot \vartheta_k(\max(\xi, y)) \\ &\leq (\vartheta_k(\max(\xi, y)))^2 \\ &\leq \vartheta_{k+2}(\max(\xi, y)) \end{aligned} \quad , \text{ da } x^2 \leq 2^{2^x}$$

$$\begin{aligned}
 \prod_{i < y} g(\xi, i) &\leq \prod_{i < y} \vartheta_k(\max(\xi, i)) \\
 &\leq (\vartheta_k(\max(\xi, y)))^y \\
 &\leq 2^{y \cdot \vartheta_k(\max(\xi, y))} \\
 &\leq \vartheta_{k+3}(\max(\xi, y)) \quad , \text{ da } x < 2^x
 \end{aligned}$$

Schließlich soll noch eine wichtige Charakterisierung von  $\mathcal{E}$  angegeben werden:

Satz:  $\mathcal{E}'$  sei die kleinste Klasse zahlentheoretischer Funktionen, die

- 1) die Funktionen  $U_n^i$ ,  $C_n^i$ ,  $\lambda xy \ x+y$  und  $\lambda x \ 2^x$  enthält,
- 2) abgeschlossen ist gegen Einsetzungen und
- 3) abgeschlossen ist gegen beschränkte primitive Rekursionen, also mit  $g_1$  ( $n$ -stellig,  $n \geq 0$ ),  $g_2$  ( $n+2$ -stellig) und  $g_3$  ( $n+1$ -stellig) stets auch die durch

$$\begin{aligned}
 f(\xi, 0) &= g_1(\xi) \\
 f(\xi, y+1) &= g_2(\xi, y, f(\xi, y))
 \end{aligned}$$

definierte Funktion  $f$  enthält, falls sie durch  $g_3$  beschränkt ist, d.h. falls gilt

$$f(\xi, y) \leq g_3(\xi, y).$$

Dann ist  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$ .

Beweis zu  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ : In  $\mathcal{E}'$  liegen folgende Funktionen

$x \div 1$	$  \begin{aligned}  0 \div 1 &= 0 \\  (x+1) \div 1 &= x \\  x \div 1 &\leq x  \end{aligned}  $
$x \div y$	$  \begin{aligned}  x \div 0 &= x \\  x \div (y+1) &= (x \div y) \div 1 \\  x \div y &\leq x  \end{aligned}  $
$x \cdot y$	$  \begin{aligned}  x \cdot 0 &= 0 \\  x \cdot (y+1) &= x \cdot y + x \\  x \cdot y &\leq 2^{x+y}  \end{aligned}  $

Die Ausgangsfunktionen von  $\mathcal{E}$  sind also in  $\mathcal{E}'$  enthalten. Der Fall der Einsetzung ist trivial, und im Fall der beschränkten Summen- oder Produktbildung genügt es offenbar zu zeigen, daß die betreffenden Funktionen in  $\mathcal{E}'$  majorisierbar sind. Wegen  $\lambda x 2^x \in \mathcal{E}'$  folgt dies aus dem vorangehenden Satz.

zu  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ : Es genügt zu zeigen, daß  $\mathcal{E}$  abgeschlossen ist gegen beschränkte primitive Rekursionen. Es seien also  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{E}$  und

$$\begin{aligned} f(z, 0) &= g_1(z) \\ f(z, y+1) &= g_2(z, y, f(z, y)) \\ f(z, y) &\leq g_3(z, y) \end{aligned}$$

Mit 
$$h(z, y) := \prod_{i \leq y} p_i^{g_3(z, i)}$$

wird 
$$f(z, y) = \exp(y, \mu_{u \leq h(z, y)} [\exp(0, u) = g_1(z) \wedge \bigwedge_{i < y} \exp(i+1, y) = g_2(z, i, \exp(i, y))])$$

Aus dieser Darstellung folgt  $f \in \mathcal{E}$ .

Definition:  $\mathcal{V}$  sei die kleinste Klasse zahlentheoretischer Funktionen, die

- 1) die Funktionen  $U_n^i, C_n^i, \lambda x x+1$  und  $\lambda xy x \cdot y$  enthält,
- 2) abgeschlossen ist gegen Einsetzungen und
- 3) abgeschlossen ist gegen beschränkte primitive Rekursionen.

Die Funktionen aus  $\mathcal{V}$  nennen wir subelementar.

Offenbar ist  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ . Diese Inklusion ist echt, denn aus der Definition von  $\mathcal{V}$  folgt unmittelbar, daß jede subelementare Funktion durch ein Polynom (mit nicht - negativen Koeffizienten) beschränkt werden kann, und  $\lambda x 2^x \in \mathcal{E}$  ist nicht polynomial majorisierbar.

Beispiele subelementarer Funktionen und Relationen:

$$x+y, \quad x-1, \quad x \cdot y, \quad x=y, \quad x < y$$

$$sg(x) \qquad sg(x) = 1 \cdot (1-x)$$

$$r(x, y) \qquad r(x, y) := \text{Rest von } x \text{ bei der Division durch } y, \text{ falls } y \neq 0, \text{ und } 0 \text{ sonst.}$$

$$r(0, y) = 0$$

$$r(x+1, y) = \begin{cases} r(x, y)+1 & \text{falls } r(x, y)+1 < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ = (r(x, y)+1) \cdot sg(y - (r(x, y)+1))$$

$$r(x, y) \leq y$$

$$\begin{aligned}
 z - x^y \quad 1) & & z \dot{-} x^0 &= z \dot{-} 1 \\
 & & z \dot{-} x^{y+1} &= z \dot{-} x \cdot x^y \\
 & & &= \begin{cases} z \dot{-} x \cdot (z \dot{-} (z \dot{-} x^y)) & \text{falls } z \dot{-} x^y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 & & &= (z \dot{-} x \cdot (z \dot{-} (z \dot{-} x^y))) \cdot \text{sg}(z \dot{-} x^y) \\
 & & z \dot{-} x^y &\leq z \\
 \min(x^y, z) & & \min(x^y, z) &= z \dot{-} (z \dot{-} x^y)
 \end{aligned}$$

- Satz: a)  $\mathcal{R}$  ist abgeschlossen gegen beschränkte Summationen.  
 b)  $\mathcal{R}$  ist abgeschlossen gegen Anwendungen des beschränkten  $\mu$ -Operators.  
 c)  $\text{Rel}(\mathcal{R})$  ist abgeschlossen gegen die Operationen der Aussagenlogik und gegen beschränkte Quantifikationen der Form  $\bigwedge_{y < z}$ ,  $\bigvee_{y < z}$ .

Beweis zu a) Offenbar genügt es zu zeigen, daß mit  $g$  auch  $\sum_{i < y} g(\mathcal{G}, i)$  polynomial majorisierbar ist. Das ist aber trivial.  
 zu b) und c) Identisch mit dem Beweis des entsprechenden Satzes für  $\mathcal{E}$ .

Schließlich zeigen wir noch, daß eine (unbeschränkte) primitive Rekursion, angewandt auf subelementare Funktionen, stets eine elementare Funktion liefert.

Satz:  $g_1, g_2$  seien subelementar und es gelte

$$\begin{aligned}
 f(\mathcal{G}, 0) &= g_1(\mathcal{G}) \\
 f(\mathcal{G}, y+1) &= g_2(\mathcal{G}, y, f(\mathcal{G}, y)).
 \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  elementar.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß  $f$  durch eine elementare Funktion beschränkt werden kann.  $g_1, g_2$  sind als subelementare Funktionen abschätzbar in der Form

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathcal{G}) &\leq \max(\mathcal{G}, 2)^k \\
 g_2(\mathcal{G}, y, z) &\leq \max(\mathcal{G}, y, z, 2)^k.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch Induktion über  $y$  unmittelbar

$$f(\mathcal{G}, y) \leq \max(\mathcal{G}, y, 2)^{k \cdot y + 1}.$$

1) Vgl. Rödding [14], Nr. 30.

1.2 Eine Gödelisierung der endlichen Zahlenfolgen

Es ist üblich, endliche Zahlenfolgen mit Hilfe von Primzahlpotenzprodukten zu gödelisieren, indem man die Folge  $x_0, \dots, x_n$  darstellt durch die Zahl  $p_0^{x_0} \dots p_n^{x_n}$ . Die Funktionen  $\lambda x_0 \dots x_n p_0^{x_0} \dots p_n^{x_n}$  und  $\lambda i x \exp(i, x)$  sind dann elementar. Zur Vorbereitung späterer Überlegungen geben wir jetzt eine ähnliche Gödelisierung an, bei der die entsprechenden Funktionen subelementar sind. Die dabei verwendete Methode geht auf Smullyan zurück <sup>1)</sup>.

Vorbemerkung zur Terminologie: Sei  $m \geq 2$ . Wir nennen eine (nicht leere) Zahlenfolge  $z_n \dots z_0$  m-adische Darstellung von  $x$ , wenn gilt

$$x = \sum_{i \leq n} z_i m^i \quad 0 \leq z_i \leq m-1.$$

Als modifizierte m-adische Darstellung von  $x \geq 1$  bezeichnen wir die durch die folgenden Gleichungen festgelegte (nicht leere) Zahlenfolge  $z_n \dots z_0$

$$x = \sum_{i \leq n} z_i m^i \quad 1 \leq z_i \leq m.$$

Die modifizierte m-adische Darstellung von 0 soll die leere Zahlenfolge sein. Statt "2-adisch" sagen wir auch "binär", statt "3-adisch" auch "ternär".

Definition:  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  sei die wie folgt konstruierte Zahl: Zunächst bilde man zu jedem  $x_i$  die modifizierte Binärdarstellung  $\underline{x_i}$ . Dann bilde man die Ziffernfolge

$$\underline{x_n} 0 \dots 0 \underline{x_1} 0 \underline{x_0}$$

und lese sie als Ternärdarstellung.

Beispiel:  $\langle 3, 2, 0, 5 \rangle = 21002011$  (Ternärdarstellung).

<sup>1)</sup> Vgl. [17], S. 82. Unsere Gödelisierung unterscheidet sich von der dort angegebenen durch die zusätzliche Eigenschaft  $\langle x_0, \dots, x_n, 0, \dots, 0 \rangle = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$  und dadurch, daß hier jede Zahl Gödelnummer ist.



Offenbar gilt  $\langle x_0, \dots, x_n, 0, \dots, 0 \rangle = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ . Weiterhin ist klar, daß sich jedes  $x$  bis auf "angehängte Nullen" eindeutig in der Form  $x = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$  darstellen läßt. Man kann deshalb definieren:

Definition:  $(x)_i$  sei die Zahl  $x_i$  in der Darstellung  $x = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$  ("i-te Komponente von  $x$ ").

Definition:  $l(x)$  sei das größte  $i \geq 1$  mit  $(x)_{i-1} \neq 0$ , falls es ein solches  $i$  gibt, und 0 sonst ("Länge von  $x$ ").

Es ist also  $l(\langle x_0, \dots, x_n \rangle) = n+1$ , falls  $x_n \neq 0$ . - Im folgenden beweisen wir zunächst zwei nützliche Abschätzungen und zeigen dann, daß die Funktionen  $\lambda_{x_0 \dots x_n} \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ ,  $\lambda_{xi} (x)_i$  und  $l$  subelementar sind.

Satz:  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle \leq 3^{n \cdot \prod_{i \leq n} (x_i + 1)^2}$   
 $\langle x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n \rangle \leq (\langle x_0, \dots, x_n \rangle + 1) \cdot 3^{n+1} \cdot \prod_{i \leq n} (y_i + 1)^2$

Beweis:  $l_2^*(x)$  sei die Länge der modifizierten Binärdarstellung von  $x$ . Zunächst überlegt man sich leicht, daß folgende Abschätzungen richtig sind:

$$x < 3^{l_2^*(x)} \leq 3^{x+1}$$

$$l_2^*(x) \leq x+1$$

$$l_2^*(x+y) \leq l_2^*(x) + l_2^*(y)$$

Damit erhält man

$$\langle x_0, \dots, x_n \rangle < 3^{l_2^*(\langle x_0, \dots, x_n \rangle)}$$

$$\leq 3^{n + \sum_{i \leq n} l_2^*(x_i)}$$

$$\leq 3^{n \cdot \prod_{i \leq n} (x_i + 1)^2}, \text{ denn } 3^{l_2^*(x)} \leq (2^{l_2^*(x)})^2 \leq (x+1)^2.$$

$$\langle x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n \rangle < 3^{n + \sum_{i \leq n} (l_2^*(x_i) + l_2^*(y_i))}$$

$$\leq 3^{l_2^*(\langle x_0, \dots, x_n \rangle) + n + \sum_{i \leq n} l_2^*(y_i)}$$

$$\leq (\langle x_0, \dots, x_n \rangle + 1) \cdot 3^{n+1} \cdot \prod_{i \leq n} (y_i + 1)^2$$

Satz: Die Funktionen  $\lambda x_0 \dots x_n \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ ,  $\lambda x_i (x)_i$  und  $l$  sind subelementar.

Beweis: Folgende Funktionen sind subelementar (vgl. 1.1):

$z_3(i, x) := z_i$ , falls  $z_n \dots z_0$ ,  $n \geq i$  eine Ternärdarstellung von  $x$  ist

$$= r([x : \min(3^i, x)], 3)$$

$$= r(\mu_{z \leq x} [z \cdot \min(3^i, x) \leq x < (z+1) \cdot \min(3^i, x)], 3)$$

$l_3(x) :=$  Länge der kürzesten Ternärdarstellung von  $x$ , falls  $x \geq 1$ , und 0 sonst

$$= \mu_{i \leq x} [\min(3^i, 3x) > x]$$

$a(i, x) :=$  Anzahl der  $j < i$  mit  $z_3(j, x) = 0$

$$= \sum_{j < i} (1 - z_3(j, x))$$

$b(i, x) :=$  Erster Index links von der  $i$ -ten Null in einer Ternärdarstellung von  $x$

$$= \mu_{j \leq i+x} [a(j, x) = i]$$

$$l(x) = \mu_{i \leq x} [b(i, x) = l_3(x) + 1]$$

$$(x)_i = \sum_{b(i, x) \leq j < b(i+1, x)} z_3(j, x) \cdot \min(2^{j - b(i, x)}, x)$$

$$\langle x_0, \dots, x_n \rangle = \mu_{x \leq 3^n} \prod_{i \leq n} (x_i + 1)^2 [l(x) = n + 1 \wedge \bigwedge_{i \leq n} (x)_i = x_i]$$

### 1.3 Registermaschinen und Schrittzahlfunktionen

Minsky hat in [10] einen Typ idealisierter Rechenmaschinen - wir nennen sie Registermaschinen - angegeben, mit denen sich die rekursiven Funktionen relativ direkt und übersichtlich berechnen lassen <sup>1)</sup>. Da wir solche Berechnungen häufig genau analysieren müssen, ist es bequem, hier mit Registermaschinen statt mit Turingmaschinen zu arbeiten. Dieser Abschnitt enthält die erforderlichen Definitionen und einige Sätze über "Schrittzahlfunktionen".

Man denke sich unbeschränkt viele Register  $R_1, R_2, \dots$ , von denen jedes eine beliebige natürliche Zahl  $0, 1, 2, \dots$  aufnehmen kann. Wir vereinbaren, daß nur endlich viele dieser Register eine von Null verschiedene Zahl tragen dürfen. Eine Registermaschine (RM) ist gegeben durch eine "Programmtafel", d.h. eine endliche, nummerierte Liste aus Elementarbefehlen der folgenden Form:

$A_i \ c$	"Addiere 1 zum Inhalt $a_i$ von $R_i$ . Gehe über zum $c$ -ten Befehl".
$S_i \ c$	"Subtrahiere 1 vom Inhalt $a_i$ von $R_i$ , falls $a_i \neq 0$ . Sonst lasse $a_i$ unverändert. Gehe über zum $c$ -ten Befehl".
$P_i \ c_0 \ c_1$	"Prüfe den Inhalt $a_i$ von $R_i$ . Ist $a_i = 0$ ( $\neq 0$ ), so gehe über zum $c_0$ ( $c_1$ )-ten Befehl".
S	"Stoppe".

Jede RM bearbeitet also nur endlich viele Register, nämlich die, deren Indizes in der Programmtafel vorkommen. Man beachte, daß ein "Arbeitsregister" (entsprechend dem Arbeitsfeld bei Turingmaschinen) nicht vorgesehen ist.

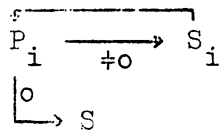
Setzt man eine RM an auf irgendwelche Anfangsinhalte  $x_1, x_2, \dots$  der Register, so arbeitet sie in einer durch die Programmtafel

<sup>1)</sup>Vgl. auch Shepherdson/Sturgis [16]

eindeutig bestimmten Weise, beginnend mit dem ersten Befehl. Es kann sein, daß sie nach endlich vielen Schritten stoppt, sie kann aber auch unbegrenzt weiterlaufen.

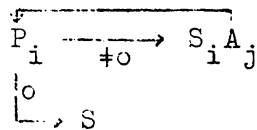
Beispiele einfacher Registermaschinen:

- (1)  $L_i$  "Lösche den Inhalt des Registers  $R_i$ "

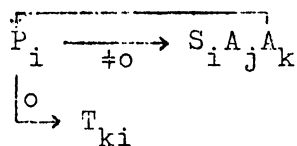


Es ist klar, wie man aus einem solchen Diagramm eine Programm-tafel gewinnt.

- (2)  $T_{ij}$  "Transportiere den Inhalt von  $R_i$  nach  $R_j$ "



- (3)  $K_{ij}$  "Kopiere den Inhalt von  $R_i$  in  $R_j$  (unter Verwendung von  $R_k$  als Hilfsregister)"



Eine  $n$ -stellige (zahlentheoretische) Funktion  $f$  heißt  $RM$ -berechenbar, wenn es eine Registermaschine gibt, die, angesetzt auf die Registerinhalte  $x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots$ , nach endlich vielen Schritten stoppt, und zwar mit den Registerinhalten  $f(x_1, \dots, x_n), 0, 0, \dots$ . Mit den üblichen Methoden kann man zeigen, daß genau die rekursiven Funktionen  $RM$ -berechenbar sind; dies ergibt sich auch unmittelbar aus den weiteren Überlegungen.

Jeder abbrechenden Rechnung einer  $RM$  kann man eine Schrittzahl zuordnen, indem man jede Ausführung eines Elementarbefehls (außer  $S$ ) als einen Schritt ansieht. Bei der Berechnung einer Funktion  $f$  hängt diese Schrittzahl i.a. vom Argumentetupel ab. Man erhält also eine Schrittzahlfunktion  $s_f$  mit derselben Stellenzahl wie  $f$ . Dieses  $s_f$  ist durch  $f$  nicht eindeutig bestimmt, sondern erst durch die gewählte Maschine zur Berechnung von  $f$ . Das Zeichen " $s_f$ " verwenden wir als Variable für Schrittzahlfunktionen von  $f$ .

Außer exakten Schrittzahlfunktionen spielen noch Majoranten solcher Funktionen eine Rolle, also Funktionen  $\bar{s}_f$ , zu denen es ein  $s_f$  gibt mit  $s_f(\varphi) \leq \bar{s}_f(\varphi)$  für alle  $\varphi$ . Als Variable für Majoranten von Schrittzahlfunktionen verwenden wir das Zeichen  $\bar{s}_f$ .

Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die elementaren Prozesse und Anwendungen des  $\mu$ -Operators im Normalfall auf Schrittzahlfunktionen auswirken.

Vorbemerkung zur Terminologie:  $M$  sei eine Registermaschine zur Berechnung einer  $n$ -stelligen Funktion  $f$ . Offenbar kann man durch Änderung der Indizes der in der Programmtafel von  $M$  vorkommenden Elementarbefehle erreichen, daß die Berechnung nicht mehr bezüglich der Register  $R_1, \dots, R_n$ , sondern bezüglich irgendwelcher paarweise verschiedener Register  $R_{i_1}, \dots, R_{i_n}$  geleistet wird. Auch die eventuell verwendeten Hilfsregister können geeignet neu gewählt werden. Die in dieser Weise abgeänderte Maschine bezeichnen wir mit  $M_{i_1, \dots, i_n}$ . Es sei darauf hingewiesen, daß diese Bezeichnungsweise nicht eindeutig ist, da die Hilfsregister nicht berücksichtigt werden. Man denke sie sich jedesmal geeignet gewählt.

Satz: Die Ausgangsfunktionen  $U_n^i$ ,  $C_n^i$ ,  $x+y$ ,  $x \cdot y$  sind mit elementaren Schrittzahlfunktionen  $RM$ -berechenbar.

Der Beweis ist trivial.

Satz: Ist  $f$  definiert durch  $f(\varphi) = g(h_1(\varphi), \dots, h_r(\varphi))$ , und sind  $g, h_1, \dots, h_r$  mit Schrittzahlfunktionen  $s_g, s_{h_1}, \dots, s_{h_r}$   $RM$ -berechenbar, so ist auch  $f$   $RM$ -berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich schreiben läßt in der Form

$$s_f(\varphi) = f_0(\varphi, s_{h_1}(\varphi), \dots, s_{h_r}(\varphi), s_g(h_1(\varphi), \dots, h_r(\varphi)), f(\varphi)),$$

$f_0$  elementar.

Beweis: Wir behandeln den Fall  $f(x) = g(h_1(x), h_2(x))$ ; die allgemeine Behauptung beweist man entsprechend.  $M, M', M''$  seien Maschinen zur Berechnung von  $g, h_1, h_2$  mit Schrittzahlfunktionen  $s_g, s_{h_1}, s_{h_2}$ .  $f(x)$  kann dann nach folgendem Diagramm berechnet werden:

$$K_{12} \quad M_2 \quad K_{13} \quad M_3 \quad M_{23} \quad L_1 \quad T_{21}$$

Schrittzahl:

$$f_1(x) + s_{h_1}(x) + f_1(x) + s_{h_2}(x) + s_g(h_1(x), h_2(x)) + f_2(x, f(x))$$

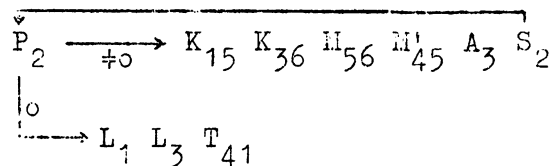
$f_1, f_2$  stehen dabei für nicht näher interessierende elementare Funktionen.

Satz: Ist  $f$  definiert durch  $f(x, y) = \sum_{i < y} g(x, i)$  (bzw.  $\prod_{i < y} g(x, i)$ ), und ist  $g$  mit der Schrittzahlfunktion  $s_g$  RM - berechenbar, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich schreiben läßt in der Form

$$s_f(x, y) = f_0(x, y, \sum_{i < y} f_1(x, i, s_g(x, i), g(x, i), f(x, i)), f(x, y)),$$

$f_0, f_1$  elementar.

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß  $f$  zweistellig ist; die allgemeine Behauptung beweist man entsprechend.  $M$  sei eine RM zur Berechnung von  $g$  mit der Schrittzahlfunktion  $s_g$ ,  $M'$  eine RM zur Berechnung von  $\lambda xy \ x+y$  (bzw.  $\lambda xy \ x \cdot y$ ) mit der elementaren Schrittzahlfunktion  $s$ .  $f(x, y)$  läßt sich dann wie folgt berechnen:



Schrittzahl:

$$1 + \sum_{i < y} (f_2(x) + f_2(i) + s_g(x, i) + s(f(x, i), g(x, i)) + 3) + f_3(x, y, f(x, y))$$

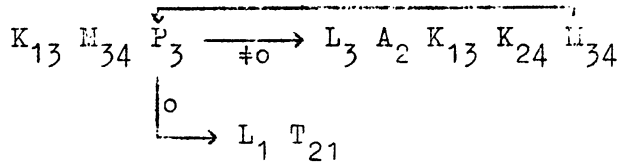
mit elementaren  $f_2, f_3$ . (Im Fall der Multiplikation muß man vor das Diagramm noch ein  $A_4$  schreiben und die Schrittzahl um 1 vergrößern).

Satz: Ist  $f$  definiert durch  $f(x) = \mu y [g(x, y) = 0]$ , wobei der "Normalfall"  $\bigwedge_x \bigvee_y g(x, y) = 0$  vorausgesetzt sei, und ist  $g$  mit einer Schrittzahlfunktion  $s_g$  RM - berechenbar, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich schreiben läßt in der Form

$$s_f(x) = f_0(x, \sum_{y \leq f(x)} f_1(x, y, s_g(x, y), g(x, y)), f(x)),$$

$f_0, f_1$  elementar.

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß  $f$  einstellig ist.  
 $M$  sei eine Registermaschine zur Berechnung von  $g$  mit der Schritt-  
 zahlfunktion  $s_g$ . Diagramm zur Berechnung von  $f(x)$  :



Schrittzahl:

$$f_2(x) + s_g(x,0) + 1 + \sum_{i < f(x)} (f_3(g(x,i)) + f_4(x,i) + s_g(x,i+1)) + f_5(x, f(x))$$

mit elementaren  $f_2, f_3, f_4, f_5$ .

