Novosibirsk State Technical University

Algebra and Model Theory *11*

Collection of papers
edited by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,
S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko

Novosibirsk
2017

UDC 512(06)
A 35

A 35 **Algebra and Model Theory 11.** Collection of papers / Edited by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2017. — 188 pp.

ISBN 978–5–7782–3213–6

The papers in this book are devoted to some problems of algebra and model theory.

Technical editor E. N. Poroshenko.

UDC 512(06)

© Composite authors, 2017
ISBN 978–5–7782–3213–6 © Novosibirsk State Technical University, 2017

Introduction

Algebra and Model Theory 11

The 12th International Summer School “Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory” was held on 23–29 of June 2017 at the camping center “Erlagol” (Chemal district, the Altai Republic). The School was organized by Algebra and Mathematical Logic Department of Novosibirsk State Technical University (NSTU) and Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IM SBRAS). This school was dedicated to the 75th of professor V. M. Kopytov and the 70th of professor A. G. Pinus. The School was supported by RFBR (grant №15-01-203070) and by Grant of NSTU (C10). At the school-conference, there were participants from Greece, Iran, Italy, Kazakhstan, Serbia and Russia. They made 16 plenary and 22 section talks. Within the school-conference, “Hour of problems” was organized. All participants of the conference asked for publishing the works of the conference as a traditional collection of papers “Algebra and model theory 11”.

The publication of the collection of papers has been supported by RFBR (grant №15-01-203070).

The Organizing Committee of the School-Conference

Program of 12th International Summer School-Conference "Problems Allied to Universal Algebra and Model Theory"

June 24, Saturday

9:15am–9:30am **Opening the school-conference**

Plenary Talks

Chairperson S. Sudoplatov

9:30am–10:20am GONCHAROV S. (Novosibirsk, Russia) "Mathematical models in semantic programming"

10:30am–11:20am KOPYTOV V. (Novosibirsk, Russia) "Power series and groups"

11:30am–12:20pm BAIZHANOV B. (Almaty, Kazakhstan) "Conservative extensions of models of complete dependent theories"

12:30pm–1:20pm PERYAZEV N. (Saint-Petersburg, Russia) "Identities on superclones"

Short Talks

Universal algebras and models
Chairperson A. Pinus

3:00pm–3:30pm DUDKIN F. (Novosibirsk, Russia) "On centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups"

3:30pm–4:00pm KIOUVREKIS Y., STEFANEAS P. (Ahtens, Greece), SUDOPLATOV S. (Novosibirsk, Russia) "Definable sets in generic structures"

4:00pm–4:30pm STAROLETOV A (Novosibirsk, Russia) "On recognizability by prime numbers graph of alternating groups"

4:30pm–5:00pm ZAMBARNAYA T. (Almaty, Kazakhstan) "p-preserving formulas and the number of countable models"

5:00pm–5:30pm	Mikhal'chishina Yu. (Novosibirsk, Russia) "Representation of virtual braids by automorphisms and virtual knots groups"
5:30pm–6:00pm	Ahmadi Delir K. (Tabriz, Iran) "Non-associating graph of a finite Moufang loop and its relationship with the non-commuting graph"

June 25, Sunday

Plenary Talks

Chairperson M. Peretyat'kin

9:00am–9:50am	Kulpeshov B. (Almaty, Kazakhstan) "Binarity is almost omega-categorical completely *o*-minimal theories"
10:00am–10:50am	Pinus A. (Novosibirsk, Russia) "Fragments of clones as a method of research of the latter"
11:00am–11:50am	Tepavčević A. (Novi Sad, Serbia) "Weak congruences and Ω-algebras"
Noon–12:50pm	Sudoplatov S. (Novosibirsk, Russia), "Derivative Objects in Model Theory"

Short Sections

	Classical algebra **Chairperson S. Zyubin**	**Universal algebras and Models** **Chairperson D. Valota**
3:00pm–3:30pm	Grachev E., Popova A. (Novosibirsk, Russia) "Automorphisms of integer group rings"	Baizhanov S. (Almaty, Kazakhstan) "Expansion of models by type definable relation and stability."
3:40pm–4:10pm	Bryukhanov O. (Novosibirsk, Russia) "On ascending HNN-extensions of almost polycyclic groups"	Ryabets L. (Irkutsk, Russia) "Strong closure operators for hyperfunctions on a two-element set"

4:20pm–4:50pm	GAL'T A. (Novosibirsk, Russia) "On splittability of the normalizer of a maximal torus in groups of Lie type"	BORODIN A. "Phenomenologically symmetric geometry of finite rank as a derived structure of universal algebras"
5:00pm–5:30pm		MUKANKYZY A. (Almaty, Kazakhstan) "Exchange principle and dp-rank"

June 26, Monday

Plenary Talks

Chairperson B. Kulpeshov

9:00am–9:50am	ODINTSOV S. (Novosibirsk, Russia) "On realizability semantic for IF-logic"
10:00am–10:50am	PERETYAT'KIN M. (Almaty, Kazakhstan) "First order combinatorics and a definition of model-theoretic property with applications"
11:00am–11:50am	POROSHENKO E. (Novosibirsk, Russia) "Structure and theories of partially commutative Lie algebras"

June 27, Tuesday

Plenary Talks
Chairperson A. Tepavčević

9:00am–9:50am	SHAHRYARI M. (Tabris, Iran) "A characterization of q_ω-compact algebras"
10:00am–10:50am	CHURKIN V. (Novosibirsk, Russia) "On R. Garipov's works on crystallography"
11:00am–11:50am	VALOTA D. (Milan, Italy) "Spectra Problems and Many-Valued Logics"

Noon–12:50pm	Chekhondadskih A. (Novosibirsk, Russia) "Algebraic method of synthesis of reduced order control for different classes of dynamic systems"

Short Talks

Classical algebra
Section meeting in memory of Pestov G.

Chairperson V. Kopytov

3:00pm–3:30pm	Kopytov V. M. (Novosibirsk, Russia) "Finitelly generated Conrad groups of finite rank are solvable and have a faithful representation by matrices"
3:40pm–4:10pm	Zenkov A. (Barnaul, Russia) " Wreath products and varieties of m-groups"
4:20pm–4:50pm	Zyubin S. (Tomsk, Russia) "Subgroup properties of Chevalier groups"
5:00pm–5:30pm	Galanova N. (Tomsk, Russia) "Sections of non-Archemedian really closed field"
5:40pm–6:10pm	Zabarina A., Fomina E. (Tomsk, Russia) "On some properties of two-dimensionally ordered groups"
6:20pm–6:50pm	Speech on Pestov G.

June 28, Wednesday

Plenary Talks
Chairperson M. Shahryari

9:00am–9:50am	Shevlyakov A (Omsk, Russia) "Compactness classes in universal algebraic geometry"

Universal algebras and models

Chairperson L. Ryabets

10:00am–10:30pm	Pinus A. (Novosibirsk, Russia) "Direct and inverse limits of retractive spectra and their applications"

10:30am–11:00am	KOBDIKBAEVA F. (Almaty, Kazakhstan) ”Countable models and order property”
11:00am–11:30am	KAZIMIROV A. (Irkutskк, Russia) “Algorithms of minimization of multifunctions”
11:30am–Noon	KIOUVREKIS Y. (Athens, Greece) “Categorical abstract model theory”
Noon–12:30pm	TEPAVČEVIĆ A. (Novi Sad, Serbia) “Partial closure operators and systems”
12:30pm–1:30pm	Hour of problems
1:30pm–1:45pm	**Closing the school-conference**

К 75-летию профессора В. М. Копытова

26 сентября 2016 года замечательному человеку и выдающемуся ученому Валерию Матвеевичу Копытову исполнилось 75 лет. Валерий Матвеевич родился в г. Свердловске. После окончания средней школы он поступает на механико-математический факультет Уральского университета. Именно там произошло знакомство с Али Ивановичем Кокориным, которое во многом определило интерес Валерия Матвеевича к упорядоченным группам и связанными с ними вопросами.

В теории групп очень важными и интересными являются те или иные вопросы пополнения (в смысле извлечения корней). Одним из первых результатов В. М. Копытова является теорема о вложимости с продолжением порядка всякой упорядочиваемой группы в упорядочиваемую группу с полным центром [1]. Эта теорема выявила огромный научный потенциал молодого ученого и стала классической в теории упорядоченных групп. По словам Л. Фукса, полученный В. М. Копытовым результат, показал выдающуюся роль центра в упорядочиваемой группе. Позже теорема была обобщена на случай локально нильпотентной инвариантной подгруппы С. А. Гурченковым, учеником Валерия Матвеевича.

Одним из естественных вопросов теории упорядочиваемых групп является вопрос о числе порядков на группе. М. И. Каргаполовым, А. И. Кокориным и В. М. Копытовым в работе [2] были построены группы с $2 \cdot 2^n \cdot n!$ линейными порядками, что дало отрицательное решение гипотезы Б. Неймана о том, что число линейных порядков есть некоторая степень 2.

В 1965 году, после защиты кандидатской диссертации Валерий Матвеевич по приглашению М. И. Каргаполова переезжает в недавно открывшийся Институт математики СО Академии Наук СССР. С тех пор жизнь В. М. Копытова неразрывно связана с Академгородком. Здесь в полной мере раскрывается талант Валерия Матвеевича как ученого и педагога. Один из первых "новосибирских" результатов посвящен изучению матричных групп — классическому разделу теории групп [3]. Был получен следующий, теперь уже классический, результат: всякая группа, имеющая разрешимую подгруппу конечного индекса без кручения и конечного ранга, допускает точное представление матрицами над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. В этой же работе дано описание нильпотентных групп, допускающих точное представление матрицами над $\mathbb{Q}$. Именно в это время у В. М. Копытова появляется замечательная ученица — Ася Михайловна Попова. Ныне Ася Михайловна является признанным специалистом в этой области.

“Увлечение” В. М. Копытова матричными группами не осталось незамеченным член-корреспондентом Академии наук М. И. Каргаполовым. По его мнению, эта увлеченность наносила ущерб исследованиям по упорядоченным группам. Поэтому с формулировкой “в матричных группах и так тесно” Валерий Матвеевич возвращается к исследованию упорядоченных групп как основному направлению своей научной работы. В 1972 году в серии “Современная алгебра” выходит книга “Линейно упорядоченные группы”, написанная совместно с А. И. Кокориным. Необходимость, своевременность, важность и значимость этой книги подчеркивает тот факт, что она почти сразу была опубликована за рубежом на английском языке. В это же время Валерий Матвеевич продолжает исследование вопроса о числе линейных порядков на группе. Им показано в [4], что если разрешимая группа допускает конечное число упорядочений, то оно кратно 4 и, наоборот, для каждого натурального n существует разрешимая группа с $4n$ линейными порядками. Эту теорему можно считать наиболее существенным и законченным результатом в данном направлении.

В начале 1970-х в СССР и за рубежом начинается интенсивное изучение решеточно упорядоченных групп (ℓ-групп)-алгебраических систем, совмещающих в себе структуры группы и решетки. Во многом благодаря усилиям Валерия Матвеевича и его учеников теория ℓ-групп приобрела черты богатой теории со своей техникой исследований, кругом задач и проблем. Итогом этой титанической работы стала книга “Решеточно упорядоченные группы”, вышедшая в 1984 году в серии “Современная алгебра”. До сих пор эта книга является настольной для начинающих “упорядоченников”. В ней впервые были систематизировано изложены последние достижения в теории многообразий ℓ-групп. Из многочисленных результатов В. М. Копытова, относящихся к теории многообразий ℓ-групп, особо отметим два. Во-первых, было показано, что свободная группа в классе всех ℓ-групп допускает точное представление кусочно-линейными порядковыми функциями действительной прямой [5]. Во-вторых, в работе [6] доказано существование накрытий многообразия абелевых ℓ-групп, в которых всякая разрешимая группа является абелевой. Для получения этого результата В. М. Копытов предложил новую модель собирательного процесса. Опираясь на идеи этой работы в 1991 году Ч. Холланд и Н. Я. Медведев доказали существование континуума накрытий многообразия абелевых ℓ-групп с аналогичными свойствами.

Интенсивное развитие теории решеточно упорядоченных групп привели к значительным изменениям в теории упорядоченных групп. Возникла острая необходимость изложить результаты, полученные в течении восьми-десяти лет с момента появления предыдущей книги. В 1994 году в издательстве "Kluwer" выходит третья книга В. М. Копытова "The theory of lattice ordered groups", написанная совместно с Н. Я. Медведевым. В опубликованную книгу вошла только половина подобранного авторами материала. В 1996 году в серии "Сибирская школа алгебры и логики" выходит монография В. М. Копытова и Н. Я. Медведева "Правоупорядоченные группы", которую является прекрасным введением в теорию правоупорядочиваемых групп. Интерес к вышедшей книге у алгебраистов, не занимающихся упорядоченными объектами, был спровоцирован доказательством П. Дехорной правоупорядочиваемости групп кос. Целая глава новой книги была посвящена исследованиям Валерия Матвеевича по "экзотическим" полулинейным порядкам.

Наш рассказ будет неполным, если мы не коснемся наставнической деятельности Валерия Матвеевича. Начнем с того, что работая много лет деканом в ФМШ, читая там различные спецкурсы, Валерий Матвеевич формировал вкусы и способствовал творческому развитию будущих математиков. Наверное, в этом смысле многие выпускники ФМШ могут называть его своим первым Учителем. Если говорить об учениках то, прежде всего мы должны вспомнить о любимом ученике и близком друге Николае Яковлевиче Медведеве — человеке, прошедшем с Валерием Матвеевичем весь путь от второкурсника до соавтора многочисленных статей и книг. Именно благодаря их совместным усилиям термин "ℓ-группа" стал известен и прижился на "алтайской" земле. Первые пятнадцать-двадцать лет после переезда Н. Я. Медведева в г. Барнаул В. М. Копытов приезжал в Алтайский госуниверситет и читал "вахтовым методом" (по три пары в день) спецкурсы для студентов, специализирующихся на кафедрах алгебры. Общаться на равных с ученым с мировым именем было огромным везением для начинающих алгебраистов. Эти регулярные встречи в г. Барнауле способствовали не только профессиональному росту начинающих "упорядоченников", но и учили их настоящему профессиональному подходу к делу, если хотите, формировали стиль мышления.

Как ведущий специалист по упорядоченным группам Валерий Матвеевич поддерживал и поддерживает тесные научные контакты со всеми школами, так или иначе связанными с упорядочениями алгебраических систем. Достаточно вспомнить о плодотворном сотрудничестве с болгарскими и чехословацкими математиками в 70–80-е годы прошлого века. Прочные контакты связывают Валерия Матвеевича и с томской школой "упорядоченников". Многолетнее сотрудничество, берущее свое начало со времен Али Ивановича Кокорина и продолжившееся в сотрудничестве с В. В. Блудовым, связывает В. М. Копытова с иркутской школой "упорядоченников".

Доброжелательность, острый ум и потрясающее чувство юмора Валерия Матвеевича навсегда остаются с теми, кому посчастливилось с ним общаться. И сегодня Валерий Матвеевич полон сил и творческой энергии. Желаем ему долгих лет жизни и континуум новых творческих удач и свершений.

Список литературы

[1] В. М. Копытов, О пополнении центра упорядоченной группы, Матем. зап. Уральск. ун-та, **4**, 3 (1963), 20–24.

[2] М. И. Каргаполов, А. И. Кокорин, В. М. Копытов, К теории упорядочиваемых групп, Алгебра и логика, **4**, 6 (1965), 21–27.

[3] В. М. Копытов, О матричных группах, Алгебра и логика, **7**, 3 (1968), 51–59.

[4] В. М. Копытов, О линейно упорядоченных разрешимых группах, Алгебра и логика, **12**, 6 (1973), 655–666.

[5] В. М. Копытов, Свободные решеточно упорядоченные группы, Алгебра и логика, **18**, 4 (1979), 426–441.

[6] В. М. Копытов, Неабелево многообразие решеточно упорядоченных групп, в котором каждая разрешимая подгруппа абелева, Матем. сборник, **126**, 2 (1985), 247–266.

*П. Е. Алаев, С. Г. Афанасьева, Н. В. Баянова,
А. В. Васильев, А. А. Викентьев, Н. Ю. Галанова,
С. С. Гончаров, М. Е. Гончаров, Ф. А. Дудкин,
Ю. Л. Ершов, А. И. Забарина, А. В. Зенков,
С. А. Зюбин, А. М. Ивлева-Попова, В. Д. Мазуров,
Л. Л. Максимова, И. А. Мальцев, А. С. Морозов,
С. П. Одинцов, Е. А. Палютин, А. Г. Пинус,
К. Н. Пономарев, Е. Н. Порошенко, В. Г. Пузаренко,
А. И. Стукачёв, С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко,
Е. А. Фомина, А. В. Чехонадских, В. А. Чуркин,
М. В. Швидевски, М. С. Шеремет*

75th anniversary of Professor V. M. Kopytov

On September 26, 2016 there was the 75th anniversary of remarkable person and outstanding scientist Valery Matveevich Kopytov. Valery Matveevich was born in Sverdlovsk. After graduating a high-school he entered the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Ural State University. It was there that he met Ali Ivanovich Kokorin. This acquaintance caused Valery Matveevich's interest to ordered groups and problems allied to them.

Very important and interesting problems in group theory are problems on completion (in the sense of extraction of the roots). One of the first results of V. Kopytov is the theorem on embeddability with an extension of order of any orderable group to an orderable full-center group [1]. This theorem showed large scientific potential of Valery Matveevich. Now this theorem is considered to be classical in ordered group theory. As L. Fuks said, the result of V. M. Kopytov showed an outstanding role of the center of an orderable group. Later on, one of the Kopytov's disciples S. A. Gurchenkov generalized this theorem to the case of locally nilpotent invariant subgroups.

One of natural problems in ordered group theory is the problem on number of orders on a group. In [2], M. I. Kargapolov, A. I. Kokorin, and V. M. Kopytov have found groups having $2 \cdot 2^n \cdot n!$ linear orders. So, they give the negative answer to the B. Neumann's conjecture claiming that the number of linear orders of a group is a power of 2.

In 1965, Valery Matveevich defended his Ph.D.-thesis. After this he was invited by M. I. Kargapolov to recently opened Institute of Mathematics (Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR) and V. M. Kopytov moved to Academgorodok of Novosibirsk where he lives and works now. Here he revealed himself as a talented scientist and pedagogue. One of the first his results in Novosibirsk is concerned to matrix group theory [3]. Valery Matveevich showed that if a group has a solvable subgroup of finite index, is torsion free and of finite rank then it admits an exact representation by matrices over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Now this theorem is considered to be classical in group theory. In this work, a description of nilpotent groups admitting an exact representation by matrices over $\mathbb{Q}$ was also given. At that time V. M. Kopytov got a remarkable disciple Asya Mikhaylovna Popova. Now Asya Mikhaylovna is a recognized expert in this area.

V. M. Kopytov's interest to matrix groups was noticed by Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR M. I. Kargapolov. By his opinion, this interest prevented Kopytov's study of ordered groups while "there was too crowdy in matrix groups". For this reason, Valery Matveevich went back to the study of ordered groups. Valery Matveevich jointly with A. I. Kokorin wrote the book "Linearly ordered groups". In 1972, this book was published in the series "Modern mathematics". This book was almost immediately published abroad in English. This fact showed that the book was necessary and important that time. At the same time Valery Matveevich continued his research of number of linear orders in a group. In [4], he has shown that if a group admits only finitely many orders that the number of orders is divisible by 4. Inversely, for any natural n there is a solvable group admitting $4n$ linear orders. This theorem is the most essential and complete result in this area.

In the beginning of 1970s, lattice-ordered groups (ℓ-groups) began to attract the attention of mathematicians in the USSR and abroad. These groups combine structures of both groups and lattices. Mainly due to Valery Matveevich and his disciples ℓ-group theory became a well-developed theory with its own research technique and types of considered problems. As a result of his huge work he wrote the book "Lattice-ordered groups" published in 1984 in the series "Modern algebra". This book became a manual for beginners in ordered group theory. It was the first book systematizing last results in theory of ℓ-group varieties. Let us notice a couple of V. M. Kopytov's results concerning to this theory. Firstly, he showed that a free group in the class of all ℓ-groups admits an exact representation by piecewise linear ordinal functions on the real line [5]. Secondly, it was shown in [6] that there exist covers on the variety of abelian groups such that any solvable group in such cover is abelian. To get this result V. M. Kopytov introduced a new model of a collecting process. In 1991, C. Holland and N. Ya. Medvedev showed using the results in [6] that there are continuum of covers of abelian ℓ-groups having analogous properties.

High development of theory of lattice ordered group theory followed large changes in ordered group theory. So, it became necessary to systemize results obtained for 8–10 years since the last book had been published. In 1994, the third book of V. M. Kopytov "The theory of lattice ordered groups" in was published by Kluwer publisher. This was a joint book of Valery Matveevich and N. Ya. Medvedev. This book contained only half of picked material. In 1996, the monograph of V. M. Kopytov and N. Ya. Medvedev "Right-ordered groups" was published in the series "Siberian school of algebra and logic". This monograph was a good introduction to the right-ordered group theory. After P. Dehorna showed that braid group is right-orderable the book became interesting even for algebraists not studying ordered objects. A chapter of the monograph was devoted to Valery Matveevich's research of "exotic" semi-linear orders.

Talking about Valery Matveevich Kopytov we should mention his mentoring activity. For many years he was working as a dean in the Physical and Mathematical School in Novosibirsk and giving lectures in various subjects. Thus, he formed mathematical way of thinking and contributed to the creative development of high-school students. So possibly many graduated students of the Physical and Mathematical School can refer to him as their first Teacher. Talking about V. M. Kopytov's disciples we should mention his favorite disciple and close friend Nikolay Yakovlevich Medvedev. He started working with Kopytov being a second-year higher education student and finally became a co-author of a lot of Kopytov's papers and books. That is because of their effort the term "ℓ-group" became well-known to "Altai's science".The first fifteen-twenty years after N. Ya. Medvedev moved to Barnaul, V. M. Kopytov kept visiting Altai State University and gave lectures (three classes per day) for students choosing algebra as their major. Thus, students had an opportunity to communicate with a well-known scientist. These regular meetings in Barnaul not only provided a professional development of beginners in algebra but also formed professional way of thinking.

As a leading expert in the area of ordered groups Valery Matveevich keeps in touch with all science schools allied to ordered algebraic systems. Here we can mention his productive collaboration with Bulgarian and Czechoslovak mathematicians in 70–80th years of the last century. Valery Matveevich also keeps in touch with the Tomsk science school on ordered groups. For many years Kopytov has been collaborating with the Irkutsk science school. This collaboration started with joint work with Ali Ivanovich Kokorin and continued by a collaboration with V. V. Bludov.

Valery Matveevich's kindness, keen mind and brilliant sense of humour are memorized forever by everybody who has had a chance to talk with him. Today, Valery Matveevich is full of strength and creative power. We wish him many long years of life and a continuum of new creative ideas.

References

[1] V. M. Kopytov, On completion of the center of an ordered group, Math. notices of Ural university, **4**, 3 (1963), 20–24 (Russian).

[2] M. I. Kargapolov, A. I. Kokrin, V. M. Kopytov, To theory of ordered groups, Algebra and logic, **4**, 6 (1965), 21–27 (Russian).

[3] V. M. Kopytov, On matrix groups, Algebra and logic, **7**, 3 (1968), 51–59 (Russian).

[4] V. M. Kopytov, On lienarly ordered solvable groups, Algebra and logic **12**, 6 (1973), 655–666 (Russian).

[5] V. M. Kopytov, Free lattice-ordered groups, Algebra and logic, **18**, 4 (1979), 426–441 (Russian).

[6] V. M. Kopytov, Non-abelian variety of lattice ordered groups where each solvable subgroup is abelian, Матем. сборник, **126**, 2 (1985), 247–266 (Russian).

S. G. Afanasieva, P. E. Alaev, N. V. Bayanova,
A. V. Chekhonadskikh, V. A. Churkin, F. A. Dudkin
Yu. L. Ershov, A. V. Fomina, N. Yu. Galanova,
S. S. Goncharov, M. E. Goncharov, A. M. Ivleva-Popova,
L. L. Maksimova, I. A. Mal'cev, V. D. Mazurov,
A. S. Morozov, S. G. Odintsov, E. A. Palyutin,
A. G. Pinus, K. N. Ponomarev, E. N. Poroshenko,
V. G. Puzarenko, M. V. Schwidefsky, M. S. Sheremet,
A. I. Stukachev, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko,
A. V. Vasil'ev, A. A. Vikent'ev, A. I. Zabarina,
A. V. Zenkov, S. A. Zyubin

К 70-летию профессора А. Г. Пинуса

3 декабря 2016 г. исполнилось 70 лет профессору кафедры алгебры и математической логики Новосибирского государственного технического университета, доктору физико-математических наук, профессору, почетному работнику Высшей Школы Российской Федерации Александру Георгиевичу Пинусу.

Александр Георгиевич Пинус родился 3 декабря 1946 года в семье ученых-геологов в Новосибирске. Способности к точным наукам у него проявились со школьной скамьи на математических олимпиадах. По окончании средней школы в 1964 году Александр Георгиевич поступил на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета, по окончании которого был рекомендован в аспирантуру при НГУ. Аспирантский период на кафедре алгебры и математической логики НГУ с 1969 по 1972 года ознаменовался защитой кандидатской диссертации по теме "Неэлементарные свойства линейно упорядоченных множеств" под руководством члена-корреспондента Академии наук СССР Ю. Л. Ершова. В 1970-ые годы А. Г. Пинус продолжает исследования вопросов затронутых в его диссертации: вопросов вложимости линейных порядков, а также теоретико-модельных вопросов и вопросов разрешимости теорий в исчислениях с обобщенными кванторами.

В 1980-е годы научные интересы А. Г. Пинуса смещаются в сторону универсальной алгебры. Им детально исследуются вопросы строения скелетов вложимости и эпиморфности конгруэнц-дистрибутивных многообразий алгебр и разрабатывается классификация подобных многообразий на основе строения их счетных скелетов. Эти результаты составили содержание его докторской диссертации "Скелеты конгруэнц-дистрибутивных многообразий универсальных алгебр", защищенной им в 1992 году.

С 1972 по 1992 год Александр Георгиевич работает в должностях ассистента, старшего преподавателя, доцента на кафедре инженерной математики Новосибирского электротехнического института (НЭТИ). В 1992 году НЭТИ был преобразован в Новосибирский государственный технический университет и А. Г. Пинусом, по предложению ректората, была организована кафедра алгебры и математической логики, единственная подобная кафедра в технических вузах России. Руководил этой кафедрой А. Г. Пинус до 2007 года, когда он перешел на работу профессором этой же кафедры.

Преподавательскую деятельность на кафедре А. Г. Пинус успешно сочетает с продолжением своих научных исследований. В 1990-ые годы им разработана теория так называемых условных термов, нашедшая в дальнейшем самые разные применения в алгебро-логических исследованиях, в том числе, в последнее время, в вопросах классификации функциональных клонов. Большой цикл работ А. Г. Пинуса связан с исследованием производных структур универсальных алгебр: классификацией свободных алгебр многообразий по элементарным теориям их производных структур (решеток подалгебр, конгруэнций, групп автоморфизмов и т. п.), в частности, решение проблемы Г. Гретцера об элементарной эквивалентности решеток разбиений множеств; результаты о взаимосвязи универсальных алгебр с идентичными производными структурами; о связи производных структур алгебр с неявными и абстрактными функциями на алгебрах; результаты о формульных подалгебрах, конгруэнциях, автоморфизмах. Предложены новые подходы к изучению формульных подмножеств универсальных алгебр как аналогов алгебраических множеств в рамках идей алгебраической геометрии универсальных алгебр.

Перу А. Г. Пинуса принадлежит более 200 научных статей и шесть монографий: “Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр”, “Constructions of Boolean Algebras”, “Boolean Constructions in Universal Algebra”, “Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений”, “Производные структуры универсальных алгебр”, “Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр” (последняя совместно с Е. И. Буниной и А. В. Михалевым).

А. Г. Пинусом написаны и опубликованы первые на русском языке учебник и задачник по универсальной алгебре: “Основы универсальной алгебры” и “Задачи и упражнения по универсальной алгебре”. Под его руководством были защищены кандидатские диссертации Я. Л. Мордвинова и С. В. Журкова. Александр Георгиевич был руководителем целого ряда исследовательских грантов РФФИ и Минобрнауки РФ. Он активно сотрудничает с алгебраистами Москвы, Екатеринбурга, Иркутска и других российских алгебраических центров. Довольно широка география его международного сотрудничества: Германия, Польша, Чехия, США, Сербия, ЮАР и т. д.

Особого внимания заслуживает организованная по его инициативе (и проведенная в 2017 году уже в 12-й раз) Международная научная конференция на базе НГТУ “Эрлагол” (Горный Алтай) “Пограничные вопросы универсальной алгебры и теории моделей”. За большой вклад в науку и образование А. Г. Пинус в 1995 году был избран членом-корреспондентом Международной академии наук Высшей школы.

П. Е. Алаев, А. В. Васильев, А. А. Викентьев,
С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, А. М. Ивлева-Попова,
В. М. Копытов, В. Д. Мазуров, И. А. Мальцев,
С. П. Одинцов, Е. А. Палютин, К. Н. Пономарев,
Е. Н. Порошенко, В. Г. Пузаренко, А. И. Стукачёв,
С. В. Судоплатов, Е. И. Тимошенко, А. В. Чехонадских,
В. А. Чуркин, М. В. Швидевски, М. С. Шеремет

70th anniversary of Professor A. G. Pinus

Professor of the chair of Algebra and Mathematical Logic of Novosibirsk State Technical University, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Honored Worker of Higher School of Russian Federation Alexander Georgievich Pinus had the 70th anniversary on December 3, 2016.

Alexander Georgievich Pinus was born in the family of scientists-geologists in Novosibirsk on December 3, 1946. His ability in exact sciences became apparent in the school time when he participated mathematical competitions. Graduating high school in 1964 Alexander Georgievich entered at the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Novosibirsk State University. After that he was recommended for the graduate school at NSU. In 1969–1972 A. G. Pinus completed his Graduate program at the department of Algebra and Mathematical Logic of NSU and defended his Ph.D. thesis entitled "Non-elementary properties of linearly ordered sets" under supervision of Corresponding Member of the the USSR Academy Sciences Yu. L. Ershov. In the 1970s, A. G. Pinus continued a research of problems allied to ones in his thesis. These are problems of embeddability of linear orders, as well as model-theoretical problems and problems of solvability of theories in calculi with generalized quantifiers.

In the 1980s, A. G. Pinus started research in the area of Universal Algebra. He investigated in detail the structure of the skeletons of embeddability and epimorphisms in congruence-distributive varieties of algebras and developed a classification on related varieties on the based on the structures of their countable skeletons. These results formed his doctoral thesis "Skeletons of congruence-distributive varieties of universal algebras" defended in 1992.

Since 1972 till 1992, Alexander Georgievich worked in the positions of Assistant, Senior Lecturer, Associate Professor at the department of Engineering Mathematics of Novosibirsk Electrotechnical Institute. In 1992, this institute was transformed into Novosibirsk State Technical University and the administration of it suggested to A. G. Pinus to organize the department of Algebra and Mathematical Logic. This was the first such department in technical universities of Russia. A. G. Pinus accepted the offer and was a head of this department until 2007, when he went to position of professor in the same department.

Besides his teaching activities at the department Pinus successfully continues his scientific research. In the 1990s he developed the theory of so-called conditional terms. Later on, this theory got various applications in algebraic-logical research. For instance, lately, it was used in classification of functional clons. Large series of papers by A. G. Pinus is allied to derived structures of universal algebras. Namely, the classify free algebras of varieties by elementary theories of their derived structures (lattices of subalgebras, congruences, automorphism groups, etc.) and in particular, they give a solution of G. Gretzer's problem on elementary equivalence for lattices of partitions of sets. He also obtained results on connection among universal algebras with identical derived structures, on the relation of derived structures of algebras and implicit and abstract functions on algebras, on definable subalgebras, congruences, automorphisms. New approaches to the study of definable subsets of universal algebras as analogues of algebraic sets in t Algebraic Geometry of universal algebras were introduced.

A. G. Pinus is an author of more than 200 papers and six monographs: "Congruence-modular varieties of algebras", "Constructions of Boolean algebras", "Boolean constructions in Universal Algebra", "Conditional terms and their application in Algebra and Computability Theory", "Derived structures of universal algebras", "Elementary and related logical equivalences of classical and universal algebras" (the last one is joint with E. I. Bunina and A. V. Mikhalev).

A. G. Pinus published the first textbook and problem book on universal algebra in Russian: "Fundamentals of Universal Algebra" and "Tasks and exercises on the Universal Algebra". He was a scientific adviser of Ya. L. Mordvinov and S. V. Zhurkov when they were graduate students and they both defended their Ph.D. thesis under his mentoring. Alexander G. was the head of a series of research grant projects of the RFBR and Ministry of Education and Science of the Russian Federation. He actively collaborates with algebraists of Moscow, Yekaterinburg, Irkutsk and other Russian algebraic centers. He also collaborates with scientists of such countries as Germany, Poland, Czech Republic, USA, Serbia, South Africa, etc.

It is worth mentioning that he suggested to organize an international scientific conference on the camp of the NSTU "Erlagol" (Mountain Altai) "Problems allied to Universal Algebra and Model Theory". This year the conference was held for the 12th time. In 1995, A. G. Pinus was chosen as Corresponding Member of the International Academy of Sciences of Higher School for the great contribution to science and education.

P. E. Alaev, A. V. Chekhonadskih, V. A. Churkin,
Yu. L. Ershov, S. S. Goncharov, A. M. Ivleva-Popova,
V. M. Kopytov, I. A. Mal'cev, V. D. Mazurov,
S. G. Odintsov, E. A. Palyutin, K.N.Ponomarev,
E. N. Poroshenko, V. G. Puzarenko, M. V. Schwidefsky,
M. S. Sheremet, A. I. Stukachev, S. V. Sudoplatov,
E. I. Timoshenko, A. V. Vasil'ev, A. A. Vikent'ev

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА В ДЕЛИМОЙ 2-ЖЕСТКОЙ ГРУППЕ

С. Г. Афанасьева*

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
Специализированный учебно-научный центр Университета
ул. Пирогова, 11/1, Новосибирск, 630090, Россия.
e-mail: melesheva@gmail.com

1 Введение

Группа G называется m-жесткой, если в ней существует нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы и, рассматриваемые как правые $\mathbb{Z}[G/G_i]$-модули, не имеют модульного кручения. Этот ряд, если он вообще существует, определяется группой G однозначно, он называется жестким рядом группы. Важными примерами жестких групп являются свободные разрешимые группы. Определение жёсткой группы принадлежит Н. С. Романовскому, в его работах, а также в совместных с А. Г. Мясниковым работах были изучены многие аспекты алгебраической геометрии над жёсткими группами [1]–[6]. Жесткая группа G называется делимой, если элементы фактора G_i/G_{i+1} делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$ или, другими словами, G_i/G_{i+1} является векторным пространством над телом частных $Q(G/G_i)$ этого кольца. Наконец, жесткая группа G называется расщепляемой, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $A_1A_2 \ldots A_m$ абелевых групп $A_i \cong G_i/G_{i+1}$, где A_i нормализует A_j при $i < j$. Расщепляемая делимая жесткая группа определяется однозначно мощностями α_i

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 15-01-01485.

баз соответствующих векторных пространств A_i, она обозначается через $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Определения можно найти в [2]. На самом деле любая делимая жесткая группа является расщепляемой [3].

В [4] были описаны координатные группы неприводимых алгебраических множеств в аффинном пространстве над делимой жёсткой группой, точнее специальных неприводимых алгебраических множеств. По сути описание координатных групп равносильно описанию самих этих множеств. Напомним, что в алгебраической геометрии над нётеровой по уравнениям группой G топология Зарисского на аффинном пространстве G^n нётерова и поэтому всякое замкнутое множество является объединением конечного числа неприводимых алгебраических множеств, но совсем не обязательно оно само будет алгебраическим. Поэтому в том случае, когда есть описание неприводимых алгебраических множеств, возникает задача понять, при каких условиях объединение конечного числа неприводимых алгебраических множеств будет снова алгебраическим множеством. В этой связи отметим работы [7] и [8]. В первой из них описаны неприводимые алгебраические множества в свободной 2-ступенно разрешимой группе и сплетении двух свободных абелевых групп, то есть в соответствующем аффинном пространстве размерности 1, а во второй — найдены условия, когда объединение конечного числа таких множеств будет алгебраическим. В данной работе подобная задача решается для делимой 2-жесткой группы: выясняется, когда объединение неприводимых специальных алгебраических множеств из самой группы будет алгебраическим. Так что нам удалось разобраться только с 2-ступенно разрешимым случаем и размерностью 1, а задача для общего случая остаётся нерешённой.

2 Общие сведения об алгебраической геометрии над группами

Для данной группы G обозначим через F свободное произведение группы G и свободной группы с базой $\{x_1, \dots, x_n\}$. Множество $S \subseteq G^n$ решений некоторой системы уравнений $\{v_i(x) = 1 \mid i \in I\}$ от $x = (x_1, \dots, x_n)$, левые части которых являются элементами из F, называется алгебраическим подмножеством в G^n. Обозначим через $I(S) = \{v(x) \in F \mid v(s) = 1,\ s \in S\}$ аннулятор непустого алгебраического множества S и назовем координатной группой S фактор-группу $\Gamma(S) = F/I(S)$. Очевидно, что G вкладывается в эту фактор-группу и $\Gamma(S)$, как G-группа, порождается образами элементов $x_1, \dots, x_n$.

Группу F можно понимать как группу уравнений от x с коэффициентами из G. Вообще-то, мы назовем группой уравнений над G любую группу D, которая порождается своей подгруппой G и множеством элементов $\{x_1, \ldots, x_n\}$, если она удовлетворяет условию: всякое отображение $x \to (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ определяет G-эпиморфизм $D \to G$. Понятно, что D представляется в виде фактор-группы F/H. Среди таких D существует группа с максимальным H, равным $I(G^n)$, это группа $\Gamma(G^n)$.

Пусть S — алгебраическое подмножество из G^n. Если выше в определении группы D рассматривать только отображения $x \to (g_1, \ldots, g_n) \in S$, то мы получаем более общее определение группы уравнений над G при условии $x \in S$. Такая группа накрывает $\Gamma(S)$.

Отметим, что пересечение любого семейства алгебраических множеств из G^n снова будет алгебраическим множеством, а вот объединение двух алгебраических множеств может не быть алгебраическим.

На множестве G^n определяется топология Зарисского: нужно взять в качестве предбазы семейства замкнутых множеств алгебраические множества. Напомним, что топология называется нетеровой, если не существует бесконечных убывающих цепочек замкнутых множеств. В этом случае всякое замкнутое множество единственным образом представляется в виде несократимого объединения конечного числа неприводимых замкнутых множеств. Нетеровость топологии Зарисского на аффинных пространствах G^n равносильна нетеровости группы G по уравнениям. Последнее означает, что для любого n всякая система уравнений от $x_1, \ldots, x_n$ над группой G эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме. В [5] был доказан принципиальный результат: любая жёсткая группа нётерова по уравнениям.

3 Делимая жесткая группа $M(\alpha_1, \alpha_2)$, специальные переменные и алгебраические множества

Поскольку мы рассматриваем только 2-ступенно разрешимый случай и размерность 1, ради простоты приведём необходимые определения из [4] только для них.

Группа $G = M(\alpha_1, \alpha_2)$ представляется как группа матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$, где $A = M(\alpha_1)$ изоморфна прямой сумме α_1 копий аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$, T — правое векторное пространство с базой $\{t_k \mid k \in K\}$, мощности α_2 над полем частных $Q(A)$ группового кольца $\mathbb{Z}A$. Эта группа расщепляется: $G = A_1A_2$, где $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ изоморфна A, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$ изоморфна аддитивной группе пространства T. Любое другое расщепление группы G в полупрямое произведение двух абелевых подгрупп имеет вид $A_1^gA_2^g$, $g \in G$. Зафиксируем данное расщепление. В нашем случае имеет смысл рассмотреть две специальных переменных x, y с условием: x принимает значение в A_1, а y принимает значение в A_2. Обычную переменную можно представить в виде xy, она может принимать любые значения из G.

Группа уравнений G_{xy} от специальных переменных определяется следующим образом. Сначала берётся абелева группа $A_x = A \times \langle x \rangle$ — прямое произведение A и свободной абелевой группы $\langle x \rangle$. Рассмотрим правый $\mathbb{Z}A_x$-модуль $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}A_x$, и пусть

$$T_{xy} = T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}A_x + y \cdot \mathbb{Z}A_x$$

— прямая сумма $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}A_x$ и правого свободного $\mathbb{Z}A_x$-модуля с базой $\{y\}$. Полагаем $G_{xy} = \begin{pmatrix} A_x & 0 \\ T_{xy} & 1 \end{pmatrix}$, при этом элемент x отождествляем с матрицей $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а элемент y — с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Понятно, что G_{xy} порождается своей подгруппой G и множеством $\{x, y\}$. Решения специальных уравнений содержатся в множестве $A_1 \times A_2$. Так как каждый элемент группы G представляется в виде произведения элементов из A_1 и A_2, множество $A_1 \times A_2$ можно формально отождествить с G. Через специальные уравнения можно определить специальные алгебраические множества и все другие понятия алгебраической геометрии.

Используя результаты теоремы 3 из [4], получаем, что специальными неприводимыми алгебраическими множествами в группе G будут в точности следующие:

1) вся группа G;
2) одноэлементное множество $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \right\}$, задаваемое системой уравнений $x = a, y = t$;
3) множество вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$, задаваемое уравнением $x = a$;
4) множество, задаваемое системой уравнений $\{f(x, y) = 0$, где $f(x, y) \in T_{xy}$ составляют собственный изолированный подмодуль над $\mathbb{Z}A_x$ в T_{xy}, пересекающийся с $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}A_x$ по нулю.

Теорема. *Специальными алгебраическими множествами в группе* $G = M(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$ *будут в точности следующие (несократимые) объединения специальных неприводимых алгебраических множеств:*

1) *вся группа* G*;*

2) *объединение конечного числа множеств вида* (2) *и* (3)*:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ e_1 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_m & 0 \\ e_m & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \begin{pmatrix} a_{m+1} & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \cup \ldots \cup \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix},$$

где $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ *— различные элементы из* A, $e_i \in T$. *Возможно, в объединении отсутствуют множества вида* (2) *или* (3)*.*

3) *Объединение одного множества вида* (4) *и конечного числа различных множеств вида* (3)*. Возможно, в объединении отсутствуют множества вида* (3)*.*

Список литературы

[1] A. Myasnikov, N. Romanovskiy, Krull dimension of solvable groups, J. Algebra, **324**, 10 (2010), 2814–2831.

[2] Н. С. Романовский, Делимые жесткие группы, Алгебра и логика, **47**, 6 (2008), 762–776.

[3] А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, Логические аспекты теории делимых жёстких групп, ДАН (математика), **459**, 2 (2014), 154–155.

[4] Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества над делимыми жёсткими группами, Алгебра и логика, **48**, 6 (2009), 793–818.

[5] Н. С. Романовский, Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, **48**, 2 (2009), 258–279.

[6] Н. С. Романовский, Копроизведения жёстких групп, Алгебра и логика, **49**, 6 (2010), 803–818.

[7] В. Н. Ремесленников, Н. С. Романовский, Неприводимые алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, **44**, 5 (2005), 601–621.

[8] Н. С. Романовский, Алгебраические множества в метабелевой группе, Алгебра и логика, **46**, 4 (2007), 503–513.

NON-ASSOCIATING GRAPH OF A FINITE MOUFANG LOOP AND ITS RELATIONSHIP WITH THE NON-COMMUTING GRAPH

K. Ahmadidelir

Department of Mathematics, Tabriz Branch,
Islamic Azad University, Tabriz, Iran
e-mail: kdelir@gmail.com, k_ahmadi@iaut.ac.ir

1 Introduction

A set Q with one binary operation is a *quasigroup* if the equation $xy = z$ has a unique solution in Q whenever two of the three elements $x, y, z \in Q$ are specified. A quasigroup with a neutral element 1 satisfying $1x = x1 = x$ for every x is called a *loop*. A *Moufang loop* is a loop in which any of the (equivalent) *Moufang identities* $((xy)x)z = x(y(xz))$, $x(y(zy)) = ((xy)z)y$, $(xy)(zx) = x((yz)x)$, $(xy)(zx) = (x(yz))x$ holds.

Moufang loops appear naturally in algebra (as the multiplicative loop of octonions), and in projective geometry (Moufang planes), and hence they have been studied more than any other class of loops. Although Moufang loops are generally non-associative, they preserve many known and desirable properties of groups. For instance, every x has a two-sided inverse x^{-1} such that $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, any two elements generate a subgroup (known as *diassociativity property*); in finite Moufang loops, order of an element divides order of the loop, and it has been shown recently that order of a subloop divides order of the loop; every finite Moufang loop of odd order is solvable. Also, there are analogous forms of Sylow and Hall theorems for finite Moufang loops. For more details one can see [4, 13, 16, 17, 26].

Besides these, we haven't got access to many fundamental tools in Moufang loop theory which are available in group theory. Because of the loss of associativity, presentations are very complicated and hard to calculate and in the common sense, permutation representations are impossible.

Let Q be a loop with neutral element 1. We define $\forall x, y \in Q$, *commutator* of x and y by $[x, y]$, where $xy = (yx) \cdot [x, y]$ and *associator* of x, y and z

by $[x, y, z]$, where $(xy)z = x(yz) \cdot [x, y, z]$. *Commutant* of a subset S of Q is defined by $\{x \in Q \mid xs = sx, \forall s \in S\}$. In particular, commutant (or *Moufang center* or *centrum*) of Q is defined by $\{x \in Q \mid xy = yx, \forall y \in Q\}$ and is denoted by $C(Q)$. *Center* of Q is defined by $\{x \in Q \mid [x, y] = [x, y, z] = [y, x, z] = 1\}$ and is denoted by $Z(Q)$. *Nucleus* of Q is denoted by $N(Q)$ and is the subset $\{x \in Q \mid x(yz) = (xy)z,\ y(xz) = (yx)z,\ y(zx) = (yz)x,\ \forall y, z \in Q\}$. A non-empty subset P of Q is called a *subloop* of Q if P is itself a loop under the binary operation of Q; in particular if this operation is associative on P, then it is called a *subgroup* of Q. A subloop $N \leq Q$ is called *normal* in Q if $xN = Nx;\ x(yN) = (xy)N;\ N(xy) = (Nx)y$ for every $x, y \in Q$. A loop L is power-associative loop, if for any $x \in L$, the subloop generated by x is a group.

Now, $Z(Q) = C(Q) \cap N(Q)$, and $N(Q)$ and $Z(Q)$ are subgroups of Q but in general $C(Q)$ is not even a subloop. Of course, if Q is Moufang then $C(Q)$ is a subloop of that (in fact, all of them, i.e. $N(Q)$, $Z(Q)$, and $C(Q)$, are normal in Q and the normality of $C(Q)$ is a recent highly non-trivial result by Gagola [12]). Also, we have *centralizer* of an element (as a commutant of a singleton $C_Q(x) = C(\{x\})$, although generally it is not a subloop of Q. But in special cases, such as if $x \in N(Q)$, it is a subloop. So, in general the notion of centralizer is not so suitable and good tool in computations in loop theory as in group theory. Generally, $|C_Q(x)| \nmid |Q|$ and we have not the concept of *conjugacy class* and a theorem like $|G : C_G(x)| = |Cl(x)|$ in loop theory and even in Moufang loops. Although, as we will see in the next sections, in some special cases this consideration is an advantage (for example, if we want to show that an assumed finite Moufang loop is not associative i.e., it cannot be a group).

Generally, there is an intimate relation between the groups and graphs, and in many occasions properties of graphs give rise to some properties of groups and vice versa. One of these graphs that has attracted the attention of many authors is the *non-commuting graph* Γ_G associated with a finite group G. It has been defined in [21] as follows. The vertex set of Γ_G is $G \backslash Z(G)$ with two vertices x and y joined by an edge whenever the commutator of x and y is not the identity. The non-commuting graph of a non-abelian finite group has received some attention in existing literature. Recently, many authors have studied the non-commuting graph associated to a non-abelian group. They have shown that some classes of groups can be characterized (or at least order characterized) with non-commuting graphs (for more details, see [1, 10, 20]). Specially, Woldar has proved that all finite non-abelian simple groups can be characterized with their non-commuting graphs [30].

In [2], we have introduced a similar concept for loops, specially for

Moufang loops. So, we have defined the vertex set of this graph as $V(\Gamma_Q) = Q \setminus C(G)$ with two vertices x and y joined by an edge whenever the commutator of x and y is not an identity. Note that as in groups, a finite loop Q is commutative if and only if $V(\Gamma_Q) = \emptyset$ and so Γ_Q is the null graph. We have proved in [2] that these graphs are connected with diameter at most 6 and girth 3.

In this paper, we are going to associate a new graph to a finite non-associative Moufang loop, call it non-associating graph of this loop, and try to derive its important and interesting graph properties. Then we a going to determine its relationship with its non-commuting graph. We define this graph as follows. Let M be a non-associative Moufang loop with nucleus $N(M)$. The non-associating graph associated to M is a graph with vertex set $M \setminus N(M)$ where distinct non-nuclear elements x and y of M are joined by an edge iff for some $z \notin M$ we have $[x, y, z] \neq 1$. Of course, $N(G) = G$ for a finite group G and so the set of vertices of the non-associating graph of G is an empty set and it is a null graph.

Our notation for graphs is standard and one can consult [3] for the graph concepts that we use here. But for convenience let us introduce some necessary notation and definitions. For a graph Γ we denote the sets of vertices and edges of Γ by $V(\Gamma)$ and $E(\Gamma)$, respectively, or simply denote it by $\Gamma = (V, E)$. The *degree* $\deg(g)$ of a vertex g in a graph Γ is the number of edges incident to g. The *neighbors* of a vertex g, denoted by $N(g)$, is the set of vertices adjacent to g. Two graphs Γ_1 and Γ_2 are said to be *isomorphic* if there exists a bijective map $\varphi : V(\Gamma_1) \longrightarrow V(\Gamma_2)$ such that x and y are adjacent in Γ_1 iff $\varphi(x)$ and $\varphi(y)$ are adjacent in Γ_2. If two graphs Γ_1 and Γ_2 are isomorphic, we denote this by $\varphi : \Gamma_1 \cong \Gamma_2$ or simply $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$. It is easy to see that if $\varphi : \Gamma_1 \cong \Gamma_2$ then $|V(\Gamma_1)| = |V(\Gamma_2)|$ and $|E(\Gamma_1)| = |E(\Gamma_2)|$. A graph Γ is called *k-regular* if its vertices are of the same degree k. We consider simple graphs i.e. undirected graphs with no loops or multiple edges. A *path* P is a sequence $v_0e_1v_1e_2 \cdots e_kv_k$ whose terms are alternately distinct vertices and distinct edges, such that for any i, $1 \leq i \leq k$ the ends of e_i are v_{i-1} and v_i. In this case P is called a path between v_0 and v_k . The number k is called the *length* of P. If v_0 and v_k are adjacent in Γ by an edge e_{k+1} then $P \cup e_{k+1}$ is called a *cycle*. The length of a cycle defines the number of its edges. The length of the shortest cycle in a graph Γ is called *girth* of Γ and is denoted by $\mathrm{girth}(\Gamma)$. A *Hamilton cycle* of Γ is a cycle that contains every vertex of Γ. A graph is called *hamiltonian* if it has a Hamilton cycle. If v and w are vertices in Γ then $d(v, w)$ denotes the length of the shortest path between v and w. The largest distance between all pairs of the vertices of Γ is called the *diameter* of Γ and is denoted by $\mathrm{diam}(\Gamma)$. A graph Γ is *connected* if there is a path between each pair of the vertices of Γ. A *planar* graph is a graph that can be embedded in the plane so that no two edges intersect geometrically except at a vertex both of edge are incident to. A graph $\Gamma = (V, E)$, is called *k-partite*, $k > 1$, if it is possible to partition V into k subsets $V_1, V_2, \ldots, V_k$ such that every edge of E connects a vertex of V_i to a vertex of V_j where $i \neq j$.

2 On the Classification of Moufang loops

To use in the next section, we summerize the spectrum of Moufang loops here. So, the first natural question is:

*For which orders **n** is there a non-associative Moufang loop?*

The following Theorem has been proved by Chein and Rajah in [9] and leads to an important corollary.

Theorem 1 ([9], Theorem 2.2). *Every Moufang loop L of order $2m$ where m odd, such that this Moufang loop contains a normal abelian subgroup M of order m is a group.*

Corollary 2 ([9], Corollary 3.1). *If a Moufang loop L contains a normal abelian subgroup M of odd order m, such that L/M is cyclic and if $u^2 \in Z(\langle u^2, M\rangle)$, for some generator uM of L/M, then L is a group.*

We should now propose the following question: *For which even value n, every Moufang loop of order n must be a group?* The answer is as follows.

Corollary 3 ([9], Corollary 2.3). *Every Moufang loop of order $2m$ is associative iff every group of order m is abelian.*

So, by the corollary above, there is a non-associative Moufang loop of order $2m$ iff there is a non-abelian group of order m. Therefore, there is a non-associative Moufang loop of order 2^k iff $k > 3$ and for every odd $m > 1$ there is a non-associative Moufang loop of order $4m$. In the case of $2m$, where m is odd, we have the following result (which follows from a result in group theory (see Lemma 1.8 in [9]): "*If $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, where $p_1 < \cdots < p_k$ are odd primes then every group of order m is abelian iff $\alpha_i \leq 2$, $(i = 1, \ldots, k)$, and $p_j^{\alpha_j} \not\equiv 1$ $(mod\ p_i)$, for any i and j.*"):

Theorem 4 ([9], Corollary 2.4). *Let $m > 1$ be an odd integer. Then every Moufang loop of order $2m$ is associative iff $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, where $p_1 < \cdots < p_k$ are odd primes and*

(i) $\alpha_i \leq 2$, *for all* $i = 1, \dots, k$,

(ii) $p_j \not\equiv 1 \ (mod\, p_i)$, *for any* i *and* j,

(iii) $p_j^2 \not\equiv 1 \ (mod\, p_i)$, *for any* i *and* j *with* $\alpha_j = 2$.