Wir beweisen jetzt noch den folgenden Darstellungssatz:

Satz: Es gibt elementare Funktionen  $K$  (dreistellig) und  $D$  (ein-  
 stellig) mit folgenden Eigenschaften: Ist  $f$  eine RM - berechenbare  
 Funktion und  $s_f$  eine Schrittzahlfunktion, so gibt es eine Zahl  $p$   
 derart, daß gilt

$$s_f(\xi) = \mu t [K(p, \langle \xi \rangle, t) = K(p, \langle \xi \rangle, t+1)]$$

$$K(p, \langle \xi \rangle, t) = K(p, \langle \xi \rangle, t+1) \quad \text{für } t \geq s_f(\xi).$$

Weiter läßt sich  $f$  mit diesem  $p$  und einer beliebigen Majoranten  
 $\bar{s}_f$  von  $s_f$  darstellen in der Form

$$f(\xi) = D( K(p, \langle \xi \rangle, \bar{s}_f(\xi)) ).$$

Der Beweis verwendet eine Standard - Methode zur Arithmetisierung  
 von Formalismen; wir beschränken uns deshalb auf die Grundzüge.

$M$  sei eine Registermaschine. Setzt man  $M$  an auf irgendwelche  
 Anfangsinhalte der Register, so vollführt  $M$  eine schrittweise,  
 eindeutig bestimmte Rechnung, die eventuell abbrechen kann. Vor  
 Ausführung eines jeden Rechenschritts ist die "Konfiguration" der  
 ganzen Apparatur offenbar bestimmt durch die folgenden Daten:

- 1) die Programmtafel von  $M$ , 2) die Nummer  $c$  des Befehls, der als  
 nächster ausgeführt werden soll, und 3) die Registerinhalte  
 $x_1, x_2, \dots$ , von denen laut Vereinbarung nur endlich viele von Null  
 verschieden sind. Man kann nun in naheliegender Weise Programmtafeln  
 und auch Konfigurationen gödelisieren, letztere etwa in der Form  
 $\langle p, c, x_1, x_2, \dots \rangle$ , wobei  $p$  die Gödelnummer der Programmtafel ist.

Dann kann man eine "Konfigurations - Funktion"  $K$  definieren, die folgendes leistet:

$K$ : Ist  $p$  Nummer einer (Programmtafel einer) RII  $M$ , so ist  $K(p, x, t)$  die wie folgt bestimmte Zahl: Man stelle  $x$  dar in der Form  $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ , schreibe  $x_1, \dots, x_n$  in  $R_1, \dots, R_n$ , lasse die übrigen Register leer und setze  $M$  auf diese Registerinhalte an. Fall 1:  $M$  führt dann mindestens  $t$  Schritte aus. In diesem Fall ist  $K(p, x, t)$  die Nummer der Konfiguration nach dem  $t$ -ten Schritt. Fall 2:  $M$  stoppt nach weniger als  $t$  Schritten. Dann ist  $K(p, x, t)$  die Nummer der letzten Konfiguration.

$K$  läßt sich durch eine beschränkte primitive Rekursion nach  $t$  definieren; es ergibt sich ohne Schwierigkeiten, daß  $K$  elementar ist. Ist nun  $M$  eine RII zur Berechnung einer rekursiven Funktion  $f$ ,  $s_f$  die zugehörige Schrittzahlfunktion und  $p$  die Nummer von  $M$ , so gilt nach Definition von  $K$

$$s_f(\mathcal{G}) = \mu t [K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, t) = K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, t+1)],$$
$$K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, t) = K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, t+1) \quad \text{für alle } t \geq s_f(\mathcal{G}).$$

Daraus und aus der Definition der RII - Berechenbarkeit folgt, daß für beliebige Majoranten  $\bar{s}_f$  von  $s_f$   $K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, \bar{s}_f(\mathcal{G}))$  eine Konfiguration beschreibt, bei der im ersten Register der Funktionswert  $f(\mathcal{G})$  steht. Mit der elementaren "Dekodier - Funktion"  $D(x) := (x)_2$ , die aus jeder Konfigurationsnummer den Inhalt des ersten Registers abliest, läßt sich also  $f$  darstellen in der Form

$$f(\mathcal{G}) = D( K(p, \langle \mathcal{G} \rangle, \bar{s}_f(\mathcal{G})) ).$$

#### 1.4 Konstruktive Ordinalzahlen

Der von Church und Kleene eingeführte Begriff der konstruktiven Ordinalzahl bildet den Hintergrund für die in 2. folgenden Überlegungen. Wir geben hier eine von Markwald herrührende Definition und beweisen zwei später interessierende Charakterisierungen <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Vgl. Markwald [9].



Definition: Eine Ordinalzahl  $\xi$  heißt konstruktiv, wenn es eine rekursiv aufzählbare Wohlordnung von natürlichen Zahlen gibt, die  $\xi$  repräsentiert.

Offenbar ist mit einer Ordinalzahl auch jede kleinere konstruktiv. Die kleinste nicht - konstruktive Ordinalzahl wird nach Church und Kleene mit  $\omega_1$  bezeichnet.  $\omega_1$  gehört zur zweiten Zahlklasse, denn es gibt nur abzählbar viele rekursiv aufzählbare Wohlordnungen von natürlichen Zahlen und die zweite Zahlklasse ist überabzählbar.

Satz: Eine unendliche Ordinalzahl  $\xi$  ist konstruktiv genau dann, wenn es eine rekursive Wohlordnung aller natürlichen Zahlen gibt, die  $\xi$  repräsentiert.

Beweis:  $\prec$  sei eine rekursiv aufzählbare Wohlordnung von natürlichen Zahlen mit dem Ordnungstyp  $\xi$ .  $\text{Feld}(\prec) := \{x \mid \forall y (x \prec y \vee y \prec x)\}$  ist dann auch rekursiv aufzählbar und nach Voraussetzung unendlich.  $f$  zähle  $\text{Feld}(\prec)$  ohne Wiederholungen auf. Definiert man dann  $x \prec' y := f(x) \prec f(y)$ , so leistet  $\prec'$  das Verlangte.

Der folgende Satz sagt aus, daß man noch erheblich mehr "konstruktive" Anforderungen an Wohlordnungen stellen kann, ohne daß der Bereich der zugehörigen Ordinalzahlen kleiner wird.

Satz: Eine Ordinalzahl  $\xi$  ist konstruktiv genau dann, wenn es eine  $\xi$  repräsentierende Wohlordnung  $\prec$  von natürlichen Zahlen gibt, die noch folgende Eigenschaften hat:

- 1)  $\prec$  und  $\text{Feld}(\prec)$  sind rekursiv.
- 2) Es gibt eine einstellige elementare Funktion  $U$ , die auf einem beliebigen  $x \in \text{Feld}(\prec)$  den Wert 0 (1, 2) annimmt, wenn  $x$  der Null (einer Nachfolgerzahl, einer Limeszahl) entspricht. Genauer: Für ein beliebiges  $x \in \text{Feld}(\prec)$  ist

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg \forall y (y \prec x) \\ 1 & \text{falls } \forall y (y \prec x \wedge \neg \forall z (y \prec z \prec x)) \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 3) Es gibt eine einstellige elementare Funktion  $V$ , die jedem  $x \in \text{Feld}(\prec)$ , das einer Nachfolgerzahl entspricht, die "Bezeichnung"

des Vorgängers zuordnet. Genauer: Für alle  $x \in \text{Feld}(\prec)$  mit  $U(x) = 1$  ist

$$V(x) = \mu y [y \prec x \wedge \neg \forall z (y \prec z \prec x)].$$

- 4) Es gibt eine zweistellige elementare Funktion  $W$ , die folgendes leistet: Entspricht  $x \in \text{Feld}(\prec)$  einer Limeszahl, so bezeichnen  $W(x,0), W(x,1), W(x,2), \dots$  die Glieder einer Fundamentalfolge für diese Limeszahl (also einer echt wachsenden, gegen die Limeszahl konvergenten Folge von Ordinalzahlen). Genauer: Für alle  $x \in \text{Feld}(\prec)$  mit  $U(x) = 2$  gilt

$$\bigwedge_n W(x,n) \prec W(x,n+1) \prec x,$$

$$\bigwedge_y (y \prec x \rightarrow \bigvee_n y \prec W(x,n)).$$

Beweis: OBdA sei  $\xi$  unendlich. Nach dem vorangehenden Satz gibt es eine  $\xi$  repräsentierende rekursive Wohlordnung  $\prec$  aller natürlichen Zahlen. Um 2) und 3) zu erfüllen, definieren wir

$$x \prec^* y \Leftrightarrow x = \langle (x)_0, (x)_1 \rangle \wedge y = \langle (y)_0, (y)_1 \rangle$$

$$\wedge ((x)_0 \prec (y)_0 \vee ((x)_0 = (y)_0 \wedge (x)_1 \prec (y)_1)).$$

$\prec^*$  hat den Ordnungstyp  $\omega \cdot \xi$ ;  $\prec'$  sei der Abschnitt von  $\prec^*$  mit dem Ordnungstyp  $\xi$ . Es ist dann unmittelbar klar, daß für  $\prec'$  1), 2) und 3) gelten. Zum Beweis von 4) gehen wir aus von einer rekursiven Funktion  $W$  mit den verlangten Eigenschaften; eine solche Funktion  $W$  läßt sich offenbar konstruieren. OBdA sei  $W(x,0) = 0$  für alle  $x$ .  $s_W$  sei eine Schrittzahlfunktion für  $W$  und  $p$  die Gödelnummer der zugehörigen Registermaschine (vgl. 1.3). OBdA gelte für alle  $x$  und  $n$   $s_W(x,n+1) > s_W(x,n)$ ,  $s_W(x,n) \geq W(x,n)$  und  $s_W(x,n) \geq n$ . Zunächst stellen wir fest, daß die Relation  $\lambda t x n t = s_W(x,n)$  elementar ist. Es gilt nämlich

$$t = s_W(x,n) \leftrightarrow K(p, \langle x, n \rangle, t) = K(p, \langle x, n \rangle, t+1)$$

$$\wedge \neg \bigvee_{u < t} K(p, \langle x, n \rangle, u) = K(p, \langle x, n \rangle, u+1).$$

Wir definieren jetzt eine Funktion  $W^*$  durch die Forderungen  $W^*(x,t) = W(x,n)$ , falls  $s_W(x,n) \leq t < s_W(x,n+1)$ , und  $W^*(x,t) = 0$  für  $t < s_W(x,0)$ .  $W^*$  ist elementar, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 W^*(x,0) &= 0 \\
 W^*(x,t+1) &= \begin{cases} W^*(x,t) & \text{falls } \neg \bigvee_{n \leq t+1} s_W(x,n)=t+1 \\
 D(K(p, \langle x, \mu_{n \leq t+1} [s_W(x,n)=t+1] \rangle), t+1)) & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= h(x,t, W^*(x,t)), \quad h \text{ elementar, } h(x,t,y) \\
 &\leq \max(y, t+1)
 \end{aligned}$$

$W^*$  erfüllt schon fast alle in 4) gestellten Anforderungen; es fehlt nur noch das echte Wachstum der Fundamentalfolgen. Wir definieren deshalb

$$W'(x,n) = N^n(W^*(x,n)),$$

wobei  $N^n$  die n-fach iterierte "Nachfolgerfunktion"

$N := \lambda x \langle (x)_0, (x)_1+1 \rangle$  bedeutet.  $\lambda y N^n(y)$  ist elementar, da  $N$  subelementar ist (vgl. 1.1, S.9 und 1.2, S.12).  $W'$  hat jetzt alle in 4) geforderten Eigenschaften.

2. Ansätze zur Verwendung der konstruktiven Ordinalzahlen als "Kompliziertheitsmaß" für rekursive Funktionen; Kollaps - Sätze

2.1 Rekursionen längs rekursiver Wohlordnungen

Der naheliegendste Ansatz zur Messung der "Kompliziertheit" rekursiver Funktionen durch konstruktive Ordinalzahlen ist die Betrachtung von Rekursionen längs rekursiver Wohlordnungen immer größerer Ordnungstypen. Ein positives Resultat in dieser Richtung stammt von Rószsa Péter, die gezeigt hat, daß sich mit n-fachen eingeschachtelten Rekursionen bei wachsendem n immer reichere Funktionenklassen erzeugen lassen <sup>1)</sup>; n-fache Rekursionen kann man auffassen als Rekursionen längs einer speziellen, "natürlichen" Wohlordnung vom Typ  $\omega^n$ . Wir wollen hier zunächst einen auf Myhill und Routledge zurückgehenden Satz beweisen <sup>2)</sup>, der aussagt, daß man mit den elementaren Operationen und nur einer Rekursion längs einer elementaren Wohlordnung vom Typ  $\omega$  jede rekursive Funktion erhalten kann. Myhill nennt diesen Satz "a stumbling block in constructive mathematics"; aus ihm ergibt sich insbesondere, daß das Pétersche Resultat wesentlich von der speziellen Gestalt der verwendeten Wohlordnungen abhängt. Weiter beweisen wir mit einer ähnlichen Methode, daß ein entsprechender "Kollaps" auch dann noch auftritt, wenn man nur beschränkte Rekursionen zuläßt.

Definition einer Paarfunktion  $\rho_2$  und ihrer Umkehrfunktionen  $\rho_{21}, \rho_{22}$ :

$$\begin{aligned}\rho_2(x,y) &:= \sum_{i \leq x+y} i + x \\ &= \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1) + x\end{aligned}$$

$$\rho_{21}(z) := z \dot{-} \mu \left[ \bigvee_{u \leq z} \left( u = \sum_{i \leq v} i \wedge \sum_{i \leq v+1} i > z \right) \right]$$

$$\rho_{22}(z) := \mu \left[ z = \sum_{i \leq \rho_{21}(z)+y} i + \rho_{21}(z) \right]$$

<sup>1)</sup> Siehe [12].

<sup>2)</sup> Vgl. Myhill [11] (ohne Beweis), Routledge [15] oder auch Liu [8], Robbin [13].

$\rho_2, \rho_{21}, \rho_{22}$  sind elementar (sogar subelementar) und es gilt

$$\begin{aligned}\rho_{21}(\rho_2(x,y)) &= x \\ \rho_{22}(\rho_2(x,y)) &= y \\ \rho_2(\rho_{21}(z), \rho_{22}(z)) &= z .\end{aligned}$$

Satz: Zu jeder rekursiven Funktion  $f$  gibt es eine elementare Wohlordnung  $\ll$  der natürlichen Zahlen vom Typ  $\omega$  und eine rekursive Funktion  $h$  derart, daß  $f$  elementar ist in  $h$  und  $h$  definiert werden kann in der Form

$$\begin{aligned}h(0) &= 0 \\ h(u) &= 1 + h(g(u)) \quad \text{für } u \neq 0 ,\end{aligned}$$

wobei  $g$  eine elementare Funktion ist mit  $g(u) \ll u$  für  $u \neq 0$ .

Beweis: Offenbar genügt es, den Satz für einstellige Funktionen  $f$  zu beweisen.  $p$  sei die Gödelnummer einer Registermaschine zur Berechnung von  $f$  und  $s_f$  die zugehörige Schrittzahlfunktion; oBdA sei  $s_f(x) \geq 1$  für alle  $x$ . Man beachte zunächst, daß die Relation  $\lambda t x t < s_f(x)$  elementar ist:

$$t < s_f(x) \leftrightarrow K(p, \langle x \rangle, t) \neq K(p, \langle x \rangle, t+1)$$

( $K$  ist die "Konfigurationsfunktion"; s. 1.3, S.18). Die Paare  $(t, x)$  mit  $t < s_f(x)$  denke man sich wie folgt wohlgeordnet:

$$(t_1, x_1) \ll (t_2, x_2) \leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge t_1 > t_2)$$

$B$  sei das Bild aller dieser Paare unter der Abbildung  $\lambda t x \rho_2(t, x) + 1$ , also

$$B_u := \bigvee_{t \leq u} \bigvee_{x \leq u} (t < s_f(x) \wedge \rho_2(t, x) + 1 = u)$$

$B$  ist elementar. Die "induzierte" Wohlordnung von  $B$  läßt sich nun leicht zu einer Wohlordnung  $\ll$  aller natürlichen Zahlen mit 0 als erstem Element ergänzen (man beachte  $\neg B0, B1$ ):

$$\begin{aligned}b(u) &:= \begin{cases} \text{das größte } v \leq u \text{ mit } Bv & \text{falls } u \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \mu_{v \leq u} [Bv \wedge \bigwedge_{w \leq u} (Bw \rightarrow w \leq v)]\end{aligned}$$

$$t(u) := \rho_{21}(b(u) - 1)$$

$$x(u) := \rho_{22}(b(u) - 1)$$

$$u < v \Leftrightarrow [u \neq 0 \wedge (x(u) < x(v) \vee (x(u) = x(v) \wedge t(u) > t(v) \vee (x(u) = x(v) \wedge t(u) = t(v) \wedge u < v))] \vee [u = 0 \wedge v \neq 0]$$

$<$  ist also eine elementare Wohlordnung der natürlichen Zahlen mit 0 als erstem Element. Man betrachte jetzt die Funktion

$$g(u) := \begin{cases} \rho_2(t+1, x) + 1 & \text{falls } u = \rho_2(t, x) + 1, t+1 < s_f(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \rho_2(t(u)+1, x(u)) + 1 & \text{falls } \exists u, t(u)+1 < s_f(x(u)) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist für alle  $u \neq 0$   $g(u) < u$  und von  $\rho_2(0, x) + 1$  führen genau  $s_f(x)$   $g$ -Anwendungen auf 0. Weiter ist  $g$  elementar. Setzt man also

$$h(0) := 0$$

$$h(u) := 1 + h(g(u)) \quad \text{für } u \neq 0,$$

so gilt

$$s_f(x) = h(\rho_2(0, x) + 1).$$

Daraus folgt die Behauptung wegen

$$f(x) = D(K(p, \langle x \rangle, s_f(x))).$$

Es liegt nahe, daß man diesen "Kollaps" dadurch zu vermeiden sucht, daß man nur beschränkte Rekursionen zuläßt. Zu dieser Vorgehensweise ermutigt auch ein Resultat von Rószsa Péter, daß nämlich beschränkte mehrfache Rekursionen nicht aus dem Bereich der primitiv - rekursiven Funktionen hinausführen <sup>1)</sup>. Es zeigt sich aber, daß man den Kollaps auf diese Weise nicht verhindern kann.

Satz: Zu jeder rekursiven 0-1-Funktion gibt es eine elementare Wohlordnung  $<$  der natürlichen Zahlen vom Typ  $\omega$  und eine rekursive 0-1-Funktion  $h$  derart, daß  $f$  elementar ist in  $h$  und  $h$  definiert werden kann in der Form

$$h(0) = 0$$

$$h(u) = g_0(u, h(g(u))) \quad \text{für } u \neq 0$$

$$h(u) \leq 1,$$

wobei  $g, g_0$  elementar sind und  $g(u) < u$  für  $u \neq 0$ .

<sup>1)</sup> Siehe [12], S.94

Zum Beweis gehen wir vor wie beim Beweis des vorangehenden Satzes; man kann diesen Beweis bis zur Definition von  $g$  einschließlich wörtlich übernehmen. Definiert man dann

$$h(0) := 0$$

$$h(u) := \begin{cases} h(g(u)) & \text{falls } g(u) \neq 0 \\ \text{sg}(D(K(p, \langle x(u) \rangle, t(u)+1))) & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } u \neq 0,$$

so gilt  $h(u) \leq 1$  und es folgt  $f(x) = h(\rho_2(0, x)+1)$  und damit die Behauptung.

## 2.2 Die Methode von Kleene

Ein weiterer Ansatz zur Verwendung der konstruktiven Ordinalzahlen als "Kompliziertheitsmaß" für rekursive Funktionen ist von Kleene in [7] behandelt worden. Bei diesem Verfahren geht man aus von einer effektiv erzeugten Funktionenklasse, etwa der Klasse der elementaren Funktionen. Eine solche Funktionenklasse kann man erweitern durch Konstruktion einer Aufzählungsfunktion. Betrachtet man dann die in dieser Aufzählungsfunktion elementaren Funktionen, so läßt sich das Verfahren iterieren. Eine Fortsetzung ins Transfinite gelingt durch Diagonalisierung längs Fundamentalfolgen, die die jeweiligen Limeszahlen approximieren. Auf diese Weise erhält man zu jedem Abschnitt der Ordinalzahlen mit zugehörigem System von Fundamentalfolgen erst eine Hierarchie von Funktionen  $E_\alpha$  und dann, indem man die in  $E_\alpha$  elementaren Funktionen zusammenfaßt, auch eine aufsteigende Hierarchie von Funktionenklassen  $\mathcal{L}_\alpha$ . Der kritische Punkt dieser Konstruktion ist offenbar die Wahl der Fundamentalfolgen; wir betrachten hier statt Abschnitten der Ordinalzahlen rekursive Wohlordnungen von natürlichen Zahlen (die gewisse naheliegende Bedingungen erfüllen) und lassen dann nur elementare Systeme von Fundamentalfolgen zu. Trotzdem ergibt sich ein " $\omega$  - Kollaps", d.h. jede rekursive Funktion ist schon in einem  $\mathcal{L}_\omega$  enthalten. Später (in 3.5) werden wir beweisen, daß bei Zugrundelegung einer speziellen, "natürlichen" Wohlordnung vom Typ  $\omega^\omega$  kein Kollaps mehr auftritt. Hier zeigen wir noch, daß es dabei wesentlich ist, sich auf elementare Systeme von Fundamentalfolgen zu beschränken: Verlangt man nur, daß jede einzelne

Fundamentalfolge elementar ist, so erhält man auch in diesem Fall einen Kollaps, und zwar bei  $\omega^2$ . Ein ähnlicher Satz ist mit einer anderen Methode von Feferman in [2] bewiesen worden.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer "Aufzählungsfunktion"  $e_1^{h_1 \dots h_1}$  für die in  $h_1, \dots, h_1$  elementaren Funktionen <sup>1)</sup>; allgemein verstehen wir unter einer Aufzählungsfunktion für eine Klasse  $\mathcal{A}$  zahlentheoretischer Funktionen eine zweistellige Funktion  $E$ , die folgendes leistet:

- 1) Jedes  $f \in \mathcal{A}$  läßt sich mit einer geeigneten Zahl  $i$  darstellen in der Form  $\lambda_{\mathcal{G}} E(i, \langle \mathcal{G} \rangle)$ .
- 2) Für jedes  $n \geq 0$  durchlaufen die Funktionen  $\lambda_{x_1 \dots x_n} E(i, \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ , genau die  $n$ -stelligen Funktionen aus  $\mathcal{A}$  (i.a. mit Wiederholungen).

$h_1, \dots, h_1$  seien Funktionen mit den Stellenzahlen  $n_1, \dots, n_1$ . Zunächst wird jeder in  $h_1, \dots, h_1$  elementaren Funktion ein "Index" zugeordnet.  $h_1, \dots, h_1$  und die Ausgangsfunktionen erhalten die folgenden Indizes <sup>2)</sup>:

$h_1$	$\langle 0, n_1, 1 \rangle$
...	
$h_1$	$\langle 0, n_1, 1 \rangle$
$U_n^m$	$\langle 1, n, m \rangle$
$C_n^m$	$\langle 2, n, m \rangle$
$x+y$	$\langle 3, 2 \rangle$
$x-y$	$\langle 4, 2 \rangle$

Haben  $f, g_1, \dots, g_r$  schon Indizes  $i, j_1, \dots, j_r$ , so sollen die in der folgenden Aufstellung links stehenden Funktionen die rechts stehenden Indizes erhalten:

$f(g_1(\mathcal{G}), \dots, g_r(\mathcal{G}))$	$\langle 5, n, i, j_1, \dots, j_r \rangle$
$\sum_{z < y} f(\mathcal{G}, z)$	$\langle 6, n+1, i \rangle$
$\prod_{z < y} f(\mathcal{G}, z)$	$\langle 7, n+1, i \rangle$

<sup>1)</sup> Vgl. Kleene [7], S.70 u. 74. <sup>2)</sup> Zu  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  und  $(x)_y$  vgl. 1.2. Für  $((x)_y)_z$  schreiben wir wie üblich  $(x)_{y,z}$ .