□

Also, for a Moufang loops of odd order, we have:

Theorem 5 ([18], Theorems 1 and 2)**.** *Every Moufang loop of order* $p^\alpha q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ *is associative if* $p < q_1 < \cdots < q_k$ *are odd primes, and if one of the following conditions holds:*

(i) $\alpha \leq 3$ *and* $\alpha_i \leq 2$, *for all* $i = 1, \dots, k$,

(ii) $p \geq 5$, $\alpha \leq 4$, *and* $\alpha_i \leq 2$, *for all* $i = 1, \dots, k$.

□

Theorem 6 ([9], Theorem 2.1)**.** *Let* L *is a Moufang loop of order* $p_1 p_2 \cdots p_k q^3$, *with* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *and* q *distinct odd primes. If* $q \not\equiv 1 \ (mod\, p_1)$ *and* $q_2 \not\equiv 1 \ (mod\, p_i)$ *for each* $i > 1$, , *then* L *is a group.*

So, by the theorem above, for any prime p, none of Moufang loops of order p, p^2, p^3 are non-associative; none of Moufang loops of order p^4 are non-associative unless $p = 2, 3$. Moufang loops of order pq, where p and q are distinct primes, are associative. So are Moufang loops of orders pqr, and p^2q, (p, q and r distinct odd primes). By a theorem in [27], a non-associative Moufang loop of order pq^3, where $p < q$ are oddprimes, exists iff $q \equiv 1 \ (mod\, p)$. In [15] and [23], Goodaire, May, Raman, Nagy and Vojtěchovský classified all non-associative Moufang loops of order $3^4 = 81$ and 64. They proved that there are 4262 pairwise nonisomorphic non-associative Moufang loops of order 64, and there are 5 pairwise nonisomorphic non-associative Moufang loops of order 81, 2 of which are commutative. All 5 of these loops are isotopes of 2 commutative ones. In [22], Nagy and Valsecchi have shown that there are precisely 4 non-associative Moufang loops of order p^5 for every prime $p \geq 5$. Finally, Slattery and Zenisek classified all non-associative Moufang loops of order 243 in [28]. Therefore, the classification of non-associative Moufang loops of order p^4 and p^5 is now complete. Of course, much more is known but in general the problem is open.

Table 1 gives the number of pairwise nonisomorphic non-associative Moufang loops of order n for every $1 \leq n \leq 64$ and $n = 81, 243$ for which at least one non-associative Moufang loop exists.

Table 1. The number $M(n)$ of non-associative Moufang loops of order n less than or equal to 64 and $n = 81, 243$.

n	12	16	20	24	28	32	36	40	42
$M(n)$	1	5	1	5	1	71	4	5	1
n	44	48	52	54	56	60	64	81	243
$M(n)$	1	51	1	2	4	5	4262	5	72

Table 2 shows the commutant, nucleus, center, centralizer, and nucleizer sizes of all non-associative Moufang loops of order n up to 64 and order $n = 81$. They have been calculated by GAP codes, [14].

Table 2. Commutant, nucleus, center, centralizer, and nucleizer sizes of all non-associative Moufang loops of order $n < 64$ and $n = 81$.

$M = M(m, n)$	$\|C(M)\|$	$\|N(M)\|$	$\|Z(M)\|$	$\|C_M(x)\|$	$\|N_M(x)\|$
$M(12, 1)$	1	1	1	$12, 8, 3$	$12, 3, 2$
$M(16, 1)$	2	2	2	$16, 12, 4$	$16, 4$
$M(16, 2)$	2	2	2	$16, 4$	$16, 4$
$M(16, 3)$	2	2	2	$16, 4$	$16, 4$
$M(16, 4)$	2	2	2	$16, 12, 4$	$16, 4$
$M(16, 5)$	2	2	2	$16, 12, 4$	$16, 4$
$M(20, 1)$	1	1	1	$20, 12, 5$	$20, 5, 2$
$M(24, 1)$	2	2	2	$24, 16, 6$	$24, 6, 4$
$M(24, 2)$	1	1	1	$24, 16, 8, 3$	$24, 4, 3, 2$
$M(24, 3)$	2	2	2	$24, 6, 4$	$24, 6, 4$
$M(24, 4)$	2	2	2	$24, 16, 6$	$24, 6, 4$
$M(24, 5)$	2	2	2	$24, 6, 4$	$24, 6, 4$
$M(28, 1)$	1	1	1	$28, 16, 7$	$28, 7, 2$
$M(32, n),\ n = 1, 10, 11, 19, 23, 24, 39-41, 60, 70$	4	4	4	$32, 24, 8$	$32, 8$
$M(32, n),\ n = 2, 5, 16, 21, 35, 49, 50, 52-54, 56, 58, 62, 65-67, 71$	4	4	4	$32, 8$	$32, 8$
$M(32, n),\ n = 3, 14, 15, 18, 20$	2	4	2	$32, 24, 16, 8$	$32, 8, 4$
$M(32, n),\ n = 4, 42-48, 51, 55, 57, 59, 61, 63, 64, 68, 69$	4	4	4	$32, 24, 16, 8$	$32, 8, 4$
$M(32, n),\ n = 6, 25, 26, 29, 30, 36$	2	4	2	$32, 24, 16, 8$	$32, 24, 16, 8$
$M(32, n),\ n = 7, 27, 37$	2	2	2	$32, 20, 8$	$32, 20, 8$
$M(32, n),\ n = 8, 31-34$	2	2	2	$32, 20, 12, 8, 4$	$32, 20, 12, 8, 4$
$M(32, n),\ n = 9, 28, 38$	2	2	2	$32, 8, 4$	$32, 8, 4$
$M(32, n),\ n = 12, 13, 17, 22$	2	4	2	$32, 8, 4$	$32, 8, 4$
$M(36, 1)$	1	1	1	$36, 24, 18, 9, 6$	$36, 9, 6$
$M(36, 2)$	1	1	1	$36, 20, 9$	$36, 9, 2$
$M(36, 3)$	1	1	1	$36, 20, 9$	$36, 9, 2$
$M(36, 4)$	3	3	3	$36, 24, 9$	$36, 9, 6$
$M(40, 1)$	2	2	2	$40, 24, 10$	$40, 10, 4$
$M(40, 2)$	2	2	2	$40, 10, 4$	$40, 10, 4$
$M(40, 3)$	1	1	1	$40, 24, 12, 5, 4$	$40, 5, 4, 2$
$M(40, 4)$	2	2	2	$40, 24, 10$	$40, 10, 4$
$M(40, 5)$	2	2	2	$40, 10, 4$	$40, 10, 4$
$M(42, 1)$	1	1	1	$42, 7, 3, 2$	$42, 7, 3, 2$
$M(44, 1)$	1	1	1	$44, 24, 11$	$44, 11, 2$
$M(48, n),\ n = 1, 17, 19, 37, 42$	4	4	4	$48, 32, 12$	$48, 12, 8$
$M(48, n),\ n = 2, 51$	2	2	2	$48, 32, 16, 6$	$48, 8, 6, 4$
$M(48, n),\ n = 3, 6, 27, 28, 43$	2	4	2	$48, 32, 24, 16, 12, 8$	$48, 12, 8$
$M(48, n),\ n = 4, 21, 22, 33$	2	6	2	$48, 32, 24, 12$	$48, 12$
$M(48, n),\ n = 5, 32, 34$	2	6	2	$48, 24, 12, 4$	$48, 12$
$M(48, n),\ n = 7, 35, 46$	2	2	2	$48, 28, 12$	$48, 12, 4$
$M(48, n),\ n = 8, 36, 45$	2	2	2	$48, 12, 4$	$48, 12, 4$
$M(48, 9)$	1	1	1	$48, 32, 28, 20, 4, 3$	$48, 8, 4, 3, 2$
$M(48, n),\ n = 10, 50$	2	2	2	$48, 6, 4$	$48, 6, 4$
$M(48, n),\ n = 11, 25, 26$	2	4	2	$48, 24, 12, 8, 4$	$48, 12, 8$
$M(48, n),\ n = 12, 23, 24, 41, 44$	2	2	2	$48, 36, 28, 20, 12, 4$	$48, 12, 4$
$M(48, n),\ n = 13, 14, 31$	6	6	6	$48, 36, 12$	$48, 12$
$M(48, n),\ n = 15, 16, 48, 49$	2	6	2	$48, 36, 24, 12, 4$	$48, 12$
$M(48, n),\ n = 18, 20, 38-40, 47$	4	4	4	$48, 12, 8$	$48, 12, 8$
$M(48, n),\ n = 29, 30$	6	6	6	$48, 12$	$48, 12$
$M(52, 1)$	1	1	1	$52, 28, 13$	$52, 13, 2$

$M = M(m,n)$	$\lvert C(M)\rvert$	$\lvert N(M)\rvert$	$\lvert Z(M)\rvert$	$\lvert C_M(x)\rvert$	$\lvert N_M(x)\rvert$
$M(54,1)$	1	1	1	$54, 27, 9, 2$	$54, 9, 6$
$M(54,2)$	1	3	1	$54, 27, 9, 2$	$54, 9, 6$
$M(56,1)$	2	2	2	$56, 32, 14$	$56, 14, 4$
$M(56,2)$	2	2	2	$56, 14, 4$	$56, 14, 4$
$M(56,3)$	2	2	2	$56, 32, 14$	$56, 14, 4$
$M(56,4)$	2	2	2	$56, 14, 4$	$56, 14, 4$
$M(60,1)$	1	3	1	$60, 36, 15, 12, 6$	$60, 15, 6$
$M(60,2)$	1	5	1	$60, 40, 30, 20, 15, 10, 8$	$60, 15, 10$
$M(60,3)$	1	1	1	$60, 32, 15$	$60, 15, 2$
$M(60,4)$	3	3	3	$60, 36, 15$	$60, 15, 6$
$M(60,5)$	5	5	5	$60, 40, 15$	$60, 15, 10$
$M(81,1)$	81	3	3	81	$81, 9$
$M(81,2)$	81	3	3	81	$81, 9$
$M(81,3)$	9	3	3	$81, 27$	$81, 9$
$M(81,4)$	9	3	3	$81, 27$	$81, 9$
$M(81,5)$	9	3	3	$81, 27$	$81, 9$

3 Preliminary Results

There is a class of non-associative Moufang loops, first defined by Chein [7], that is well understood. Let G be a group of order n, and let u be a new element. Define a multiplication $\circ$ on $G \cup Gu$ by $g \circ h = gh$, $g \circ hu = (hg)u$, $gu \circ h = (gh^{-1})u$, $gu \circ hu = h^{-1}g$, where $g, h \in G$. The resulting loop $(G \cup Gu, \circ) = M(G, 2)$ is a Moufang loop. It is non-associative iff G is non-abelian.

Let $\pi(m)$ be the number of isomorphism types of non-associative Moufang loops of order at most m and $\sigma(m)$ the number of non-associative loops of the form $M(G, 2)$ of order at most m. Then according to Chein's classification [8] $\pi(31) = 13$, $\sigma(31) = 8$, $\pi(63) = 158$, $\sigma(63) = 50$. This displays clearly the plenty of loops of type $M(G, 2)$ among Moufang loops of small order and mainly by this fact they play a distinguished role in a classification of Moufang loops. It has been proved that $M(G, 2)$ is isomorphic to $M(H, 2)$ iff G is isomorphic to H (see, for example, [31]). Thus, we obtain as many non-associative Moufang loops of order $2n$ as there are non-abelian groups of order n.

Let us prove some useful facts about Chein loops.

Lemma 7. *In every Moufang loop $M = M(G, 2)$, we have $\forall g, h \in G$:*

(i) $gu \circ h = h \circ gu$ *iff* $h^2 = 1$;

(ii) $gu \circ hu = hu \circ gu$ *iff* $(g^{-1}h)^2 = 1$.

Also, if $gh = hg$ *then* $gu \circ hu = hu \circ gu$ *iff* $g^2 = h^2$.

Proof. The proof is clear by the definition of $M(G, 2)$. □

Lemma 8. *Let $M = M(G, 2)$ be a finite Chein loop. Then the following assertions hold.*

(i) *If* $h \in G$ *and* $h^2 \neq 1$ *then* $C_M(h) = C_G(h)$ *(in this case* $C_M(h)$ *is a subgroup of* M*);*

(ii) *If* $h \in G$ *and* $h^2 = 1$ *then* $C_M(h) = C_G(h) \cup Gu$*;*

(iii) *Let* $I = \{t \in G \mid t^2 = 1\}$*. Then for every* $g \in G$*,* $C_M(gu) = I \cup (gI)u$*.*

Proof. (i) Let $h \in G$ and $h^2 \neq 1$. Then by Lemma 7(i) we have $h \circ gu \neq gu \circ h$, $\forall g \in G$, and so $C_M(h) = C_G(h)$.
(ii) Let $h \in G$ and $h^2 = 1$. Then by Lemma 7(i), we get $h \circ gu = gu \circ h$, $\forall g \in G$, and so $C_M(h) = C_G(h) \cup Gu$.

(iii) Let g be any element in G and $I = \{t \in G \mid t^2 = 1\}$. Then by Lemma 7(ii) we have:

$$\begin{aligned} C_M(gu) &= \{t \in G \mid t^2 = 1\} \cup \{xu \in Gu \mid gu \circ xu = xu \circ gu\} \\ &= I \cup \{xu \in Gu \mid (x^{-1}g)^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Now, one can easily verify that, $\{xu \in Gu \mid (x^{-1}g)^2 = 1\} = (gI)u$ and so $C_M(gu) = I \cup (gI)u$. □

It follows immediately that:

Corollary 9. *Let* $M = M(G, 2)$ *be a finite Chein loop. Then the followin assertions hold.*

(i) If $h \in G$ *and* $h^2 \neq 1$ *then* $|C_M(h)| = |C_G(h)|$*;*

(ii) If $h \in G$ *and* $h^2 = 1$ *then* $|C_M(h)| = |C_G(h)| + |G|$*;*

(iii) If $g \in G$ *then* $|C_M(gu)| = 2t + 2$*, where* t *is equal to the number of involutions in* G*.*

The following lemma is a part of Lemma 9.1 in [11].

Lemma 10. *Let* G *be a non-abelian group and* $M = M(G, 2)$*. Then the following assertions hold.*

(i) $N(M) = Z(G)$*;*

(ii) $C(M) \subseteq G$*. Precisely,* $C(M) = Z(M) = \{x \in Z(G) \mid x^2 = 1\}$*.*

Proof. (i) Since G is a non-abelian group, there exist elements $y, z \in G$ such that $y^{-1}z^{-1} \neq z^{-1}y^{-1}$ and so for any x in G, $x \cdot yz^{-1} \neq x \cdot z^{-1}y^{-1}$ or $x \cdot yz^{-1} \neq x \cdot z^{-1}y^{-1}$. Hence, $(x \cdot yz^{-1})u \neq (x \cdot z^{-1}y^{-1})u$ which is equivalent to $xu \circ (y \circ z) \neq (xu \circ y) \circ z$. This means that $Gu \cap N(M) = \emptyset$. On the other hand, one can easily show that $x \in G$ is in $N(M)$ iff $x \in Z(G)$.

(ii) Since G is non-abelian there is $h \in G$ such that $h^2 \neq 1$ and so by Lemma 7(i) $Gu \cap C(M) = \emptyset$ and so, $C(M) \subseteq G$. By Lemma 8(i), $C(M) = \{x \in Z(G) \mid x^2 = 1\}$. So, by part (i) $C(M) \subseteq \{x \in Z(G) \mid x^2 = 1\} \subseteq Z(G) = N(M)$. Now, $Z(M) = N(M) \cap C(M) = C(M)$. $\square$

Lemma 11. *Let G be a non-abelian group and $M = M(G, 2)$. Then for any $g, h, k \in G$ the following assertions hold:*

(i) $[g, h, ku] = 1 \Longleftrightarrow [g, h] = 1$;

(ii) $[g, hu, ku] = 1 \Longleftrightarrow [g, k^{-1}h] = 1$;

(iii) $[gu, hu, ku] = 1 \Longleftrightarrow gh^{-1}k = kh^{-1}g$.

Proof. Let g, h and k be arbitrary elements in G. Then by definition of $M = M(G, 2)$ we have:

(i)

$$\begin{aligned} [g, h, ku] = 1 &\Longleftrightarrow g \circ (h \circ ku) = (g \circ h) \circ ku \\ &\Longleftrightarrow g \circ ((kh)u) = (gh) \circ ku \\ &\Longleftrightarrow (kh)g = k(gh) \\ &\Longleftrightarrow hg = gh \\ &\Longleftrightarrow [g, h] = 1. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} [g, hu, ku] = 1 &\Longleftrightarrow g \circ (hu \circ ku) = (g \circ hu) \circ ku \\ &\Longleftrightarrow g \circ (k^{-1}h) = (hg)u \circ ku \\ &\Longleftrightarrow g(k^{-1}h) = k^{-1}(hg) \\ &\Longleftrightarrow [g, k^{-1}h] = 1. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} [gu, hu, ku] = 1 &\Longleftrightarrow gu \circ (hu \circ ku) = (gu \circ hu) \circ ku \\ &\Longleftrightarrow gu \circ (k^{-1}h) = (h^{-1}g) \circ ku \\ &\Longleftrightarrow (g(k^{-1}h)^{-1})u = (k(h^{-1}g))u \\ &\Longleftrightarrow gh^{-1}k = kh^{-1}g. \end{aligned}$$

$\square$

Now, we define a new concept in Moufang loops and try to obtain some elementary properties of it.

Definition 12. Let M be a Moufang loop and $x \in M$. Define the nucleizer of x in M as follows:

$$N_M(x) = \{y \in M \mid [x, y, z] = 1, \forall z \in M\}.$$

So, somehow, nucleizers of elements in loop theory can play a role similar to one of centralizers of elements in group theory.

Lemma 13. *Let M be a Moufang loop. Then the following assertions hold:*

(i) $N_M(x) = M,\ \forall x \in M$ *iff* M *is associative;*

(ii) $N(M) = \bigcap_{x\in M} N_M(x)$*;*

(ii) $1 \in N_M(x)$ *and* $y^{-1}, x^n y, yx^n \in N_M(x)$ *for any* $y \in N_M(x)$*, here* n *is any integer.*

Proof. (i) and (ii) are trivial.
[(iii)] It is clear that $1 \in N_M(x),\ \forall x \in M$. By Lemma 5.5 in [4] in any Moufang loop the following identities are equivalent:

$$[[a,b,c],a] = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad [a,b,c] = [a,ab,c].$$

Therefore, if $y \in N_M(x)$ then $[x,y,z] = 1,\ \forall z \in M$ by definition and so $[[x,y,z],x] = 1$ and this is equivalent to $[x,y,z] = [x,xy,z]$ by above. Thus, $[x,xy,z] = 1,\ \forall z \in M$ and so by definition of nucleizer, $xy \in N_M(x)$. Now, it follows by induction on n and diassociativity of Moufang loops that $[x,x^n y,z] = 1,\ \forall z \in M$ and so $x^n y \in N_M(x),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Also, by elementary properties of Moufang loops (see, for example, Lemma 4.1 in [4]), the equation $[a,b,c] = 1$ implies each of the equations obtained by permuting a,b,c or replacing any of these elements by their inverses. So, $[x,y,z] = 1,\ \forall z \in M$ implies $[x^{-1},y,z] = 1,\ \forall z \in M$ which itself implies that $[x^{-1},x^{-n}y,z] = 1 = [x,x^{-n}y,z],\ \forall z \in M$ for every natural number n. Thus, $x^m y \in N_M(x),\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

On the other hand, by Lemma 5.4 in [4] in any Moufang loop we have $[a,b,c] = [a,bc,c]$. So, if $y \in N_M(x)$, $[z,y,x] = 1 = [z,yx,x],\ \forall z \in M$. Hence, $yx \in N_M(x)$. The rest of the proof is similar and we can deduce $yx^m \in N_M(x)$ for any integer m.

Finally, since $y \in N_M(x)$, $[x,y,z] = 1,\ \forall z \in M$ implies $[x,y^{-1},z] = 1,\ \forall z \in M$ by above, we have $y^{-1} \in N_M(x)$. This competes the proof. □

One may compare the above properties with those of centralizers in group theory (recall that for a group: G, $C_G(x) = G$ iff G is commutative; $Z(G) = \bigcap_{x\in G} C_G(x)$; and for any $x \in G$, $C_G(x)$ is a subgroup of G). But, in general, nucleizers of elements in a Moufang loop have not a strong structure like centralizers of elements in a group. For example, we have $|G : C_G(x)| = cl(x) = x^G$ for any element $x \in G$ but we can not prove an analogous result about nucleizers in general. However, in the class of Chein loops the situation is completely different and we show that the nucleizer of an element is a subgroup of the loop.

Proposition 14. *Let $M = M(G, 2)$ be a Chein loop. Then for any $x \in M$ the nucleizer of x in M is equal to:*

$$N_M(x) = \begin{cases} M, & x \in N(M) = Z(G); \\ C_G(x), & x \in G \setminus Z(G); \\ N(M) \cup N(M)x, & x \in M \setminus G. \end{cases}$$

Proof. We can write $N_M(x)$ as:

$$\{y \in G \mid [x, y, z] = 1,\ \forall z \in M\} \cup \{yu \mid y \in G,\ [x, yu, z] = 1,\ \forall z \in M\}.$$

First, let $x \in G$. Then If $y \in G$ and $[x, y, z] = 1,\ \forall z \in M$ then

$$[x, y, t] = 1, \quad [x, y, tu] = 1,\ \ \forall t \in G,$$

and so by Lemma 11 (i), we have $[x, y] = 1$ or $y \in C_G(x)$. But if $[x, yu, z] = 1,\ \forall z \in M$ $(y \in G)$ then by Lemma 11 (i) again we have $[x, z] = 1,\ \forall z \in G$. Thus $x \in Z(G)$. Hence, by Lemma 10(i), $x \in N(M)$. That is, $N_M(x) = M$. Also, if $x \notin Z(G) = N(M)$, then $N_M(x) = C_G(x)$, since $\{yu \mid y \in G,\ [x, yu, z] = 1,\ \forall z \in M\} = \emptyset$.

Now, let $x = tu \in M \setminus G = Gu$, where $t \in G$. Let $y \in G$. Then, if $[x, y, z] = [tu, y, z] = 1,\ \forall z \in M$ we also have $[x, y, z] = [tu, y, z] = 1,\ \forall z \in G$. So, by Lemma 11(i), $[y, z] = 1,\ \forall z \in G$. Thus $y \in Z(G) = N(M)$. Also, if $[tu, yu, z] = 1,\ \forall z \in M$ then $[tu, yu, z] = 1,\ \forall z \in G$ and so by Lemma 11(ii) we obtain $[z, t^{-1}y] = 1,\ \forall z \in G$ and therefore, $t^{-1}y \in Z(G) = N(M)$, i.e. $y \in N(M)t$. This means that $yu \in N(M)tu$. Finally, if $[tu, yu, zu] = 1,\ \forall z \in G$, then $[tu, yu, z] = 1,\ \forall z \in G$, by Lemma 11 (iii) we have $ty^{-1}z = zy^{-1}t,\ \forall z \in G$. Since, by above, $t^{-1}y, y^{-1}t \in Z(G)$ we get $ty^{-1}z = y^{-1}tz$ and so $ty^{-1} = y^{-1}t$, which means $y \in C_G(t)$. That is, $yu \in C_G(t)u$. Now, $N(M)tu \subseteq C_G(t)u$. Therefore, $yu \in N(M)tu \cap C_G(t)u = N(M)tu$. □

Corollary 15. *Let $M = M(G, 2)$ be a Chein loop. Then for any $x \in M$, the nucleizer of x in M, $N_M(x)$, is a subgroup of M.*

Proof. This is clear by the structure of $N_M(x)$ in Proposition 14 (in the case $N(M) \cup N(M)x$, where $x \in M \setminus G$, by definition of nucleus, $\forall a, b \in N_M(x)$, $ab \in N_M(x)$ and also $N_M(x)$ is associative). □

Now, we can deduce easily the well-known result about Chein loops again:

Corollary 16. *Let $M = M(G, 2)$ be a Chein loop. Then M is associative iff G is abelian.*

4 Some properties of the non-associating graph in finite Moufang loops

To derive the results of this section, the GRAPE package for GAP [29] has helped us well. In section 1, we defined the non-associating graph of a finite Moufang loop as follows. Let M be a non-associative Moufang loop with the nucleus $N(M)$. The non-associating graph Γ_M associated to M is the graph with vertex set $M \setminus N(M)$ where distinct non-nuclear elements x and y of M are joined by an edge iff $[x, y, z] \neq 1$ for some $z \notin M$. So, by the definition of nucleizer the degree of each vertex x of Γ_M is equal to $M \setminus N_M(x)$ and we have the following preliminary properties of this graph:

Proposition 17. *Let M be a finite Moufang loop, Γ_M its associated non-associating graph, and $\rho(M)$ the sum of degrees of vertices for this graph. Then the following assertions hold.*

(i) $\rho(M) = \sum_{x\in V(\Gamma_M)} \deg(x) = \sum_{x\in M} |M \setminus N_M(x)| = |M|^2 - \sum_{x\in M} |N_M(x)|$;

(ii) *if $M = M(G, 2)$ then $\rho(M) = |G|(4|G| - k(G) - 3|Z(G)|)$, where $k(G)$ is the class number (number of conjugacy classes) of G.*

Proof. (i) It is obvious because of the definition of non-associating graph.
(ii) By Lemma 10, Proposition 14, and Corollary 16, we can write:

$$\begin{aligned}
\rho(M) &= \textstyle\sum_{x\in V(\Gamma_M)} deg(x)\\
&= \textstyle\sum_{x\in M} |M \setminus N_M(x)|\\
&= |M|^2 - \textstyle\sum_{x\in M} |N_M(x)|\\
&= |M|^2 - \textstyle\sum_{x\in G\setminus Z(G)} |N_M(x)|\\
&- \textstyle\sum_{x\in Z(G)} |N_M(x)| - \sum_{x\in M\setminus G} |N_M(x)|\\
&= |M|^2 - \textstyle\sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_G(x)|\\
&- \textstyle\sum_{x\in Z(G)} |M| - \sum_{x\in M\setminus G} |N(M) \cup N(M)x|\\
&= |M|^2 - \textstyle\sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_G(x)|\\
&- \textstyle\sum_{x\in Z(G)} 2|G| - \sum_{x\in M\setminus G} 2|Z(G)|\\
&= |M|^2 - (\textstyle\sum_{x\in G\setminus Z(G)} |C_G(x)| + \sum_{x\in Z(G)} |G|)\\
&- \textstyle\sum_{x\in Z(G)} |G| - \sum_{x\in M\setminus G} 2|Z(G)|\\
&= |M|^2 - \textstyle\sum_{x\in G} |C_G(x)| - |Z(G)||G| - 2|Z(G)||G|\\
&= |M|^2 - |k(G)||G| - 3|Z(G)||G|.
\end{aligned}$$

So, we have $\rho(M) = |G|(4|G| - k(G) - 3|Z(G)|)$. $\square$

In [1], it has been shown that the non-commuting graph of every group is always connected, with diameter 2 and girth 3. Also in [2], the author of this paper has shown that the non-commuting graph of every non-associative Moufang loop is always connected with diameter at most 6 and girth 3. Further, we show that the non-associating graph of every Chein loop is always connected. To prove this we need the following tools.

Lemma 18. *Let G be a non-abelian group and $M = M(G, 2)$. Let Γ_G be the non-commuting graph of G and Γ_M the non-associating graph of M. Then Γ_G is an induced subgraph of Γ_M.*

Proof. By Lemma 10, $N(M) = Z(G)$, and by Lemma 11, we have

$$[g, h, ku] = 1 \Longleftrightarrow [g, h] = 1.$$

for all $g, h, k \in G$.

So,

$$[g, h] \neq 1 \Longleftrightarrow \exists k \in G; [g, h, ku] \neq 1.$$

Hence, $\{g, h\}$ is an edge of Γ_G iff $\{g, h\}$ is an edge of Γ_M. $\square$

Lemma 19. *Let G be a non-abelian group and $M = M(G, 2)$. Let Γ_M be the non-associating graph of M. Then $\{x, g\}$ is an edge of Γ_M for every x in Gu and every g in $G \setminus N(M)$. Also, for every $x, y \in Gu$, the pair $\{x, y\}$ is an edge of Γ_M iff $y \notin N(M)x$.*

Proof. Let $x \in Gu$ and $g \in G \setminus N(M)$. Then $x = tu$, where $t \in G$. In contrary, let x be not connected to g in Γ_M. Then

$$\begin{array}{lll}
 & x \circ (g \circ z) = (x \circ g) \circ z, & \forall z \in M, \\
\Longrightarrow & x \circ (g \circ z) = (x \circ g) \circ z, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & (tu) \circ (g \circ z) = ((tu) \circ g) \circ z, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & (t(gz)^{-1})u = (tg^{-1})u \circ z, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & (tz^{-1}g^{-1})u = (tg^{-1}z^{-1})u, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & tz^{-1}g^{-1} = tg^{-1}z^{-1}, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & z^{-1}g^{-1} = g^{-1}z^{-1}, & \forall z \in G, \\
\Longrightarrow & g \in Z(G). &
\end{array}$$

(or by Lemma 11 (i), $[tu, g, z] = 1$ iff $[g, z] = 1, \ \forall z \in G$ iff $g \in Z(G)$). But $N(M) = Z(G)$ and we get a contradiction to the hypothesis $g \in G \setminus Z(G)$. Therefore, $\{x, g\}$ is an edge of Γ_M.

Now, let $y \in N(M)x$. Since

$$\begin{array}{rcl}
N(M)x & = & \{g \circ x \mid g \in N(M) = Z(G)\} \\
 & = & \{g \circ tu \mid g \in Z(G)\} \\
 & = & \{(tg)u \mid g \in Z(G)\},
\end{array}$$

we have by Lemma 11 (ii) $[x, y, z] = [tu, (tg)u, z] = 1$ iff $1 = [z, (tg)^{-1}t] = [z, g^{-1}]$ for all $z \in G$. This holds since $g \in Z(G)$. Also, by Lemma 11 (iii) for all $zu \in Gu$ we have $[x, y, zu] = [tu, (tg)u, zu] = 1$ iff $t(tg)^{-1}z = z(tg)^{-1}t$ iff $tg^{-1}t^{-1}z = zg^{-1}$, which holds again since $g \in Z(G)$. Therefore, by the definition of the non-associating graph, x is not connected to elements of $N(M)x$.

On the other hand, if $x \in Gu$ is connected to $y \in Gu$ then by the definition of a non-associating graph we have

$$\exists z \in M; \quad x \circ (y \circ z) \neq (x \circ y) \circ z.$$

Let $x = tu$ and $y = su$. Then if $z \in G$ we have

$$x \circ (y \circ z) = tu \circ (su \circ z) = tu \circ (sz^{-1})u = (sz^{-1})^{-1}t = zs^{-1}t$$

and

$$(x \circ y) \circ z = (tu \circ su) \circ z = s^{-1}t \cdot z = s^{-1}tz.$$

Now, we have $zs^{-1}t \neq s^{-1}tz$ and so $s^{-1}t \notin Z(G) = N(M)$. Hence we get $s \notin N(M)t$. This means that $y = su \notin N(M)tu = N(M)x$. This completes the proof. □

Proposition 20. *Let G be a non-abelian group and $M = M(G, 2)$. Then Γ_M is connected with* $\mathrm{diam}(\Gamma_M) = 2$ *and* $\mathrm{girth}(\Gamma_M) = 3$.

Proof. By above remarks, Γ_G is connected, of diameter 2, and girth 3. Moreover, by Lemma 18 this graph is an induced subgraph of Γ_M and also by Lemma 19 every element in Gu is connected to every vertex in Γ_G. Therefore $\mathrm{diam}(\Gamma_M) = 2$ and $\mathrm{girth}(\Gamma_M) = 3$. □

Let D_{2m} be the dihedral group of order $2m$. Consider the following presentation for D_{2m}:

$$D_{2m} = \left\langle a, b \mid a^m = b^2 = 1, ba = a^{m-1}b \right\rangle.$$

We know that the center and number of involutions t of D_{2m} can be find as follows:

$$Z(D_{2m}) = \begin{cases} \{1, a^{\frac{m}{2}}\}, & \forall m \text{ even}, \\ 1, & \forall m \text{ odd}; \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} m+1, & \forall m \text{ even}, \\ m, & \forall m \text{ odd}. \end{cases}$$

Here, we want to give some elementary properties about the non-associating graph of the non-associative Moufang loop $M(D_{2m}, 2)$ of order $4m$.

Lemma 21. *Let $M = M(D_{2m}, 2)$ and $\Gamma = \Gamma_M$ be its non-associating graph.*

(a) *If m is odd then:*

(i) $N(M) = 1$ *and* $|V(\Gamma)| = 4m - 1$*;*

(ii) $\forall x \in M$,

$$N_M(x)| = \begin{cases} 4m, & x = 1, \\ m, & x = a^i \quad (1 \le i \le m-1), \\ 2, & x \neq a^i; \end{cases}$$

(ii) $\forall x \in M \setminus N(M)$,

$$\deg(x) = \begin{cases} 3m, & x = a^i \quad (1 \le i \le m-1), \\ 4m-2, & x \neq a^i; \end{cases}$$

(iv) $\sum_{x \in M} |N_M(x)| = m^2 + 9 \quad \sum_{x \in V(\Gamma)} \deg(x) = 3m(5m-3)$, $|E(\Gamma)| = \dfrac{3m(5m-3)}{2}$;

(b) *If m is even then:*

(i) $N(M) = \{1, a^{\frac{m}{2}}\}$ *and* $|V(\Gamma)| = 4m - 2$*;*

(ii) $\forall x \in M$,

$$|N_M(x)| = \begin{cases} 4m, & x = 1, a^{\frac{m}{2}}, \\ m, & x = a^i \quad (1 \le i \le m-1, i \neq \frac{m}{2}), \\ 4, & x \neq a^i; \end{cases}$$

(iii) $\forall x \in M \setminus N(M)$,

$$\deg(x) = \begin{cases} 3m, & x = a^i \quad (1 \le i \le m-1), \\ 4m-4, & x \neq a^i; \end{cases}$$

(iv) $\sum_{x \in M} |N_M(x)| = m^2 + 18m, \quad \sum_{x \in V(\Gamma)} \deg(x) = 3m(5m-6)$, $|E(\Gamma)| = \dfrac{3m(5m-6)}{2}$.

Proof. By Lemma 8 and Corollary 9, parts a(i), a(ii), b(i), and b(ii) easily follow. Parts a(iii) and b(iii) follow from parts a(ii), b(ii) and the assertion $\deg(x) = |M \setminus N_M(x)|$, for all $x \in V(\Gamma)$, at once. Finally, parts a(iv) and b(iv) are trivially calculated from parts a(ii), b(ii), a(iii) and b(iii). □

Let S_n and A_n denote the symmetric and alternating groups of degree n respectively. We know from elementary group theory that $Z(S_n) = 1$ for every $n \geq 3$, and $Z(A_n) = 1$ for every $n \geq 4$. Now, from these facts, we can deduce the following lemma.

Lemma 22. *Let $M = M(S_n, 2)$ and $L = M(A_n, 2)$. Then*

(i) $\forall n \geq 3,\ |Z(M)| = |C(M)| = |N(M)| = 1$;

(ii) $\forall n \geq 4,\ |Z(L)| = |C(L)| = |N(L)| = 1$.

Proof. Both parts of the lemma follow from the above facts about the centres of S_n and A_n and Lemma 10. □

Remark. Let M be a finite non-associative Moufang loop. If L is any Moufang loop such that $\Gamma_L \cong \Gamma_M$ then $|V(\Gamma_L)| = |V(\Gamma_M)|$ and so $|L| - |N(L)| = |M| - |N(M)|$. Since M is finite so is, $L - N(L)$ and since $N(L)$ is a normal subloop of L, it is of finite index in L and $|N(L)| \leq |L - N(L)|$. Thus $N(L)$ is finite. Now, $|L : N(L)||N(L)| = |L|$, and so L is finite.

Also, M is non-associative and so $|M - N(M)| \neq 0$ implies $|L - N(L)| \neq 0$. Consequently L must be non-associative.

Now, if $\Gamma_L \cong \Gamma_M$, we have

$$|N(L)|(|L : N(L)| - 1) = |N(M)|(|M : N(M)| - 1).$$

5 Characterization of Moufang loops of small order by their non-associating graph

As an application of the previous results, in this section we want to characterize some of Moufang loops up to order 63 by their non-associating graph. Of course, by Remark the non-associating graph of a finite non-associative Moufang loop can not be isomorphic to that of a finite group.

The following results are true for non-commuting graph of finite Moufang loops (see [2]) and we generalize them to non-associating graph of finite Moufang loops.

Lemma 23. *Let M be a finite Moufang loop with $|N(M)| = 1$. Let L be any Moufang loop with $\Gamma_L \cong \Gamma_M$. If there is $x \in V(\Gamma_M)$ such that* $\deg(x) = |M| - 2$ *then $|N(L)| = 1$ and $|L| = |M|$.*

Proof. Since $\Gamma_L \cong \Gamma_M$ we have $|L| - |N(L)| = |M| - 1$ and also there is $y \in V(\Gamma_L)$ such that $\deg(y) = |L| - |N(L)| - 1$. Suppose that $|N(L)| > 1$. Then $\exists 1 \neq z \in N(L)$. Consequently $yz \in V(\Gamma_L)$ and also $[y, yz, t] = 1$ for all $t \in L$. Hence $\{y, yz\} \notin E(\Gamma_L)$ and so $\deg(y) \leq |L| - |N(L)| - 2$, which is a contradiction. Therefore $|N(L)| = 1$ and $|L| = |M|$. □

Lemma 24. *Let M be a finite Moufang loop with $|N(M)| = 1$ and order $p+1$, p an odd prime. If L is any Moufang loop with $\Gamma_L \cong \Gamma_M$ then $|N(L)| = 1$ and $|L| = |M|$.*

Proof. By remark, since $\Gamma_L \cong \Gamma_M$, L is also finite and we have:

$$|N(L)|(|L : N(L)| - 1) = |M| - |N(M)| = p.$$

So, $|N(L)| = 1$ or $|N(L)| = p$. If $|N(L)| = 1$ then $|L| = |M|$ as required. But if $|N(L)| = p$ then $|L : N(L)| - 1 = 1$ and so $|L| = |N(L)||L : N(L)| = 2p$. But the only Moufang loops with order $2p$ are associative ones (groups), we get a contradiction. □

Example 25. Consider $M = M(S_n, 2)$. By Lemma 22(i) $|N(M)| = 1$ for every $n \geq 3$. We have $|M| = |M(S_n, 2)| = 2 \cdot n!$ and so $|V(\Gamma_M)| = 2 \cdot n! - 1$. Therefore, for such values of n that $2 \cdot n! - 1$ is prime the order of M is $p+1$ and by Lemma 24, if L is any Moufang loop with $\Gamma_L \cong \Gamma_M$ then $|N(L)| = 1$ and $|L| = |M|$. For example, if $3 \leq n \leq 7$ or $n = 14, 15, 17$, then $2 \cdot n! - 1$ is a prime, but for the other values of $2 < n \leq 20$ it is not.

Also, consider $L = M(A_n, 2)$. Again by Lemma 22(ii) $|N(L)| = 1$ for every $n \geq 4$. We have $|L| = |M(A_n, 2)| = n!$ and so $|V(\Gamma_L)| = n! - 1$. Hence for such values of n that $n! - 1$ is prime, the order of L is $p + 1$ and by Lemma 24, if L_1 is any Moufang loop with $\Gamma_L \cong \Gamma_{L_1}$ then $|N(L_1)| = 1$ and $|L| = |L_1|$. For example, if $n = 4, 6, 7, 12, 14, 30$ then $n! - 1$ is prime, but for the other values n such that $3 < n \leq 30$ it is not. In fact, from number theory, we know that for every prime $p > 5$, the number $(p - 2)! - 1$ is not prime (Wilson's theorem guarantees that $p \mid (p - 2)! - 1$) and $n! \pm 1$ are composite pairs for $4000 \leq n \leq 6000$! On the other hand, $6380! + 1$ and $6917! - 1$ are prime numbers. So, in practice it's very rare that either of $n! \pm 1$ are prime (see, for example, [6]).

Corollary 26. *Let M be a non-associative Moufang loop of order $4m$, where $m \geq 3$ is an odd positive integer. Let $|N(M)| = 1$ and $4m - 1$ be a prime number. Then $|L| = |M|$ for every Moufang loop L such that $\Gamma_L \cong \Gamma_M$. Particularly, if m is also prime then $L \cong M$.*

Proof. Since $4m-1$ is prime, $|M| = p+1$, where p is prime and since $|N(M)| = 1$, by Lemma 24 we have $|N(L)| = 1$ and $|L| = |M|$. Now, if moreover m is also prime, since $|L| = 4m$ and the only non-associative Moufang loop of this order (up to isomorphism) is $M(D_{2m}, 2)$ (see [5]). So, $L \cong M$. □

By the above lemma or its corollary we can characterize Moufang loops of order $12, 20, 42, 44$ by their non-associating graph.

Theorem 27. *Let M be a finite non-associative Moufang loop. Let $|M|$ is equal to one of the numbers* $12, 20, 42, 44$. *If L is a Moufang loop with $\phi : \Gamma_L \cong \Gamma_M$ then $L \cong M$.*

Proof. By remark, L is non-associative and finite. By Tables 1 and 2, the non-associative Moufang loops of order $12, 20, 42, 44$ are unique up to isomorphism and all of them have trivial nuclei. In each case $|M| = p+1$, where p is an odd prime and so by Lemma 24, we have $|L| = |M|$ and if L is non-associative then by uniqueness of M we get $L \cong M$. Also, L can not be associative since the non-associating graph of a group is null. □

Theorem 28. *Let M be a finite non-commutative non-associative Moufang loop of order* 28. *If L is a Moufang loop with $\phi : \Gamma_L \cong \Gamma_M$, then $L \cong M$.*

Proof. By remark, L is non-commutative and finite. By Table 2, the non-associative Moufang loop of order 28 is unique up to isomorphism and has the trivial nucleus. Then by the above considerations we have

$$|N(L)|(|L : N(L)| - 1) = 27,$$

and so we have four cases:

Case 1. $|N(L)| = 1$. Then $|L| = |M| = 28$. We know that L cannot be associative since the non-associating graph of a group is null and therefore L is also non-associative. So, $L \cong M$.
Case 2. $|N(L)| = 3$. Then $|L : N(L)| - 1 = 9$ or $|L| = 30$. Since there is no non-associative Moufang loop of order 30, L must be a group, so this case is impossible.
Case 3. $|N(L)| = 9$. Then $|L : N(L)| - 1 = 3$ or $|L| = 36$ but by Table 2 non-associative Moufang loops of order 36 have a nucleus with 1 or 3 elements. Therefore, similarly to Case 2 L is not a group. So this case is not possible either.
Case 4. $|N(L)| = 27$. Then $|L : N(L)| - 1 = 1$ or $|L : N(L)| = 2$ and this is not possible by Table 2. This completes the proof. □

At the end of this section, we state the following problem about a characterization of all small Moufang loops up to order of 64 and orders $n = 81,\ 243$, which are known and defined to LOOPS package [24].

Problem 1. *Determine all small Moufang loops, up to order of* 64 *and orders* $n = 81,\ 243$ *which can be characterized by their non-associating graphs.*

6 Characterization of Paige loops (non-associative finite simple Moufang loops) by their non-associating graphs

In 1956, L. Paige in [25] constructed a Paige loop for every field $GF(q)$ (of course, he did not call them Paige loops). Thirty years later, M. Liebeck in [19] showed that there are no other Paige loops (non-associative finite simple Moufang loops). It is customary to denote the unique Paige loop constructed over $GF(q)$ by $M^*(q)$. An easy argument of Paige [25], shows that $M^*(q)$ has $q^3(q^4-1)$ elements when q is even and $q^3(q^4-1)/2$ elements when q is odd. So, the smallest Paige loop is $M^*(2)$ of order 120.

In 2006, Abdollahi, Akbari and Maimani proposed the following conjecture [1]:

AAM's Conjecture. Let P be a finite non-abelian simple group and G be a group such that $\Gamma_G \cong \Gamma_P$. Then $G \cong P$.

Thereafter, this conjecture is verified for all sporadic simple groups, the alternating groups in some papers by the first author of [1], and some others. Finally, Solomon and Woldar proved it in [30]. So, coming back to finite Moufang loops it follows that every associative finite simple Moufang loop is characterizable by its non-commuting graph. Now, it is a natural question that what happens about non-associative finite simple Moufang loop? Can we characterize a Paige loop by its non-associating graph? Formally, we propose it as a conjecture:

Conjecture. Let S be a finite non-associative simple Moufang loop and L be a Moufang loop such that $\Gamma_L \cong \Gamma_S$. Then $L \cong S$.

References

[1] A. Abdollahi, S. Akbari and H. R. Maimani, Non-commuting graph of a group, J. Algebra, **298**, (2006), 468–492.

[2] K. Ahmadidelir, On the non-commuting graph in finite Moufang loops, J. Algebra and Its Appl., **16**, 11 (2018), 1850070 (22 pages), DOI: 10.1142/S0219498818500706.

[3] J. A. Bondy, J. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, American Elsevier publishing Co., Inc., 1977.

[4] R. H. Bruck, A survey of binary systems, Springer-Verlag, 1958.

[5] R. P. Burn, Finite Bol loops II, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **88**, (1981), 445–455.

[6] C. K. Caldwell, Y. Gallot, On the primality of $n! \pm 1$ and $2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p \pm 1$, Mathematics of Computation, **71**(237), (2002), 441–448.

[7] O. Chein, Moufang loops of small order, I, Trans. Am. Math. Soc., **188**, (1974), 31–51.

[8] O. Chein, Moufang loops of small order, Mem. Amer. Math. Soc., **13**, 197 (1978), 1–131.

[9] O. Chein, A. Rajah, Possible orders of non-associative Moufang loops, Comment. Math. Univ. Carolin., **41**, (2000), 237–244.

[10] M. R. Darafsheh, Groups with the same non-commuting graph, Discrete Appl. Math., **157**, 4 (2009), 833–837.

[11] A. Drăpal, P. Vojtěchovský, Moufang Loops that Share Associator and Three Quarters of Their Multiplication Tables, Rocky Mountain J. Math., **36**, 2 (2006), 425–455.

[12] S.,M. Gagola III, A Moufang loops' commutant, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **152**, 2 (2012), 193–206.

[13] S. M. Gagola III, Hall's theorem for Moufang loops, J. Algebra, **323**, 12 (2010), 3252–3262.

[14] The GAP group, GAP - Groups, Algorithms and Programming, Aachen, St. Andrews **Version 4.7.2** (2013), (`http://www.gap-system.org`).

[15] E. G. Goodaire, S. May, M. Raman, The Moufang Loops of Order Less Than 64, Nova Science Publishers, 1999.

[16] A. N. Grishkov, A. V. Zavarnitsine, Lagrange's theorem for Moufang loops, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **139**, 1 (2005), 41–57.

[17] A. N. Grishkov, A. V. Zavarnitsine, Sylow's theorem for Moufang loops, J. Algebra, **321**, 7 (2009), 1813–1825.

[18] F. Leong, A. Rajah, Moufang loops of odd order $p^\alpha q_1^2 \cdots q_n^2 r_1 \cdots r_m$, J. Algebra, **190**, (1997), 474–486.

[19] M. W. Liebeck, The classification of finite simple Moufang loops, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **102**, 1 (1987), 33–47.

[20] A. R. Moghaddamfar, About noncommuting graphs, Siberian Math. J., **47**, 5 (2006), 911–914.

[21] A. R. Moghaddamfar, W. J. Shi, W. Zhou, A. R. Zokayi, On the noncommuting graph associated with a finite group, Siberian Math. J., **46**, 2 (2005), 325–332.

[22] G. P. Nagy, M. Valsecchi, On nilpotent Moufang loops with central associators, J. of Algebra, **307**, (2007), 547–564.

[23] G. P. Nagy, P. Vojtěchovský, The Moufang loops of order 64 and 81, J. Symbolic Comput., **42**, 9 (2007), 871–883.

[24] G. P. Nagy, P. Vojtěchovský, LOOPS Version 2.1.3, Package for GAP 4.4.12., Available at `http://www.math.du.edu/loops`.

[25] L. Paige, A Class of Simple Moufang Loops, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 3 (1956), 471–482.

[26] H. O. Pflugfelder, Quasigroups and loops: Introduction, Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[27] A. Rajah, Moufang Loops of Odd Order pq^3, J. Algebra, **235**, 1 (2001), 66–93.

[28] M. C. Slattery, A. L. Zenisek, Moufang loops of order 243, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, **53**, 3 (2012), 423–428.

[29] L. H. Soicher, The GRAPE package for GAP, Version 4.6.1, 2012, Available at `http://www.maths.qmul.ac.uk/ leonard/grape/`.

[30] R. Solomon and A. Woldar, Simple groups are characterized by their non-commuting graph, J. Group Theory, **16** (2013), 793–824.

[31] P. Vojtěchovský, Toward the classification of Moufang loops of order 64, European J. of Combinatorics, **27**, 3 (2006), 444–460.

ОБ ОБОГАЩЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ 1-НЕРАЗЛИЧИМЫХ СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО O-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

С. С. Байжанов

Институт математики и математического моделирования, ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан
e-mail: sayan-5225@mail.ru

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, ул. Манаса, 34А / ул. Жандосова, 8А, Алматы, 050040, Казахстан
e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$, мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$, такая что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура $\mathcal{M}$ называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры $\mathcal{M}$ является объединением конечного числа интервалов и точек в $\mathcal{M}$. Таким образом, слабая o-минимальность является обобщением o-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо o-минимальных (не o-минимальных) структур.

Пусть A, B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A < b$ означает что $A < \{b\}$. Через A^+ (и, соответственно, A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A < b$ ($b < A$).

Определение 1. [2] Пусть T — слабо o-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной. *Ранг выпуклости формулы* $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x)) \geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x)) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i \in \omega$, такие что:

   - для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$
   - для каждого $i \in \omega \quad RC(E(x, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x)) \geq \delta$, если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ — предельный).

Если $RC(\phi(x)) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x)) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x)) = \infty$.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов.

В настоящей работе мы исследуем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо o-минимальных теорий бинарными предикатами. Ранее в работах [3]–[5] нами был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо o-минимальных теорий унарными предикатами. Как известно, в работе [6] Байжанов Б. С. доказал, что обогащение модели слабо o-минимальной теории унарным предикатом, выделяющим конечное число выпуклых множеств, сохраняет слабую o-минимальность обогащенной теории. Однако в случае обогащения модели слабо o-минимальной теории бинарным предикатом, выделяющим при каждом фиксированном как первом, так и втором параметре конечное число выпуклых множеств, обогащенная теория может потерять слабую o-минимальность (Пример 4).

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1].
Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\emptyset$-определимое множество, $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для

каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \text{ и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}}, \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Пусть $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ мы обозначаем $\sim$-класс кортежа $\bar{a}$ через $[\bar{a}]$. Существует естественный $\emptyset$-определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ тогда и только тогда когда $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Если $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторый $x \in M$, такой что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$. Поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\emptyset$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — дедекиндово пополнение структуры M, и рассматриваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 2. [1] Пусть M — линейно упорядоченная структура, $D \subseteq M$ — бесконечное множество, $K \subseteq \overline{M}$, $f : D \to K$ — функция. Будем говорить, что f является *локально возрастающей (локально убывающей, локально константой)* на D, если для любого $x \in D$ существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, такой что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D.

Предложение 3. [7] *Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Тогда любая функция в A-определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.*

Пример 4. Пусть $M := \langle \mathbb{R}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$. Очевидно, что M — модель счетно категоричной o-минимальной теории. Обогатим модель M новым бинарным отношением $S(x, y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathbb{R}, <, S^2 \rangle$, так что $S(x, y)$ является графиком следующей унарной функции f: $f(b) = 2b$ для каждого $b \in \mathbb{Q}$ и $f(c) = -c$ для каждого $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Очевидно, что множества $S(a, M)$ и $S(M, a)$ являются одноэлементными для каждого $a \in M$, т.е. они выпуклыми множествами. Тем не менее, замечаем что M' не является слабо o-минимальной структурой, поскольку не существует разбиения множества $\mathbb{R}$ на конечное число выпуклых множеств, на каждом из которых определимая функция f была бы локально монотонной или локально константой.

Здесь мы ограничимся исследованием вопроса сохранения свойств при обогащениях моделей 1-неразличимых счетно категоричных слабо o-минимальных теорий отношением эквивалентности, разбивающим основное множество модели на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Пример 5. Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно что M — счетно категоричная o-минимальная структура. Обогатим модель M новым бинарным отношением $E(x, y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$, так что для любых $a, b \in \mathbb{Q}$ имеет место

$$E(a, b) \Leftrightarrow (2n-1)\sqrt{2} < a, b < (2n+1)\sqrt{2}$$

для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда нетрудно понять, что $E(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $\mathbb{Q}$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E-классы упорядочены по типу $\omega^* + \omega$.

Может быть доказано, что M' — слабо o-минимальная структура, но $Th(M')$ не является $\aleph_0$-категоричной.

Пример 6. Пусть $M := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченном лексикографически. Отношение $E(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\text{для любых } a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad E(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Очевидно, что $E(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E-классы упорядочены по типу $\mathbb{Q}$.

Расширим основное множество $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ структуры M добавлением к каждому E-классу двух элементов, являющихся левой и правой концевыми точками E-класса. В результате получим новую структуру $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$. Рассмотрим обеднение структуры M' до структуры $M'' := \langle M', < \rangle$. Очевидно, что M'' — счетно категоричная o-минимальная структура. Ее обогащение $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$ является счетно категоричной линейно упорядоченной структурой, но $Th(M')$ не является слабо о-минимальной.