Wir schreiben  $\text{In}^{n_1 \dots n_1} i$ , um auszudrücken, daß  $i$  ein auf die angegebene Weise konstruierter Index einer in  $h_1, \dots, h_1$  elementaren Funktion ist.  $\text{In}^{n_1 \dots n_1}$  ist elementar, denn es erfüllt die folgende Wertverlaufsrekursion:

$$\begin{aligned} \text{In}^{n_1 \dots n_1} i \leftrightarrow & i = \langle 0, n_1, 1 \rangle \vee \dots \vee i = \langle 0, n_1, 1 \rangle \\ & \vee (i = \langle 1, (i)_1, (i)_2 \rangle \wedge 1 \leq (i)_2 \leq (i)_1) \\ & \vee i = \langle 2, (i)_1, (i)_2 \rangle \\ & \vee i = \langle 3, 2 \rangle \\ & \vee i = \langle 4, 2 \rangle \\ & \vee ((i)_0 = 5 \wedge \text{In}^{n_1 \dots n_1} (i)_2 \wedge 1(i) = (i)_{2,1+3} \\ & \quad \wedge \bigwedge_{\rho=3}^{1(i)-1} (\text{In}^{n_1 \dots n_1} (i)_\rho \wedge (i)_{\rho,1} = (i)_1)) \\ & \vee (i = \langle 6, (i)_1, (i)_2 \rangle \wedge 1 \leq (i)_1 = (i)_{2,1}) \\ & \vee (i = \langle 7, (i)_1, (i)_2 \rangle \wedge 1 \leq (i)_1 = (i)_{2,1}) \end{aligned}$$

Die zu konstruierende Aufzählungsfunktion  $\text{el}^{h_1 \dots h_1}$  für die in  $h_1, \dots, h_1$  elementaren Funktionen läßt sich durch eine Wertverlaufsrekursion nach  $i$  definieren (wir schreiben  $f$  für  $h_1, \dots, h_1$ ):

$$\begin{aligned} \text{el}^f(i, x) := & \\ & h_1((x)_0, \dots, (x)_{n_1-1}) \quad \text{falls } \text{In}^{n_1 \dots n_1} i \wedge (i)_0 = 0 \wedge (i)_2 = 1 \\ & \dots \\ & h_1((x)_0, \dots, (x)_{n_1-1}) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 0 \wedge (i)_2 = 1 \\ & (x)_{(i)_2+1} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 1 \\ & (i)_2 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 2 \\ & (x)_{0+(x)_1} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 3 \\ & (x)_{0+(x)_1} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 4 \\ & \text{el}^f((i)_2, \langle \text{el}^f((i)_3, x), \dots, \text{el}^f((i)_{1(i)-1}, x) \rangle) \quad \text{falls } \text{In}^{n_1 \dots n_1} i \wedge (i)_0 = 5 \\ & \sum_{z < (x)_{(i)_1+1}} \text{el}^f((i)_2, \langle (x)_0, \dots, (x)_{(i)_1+2}, z \rangle) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 6 \\ & \prod_{z < (x)_{(i)_1+1}} \text{el}^f((i)_2, \langle (x)_0, \dots, (x)_{(i)_1+2}, z \rangle) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0 = 7 \\ & 0 \quad \text{sonst} \end{aligned}$$

$el^f$  ist nicht elementar in  $h_1, \dots, h_1$ , denn sonst gäbe es ein  $i_0$  mit  $el^f(x, \langle x \rangle) + 1 = el^f(i_0, \langle x \rangle)$  für alle  $x$ ; setzt man  $x = i_0$ , so folgt ein Widerspruch.

Definiert man jetzt  $E_0(i, x) := 0$ ,  $E_{n+1} := el^{E_n}$  und  $\mathcal{L}_n := \mathcal{E}(E_n)$ , so erhält man eine echt aufsteigende Folge von Funktionenklassen  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ . Eine Fortsetzung ins Transfinite ist möglich, wenn in einem Abschnitt der Ordinalzahlen zu jeder Limeszahl  $\lambda$  eine  $\lambda$  approximierende Fundamentalfolge  $\lambda[0], \lambda[1], \lambda[2], \dots$  gegeben ist: Man definiert  $E_0(i, x) := 0$ ,  $E_{\alpha+1} := el^{E_\alpha}$ ,  $E_\lambda(i, x) := E_{\lambda[(i)_0]}((i)_1, x)$  und  $\mathcal{L}_\alpha := \mathcal{E}(E_\alpha)$ ; es gilt dann  $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}_\beta$  für  $\alpha < \beta$  <sup>1)</sup>. Offenbar hängt diese Konstruktion wesentlich von der Wahl der Fundamentalfolgen ab. Wir repräsentieren hier Ordinalzahlabchnitte durch rekursive Wohlordnungen von natürlichen Zahlen (die gewisse Bedingungen erfüllen, welche sicherstellen, daß die  $E_\alpha$  rekursiv sind) und lassen dann nur elementare Systeme von Fundamentalfolgen zu.

Es seien also  $\prec$  eine rekursive Wohlordnung von natürlichen Zahlen und  $W$  eine zweistellige elementare Funktion mit folgenden Eigenschaften (vgl. 1.4):

- 1)  $\prec$  und  $Feld(\prec)$  sind rekursiv.
- 2) Es gibt eine einstellige elementare Funktion  $U$ , die auf einem beliebigen  $x \in Feld(\prec)$  den Wert 0 (1, 2) annimmt, wenn  $x$  der Null (einer Nachfolgerzahl, einer Limeszahl) entspricht. Genauer: Für ein beliebiges  $x \in Feld(\prec)$  ist

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg \forall y \ y \prec x \\ 1 & \text{falls } \forall y (y \prec x \wedge \neg \forall z \ y \prec z \prec x) \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 3) Es gibt eine einstellige elementare Funktion  $V$ , die jedem  $x \in Feld(\prec)$ , das einer Nachfolgerzahl entspricht, die "Bezeichnung" des Vorgängers zuordnet. Genauer: Für alle  $x \in Feld(\prec)$  mit  $U(x) = 1$  ist

$$V(x) = \mu y [y \prec x \wedge \neg \forall z \ y \prec z \prec x]$$

<sup>1)</sup> Mit  $\subset$  bezeichnen wir die echte Inklusion.

4) Entspricht  $x \in \text{Feld}(\prec)$  einer Limeszahl, so bezeichnen  $W(x,0)$ ,  $W(x,1)$ ,  $W(x,2), \dots$  die Glieder einer Fundamentalfolge für diese Limeszahl. Genauer: Für alle  $x \in \text{Feld}(\prec)$  mit  $U(x) = 2$  gilt

$$\bigwedge_n W(x,n) \prec W(x,n+1) \prec x$$

$$\bigwedge_y (y \prec x \rightarrow \bigvee_n y \prec W(x,n)) .$$

Definition:

$$E_{\prec, W, y}(i, x) := \begin{cases} \text{el } \lambda i x E_{\prec, W, V(y)}(i, x) & \text{falls } U(y)=1, y \in \text{Feld}(\prec) \\ E_{\prec, W, W(y, (i)_0)}((i)_1, x) & \text{falls } U(y)=2, y \in \text{Feld}(\prec) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz: Für alle  $y$  ist  $\lambda i x E_{\prec, W, y}(i, x)$  rekursiv.

Beweis: Nach dem Rekursionstheorem <sup>1)</sup> gibt es eine partiell rekursive Funktion  $h$  mit

$$h(y, i, x) \cong \begin{cases} \text{el } \lambda i x h(V(y), i, x) & \text{falls } U(y)=1, y \in \text{Feld}(\prec) \\ h(W(y, (i)_0), (i)_1, x) & \text{falls } U(y)=2, y \in \text{Feld}(\prec) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch transfiniten  $\prec$ -Induktion nach  $y$  beweist man, daß  $h$  überall definiert ist. Wegen  $E_{\prec, W, y}(i, x) = h(y, i, x)$  folgt die Behauptung.

Definition:  $\mathcal{L}_{\prec, W, y} := \mathcal{E}(E_{\prec, W, y})$

Zur Schreibweise: Im folgenden lassen wir den Zusatz  $\prec, W$  weg, wenn Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. Entspricht  $y \in \text{Feld}(\prec)$  der Ordinalzahl  $\alpha$ , so schreiben wir statt  $y$  auch  $\alpha$ . Entspricht  $y \in \text{Feld}(\prec)$  einer Limeszahl  $\lambda$ , so schreiben wir für die Glieder  $W(y,0), W(y,1), \dots$  der zugehörigen Fundamentalfolge auch  $\lambda[0], \lambda[1], \dots$ .

Nach 1.4 läßt sich jede konstruktive Ordinalzahl  $\xi$  durch ein Paar  $\prec, W$  mit den angegebenen Eigenschaften "darstellen" (d.h.  $|\prec| = \xi$ ). Eben haben wir beschrieben, wie man zu jeder solchen Darstellung von  $\xi$  eine echt aufsteigende Hierarchie von Funktionsklassen  $\mathcal{L}_{\prec, W, \alpha}$ ,  $\alpha < \xi$  konstruieren kann. Es liegt jetzt nahe,

<sup>1)</sup> Kleene [6], S.352

daß man jeder konstruktiven Ordinalzahl  $\alpha$  eine von Darstellungen unabhängige Funktionenklasse zuordnet, etwa indem man "alle  $\mathcal{L}_\alpha$ " vereinigt. Leider ist dieser Ansatz nicht durchführbar, denn man erhält schon auf dem Niveau  $\omega$  alle rekursiven Funktionen.

Satz: Jede rekursive Funktion liegt in einem  $\mathcal{L}_\omega$ . Genauer: Zu jeder rekursiven Funktion  $f$  gibt es ein Paar  $\langle, W$  mit den oben angegebenen Eigenschaften, so daß gilt  $f \in \mathcal{L}_{\langle, W, \omega}$ .

Beweis: OBdA sei  $f$  einstellig.  $p$  sei die Gödelnummer einer Registermaschine zur Berechnung von  $f$  und  $s_f$  die zugehörige Schrittzahlfunktion. Die Relation  $\lambda tx t=s_f(x)$  ist dann elementar, denn es gilt

$$t=s_f(x) \rightarrow K(p, \langle x \rangle, t) = K(p, \langle x \rangle, t+1) \\ \wedge \neg \forall_{u < t} K(p, \langle x \rangle, u) = K(p, \langle x \rangle, u+1)$$

Wir definieren jetzt  $\langle$  und  $W$  durch

$$\langle 0, s_f(0) \rangle \langle \dots \langle \langle 0, 1 \rangle \langle \langle 0, 0 \rangle \langle \\ \langle 1, s_f(1) \rangle \langle \dots \langle \langle 1, 1 \rangle \langle \langle 1, 0 \rangle \langle \\ \dots \\ \langle x, s_f(x) \rangle \langle \dots \langle \langle x, 1 \rangle \langle \langle x, 0 \rangle \langle \\ \dots \\ \langle \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$W(y, n) := \begin{cases} \langle n, 0 \rangle & \text{falls } y = \langle 0, 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar erfüllen  $\langle, W$  die Eigenschaften 1) bis 4) ;  $\langle$  und  $\text{Feld}(\langle)$  sind sogar elementar.  $\langle$  hat den Ordnungstyp  $\omega+1$ , und von  $\omega[n] = \langle n, 0 \rangle$  führen genau  $n + \sum_{z \leq n} s_f(z)$  "Vorgänger - Schritte" auf das Nullelement  $\langle 0, s_f(0) \rangle$ . Man wähle nun ein  $i_0$  so, daß für alle  $x$  gilt  $e_1^{h(i_0, \langle x \rangle)} = h(x, \langle x \rangle) + 1$ , also auch

$$E_{\alpha+1}(i_0, \langle i_0 \rangle) = E_\alpha(i_0, \langle i_0 \rangle) + 1.$$

Daraus ergibt sich

$$E_\omega(\langle x, i_0 \rangle, \langle i_0 \rangle) = E_{\omega[x]}(i_0, \langle i_0 \rangle) \\ = E_0(i_0, \langle i_0 \rangle) + x + \sum_{z \leq x} s_f(z) \\ \geq s_f(x).$$

In  $\mathcal{L}_\omega$  liegt also eine Majorante  $\overline{s}_f$  von  $s_f$ . Wegen  $f(x) = D(K(p, \langle x \rangle, \overline{s}_f(x)))$  (vgl. 1.3) folgt daraus  $f \in \mathcal{L}_\omega$ .

Später (in 3.5) werden wir beweisen, daß bei Zugrundelegung einer speziellen, "natürlichen" Wohlordnung  $\prec_\omega$  vom Typ  $\omega$  kein Kollaps mehr auftritt. In dieser Wohlordnung entspricht der Ordinalzahl  $\omega^n x_n + \dots + \omega x_1 + x_0$  die Zahl  $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ ; genauer gilt

$$x \prec_\omega y \iff \sum_i \omega^i(x)_i < \sum_i \omega^i(y)_i .$$

Hier zeigen wir noch, daß es dabei wesentlich ist, sich auf elementare Systeme von Fundamentalfolgen zu beschränken. Verlangt man nur, daß jede einzelne Fundamentalfolge elementar ist, so erhält man auch bei Verwendung der Wohlordnung  $\prec_\omega$  einen Kollaps, und zwar bei  $\omega^2$ .

Satz: Zu jeder rekursiven Funktion  $f$  gibt es ein rekursives System  $Q$  elementarer Fundamentalfolgen bzgl.  $\prec_\omega$ , so daß  $f \in \mathcal{L}_{\prec_\omega, Q, \omega^2}$ . Genauer wird von  $Q$  verlangt, daß  $\lambda x n Q(x, n)$  rekursiv ist und daß für jedes  $x$  mit  $(x)_0 = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \lambda n Q(x, n) & \text{ elementar} \\ \bigwedge_n Q(x, n) & \prec_\omega Q(x, n+1) \prec_\omega x \\ \bigwedge_y (y \prec_\omega x & \rightarrow \bigvee_n y \prec_\omega Q(x, n)) . \end{aligned}$$

Beweis: OBdA sei  $f$  einstellig;  $s_f$  sei eine Schrittzahlfunktion zu  $f$ . Offenbar kann man ein  $Q$  mit den verlangten Eigenschaften so festlegen, daß gilt

$$Q(y, n) = \begin{cases} \langle 0, n \rangle & \text{falls } y = \langle 0, 0, 1 \rangle \\ \langle s_f(c) + n, c \rangle & \text{falls } y = \langle 0, c+1 \rangle, \end{cases}$$

also  $\omega^2[n] = \omega n$

$$\omega(c+1)[n] = \omega c + s_f(c) + n .$$

Wählt man nun wie im Beweis des vorigen Satzes ein  $i_0$  mit  $e_1^h(i_0, \langle x \rangle) = h(x, \langle x \rangle) + 1$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\omega^2}(\langle x+1, \langle x, i_0 \rangle \rangle, \langle i_0 \rangle) &= E_{\omega(x+1)}(\langle x, i_0 \rangle, \langle i_0 \rangle) \\ &= E_{\omega x + s_f(x) + x}(i_0, \langle i_0 \rangle) \\ &= E_{\omega x}(i_0, \langle i_0 \rangle) + s_f(x) + x \\ &\geq s_f(x) . \end{aligned}$$

Es gibt also ein  $\overline{s}_f$  in  $\mathcal{L}_{\omega}^2$ . Daraus folgt wieder  $f \in \mathcal{L}_{\omega}^2$ , denn  $f$  ist elementar in einem beliebigen  $\overline{s}_f$ .

### 2.3 Erweiterungen der Grzegorzcyk - Hierarchie

Ähnlich wie eben die "subrekursiven Kleene - Hierarchien" kann man zu jedem Abschnitt der Ordinalzahlen mit zugehörigem System von Fundamentalfolgen eine Erweiterung der Grzegorzcyk - Hierarchie konstruieren: Man definiert Funktionen  $F_{\alpha}$ , und zwar aus  $F_0(x) = 2^x$  durch Iteration  $F_{\alpha+1}(x) = F_{\alpha}^x(1)$  bei Nachfolgerzahlen und Diagonalisierung  $F_{\lambda}(x) = \max_{n \leq x} F_{\lambda}[n](x)$  bei Limeszahlen und betrachtet dann die Klassen  $\mathcal{E}_{\alpha}$  der in  $F_{\alpha}$  elementaren Funktionen <sup>1)</sup>. Bei der Untersuchung dieser Hierarchien können wir genau wie in 2.2 vorgehen; insbesondere ergeben sich dieselben Kollaps - Sätze.

$\langle, W$  seien wie in 2.2, S.28 gewählt.

Definition:

$$F_{\langle, W, y}(x) := \begin{cases} 2^x & \text{falls } y \in \text{Feld}(\langle), U(y) = 0 \\ 1 & \text{falls } " , U(y) = 1, x = 0 \\ F_{\langle, W, V(y)}(F_{\langle, W, y}(x+1)) & \text{falls } " , " , x \neq 0 \\ \max_{n \leq x} F_{\langle, W, W(y, n)}(x) & \text{falls } " , U(y) = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{\langle, W, y} := \mathcal{E}(F_{\langle, W, y})$$

Aus dem Rekursionstheorem ergibt sich wieder, daß  $\lambda y x F_{\langle, W, y}(x)$  und damit auch alle Funktionen  $\lambda x F_{\langle, W, y}(x)$  rekursiv sind. Zur Schreibweise treffen wir dieselben Vereinbarungen wie in 2.2, S.29.

<sup>1)</sup> Eine ähnlich konstruierte Hierarchie  $\mathcal{E}^n$ ,  $n < \omega$  von Klassen primitiv - rekursiver Funktionen hat Grzegorzcyk in [3] untersucht. Zu der hier betrachteten Verallgemeinerung vgl. Robbin [13].

Lemma: (Einfache Eigenschaften der  $F_\alpha$ )

(1)  $F_\alpha(0) = 1$  ,  $F_\alpha(1) = 2$  ,  $F_\alpha(2) = 4$

(2)  $x < F_\alpha(x)$

(3)  $F_\alpha$  wächst echt monoton.

(4)  $F_\alpha(x) \leq F_{\alpha+1}(x)$  ;  $<$  gilt für  $x \geq 3$  .

Beweis: Nach Definition ist

$$F_0(x) = 2^x$$

$$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(1) , \quad \text{also } \begin{cases} F_{\alpha+1}(0) = 1 \\ F_{\alpha+1}(x+1) = F_\alpha(F_{\alpha+1}(x)) \end{cases}$$

$$F_\lambda(x) = \max_{n \leq x} F_{\lambda[n]}(x) .$$

zu (1) Induktion nach  $\alpha$  ; leicht.

zu (2) Induktion nach  $\alpha$  . 0: trivial.  $\alpha+1$ : Induktion nach  $x$  .

$x=0$ : trivial.  $x \Rightarrow x+1$ :  $F_{\alpha+1}(x+1) = F_\alpha(F_{\alpha+1}(x)) > F_{\alpha+1}(x) > x$  .

Also ist  $F_{\alpha+1}(x+1) > x+1$  .  $\lambda$ : trivial.

zu (3) Induktion nach  $\alpha$  . 0: trivial.  $\alpha+1$ :  $F_{\alpha+1}(x+1) = F_\alpha(F_{\alpha+1}(x))$

$> F_{\alpha+1}(x)$  .  $\lambda$ :  $F_\lambda(x+1) = \max_{n \leq x+1} F_{\lambda[n]}(x+1) > \max_{n \leq x} F_{\lambda[n]}(x) = F_\lambda(x)$  .

zu (4) Induktion nach  $x$  .  $x \leq 2$ : trivial nach (1).  $x = 3$ :

$F_{\alpha+1}(3) = F_\alpha(F_{\alpha+1}(2)) = F_\alpha(4) > F_\alpha(3)$  .  $x \Rightarrow x+1$ :  $F_{\alpha+1}(x+1) =$

$F_\alpha(F_{\alpha+1}(x)) > F_\alpha(F_\alpha(x)) \geq F_\alpha(x+1)$  .

Satz: Jede rekursive Funktion liegt in einem  $\mathcal{E}_\omega$  . Genauer: Zu jeder rekursiven Funktion  $f$  gibt es ein Paar  $\prec, W$  mit den in 2.2, S.28 angegebenen Eigenschaften, so daß gilt  $f \in \mathcal{E}_{\prec, W, \omega}$  .

Satz: Zu jeder rekursiven Funktion  $f$  gibt es ein rekursives System  $Q$  elementarer Fundamentalfolgen bzgl.  $\prec_0$  (vgl. 2.2, S.31), so daß  $f \in \mathcal{E}_{\prec_0, Q, \omega}$  . Genauer wird von  $Q$  verlangt, daß  $\lambda x n Q(x, n)$  rekursiv ist und daß für jedes  $x$  mit  $(x)_0 = 0$  gilt

$\lambda n Q(x, n)$  elementar

$$\bigwedge_n Q(x, n) \prec_0 Q(x, n+1) \prec_0 x$$

$$\bigwedge_y (y \prec_0 x \rightarrow \bigvee_n y \prec_0 Q(x, n)) .$$

Die Beweise können fast wörtlich aus 2.2 übernommen werden. Änderungen sind nur an folgenden Stellen nötig: Statt  $E_{\alpha+1}(i_0, \langle i_0 \rangle) = E_{\alpha}(i_0, \langle i_0 \rangle) + 1$  verwendet man

$$F_{\alpha+1}(x) \geq F_{\alpha}(x) + 1 \quad \text{für } x \geq 3$$

und erhält daraus

$$\begin{aligned} F_{\omega}(x) &\geq F_{\omega}[x](x) \\ &\geq F_0(x) + x + \sum_{z \leq x} s_f(z) \\ &\geq s_f(x) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} F_{\omega^2}(x) &\geq F_{\omega(x+1)}(x) \\ &\geq F_{\omega x + s_f(x) + x}(x) \\ &\geq s_f(x) . \end{aligned}$$



### 3. Eine Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen vom Typ $\omega^\omega$

In 2. hat sich ergeben, daß verschiedene allgemeine Ansätze zur Messung der "Kompliziertheit" rekursiver Funktionen durch konstruktive Ordinalzahlen nicht durchführbar sind. Hier untersuchen wir speziellere, eingeschränkte Formen der drei Ansätze und zeigen, daß sie auf dieselbe Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen führen. Weiter befassen wir uns mit einigen Fragen, die sich im Zusammenhang mit dieser Klassifikation stellen.

#### 3.1 Definitionen

Wir definieren 1) im Anschluß an Heineremann <sup>1)</sup> Funktionenklassen  $\mathcal{R}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , 2) nach der Methode von Kleene (vgl. 2.2), angewandt auf die Ordinalzahlen  $\alpha < \omega^\omega$  und spezielle, naheliegende Fundamentalfolgen, Funktionenklassen  $\mathcal{L}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , und 3) unter Zugrundelegung desselben Ordinalzahlabschnitts und derselben Fundamentalfolgen die Robbinsche Erweiterung  $\mathcal{E}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , der Grzegorzcyk - Hierarchie (vgl. 2.3).

$\mathcal{K}$  sei die Klasse der mehrfach - rekursiven Funktionen, also der Funktionen, die sich aus den Ausgangsfunktionen  $U_n^i$ ,  $C_n^i$ ,  $x+1$  durch Einsetzungen und mehrfache eingeschachtelte Rekursionen <sup>2)</sup> definieren lassen. Jeder solchen Definition kann man nun induktiv eine "Rekursionszahl"  $< \omega^\omega$  zuordnen: Die Ausgangsfunktionen erhalten die Rekursionszahl 0, bei Einsetzungen geht man zum Maximum über und eine n-fache Rekursion vergrößert das Maximum der Rekursionszahlen der zugrunde liegenden Funktionen im Sinne der Ordinalzahladdition um  $\omega^{n-1}$ . Es liegt dann nahe, alle die Funktionen, die mit

---

1) Vgl. Heineremann [4].

2) Siehe Péter [12].

Rekursionszahlen  $\leq \alpha$  definiert werden können, zu einer Klasse  $\mathcal{R}_C$  zusammenzufassen. Wir wollen hier diesen Ansatz etwas modifizieren und in Erweiterung des Péterschen Begriffs der eingeschachtelten Rekursion "elementare Rekursionen" zulassen; darunter verstehen wir solche Rekursionen, bei denen "auf der rechten Seite der Rekursionsgleichung" noch Summen und Produkte auftreten können. (Auch die Definition einer Kleeneschen Aufzählungsfunktion läßt sich als elementare Rekursion auffassen). Es ist dann sinnvoll, neben Einsetzungen auch Summen und Produkte "nicht zu zählen".

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen zur Definition n-facher elementarer Rekursionen.

Definition: Ein (zahlenwertiges) Funktional

$\lambda f_1 \dots f_r x_1 \dots x_n F(f_1, \dots, f_r; x_1, \dots, x_n)$ , kurz  $\lambda f \mathcal{G} F(f; \mathcal{G})$ , heißt elementar, wenn es eines der folgenden Ausgangsfunktionale ist:

$$\lambda f \mathcal{G} f_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \quad (1 \leq i \leq r, n_i \leq n)$$

$$\lambda f \mathcal{G} x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$\lambda f \mathcal{G} i \quad (i \geq 0)$$

$$\lambda xy \ x+y$$

$$\lambda xy \ x-y$$

oder aus elementaren Funktionalen  $G, H_1, \dots, H_r$  definiert werden kann in der Form

$$F(f; \mathcal{G}) = G(f; H_1(f; \mathcal{G}), \dots, H_r(f; \mathcal{G}))$$

oder aus einem elementaren Funktional  $G$  definiert werden kann in der Form

$$F(f; \mathcal{G}, y) = \sum_{i < y} G(f; \mathcal{G}, i)$$

oder 
$$F(f; \mathcal{G}, y) = \prod_{i < y} G(f; \mathcal{G}, i).$$

Man beweist dann unmittelbar (durch Induktion über den Aufbau von  $G$ ) daß auch eine simultane Einsetzung an den Funktionsstellen nicht aus dem Bereich der elementaren Funktionale hinausführt:

Lemma: Sind  $G, H_1, \dots, H_r$  elementare Funktionale, und ist  $F(f; \mathcal{G}) = G(\lambda y_1 \dots y_{n_1} H_1(f; y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, \lambda y_1 \dots y_{n_r} H_r(f; y_1, \dots, y_{n_r}); \mathcal{G})$ , so ist auch  $F$  ein elementares Funktional.