Предложение 7. *Пусть M — 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, M' — обогащение модели M отношением эквивалентности $E(x,y)$, разбивающим M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда* $\mathrm{Th}(M')$ — *счетно категоричная слабо о-минимальная теория $\Leftrightarrow$ когда выполнены следующие условия:*

(1) *существует конечное число E-классов, имеющих хотя бы одну концевую точку;*

(2) *существует конечное число E-классов, имеющих непосредственного предшественника или непосредственного последователя.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 < x < y_2 \wedge \forall z \forall t (y_1 \leq z < x \wedge x < t \leq y_2 \to \neg E(z,t))]$$

В силу слабой o-минимальности $\mathrm{Th}(M')$ $\phi(M')$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, откуда следует что существует лишь конечное число E-классов, имеющих хотя бы одну концевую точку.

Поймем теперь, что выполняется условие (2). Допустим противное: существует бесконечное число E-классов, имеющих непосредственного предшественника или непосредственного последователя. Если для каждого $n < \omega$ существует $n_1 < \omega$, такой что $n_1 \geq n$ и существует дискретно упорядоченная цепочка E-классов длины n_1, то по компактности существует модель N' теории $\mathrm{Th}(M')$, в которой имеется бесконечная дискретно упорядоченная цепочка E-классов. Не умаляя общности, предположим, что такая цепочка упорядочена по типу ω. Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x,y) := E(x,y)$$

$$F_2(x,y) := F_1(x,y) \vee \forall t (x \leq t \leq y \wedge \neg F_1(x,t) \to E(t,y))$$

$$\dots\dots\dots$$

$$F_n(x,y) := F_{n-1}(x,y) \vee \forall t (x \leq x \leq y \wedge \neg F_{n-1}(x,t) \to E(t,y)), \quad n < \omega$$

Получаем, что существует $a \in N'$, такой что

$$F_1(a,N') \subset F_2(a,N') \subset \ldots \subset F_n(a,N') \subset \ldots,$$

что противоречит счетной категоричности $\mathrm{Th}(M')$.

Если же существует дискретно упорядоченная цепочка E-классов максимальной конечной длины, например, длины k, то существует $m <$

ω, такой что $2 \le m \le k$ и имеется бесконечное число цепочек длины m. Тогда существует $a \in M'$, такой что $F_m(a, M')$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств, что противоречит слабой o-минимальности $\mathrm{Th}(M')$.

($\Leftarrow$) В силу (1) существует конечное число E-классов, имеющих хотя одну концевую точку. Тогда в силу линейной упорядоченности M' можем формульно выделить каждую такую концевую точку. В силу (2) можем также формульно выделить каждый E-класс, имеющий непосредственного предшественника или непосредственного последователя, а также возможные непустые промежутки между некоторыми их этих классов (те промежутки, где E-классы плотно упорядочены без концевых точек); кроме того, выделяются E-классы, являющиеся минимальными (самый левый E-класс) или максимальными (самый правый E-класс) в промежутках с плотным упорядочением E-классов. Таким образом, получаем конечное число $\emptyset$-определимых формул $\theta_i(x), 1 \le j \le n$, так что $\theta_i(M') \cap \theta_j(M') = \emptyset$ для любых $1 \le i < j \le n$. Каждая из этих формул определяет некоторый 1-тип над $\emptyset$. Стандартными методами доказывается что $\mathrm{Th}(M')$ допускает элиминацию кванторов с точностью до атомных формул и формул $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_n(x)$ (последние формулы определяют выпуклые множества в M'), откуда мы получаем что $\mathrm{Th}(M')$ — счетно категоричная слабо o-минимальная теория. □

Следствие 8. *Пусть M — 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, M' — обогащение модели M отношением эквивалентности $E(x, y)$, разбивающим M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда M' — 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура $\Leftrightarrow$ когда выполнены следующие условия:*

(1) *каждый E-класс не имеет концевых точек в M';*

(2) *индуцированный порядок на E-классах является плотным линейным порядком без концевых точек.*

Пример 9. Пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ — структура из Примера 5. Заменим каждую точку $a \in \mathbb{Q}$ копией рациональных чисел и определим новую структуру $M'' := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, < E^2, E_0^2 \rangle$, где отношение $E_0(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\text{для любых } a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad E_0(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Нетрудно понять, что $E_0(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее каждый E-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что E_0-подклассы каждого E-класса плотно упорядочены без концевых точек.

Может быть доказано, что M'' — слабо o-минимальная структура, но $Th(M'')$ не является счетно категоричной.

Пример 10. Возьмем счетное число копий структуры $M' := \langle \mathbb{Q}, <, E^2 \rangle$ из Примера 5, упорядоченных по типу $\mathbb{Q}$. Тогда получим новую структуру $M'' := \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, < E^2, E_1^2 \rangle$, где отношение $E_1(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\text{для любых } a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad E_1(a, b) \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

Тогда $E(a, M'') \subset E_1(a, M'')$ для любого $a \in M''$, где $E_1(x, y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее M'' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, упорядоченных по типу $\mathbb{Q}$. Замечаем, что E-подклассы каждого E_1-класса упорядочены по типу $\omega^* + \omega$.

Также можно понять, что M'' — слабо o-минимальная структура, но $\mathrm{Th}(M'')$ не является счетно категоричной.

Теорема 11. *Пусть M — 1-неразличимая счетно категоричная слабо o-минимальная структура ранга выпуклости 2. Предположим, что $E_1(x, y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть M' — обогащение модели M новым отношением эквивалентности $E^*(x, y)$, разбивающим M' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда* $\mathrm{Th}(M')$ *— счетно категоричная слабо o-минимальная теория $\Leftrightarrow$ когда выполнены следующие условия:*

(A) *существует конечное число E^*-классов, имеющих хотя бы одну концевую точку;*

(B) *существует конечное число E^*-классов, имеющих непосредственного предшественника или непосредственного последователя;*

(C) *M' разбивается на конечное число бесконечных выпуклых множеств $X_1, \ldots, X_m$ таких, что для каждого $1 \leq i \leq m$ выполняется в точности один из следующих пунктов:*

(1) *для любого $a \in X_i$ $E_1(a, M') = E^*(a, M')$;*

(2) *для любого $a \in X_i$ $E_1(a, M') \subset E^*(a, M')$, $\sup E_1(a, M') < \sup E^*(a, M')$ и $\inf E^*(a, M') < \inf E_1(a, M')$;*

(3) *для любого $a \in X_i$ $E^*(a, M') \subset E_1(a, M')$, $\sup E^*(a, M') < \sup E_1(a, M')$ и $\inf E_1(a, M') < \inf E^*(a, M')$;*

(4) *$X_i = E_1(a, M')$ для некоторого $a \in M'$, такого что $E_1(a, M') \subset E^*(a, M')$ и $\sup E_1(a, M') = \sup E^*(a, M')$ или $\inf E_1(a, M') = \inf E^*(a, M')$;*

(5) *$X_i = E^*(a, M')$ для некоторого $a \in M'$, такого что $E^*(a, M') \subset E_1(a, M')$ и $\sup E^*(a, M') = \sup E_1(a, M')$ или $\inf E^*(a, M') = \inf E_1(a, M')$;*

(6) *$X_i = E^*(a, M') \cap E_1(a, M')$ для некоторого $a \in M'$, такого что $E^*(a, M') \setminus E_1(a, M') \neq \emptyset$ и $E_1(a, M') \setminus E^*(a, M') \neq \emptyset$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) (A) и (B) следуют из доказательства Предложения 7. Рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_1(x) := \forall y[E_1(x, y) \leftrightarrow E^*(x, y)]$$

$$\phi_2(x) := \forall y[E_1(x, y) \to E^*(x, y)] \wedge$$
$$\wedge \exists z_1 \exists z_2 (z_1 < x < z_2 \wedge E^*(z_1, z_2) \wedge \neg E_1(z_1, x) \wedge \neg E_1(x, z_2))]$$

$$\phi_3(x) := \forall y[E^*(x, y) \to E_1(x, y)] \wedge$$
$$\wedge \exists z_1 \exists z_2 (z_1 < x < z_2 \wedge E_1(z_1, z_2) \wedge \neg E^*(z_1, x) \wedge \neg E^*(x, z_2))]$$

$$\phi_4(x) := \forall y[E_1(x, y) \to E^*(x, y)] \wedge (\forall z_2[x < z_2 \wedge \neg E_1(x, z_2) \to \neg E^*(x, z_2)]$$
$$\vee \forall z_1[z_1 < x \wedge \neg E_1(z_1, x) \to \neg E^*(z_1, x)])$$

$$\phi_5(x) := \forall y[E^*(x, y) \to E_1(x, y)] \wedge (\forall z_2[x < z_2 \wedge \neg E^*(x, z_2) \to \neg E_1(x, z_2)]$$
$$\vee \forall z_1[z_1 < x \wedge \neg E^*(z_1, x) \to \neg E_1(z_1, x)])$$

$$\phi_6(x) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 < x < y_2 \wedge E_1(y_1, x) \wedge E^*(x, y_2) \wedge \neg E_1(y_1, y_2) \wedge \neg E^*(y_1, y_2)]$$
$$\vee \exists y_1 \exists y_2 [y_1 < x < y_2 \wedge E^*(y_1, x) \wedge E_1(x, y_2) \wedge \neg E_1(y_1, y_2) \wedge \neg E^*(y_1, y_2)]$$

Нетрудно понять, что для любого $a \in M'$ существует $1 \leq i \leq 6$ такой, что $M' \models \phi_i(a)$, а также что $M' \models \neg \exists x[\phi_i(x) \wedge \phi_j(x)]$ для любых i, j, таких что $1 \leq i, j \leq 6$ и $i \neq j$.

В силу слабой o-минимальности $\mathrm{Th}(M')$ каждая их этих формул определяет множество, являющееся объединением конечного числа выпуклых множеств, откуда следует (C).

($\Leftarrow$) Выполнение условий (A) и (B) согласно доказательству Предложения 7 формульно выделяет имеющиеся концевые точки E-классов; каждый E-класс, имеющий непосредственного предшественника или непосредственного последователя, а также промежутки, где E-классы плотно упорядочены без концевых точек; кроме того, выделяются минимальные или максимальные E-классы в промежутках плотного упорядочения E-классов, имеющих самый левый или самый правый E-класс. Таким образом, получаем конечное число $\emptyset$-определимых формул $\theta_i(x), 1 \leq j \leq n$, так что $\theta_i(M') \cap \theta_j(M') = \emptyset$ для любых $1 \leq i < j \leq n$.

Выполнение условия (C) обеспечивает, что каждая из формул $\phi_i(x)$, $1 \leq i \leq 6$, определяет множество, являющееся объединением конечного числа выпуклых множеств. Тогда в силу линейной упорядоченности M' каждая из формул $\phi_i(x)$ распадается на конечное число выпуклых $\emptyset$-определимых формул $\phi_i^1(x), \phi_i^2(x), \ldots, \phi_i^{n_i}(x)$ для некоторого $n_i < \omega$.

Наконец, может быть доказано стандартными методами что $\mathrm{Th}(M')$ допускает элиминацию кванторов с точностью до атомных формул и формул $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_n(x)$, $\phi_1^1(x) \ldots, \phi_1^{n_1}(x); \ldots, \phi_6^1(x), \ldots, \phi_6^{n_6}(x)$, откуда получаем, что $\mathrm{Th}(M')$ — счетно категоричная слабо o-минимальная теория. □

Следствие 12. *Пусть M — 1-неразличимая счетно категоричная слабо o-минимальная структура ранга выпуклости 2. Предположим, что $E_1(x, y)$ — $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть M' — обогащение модели M новым отношением эквивалентности $E^*(x, y)$, разбивающим M' на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда M' — 1-неразличимая счетно категоричная слабо o-минимальная структура $\Leftrightarrow$, когда выполнены следующие условия:*

(A) *каждый E^*-класс не имеет концевых точек в M';*

(B) *индуцированный порядок на E^*-классах являются плотным линейным порядком без концевых точек;*

(C) *для любого $a \in M'$ выполняется в точности один из следующих пунктов:*

(1) $E_1(a, M') = E^*(a, M')$;

(2) $E_1(a, M') \subset E^*(a, M')$, $\sup E_1(a, M') < \sup E^*(a, M')$ *и* $\inf E^*(a, M') < \inf E_1(a, M')$;

(3) $E^*(a, M') \subset E_1(a, M')$, $\sup E^*(a, M') < \sup E_1(a, M')$ *и* $\inf E_1(a, M') < \inf E^*(a, M')$.

Список литературы

[1] H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly *o*-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, **352** (2000), 5435–5483.

[2] B. Sh. Kulpeshov, Weakly *o*-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, **63** (1998), 1511–1528.

[3] С. С. Байжанов, Б. Ш Кулпешов, Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне *o*-минимальных теорий, Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая, **1 (311)** (2017), 65–71.

[4] С. С. Байжанов, Б. Ш Кулпешов, Обогащение моделей вполне *o*-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы докладов ежегодной научной апрельской конференции Института математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, 2017, 16–18.

[5] С. С. Байжанов, Б. Ш Кулпешов, Обогащение моделей счетно категоричных слабо *o*-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики", посвященной 100-летию академика Тайманова А. Д., Алматы, 2017, 13–15.

[6] B. S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, **66** (2001), 1382–1414.

[7] B. Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite *o*-minimal theories Journal of Mathematical Sciences, **188**, 4 (2013), 387–397.

О ВОСХОДЯЩИХ HNN-РАСШИРЕНИЯХ ПОЧТИ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

О. В. Брюханов

Сибирский университет потребительской кооперации,
пр. К. Маркса, 24, Новосибирск, 630087, Россия
e-mail: bryuoleg@ngs.ru

Поздравляю
профессора В. М. Копытова
с 75-летним юбилеем.

Изучению различных свойств фундаментальных групп 3-многообразий посвящено большое количество исследований, обзор которых приведён в [6]. В частности, в этом обзоре отмечено, что каждая фундаментальная группа 3-многообразия является почти p-аппроксимируемой для почти всех простых p. Кроме того различные фундаментальные группы многообразий возникают как некоторые HNN-расширения. Так Д. Т. Вайз и Т. Су [12] показали финитную аппроксимируемость восходящих HNN-расширений почти полициклических групп.

В свою очередь, в [11] исследован вопрос о линейной представимости над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ произвольных (не восходящих) HNN-расширений конечно порождённых абелевых групп и линейность нескольких частных случаев данных HNN-расширений конечно порождённых линейных групп.

А. Борисов и М. Сапир [7] показали финитную аппроксимируемость восходящих HNN-расширений для любой конечно порождённой линейной группы в частности для свободных групп $F_r = \langle x_1, \dots, x_r\rangle$ конечного ранга r. При этом есть, как линейные группы, так и группы не представимые матрицами над полями, как нулевой, так и положительной характеристики. Так, например, группа

$$HNN_\varphi(F_2) = \langle a, b, t | t^{-1}at = \varphi(g) = a^k, t^{-1}bt = \varphi(g) = b^k\rangle, lk \neq \pm 1,$$

не представима матрицами над полем нулевой характеристики. В случае, когда $k, l \notin \{-1, 1\}$ это показал Б. А. Ф. Верфриц. До случая $kl \neq \pm 1$

результат Б. А. Ф. Верфрица усилили С. Друту и М. Сапир [9]. В свою очередь, группа Герстена $HNN_\varphi(F_3)$, заданная кодом

$$\langle a, b, c, t | t^{-1}at = \varphi(g) = a, t^{-1}bt = \varphi(g) = ba, t^{-1}ct = \varphi(g) = ca^2\rangle,$$

не представима матрицами ни над каким полем положительной характеристики [8].

В представленной работе показано, что голоморф поливосходящих HNN-расширений почти полициклических групп изоморфно представим матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и уже из этого, по известным теоремам А. И. Мальцева [4], как для конечно порождённых линейных групп, следует финитная аппроксимируемость восходящих HNN-расширений почти полициклических групп и их почти p-аппроксимируемость для почти всех простых p.

1 Предварительные понятия и определения

Группу G называют *полициклической*, если она обладает конечным субнормальным рядом подгрупп $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{s+1} = 1$ с циклическими секциями $G_i/G_{i+1}, i = 1, \ldots, s$. Полициклические группы являются частным случаем *разрешимых* групп, то есть групп, которые обладают конечным субнормальным рядом подгрупп $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_{s+1} = 1$, с абелевыми секциями $G_i/G_{i+1}, i = 1, \ldots, s$. Кроме того, если $\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n})$ — коммутаторное слово, определённое по индукции как $\delta_0(x) = x$,

$$\begin{aligned}&\delta_{n+1}(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}}) = [\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}), \delta_n(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})] = \\ &= \delta_n^{-1}(x_1, \ldots, x_{2^n})\delta_n^{-1}(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n})\delta_n(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}}),\end{aligned}$$

то при некотором n в разрешимой группе G выполняется тождество $\delta_n(x_1, \ldots, x_{2^n}) = 1$ ([3], п. 19). Минимальное n с таким свойством называют *ступенью разрешимости* группы.

Если группа G содержит полициклическую подгруппу H конечного индекса $|G : H| < \infty$, то её называют *почти полициклической.* Вообще, если группа G содержит подгруппу H конечного индекса $|G : H| < \infty$, обладающую некоторым свойством Φ, то говорят, что группа G *почти* обладает свойством Φ.

Восходящим HNN-расширением группы G называют группу

$$HNN_\varphi(G) = \langle G, t | t^{-1}Gt = G^\varphi < G\rangle,$$

где φ — мономорфизм группы G. Некоторые авторы данные расширения называют нисходящими HNN-расширениями [1, 10]. Более того, *поливосходящим HNN-расширением* $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ будем называть группу, полученную из группы G последовательным выполнением восходящих HNN-расширений, то есть

$$HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{i+1}}(G) = HNN_{\varphi_{i+1}}(HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_i}(G)), i = 1, \ldots, n-1.$$

Голоморфом $\operatorname{Hol} G$ группы G называют её полупрямое расширение $G \leftthreetimes \operatorname{Aut} G$, то есть $\operatorname{Hol} G = G \cdot \operatorname{Aut} G$, где $G \trianglelefteq \operatorname{Hol} G$, $G \cap \operatorname{Aut} G = 1$ и $\operatorname{Aut} G$ — группа всех автоморфизмов группы G.

Напомним, что группу G называют группой *конечного ранга*, если найдётся такое целое число n, что любая её конечно порождённая подгруппа порождается не более чем n элементами. Минимальное n с таким свойством разные авторы называют: *специальным*, *Мальцевским* или *Прюферовым рангом* группы.

Пусть Ω — некоторый класс групп. Если для любого нетривиального элемента g группы G найдётся гомоморфизм φ этой группы с условием $\varphi(g) \neq 1$, $\varphi(G) \in \Omega$, то говорят, что группа G *аппроксимируется* группами из класса Ω. Если Ω — класс всех конечных групп, то группу G называют *финитно аппроксимируемой*, если Ω — класс всех конечных p-групп, — *p-аппроксимируемой*, здесь p — простое число.

Если группа G изоморфна некоторой группе матриц из $\mathrm{GL}_n(F)$, при некотором n и некотором поле F, то говорят, что G — *линейная* группа, или, что она изоморфно представима матрицами над полем F.

2 Основные утверждения

Рассмотрим случай восходящих HNN-расширения почти полициклических групп.

Теорема 1. *Пусть G — почти полициклическая группа, φ — мономорфизм группы G, тогда восходящее HNN-расширение $HNN_\varphi(G)$ изоморфно представимо матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Пусть $t^{-1}Gt = G^t$. Так как $G^{t^{-1}} > G > G^t$, множество $\overline{G} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} G^{t^i}$ является нормальной подгруппой в группе $HNN_\varphi(G)$. Далее, всякий конечный набор $g_1, \ldots, g_s \in \overline{G}$ содержится в некоторой изоморфной копии G^{t^i} почти полициклической группы G.

Хорошо известно, что любая почти полициклическая группа G обладает автоморфно допустимой подгруппой $G_0 \leqslant G$, где $|G : G_0| < \infty$,

G_0 — разрешимая группа без кручения, конечного ранга ([3], п. 21). Так как G конечно порождена, подгруппа G_0 содержит вербальную подгруппу T конечного индекса в G ([3], п. 13). Очевидно, что группа T разрешима, без кручения и конечного ранга. Поскольку $T \geq \varphi(T) = T^t$, определена группа $\overline{T} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} T^{t^i}$. Тогда $|\overline{G} : \overline{T}| \leq |G : T| < \infty$, при этом $\overline{T}$ — разрешимая группа без кручения конечного ранга.

В самом деле, пусть $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_s \in \overline{G}$ — представители различных смежных классов по подгруппе $\overline{T}$. Для любого конечного множества элементов группы $\overline{G}$, в частности, для выбранного, найдётся подгруппа $G^{t^i} < \overline{G}$, которая изоморфна G и всех их содержит. Поэтому выбранные элементы содержатся в не более чем $|G^{t^i} : T^{t^i}| = |G : T|$ различных смежных классах по подгруппе $T^{t^i} < \overline{T}$. Следовательно, выполнено неравенство $|\overline{G} : \overline{T}| \leq |G : T| < \infty$. Далее, если $\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{2^m} \in \overline{T}, \delta_m(T) = 1$, то $\delta_m(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{2^m}) \in T^{t^i}$. Поскольку группа T^{t^i} изоморфна T, получаем равенство $\delta_m(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_{2^m}) = 1$ и, в итоге, тождество $\delta_m(\overline{T}) = 1$. Конечность ранга группы $\overline{T}$ следует из равенства рангов у групп $T^{t^i}, i \in \mathbb{Z}$. Отсутствие кручения в группе $\overline{T} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} T^{t^i}$, очевидно, следует из отсутствия кручения в группы T.

Далее, группа $\overline{T}$ по построению будет нормальной в $HNN_\varphi(G)$. Так как $\overline{T}$ конечного индекса в $\overline{G}$, элемент t в некоторой степени m_0 будет тождественно действовать сопряжением на смежных классах $\overline{G}/\overline{T}$. Следовательно, группа $\langle\overline{T}, t^{m_0}\rangle$ будет нормальной подгруппой конечного индекса в $HNN_\varphi(G)$. Осталось только заметить, что группа $\langle\overline{T}, t^{m_0}\rangle$ является разрешимой, без кручений и конечного ранга.

Как показал В. М. Копытов [2], любая группа, которая является почти разрешимой группой конечного ранга, без кручения, изоморфно представима матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Отсюда и восходящие HNN-расширения $HNN_\varphi(G)$ почти полициклических групп G изоморфно представимы матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. □

Так как характеристика поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ равна нулю, а восходящие HNN-расширения почти полициклических групп конечно порождены, по известным теоремам А. И. Мальцева из [4], восходящие HNN-расширения почти полициклических групп являются и финитно аппроксимируемыми, и почти p-аппроксимируемыми для почти всех (кроме конечного числа) простых p.

Теперь, опираясь на рассуждения из предыдущей теоремы, докажем основное утверждение статьи.

Теорема 2. *Пусть G — почти полициклическая группа, тогда голоморф её поливосходящего HNN-расширения $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ изоморфно представим матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Покажем в начале, что группа $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ содержит в качестве нормальной подгруппы конечного индекса разрешимую группу конечного ранга, без кручения. При $n = 1$, это показано в доказательстве теоремы 1. Далее, если $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(G)$ содержит обозначенную подгруппу конечного индекса, то, как в конечно порождённой группе, выделенная подгруппа содержит уже вербальную подгруппу конечного индекса в $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}(G)$. Очевидно, эта вербальная подгруппа будет разрешимой, без кручения и конечного ранга. Так как вербальные подгруппы эндоморфно допустимы, то аналогично, как в доказательстве теоремы 1, можно показать, что группа $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{k+1}}(G)$ содержит нормальную подгруппу конечного индекса, которая является разрешимой группой без кручения конечного ранга. Следовательно, по индукции получаем, что HNN-расширение $HNN_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(G)$ содержит в качестве нормальной подгруппы конечного индекса разрешимую группу без кручения конечного ранга.

Как показал Б. А. Ф. Верфриц [13], голоморф $\mathrm{Hol}\, G$ любой группы G, являющейся конечным расширением разрешимой группы без кручения, конечного ранга, будет изоморфно представим матрицами над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Что завершает доказательство теоремы □

В заключение отметим, что формулировка последней теоремы перекликается с известным результатом Ю. И. Мерзлякова [5] о голоморфе полициклических групп и является, своего рода “конструктивным” обобщением этого утверждения.

Список литературы

[1] Д. Н. Азаров, Д. В Гольцов, О почти аппроксимируемости обобщённых свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп, Вестн. Иван. гос. ун-та, **2** (2012), 86—91.

[2] В. М. Копытов, О матричных группах, Алгебра и логика, **7**, 3 (1968), 51–57 (English Transl.: Algebra and Logic, **7** (1968), 161–166).

[3] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп, М.: Наука, 1982.

[4] А.И. Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем.сб., **8(50)**, 3 (1940), 405–423.

[5] Ю. И. Мерзляков, Целочисленные представления голоморфа полицеклической группы, Алгебра и Логика, **9** (1970), 539–558 (English Transl.: Algebra and Logic **9** (1970), 326–337).

[6] M. Aschenbrenner, S. Friedl, H. Wilton 3-Manifold Groups, EMS Series of Lectures in Mathematics, vol. 20, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.

[7] A. Borisov, M. Sapir, Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms, 2003, `arXiv arXiv:math/0309121[math.GR]`

[8] J. O. Button, Minimal dimension faithful linear representations of common finitely presented groups, 2016 `arXiv:1610.03712[math.GR].`

[9] C. Drutu, V. Sapir, Non-linear residually finite groups, J. Algebra, **284** (2005) 174–178.

[10] D. I. Moldavanskii, Residual finiteness of descending HNN-extensions of groups, Ukrain. Mat. Zh., **44**, 6 (1992), 842–845. [Ukrainian Math. J. 44 (6) (1992), 758–760 (1993)].

[11] V. Metaftsis, E. Raptis, D. Varsos, On The Linearity Of HNN-Extensions With Abelian Base, J. Pure and Appl. Algebra, **216**, 5 (2012), 997–1003.

[12] T. Hsu, D. T. Wise, The residual finiteness of ascending HNN-extensions of polycyclic groups, J. Pure Appl. Algebra, **182**, 1 (2003), 65–78.

[13] B. A. F. Wehrfritz, On the holomorphs of soluble groups of finite rank, J. Pure and Appl. Algebra, **4** (1974), 55–69.

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ТЕОРИЙ СИМПЛЕКСОВ

Д. Ю. Емельянов*

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

1 Предварительные сведения

Определение 1. [1]–[6]. Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые* или (p,q)-*полуизолирующие* формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т.е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$, такие что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним, что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что *a полуизолирует b*. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т.е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант №0830/ГФ4).

Определение 2. [1, 7]. Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула},$$

$$\varphi(a,y) \vdash q(y), \text{ где } \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$, таких что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$.

Зафиксируем полную теорию T, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q) : \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, X_2, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,y),$$

где

$$\begin{gathered}\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y) \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3) \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y)).\end{gathered}$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств X_i не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \nsubseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого i, то

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1}).$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если каждое множество X_i состоит лишь из одного элемента u_i, то в записи

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

вместо множеств X_i будем использовать элементы u_i и писать

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \ldots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

и при этом выполняются следующие соотношения:

$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы p_i совпадают с типом p, то вместо записей

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

и

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

будем писать $P_p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_k \rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \ldots, u_k \rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе p идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\ldots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\ldots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor \cdot, \cdot \rfloor \rangle$, будучи *полуассоциативной* (*слева*) алгеброй, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor \cdot, \cdot, \ldots, \cdot \rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись uv вместо $u \cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1 u_2 \ldots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1 \cdot u_2) \cdot \ldots) \cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x \approx y)$ справедливы равенства $X \cdot \{0\} = X$ и $\{0\} \cdot X = X$ для любого $X \subseteq \rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}$ справедливо соотношение

$$Y \cdot Z = \bigcup \{yz \mid y \in Y, z \in Z\}. \tag{1}$$

Для семейства 1-типов $R \subset S(T)$ обозначим через I_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$

а через SI_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R \subseteq \mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из R отношения I_R и SI_R рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение SI_R. Что касается отношения I_R, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

Предложение 3. [1, 7]. *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории T, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение* I_p *(на множестве реализаций типа* p *в любой модели* $\mathcal{M} \models T$*) транзитивно;*

(2) *для любых меток* $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$ *множество* $P_p(u_1, u_2)$ *конечно.*

Предложение 4. [1, 7]. *Если* $p, q \in R$ *— главные типы, то* $\rho_{\nu(p,q)} \cup \rho_{\nu(q,p)} \subseteq U^{\geq 0}$.

Расширяя множество меток U положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u' \in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{S}\mathfrak{I}$ для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [1, 8].

Предложение 5. [1, 9]. *Для любой теории* T*, непустого семейства* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *изолированных типов и правильного семейства* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-система* $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ *состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка* u *имеет дополнение* $\bar{u}$*, такое что* $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ *и* $u \vee \bar{u}$ *является максимальным элементом. Если* $R = \{p\}$*, то моноид* $\mathfrak{S}\mathfrak{I}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot \rangle$ *порождается булевой алгеброй, для которой* $u \vee \bar{u}$ *соответствует изолирующим формулам типа* p.

Следствие 6. [1, 9]. *Для любой* ω*-категоричной теории* T*, непустого семейства* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *и правильного семейства* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-система* $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ *конечна, состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка* u *имеет дополнение* $\bar{u}$.

Теорема 7. [1, 9]. *Для любой* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория* T*, непустое семейство* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *изолированных типов и правильное семейство* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул, такие что* $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.

Следствие 8. [1, 9]. *Для любой конечной* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует* ω*-категоричная теория* T*, непустое семейство* $R \subseteq S^1(\emptyset)$ *и правильное семейство* $\nu(R)$ *меточных функций для полуизолирующих формул, такие что* $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.

Замечание 9. . Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов p и q главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 6 и 8 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

2 Алгебры бинарных изолирующих формул для теорий симплексов

Определение 10. [10]. *Симплекс* или *n-мерный тетраэдр* (от лат. simplex — простой) — геометрическая фигура, являющаяся n-мерным обобщением треугольника.

В простейшем случае симплекс это треугольник. Из-за разных вариаций компоновки, одинаковое количество симплексов может иметь разный диаметр. Мы будем рассматривать алгебры для теории симплексов с учетом диаметра. Под диаметром подразумевается понятие диаметра для графа.

Алгебры для теории симплексов обозначать будем через $\mathfrak{S}_n$, где n диаметр.

Определение 11. Для симплексов с диаметром, равным 1, обозначим через $\mathfrak{S}_1$ алгебру $\langle S_1; * \rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$

Определение 12. Для симплексов с диаметром, равным 2, обозначим через $\mathfrak{S}_2$ алгебру $\langle S_2; * \rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$

Определение 13. Для симплексов с диаметром, равным 3, обозначим через $\mathfrak{S}_3$ алгебру $\langle S_3; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

Определение 14. Для симплексов с диаметром, равным 5, обозначим через $\mathfrak{S}_5$ алгебру $\langle S_5; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4,5\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$
3	$\{3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$
4	$\{4\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$
5	$\{5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$

Определение 15. Для симплексов с диаметром, равным n, алгебра $\langle S_n; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ задается следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\ldots$	$\{k\}$	$\ldots$	$\{n\}$
1	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,m+1\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n\}$
2	$\{2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,m+2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	$\{m\}$	$\{0,1,\ldots,m+1\}$	$\{0,1,\ldots,m+2\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,m+k\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n\}$

и обозначается через $\mathfrak{S}_n$.

Заметим, что $(m+k)$ не может превышать значения n.

Непосредственная проверка для вышеуказанных таблиц устанавливает следующее

Утверждение 16. *Для симплексов с диаметром, равным n, алгебра бинарных изолирующих формул имеет вид $\mathfrak{S}_n$.*

Список литературы

[1] A. Pillay, Countable models of stable theories, Proc. Amer. Math. Soc, **89**, 4(1983), 666–672.

[2] B. S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly *o*-minimal theories, Algebra and Model Theory 2, Collection of papers, eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, Novosibirsk: NSTU, 1999, 5–28.

[3] B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly *o*-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference, eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono Singapore, World Scientific: 2006, 31–40.

[4] S. V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories, J. Math. Sciences., **169**, 5 (2010), 680–695.

[5] B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9**, 2012, 161–184.

[6] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Novosibirsk: NSTU, 2014.

[7] I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 380–407.

[8] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 408–433.

[9] S. V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories, International Mathematical Forum, **9**, 21 (2014), 1029–1033.

[10] П. С. Александров, Комбинаторная топология, М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.

ПРОБЛЕМА ФАКТОРИЗАЦИИ АВТОМОРФИЗМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е. В. Грачев, А. М. Попова

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ampopova@ngs.ru

Впервые эту проблему рассматривал Цассенхауз в начале 70-х годов прошлого века. Он предложил следующую гипотезу:

(Aut) Пусть $\Theta \in \operatorname{Aut} \mathbb{Z}G$ **— нормализованный. Тогда существует единица** $\alpha \in \mathbb{Q}G$ **и автоморфизм** $\sigma \in \operatorname{Aut} G$**, такие что**

$$\Theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha, \forall g \in G.$$

Определение нормализованного автоморфизма см. [1].

Однако к этой гипотезе были построены контрпримеры. (K. W. Roggenkamp, L. L. Scott (1988) [2], M. Hertweek (2002) [3]). Мы рассматриваем эту проблему с точки зрения теории представлений.

Пусть $G = \{e, g_2, \ldots, g_n\}$ — конечная группа, $T_1(G), \ldots, T_s(G)$ — все ее неприводимые неэквивалентные представления степеней $n_1, \ldots, n_s$.

$$D(G) = \{\operatorname{diag}(T_1(g), T_2(g), \ldots, T_s(g)), g \in G\}$$

Очевидно, что $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[D(G)]$, поэтому все дальнейшие рассуждения проводятся для $\mathbb{Z}[D(G)]$. Условимся кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ называть клетками кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$. Между различными клетками кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ возникают отображения

$$\mu_{ij} : \sum_{g \in G} \alpha_g T_i(g) \longleftrightarrow \sum_{g \in G} \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z},$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются. Про совокупность всех тех клеток $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $i = 1, \cdots, s$, между которыми отображения μ_{ij} являются изоморфизмами, будем говорить, что они образуют блок. Если клетки $\mathbb{Z}[T_{i_p}(G)], \ldots, \mathbb{Z}[T_{i_{p+k-1}}(G)], k \geq 1$, образуют блок, то обозначим $D_p(G) = \{\mathrm{diag}(T_{i_p}(g), \dots, T_{i_p+k-1}(g)), g \in G\}$, кольцо $O_p = \mathbb{Z}[D_p(G)]$ назовем блоком. Сразу возникает вопрос: является ли ограничение автоморфизма φ кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ на блок O_p автоморфизмом блока? Для ответа на вопрос заметим, что $O_p \cong \mathbb{Z}[D(G)]/I_p$, где $I_p = \{\sum\limits_{g\in G} \alpha_g D(g) | \sum\limits_{g\in G} \alpha_g D_p(g) = 0\}$.

Теперь понятно, что если $\varphi(I_p) = I_p$, то ограничение φ на O_p является автоморфизмом O_p, в противном случае ответ отрицательный.

Остановимся подробнее на втором случае. Понятно, что идеал I_p порождает идеал $\widetilde{I_p}$ алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$. Из вида клеточно-нижнетреугольного базиса кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ (см. [4]) понятно, что можно найти аддитивный базис идеала I_p, тогда $\widetilde{I_p}$ будет просто замыканием этого базиса над $\mathbb{Q}$. Автоморфизм φ продолжается до автоморфизма $\widetilde{\varphi}$ этой алгебры также в силу совпадения аддитивных базисов.

Относительно алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$ можно доказать, что

1) $\mathbb{Q}[D(G)] = \mathbb{Q}[O_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}[O_t]$;

2) алгебры $\mathbb{Q}[O_p], p = 1, \dots, t$ являются простыми над своими центрами.

Докажем первое утверждение.

Лемма 1. *Для каждого блока O_i кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ существует расклеивающее число, то есть минимальное ненулевое натуральное число m_i, такое что*

$$\mathrm{diag}(0, \dots, 0, m_i O_i, 0, \dots, 0) \subset \mathbb{Z}[D(G)]$$

При этом $m_i | \frac{|G|}{n_i}$, где n_i — степень клеток, входящих в блок O_i.

Доказательство. Напомним [6], что *проектор* P_i на подпространство V_i пространства $V = C^n$, инвариантное относительно $R(G)$, в котором реализуется прямая сумма представлений $T_i(G)$, имеет вид

$$P_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_i(g)} R(g), \tag{1}$$

где χ_i — характер представления $T_i(G)$. Тогда из вида (1) следует, что

$$P_i^t = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_i(g)} (R(g))^t = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{e_{n_i}, \dots, e_{n_i}}_{n_i}, 0, \dots, 0),$$

где e_{n_i} — единичная матрица степени n_i, поскольку P_i^t на элементах подпространства V_i действует тождественно, а элементы остальных инвариантных относительно $R(G)$ подпространств обращает в ноль.

Вернемся к представлению $D(G)$ и рассмотрим проекторы на подпространства, инвариантные относительно блоков. Пусть блок O_i состоит из k клеток. В этом случае рассмотрим матрицу

$$A_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{(\chi_i(g) + \dots + \chi_{i+k-1}(g))} D(g) =$$
$$= \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{e_{n_i}, \dots, e_{n_i}}_{k}, 0, \dots, 0),$$

где единичные матрицы стоят на местах клеток $\mathbb{Z}[T_i(G)], \dots, \mathbb{Z}[T_{i+k-1}(G)]$. По лемме 2 из работы [1], если $\chi = \chi_i + \dots + \chi_{i+k-1}$, то $\chi(G) \subset \mathbb{Z}$. Поэтому $\frac{|G|}{n_i} A_i = \sum_{g \in G} \chi(g) D(g) = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \underbrace{\frac{|G|}{n_i} e_{n_i}, \dots, \frac{|G|}{n_i} e_{n_i}}_{k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}[D(G)]$. Так как $\frac{|G|}{n_i} A_i \mathbb{Z}[D(G)] = \mathrm{diag}(0, \dots, 0, \frac{|G|}{n_i} O_i, 0, \dots, 0) \subset \mathbb{Z}[D(G)]$, имеем $m_i | \frac{|G|}{n_i}$. □

Из доказательства леммы 1 видно, что

$$\mathbb{Q}[D(G)] = \mathbb{Q}[O_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}[O_t].$$

Докажем утверждение 2).

Лемма 2. *Для каждого блока O_i кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ порождённая над ним $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathbb{Q}[O_i]$ является простой.*

Доказательство. В силу изоморфности $\mathbb{Q}$-алгебр $\mathbb{Q}[T_i(G)]$ и $\mathbb{Q}[O_i]$ (см. лемму 1 из работы [1]), будем доказывать простоту $\mathbb{Q}$-алгебры $\mathbb{Q}[T_i(G)]$.

Предположим, что в $\mathbb{Q}$-алгебре $\mathbb{Q}[T_i(G)]$ нашёлся нетривиальный идеал I. Пусть $\{h_1, \dots, h_d\}$ — некоторый $\mathbb{Q}$-аддитивный базис этого идеала. Поскольку $T_i(g)h_j, h_jT_i(g) \in I$, то линейная оболочка этого идеала над полем представления $\mathbb{Q}(O_i)$ блока O_i также будет идеалом в соответствующей $\mathbb{Q}(O_i)$-алгебре $\mathbb{Q}(O_i)[T_i(G)]$.

В свою очередь, построенная $\mathbb{Q}(O_i)$-алгебра является простой как $\mathbb{Q}(O_i)$-алгебра неприводимого представления из блока O_i, поэтому любой её нетривиальный идеал будет совпадать со всей $\mathbb{Q}(O_i)$-алгеброй $\mathbb{Q}(O_i)[T_i(G)]$. Следовательно, среди элементов $\mathbb{Q}$-аддитивного базиса $\{h_1, \dots, h_d\}$ найдется n_i^2 матриц, линейно независимых над полем $\mathbb{Q}(O_i)$, и значит, над его подполем $\mathbb{Q}(\chi_i)$. Здесь n_i — степень неприводимых представлений из блока O_i.

Пусть $h_1, \ldots, h_{n_i^2}$ — выделенная, линейно независимая над полем $\mathbb{Q}(\chi_i)$, часть $\mathbb{Q}$-аддитивного базиса идеала I, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_i}$ — базис конечного расширения $\mathbb{Q}(\chi_i) : \mathbb{Q}$. Так как $\mathbb{Q}[T_i(G)] = \mathbb{Q}(\chi_i)[T_i(G)]$, в идеале $I \lhd \mathbb{Q}[O_i]$ найдётся $k_i n_i^2$ элементов $\alpha_i h_j, i = 1, \ldots, k_i, j = 1, \ldots, n_i^2$. Этот набор не может быть линейно зависимым над $\mathbb{Q}$, так как в этом случае получаем линейную зависимость над $\mathbb{Q}(\chi_i)$ для элементов $h_1, \ldots, h_{n_i^2}$, чего не должно быть в силу их выбора.

В итоге получили, что в идеале $I \lhd \mathbb{Q}[O_i]$ найдётся $k_i n_i^2$ линейно независимых над $\mathbb{Q}$ элементов, что влечёт равенство $I = \mathbb{Q}[O_i]$, так как $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[O_i] = k_i n_{i_1}^2$. Таким образом, $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathbb{Q}[O_i]$ не содержит нетривиальных собственных идеалов, то есть является простой. □

Из 1), 2) следует, что

$$\widetilde{I}_p = \mathbb{Q}[O_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[O_{p-1}] \oplus \mathbb{Q}[O_{p+1}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[O_t],$$

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{I}_p) = \widetilde{I}_{p'} = \mathbb{Q}[O_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[O_{p'-1}] \oplus \mathbb{Q}[O_{p'+1}] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[O_t].$$

Тогда $\mathbb{Q}[D(G)]/\widetilde{I}_p \cong \mathbb{Q}[O_p]$, а $\widetilde{\varphi}(\mathbb{Q}[D(G)]/\widetilde{I}_p) \cong \mathbb{Q}[D(G)]/\widetilde{I}_{p'} \cong \mathbb{Q}[O_{p'}]$.

Соответственно, $\varphi(\mathbb{Z}[D_p(G)]) = \mathbb{Z}[D_{p'}(G)]$, т.е. автоморфизм φ задает изоморфизм между блоками $\mathbb{Z}[D_p(G)]$ и $\mathbb{Z}[D_{p'}(G)]$. Пусть $\sigma : \mathbb{Z}[D_p(G)] \to \mathbb{Z}[D_{p'}(G)]$ — изоморфизм между этими блоками и

$$a = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_p, \ldots, a_{p'}, \ldots, a_t) \in \mathbb{Z}[D(G)].$$

Тогда

$$\varphi(a) = \operatorname{diag}(a'_1, \ldots, \sigma(a_p), \ldots, \sigma^{-1}(a_{p'}), \ldots, a'_t),$$

где $\sigma(a_p) \in \mathbb{Z}[D_{p'}(G)]$, а $\sigma^{-1}(a_{p'}) \in \mathbb{Z}[D_p(G)$, т.е. при автоморфизме φ блоки O_p и $O_{p'}$ "переставляются". Напомним вид классовых сумм, т.е. сумм элементов, принадлежащих одному классу сопряженных элементов:

$$\sum_{g \in g_0^G} T_j(g) = \frac{|g_0^G| \chi_j(g_0)}{n_j} e_{n_j} \text{ (см. [5])}$$

Так как при изоморфизме колец скалярные матрицы переходят в скалярные, то и характеры блоков при автоморфизме φ переставляются.

В связи с этим введем названия автоморфизмов.

Если $\varphi(I_p) = I_p$, то назовем φ — *стабилизирующим.*

Если $\varphi(I_p) = I_{p'} \neq I_p$, то назовем φ — *переставляющим.*

Стабилизирующие автоморфизмы образуют подгруппу

$$\mathrm{Stab}(\mathbb{Z}[D(G)])$$

в группе $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}[D(G)])$. Понятно, что $\mathrm{Stab}(\mathbb{Z}[D(G)])$ — нормальная подгруппа конечного индекса в $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}[D(G)])$, т.е. существует конечный набор переставляющих автоморфизмов, определяющих фактор-группу $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}[D(G)])/\mathrm{Stab}(\mathbb{Z}[D(G)])$.

Для описания строения стабилизирующих автоморфизмов, изученных нами ранее, введем в рассмотрение еще один автоморфизм. А именно, пусть K — алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$, $\tau \in \mathrm{Aut}\,K$, $a = (a_{ij}) \in K_n$. Определим $\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau})$

Ограничение стабилизирующего автоморфизма φ на блок O_p является автоморфизмом блока O_p. Отсюда ограничение $\widetilde{\varphi}$ на алгебру $\mathbb{Q}[O_p]$ является автоморфизмом этой алгебры. Центром алгебры $\mathbb{Q}[O_p]$ является поле характера $\mathbb{Q}(\chi_{i_p})$. Тогда по теореме Нетер — Сколема, если рассматривать алгебру $\mathbb{Q}[O_p]$ как алгебру над $\mathbb{Q}$, ее автоморфизмами являются композиции автоморфизмов $\hat{\tau}'$, где τ' — продолжение автоморфизма $\tau \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Q}(\chi_{i_p}))$ до автоморфизма поля представления блока O_p, и сопряжения единицами этой алгебры. В результате нами получена факторизация автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$, отличная от гипотезы Цассенхауза.

Теорема. *Любой нормализованный автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть композиция $\alpha \circ \hat{\tau} \circ \varphi_s$, где α — переставляющий автоморфизм из конечного набора, τ — автоморфизм поля представления группы G, φ_s — сопряжение единицей s алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$.*

Список литературы

[1] Е. В. Грачев, А. М. Попова, Автоморфизмы целочисленных групповых колец, Algebra and Model Theory 10, Новосибирск, 2015, 85–91.

[2] K. W. Roggenkamp, L. L. Scott, On a conjecture of Zassenhaus for finite group rings, manuscript, November 1988.

[3] M. Hertweck, Integral group ring automorphisms without Zassenhaus factorization, Illinois Journal of Mathematics, **46**, 1 (2002), 233–245.

[4] Е. В. Грачев, А. М. Попова, Единицы целочисленного группового кольца группы A_5, Вестник Красноярского государственного университета, Серия: физ.-мат. науки, **4** (2006), 54–59.

[5] В. А. Белоногов, Представления и характеры в теории конечных групп, Свердловск, 1990, 379 с.

[6] Жан-Пьер Серр, Линейные представления конечных групп, М.: "Мир", 1970, 132 с.

AGENT-BEHAVIOR SYSTEM: AN INTRODUCTION TO A TOPOLOGICAL APPROACH

Y. Kiouvrekis

National Technical University of Athens,
Department of Mathematics, Herron Polytechniou 9,
15780 Zografou, Greece
University of Nicosia, Institute For the Future - IFF,
Nicosia, Cyprus
e-mail: yiannis.kiouvrekis@gmail.com

1 Introduction

Many experts in the field of Digital Currency and Computer Science in general have highlighted the need for convergence with the field of Mathematical Logic and Formal Methods. The article of Herihy and Moir [6] highlights the necessity of creating a logical system that can express propositions such as "*Because A (an agent) endorsed false statement, A can no longer be trust with nuclear codes*" and properties like authorization, fairness, incentives as well as behaviors of miners.

In his presentation *How Formal Analysis and Verification Add Security to Blockchain-based Systems* during the last Blockchain Protocol Analysis and Security Engineering Conference 2017 Shinichiro Matsuo (MIT) reports the need for a logical system that is sound and complete, and within which we can describe the notion of security, privacy and thus prove the desirable security specifications.

A first step was made by Brunnler et al [2] with blockchain epistemic logic, but as described by the writers, it is at a rather early stage. In addition, Joseph Y. Halpern and Rafael Pass in [4] provide a complete characterization of agent's knowledge.

With our work, our goal is as follows. First, we want to examine whether it is possible to create a logic that can describe properties such as privacy, security or Common Prefix Property, Chain Quality Property etc. Can there be only one logical system, a universal logic? What knowledge do we need from model theory and mathematical logic in order to be sure that we can express properties in the logical system? Furthermore, we should question the implications of other properties of a logical system like Craig's interpolation property and compactness property. Moreover, what knowledge can we get from the community of formal methods and the work done on the expressiveness of properties such as privacy in logical systems?

The second thing we intend to explore is the relationship between Bitcoin, Game Theory and Mathematical Logic. Can we translate the fundamentals of Bitcoin Game in Formal Languages? It is known that the tools of modal logic have enriched the game-theoretic language by making it possible to express concepts that were previously either informally claimed to be captured by a solution concept. A famous theorem of this theory is the notion of common belief in rationality and its relation to iterative deletion of strictly dominated strategies [1].

The first step is here, where we give a first definition about **stable behavior** through topological approach, using coalgebraic tools and notions.

2 Coalgebras and Topology

In general we can say that a coalgebra consists of a set X named as a state space and a function $\xi : X \to T(X)$ where the elements of $T(X)$ labeled as transitions from X. Formally the definition of coalgebra in the language of category theory is above.

Definition 1. Let $\mathcal{C}$ be a category and $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ an endofunctor then a *T-coalgebra* is a pair (X, ξ) where X is an object in category $\mathcal{C}$ and ξ is an arrow in $\mathcal{C}$, i.e. $\xi : X \to T(X)$.

Definition 2. Let $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ be an endofunctor then a *morphism* between two T-coalgebras (X, ξ) and (Y, γ) is a morphism $f : X \to Y$ such that the following diagram commutes, i.e. $\gamma f = T(f)\xi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \xi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ T(X) & \xrightarrow[T(f)]{} & T(Y) \end{array}$$

Fig. 1: Morphism of $\mathcal{T}$-coalgebra

Example 3 (Kripke Models)**.** This example is coming from the area of Modal Logic. A Kripke model [7] for a set of atomic formulas is a triple $\mathcal{M} = (W, \{R^m_{m\in MOD}, V\})$ where W, the domain, is a non-empty set whose elements called as *points* or *states* or *possible worlds*. Each R^m is a binary relation on W and V is the valuation function, which assigns to each basic propositional symbol of the language a subset of the domain.

Following [5] we can define through a coalgebraic formalization as $\text{Next}(w) = \{w' \in W \mid wRw'\}$ to be the set of states that are possibly next of w and as $\text{Prop}(w) = \{p \in P \mid w \in V(p)\}$ to be the formulas which are true in state w.

Then we can see the Kripke model as (W, ξ), where

$$\xi : W \to \mathcal{P}(W) \times \mathcal{P}(P),\ \xi(w) = \langle \text{Next}, \text{Prop} \rangle$$

and finally the standard modalities can be defined as

$$[\Box\phi]_\xi = \left\{ w \in W \mid \xi(w) \subseteq [\phi]_\xi \right\}.$$

Example 4 (Topology)**.** It is well known that we can obtain concrete examples of colagebras from topological spaces [3]. If (X, τ) is a topological space we can see it as a $\mathcal{T}$-coalgebra using the operation which associates with every point $x \in X$ the filter U_x , i.e.

$$V \in U_x \iff \exists \mathcal{O} \in \tau :\ x \in \mathcal{O} \& \mathcal{O} \subseteq V. \tag{1}$$

Definition 5. [3] An $\mathcal{F}$-coalgebra (X, a) is called *topological* if there exists a topology τ on X such that for all $x \in X, a(x) = U_\tau(x)$.

Proposition 6. [3] *Let (X, τ) and (Y, ρ) be two topological spaces. Then a map $f : (X, U_\tau) \to (Y, U_\rho)$ is a $\mathcal{T}$-homomorhpism iff f is continuous and open. Furthermore a subset Z of X is a subcoalgebra iff it is open.*

In computer science, coalgebra has emerged as a formal way of specifying the behaviour of systems and the behaviorally equivalent of two states.

Definition 7. For two coalgebras $\xi : X \to T(X)$ and $\xi' : X' \to T(X')$, we say that two states $x \in X$ and $x' \in X'$ are *behaviourally equivalent* and we write $x \leftrightharpoons x'$ if there exists a coalgebra $\phi : U \to T(U)$ and two coalgebra homomorphisms $f : X \to U$ and $g : X' \to U$ such that $f(x) = g(x')$.

It is obvious from the above definition that behaviour equivalence is a reflexive and symmetric relation, it is not difficult to show that in any category with pushouts the behaviour equivalence is also transitive relation. The initial step for our work is to introduce a definition about the behavior of agents using topological notions.

Definition 8 (**Stable under Behavior - SuB**). Let X be a set, τ a topology over X and f a function $f : X \to X$, then a point is *Stable under Behavior of the open U_x and the orbit of function f* iff $f^{(n)}(x) \in U_x$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Definition 9. Let (X, τ) be a topological space and f a continuous function then the orbit of x under the action of f is the set

$$O_x = \{x, f(x), f(f(x)) = f^{(2)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots\}$$

Theorem 10. *Let (X, τ), (Y, ρ) be topological spaces, α a continuous function on X, and $x \in X, y \in Y$ two behaviorally equivalent points such that x is Stable under Behavior of α and U_x. Then z such that $f(x) = g(y) = z \in (Z, \chi)$ is Stable under Behavior of $f[U_x]$ and $g = f \circledcirc \alpha$ where $g : Z \to Z$ such that $g^{(n)}(z) = f\left(\alpha^{(n)}(x)\right)$.*

Proof. Let $U_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ be an open set in (X, τ). Then $f[U_x]$ is open in (Z, χ). We have also $f[O_x] \subseteq f[U_x]$. Therefore, $\forall\ n \in \mathbb{N} :\ g^{(n)}(z) \in f[O_x]$. □

3 Future work

Based on the presented arguments, it is clear that we treat **states** as **agents**. Also it becomes clear that it is important to develop syntax and semantics of modal logics for reasoning about multiple parties creating a map of formal verification projects on Digital Currency field and templates and languages which are suitable for formal verification.

Acknowledgements

I would like to express my gratitude to Professor Sergey Sudoplatov for giving me the opportunity to present my and our joint work at Erlagol 2017.