Weiter ergibt sich genau wie in 1.1, S.5

Lemma: a) Ist  $G$  ein elementares Funktional, und ist

$$F(f; \mathcal{G}, z) = \mu_{y < z} [G(f; \mathcal{G}, y) = 0],$$

so ist auch  $F$  ein elementares Funktional.

b) Die "elementaren Relationale", d.h. die "Relationale"  $\lambda f \mathcal{G} R(f; \mathcal{G})$ , die sich mit einem elementaren Funktional  $F$  definieren lassen in der Form  $R(f; \mathcal{G}) :\leftrightarrow F(f; \mathcal{G}) = 0$ , sind abgeschlossen gegen die Operationen der Aussagenlogik und gegen beschränkte Quantifikationen der Form  $y \wedge z, y \vee z$ .

Wir verwenden die Redeweise " $f$  wird in  $F(f, \mathcal{G}; \mathcal{G})$  nur gebraucht an Stellen  $\vec{u} \in M$ ", wenn für beliebige Funktionen  $f'$  mit derselben Stellenzahl wie  $f$  gilt

$$\forall \vec{u} \in M f(\vec{u}) = f'(\vec{u}) \rightarrow F(f, \mathcal{G}; \mathcal{G}) = F(f', \mathcal{G}; \mathcal{G}).$$

Mit  $\prec_n$  bezeichnen wir die "lexikographische" Wohlordnung der  $n$ -Tupel natürlicher Zahlen, also

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \prec_n (y_1, \dots, y_n) & :\leftrightarrow x_1 < y_1 \\ & \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \\ & \dots \\ & \vee (x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n < y_n). \end{aligned}$$

Jetzt können wir definieren, was wir unter einer  $n$ -fachen elementaren Rekursion verstehen wollen.

Definition: Eine  $n+m$ -stellige ( $n \geq 1, m \geq 0$ ) Funktion  $f$  heißt durch  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$  (kurz:  $\mathcal{G}$ ), wenn es ein elementares Funktional  $F$  gibt, so daß für alle  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  (kurz:  $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ ) gilt

$$f(\mathcal{G}, \mathcal{G}') = F(f, \mathcal{G}; \mathcal{G}, \mathcal{G}'),$$

wobei  $f$  in  $F(f, \mathcal{F}; \mathcal{G}, \mathcal{P})$  nur gebraucht wird an Stellen  $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m$  (kurz:  $\vec{u}, \vec{v}$ ) mit  $\vec{u} \prec_{\mathcal{F}} \vec{v}$ , d.h. wobei für eine beliebige  $n+m$ -stellige Funktion  $f'$  gilt

$$\bigwedge_{\vec{u} \prec_{\mathcal{F}} \vec{v}} \bigwedge f(\vec{u}, \vec{v}) = f'(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow F(f, \mathcal{F}; \mathcal{G}, \mathcal{P}) = F(f', \mathcal{F}; \mathcal{G}, \mathcal{P}) .$$

Durch transfinite Induktion über  $\mathcal{G}$  (längs  $\prec_{\mathcal{F}}$ ) ergibt sich unmittelbar, daß  $f$  durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt ist.

Beispiele für elementare Rekursionen:

1) Die Definition der Ackermann - Funktion

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y+1 \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1) \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)) . \end{aligned}$$

Mit 
$$F(g; x, y) := \begin{cases} y+1 & \text{falls } x=0 \\ g(x+1, 1) & \text{falls } x \neq 0, y=0 \\ g(x+1, g(x, y+1)) & \text{falls } x \neq 0, y \neq 0 . \end{cases}$$

ist 
$$f(x, y) = F(f; x, y)$$

und in  $F(f; x, y)$  wird  $f$  nur gebraucht an Stellen  $u, v$  mit  $u < x \vee (u=x \wedge v < y)$ , also  $(u, v) \prec_2(x, y)$ . Da  $F$  elementar ist, handelt es sich um eine 2-fache elementare Rekursion.

2) Die Definition der Kleeneschen Aufzählungsfunktion  $e_1^{h_1 \dots h_1}$  (vgl. 2.2, S.27).  $h_1, \dots, h_1$  (kurz:  $\mathcal{F}$ ) seien Funktionen mit den Stellenzahlen  $n_1, \dots, n_1$ . Mit

$$\begin{aligned} G_{n_1 \dots n_1}(g, g_1, \dots, g_1; i, x) &:= \\ g_1((x)_0, \dots, (x)_{n_1-1}) & \quad \text{falls } \text{In}^{n_1 \dots n_1} i \wedge (i)_0=0 \wedge (i)_2=1 \\ \dots & \\ g_1((x)_0, \dots, (x)_{n_1-1}) & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0=0 \wedge (i)_2=1 \\ (x)_{(i)_2-1} & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0=1 \\ (i)_2 & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0=2 \\ (x)_0+(x)_1 & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0=3 \\ (x)_0 \div (x)_1 & \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \wedge (i)_0=4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 g((i)_2, \langle g((i)_3, x), \dots, g((i)_{1+(i)-1}, x) \rangle) & \text{falls } \text{In}^{n_1 \dots n_1} i \wedge (i)_0=5 \\
 \sum_{z \langle (x)_{(i)_{1+1}} \rangle} g((i)_2, \langle (x)_0, \dots, (x)_{(i)_{1+2}}, z \rangle) & \text{" " } \wedge (i)_0=6 \\
 \prod_{z \langle (x)_{(i)_{1+1}} \rangle} g((i)_2, \langle (x)_0, \dots, (x)_{(i)_{1+2}}, z \rangle) & \text{" " } \wedge (i)_0=7 \\
 0 & \text{sonst}
 \end{array}$$

ist  $el^{\mathcal{E}}(i, x) = G_{n_1 \dots n_1}(el^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}; i, x)$

und in  $G_{n_1 \dots n_1}(el^{\mathcal{E}}, \mathcal{E}; i, x)$  wird  $el^{\mathcal{E}}$  nur gebraucht an Stellen  $j, y$  mit  $j < i$ . Zum Beweis, daß  $G_{n_1 \dots n_1}$  elementar ist, genügt es offenbar zu zeigen, daß das Funktional  $\lambda f \langle f(\mathcal{E}, 0), \dots, f(\mathcal{E}, y) \rangle$  elementar ist. Dies folgt aber aus

$$\langle f(\mathcal{E}, 0), \dots, f(\mathcal{E}, y) \rangle = \mu_{u \leq 3^y} \prod_{i \leq y} (f(\mathcal{E}, i) + 1)^2 (1(u) = y + 1 \wedge \bigwedge_{i \leq y} (u)_i = f(\mathcal{E}, i))$$

(zur Abschätzung von  $u$  vgl. 1.2).  $el^{\mathcal{E}}$  ist also durch eine 1-fache elementare Rekursion aus  $\mathcal{E}$  definierbar.

Wir betrachten jetzt Funktionen, die sich aus den Ausgangsfunktionen  $U_n^i, C_n^i, x+y, x-y$  durch endlich viele Einsetzungen, beschränkte Summen- und Produktbildungen und mehrfache elementare Rekursionen definieren lassen. (Es wird sich zeigen, daß dies genau die mehrfach rekursiven Funktionen sind). Jeder solchen Definition ordnen wir eine Ordinalzahl  $< \omega^\omega$  als "Rekursionszahl" zu, und zwar auf die folgende Weise: Die Ausgangsfunktionen erhalten die Rekursionszahl 0. Ist  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{E}) = g(h_1(\mathcal{E}), \dots, h_r(\mathcal{E}))$ , und sind den Definitionen von  $g, h_1, \dots, h_r$  Rekursionszahlen  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r$  zugeordnet, so erhält die Definition von  $f$  die Rekursionszahl  $\max(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ . Ist  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{E}, y) = \sum_{i < y} g(\mathcal{E}, i)$  oder  $f(\mathcal{E}, y) = \prod_{i < y} g(\mathcal{E}, i)$ , und ist der Definition von  $g$  die Rekursionszahl  $\alpha$  zugeordnet, so erhält die Definition von  $f$  auch die Rekursionszahl  $\alpha$ . Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definiert aus  $g_1, \dots, g_r$ , und sind den Definitionen von  $g_1, \dots, g_r$  Rekursionszahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  zugeordnet, so erhält die Definition von  $f$  die Rekursionszahl  $\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + \omega^{n-1}$ .

Alle die Funktionen, die sich mit Rekursionszahlen  $\leq \alpha$  definieren lassen, fassen wir jetzt zu einer Klasse  $\mathcal{R}_\alpha$  zusammen; trivialerweise gilt dann  $\mathcal{R}_0 = \emptyset$  und  $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\beta$  für  $\alpha \leq \beta$ . Im Hinblick auf spätere Überlegungen ist es zweckmäßig, diese Definition der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  als Kalkül zur simultanen Erzeugung aller Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  zu formulieren:

Definition der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ :

- a) Ist  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und gilt  $g_i \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ , so ist  $f \in \mathcal{R}_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}$ .
- b) Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und gilt  $g_i \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ , so ist  $f \in \mathcal{R}_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + \omega^{n-1}}$ .

Es fällt auf, daß wegen der Verwendung der Ordinalzahladdition (beim Übergang von  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  zu  $\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + \omega^{n-1}$ ) gewisse Bestandteile der  $\alpha_i$  "verschluckt" werden können. Ist z.B.  $f$  durch eine 2-fache elementare Rekursion definiert aus  $g \in \mathcal{R}_{\omega+17}$ , so folgt wegen  $(\omega+17)+\omega = 2\omega$   $f \in \mathcal{R}_{2\omega}$ . In 3.3 werden wir diese Zählweise rechtfertigen, indem wir zeigen, daß eine modifizierte Definition, in der statt  $+$  die "natürliche Summe"  $\#$  (Hessenberg, vgl. S.46) auftritt, auf dieselben Klassen führt.

Zur Definition der Klassen  $\mathcal{L}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , legen wir ein fest gewähltes System von Fundamentalfolgen für die Limeszahlen  $\lambda < \omega^\omega$  zugrunde. Jedes solche  $\lambda$  läßt sich eindeutig darstellen in der Form  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$ , und es liegt dann nahe, als zugehörige Fundamentalfolge  $\lambda[x] = \omega^{n+1}\beta + \omega^n x$ ,  $x=0,1,2,\dots$ , zu wählen. Im übrigen gehen wir vor wie in 2.2 :

Definition von  $\mathbb{E}_\alpha$ ,  $\mathcal{L}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ :

$$\mathbb{E}_0(i, x) = 0$$

$$\mathbb{E}_{\alpha+1}(i, x) = e1^{\mathbb{E}_\alpha}(i, x)$$

$$\mathbb{E}_\lambda(i, x) = \mathbb{E}_\lambda[(i)_0]((i)_1, x),$$

wobei für  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$  gilt  $\lambda[x] = \omega^{n+1}\beta + \omega^n x$ .

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{E}(\mathbb{E}_\alpha).$$

Es folgt unmittelbar  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$  und  $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}_\beta$  für  $\alpha < \beta$  <sup>1)</sup> (denn  $E_{\alpha+1}$  ist nicht elementar in  $E_\alpha$ ; vgl. 2.2, S.28)

Die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , werden mit Hilfe desselben Systems von Fundamentalfolgen definiert (vgl. 2.3):

Definition von  $F_\alpha$ ,  $\mathcal{E}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ :

$$F_0(x) = 2^x$$

$$F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(1) \quad , \text{ also } \begin{cases} F_{\alpha+1}(0) = 1 \\ F_{\alpha+1}(x+1) = F_\alpha(F_{\alpha+1}(x)) \end{cases}$$

$$F_\lambda(x) = \max_{y \leq x} F_{\lambda[y]}(x) \quad ,$$

wobei für  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$  gilt  $\lambda[x] = \omega^{n+1}\beta + \omega^n x$ .

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}(F_\alpha) \quad .$$

Bei den hier gewählten speziellen Fundamentalfolgen läßt sich die Definition der Funktionen  $F_\alpha$  vereinfachen: es gilt  $F_\lambda(x) = F_{\lambda[x]}(x)$ . Dies folgt unmittelbar aus einem Lemma über die Funktionen  $F_\alpha$ , das wir im nächsten Abschnitt beweisen.

$$\underline{3.2 \quad \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha \quad \text{für} \quad \alpha < \omega^\omega}$$

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß die drei eben definierten Hierarchien zusammenfallen, d.h. daß gilt  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ . Es handelt sich also um eine anscheinend natürliche, wegen  $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{L}_\beta$  für  $\alpha < \beta$  echt aufsteigende Hierarchie, die wegen  $\bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha \subseteq \mathcal{M} \subseteq \bigcup_\alpha \mathcal{R}_\alpha$  ( $\mathcal{M}$  := Klasse der mehrfach - rekursiven Funktionen) die mehrfach - rekursiven Funktionen ausschöpft. - Verwandte Resultate stammen von Robbin, der ähnliche Gleichheiten "im Limes" für  $\alpha \rightarrow \omega^n$  erhalten hat <sup>2)</sup>, und von Axt, der gezeigt hat <sup>3)</sup>, daß eine Variante der Methode von Kleene unterhalb  $\omega$  auf Grzegorzcyk - Klassen führt.

<sup>1)</sup> Mit  $\subset$  bezeichnen wir die echte Inklusion. <sup>2)</sup> in [13]. <sup>3)</sup> in [1].

Wir führen den Beweis in drei Teilen:

- 1)  $\mathcal{R}_\alpha \supseteq \mathcal{L}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$
- 2)  $\mathcal{L}_\alpha \supseteq \mathcal{E}_\alpha$  "
- 3)  $\mathcal{E}_\alpha \supseteq \mathcal{R}_\alpha$  "

zu 1) Wegen  $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{U}(\mathbb{E}_\alpha)$  genügt es zu zeigen

Satz:  $\mathbb{E}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$  .

Beweis: Durch Induktion über  $\alpha$  . Für  $\alpha=0$  ist die Behauptung trivial. Aus  $\mathbb{E}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$  folgt  $\mathbb{E}_{\alpha+1} \in \mathcal{R}_{\alpha+1}$  , denn nach dem Beispiel 2) auf S. 38 ist  $\mathbb{E}_{\alpha+1} = \text{el}^{\mathbb{E}_\alpha}$  durch eine 1-fache elementare Rekursion aus  $\mathbb{E}_\alpha$  definierbar. Es sei nun  $\lambda$  eine Limeszahl und  $\mathbb{E} \in \mathcal{R}_\alpha$  für  $\alpha < \lambda$  .  $\lambda$  läßt sich darstellen in der Form  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$  und es gilt nach Definition

$$\mathbb{E}_\lambda(i, x) = \mathbb{E}_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n \cdot (i)_0}((i)_1, x) .$$

Zum Beweis von  $\mathbb{E}_\lambda \in \mathcal{R}_\lambda$  genügt es zu zeigen, daß die durch

$$f(x_n, \dots, x_0, i, x) := \mathbb{E}_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n x_n + \dots + \omega x_1 + x_0}(i, x)$$

definierte Funktion  $f$  in  $\mathcal{R}_\lambda$  liegt. Nun gilt

$$f(0, \dots, 0, i, x) = \mathbb{E}_{\omega^{n+1}\beta}(i, x)$$

$$f(x_n, \dots, x_0+1, i, x) = \text{el}^{\lambda i x} f(x_n, \dots, x_0, i, x)(i, x)$$

$$= G_2(\lambda i x f(x_n, \dots, x_0+1, i, x), \lambda i x f(x_n, \dots, x_0, i, x); i, x)$$

$$f(x_n, \dots, x_m+1, 0, \dots, 0, i, x) = f(x_n, \dots, x_m, (i)_0, 0, \dots, 0, (i)_1, x)$$

(zu  $G_2$  vgl. S.38 ). Da in  $G_2(g, h; i, x)$   $g$  nur an Stellen  $j, y$  mit  $j < i$  gebraucht wird, ergibt sich, daß  $f$  durch eine  $n+2$  - fache ( $x$  ist "Parameter") elementare Rekursion aus  $\mathbb{E}_{\omega^{n+1}\beta}$  definiert werden kann, also  $f \in \mathcal{R}_{\omega^{n+1}\beta + \omega^{n+1}} = \mathcal{R}_\lambda$  .



zu 2) Wegen  $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{E}(E_\alpha)$  und  $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}(F_\alpha)$  genügt es zu zeigen

Satz:  $F_\alpha$  ist elementar in  $E_\alpha$  <sup>1)</sup>.

Zunächst ist es nützlich, einige Redeweisen einzuführen: Wir sagen "i ist ein  $\alpha$ -Index von f" oder "f ist elementar in  $E_\alpha$  mit dem Index i", wenn gilt

$$f(\mathcal{E}) = E_{\alpha+1}(i, \langle \mathcal{E} \rangle) .$$

Ist f elementar, so kann man ein i so wählen, daß für jedes  $\alpha$  ( $\omega^\omega$ ) i ein  $\alpha$ -Index von f ist; ein solches i nennen wir einen Index von f. Als Variable für die Indizes einer elementaren Funktion f verwenden wir das Zeichen |f|. Weiter definieren wir für  $1 \leq r \leq n$

$$Sb_{\mathcal{F}}^n(i, j_1, \dots, j_r) := \langle 5, n, i, j_1, \dots, j_r \rangle .$$

Ist also  $f(\mathcal{E}) = g(h_1(\mathcal{E}), \dots, h_r(\mathcal{E}))$  und sind  $i, j_1, \dots, j_r$   $\alpha$ -Indizes von  $g, h_1, \dots, h_r$ , so ist  $Sb_{\mathcal{F}}^n(i, j_1, \dots, j_r)$  ein  $\alpha$ -Index von f.

Der Satz ergibt sich leicht aus dem

Hilfssatz: Es gibt subelementare Funktionen  $h_n$ ,  $n \geq 0$ , so daß gilt: Ist i ein  $\omega^n \alpha$ -Index von  $F_{\omega^n \alpha}$ , so ist  $h_n(i)$  ein  $\omega^n \alpha + \omega^n$ -Index von  $F_{\omega^n \alpha + \omega^n}$ .

Beweis des Satzes aus dem Hilfssatz: Sei  $\alpha = \omega^n c_n + \omega^{n-1} c_{n-1} + \dots + c_0$  und  $j_0$  ein Index von  $F_0 = \lambda x 2^{x^x}$ . Ein  $\alpha$ -Index von  $F_\alpha$  ist dann

$$h_0^{c_0}(\dots h_{n-1}^{c_{n-1}}(h_n^{c_n}(j_0)) \dots) .$$

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir durch Induktion über n.

n=0: i sei ein  $\alpha$ -Index von  $F_\alpha$ . Zu bestimmen ist ein  $\alpha+1$ -Index von  $F_{\alpha+1}$ . Man beachte:  $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(1)$ . Zunächst läßt sich eine elementare Funktion  $g_0$  so angeben, daß für alle x  $g_0(i, x)$  ein  $\alpha$ -Index von  $\lambda y F_\alpha^x(y)$  ist, also

<sup>1)</sup> Für die Gültigkeit dieses Satzes ist es wesentlich, daß wir hier die endlichen Zahlenfolgen nicht durch Primzahlpotenzprodukte, sondern auf die in 1.2 beschriebene Weise gödelisiert haben.

$$F_{\alpha}^x(y) = E_{\alpha+1}(g_0(i,x), \langle y \rangle) .$$

Definition:

$$g_0(i,0) = \langle 2,1,1 \rangle \quad (\text{Index von } \lambda y 1)$$

$$g_0(i,x+1) = Sb_1^1(i, g_0(i,x))$$

Offenbar leistet  $g_0$  das Verlangte.  $g_0$  ist elementar, da  $Sb_1^1$  subelementar ist (vgl. 1.1, S.9);  $i_0$  sei ein Index von  $g_0$ . Es gilt also

$$\begin{aligned} F_{\alpha+1}(x) &= F_{\alpha}^x(1) \\ &= E_{\alpha+1}(g_0(i,x), \langle 1 \rangle) . \end{aligned}$$

Ein  $\alpha+1$ -Index von  $F_{\alpha+1}$  ist demnach (vgl. 2.2, S.26)

$$\begin{aligned} &Sb_2^1(\langle 0,2,1 \rangle, Sb_2^1(i_0, \langle 2,1,i \rangle, \langle 1,1,1 \rangle), \langle 2,1, \langle 1 \rangle \rangle) \\ &=: h_0(i) . \end{aligned}$$

Damit ist eine subelementare Funktion  $h_0$  mit der behaupteten Eigenschaft gefunden.

Schluß von  $n-1$  auf  $n$ :  $i$  sei ein  $\omega^n \alpha$ -Index von  $F_{\omega^n \alpha}^n$ . Zu bestimmen ist ein  $\omega^n \alpha + \omega^n$ -Index von  $F_{\omega^n \alpha + \omega^n}^n$ . Man beachte

$$F_{\omega^n \alpha + \omega^n}^n(x) = F_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x}^n(x) .$$

Zunächst läßt sich eine elementare Funktion  $g_n$  so angeben, daß für alle  $x$   $g_n(i,x)$  ein  $\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x$ -Index von  $\lambda y F_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x}^n(y)$  ist, also

$$F_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x}^n(y) = E_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x+1}^n(g_n(i,x), \langle y \rangle) .$$

Definition:

$$g_n(i,0) = i$$

$$g_n(i,x+1) = h_{n-1}(g_n(i,x))$$

Nach Induktionsvoraussetzung leistet  $g_n$  das Verlangte;  $g_n$  ist elementar, da  $h_{n-1}$  subelementar ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
 & F_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x} (y) \\
 &= E_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x + 1} (g_n(i, x), \langle y \rangle) \\
 &= E_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x + \omega} (\langle 1, g_n(i, x) \rangle, \langle y \rangle) \\
 &= E_{\omega^n \alpha + \omega^{n-1} x + \omega^{n-1}} (g^{n-1}(g_n(i, x)), \langle y \rangle) \\
 & \hspace{15em} \text{mit } g(u) := \langle 1, u \rangle, \quad g \in \mathfrak{r} \\
 &= E_{\omega^n \alpha + \omega^n} (\langle x+1, g^{n-1}(g_n(i, x)) \rangle, \langle y \rangle)
 \end{aligned}$$

und damit

$$F_{\omega^n \alpha + \omega^n} (x) = E_{\omega^n \alpha + \omega^n} (\langle x+1, g^{n-1}(g_n(i, x)) \rangle, \langle x \rangle) .$$

Ein  $\omega^n \alpha + \omega^n$  -Index von  $F_{\omega^n \alpha + \omega^n}$  ist demnach

$$\begin{aligned}
 & \text{Sb}_2^1(\langle 0, 2, 1 \rangle, \text{Sb}_2^1(|\lambda_{xy} \langle x, y \rangle|, |\lambda_{xx+1}|, \text{Sb}_1^1(|g^{n-1}|, \\
 & \text{Sb}_2^1(|g_n|, |\lambda_{xi}|, |\lambda_{xx}|))), |\lambda_x \langle x \rangle|) .
 \end{aligned}$$

Wählt man  $|\lambda_{xi}| = \langle 2, 1, i \rangle$  und die anderen Indizes beliebig, so definiert dieser Term in Abhängigkeit von  $i$  eine subelementare Funktion  $h_n$  mit der behaupteten Eigenschaft.

zu 3) Zu zeigen ist  $\mathfrak{C}_\alpha \supseteq \mathfrak{R}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ . Wir beweisen zunächst zwei vorbereitende Lemmata. - Für  $\alpha < \omega^\omega$  sei  $\text{maxcoeff}(\alpha) := \max(a_0, \dots, a_n)$ , falls  $\alpha = \sum_{i \leq n} \omega^i a_i$ . Mit  $f^k$  bezeichnen wir die  $k$ -te Iterierte einer einstelligen Funktion  $f$ , also  $f^0(x) = x$ ,  $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ .

Lemma 1: (Einfache Eigenschaften der Funktionen  $F_\alpha$ )

- (1)  $F_\alpha(0) = 1$ ,  $F_\alpha(1) = 2$ ,  $F_\alpha(2) = 4$
- (2)  $x < F_\alpha(x)$
- (3)  $F_\alpha$  wächst echt monoton.
- (4)  $F_\alpha(x) \leq F_{\alpha+1}(x)$ ;  $<$  gilt für  $x \geq 3$ .
- (5)  $F_\alpha(x) \leq F_\beta(x)$  für  $\alpha \leq \beta$ ,  $x > \text{maxcoeff}(\alpha)$ .

$$(6) \quad F_{\alpha}^{\#}(x) \leq F_{\alpha \# \beta}^{\#}(x) \quad 1)$$

$$(7) \quad F_{\omega^i \gamma + 1}^i(x) \leq F_{\omega^i \gamma + \omega^j}^i(x) \quad \text{für } j \leq i .$$

$$(8) \quad F_{\alpha}^{k+1}(x) \leq F_{\alpha+1}^k(x) \quad \text{für } x \geq 4, \quad k \geq 1 .$$

Beweis: (1) bis (4) wurden in 2.3, S.33 bewiesen. Zum Beweis von (5) bis (8) nützen wir aus, daß jetzt gewisse "natürliche" Fundamentalfolgen fest gewählt sind.

zu (5) Induktion über  $\beta$ . Fall 1:  $\beta=0$ . Trivial. Fall 2:  $\beta$  ist Nachfolgerzahl. Trivial wegen (4). Fall 3:  $\beta$  ist Limeszahl. OBdA sei  $\alpha < \beta$ .  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich darstellen in der Form

$$\alpha = \omega^m a_m + \dots + \omega^{n+1} a_{n+1} + \omega^n a_n + \dots + \omega a_1 + a_0$$

$$\beta = \omega^m b_m + \dots + \omega^{n+1} b_{n+1}, \quad b_{n+1} > 0 .$$

Nach Definition gilt dann

$$\beta[x] = \omega^m b_m + \dots + \omega^{n+1} (b_{n+1} - 1) + \omega^n x .$$

Wegen  $\alpha < \beta$  und  $x > \max \text{coeff}(\alpha)$  folgt  $\alpha \leq \beta[x]$  und daraus nach Induktionsvoraussetzung  $F_{\alpha}^i(x) \leq F_{\beta[x]}^i(x) \leq F_{\beta}^i(x)$ .

zu (6) Es genügt zu zeigen

$$(*) \quad F_{\omega^n \beta + \gamma}^n(x) \leq F_{\omega^n(\beta+1) + \gamma}^n(x) \quad \text{für } \gamma < \omega^n .$$

Wir führen den Beweis durch Induktion über  $\gamma$ . Fall 1:  $\gamma=0$ .

Bewiesen wird  $F_{\omega^n \beta}^n(x) \leq F_{\omega^n \beta + \omega^i}^n(x)$  durch Induktion über  $n$ .

$$n=0: \text{s. (4)}. \quad n-1 \Rightarrow n: \quad F_{\omega^n \beta}^n(x) \leq F_{\omega^{n-1}(\omega \beta) + \omega^{n-1}}^n(x) =$$

$$F_{(\omega^n \beta + \omega^n)[1]}^n(x) \leq F_{\omega^n \beta + \omega^n}^n(x) . \quad \text{Fall 2: Angenommen, } (*) \text{ gilt}$$

für  $\gamma$ . Wir beweisen  $F_{\delta+1}^n(x) \leq F_{\varepsilon+1}^n(x)$ ,  $\delta := \omega^n \beta + \gamma$ ,

$\varepsilon := \omega^n(\beta+1) + \gamma$  durch Induktion über  $x$ .  $x=0$ : trivial.  $x \Rightarrow x+1$ :

$$F_{\delta+1}^n(x+1) = F_{\delta}^n(F_{\delta+1}^n(x)) \leq F_{\delta}^n(F_{\varepsilon+1}^n(x)) \leq F_{\varepsilon}^n(F_{\varepsilon+1}^n(x)) = F_{\varepsilon+1}^n(x+1) .$$

1)  $\alpha \# \beta$  ist die "natürliche Summe" (Hessenberg) von  $\alpha$  und  $\beta$ .

Ist  $\alpha = \sum_{i \leq n} \omega^i a_i$  und  $\beta = \sum_{i \leq n} \omega^i b_i$ , so ist  $\alpha \# \beta = \sum_{i \leq n} \omega^i (a_i + b_i)$ .

Fall 3:  $\gamma$  ist eine Limeszahl. Wegen  $\gamma < \omega^n$  ist  $(\omega^n \alpha + \gamma)[x] = \omega^n \alpha + \gamma[x]$ , also  $F_{\omega^n \alpha + \gamma}(x) = \max_{y \leq x} F_{\omega^n \beta + \gamma}[y](x) \leq \max_{y \leq x} F_{\omega^n(\beta+1) + \gamma}[y](x) = F_{\omega^n(\beta+1) + \gamma}(x)$ .

zu (7) Induktion über  $j$ .  $j=0$ : trivial.  $j \Rightarrow j+1$ :  $F_{\omega^i \gamma + \omega^{j+1}}(x) = F_{\omega^i \gamma + \omega^j}(x) \geq F_{\omega^i \gamma + \omega^j}(x) \geq F_{\omega^i \gamma + 1}(x)$ .

zu (8) Induktion über  $k$ .  $k=1$ : Induktion über  $x$ .  $x=4$ :  $F_{\alpha+1}(4) = F_{\alpha}^4(1) = F_{\alpha}^2(F_{\alpha}^2(1)) = F_{\alpha}^2(4)$ .  $x \Rightarrow x+1$ :  $F_{\alpha+1}(x+1) = F_{\alpha}(F_{\alpha+1}(x)) \geq F_{\alpha}(F_{\alpha}^2(x)) \geq F_{\alpha}^2(x+1)$ .  $k \Rightarrow k+1$ :  $F_{\alpha}^{k+2}(x) = F_{\alpha}(F_{\alpha}^{k+1}(x)) \leq F_{\alpha}(F_{\alpha+1}^k(x)) \leq F_{\alpha+1}^{k+1}(x)$ .

Das zweite Lemma macht Aussagen darüber, wie stark die elementaren Operationen das Wachstum von Funktionen höchstens vergrößern können. Wir nennen eine  $n$ -stellige Funktion  $f$  abschätzbar durch eine Iterierte einer einstelligigen Funktion  $f_0$ , wenn es eine Zahl  $k$  gibt, so daß für alle  $\mathcal{G}$  gilt  $f(\mathcal{G}) \leq f_0^k(\max \mathcal{G})$ .

Lemma 2: (1) Zu jedem elementaren Funktional  $F$  gibt es eine Zahl  $t$ , so daß gilt: Ist  $f_0$  eine einstellige, schwach monoton wachsende Funktion mit  $f_0(x) \geq 2^x$ , und sind  $g_1, \dots, g_r$  durch  $f_0^k$ ,  $k \geq 1$ , abschätzbare Funktionen passender Stellenzahl, so ist  $\lambda \mathcal{G} F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{G})$  abschätzbar durch  $f_0^{tk}$ .

(2)  $f_0$  sei eine einstellige, schwach monoton wachsende Funktion mit  $f_0(x) \geq 2^x$ . Ist dann  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$  und können  $g_1, \dots, g_r$  durch Iterierte von  $f_0$  abgeschätzt werden, so auch  $f$ .

(3) Jede Funktion aus  $\mathcal{E}_{\alpha}$  ist abschätzbar durch eine  $F_{\alpha}$ -Iterierte.

Beweis: (3) folgt trivial aus (2). (2) folgt aus (1), denn ist  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$ , so läßt sich  $f$  mit einem elementaren Funktional  $F$  darstellen als  $\lambda \mathcal{G} F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{G})$ . (1) beweisen wir durch Induktion über den Aufbau der elementaren Funktionale.

Fall 1: Ausgangsfunktionale.

$$g_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \leq f_0^k(\max(x_1, \dots, x_{n_i}))$$

$$x_i \leq f_0^0(\max \mathcal{G})$$

$$\begin{aligned}
 i &\leq f_0^i(\max \mathcal{E}) \\
 x+y &\leq f_0(\max(x,y)) \\
 x \cdot y &\leq f_0^2(\max(x,y))
 \end{aligned}$$

Fall 2: Ist  $F(\mathcal{E}; \mathcal{E}) = G(\mathcal{E}; H_1(\mathcal{E}; \mathcal{E}), \dots, H_r(\mathcal{E}; \mathcal{E}))$ , und sind  $G, H_1, \dots, H_r$  die Zahlen  $t, t_1, \dots, t_r$  zugeordnet, so kann für  $F$  die Zahl  $t + \max(t_1, \dots, t_r)$  gewählt werden, denn sind  $g_1, \dots, g_r$  abschätzbar durch  $F_\alpha^k$ , so folgt

$$\begin{aligned}
 &G(\mathcal{E}; H_1(\mathcal{E}; \mathcal{E}), \dots, H_r(\mathcal{E}; \mathcal{E})) \\
 &\leq f_0^{tk}(\max(f_0^{t_1 k}(\max \mathcal{E}), \dots, f_0^{t_r k}(\max \mathcal{E}))) \\
 &\leq f_0^{(t + \max(t_1, \dots, t_r))k}(\max \mathcal{E}) .
 \end{aligned}$$

Fall 3: Ist  $F(\mathcal{E}; \mathcal{E}, y) = \sum_{i < y} G(\mathcal{E}; \mathcal{E}, i)$  (bzw.  $\prod_{i < y} G(\mathcal{E}; \mathcal{E}, i)$ ), und ist  $G$  die Zahl  $t$  zugeordnet, so kann für  $F$  die Zahl  $t+2$  (bzw.  $t+3$ ) gewählt werden, denn sind  $g_1, \dots, g_r$  abschätzbar durch  $f_0^k$ , so folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{i < y} G(\mathcal{E}; \mathcal{E}, i) &\leq \sum_{i < y} f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, i)) \\
 &\leq y \cdot f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, y)) \\
 &\leq (f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, y)))^2 \\
 &\leq f_0^{tk+2}(\max(\mathcal{E}, y)) \quad , \text{ da } x^2 \leq 2^{2^x} \leq f_0^2(x) \\
 &\leq f_0^{(t+2)k}(\max(\mathcal{E}, y))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \prod_{i < y} G(\mathcal{E}; \mathcal{E}, i) &\leq \prod_{i < y} f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, i)) \\
 &\leq (f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, y)))^y \\
 &\leq f_0(y \cdot f_0^{tk}(\max(\mathcal{E}, y))) \quad , \text{ da } x^y \leq 2^{xy} \\
 &\leq f_0(f_0^{(t+2)k}(\max(\mathcal{E}, y))) \\
 &\leq f_0^{(t+3)k}(\max(\mathcal{E}, y)) .
 \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also  $\mathcal{E}_\alpha \supseteq \mathcal{R}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ . Wir definieren noch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_\alpha &:= \{f \mid \forall s_f \forall k \forall \mathcal{E} \wedge s_f(\mathcal{E}) \leq F_\alpha^k(\max \mathcal{E})\} \\
 &= \{f \mid \text{Es gibt ein } \overline{s}_f \text{ in } \mathcal{E}_\alpha \} \quad (\text{nach Lemma 2})
 \end{aligned}$$

und beweisen  $\mathcal{C}_\alpha \supseteq \mathcal{A}_\alpha \supseteq \mathcal{R}_\alpha$ . Der Beweis von  $\mathcal{C}_\alpha \supseteq \mathcal{A}_\alpha$  macht keine Schwierigkeiten, denn jedes  $f \in \mathcal{A}_\alpha$  läßt sich mit geeigneten Zahlen  $p, k$  darstellen in der Form  $f(\xi) = D(K(p, \langle \xi \rangle, F_\alpha^k(\max \xi)))$  (vgl. 1.3, S.17) und daraus folgt  $f \in \mathcal{C}_\alpha$ . Zu zeigen bleibt

Satz:  $\mathcal{A}_\alpha \supseteq \mathcal{R}_\alpha$

Den Beweis führen wir durch Induktion über den (simultanen) Aufbau der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$ . Beachtet man, daß aus den in Lemma 1 zusammengestellten Monotonie - Eigenschaften der Funktionen  $F_\alpha$  folgt  $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_\beta$  für  $\alpha \leq \beta$ , so genügt es zu zeigen

Behauptung:

- a) Ist  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und sind  $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{A}_\alpha$ , so ist  $f \in \mathcal{A}_\alpha$ .
- b) Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und sind  $g_1, \dots, g_r \in \mathcal{A}_\alpha$ , so ist  $f \in \mathcal{A}_{\alpha + \omega^{n-1}}$ .

Beweis zu a) Ist  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$ , und sind  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  Schrittzahlfunktionen zu  $g_1, \dots, g_r$ , so gibt es eine Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die elementar ist in  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$ ; dies folgt unmittelbar aus den in 1.3 bewiesenen Sätzen über Schrittzahlfunktionen. Nach Voraussetzung können  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  so gewählt werden, daß sie in  $\mathcal{C}_\alpha$  majorisierbar sind. Nach Lemma 2 ist dann auch  $s_f$  in  $\mathcal{C}_\alpha$  majorisierbar. Daraus folgt  $f \in \mathcal{A}_\alpha$ .

zu b) Es genügt, die folgenden beiden Hilfssätze zu beweisen:

Hilfssatz 1: Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , und sind  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  Schrittzahlfunktionen zu  $g_1, \dots, g_r$ , so gibt es eine Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  definiert werden kann.

Hilfssatz 2: Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , und sind  $g_1, \dots, g_r$  in  $\mathcal{C}_\alpha$  majorisierbar, so ist  $f$  in  $\mathcal{C}_{\alpha + \omega^{n-1}}$  majorisierbar.

Denn ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , und sind  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  Schrittzahlfunktionen zu  $g_1, \dots, g_r$ , so gibt es nach Hilfssatz 1 eine Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  definiert werden kann. Nach Voraussetzung können  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  so gewählt werden, daß sie in  $\mathcal{C}_\alpha$  majorisierbar sind. Nach Hilfssatz 2 ist dann  $s_f$  in  $\mathcal{C}_{\alpha + \omega^{n-1}}$  majorisierbar. Daraus folgt  $f \in \mathcal{O}_{\alpha + \omega^{n-1}}$ .

Beweis zu Hilfssatz 2: Wir beweisen durch Induktion über  $n$  die folgende, etwas stärkere Behauptung:  $f$  sei durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , d.h. es gebe ein elementares Funktional  $F$ , so daß für alle  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  gilt

$$f(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = F(f, \mathcal{U}; \mathcal{U}, \mathcal{V}),$$

wobei in  $F(f, \mathcal{U}; \mathcal{U}, \mathcal{V})$   $f$  nur an Stellen  $\tilde{u}, \tilde{v}$  mit  $\tilde{u} <_n \mathcal{U}$  gebraucht wird (vgl. S.37).  $g_1, \dots, g_r$  seien abschätzbar durch  $F_\alpha^k$  mit  $k \geq 1$ ,  $t$  sei zu  $F$  wie in Lemma 2, (1) gewählt und  $a_i$  sei der Koeffizient von  $\omega^i$  in der Darstellung  $\alpha = \sum_{i \leq m} \omega^i a_i$ . Dann gilt mit

$$l_n := \max(k, t+n, 5, a_{n-2}, \dots, a_0) \text{ für alle } \mathcal{U}, \mathcal{V}$$

$$f(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \leq F_{\alpha + \omega^{n-1}}^{l_n}(\max(\mathcal{U}, \mathcal{V})).$$

I:  $n=1$ . Zunächst beweisen wir durch Induktion über  $x$

$$f(x, \mathcal{U}) \leq F_\alpha^{t \cdot x + 1, k}(\max(x, \mathcal{U})).$$

$$x=0: f(0, \mathcal{U}) = F(\lambda u \mathcal{U} 0, \mathcal{U}; 0, \mathcal{U}) \leq F_\alpha^{t, k}(\max \mathcal{U}) \quad (\text{nach Lemma 2, (1)}).$$

$0, 1, \dots, x-1 \Rightarrow x$ :

$$\begin{aligned} f(x, \mathcal{U}) &= F(\lambda u \mathcal{U} \begin{cases} f(0, \mathcal{U}) \\ \dots \\ f(x-1, \mathcal{U}) \\ 0 \end{cases}; \mathcal{U}, \mathcal{U}) && \begin{cases} \text{falls } u=0 \\ \\ \text{falls } u=x-1 \\ \text{sonst} \end{cases} \quad , \mathcal{U}; x, \mathcal{U}) \\ &\leq F^{t \cdot t \cdot x, k}(\max(x, \mathcal{U})) \end{aligned}$$

(nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 2, (1)). Damit ist die Induktion über  $x$  beendet. Aus der bewiesenen Ungleichung folgt unmittelbar

$$f(x, \mathcal{U}) \leq F_\alpha^{l_1^{x+2}}(\max(x, \mathcal{U})).$$

Es genügt also zu zeigen



$$F_{\alpha}^{l^{m+2}}(m) \leq F_{\alpha+1}^l(m) \quad \text{für } l \geq 5.$$

Wegen  $F_{\alpha}^{l^{m+2}}(m) \leq F_{\alpha}^{l^{m+2}}(F_{\alpha+1}^l(m)) = F_{\alpha+1}^l(m + l^{m+2})$  folgt dies aus

$$m + l^{m+2} \leq F_1^{l-1}(m) \quad \text{für } l \geq 5.$$

Diese Ungleichung beweisen wir durch Induktion über  $m$ .  $m=0$ :

Induktion über  $l$ .  $l=5$ :  $F_1^4(0) = F_1(4) = 2^{16} > 5^2$ .  $l \Rightarrow l+1$ :

$$(l+1)^2 \leq 2 \cdot l^2 \leq F_1(l^2) \leq F_1(F_1^{l-1}(0)). \quad m \Rightarrow m+1: \quad m + 1 + l^{m+3} \leq$$

$$(m + l^{m+2})^2 \leq F_0(F_1^{l-1}(m)) = F_0(F_1(F_1^{l-2}(m))) = F_1(F_1^{l-2}(m) + 1) \leq$$

$$F_1(F_1^{l-2}(m+1)) = F_1^{l-1}(m+1). \quad \text{Damit ist die Behauptung für } n=1$$

bewiesen.

II Schluß von  $n$  auf  $n+1$ : Wir setzen  $f_{x_1}(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}) := f(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathcal{A})$  und beweisen durch Induktion über  $x_1$  unter Verwendung der Voraussetzung der Induktion über  $n$  zunächst die Abschätzung

$$f_{x_1}(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}) \leq F_{\alpha}^{ln}(\max(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A})) \cdot \omega^{n-2}(x_1+1).$$

Der Induktionsbeginn und der Induktionsschritt lassen sich gemeinsam behandeln. Sei also  $x_1 \geq 0$ . Nach Voraussetzung gilt

$$f_{x_1}(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}) = F(\lambda \check{u} \omega \begin{cases} f_0(u_2, \dots, u_n, \omega) & \text{falls } u_1=0 \\ \dots \\ f_{x_1}(u_2, \dots, u_n, \omega) & \text{falls } u_1=x_1, \mathcal{A}; x_1, \dots, x_n, \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren ein elementares Funktional  $G_{x_1}$  durch

$$G_{x_1}(h_0, \dots, h_{x_1+r+1}; x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}) := F(\lambda \check{u} \omega \begin{cases} h_0(u_2, \dots, u_n, \omega) & \text{falls } u_1=0 \\ \dots \\ h_{x_1}(u_2, \dots, u_n, \omega) & \text{falls } u_1=x_1, h_{x_1+1}, \dots, h_{x_1+r}; h_{x_1+r+1}(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}), x_2, \dots, x_n, \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann

$$f_{x_1}(x_2, \dots, x_n, \mathcal{A}) = G_{x_1}(f_0, \dots, f_{x_1}, \mathcal{A}, \lambda u_2 \dots u_n \omega x_1; x_2, \dots, x_n, \mathcal{A})$$

und in  $G_{x_1}(f_0, \dots, f_{x_1}, \mathcal{A}, \lambda u_2 \dots u_n \omega x_1; x_2, \dots, x_n, \mathcal{A})$  wird  $f_{x_1}$  nur

an Stellen  $u_2, \dots, u_n, \omega$  mit  $(u_2, \dots, u_n) \prec_{n-1} (x_2, \dots, x_n)$  gebraucht.  $f_{x_1}$  ist also durch eine  $n-1$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $f_0, \dots, f_{x_1-1}, \omega$  und  $\lambda u_2 \dots u_n \omega x_1$ . Alle diese Funktionen sind nun abschätzbar durch  $F_{\alpha \# \omega^{n-2} x_1}^{1n}$ , denn  $f_0, \dots, f_{x_1-1}$  sind nach Voraussetzung (der Induktion über  $x_1$ ) abschätzbar durch  $F_{\alpha \# \omega^{n-2} x_1}^{1n}$ ,  $g_1, \dots, g_r$  durch  $F_{\alpha}^k$  und es gilt nach Lemma 1  $x_1 \leq F_{x_1}^{1n}(4) \leq F_{\omega^{n-2} x_1}^{1n}(4) = F_{\omega^{n-2} x_1}^{1n}(F_0^3(0)) \leq F_{\alpha \# \omega^{n-2} x_1}^{1n}(0)$ . Weiter folgt aus der Definition von  $G_{x_1}$ , daß  $\lambda x_2 \dots x_n G_{x_1}(h_0, \dots, h_{x_1+r+1}; x_2, \dots, x_n, \omega)$  durch  $F_{\beta}^{(t+1)1}$  abgeschätzt werden kann, falls  $h_0, \dots, h_{x_1+r+1}$  abschätzbar sind durch  $F_{\beta}^1$ . Wendet man jetzt die Voraussetzung der Induktion über  $n$  an, so erhält man

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_2, \dots, x_n, \omega) &\leq F_{(\alpha \# \omega^{n-2} x_1) + \omega^{n-2}}^{\max(1_n, t+1+n-1, 5, a_{n-3}, \dots, a_0)}(\max(x_2, \dots, x_n, \omega)) \\ &= F_{\alpha + \omega^{n-2}(x_1+1)}^{1n}(\max(x_2, \dots, x_n, \omega)). \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion über  $x_1$  beendet. Aus der bewiesenen Ungleichung ergibt sich wie folgt die gewünschte Abschätzung:

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) \\ &\leq F_{\alpha + \omega^{n-2}(m+1)}^{1n}(m) \quad \text{mit } m := \max(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) \\ &= F_{\omega^{n-1}\beta + \omega^{n-2}(a_{n-2}+m+1)}^{1n}(m), \beta \text{ def. durch } \alpha = \omega^{n-1}\beta + \sum_{i \leq n-2} \omega^i a_i \\ &\leq F_{\omega^{n-1}\beta + \omega^{n-2}(1_n+m+1)}^{1n}(m) \\ &\leq F_{\omega^{n-1}\beta + \omega^{n-1}(m)}^{1n}(m) \quad (\text{nach } (*)) \\ &= F_{\alpha + \omega^{n-1}(\max(\omega, \omega))}^{1n} \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also nur noch

$$(*) \quad F_{\omega^{i+1}\gamma + \omega^i(x+c+1)}^c(x) \leq F_{\omega^{i+1}\gamma + \omega^{i+1}}^c(x) \quad \text{für } c \geq 5.$$

Wir beweisen zunächst

$$F_{\omega^{i+1}\gamma + \omega^i(x+c+1)}^c(x) \leq F_{\omega^{i+1}\gamma + \omega^{i+1}}^{c-3}(x) \quad \text{für } c \geq 5, x \geq 4$$

$$\begin{aligned}
 & \omega^{i+1} \gamma + \omega^i(x+c+1)^{(x)} \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^i(x+c+1)^{+c-1} \quad (\text{da } x \geq 4) \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^i(x+2c)^{(x)} \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(x+2c) \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(F_0^{c-4}(x)) \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(x)
 \end{aligned}$$

Wegen  $F_0^3 \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(x) \geq 4$  erhält man daraus für  $c \geq 5$

$$\begin{aligned}
 & \omega^{i+1} \gamma + \omega^i(x+c+1)^{(x)} \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^i(x+c+1)^{(F_0^3 \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(x))} \\
 & \leq \omega^{i+1} \gamma + \omega^{i+1}(x) .
 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von Hilfssatz 2 beendet.

Für den Beweis von Hilfssatz 1 ist es erforderlich, zu einer n-fachen elementaren Rekursion, die eine Funktion  $f$  aus Funktionen  $g_1, \dots, g_r$  definiert, und zu Registermaschinen  $M_1, \dots, M_r$ , die die Funktionen  $g_1, \dots, g_r$  mit Schrittzahlfunktionen  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  berechnen, eine Registermaschine  $M$  zu konstruieren, der  $f$  berechnet, und zwar so, daß die zugehörige Schrittzahlfunktion  $s_f$  durch eine n-fache elementare Rekursion definierbar ist aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$ . Eine direkte Konstruktion einer solchen Maschine wäre sehr mühsam. Wir werden hier vorgehen wie Kleene beim Beweis seines Rekursionstheorems (in [6], S.352) und werden zeigen, daß die entsprechend konstruierte Registermaschine  $M$  zur Berechnung von  $f$  eine Schrittzahlfunktion  $s_f$  mit der gewünschten Eigenschaft besitzt. Bei dieser Beweismethode arbeitet man mit partiell rekursiven Funktionen. Zur Vorbereitung stellen wir jetzt einige Redeweisen und die benötigten Lemmata über partiell rekursive Funktionen zusammen.