References

[1] G. Bonanno, Modal logic and game theory: Two alternative approaches, Risk, Decision and Policy, **7** (2002), 309–324, 10.1017/S1357530902000704.

[2] K. BrΓjnnler, D. Flumini, T, Studer, A Logic of Blockchain Updates, 2017.

[3] K, O. Chung, Weak homomorphisms of coalgebras. Ph.D Thesis, Iowa State University, 2007

[4] J. Y. Halpern, R. Pass,A Knowledge-Based Analysis of the Blockchain Protocol, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, **251** (2017), 324–335. 10.4204/EPTCS.251.22.

[5] I. Hasuo, Modal Logics for Coalgebras - A Survey, Report, Tokyo Institute of Technology, 2003.

[6] M. Herlihy, M. Moir, Blockchains and the Logic of Accountability: Keynote Address, (2016), 27–30, 10.1145/2933575.2934579

[7] P. Blackburn, J. F. A. K. van Benthem, F. Wolter, Handbook of Modal Logic, (Studies in Logic and Practical Reasoning), Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, **1** 2006.

FIRST-ORDER COMBINATORICS AND A DEFINITION TO THE CONCEPT OF A MODEL-THEORETIC PROPERTY WITH DEMONSTRATION OF POSSIBLE APPLICATIONS

M. G. Peretyat'kin*

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125, Pushkin str, Almaty, 050010, Kazakhstan
e-mail: peretyatkin@math.kz

In the work [1], initial notions of the first-order combinatorics are defined presenting a conceptual framework for investigations of expressive power of predicate logic. First-order combinatorics requires to accept some family of methods for transformation of theories. A transformation has the aim either to simplify the theory or to reduce it to a definite form with the same isomorphism type of the Tarski–Lindenbaum algebra and with preserving model-theoretic properties of corresponding completions. The common practice of investigations in model theory widely uses a terminology connected with the model-theoretic properties of complete theories, however, this term was not specified in any way yet. Thus, a necessity to give a definition to the concept of a model-theoretic property becomes actual.

Combinatorics of a given type is characterized by a definite set of used methods of transformation of theories and by the layer of those model-theoretic properties which are preserved by these methods. Relation between the accepted class of methods and the semantic layer of preserved model-theoretic properties is a Galois's correspondence. Therefore, an inverse dependence takes place between the set of methods and the volume of the layer of model-theoretic properties preserved on them. Signature reduction procedures and transformations by the universal construction of finitely axiomatizable theories are considered as combinatorial methods in predicate

*The work was supported by grant (0665/GF4) of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (2015–2017).

logic; these methods are taken as a basis for the first-order combinatorics. For finitary combinatorics, we accept methods of a transformation of finite signatures and more general methods of Cartesian extensions of theories while for infinitary combinatorics, we accept methods of a reduction of infinite signatures to finite ones as well as transformations of theories by means of the universal construction. The class of finitary methods can be considered separately. As for the class of infinitary methods, its consideration requires adding the finitary methods.

In this work, we describe the operation of a Cartesian extension of a theory, give a definition to the concept of a model-theoretic property, and specify in detail the pragmatic approach that turns out to be the most adequate to the real practice of investigations in model theory. The definition of a model-theoretic property includes some informal parts, nevertheless, its applications ensure exact mathematical statements.

1 Preliminaries

We consider theories in first-order predicate logic *with equality* and use general concepts of model theory, algorithm theory, constructive models, and Boolean algebras that can be found in [2], [3], and [4]. A signature is called *rich* if it contains at least one n-ary predicate or function symbol for $n \geqslant 2$ or two unary function symbols. In the work, the signatures admitting Gödel's numbering are only considered. Such signature is called *enumerable*. Generally, *incomplete theories* are considered. For theories, c.a means *computably axiomatizable* while f.a. means *finitely axiomatizable*.

There are two levels of definability in the first-order logic. The first one is called *radically logical* or briefly *model*. It does not assume any limitation on the class of used formulas. The second more delicate level is called *algebraic*. At this level, $\exists \cap \forall$-type of first-order definability is used. In this work, we systematically follow the algebraic approach. If it is needed, all results in the article can be transferred to the form corresponding the model-type definability.

2 Cartesian-type interpretations

We use a simplest concept of an *interpretation* of a theory T_0 in the region $U(x)$ of a theory T_1, [5]. Classes of *isostone* and *model-bijestive* interpretations are introduced in [6]. In this section, we introduce a technical class of interpretations presenting finitary methods in first-order logic.

Given a signature σ and a finite sequence of formulas of this signature of either of the following forms:

$$\begin{array}{ll} (a) & \varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \ldots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle, \\ (b) & \varkappa = \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_s^{m_s} \rangle, \end{array} \tag{1}$$

where φ_k is a formula with m_k free variables, $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$ is a formula with $2m_k$ free variables such that $\operatorname{Len} \bar{y}_k = \operatorname{Len} \bar{z}_k = m_k$; moreover, (1)(b) is just a simpler notation for the common entry (1)(a) in the case $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$ coincides with $\bar{y}_k = \bar{z}_k$ for all $k \leqslant s$.

Starting from a model $\mathfrak{M}$ of signature σ together with a tuple $\varkappa$ of any of the forms (1)(a,b) we are going to construct a new model $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ of signature

$$\sigma_1 \;=\; \sigma \;\cup\; \{U^1, U_1^1, U_2^1, \ldots, U_s^1\} \;\cup \{K_1^{m_1+1}, \ldots, K_s^{m_s+1}\} \tag{2}$$

as follows. As the universe, we take $|\mathfrak{M}_1| = |\mathfrak{M}| \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s$, where all specified parts are pairwise disjoint sets. On the set $|\mathfrak{M}|$, all symbols of signature σ are defined exactly as they were defined in $\mathfrak{M}$; in the remainder, they are defined trivially; predicate $U(x)$ distinguishes $|\mathfrak{M}|$; predicate $U_k(x)$ distinguishes A_k; the other predicates are defined by specific rules depending on the case. In the case (1)(b), each predicate K_k in (2) should be defined so that it would represent a one-to-one correspondence between the set of tuples $\{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}$ and the set $A_k = U_k(\mathfrak{M}_1)$. Turn to the most common case (1)(a). Denote by $\operatorname{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$ a sentence stating that ε_k is an equivalence relation on the set of tuples distinguished by the formula $\varphi_k(\bar{x})$ in $\mathfrak{M}$. In this case, (m_k+1)-ary predicate K_k should be defined so that it would represent a one-to-one correspondence between the quotient set $\{\bar{a} \mid \mathfrak{M} \models \varphi_k(\bar{a})\}/\varepsilon'_k$ and the set $U_k(\mathfrak{M}_1)$, where $\varepsilon'_k(\bar{y}, \bar{z}) = \varepsilon_k(\bar{y}, \bar{z}) \vee \neg\operatorname{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$. The aim of replacement of ε_k by ε'_k using $\operatorname{Equiv}(\varepsilon_k, \varphi_k)$ is to provide total definiteness of the operation of an extension $\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ independently of whether the formulas ε_k represent equivalence relations in corresponding domains or not. In the case (1)(a), $\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ is said to be a *Cartesian-quotient extension of* $\mathfrak{M}$ while in the case (1)(b), the model $\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle$ is said to be a *Cartesian extension of* $\mathfrak{M}$ *by a sequence of formulas* $\varkappa$.

Expand the operation of an extension (initially defined for models) on theories. Given a theory T and a tuple $\varkappa$ of the form (1). Using a fixed signature (2) for extensions of models, we define a new theory $T' = T\langle\varkappa\rangle$ as follows: $T' = \operatorname{Th}(K)$, $K = \{\mathfrak{M}\langle\varkappa\rangle \mid \mathfrak{M} \in \operatorname{Mod}(T)\}$. In the case (1)(a) it is called a *Cartesian-quotient extension*, while in the case (1)(b) it is called a *Cartesian extension* of T *by a sequence* $\varkappa$.

Usually, we follow an algebraic approach; i.e., we consider passages $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ for which the sequence (1) satisfies the following technical condition:

$$\varphi_k(\bar{x}_k) \text{ and } \varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k) \text{ are } \exists \cap \forall\text{-presentable, for all } k \leqslant s. \tag{3}$$

Denote by $\mathcal{KD}(\sigma)$ and $\mathcal{KC}(\sigma)$ the sets of tuples of formulas of signature σ of the forms, respectively, (1)(a) and (1)(b), while $\mathcal{KD}$ and $\mathcal{KC}$ are unions of these sets for all possible (enumerable) signatures σ. We denote by $\mathcal{KC}_{\exists\cap\forall}$ the set of all tuples (1)(b) satisfying (3), while $\mathcal{KD}^{\varepsilon}_{\exists\cap\forall}$ is the set of all tuples (1)(a) satisfying (3).

In theory $T\langle\varkappa\rangle$, the region $U(x)$ represents a model of theory T. Particularly, the transformation $T \mapsto T\langle\varkappa\rangle$ defines a natural interpretation $I_{T,\varkappa}$ of T in $T\langle\varkappa\rangle$. It is called a *special Cartesian-quotient* interpretation. Similar definition applies to the other case of the tuple $\varkappa$; thereby, the concepts of a *special Cartesian* interpretation is also defined. Considering theories up to an algebraic isomorphism we may use simpler term *Cartesian-quotient* or, respectively, *Cartesian* interpretation.

Lemma 1. *Given a theory T of an enumerable signature σ and a sequence of formulas $\varkappa \in \mathcal{KD}(\sigma)$. Special Cartesian-quotient interpretation $I_{T,\varkappa} : T \rightarrowtail T\langle\varkappa\rangle$ is effective, model-bijective, and isostone. In particular, interpretation $I_{T,\varkappa}$ determines a computable isomorphism $\mu_{T,\varkappa} : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(T\langle\varkappa\rangle)$ between the Tarski–Lindenbaum algebras.*

The following statement is established based on first-order combinatorial properties of Cartesian extensions of theories:

Lemma 2. *The following relation defined on the class of all theories*

$$T \approxeq_a S \Leftrightarrow_{dfn} (\exists \varkappa' \varkappa'' \in \mathcal{KC}_{\exists\cap\forall}) \left[\, T\langle\varkappa'\rangle \approx_a S\langle\varkappa''\rangle \,\right] \tag{4}$$

is reflexive, symmetric, and transitive (i.e., it is an equivalence relation)

Further properties of Cartesian-type extensions of theories and interpretations can be found in [7] and [8].

Definition 3. We introduce the following notations for particular semantic layers that are relevant in this direction:

(A) ASL = the set of model-theoretic properties $\mathfrak{p} \in AL$ preserved by any special Cartesian interpretation $I_{T,\xi} : T \rightarrowtail T\langle\xi\rangle$ for an arbitrary computably axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and an arbitrary finite tuple $\xi = \langle\varphi_1, \ldots, \varphi_s\rangle$ of sentences of signature σ satisfying (3).

(B) $MSL = ASL \cap ML$.

(C) ACL = the set of model-theoretic properties $\mathfrak{p} \in AL$ preserved by any special Cartesian interpretation $I_{T,\xi} : T \rightarrowtail T\langle\xi\rangle$ for an arbitrary computably axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and an arbitrary tuple $\xi = \langle\varphi_1^{m_1}, \ldots, \varphi_s^{m_s}\rangle$ of formulas of signature σ satisfying (3).

(D) $MCL = ACL \cap ML$.

(E) ADL = the set of model-theoretic properties $\mathfrak{p} \in AL$ preserved by any special Cartesian-quotient interpretation $I_{T,\xi} : T \rightarrowtail T\langle\xi\rangle$ for an arbitrary computably axiomatizable theory T of an enumerable signature σ and an arbitrary tuple $\xi = \langle\varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \ldots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s\rangle$ of formulas of signature σ satisfying (3).

(F) $MDL = ADL \cap ML$.

Layer ACL is said to be the *(algebraic) Cartesian* semantic layer; it plays the role of a *pragmatic release* of the *finitary semantic layer*. By MCL we denote its model version called the *model Cartesian* layer. Layer ADL is said to be the *(algebraic) Cartesian-quotient* semantic layer; it plays the role of a *maximalistic release* of the *finitary semantic layer*. By MDL we denote its model version called the *model-type Cartesian-quotient* layer.

Fig. 1 presents a scheme of inclusions between the semantic layers and corresponding similarity relations relevant for first-order combinatorics. Arrows point out relatively stronger similarity relations and relatively wider semantic layers of model-theoretical properties. Two relations $\approx$ and $\approx_a$ in the top are relations of isomorphism of theories, where $\approx$ means a *model isomorphism* or simply *isomorphism*, while $\approx_a$ means an *algebraic isomorphism* or $\exists\cap\forall$*-presentable equivalence* between theories. Although $\approx$ and $\approx_a$ are not similarity relations they are included in the scheme for the sake of completeness. The entries $\equiv_c$, $\equiv_{ac}$, etc., are short forms for semantic similarity relations $\equiv_{MCL}$, $\equiv_{ACL}$ with semantic layers MCL, ACL, etc., that were defined above. The inclusions $MDL \subseteq MCL$ and $ADL \subseteq ACL$ are also valid although they are not presented in the scheme in Fig. 1.

The layer MQL consists of the model-theoretic properties preserved by all interpretations in the class $IQuasi \cup ICartes$ between computably axiomatizable theories, where $IQuasi$ is the set of all quasiexact interpretations, while $ICartes$ is the set of all Cartesian interpretations. The layer MQL is supported by a regular version of the universal construction of finitely axiomatizable theories, [6].

Fig 1: Scheme of semantic layers of model-theoretic properties

The Hanf semantic layer HL is an empty set $\varnothing$. Corresponding semantic similarity relation $\equiv_{\varnothing}$, alternatively $\equiv_{h}$, is called *Hanf's isomorphism* because William Hanf was the first investigator who studied such relations between theories just in relation to the problem of expressive possibilities of first-order logic, [9].

3 A definition to the concept of a model-theoretic property

We are going to discuss approaches to the problem of classification of complete theories modulo coincidence of their model-theoretic properties, cf. [10]. Two complete theories are said to be *equivalent* if their real model-theoretic properties are identical:

$$T_1 \overset{\text{MT}}{\simeq} T_2 \Leftrightarrow_{dfn} (\forall \text{ real model-theoretic property } \mathfrak{p})\big[\, T_1 \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow T_2 \in \mathfrak{p} \,\big]. \quad (5)$$

Accordingly, any classes of complete theories closed under $\overset{\text{MT}}{\simeq}$ are said to be *real* model-theoretic properties. Thus, to define the concept of a real model-theoretic property it is necessary to find available dependencies (called reasoning) between complete theories of the following form

$$T_1 \simeq_{\text{x}} T_2 \Rightarrow T_1 \overset{\text{MT}}{\simeq} T_2, \quad (6)$$

that have significance in the practice of working in model theory.

Two most important pieces of reasoning (for complete theories) are:

$$\begin{aligned} &(a)\ \ T \approx_a S \Rightarrow T \overset{\text{MT}}{\simeq} S, \\ &(b)\ \ T\langle\varkappa\rangle \Rightarrow T \overset{\text{MT}}{\simeq} S,\ \text{ for any } \varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}. \end{aligned} \tag{7}$$

General significance of the reasoning (7)(a) is obvious. Argumentation (7)(b) concerns virtual expansions of the universe which are just plain codings for the initial universe; therefore, the pointed out sequence of implications (7)(b) for all $\varkappa \in \mathcal{K}C$ can also be considered as adequate to the common practice of work in model theory. Notice that, lots of researchers follow a naive approach considering any classes of complete theories, even if they are not closed under isomorphisms of theories. To avoid this common irregular situation, we will assume (by default) that any considered class of complete theories first should be closed under algebraic isomorphisms of theories by the rule

$$\mathfrak{p} \ \mapsto\ \mathfrak{p}^* = [\mathfrak{p}]_{\approx_a} = \{\, T \in \mathbb{C} \mid (\exists T' \in \mathfrak{p})\,[\, T \approx_a T' \,]\,\}. \tag{8}$$

This correction rule is said to be a *normalization pre-stage* in the definition we are going to introduce.

We give a *generic definition* to the concept of a model-theoretic property.

Definition 4 (Generic definition of a model-theoretic property)**.** Initially, we have to point out a collection of relations of reasoning of the form (for complete theories)

$$\simeq_{\mathrm{x}}^{(i)},\ \ i \in I \tag{9}$$

that we intend to accept as a basis of the definition. The relation $\overset{\text{MT}}{\simeq}$, cf. (5), is presented by the relation $\simeq_{\mathrm{x}}^{*}$ obtained by the operation of closure of the system of relations (9) up to an equivalence relation. Accordingly, the class of all real model-theoretic properties is presented by the following expression:

$$AreaL = \{\, \mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C} \mid \mathfrak{p} \text{ is closed under } \simeq_{\mathrm{x}}^{*} \}. \tag{10}$$

To check up, whether a set $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}$ is a model-theoretic property, first, a normalization pre-stage $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^*$ should be performed; then, the condition $\mathfrak{p}^* \in AreaL$ is to be checked. If the result is positive, we qualify $\mathfrak{p}$ as a *real model-theoretic property*; moreover, a specifying term "$\mathfrak{p}$ is a model-theoretic property up to the closure under isomorphisms" may be used. Otherwise, if the test $\mathfrak{p}^* \in AreaL$ fails, $\mathfrak{p}$ is qualified as a class that is not a real model-theoretic property.

Lemma 5. *An inverse dependence of the set of real model-theoretic properties on the accepted set of reasoning* $\simeq_{\mathrm{x}}^{(i)}$*,* $i \in I$*, takes place.*

Proof. Indeed, let the pointed out set defines an equivalence relation $\simeq_{\mathrm{x}}^{*}$ playing the role of the relation $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$, thus, defining the layer *AreaL*. Assume that, as the base for a new definition, some larger set of reasoning $\simeq_{\mathrm{x}}^{(i)}$, $i \in I^{+}$, $I^{+} \supseteq I$, is taken. It is obvious that the inclusion $\simeq_{\mathrm{x}}^{*} \subseteq \simeq_{\mathrm{x}}^{+}$ must take place; i.e., each class of the new equivalence $\simeq_{\mathrm{x}}^{+}$ consists of a number of classes of the initial equivalence $\simeq_{\mathrm{x}}^{*}$. Thereby, we have $AreaL^{+} \subseteq AreaL$ because $AreaL^{+}$ consists of the sets of complete theories closed under equivalence $\simeq_{\mathrm{x}}^{+}$ having larger classes in comparison with those of the initial equivalence $\simeq_{\mathrm{x}}^{*}$. □

The following (pragmatic) variant of the definition is fixed as preferable:

Definition 6 (Pragmatic specification to Definition 4)**.** As a set of reasoning, we accept the relation (7)(a) together with a series of relations (7)(b) for all $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$. The relation $\approxeq_{a}$ on the class of all complete theories defined by expression (4) in Lemma 2 is the closure of this system of relations. Thus, within this approach, relation $\overset{\mathrm{MT}}{\simeq}$ coincides with $\approxeq_{a}$. Accordingly, in view of the scheme of semantic layers in Fig. 1, we obtain the following chain of inclusions:

$$AreaL = ACL \subseteq ASL \subseteq AL. \tag{11}$$

By default, we also suppose that, to apply Definition 6 for a set $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}$, a normalization transformation (8) should be performed initially.

An important statement concerning different versions of Definition 4.

Lemma 7. *Suppose that a variant* α *of definition of a real model-theoretic property is chosen with reasoning consisting of the relation* (7)(a) *and a series of relations (7)(a) for all* $\varkappa \in \mathcal{K}C_{\exists\cap\forall}$ *together with a definite set of additional relations of the form* (6)*. Then, the following chain of inclusions takes place:*

$$AideaL^{\alpha} \subseteq AreaL^{\alpha} \subseteq ACL \subseteq ASL \subseteq AL, \tag{12}$$

where the ideal semantic layer $AideaL^{\alpha}$ *corresponds to the potential possibility of an extension of the accepted system of reasoning* α *with some new rules of the form* (6) *that can appear and could be accepted in the future within the system* α*.*

Proof. From the principle of inverse dependence we mentioned before. □

The following systems of reasoning to the definition of the concept of a real model-theoretic property are possible. Let an arbitrary set $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}$ be given. At the *naive approach*, any set of complete theories is considered as a model-theoretic property; the *primitive approach* requires that $\mathfrak{p}$ should be closed under isomorphisms of theories; the *pragmatic approach*, cf. Definition 6, requires that $\mathfrak{p}$ is closed under isomorphisms, Cartesian extensions, and back transitions in the operation of Cartesian extensions of theories; at last, the *maximalistic approach* requires that $\mathfrak{p}$ is closed under isomorphisms, Cartesian-quotient extensions, and back transitions in the operation of Cartesian-quotient extensions of theories, i.e., the reasoning $T\langle\varkappa\rangle = S \Rightarrow T \overset{\text{MT}}{\simeq} S$, for all $\varkappa \in \mathcal{K}D^{\varepsilon}_{\exists\cap\forall}$, is accepted that is wider in comparisons with (7)(b).

Actually, other approaches for the definition to the concept of a realistic model-theoretic property are possible. They can be based on principles different from those adopted within the proposed scheme. To compare the approach suggested here with the other potentially possible ones, some discussion about the advantages and disadvantages of each of the alternative approaches may be needed.

4 Transformations of theories complementary to methods of finitary and infinitary first-order combinatorics

In this section, we describe a number of interesting transformations of theories which have properties close to those of methods of the first-order combinatorics. These transformations are intended for different purposes including that they can be used as possible extensions of argumentation in a definition to the concept of a model-theoretic property. The suggested demonstrations represent a useful addition to the first-order combinatorial approach.

Demo 1. The *rounding operation* modulo theory SI. We consider transformation of theories $T \mapsto T \oplus SI$, where SI is a *successor* theory with an *initial element* and *without cycles*.

Signature $\sigma_{SI} = \{\lhd^2, c\}$, axioms of the theory SI:

1°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd x)\big]$;

2°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(x \lhd y) \,\&\, (x \lhd z) \rightarrow (y = z)\big]$;

3°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(y \lhd x) \,\&\, (z \lhd x) \rightarrow (y = z)\big]$;

4°. $(\forall x)(\exists y)\big[x \lhd y\big]$;

5°. $(\forall x)\big[(x \neq c) \to (\exists y)(y \lhd x)\big]$;

6°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd c)\big]$;

7°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \to z_0 \neq z_n\big)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

The theory SI is so simple that, in the common practice, anyone can say that this theory has no model-theoretic properties. In view of its completeness and decidability, the passage $T \mapsto T \oplus SI$ preserves an isomorphism type of the Tarski–Lindenbaum algebra and transfers the majority of model theoretic properties to correspondent complete extensions of theories. The rounding operation, cf. Section 2.5 in [11], does not belong to the class of finitary methods as it does not preserve the property to have a finite model. It is possible to check that the natural interpretation $I : T \mapsto T \oplus SI$ is quasi-exact. Therefore, this operation is an infinitary method by definition. In the work [6], the rounding operation is applied to transform a theory into a theory with infinite models. This represents a useful reception allowing to prevent situations with finite models in constructions corresponding to the infinitary direction in model theory.

Demo 2. *Continual series of rounding operations.* Such series can be constructed based on the idea used in the proof of Lemma 1.4.1. in [11]. A set $A \subseteq \mathbb{N}$ is called *rarefied* if $A = \{n_0, n_1, \ldots, n_i, \ldots\}$, $n_0 < n_1 < \cdots < n_i < \ldots$; moreover, limit of the sequence $a_i = (n_{i+1} - n_i)$ is infinity. By $\mathfrak{A}$, we denote the family of all rarefied sets. It is obvious that $\mathfrak{A}$ is a continual family. Consider a fixed set $A \in \mathfrak{A}$. We construct a modification $SI[A]$ of theory SI of a successor relation as follows. Signature $\sigma_{SI[A]} = \{\lhd^2, c, U^1\}$, axioms of theory $SI[A]$ are the following:

1°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd x)\big]$;

2°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(x \lhd y)\,\&\,(x \lhd z) \to (y = z)\big]$;

3°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(y \lhd x)\,\&\,(z \lhd x) \to (y = z)\big]$;

4°. $(\forall x)(\exists y)\big[x \lhd y\big]$;

5°. $(\forall x)\big[(x \neq c) \to (\exists y)(y \lhd x)\big]$;

6°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd c)\big]$;

7°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \to z_0 \neq z_n\big)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$;

8°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(c = z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \to U(z_n)\big)$, for all $n \in A$;

9°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(c = z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \to \neg U(z_n)\big)$, for all $n \in \mathbb{N} \backslash A$;

10°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(U(z_0) \,\&\, z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \to \neg U(z_n)\big)$, for all $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Similarly to the case of rounding modulo SI, each transformation $T \mapsto T \oplus SI[A]$, $A \in \mathfrak{A}$ can be also considered as a rounding operation as it preserves an isomorphism type of the Tarski–Lindenbaum algebra and transfers the majority of model theoretic properties to correspondent completions of theories.

Demo 3. *An alternative continual series of the rounding operations*. By $\mathfrak{A}'$ we denote the family of sets $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfying $\{0, 1\} \cap A = \varnothing$. It is obvious that $\mathfrak{A}'$ is a continual family. Consider a fixed $A \in \mathfrak{A}$. We construct a modification $SI^\circ[A]$ of the successor theory SI° with cycles as follows. The signature is $\sigma_{SI^\circ[A]} = \{\lhd^2, c, U^1\}$, the axioms are the following sentences:

1°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd x)\big]$;

2°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(x \lhd y) \,\&\, (x \lhd z) \to (y = z)\big]$;

3°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(y \lhd x) \,\&\, (z \lhd x) \to (y = z)\big]$;

4°. $(\forall x)(\exists y)\big[x \lhd y\big]$;

5°. $(\forall x)\big[(x \neq c) \to (\exists y)(y \lhd x)\big]$;

6°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd c)\big]$;

7°. For any $n \in A$, there is the only $\lhd$-cycle of length n, moreover, exactly one element in the cycle satisfies $U(x)$;

8°. For any $n \in \mathbb{N} \backslash A$, there is no $\lhd$-cycles of length n;

9°. $(\forall z_1, \ldots, z_n)\big(c \lhd z_1 \lhd, \cdots \lhd z_n \to \neg U(z_n)\big)$, for all $n \in \mathbb{N}$;

10°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(U(z_0) \,\&\, z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \,\&\, U(z_n) \to z_0 = z_n\big)$, for all $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Similarly to Demo 2, this series of transformation of theories is continual. Moreover, each of them can play the role of a rounding operation. This demo is based on the E. A. Palutin's remark having the aim to point out a collection consisting of the continuum of pairs of different theories having identical model-theoretic properties at author's talk at Maltsev's Meeting in November, 2016 in Novosibirsk.