Im Zusammenhang mit partiellen, d.h. nicht notwendig auf allen Argumentetupeln definierten Funktionen verwenden wir die folgenden Konventionen <sup>1)</sup>:  $g(h_1(\xi), \dots, h_r(\xi))$  soll genau dann definiert sein, wenn  $h_1, \dots, h_r$  an der Stelle  $\xi$  und  $g$  an der Stelle  $h_1(\xi), \dots, h_r(\xi)$  definiert sind. Z.B. ist  $0 \cdot h(x)$  undefiniert, falls  $h(x)$  undefiniert ist.  $\sum_{i < y} g(\xi, i)$ ,  $\prod_{i < y} g(\xi, i)$  sollen genau dann definiert sein, wenn  $g(\xi, 0), \dots, g(\xi, y-1)$  definiert sind.  $\begin{cases} g_1(\xi) & \text{falls } h(\xi)=0 \\ g_2(\xi) & \text{sonst} \end{cases}$  soll genau dann definiert sein, wenn  $g_1(\xi)$  definiert und  $h(\xi)$  definiert und  $=0$  ist, oder wenn  $g_2(\xi)$  definiert und  $h(\xi)$  definiert und  $\neq 0$  oder undefiniert ist.  $\mu y [g(\xi, y)=0]$  soll genau dann definiert sein, wenn es ein  $y$  gibt, so daß  $g(\xi, 0), \dots, g(\xi, y)$  definiert sind und  $g(\xi, y)=0$  ist. Wir schreiben  $f(\xi) \approx g(\xi)$ , um auszudrücken, daß  $f$  an der Stelle  $\xi$  genau dann definiert ist, wenn  $g$  dort definiert ist, und daß, falls  $f$  und  $g$  beide an der Stelle  $\xi$  definiert sind, sie dort denselben Wert annehmen.

Entsprechend diesen Konventionen kann man den Begriff des elementaren Funktionals so erweitern, daß auch partielle Funktionen als Argumente zugelassen sind; wir sprechen dann von elementaren Funktionalen im weiteren Sinne (i.w.S.). Zur genauen Definition interpretiere man in der auf Seite 36 gegebenen Definition elementarer Funktionale  $f_1, \dots, f_r$  als partielle Funktionen, ersetze "=" durch " $\approx$ ", "Funktional" durch "Funktional i.w.S." und füge hinzu: Sind  $G_1, G_2, H$  elementare Funktionale i.w.S., und ist  $F$  definiert durch

$$F(f; \xi) \approx \begin{cases} G_1(f; \xi) & \text{falls } H(f; \xi)=0 \\ G_2(f; \xi) & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist auch  $F$  ein elementares Funktional i.w.S.. Fallunterscheidungen müssen besonders aufgeführt werden, denn würde man

$$\begin{cases} g_1(\xi) & \text{falls } h(\xi)=0 \\ g_2(\xi) & \text{sonst} \end{cases}$$

wie üblich erklären durch  $g_1(\xi) \cdot sg(h(\xi)) + g_2(\xi)(1 - h(\xi))$ , so widerspräche dies den Konventionen (ist z.B.  $h(\xi)=0$ ,  $g_1(\xi)$  definiert und  $g_2(\xi)$  undefiniert, so ist der erste Term definiert und der zweite undefiniert). Genau wie für elementare Funktionale

<sup>1)</sup> Vgl. Kleene [6], S.237-239.

beweist man, daß mit  $G, H_1, \dots, H_r$  stets auch  $\lambda f \in G(\lambda y_1 \dots y_{n_1} H_1(f; y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, \lambda y_1 \dots y_{n_r} H_r(f; y_1, \dots, y_{n_r}); \mathcal{C})$  ein elementares Funktional i.w.S. ist. Wir verwenden auch für elementare Funktionale i.w.S. die Redeweise "f wird in  $F(f, y; \mathcal{C})$  nur gebraucht an Stellen  $\vec{u} \in M$ "; das soll besagen, daß für beliebige partielle Funktionen  $f'$  mit derselben Stellenzahl wie  $f$  gilt

$$\bigwedge_{\vec{u} \in M} f(\vec{u}) \approx f'(\vec{u}) \rightarrow F(f, y; \mathcal{C}) \approx F(f', y; \mathcal{C}).$$

Eine n-stellige partielle Funktion  $f$  heißt RM - berechenbar, wenn es eine Registermaschine gibt, die, angesetzt auf die Registerinhalte  $x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots$  genau dann stoppt, wenn  $f(x_1, \dots, x_n)$  definiert ist, und zwar dann mit den Registerinhalten  $f(x_1, \dots, x_n), 0, 0, \dots$ . Mit den üblichen Methoden beweist man, daß die Klasse der partiellen RM - berechenbaren Funktionen mit der Klasse der partiell rekursiven Funktionen zusammenfällt. Zu jeder RM zur Berechnung einer partiellen Funktion  $f$  gehört eine ebenfalls partielle Schrittzahlfunktion  $s_f$  mit demselben Definitionsbereich wie  $f$ . Das Zeichen " $s_f$ " verwenden wir wieder als Variable für Schrittzahlfunktionen von  $f$ . - Beim Beweis von Hilfssatz 1 werden wir die folgenden beiden Lemmata über partielle Schrittzahlfunktionen benutzen:

Lemma 3: (1) Ist eine partielle Funktion  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{C}) \approx g(h_1(\mathcal{C}), \dots, h_r(\mathcal{C}))$ , und sind  $h_1, \dots, h_r$  partielle, mit Schrittzahlfunktionen  $s_{h_1}, \dots, s_{h_r}$  RM - berechenbare Funktionen, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich definieren läßt in der Form

$$s_f(\mathcal{C}) \approx f_0(\mathcal{C}, s_{h_1}(\mathcal{C}), \dots, s_{h_r}(\mathcal{C}), s_g(h_1(\mathcal{C}), \dots, h_r(\mathcal{C})), f(\mathcal{C})),$$

$f_0$  elementar.

(2) Ist eine partielle Funktion  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{C}, y) \approx \sum_{i < y} g(\mathcal{C}, i)$  (bzw.  $f(\mathcal{C}, y) \approx \prod_{i < y} g(\mathcal{C}, i)$ ), und ist  $g$  eine partielle, mit einer Schrittzahlfunktion  $s_g$  RM - berechenbare Funktion, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich definieren läßt in der Form

$$s_f(\mathcal{C}) \approx f_0(\mathcal{C}, y, \sum_{i < y} f_1(\mathcal{C}, i, s_g(\mathcal{C}, i)g(\mathcal{C}, i), f(\mathcal{C}, i)), f(\mathcal{C}, y)),$$

$f_0, f_1$  elementar.

(3) Ist eine partielle Funktion  $f$  definiert durch

$$f(\mathcal{Z}) \approx \begin{cases} g_1(\mathcal{Z}) & \text{falls } h(\mathcal{Z})=0 \\ g_2(\mathcal{Z}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

und sind  $g_1, g_2, h$  partielle, mit Schrittzahlfunktionen  $s_{g_1}, s_{g_2}, s_h$  RM - berechenbare Funktionen, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich definieren läßt in der Form

$$s_f(\mathcal{Z}) \approx f_0(\mathcal{Z}, s_h(\mathcal{Z}), h(\mathcal{Z}), \begin{cases} s_{g_1}(\mathcal{Z}) & \text{falls } h(\mathcal{Z})=0 \\ s_{g_2}(\mathcal{Z}) & \text{sonst} \end{cases}),$$

$f_0$  elementar.

(4) Ist eine partielle Funktion  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{Z}) \approx \mu y [g(\mathcal{Z}, y)=0]$  und ist  $g$  eine partielle, mit einer Schrittzahlfunktion  $s_g$  RM - berechenbare Funktion, so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die sich definieren läßt in der Form

$$s_f(\mathcal{Z}) \approx f_0(\mathcal{Z}, \Sigma_{y \leq f(\mathcal{Z})} f_1(\mathcal{Z}, y, s_g(\mathcal{Z}, y), g(\mathcal{Z}, y)), f(\mathcal{Z})),$$

$f_0, f_1$  elementar.

Beweis: (1), (2) und (4) beweist man wörtlich wie in 1.3. (3) ergibt sich wie folgt: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß  $f$  einstellig ist; die allgemeine Behauptung beweist man entsprechend.  $M', M'', M$  seien Registermaschinen zur Berechnung von  $g_1, g_2, h$  mit Schrittzahlfunktionen  $s_{g_1}, s_{g_2}, h$ .  $f(x)$  kann dann nach dem folgendem Diagramm berechnet werden:

$$\begin{array}{ccc} K_{12} M_2 & \xrightarrow{=0} & L_2 M' \\ \downarrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{\neq 0} & L_2 M'' \end{array}$$

Schrittzahl:

$$f_1(x) + s_h(x) + f_2(h(x)) + \begin{cases} s_{g_1}(x) & \text{falls } h(x)=0 \\ s_{g_2}(x) & \text{sonst} \end{cases},$$

$f_1, f_2$  elementar.

Lemma 4: (1) Ist  $F$  ein elementares Funktional i.w.S., sind  $g_1, \dots, g_r$  partielle, mit Schrittzahlfunktionen  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  RM - berechenbare Funktionen, und ist  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{Z}) \approx F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{Z})$ , so ist auch  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ ,

die sich schreiben läßt in der Form  $s_f(\mathcal{E}) \simeq G(s_{g_1}, \dots, s_{g_r}; \mathcal{E})$ ,  
 $G$  ein elementares Funktional i.w.S. .

(2) Gilt zusätzlich für  $1 \leq i \leq r$ :  $g_i$  wird in  $F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{E})$   
 nur gebraucht an Stellen  $y_1, \dots, y_{n_i}$  mit  $h_i(y_1, \dots, y_{n_i}) = 0$ ,  
 $h_i$  elementar, so kann  $G$  so gewählt werden, daß für  $1 \leq i \leq r$   
 gilt:  $s_{g_i}$  wird in  $G(s_{g_1}, \dots, s_{g_r}; \mathcal{E})$  auch nur gebraucht an Stellen  
 $y_1, \dots, y_{n_i}$  mit  $h_i(y_1, \dots, y_{n_i}) = 0$  .

Beweis: (1) ergibt sich durch Induktion über den Aufbau der elementaren  
 Funktionale i.w.S. unmittelbar aus Lemma 3, (1) bis (3). Zu (2):  
 Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir  $r = 1$  an; die allge-  
 meine Behauptung beweist man entsprechend. Nach Voraussetzung ist

$$f(\mathcal{E}) \simeq F(\lambda_{\mathcal{A}} \begin{cases} g_1(\mathcal{A}) & \text{falls } h_1(\mathcal{A})=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \mathcal{E}) .$$

Nach (1) und Lemma 3, (3) läßt sich dann eine Schrittzahlfunktion  $s_f$   
 zu  $f$  schreiben in der Form

$$s_f(\mathcal{E}) \simeq G(\lambda_{\mathcal{A}} f_0(\mathcal{A}, \begin{cases} s_{g_1}(\mathcal{A}) & \text{falls } h_1(\mathcal{A})=0 \\ f_1(\mathcal{A}) & \text{sonst} \end{cases}); \mathcal{E})$$

$G$  ein elementares Funktional i.w.S.,  $f_0, f_1$  elementar.

Definiert man

$$G'(h; \mathcal{E}) := G(\lambda_{\mathcal{A}} f_0(\mathcal{A}, \begin{cases} h(\mathcal{A}) & \text{falls } h_1(\mathcal{A})=0 \\ f_1(\mathcal{A}) & \text{sonst} \end{cases}); \mathcal{E}) ,$$

so gilt

$$s_f(\mathcal{E}) \simeq G'(s_{g_1}; \mathcal{E}) ,$$

und in  $G'(s_{g_1}; \mathcal{E})$  wird  $s_{g_1}$  nur an Stellen  $\mathcal{A}$  mit  $h_1(\mathcal{A})=0$   
 gebraucht. Da  $G'$  nach Definition ein elementares Funktional i.w.S.  
 ist, ist damit Lemma 4 bewiesen.

Beweis zu Hilfssatz 1: Wir definieren zunächst mit den in 1.3  
 eingeführten Funktionen  $D$  und  $K$  für  $n \geq 0$

$$U_n(p, \mathcal{E}) := D(K(p, \langle \mathcal{E} \rangle), \mu t [K(p, \langle \mathcal{E} \rangle, t) = K(p, \langle \mathcal{E} \rangle, t+1)])$$

( $\mathcal{E}$  steht für  $x_1, \dots, x_n$ ). Jede  $n$ -stellige partiell rekursive  
 Funktion  $f$  läßt sich dann mit einer geeigneten Zahl  $\underline{f}$  darstellen

in der Form  $f(\mathcal{C}) \simeq U_n(\underline{f}, \mathcal{C})$ . Da  $U_n$  selbst partiell rekursiv ist, durchlaufen die Funktionen  $\lambda \mathcal{C} U_n(p, \mathcal{C})$ ,  $p=0,1,2,\dots$ , genau die  $n$ -stelligen partiell rekursiven Funktionen (mit Wiederholungen).

Weiter brauchen wir noch elementare Funktionen  $S_n^m$  ( $n, m \geq 0$ ), die folgendes leisten <sup>1)</sup>: Ist  $\underline{g}$  die Gödelnummer einer Registermaschine  $M$  zur Berechnung von  $\lambda y_1 \dots y_m x_1 \dots x_n g(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ , so ist  $S_n^m(\underline{g}, y_1, \dots, y_m)$  die Gödelnummer einer Registermaschine, die die Funktion  $\lambda x_1 \dots x_n g(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$  berechnet, und zwar nach dem Diagramm

$$T_{n \ m+n} \dots T_{1 \ m+1} A_1^{y_1} \dots A_m^{y_m} M$$

(vgl. 1.3;  $A_i^{y_i}$  steht für  $A_i A_i \dots A_i$ ,  $y_i$ -mal hintereinandergeschrieben).

Verwendet man eine der üblichen Gödelisierungen von Programmtafeln für Registermaschinen, so lassen sich solche Funktionen  $S_n^m$  ohne Schwierigkeiten konstruieren; wir verzichten hier auf die Ausführung der (trivialen und langwierigen) Einzelheiten.

$f$  sei also durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , und  $g_1, \dots, g_r$  seien RM-berechenbar mit Schrittzahlfunktionen  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$ . Zu zeigen ist, daß es dann eine Schrittzahlfunktion  $s_f$  von  $f$  gibt, die durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  definiert werden kann. - Nach Voraussetzung gibt es ein elementares Funktional  $F$ , so daß für alle  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  (kurz:  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ) gilt

$$f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = F(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

wobei  $f$  in  $F(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  nur gebraucht wird an Stellen  $\check{u}, \check{w}$  mit  $\check{u} <_n \mathcal{C}$ , d.h. wobei für eine beliebige (überall definierte) Funktion  $f'$  mit derselben Stellenzahl wie  $f$  gilt

$$\bigwedge_{\check{u} <_n \mathcal{C}} \bigwedge_{\check{w}} f(\check{u}, \check{w}) = f'(\check{u}, \check{w}) \rightarrow F(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}) = F(f', \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

$F$  läßt sich (unter Rückgriff auf den induktiven Aufbau) auffassen als ein elementares Funktional i.w.S. . Definiert man dann

$$F'(h_0, h_1, \dots, h_r; \mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq F(\lambda \check{u} \check{w} \begin{cases} h_0(\check{u}, \check{w}) & \text{falls } \check{u} <_n \mathcal{C} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, h_1, \dots, h_r; \mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

<sup>1)</sup> Vgl. Kleene [6], S.342.



so ist auch  $F'$  ein elementares Funktional i.w.S., und es gilt für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$

$$f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq F'(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

wobei  $f$  in  $F'(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  nur gebraucht wird an Stellen  $\check{u}, \check{v}$  mit  $\check{u} \prec_n \mathcal{C}$ , d.h. wobei für beliebige partielle Funktionen  $f'$  mit derselben Stellenzahl wie  $f$  gilt

$$\bigwedge_{\check{u} \prec_n \mathcal{C}} \bigwedge_{\check{v} \prec_n \mathcal{D}} f(\check{u}, \check{v}) \simeq f'(\check{u}, \check{v}) \rightarrow F'(f, \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq F'(f', \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}).$$

Durch transfiniten Induktion über  $\mathcal{C}$  (längs  $\prec_n$ ) ergibt sich daraus, daß eine beliebige partielle Funktion  $f'$ , die für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  die Bedingung  $f'(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq F'(f', \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  erfüllt, mit  $f$  identisch ist. - Wir definieren jetzt eine partielle Funktion  $h$  durch

$$\begin{aligned} h(i, \mathcal{C}, \mathcal{D}) &:= F'(\lambda \check{u} \check{v} U_{n+m}^1(S_{n+m}^1(i, i), \check{u}, \check{v}), \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D}) \\ &\simeq F^*(U_{n+m}, \mathcal{C}; i, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \end{aligned}$$

wobei  $F^*$  ein durch  $F^*(h_0, h_1, \dots, h_r; i, \mathcal{C}, \mathcal{D}) := F'(\lambda \check{u} \check{v} h_0(S_{n+m}^1(i, i), \check{u}, \check{v}), h_1, \dots, h_r; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  definiertes elementares Funktional i.w.S. ist.  $\underline{h}$  sei die Gödelnummer einer RM zur Berechnung von  $h$ . Setzt man dann

$$\underline{f} := S_{n+m}^1(\underline{h}, \underline{h}),$$

so gilt für alle  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$   $U_{n+m}(\underline{f}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq h(\underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq F'(\lambda \check{u} \check{v} U_{n+m}(\underline{f}, \check{u}, \check{v}), \mathcal{C}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  und damit  $f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = U_{n+m}(\underline{f}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ .  $\underline{f}$  ist also die Gödelnummer einer RM zur Berechnung von  $f$ . Zu zeigen ist, daß die zugehörige Schrittzahlfunktion  $s_f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$  definiert werden kann. Zunächst folgt unmittelbar aus der Definition von  $\underline{f}$ , daß sich  $s_f$  mit einer elementaren Funktion  $f_0$  schreiben läßt in der Form

$$s_f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = f_0(s_h(\underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{D}),$$

wobei  $s_h$  die zu  $\underline{h}$  gehörige Schrittzahlfunktion ist. Weiter gibt es nach Lemma 4, (1) ein elementares Funktional  $G^*$  i.w.S., mit dem sich  $s_h$  schreiben läßt in der Form

$$s_h(i, \mathcal{C}, \mathcal{D}) \simeq G^*(s_{U_{n+m}}, s_{\mathcal{C}}; i, \mathcal{C}, \mathcal{D})$$

( $s_{\mathcal{C}}$  steht für  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$ ). Schließlich folgt aus der Definition von  $U_{n+m}$  und aus Lemma 3, daß sich  $s_{U_{n+m}}$  mit einer elementaren Funktion  $f_1$  schreiben läßt in der Form

$$s_{U_{n+m}}(j, \check{i}, \omega) \simeq f_1(\mu t[K(j, \langle \check{i}, \omega \rangle, t) = K(j, \langle \check{i}, \omega \rangle, t+1)], j, \check{i}, \omega) .$$

Setzt man nun ein, so ergibt sich zunächst

$$s_f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = f_0(G^*(s_{U_{n+m}}, s_{\mathcal{D}}; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{D}) .$$

Man beachte jetzt, daß  $U_{n+m}$  in  $F^*(U_{n+m}, \mathcal{D}; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  nur gebraucht wird an Stellen  $j, \check{i}, \omega$  mit  $j = S_{n+m}^1(\underline{h}, \underline{h}) = \underline{f}$  und  $\check{i} \prec_n \mathcal{C}$ . Nach Lemma 4, (2) kann man dann  $G^*$  so wählen, daß  $s_{U_{n+m}}$  in  $G^*(s_{U_{n+m}}, s_{\mathcal{D}}; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  auch nur an diesen Stellen gebraucht wird. Nun gilt (vgl. 1.3)

$$\mu t[K(\underline{f}, \langle \check{i}, \omega \rangle, t) = K(\underline{f}, \langle \check{i}, \omega \rangle, t+1)] = s_f(\check{i}, \omega)$$

und damit

$$s_{U_{n+m}}(\underline{f}, \check{i}, \omega) = f_1(s_f(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega) .$$

$s_{U_{n+m}}$  und  $\lambda j \check{i} \omega f_1(s_f(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega)$  stimmen demnach auf allen fraglichen Stellen überein und man erhält

$$s_f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = f_0(G^*(\lambda j \check{i} \omega f_1(s_f(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega), s_{\mathcal{D}}; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{D}) .$$

Definiert man also ein elementares Funktional  $G$  durch

$$G(h_0, h_1, \dots, h_r; \mathcal{C}, \mathcal{D}) := f_0(G^*(\lambda j \check{i} \omega f_1(h_0(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega), h_1, \dots, h_r; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathcal{C}, \mathcal{D}) ,$$

so folgt

$$s_f(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = G(s_f, s_{\mathcal{D}}; \mathcal{C}, \mathcal{D}) ,$$

und da in  $G^*(\lambda j \check{i} \omega f_1(s_f(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega), s_{\mathcal{D}}; \underline{h}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$  die Funktion  $\lambda j \check{i} \omega f_1(s_f(\check{i}, \omega), \underline{f}, \check{i}, \omega)$  nur an Stellen  $j, \check{i}, \omega$  mit  $j = \underline{f}$  und  $\check{i} \prec_n \mathcal{C}$  gebraucht wird, wird auch  $s_f$  in  $G(s_f, s_{\mathcal{D}}; \mathcal{C}, \mathcal{D})$  nur gebraucht an Stellen  $\check{i}, \omega$  mit  $\check{i} \prec_n \mathcal{C}$ .  $s_f$  ist also durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $s_{g_1}, \dots, s_{g_r}$ . Damit ist auch Hilfssatz 1 bewiesen.

### 3.3 Modifikationen

Wir untersuchen jetzt, wie sich einige Modifikationen der Definitionen der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  und  $\mathcal{L}_\alpha$  auswirken. Unter Verwendung der im vorangehenden Abschnitt bewiesenen Gleichheit von  $\mathcal{R}_\alpha$  und  $\mathcal{L}_\alpha$  ergibt sich, daß bei einer Reihe solcher Modifikationen die definierten Funktionsklassen unverändert bleiben. Negativ fällt nur der Versuch aus, die Klassen  $\mathcal{L}_\alpha$  durch Abschluß mit beschränkten mehrfachen elementaren Rekursionen zu definieren. Es zeigt sich, daß schon 1-fache beschränkte elementare Rekursionen aus jeder der Klassen  $\mathcal{L}_\alpha$  hinausführen.

Wir beginnen mit zwei Modifikationen in der Definition der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$ ; sie lautete

Definition: a) Ist  $f$  elementar in  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und gilt  $g_i \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ , so ist  $f \in \mathcal{R}_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}$ .

b) Ist  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ), und gilt  $g_i \in \mathcal{R}_{\alpha_i}$  für  $1 \leq i \leq r$ , so ist  $f \in \mathcal{R}_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + \omega^{n-1}}$ .

Zunächst zeigen wir, daß die Klassen  $\mathcal{R}'_\alpha$ , die man erhält, wenn man im Teil b) dieser Definition anstelle der gewöhnlichen Ordinalzahladdition die natürliche Summe  $\#$  verwendet, mit den Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  zusammenfallen. (Vgl. die Bemerkung im Anschluß an die Definition der Klassen  $\mathcal{R}_\alpha$  auf S.40).

Satz:  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}'_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

Beweis:  $\mathcal{R}'_\alpha \subseteq \mathcal{R}_\alpha$  ergibt sich unmittelbar durch Induktion über den simultanen Aufbau der Klassen  $\mathcal{R}'_\alpha$ . Zum Beweis von  $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{R}'_\alpha$  genügt es zu zeigen  $F_\alpha \in \mathcal{R}'_\alpha$ , denn wegen  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{C}(F_\alpha)$  folgt daraus die Behauptung.  $F_\alpha \in \mathcal{R}'_\alpha$  beweisen wir durch Induktion über  $\alpha$ . Für  $\alpha=0$  ist die Behauptung trivial. Aus  $F_\alpha \in \mathcal{R}'_\alpha$  folgt  $F_{\alpha+1} \in \mathcal{R}'_{\alpha \# 1} = \mathcal{R}'_{\alpha+1}$ , denn  $F_{\alpha+1}$  ist aus  $F_\alpha$  durch eine 1-fache elementare Rekursion

definierbar. Es sei nun  $\lambda$  eine Limeszahl und  $F_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha^!$  für  $\alpha < \lambda$ .  $\lambda$  läßt sich darstellen in der Form  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$  und es gilt nach Definition

$$F_\lambda(x) = F_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n x}(x).$$

Zum Beweis von  $F_\lambda \in \mathfrak{R}_\lambda^!$  genügt es zu zeigen, daß die durch

$$f(x_n, \dots, x_0, x) := F_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n x_n + \dots + \omega x_1 + x_0}(x)$$

definierte Funktion  $f$  in  $\mathfrak{R}_\lambda^!$  liegt. Nun gilt

$$f(0, \dots, 0, x) = F_{\omega^{n+1}\beta}(x)$$

$$f(x_n, \dots, x_0+1, 0) = 1$$

$$f(x_n, \dots, x_0+1, x+1) = f(x_n, \dots, x_0, f(x_n, \dots, x_0+1, x))$$

$$f(x_n, \dots, x_m+1, 0, \dots, 0, x) = f(x_n, \dots, x_m, x, 0, \dots, 0, x)$$

$f$  ist also durch eine  $n+2$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $F_{\omega^{n+1}\beta}$ . Wegen  $\omega^{n+1}\beta \# \omega^{n+1} = \omega^{n+1}\beta + \omega^{n+1} = \lambda$  folgt daraus  $f \in \mathfrak{R}_\lambda^!$ .

Weiter beweisen wir, daß man auch dann noch dieselben Funktionenklassen erhält, wenn man in der obigen Definition anstelle von mehrfachen elementaren Rekursionen einen sehr speziellen Typ mehrfacher Rekursionen verwendet, nämlich sog. mehrfache Iterationen<sup>1)</sup>; wir nennen eine  $n+1$ -stellige Funktion  $f$  durch  $n+1$ -fache Iteration definierbar aus einer einstelligen Funktion  $g$ , wenn gilt

$$f(0, \dots, 0, x) = g(x)$$

$$f(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0+1, 0) = 1$$

$$f(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0+1, x+1) = f(x_{n-1}, \dots, x_0, f(x_{n-1}, \dots, x_0+1, x))$$

$$f(x_{n-1}, \dots, x_m+1, 0, \dots, 0, x) = f(x_{n-1}, \dots, x_m, x, 0, \dots, 0, x).$$

Die Bezeichnung "n+1-fache Iteration" läßt sich wie folgt motivieren: Setzt man

$$f_{\omega^{n-1}x_{n-1} + \dots + \omega x_1 + x_0}(x) := f(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x),$$

so gilt für  $\alpha < \omega^n$

<sup>1)</sup> Eingeführt von Robbin in [13], S.86.

$$f_0(x) = g(x)$$

$$f_{\alpha+1}(x) = f_{\alpha}^x(1) \quad (x\text{-te Iterierte von } f_{\alpha}, \text{ angewandt auf } 1)$$

$$f_{\lambda}(x) = f_{\lambda[x]}(x),$$

wobei für  $\lambda = \omega^{n+1}(\beta+1)$  gilt  $\lambda[x] = \omega^{n+1}\beta + \omega^n x$ . Die Funktionen  $f_{\alpha}$  sind also aus  $g$  genauso definiert wie die Funktionen  $F_{\alpha}$  aus  $\lambda x 2^x$ .

$\mathcal{R}_{\alpha}''$ ,  $\alpha < \omega^{\omega}$ , seien die Funktionenklassen, die man erhält, wenn man im Teil b) der oben angegebenen Definition der Klassen  $\mathcal{R}_{\alpha}$  statt "n-fache elementare Rekursion" schreibt "n-fache Iteration".

Satz:  $\mathcal{R}_{\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha}''$  für  $\alpha < \omega^{\omega}$  1).

Beweis:  $\mathcal{R}_{\alpha}'' \subseteq \mathcal{R}_{\alpha}$  ergibt sich wieder unmittelbar durch Induktion über den simultanen Aufbau der Klassen  $\mathcal{R}_{\alpha}''$ .  $\mathcal{R}_{\alpha} \subseteq \mathcal{R}_{\alpha}''$  folgt aus  $F_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}''$ ;  $F_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}''$  beweisen wir durch Induktion über  $\alpha$ . Für  $\alpha=0$  ist die Behauptung trivial. Aus  $F_{\alpha} \in \mathcal{R}_{\alpha}''$  folgt  $F_{\alpha+1} \in \mathcal{R}_{\alpha+1}''$ , denn  $F_{\alpha+1}$  ist aus  $F_{\alpha}$  durch eine 1-fache Iteration definierbar. Im Limesfall schließt man genauso wie beim Beweis von  $\mathcal{R}_{\alpha} \subseteq \mathcal{R}_{\alpha}'$ ; man hat nur zu beachten, daß die dort auftretende Funktion  $f$  durch eine  $n+2$ -fache Iteration aus  $F_{\omega^{n+1}\beta}$  definiert ist.

Im folgenden betrachten wir einige Modifikationen in der Definition der Klassen  $\mathcal{E}_{\alpha}$ ; sie lautete  $\mathcal{E}_{\alpha} := \mathcal{E}(F_{\alpha})$ . Zunächst kann man dazu die in 3.2 (S.48) gegebene Definition der Klassen  $\mathcal{A}_{\alpha}$  rechnen, denn auch in dieser Definition orientiert man sich an den Funktionen  $F_{\alpha}$ ,  $\alpha < \omega^{\omega}$ :

$$\mathcal{A}_{\alpha} := \{f \mid \forall k \in \mathbb{N} \wedge s_f(k) \leq F_{\alpha}^k(\max \mathcal{E})\}$$

Satz:  $\mathcal{A}_{\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha}$  für  $\alpha < \omega^{\omega}$  2).

Der Beweis wurde in 3.2 geführt.

1) Robbin beweist in [13], S.87  $\bigcup_{\alpha < \omega^n} \mathcal{R}_{\alpha} = \bigcup_{\alpha < \omega^n} \mathcal{R}_{\alpha}''$ .

2) Robbin hat in [13] die n-fach rekursiven Funktionen in ähnlicher Weise unter Verwendung von Schrittzahlfunktionen bzgl. Turingmaschinen charakterisiert.

In der Definition der Klassen  $\mathcal{A}_\alpha$  treten Schrittzahlfunktionen auf; es wird also Bezug genommen auf einen bestimmten "Maschinentyp", und zwar hier auf Registermaschinen. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Definition weitgehend unabhängig davon ist, welchen Maschinentyp man zugrunde legt. Dazu definieren wir zunächst den Begriff eines "zulässigen Maschinenkonzepts".

Definition: Ein Maschinenkonzept ist gegeben durch eine rekursive Konfigurationsfunktion  $K'$  (dreistellig) und eine rekursive Dekodierfunktion  $D'$  (einstellig) mit folgender Eigenschaft: Zu jeder partiell rekursiven Funktion  $f$  gibt es eine Zahl  $\underline{f}$ , so daß mit

$$s'_f(\mathcal{C}) := \mu t [K'(\underline{f}, \langle \mathcal{C} \rangle, t) = K'(\underline{f}, \langle \mathcal{C} \rangle, t+1)] \quad 1)$$

für alle Majoranten  $\overline{s'_f}$  von  $s'_f$  (d.h. für alle partiellen Funktionen  $\overline{s'_f}$ , die genau an den Stellen definiert sind, an denen  $s'_f$  definiert ist, und die an diesen Stellen nicht kleiner sind als  $s'_f$ ) gilt

$$f(\mathcal{C}) \approx D'(K'(\underline{f}, \langle \mathcal{C} \rangle, \overline{s'_f}(\mathcal{C}))) .$$

Wir nennen  $s'_f$  eine Schrittzahlfunktion von  $f$  bzgl.  $K', D'$ .

Definition: Ein durch  $K', D'$  gegebenes Maschinenkonzept heißt zulässig, wenn gilt

- 1)  $K', D'$  sind elementar.
- 2) Ist  $F$  ein elementares Funktional i.w.S. (s.S.54), sind  $g_1, \dots, g_r$  ( $r \geq 0$ ) partielle, mit Schrittzahlfunktionen  $s'_{g_1}, \dots, s'_{g_r}$  bzgl.  $K', D'$  berechenbare Funktionen und ist  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{C}) \approx F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{C})$ , so ist auch  $f$  bzgl.  $K', D'$  berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s'_f$ , die sich schreiben läßt in der Form  $s'_f(\mathcal{C}) \approx G(s'_{g_1}, \dots, s'_{g_r}; \mathcal{C})$ ,  $G$  ein elementares Funktional i.w.S. . Gilt zusätzlich für  $1 \leq i \leq r$ :  $g_i$  wird in  $F(g_1, \dots, g_r; \mathcal{C})$  nur gebraucht an Stellen  $y_1, \dots, y_{n_i}$  mit  $h_i(y_1, \dots, y_{n_i}) = 0$  (s.S.55),  $h_i$  elementar, so kann  $G$  so gewählt werden, daß für  $1 \leq i \leq r$  gilt:  $s'_{g_i}$  wird in  $G(s'_{g_1}, \dots, s'_{g_r}; \mathcal{C})$  auch nur gebraucht an Stellen  $y_1, \dots, y_{n_i}$  mit  $h_i(y_1, \dots, y_{n_i}) = 0$ .
- 3) Ist eine partielle Funktion  $f$  definiert durch  $f(\mathcal{C}) \approx \mu y [g(\mathcal{C}, y) = 0]$ , und ist  $g$  eine partielle, mit einer Schrittzahlfunktion  $s'_g$  bzgl.

1) Zu  $\approx$  vgl. S.54.

$K', D'$  berechenbare Funktion, so ist auch  $f$  bzgl.  $K', D'$  berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s'_f$ , die sich schreiben läßt in der Form  $s'_f(\varrho) \simeq G(s'_g, f; \varrho)$ ,  $G$  ein elementares Funktional i.w.S., wobei  $G$  so gewählt werden kann, daß in  $G(s'_g, f; \varrho)$   $f$  nur an der Stelle  $\varrho$  gebraucht wird, und  $s'_g$  überhaupt nur gebraucht wird, wenn  $f(\varrho)$  definiert ist, und dann nur an Stellen  $\check{u}, v$  mit  $\check{u} = \varrho$  und  $v \leq f(\varrho)$ .

Die in 1.3 für Registermaschinen definierten Funktionen  $K, D$  bilden ein zulässiges Maschinenkonzept; dies folgt aus dem Darstellungssatz in 1.3 und aus den Lemmata 3 und 4 in 3.2, S.55 u. 56. Entsprechend kann man zeigen, daß sich auch viele andere gebräuchliche "Maschinentypen" als zulässige Maschinenkonzepte auffassen lassen, z.B. Turingmaschinen mit einem oder mehreren Bändern, ein- oder mehr-elementigen Alphabeten und verschiedenen Konventionen über die Darstellung von Zahlen.

Wir beweisen jetzt, daß die oben definierten Klassen  $\mathcal{A}_\alpha$  unabhängig sind von der Wahl des zugrunde liegenden zulässigen Maschinenkonzepts. Vorgelegt sei also ein zulässiges Maschinenkonzept  $K', D'$ . Wir verabreden, das Zeichen  $s'_f$  als Variable für Schrittzahlfunktionen von  $f$  bzgl.  $K', D'$  zu verwenden, und definieren

$$\mathcal{A}'_\alpha := \left\{ f \mid \bigvee_{s'_f} \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\varrho} s'_f(\varrho) \leq F^k(\max \varrho) \right\}.$$

Satz:  $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}'_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es,  $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}'_\alpha$  zu beweisen. Sei also  $f \in \mathcal{A}_\alpha$ . Nach Definition gibt es dann eine Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die durch eine  $F_\alpha$ -Iterierte abgeschätzt werden kann, d.h. für die es ein  $k$  gibt, so daß für alle  $\varrho$  gilt  $s_f(\varrho) \leq F^k_\alpha(\max \varrho)$ . Setzt man

$$h(p, \varrho) := \mu t [K(p, \langle \varrho \rangle, t) = K(p, \langle \varrho \rangle, t+1)]$$

$$U_n(p, \varrho) := D(K(p, \langle \varrho \rangle, h(p, \varrho)))$$

(vgl. S.57;  $n$  ist die Stellenzahl von  $f$ ,  $\varrho$  steht für  $x_1, \dots, x_n$ ), so lassen sich  $s_f$  und  $f$  mit einer geeigneten Zahl  $\underline{f}$  darstellen in der Form

$$\begin{aligned} s_f(\mathcal{E}) &= h(\underline{f}, \mathcal{E}) \\ f(\mathcal{E}) &= U_n(\underline{f}, \mathcal{E}) . \end{aligned}$$

Aus der Definition eines zulässigen Maschinenkonzepts ergibt sich nun, daß  $h, U_n$  bzgl.  $K', D'$  berechenbar sind mit Schrittzahlfunktionen  $s'_h, s'_{U_n}$ , die sich schreiben lassen in der Form

$$\begin{aligned} s'_h(p, \mathcal{E}) &\simeq H(h; p, \mathcal{E}) \\ s'_{U_n}(p, \mathcal{E}) &\simeq G(s'_h; p, \mathcal{E}) , \end{aligned}$$

$H, G$  elementare Funktionale i.w.S., wobei zusätzlich gilt, daß  $h$  in  $H(h; p, \mathcal{E})$  nur gebraucht wird an der Stelle  $p, \mathcal{E}$  und  $s'_h$  in  $G(s'_h; p, \mathcal{E})$  auch nur gebraucht wird an der Stelle  $p, \mathcal{E}$ . Wählt man jetzt  $\lambda_{\mathcal{E}} s'_{U_n}(\underline{f}, \mathcal{E})$  als  $s'_f$ , so folgt

$$\begin{aligned} s'_f(\mathcal{E}) &\simeq G(s'_h; \underline{f}, \mathcal{E}) \\ &\simeq G(\lambda_{q\check{n}} H(h; q, \check{n}); \underline{f}, \mathcal{E}) \\ &\simeq G(\lambda_{q\check{n}} H(h; \underline{f}, \check{n}); \underline{f}, \mathcal{E}) \\ &\simeq G(\lambda_{q\check{n}} H(\lambda_{p\mathcal{E}} h(\underline{f}, \mathcal{E}); \underline{f}, \check{n}); \underline{f}, \mathcal{E}) \\ &\simeq G(\lambda_{q\check{n}} H(\lambda_{p\mathcal{E}} s_f(\mathcal{E}); \underline{f}, \check{n}); \underline{f}, \mathcal{E}) . \end{aligned}$$

Setzt man  $F(\mathcal{E}; \mathcal{E}) := G(\lambda_{q\check{n}} H(\lambda_{p\mathcal{E}} g(\mathcal{E}); \underline{f}, \check{n}); \underline{f}, \mathcal{E})$ , so ist  $F$  ein elementares Funktional und es gilt

$$s'_f(\mathcal{E}) = F(s_f; \mathcal{E}) .$$

Nach dem Lemma 2, (1) in 3.2, S.47 folgt daraus, daß auch  $s'_f$  durch eine  $F_{\alpha}$ -Iterierte abschätzbar ist. Also ist  $f \in \mathcal{A}'_{\alpha}$ .

Als nächstes beweisen wir, daß jedes  $f \in \mathcal{C}_{\alpha}$  aus  $F_{\alpha}$  und den elementaren Funktionen allein durch Einsetzungen definierbar ist. Ist also  $\mathcal{C}'_{\alpha}$  die kleinste Funktionenklasse, die  $\mathcal{C}$  und  $F_{\alpha}$  enthält und abgeschlossen ist gegen Einsetzungen, so gilt

Satz:  $\mathcal{C}_{\alpha} = \mathcal{C}'_{\alpha}$  für  $\alpha < \omega^{\omega}$ .

Beweis:  $\mathcal{C}'_{\alpha} \subseteq \mathcal{C}_{\alpha}$  ist trivial.  $\mathcal{C}_{\alpha} \subseteq \mathcal{C}'_{\alpha}$  folgt aus  $\mathcal{C}_{\alpha} = \mathcal{A}_{\alpha}$  und dem Darstellungssatz in 1.3, denn nach diesen Sätzen läßt sich jedes  $f \in \mathcal{C}_{\alpha}$  mit geeigneten Zahlen  $\underline{f}, k$  darstellen in der Form  $f(\mathcal{E}) = D(K(\underline{f}, \langle \mathcal{E} \rangle), F_{\alpha}^k(\max \mathcal{E}))$ .



Schließlich zeigen wir noch, daß die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  auch durch Abschluß mit beschränkten primitiven Rekursionen definiert werden können: Ist  $\mathcal{E}_\alpha''$  die kleinste Funktionenklasse die  $U_n^i$ ,  $C_n^i$ ,  $\lambda xy x+y$  und  $F_\alpha$  enthält und abgeschlossen ist gegen Einsetzungen und beschränkte primitive Rekursionen (s.S. 7), so gilt

Satz:  $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}_\alpha''$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

Beweis: Für  $\alpha=0$  wurde dies in 1.1 bewiesen. Für beliebiges  $\alpha < \omega^\omega$  kann man genauso schließen, wenn man beachtet, daß jede Funktion aus  $\mathcal{E}_\alpha$  durch eine  $F_\alpha$ -iterierte abschätzbar ist (s. Lemma 2,(3) in 3.2, S. 47).

Es liegt jetzt nahe, daß man versucht, die Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  auch durch Abschluß mit beschränkten mehrfachen elementaren Rekursionen zu definieren; wir nennen  $f$  durch eine beschränkte  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar aus  $g_1, \dots, g_r$ , wenn  $f$  durch eine  $n$ -fache elementare Rekursion definierbar ist aus  $g_1, \dots, g_r$  und wenn  $f$  durch ein  $g_i$  beschränkt werden kann in der Form  $f(x) \leq g_i(\max x)$ . Es zeigt sich aber, daß alle Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$  schon gegen beschränkte 1-fache elementare Rekursionen nicht mehr abgeschlossen sind.

Satz: Keine der Klassen  $\mathcal{E}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$  ist abgeschlossen gegen beschränkte 1-fache elementare Rekursionen.

Beweis: Sei  $h(p, x, y, k) := \text{sg}(D(K(p, \langle x \rangle, F_\alpha^k(y))))$ . Wir zeigen 1)  $h \notin \mathcal{E}_\alpha$  und 2)  $h$  ist durch eine beschränkte 1-fache elementare Rekursion definierbar aus  $F_\alpha$ . Zu 1): Setzt man  $g(c, x) := h(\langle c \rangle_0, x, x, \langle c \rangle_1)$ , so durchlaufen wegen  $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{R}_\alpha$  die Funktionen  $\lambda x g(c, x)$  für  $c=0, 1, 2, \dots$  genau die 1-stelligen 0-1-Funktionen in  $\mathcal{E}_\alpha$ . Wäre nun  $h \in \mathcal{E}_\alpha$ , so läge auch  $\lambda x 1-g(x, x)$  in  $\mathcal{E}_\alpha$  und es gäbe ein  $c$ , so daß für alle  $x$  gilt  $1-g(x, x) = g(c, x)$ . Für  $x=c$  erhält man einen Widerspruch. Zu 2): Offenbar gilt

$$h(p, x, y, 0) = \text{sg}(D(K(p, \langle x \rangle, y)))$$

$$h(p, x, y, k+1) = h(p, x, F_\alpha(y), k)$$

$$h(p, x, y, k) \leq 1.$$

$h$  ist also durch eine 1-fache beschränkte elementare Rekursion definierbar aus  $F_\alpha$ .

### 3.4 Zwischenklassen

Wir befassen uns jetzt mit der Frage, ob die erhaltene Klassifikation der mehrfach - rekursiven Funktionen im Einklang mit den Ansätzen zu ihrer Definition noch verfeinert werden kann. Im Fall der Definition durch Rekursionszahlen ist das offenbar nicht möglich. Für die anderen beiden Ansätze kann man die Frage etwa wie folgt formulieren:

- 1) Läßt sich echt zwischen  $\mathcal{L}_\alpha$  und  $\mathcal{L}_{\alpha+1}$  eine Funktionenklasse der Form  $\mathcal{L}(f)$  einschieben, wobei  $f$  ähnliche Eigenschaften wie die Funktionen  $F_\alpha$  hat, etwa:  $f$  einstellig, streng monoton wachsend,  $f(x) \geq 2^x$ ,  $f$  RM - berechenbar mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die durch eine Iterierte von  $f$  majorisiert werden kann <sup>1)</sup> ?
- 2) Läßt sich echt zwischen  $\mathcal{L}_\alpha$  und  $\mathcal{L}_{\alpha+1}$  eine Funktionenklasse der Form  $\mathcal{L}(E)$  einschieben, wobei  $E$  eine Aufzählungsfunktion <sup>2)</sup> für  $\mathcal{L}_\alpha$  ist ?

Es zeigt sich, daß man in beiden Fällen eine unendliche, sogar dichte Schar derartiger Zwischenklassen finden kann.

Zunächst führen wir eine kurze Bezeichnung für Funktionen mit den in 1) aufgezählten Eigenschaften ein.

Definition: Eine einstellige Funktion  $f$  heiße echt, wenn sie streng monoton wächst, wenn gilt  $f(x) \geq 2^x$  und wenn  $f$  RM - berechenbar ist mit einer Schrittzahlfunktion  $s_f$ , die durch eine Iterierte von  $f$  majorisiert werden kann, d.h. wenn es ein  $s_f$  und ein  $k$  gibt, so daß für alle  $x$  gilt

$$s_f(x) \leq f^k(x) .$$

---

<sup>1)</sup> Wegen  $F_\alpha \in \hat{\mathcal{A}}_\alpha = \{f \mid \forall s_f \forall k \exists \mathcal{G} s_f(\mathcal{G}) \leq F_\alpha^k(\max \mathcal{G})\}$  hat jede der Funktionen  $F_\alpha$  diese Eigenschaften.

<sup>2)</sup> Der Begriff der Aufzählungsfunktion wurde in 2.2, S.26 definiert.

Solche Funktionen sind "echt" in dem Sinne, daß ihr "Wachstum" schon ihre ganze "Kompliziertheit" widerspiegelt. Addiert man z.B. zu  $2^x$  eine komplizierte, etwa nicht elementare 0-1-Funktion, so ist die entstehende Funktion unecht.

Das Ziel dieses Abschnitts ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

Satz: Die Klassen  $\mathcal{C}_\alpha$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ , lassen sich einbetten in ein bzgl.  $\subset$  vollständig geordnetes, dichtes System von Funktionenklassen  $\mathcal{C}(f)$ ,  $f$  echt, so daß für je zwei dieser Funktionenklassen die größere eine Aufzählungsfunktion für die kleinere enthält.

Beweisgang: Wir geben ein Verfahren an, wie man zwischen gewisse, echt ineinander enthaltene Funktionenklassen der Form  $\mathcal{C}(f_1)$ ,  $\mathcal{C}(f_2)$ ,  $f_1, f_2$  echt, eine Funktionenklasse  $\mathcal{C}(f_3)$ ,  $f_3$  echt, so einschieben kann, daß  $\mathcal{C}(f_3)$  eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{C}(f_1)$  und  $\mathcal{C}(f_2)$  eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{C}(f_3)$  enthält. Es zeigt sich dann, daß dieses Verfahren iteriert werden kann, und daß für jedes  $\alpha < \omega^\omega$   $\mathcal{C}(F_\alpha)$  und  $\mathcal{C}(F_{\alpha+1})$  die Voraussetzungen erfüllen. Überlegt man sich noch, daß die Relation " $\mathcal{C}(f_2)$  enthält eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{C}(f_1)$ " transitiv ist, so ergibt sich die Behauptung.

Beweis: Der Beweis besteht aus sieben Lemmata. Lemma 1 enthält eine einfache Methode, zu Funktionenklassen der Form  $\mathcal{C}(f)$ ,  $f$  echt, Aufzählungsfunktionen zu konstruieren. (In 2.2, S.26 wurde eine andere, allgemeinere Methode zur Konstruktion von Aufzählungsfunktionen für beliebige Funktionenklassen der Form  $\mathcal{C}(h_1, \dots, h_r)$  angegeben).

Lemma 1:  $f$  sei eine echte Funktion.

(1) Für jedes  $n \geq 0$  durchlaufen die Funktionen  $\lambda \mathcal{C} D(K(p, \langle \mathcal{C} \rangle, f^k(\max \mathcal{C})))$  ( $\mathcal{C}$  steht für  $x_1, \dots, x_n$ ) für  $p, k=0, 1, 2, \dots$  genau die  $n$ -stelligen Funktionen aus  $\mathcal{C}(f)$ .

(2) Ist  $g$  eine einstellige, unbeschränkte Funktion, so ist  $\lambda i x D(K((i)_0, x, f^{g((i)_1)}(x)))$  eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{C}(f)$ .

Beweis zu (1): Zu jeder Funktion  $g \in \mathcal{C}(f)$  gibt es eine Schrittzahlfunktion  $s_g$ , die durch eine Iterierte von  $f$  abschätzbar ist (d.h.  $s_g(\mathcal{C}) \leq f^{k_g}(\max \mathcal{C})$ ); dies ergibt sich durch Induktion über den Aufbau

von  $\mathcal{E}(f)$  leicht aus der Voraussetzung über  $f$ , den in 1.3 bewiesenen Sätzen über Schrittzahlfunktionen und dem Lemma 2,(2) in 3.2, S.47. Nach dem Darstellungssatz in 1.3 läßt sich also jede Funktion aus  $\mathcal{E}(f)$  in der angegebenen Weise darstellen. Umgekehrt liegt natürlich jede Funktion der Form  $\lambda_{\mathcal{E}} D(K(p, \langle \mathcal{E} \rangle, f^k(\max \mathcal{E}))$  in  $\mathcal{E}(f)$  zu (2): Nach der Definition von Aufzählungsfunktionen (s.2.2, S.26) folgt die Behauptung unmittelbar aus (1).

Weiter werden wir häufig brauchen

Lemma 2: (1) Ist  $f$  eine echte Funktion, und gilt  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x$ , so ist  $f$  elementar in  $g$ .

(2)  $f$  sei eine einstellige, schwach monoton wachsende Funktion. Dann ist die Relation  $\lambda_{xyz} f^y(x)=z$  elementar in  $f$ .

Beweis zu (1): Nach Voraussetzung gibt es ein  $s_f$  und ein  $k$ , so daß für alle  $x$  gilt  $s_f(x) \leq f^k(x)$ .  $f$  läßt sich dann darstellen in der Form  $f(x) = D(K(p, \langle x \rangle, g^k(x)))$ ; daraus folgt die Behauptung.

zu (2):  $f^y(x)=z \leftrightarrow \bigvee_{u \leq 3^y(z+1)} \bigvee_{2^{y+2}} ((u)_0=x \wedge \bigwedge_{i < y} (u)_{i+1}=f((u)_i) \wedge (u)_y=z)$  <sup>1)</sup>

Wir betrachten jetzt Funktionenklassen der Form  $\mathcal{E}(f_1), \mathcal{E}(f_2)$ , wobei wir voraussetzen, daß  $f_1$  und  $f_2$  echt sind, und daß es eine einstellige, nicht verschwindende, schwach monoton wachsende, unbeschränkte und in  $f_1$  elementare Funktion  $g$  gibt, so daß für alle  $x$  gilt  $f_1^{g(x)}(x) \leq f_2(x)$ ; alle diese Forderungen an  $f_1, f_2$  kürzen wir im folgenden ab durch  $R(f_1, f_2)$ . Zunächst beweisen wir, daß  $\mathcal{E}_\alpha$  und  $\mathcal{E}_{\alpha+1}$  solche Funktionenklassen sind, also daß gilt

Lemma 3:  $R(F_\alpha, F_{\alpha+1})$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

Beweis: Wegen  $F_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha = \{f \mid \bigvee_{s_f} \bigvee_k \bigwedge_{\mathcal{E}} s_f(\mathcal{E}) \leq F_\alpha^k(\max \mathcal{E})\}$  ist jede der Funktionen  $F_\alpha$  echt. Zu zeigen bleibt die Existenz einer Funktion  $g$  mit den obigen Eigenschaften. Eine solche Funktion ist  $g(x) := \max(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor, 1)$ . Zum Beweis genügt es zu zeigen  $F_\alpha^k(x) \leq F_{\alpha+1}(x)$  für  $x \geq 2k$ . Setzt man  $x = 2k+y$  und beachtet man  $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^x(1)$ ,

<sup>1)</sup> Zur Abschätzung von  $u$  vgl. 1.2.

so folgt dies aus  $2k+y \leq F_{\alpha}^{k+y}(1)$  für  $y \geq 0$ . Diese letzte Ungleichung ergibt sich durch Induktion über  $y$ .  $y=0$ :  $2k \leq 2^k \leq F_{\alpha+1}(k) = F_{\alpha}^k(1)$ .  $y \Rightarrow y+1$ : trivial.

Allgemein erhält man aus Lemma 1:

Lemma 4: Sind  $f_1, f_2$  Funktionen mit  $R(f_1, f_2)$ , so gilt  $\mathcal{E}(f_1) \subset \mathcal{E}(f_2)$  und  $\mathcal{E}(f_2)$  enthält eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(f_1)$ .

Beweis:  $g$  sei die in der Definition von  $R(f_1, f_2)$  auftretende Funktion  $g$ . Nach Lemma 1, (2) ist  $\lambda_{ix} D(K((i)_0, x, f_1^{g((i)_1)}(x)))$  eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(f_1)$ . Es genügt also zu zeigen, daß  $\lambda_{xy} f_1^{g(y)}(x)$  elementar in  $f_2$  ist, denn dann enthält  $\mathcal{E}(f_2)$  eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(f_1)$ , und daraus ergibt sich mit einem Diagonalschluß  $\mathcal{E}(f_1) \subset \mathcal{E}(f_2)$  (vgl. 2.2, S.28). Nun gilt

$$f_1^{g(y)}(x) = \mu_{z \leq f_2(\max(x, y))} [f_1^{g(y)}(x) = z].$$

Mit Lemma 2, (1) und (2) folgt daraus, daß  $\lambda_{xy} f_1^{g(y)}(x)$  elementar in  $f_2$  ist. (Denn  $g$  ist elementar in  $f_1$ , also  $\lambda_{xyz} f_1^{g(y)}(x) = z$  elementar in  $f_1$ , und wegen  $f_1(x) \leq f_2(x)$  ist  $f_1$  elementar in  $f_2$ ).

Wir wollen jetzt zeigen, daß sich zwischen je zwei Funktionenklassen  $\mathcal{E}(f_1), \mathcal{E}(f_2)$  mit  $R(f_1, f_2)$  eine Funktionenklasse  $\mathcal{E}(f_3)$  einschieben läßt, und zwar so, daß gilt  $R(f_1, f_3)$  und  $R(f_3, f_2)$ . Daraus folgt dann mit den Lemmata 3 und 4, daß sich die Funktionenklassen  $\mathcal{E}_{\alpha}$ ,  $\alpha < \omega^{\omega}$ , einbetten lassen in ein bzgl.  $\subset$  vollständig geordnetes, dichtes System von Funktionenklassen der Form  $\mathcal{E}(f)$ ,  $f$  echt, und es bleibt nur noch zu zeigen (Lemma 7), daß die Relation " $\mathcal{E}(h_2)$  enthält eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(h_1)$ " transitiv ist. - Es seien also  $f_1, f_2$  zwei Funktionen mit  $R(f_1, f_2)$ , und  $g$  sei die in der Definition von  $R(f_1, f_2)$  auftretende Funktion  $g$ . Wir definieren

$$h(0) := 1$$

$$h(x+1) := \begin{cases} h(x)+1 & \text{falls } \forall_k x+1 = f_1^k(0) \wedge (h(x)+1)^2 \leq g(x+1) \\ h(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_3(x) := f_1^{h(x)}(x)$$

und beweisen zunächst

Lemma 5:

$$(1) \quad h(f_1^k(x)) \leq h(x)+k$$

$$(2) \quad f_3^k(x) \leq f_1^{(2^k-1)h(x)}(x)$$

Beweis zu (1): Induktion über  $k$ .  $k=0$ : trivial.  $k=1$ : Es gibt ein  $l \geq 1$  mit  $f_1^{l-1}(0) \leq x < f_1^l(0)$ , also auch  $f_1^l(0) \leq f_1(x) < f_1^{l+1}(0)$ .

Man erhält  $h(f_1(x)) = h(f_1^l(0)) \leq h(f_1^{l-1}(0)) + 1 = h(x)+1$ .  $k \Rightarrow k+1$ :

$$h(f_1^{k+1}(x)) = h(f_1(f_1^k(x))) \leq h(f_1^k(x))+1 \leq h(x)+k+1.$$

zu (2): Induktion über  $k$ .  $k=0$ : trivial.  $k \Rightarrow k+1$ :

$$\begin{aligned} f_3^{k+1}(x) &= f_1^{h(f_3^k(x))}(f_3^k(x)) \\ &\leq f_1^{h(f_2^{1 \cdot h(x)}(x))}(f_2^{1 \cdot h(x)}(x)) \quad , \quad l:=2^k-1 \\ &\leq f_1^{h(x) + 1 \cdot h(x) + 1 \cdot h(x)}(x) \quad \text{nach (1)} \\ &= f_1^{(2l+1)h(x)}(x) \\ &= f_1^{(2^{k+1}-1)h(x)}(x) . \end{aligned}$$

Mit Lemma 5 ergibt sich jetzt leicht

Lemma 6:  $R(f_1, f_3)$ ,  $R(f_3, f_2)$ .

Beweis zu  $R(f_1, f_3)$ :  $h$  ist eine nicht verschwindende, schwach monoton wachsende Funktion, die offenbar beliebig große Werte annimmt. Weiter ist  $h$  durch eine beschränkte ( $h(x) \leq x+1$ ) primitive Rekursion aus in  $f_1$  elementaren Funktionen definierbar; genau wie in 1.1, S.7 folgt daraus  $h \in \mathcal{C}(f_1)$ . Zu zeigen bleibt, daß  $f_3$  echt ist.  $f_3$  läßt sich darstellen in der Form

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \mu z [ \vee_{y \leq x+1} (z=f_1^y(x) \wedge y=h(x)) ] \\ &= \mu z [ g(x, z)=0 ] \quad , \quad g \text{ elementar in } f_1 . \end{aligned}$$

Nach den in 1.3 bewiesenen Sätzen über Schrittzahlfunktionen läßt sich zu einem beliebigen  $s_{f_1}$  ein in  $s_{f_1}$  elementares  $s_g$  finden, und weiter kann man mit einem beliebigen  $s_g$  ein in  $f_3, g$  und  $s_g$

elementares  $s_{f_3}$  konstruieren; es gibt also ein in  $f_3, f_1$  und  $s_{f_1}$  elementares  $s_{f_3}$ . Da nun nach Voraussetzung  $f_1$  echt ist, kann man  $s_{f_1}$  so wählen, daß es durch eine Iterierte von  $f_1$ , also erst recht von  $f_3$ , abschätzbar ist.  $s_{f_3}$  ist also elementar in Funktionen, die alle durch Iterierte von  $f_3$  majorisiert werden können, und deshalb nach dem Lemma 2,(2) aus 3.2, S.47 selbst majorisierbar durch eine Iterierte von  $f_3$ . Folglich ist  $f_3$  eine echte Funktion.

zu  $R(f_3, f_2)$ : Zu zeigen ist nur noch, daß es eine einstellige, nicht verschwindende, unbeschränkte, in  $f_3$  elementare Funktion  $g_2$  gibt, so daß für alle  $x$  gilt  $f_3^{g_2(x)} \leq f_2(x)$ . Eine solche Funktion ist

$$g_2(x) := \mu_{y \leq h(x)} [2^y - 1 \leq h(x) < 2^{y+1} - 1],$$

denn da  $h$  elementar in  $f_1$ , also auch elementar in  $f_3$  ist, ist  $g_2$  elementar in  $f_3$ , und wegen  $(h(x))^2 \leq g(x)$  und Lemma 5,(2) gilt  $f_3^{g_2(x)}(x) \leq f_1^{h(x) \cdot h(x)}(x) \leq f_1^{g(x)}(x) \leq f_2(x)$ .

Zum Abschluß des Beweises ist nur noch zu zeigen

Lemma 7: Enthält  $\mathcal{E}(h_2)$  eine Aufzählungsfunktion  $E_1$  für  $\mathcal{E}(h_1)$ , und enthält  $\mathcal{E}(h_3)$  eine Aufzählungsfunktion  $E_2$  für  $\mathcal{E}(h_2)$ , so enthält  $\mathcal{E}(h_3)$  auch eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(h_1)$ .

Beweis: Es gibt ein  $i_0$ , so daß für alle  $i, x$  gilt  $E_1(i, x) = E_2(i_0, \langle i, x \rangle)$ .  $\lambda i x E_2(i_0, \langle i, x \rangle) \in \mathcal{E}(h_3)$  ist also eine Aufzählungsfunktion für  $\mathcal{E}(h_1)$ .

### 3.5 Elementare Systeme von Fundamentalfolgen

In diesem letzten Abschnitt gehen wir von unseren speziell gewählten Fundamentalfolgen wieder ab und betrachten stattdessen ein beliebiges elementares System  $\mathbb{W}$  von Fundamentalfolgen bzgl. einer gewissen "natürlichen" Wohlordnung  $\prec_0$  vom Typ  $\omega^\omega$ . Wir beweisen, daß die zugehörigen Klassen  $\mathcal{L}_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}$  und  $\mathcal{L}_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}$  in  $\mathcal{R}_\alpha$ , also nach 3.2 auch in  $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$  enthalten sind; ein Kollaps tritt also nicht mehr auf.

Definition:

$$x \prec_0 y \iff \sum_{i < l(x)} \omega^i(x)_i < \sum_{i < l(y)} \omega^i(y)_i \quad 1)$$

$\prec_0$  ist offenbar eine Wohlordnung der natürlichen Zahlen vom Typ  $\omega^\omega$ , in der der Ordinalzahl  $\omega^n x_n + \dots + \omega^1 x_1 + x_0$  die Zahl  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$  entspricht. Weiter erfüllt  $\prec_0$  die in 2.2, S.28 aufgeführten Bedingungen 1) bis 3).  $\mathbb{W}$  sei nun irgendein zugehöriges elementares System von Fundamentalfolgen, also eine zweistellige elementare Funktion, die die Bedingung 4) in 2.2, S.29 erfüllt. Wir betrachten dann die in 2.2 und 2.3 definierten Funktionenklassen  $\mathcal{L}_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha} = \mathcal{E}(E_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha})$  und  $\mathcal{L}_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}^* = \mathcal{E}(F_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}^*)$ ,  $\alpha < \omega^\omega$ ; zur Abkürzung schreiben wir  $\mathcal{L}_\alpha^*$  für  $\mathcal{L}_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}^*$ ,  $E_\alpha^*$  für  $E_{\prec_0, \mathbb{W}, \alpha}$  usw. Gezeigt werden soll

Satz: a)  $\mathcal{E}_\alpha^* \subseteq \mathcal{E}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

b)  $\mathcal{L}_\alpha^* \subseteq \mathcal{L}_\alpha$  für  $\alpha < \omega^\omega$ .

Beweis zu a) Wegen  $\mathcal{E}_\alpha^* = \mathcal{E}(F_\alpha^*)$  und  $\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{E}_\alpha$  genügt es zu zeigen  $F_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$ . Wir beweisen durch Induktion über  $\alpha$ : Ist  $\alpha=0$  oder  $\alpha=\beta+1$ , so ist  $F_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$ ; ist  $\alpha = \omega^{n+1}(\beta+1)$ , so ist  $\lambda x_n \dots x_0 \times F_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n x_n + \dots + x_0}^*(x) \in \mathcal{R}_\alpha$ . Für  $\alpha=0$  ist wegen  $F_0^*(x) = 2^x$  die Behauptung trivial. Aus  $F_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$  folgt  $F_{\alpha+1}^* \in \mathcal{R}_{\alpha+1}$  wegen  $F_{\alpha+1}^*(x) = F_\alpha^*(x)(1)$ . Es sei nun  $\alpha$  eine Limeszahl und  $F_\gamma^* \in \mathcal{R}_\gamma$  für  $\gamma < \alpha$ .  $\alpha$  läßt sich darstellen in der Form  $\alpha = \omega^{n+1}(\beta+1) = \omega^r a_r + \dots + \omega^{n+1}(a_{n+1}+1)$ ,  $a_r \neq 0$ . Mit  $c_{\alpha k}(x)$  bezeichnen wir den Koeffizienten von  $\omega^k$  im  $x$ -ten Glied der zu  $\alpha$  gehörenden Fundamentalfolge, also

$$c_{\alpha k}(x) := (W(\langle 0, \dots, 0, a_{n+1}+1, \dots, a_r \rangle, x))_k.$$

Da die Glieder der gegen  $\alpha$  konvergenten Fundamentalfolge schließlich größer als  $\omega^{n+1}\beta$  werden, gilt mit einem geeigneten  $c$

$$F_\alpha^*(x) = F_{\omega^{n+1}\beta}^* + \omega^n c_{\alpha n}(x) + \dots + c_{\alpha 0}(x) \quad \text{für } x \geq c.$$

Setzt man jetzt

$$\begin{aligned} & f(x_r, \dots, x_{n+1}, x_n, \dots, x_0, x) \\ & := F_{\omega^r x_r}^* + \dots + \omega^{n+1} x_{n+1} + \omega^n x_n + \dots + x_0 \end{aligned} (x),$$

<sup>1)</sup>  $l(x)$  ist die in 1.2, S.11 definierte "Länge von  $x$ ".



so genügt es also zu zeigen, daß  $\lambda x_n \dots x_0 x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, x)$  in  $\mathcal{R}_\alpha$  liegt. Nun gilt

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, 0, \dots, 0, x) = F_{\omega^{n+1}\beta}^*(x)$$

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0+1, 0) = 1$$

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0+1, x+1)$$

$$= f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0+1, x))$$

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_n+1, 0, \dots, 0, x)$$

$$= \begin{cases} f(c, c_{\xi_{r-1}}(x), \dots, c_{\xi_0}(x), x) & \text{falls } c_{\xi_r}(x) = c & (0 \leq c < a_r) \\ f(a_r, c, c_{\xi_{r-2}}(x), \dots, c_{\xi_0}(x), x) & \text{f. } c_{\xi_r}(x) = a_r \wedge c_{\xi_{r-1}}(x) = c & (0 \leq c < a_{r-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(a_r, \dots, c, c_{\xi_n}(x), \dots, c_{\xi_0}(x), x) & \text{f. } c_{\xi_r}(x) = a_r \wedge \dots \wedge c_{\xi_{n+1}}(x) = c & (0 \leq c < a_{n+1}) \\ f(a_r, \dots, a_{n+1}, c_{\xi_n}(x), \dots, c_{\xi_0}(x), x) & \text{f. } c_{\xi_r}(x) = a_r \wedge \dots \wedge c_{\xi_{n+1}}(x) = a_{n+1} & \end{cases}$$

$$\text{mit } c_{\xi_k}(x) := (W(\langle 0, \dots, 0, x_m+1, \dots, x_n, a_{n+1}, \dots, a_r \rangle, x))_k .$$

Beachtet man, daß  $W$  elementar ist, und verwendet man die Induktionsvoraussetzung, so ergibt sich daraus, daß

$\lambda x_n \dots x_0 x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, x)$  durch eine  $n+2$ -fache elementare Rekursion aus Funktionen aus  $\mathcal{R}_{\omega^{n+1}\beta}$  definiert werden kann und folglich in  $\mathcal{R}_\alpha$  liegt.

zu b) Wegen  $\mathcal{L}_\alpha^* = \mathcal{L}(E_\alpha^*)$  genügt es zu zeigen  $E_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$ . Wir beweisen durch Induktion über  $\alpha$ : Ist  $\alpha=0$  oder  $\alpha=\beta+1$ , so ist  $E_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$ ; ist  $\alpha = \omega^{n+1}(\beta+1)$ , so ist  $\lambda x_n \dots x_0 i x E_{\omega^{n+1}\beta + \omega^n x_n + \dots + x_0}^*(i, x) \in \mathcal{R}_\alpha$ . Der Fall  $\alpha=0$  ist trivial.

Aus  $E_\alpha^* \in \mathcal{R}_\alpha$  folgt  $E_{\alpha+1}^* \in \mathcal{R}_{\alpha+1}$ , denn nach 3.1, S.38 f. kann  $E_{\alpha+1}^* = \text{el}_{E_\alpha^*}$  durch eine 1-fache elementare Rekursion aus  $E_\alpha^*$  definiert werden. Es sei nun  $\alpha$  eine Limeszahl und  $E_\gamma^* \in \mathcal{R}_\gamma$  für  $\gamma < \alpha$ .

Man kann jetzt genau wie in a) vorgehen: Setzt man wieder

$$\alpha = \omega^{n+1}(\beta+1) = \omega^r a_r + \dots + \omega^{n+1}(a_{n+1}+1), \quad a_r \neq 0, \quad \text{und}$$

$$c_{\alpha k}(z) := (W(\langle 0, \dots, 0, a_{n+1}+1, \dots, a_r \rangle, z))_k,$$

so gilt mit einem geeigneten  $c$

$$E_\alpha^*(i, x) = E_{\omega^{n+1}\beta}^* + \omega^n c_{\alpha n}((i)_0) + \dots + c_{\alpha 0}((i)_0) \quad ((i)_1, x)$$

für  $x \geq c$ ,

und definiert man dann

$$f(x_r, \dots, x_{n+1}, x_n, \dots, x_0, i, x) \\ := E^*_{\omega^r x_r + \dots + \omega^{n+1} x_{n+1} + \omega^n x_n + \dots + x_0} (i, x),$$

so genügt es wieder zu zeigen, daß  $\lambda_{x_n \dots x_0} i x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, i, x)$  in  $\mathfrak{R}_\alpha$  liegt. Es gilt jetzt

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, 0, \dots, 0, i, x) = E^*_{\omega^{n+1} \beta} (i, x) \\ f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0+1, i, x) \\ = e_1 \lambda i x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, i, x) (i, x) \\ = G_2(\lambda i x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0+1, i, x), \\ \lambda i x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, i, x); i, x)$$

$$f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_m+1, 0, \dots, 0, i, x)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(c, c_{\xi_{r-1}}((i)_0), \dots, c_{\xi_0}((i)_0), (i)_1, x) \\ \quad \text{falls } c_{\xi_r}((i)_0) = c \quad (0 \leq c < a_r) \\ f(a_r, c, c_{\xi_{r-2}}((i)_0), \dots, c_{\xi_0}((i)_0), (i)_1, x) \\ \quad \text{falls } c_{\xi_r}((i)_0) = a_r \wedge c_{\xi_{r-1}}((i)_0) = c \quad (0 \leq c < a_{r-1}) \\ \dots \\ f(a_r, \dots, c, c_{\xi_n}((i)_0), \dots, c_{\xi_0}((i)_0), (i)_1, x) \\ \quad \text{falls } c_{\xi_r}((i)_0) = a_r \wedge \dots \wedge c_{\xi_{n+1}}((i)_0) = c \quad (0 \leq c < a_{n+1}) \\ f(a_r, \dots, a_{n+1}, c_{\xi_n}((i)_0), \dots, c_{\xi_0}((i)_0), (i)_1, x) \\ \quad \text{falls } c_{\xi_r}((i)_0) = a_r \wedge \dots \wedge c_{\xi_{n+1}}((i)_0) = a_{n+1} \end{array} \right.$$

$$\text{mit } c_{\xi_k}(z) := (W(\langle 0, \dots, 0, x_{m+1}, \dots, x_n, a_{n+1}, \dots, a_r \rangle, z))_k.$$

$G_2$  ist ein in 3.1, S.38 definiertes elementares Funktional, aus dessen Definition sich ergibt, daß in  $G_2(g, h; i, x)$   $g$  nur an Stellen  $j, y$  mit  $j < i$  gebraucht wird. Beachtet man noch, daß  $W$  elementar ist, so ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung, daß  $\lambda_{x_n \dots x_0} i x f(a_r, \dots, a_{n+1}, x_n, \dots, x_0, i, x)$  durch eine  $n+2$ -fache ( $x$  ist "Parameter") elementare Rekursion aus Funktionen aus  $\mathfrak{R}_{\omega^{n+1} \beta}$  definiert werden kann und folglich in  $\mathfrak{R}_\alpha$  liegt.

Literaturverzeichnis

- [1] Axt, P.: Enumeration and the Grzegorzcyk Hierarchy. Z. math. Logik Grundl. Math. 9 (1963), 53-65
- [2] Feferman, S.: Classifications of Recursive Functions by Means of Hierarchies. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 101-122
- [3] Grzegorzcyk, A.: Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matematyczne IV, Warszawa 1953
- [4] Heineremann, W.: Untersuchungen über die Rekursionszahlen rekursiver Funktionen. Dissertation, Münster 1961
- [5] Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961
- [6] Kleene, S.C.: Introduction to Metamathematics. Amsterdam, Groningen 1964
- [7] Kleene, S.C.: Extension of an Effectively Generated Class of Functions by Enumeration. Coll. Math. 6 (1958), 67-78
- [8] Liu, S.C.: A Theorem on General Recursive Functions. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 184-187
- [9] Markwald, W.: Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen. Math. Ann. 127 (1954), 135-149
- [10] Minsky, M.L.: Recursive Unsolvability of Post's Problem of "Tag" and other Topics in the Theory of Turing Machines. Ann. of Math. 74 (1961), 437-455

- [11] Myhill, J.: A Stumblingblock in Constructive Mathematics  
(abstract). J. Symbolic Logic 18 (1953), 190
  
- [12] Péter, R.: Rekursive Funktionen. Berlin 1957
  
- [13] Robbin, J.W.: Subrecursive Hierarchies. Dissertation,  
Princeton 1965
  
- [14] Rödding, D.: Klassen rekursiver Funktionen. Erscheint in:  
Proceedings of the Leeds Summer Institute in Logic, 1967
  
- [15] Routledge, N.A.: Ordinal Recursion. Proc. Cambridge Phil. Soc.  
49 (1953), 175-182
  
- [16] Shepherdson, J.C. and Sturgis, H.E.: Computability of Recursive  
Functions. J. Ass. Computing Machinery 10 (1963), 217-255
  
- [17] Smullyan, R.M.: Theory of Formal Systems. Princeton 1961