Demo 4. *A quick scheme for the infinitary semantic layer.* As it is noted in [12], the following series of transformations

$$\begin{aligned}&(a)\ \ T \mapsto T\langle\varkappa\rangle, \quad \varkappa \in \mathcal{K}C;\\&(b)\ \ T \mapsto T\langle\varkappa\rangle \oplus SI,\ \varkappa \in \mathcal{K}C\end{aligned}\tag{13}$$

determines both finitary and infinitary semantic layers of model-theoretic properties. Namely, up to coincidence modulo a representative list $\mathcal{R}$ of model-theoretic properties, ACL is equal to the set of all $\mathfrak{p} \in ML$ such that $\mathfrak{p}$ is closed under $\approx_a$ and is preserved under any transformation (13)(a), while MQL is the set of all $\mathfrak{p} \in ML$ such that $\mathfrak{p}$ is closed under $\approx_a$ and is preserved under any transformation (13)(b) for an arbitrary sequence of formulas $\varkappa \in \mathcal{K}C$ and an arbitrary computably axiomatizable theory T. It seems, the practical rule (13)(b) is the simplest representation allowing to estimate preliminarily either inclusion or non-inclusion of a property $\mathfrak{p}$ to the infinitary semantic layer MQL.

Demo 5. *Combinations of methods.* Different variants of the rounding operation preserve an infinitary layer, but do not that for finitary layer. On the other hand, two rules (13)(a) and (13)(b) correspond to finitary and infinitary types of the first-order combinatorics. This gives an idea to define a series of combined rules with different transformations as follows. Consider a fixed method $\mathfrak{m}'$ that is finitary or close to finitary, and a fixed method $\mathfrak{m}''$ that is infinitary or close to infinitary. We define their combination $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \uplus \mathfrak{m}''$ on the class of complete theories T as follows

$$\mathfrak{m}(T) = \begin{cases}\mathfrak{m}'(T), & \text{if } T \text{ has a finite model,}\\ \mathfrak{m}''(T), & \text{if } T \text{ is the theory of an infinite model}\end{cases}\tag{14}$$

Furthermore, the method $\mathfrak{m}$ that is initially defined on the class of all complete theories can be expanded to the class of all theories (including, incomplete ones) by the following rule:

$$\begin{aligned}T \simeq_a^{\mathfrak{m}} S \Leftrightarrow_{dfn}\ \ &\big(\exists \text{ computable isomorphism } \mu : \mathcal{L}(T) \to \mathcal{L}(S)\big)\\&(\forall \text{ complete extension } T' \supseteq T)\\&(\forall \text{ complete extension } S' \supseteq S)\\&[S' = \mu(T') \Rightarrow (S' \approx_a \mathfrak{m}(T'))].\end{aligned}\tag{15}$$

These combined methods can be used as argumentation in the definition of a model-theoretic property.

Remark. Consider theory Sc that is a *successor* theory with a *distinguished element* and *without cycles* defined as follows. Signature $\sigma_{Sc} = \{\lhd^2, c\}$, axioms of the theory:

1°. $(\forall x)\big[\neg(x \lhd x)\big]$;

2°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(x \lhd y)\,\&\,(x \lhd z) \rightarrow (y = z)\big]$;

3°. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\big[(y \lhd x)\,\&\,(z \lhd x) \rightarrow (y = z)\big]$;

4°. $(\forall x)(\exists y)\big[x \lhd y\big]$;

5°. $(\forall y)(\exists x)\big[x \lhd y\big]$;

6°. $(\forall z_0, z_1, \ldots, z_n)\big(z_0 \lhd z_1 \lhd \cdots \lhd z_n \rightarrow z_0 \neq z_n\big), \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

It is possible to use theory Sc instead of SI in Demo 1, Demo 2, and other similar constructions obtaining the same results. On the other hand, it is impossible to do so without axioms preventing cycles in Demo 1, because an isomorphism type of the Tarski–Lindenbaum algebras is not preserved. Furthermore, it is impossible to do without constant c in Demo 1 based on theory S of signature $\{\lhd\}$ without cycles, because under an isomorphism of the Tarski–Lindenbaum algebras, the model-theoretic property of being a theory of a rigid model is not preserved.

5 Advantages of the pragmatic approach

A scheme of all possible variants of definition to the concept of a model-theoretic property is given in Fig. 2. The scheme presents a primitive approach (a), a restricted pragmatic approach (b) with the class of all methods used by the finite signature reduction procedure, a pragmatic approach (c) with the class of all Cartesian methods, a maximalistic approach (d) with the class of Cartesian-quotient methods, as well as different intermediate between (c) and (d) variants. Possible, some classes of finitary methods beyond the set of Cartesian-quotient extensions can be discovered in the future (the question of existence of such methods is open). Some examples in the preceding section can be accepted as additional argumentation to the definition, allowing us to create realistic systems with different variants of the concept of a model-theoretic property.

Fig 2: Versions of the concept of a model-theoretic property

A general analysis of the definition of a model-theoretic property shows that the variant (c) with a finitary layer ACL and with the set of methods including all Cartesian extensions of theories is the most significant. Indeed, the main results on expressive power of first-order logic are obtained based on the operation of a Cartesian extension of a theory, i.e., within the pragmatic approach (c). Extension of the argumentation with Cartesian-quotient extensions of theories is inexpedient as it leads to smaller semantic layer of model-theoretic properties in view of the principle of inverse dependence. It is also important that the operation of a Cartesian extension of a theory corresponds to a greater extent to a spirit of general model theory whereas the operation of a Cartesian-quotient extension has a certain algebraic accent. It shows the special significance of the pragmatic variant (c) of the concept of a model theoretic property.

The close variant (b) based on the class of finite signature reduction procedures preserves a semantic layer $F2f\mathcal{L}$ which does not differ from ACL modulo representative list $\mathcal{R}$, [1]. However, the variant (c) looks more fundamental in comparison with (b) since the former depends on arbitrariness while the choice of forms of coding configurations for the finite signature reduction procedure. As for the primitive approach (a), it defines a rather large layer of model-theoretic properties. However, there are no constructions supporting this layer so its role is strictly subordinated with a technical toolkit in investigations. As for the maximal approach (d), its incentive motive is to reach the bigger fundamental nature based on Cartesian-quotient extensions of theories representing the class of all finitary first-order methods, even despite certain reduction of corresponding semantic layer of model-theoretic properties.

Conclusion

In the work, we introduce a definition to the concept of a model-theoretic property. Subsequent demonstrations give a generalized view on the possible extensions of the concept of a model-theoretic property. Notice that, there is a possibility to create new argumentations by the method of generic extensions in set theory. At the same time, addition of any new argumentations to a pragmatic version of the definition of a model-theoretic property can only reduce the layer controlled by finitary first-order combinatorics. An important point is that although the suggested definition of the concept of a real model-theoretic property uses some informal parts, nevertheless, exact mathematical statements are obtained based on this definition.

References

[1] M. G. Peretyat'kin, Introduction in first-order combinatorics providing a conceptual framework for computation in predicate logic, Computation tools, The Fourth International Conference on Computational Logics, Algebras, Programming Tools and Benchmarking, IARIA, 2013, 31–36.

[2] W. Hodges, A shorter model theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] H. J. Rogers H.J., Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.

[4] Yu. L. Ershov,S. S. Goncharov, Constructive models, Transl. from Russian (English) Siberian School of Algebra and Logic, New York, NY: Consultants Bureau. XII, 2000, 293 pp.

[5] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, Massachusetts, 1967.

[6] M. G. Peretyat'kin, Finitely axiomatizable theories, Plenum, New York, 1997, 297 pp.

[7] M. G. Peretyat'kin, First-order combinatorics and model-theoretical properties that can be distinct for mutually interpretable theories. Siberian Advances in Mathematics, **26**, 3 (2016), 196–214.

[8] M. G. Peretyat'kin, Invertible multi-dimensional interpretations versus virtual isomorphisms of first-order theories, Mathematical Journal, **62**, 4 (2016), 166–203.

[9] W. Hanf, Model-theoretic methods in the study of elementary logic, Symposium on Theory of Models, North-Holland, Amsterdam, 1965, 33–46.

[10] M. G. Peretyat'kin, Fundamental significance of the finitary and infinitary semantic layers and characterization of the expressive power of first-order logic, Mathematical Journal, **65** 3 (2017), pp. 91-116.

[11] M. G. Peretyat'kin, Finitely axiomatizable theories and similarity relations, American Math. Soc. Transl. **195**, 2 (1999), 309–346.

[12] M. G. Peretyat'kin, First-order combinatorics presenting a conceptual framework for two levels of expressive power of predicate logic, Computation tools, The Fifth International Conference on Computational Logics, Algebras, Programming, Tools, and Benchmarking, IARIA, 2014, 19–29.

АЛГЕБРЫ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ

Н. А. Перязев[*]

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ", ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, 197376, Россия
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

И. К. Шаранхаев

Бурятский государственный университет, ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ, 670000, Россия
e-mail: goran5@mail.ru

1 Мультиоперации и метаоперации на мультиоперациях

Пусть A — конечное множество и целое число $n \geq 0$. Под n-местной операцией понимаем отображение $f : A^n \to A$, а под n-местной мультиоперацией — отображение $f : A^n \to 2^A$, где 2^A — обозначение для множества всех подмножеств множества A.

Мы будем отождествлять элементы с одноэлементными множествами, поэтому понятия операции является частным случаем понятия мультиоперации.

Число $|A| = k$ называется рангом мультиоперации.

Мультиоперацию $f \in M_A$ ранга k, где $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$ можно представлять как отображение

$$f : \{2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\},$$

получаемое из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \;\; \varnothing \to 0; \;\; \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_s}.$$

Введем обозначения:
P_A^n, P_A для множества n-местных и всех операций;
M_A^n, M_A для множества n-местных и всех мультиопераций.

[*]Публикация выполнена в рамках государственной работы "Инициативные научные проекты" базовой части государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (задание №2.6553.2017/8.9).

Определим задание n-местной мультиопераций f в векторной форме: $f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k^n})$, где $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$ и $\alpha_i = f(2^{i_1}, \ldots, 2^{i_n})$, а $(i_1, \ldots, i_n)$ есть представление $i - 1$ в системе исчисления по основанию k n-разрядным числом.

Приведем определения и обозначения для некоторых мультиопераций:

- n-местная пустая мультиоперация:

  $\theta^n(a_1, \ldots, a_n) = \varnothing$;

- n-местная полная мультиоперация:

  $\pi^n(a_1, \ldots, a_n) = A$;

- n-местная мультиоперация проектирования по i аргументу:

  $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \{a_i\}$;

- бинарная мультиоперация пересечения:

  $f_\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$.

Ниже даны примеры определенных мультиопераций ранга 3 в векторной форме:
$\theta^2 = (000000000)$, $\pi^2 = (777777777)$, $f_\cap = (100020004)$,
$e_1^2 = (111222444), e_2^2 = (124124124)$.
Теперь определим некоторые метаоперации на мультиоперациях:

- пересечение f и g:

  $(f \cap g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cap g(a_1, \ldots, a_n)$;

- разрешимость $f \in M_A^n$ по аргументу $i \in \{1, \ldots, n\}$:

  $(\mu_i f)(a_1, \ldots a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}$.

  Легко видно, что:
  $b \in (\mu_i f)(a_1, \ldots, , a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n) \iff$
  $c \in f(a_1, \ldots, , a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}$;

  Примеры: $f = (305274615)$, $\mu_1 f = (165720427)$, $\mu_2 f = (514236615)$;

- суперпозиция мультиопераций $f \in M_A^n$ и $f_1, \ldots, f_n \in M_A^m$:

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n);$$

- подстановка на место i-го аргумента в f мультиоперацию g:

$$(f *_i g)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) = \\ = \bigcup_{b \in g(a_i, \ldots, a_{i+m-1})} f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+m}, \ldots, a_{n+m-1});$$

- отождествление i и j аргументов в мультиоперации $f \in M_A^n$:

$$(\Delta_{i,j} f)(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n);$$

- отождествление всех аргументов $f \in M_A^n$:
  $(\Delta f)(a) = f(a, \ldots, a)$.

В дальнейшем будем опускать скобки, которые однозначно восстанавливаются.
Ниже докажем тождества для переноса оператора разрешимости.

Лемма 1. *Выполняются следующие тождества:*

1) $\mu_i(f \cap g) = \mu_i f \cap \mu_i g$;

2) $\mu_i(f^n *_j g^m) = (\mu_i f^n *_j g^m)$ *при* $i \in \{1, \ldots, j-1\}$;

3) $\mu_i(f^n *_j g^m) = (\mu_{i-m+1} f^n *_j g^m)$ *при* $i \in \{j+m, \ldots, n+m-1\}$;

4) $\mu_i(f^n *_j g^m) = \alpha^{n+m-1}(\mu_i g^m *_i \mu_j f^n)$ *при* $m \geq 1$ *и* $i \in \{j, \ldots, j+m-1\}$, *где* α^{n+m-1} *— некоторая перестановка аргументов;*

5) $\mu_i(f^n *_i g^0) = (\mu_{i+1} f^n *_i g^0)$.

Доказательство. 1) Пусть для любых $a_1, \ldots, a_n$ выполняется

$$a \in \mu_i(f \cap g)(a_1, \ldots, a_n).$$

Тогда по определению μ_i это равносильно выполнимости

$$a_i \in (f \cap g)(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

А это равносильно $a_i \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ и $a_i \in g(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, а значит и равносильно $a \in \mu_i f(a_1, \ldots, a_n)$ и $a \in \mu_i g(a_1, \ldots, a_n)$. Таким образом, получили условие

$$a \in \mu_i f(a_1, \ldots, a_n) \cap \mu_i g(a_1, \ldots, a_n)$$

эквивалентное первоначальному. Равенство 1) доказано.

2) Пусть для любых $a_1, \ldots, a_{n+m-1}$ выполняется

$$a \in \mu_i(f^n *_j g^m)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}),$$

где $i \in \{1, \ldots, j-1\}$. Тогда по определению μ_i это равносильно выполнимости

$$a_i \in (f^n *_j g^m)(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_j, \ldots, a_{n+m-1}).$$

По определению $*_j$ найдется элемент a_0, такой что

$$a_0 \in g^m(a_j, \ldots, a_{j+m-1})$$

и

$$a_i \in f^n(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_0, a_{j+m}, \ldots, a_{n+m-1}),$$

где $i \in \{1, \ldots, j-1\}$. Эти условия равносильны следующим: $a_0 \in g^m(a_j, \ldots, a_{j+m-1})$ и $a \in \mu_i f^n(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_0, a_{j+m}, \ldots, a_{n+m-1})$.

Таким образом, получили условие

$$a \in (\mu_i f^n *_j g^m)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}),$$

эквивалентное первоначальному. Равенство 2) доказано.

3) Доказывается аналогично равенству 2).

4) Пусть для любых $a_1, \ldots, a_{n+m-1}$ выполняется

$$a \in \mu_i(f^n *_j g^m)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}),$$

где $i \in \{j, \ldots, j+m-1\}$ и $m \geq 1$. Тогда по определению μ_i это равносильно выполнимости

$$a_i \in (f^n *_j g^m)(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_{n+m-1}).$$

По определению $*_j$ найдется элемент a_0, такой что

$$a_0 \in g^m(a_j, \ldots, \underset{i}{a}, \ldots, a_{j+m-1})$$

и

$$a_i \in f^n(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_0, a_{j+m}, \ldots, a_{n+m-1}).$$

Отсюда $a \in \mu_i g^m(a_j, \ldots, \underset{i}{a_0}, \ldots, a_{j+m-1})$ и

$$a_0 \in \mu_j f^n(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+m}, \ldots, a_{n+m-1}).$$

Тогда

$$a \in (\mu_i g^m *_i \mu_j f^n)(a_j, \dots, a_{i-1}, a_1, \dots \\ \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+m}, \dots, a_{n+m-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j+m-1}).$$

Таким образом, получили условие

$$a \in (\mu_i g^m *_i \mu_j f^n)(a_j, \dots, a_{i-1}, a_1, \dots \\ \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+m}, \dots, a_{n+m-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j+m-1}),$$

эквивалентное первоначальному при перестановке элементов $a_1, \dots, a_{n+m-1}$. Равенство 4) доказано.

5) Пусть для любых $a_1, \dots, a_{n-1}$ выполняется

$$a \in \mu_i(f^n *_i g^0)(a_1, \dots, a_{n-1}),$$

где $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Тогда по определению μ_i это равносильно выполнимости

$$a_i \in (f^n *_i g^0)(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}).$$

По определению $*_i$ найдется элемент a_0, такой что $a_0 \in g^0$ и

$$a_i \in f^n(a_1, \dots, a_{i-1}, a_0, a, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}).$$

Отсюда

$$a \in \mu_{i+1} f^n(a_1, \dots, a_{i-1}, a_0, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}).$$

Тогда получили условие

$$a \in (\mu_{i+1} f^n *_i g_0)(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_{n-1}),$$

эквивалентное первоначальному. Равенство 5) доказано. □

2 Алгебры операций и мультиопераций

В этом разделе приведем определения и простейшие связи для клонов (“Клон” —“Clon” — “Closed set of operations”), суперклонов [1], алгебр n-местных операций и мультиопераций [2].

Клоном над множеством A называется любое подмножество $K \subseteq P_A$, содержащее все операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций.

Алгеброй n-местных операций над множеством A называется любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций.

Аналогичные алгебры рассматривались в [3].

Введем обозначения:
$[K]_n$ — алгебра n-местных операций над A порожденная множеством $K \subseteq P_A^n$; $[K]^n = [K] \cap P_A^n$.

Для полноты изложения приведем следующее простое утверждение:

Теорема 2. *Для любого ранга при $K \subseteq P_A^n$ выполняется*

$$[K]_n = [K]^n.$$

Доказательство. Включение $[K]_n \subseteq [K]^n$ непосредственно следует из определений клона и алгебры n-местных операций.

Доказательству обратного включения предпошлем лемму.

Лемма 3. *Если $f^m \in [K]$ и $f_1^n, \ldots, f_m^n \in [K]_n$, то $(f^m * f_1^n, \ldots, f_m^n) \in [K]_n$.*

Доказательство леммы проведем индукцией по построению f^m.

Базис индукции. Если $f^m \in K$, то $f^m \in [K]_n$ и по определению алгебры n-местных операций $(f^m * f_1^n, \ldots, f_m^n) \in [K]_n$.

Шаг индукции. Пусть $f^m = (g^s * g_1^m, \ldots, g_s^m)$ и для $g^s, g_1^m, \ldots, g_s^m$ выполняется индуктивное предположение. Тогда в силу тождества суперассоциативности получаем $(f^m * f_1^n, \ldots, f_m^n) = ((g^s * g_1^m, \ldots, g_s^m) * f_1^n, \ldots, f_m^n) = (g^s * (g_1^m * f_1^n, \ldots, f_m^n), \ldots, (g_s^m * f_1^n, \ldots, f_m^n))$. По индуктивному предположению для g_i^m следует, что $(g_i^m * f_1^n, \ldots, f_m^n) \in [K]_n$, а по индуктивному предположению для g^s получаем $(g^s * (g_1^m * f_1^n, \ldots, f_m^n), \ldots, (g_s^m f_1^n, \ldots, f_m^n)) \in [K]_n$.

Теперь доказательство включения $[K]^n \subseteq [K]_n$ непосредственно следует из леммы 3, так как для $f^n \in [K]^n$ выполняется $f^n = (f^n * e_1^n, \ldots, e_n^n)$ и $e_i^n \in [K]_n$. □

Перейдем к алгебрам над мультиоперациями.

Суперклоном над множеством A называется любое подмножество $R \subseteq M_A$, содержащее все мультиоперации пустые, полные, проектирования и замкнутое относительно суперпозиций и разрешимостей.

Лемма 4. *Следующие условия для множества мультиопераций A, содержащего все мультиоперации пустые, полные и проектирования, равносильны:*

1) A является суперклоном;

2) A замкнуто относительно подстановок, разрешимостей и отождествлений;

3) A замкнуто относительно подстановок, разрешимостей и пересечений.

Доказательство. Следствие из 1) в 2) выполняется в силу очевидного представления суперпозиции через подстановки с последующим отождествлением аргументов, а перестановка i и j аргументов в мультиоперации f выражается как

$$\mu_i(\mu_j(\mu_i f)).$$

Следствие из 2) в 3) выполняется ввиду равенства

$$\Delta_{i,j} f^n = (((\pi^1 *_1 (e_i^n \cap e_j^n)) \cap f^n) *_j \pi^0).$$

Следствие из 3) в 1) выполняется, так как верно тождество

$$(f \cap g) = (f_\cap * f, g), \text{ где } f_\cap = (e_1^2 * e_1^2, (\mu_2 e_1^2)).$$

□

Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A называется любое подмножество $R \subseteq M_A^n$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую, полную мультиоперации и замкнутое относительно суперпозиций, разрешимостей и пересечений.

Введем обозначения:

$\langle R \rangle_n$ — алгебра n-местных мультиопераций над A порожденная множеством $R \subseteq M_A^n$; $\langle R \rangle^n = \langle R \rangle \cap M_A^n$.

Теорема 5. *Для мультиопераций любого ранга при $R \subseteq M_A^n$ выполняется:*

$$\langle R \rangle_n \subseteq \langle R \rangle^n .$$

Доказательство непосредственно следует из определений.

Обратное включение может не выполняться даже для алгебр 1-местных мультиопераций, которые исследуются в следующем разделе.

3 Алгебры унарных мультиопераций

Рассмотрим частный случай алгебр n-местных мультиопераций, при $n = 1$, которые будем называть алгебрами унарных мультиопераций, а сокращенно алгебрами умо.

Найдем каноническую форму для унарных мультиопераций, принадлежащих суперклону, порожденному алгеброй умо.

Назовем n-базисными мультиоперациями для алгебры умо R следующие мультиоперации:
$[g_1, \ldots, g_n] = (g_1 * e_1^n) \cap \cdots \cap (g_n * e_n^n)$, где $g_i \in R$.

Определим множество $F^n(R)$ n-местных мультиопераций для алгебры умо R по индукции:
$[g_1, \ldots, g_n] \in F^n(R)$, для любых $[g_1, \ldots, g_n]$, где $g_i \in R$;
если $t_0, t_1, \ldots, t_n \in F^n(R)$, то $(t_0 * t_1, \ldots, t_n) \in F^n(R)$

Теорема 6. *Пусть R алгебра умо произвольного ранга. Тогда для любой $f^1 \in \langle R \rangle$ существует n и $f^n \in F^n(R)$, такое что $f^1 = \Delta f^n$.*

Доказательство следует из лемм 1 и 3.

Теперь приведем результаты о соотношении супеклонов и алгебр умо.

- При ранге 2 выполняется $\langle R \rangle_1 = \langle R \rangle^1$.
- При ранге более 3 возможно, что $\langle R \rangle_1 \neq \langle R \rangle^1$.

  Пример для алгебры умо ранга 4 (сообщил Д. Н. Жук), в форме, полученной в теореме 6.

  Пусть $R = \{g\}$, где $g = (10, 13, 10, 7)$.
  Тогда $\langle R \rangle_1 = \{g, e^1, \theta^1, \pi^1\}$.
  $f = \Delta(([g, g] * [g, g], [g, e^1]) * [e^1, e^1], [\pi^1, \pi^1]) = (5, 2, 5, 8)$.
  Получили $\langle R \rangle_1 \neq \langle R \rangle^1$.
- При ранге 3 это открытый вопрос: $\langle R \rangle_1 = \langle R \rangle^1$.

Приведем сводку вычислительных результатов по числу алгебр унарных операций и мультиопераций ранга 3:

- 699 алгебр унарных операций ранга 3, из них:
  5 — максимальных, 13 — минимальных.

  В книге [4] приведено перечисление всех этих алгебр.
- 2079040 алгебр унарных мультиопераций ранга 3, из них:
  46 — максимальных, 18 — минимальных.

  Сообщение о перечислении всех алгебр унарных мультиопераций ранга 3 смотри в [2].

4 Разбиение множества клонов на классы эквивалентности

Отметим, что множества всех клонов можно разбить на классы эквивалентности следующими способами:

- Для любого n множество всех клонов разбивается на конечное множество классов, каждый из которых содержит все клоны с одинаковыми алгебрами n-местных операций. В силу теоремы 2 эти классы не пустые.
  Отметим, что в случае унарных операций используется название моноидальные интервалы [5].

- Для любого n множество всех суперклонов (а значит и клонов, в силу существования совершенной связи Галуа между клонами и суперклонами [6]) разбивается на конечное множество классов, каждый из которых содержит все суперклоны с одинаковыми алгебрами n-местных мультиопераций. Возможно, что для некоторых алгебр n-местных мультиопераций такие классы являются пустыми.

Список литературы

[1] Н. F. Перязев, Недоопределенные частичные булевы функции, Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV международной конференции (Казань, 2–7 июня 2008 г.) — Казань: Отечество, 2008, 92.

[2] А. С. Казимиров, Н. А. Перязев, Алгебры унарных мультиопераций, Тезисы докладов Международной конференции “Мальцевские чтения”, Новосибирск, 2013, 156.

[3] А. Н. Черепов, И. А. Черепов, Классы сохранения оснований в многозначных логиках, Труды 4-й Международной конференции “Дискретные модкли в теории управляющих систем”. М.:МАКС Пресс, 2000, 135–136.

[4] D. Lau, Function Algebras on Finite Sets, Springer-Verlag Berlin YeideWater Resourses Research, 2006.

[5] А. А. Крохин, Моноидальные интервалы в решетках клонов, Алгебра и логика, **34**, 3 (1995), 288–310.

[6] Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев, Теория Галуа для клонов и суперклонов, Дискретная математика, **27**, 4 (2015), 79–93.

ОБ ОГРАНИЧЕННО ПОРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ И О СКОЛЕМОВСКИ-ОГРАНИЧЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ТЕОРИЙ

А. Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ag.pinus@gmail.com

В настоящей работе приведены пара примеров на применение понятия ретрактивный спектр, которое было введено в работе автора [1] и успешно применялось им в ряде работ [1]–[3] в самых разных ситуациях. В первой части работы вводится понятие ограниченно порожденных конгруэнций универсальных алгебр и оно используется для нахождения некоторой подрешетки решетки конгруэнций этой алгебры зачастую менее мощной чем решетка всех конгруэнций этой алгебры, но универсально эквивалентной (в теоретико-модельном смысле) этой последней решетке. Во второй части вводится понятие сколемовски-ограниченных расширений элементарных теорий и, опять же, решетка подобных расширений оказывается универсально эквивалентной решетке всех расширений данной теории.

1

При изучении строения и свойств универсальных алгебр с помощью тех или иных производных структур этих алгебр, одним из препятствий к успеху является большая (зачастую большая, чем мощность самой алгебры) мощность этих структур. В связи с этим естественен интерес к отысканию менее мощных структур, в той или иной мере обладающих свойствами этих самых производных структур. Подобный интерес имеет место быть не только по отношению к производным структурам, но и по отношению к самим исходным алгебраическим системам. Ответ на вопрос о существовании таковых (при ограничении свойствами, выразимыми в языке логики первого порядка) дает известная теорема Левенгейма — Сколема (см., к примеру, [4]). И хотя ее доказательство достаточно эффективно (в смысле указания на индуктивный метод построения системы малой мощности), в приложении к конкретным ситуациям желательно указание на более конструктивный (имея в виду понятие "конструкция") подход к построению искомых систем малой мощности наследующих свойства первоначальных более мощных алгебраических систем.

Одной из возможных подобных конструкций оказалась конструкция прямого и обратного пределов ретрактивных спектров универсальных алгебр (см.[1]). В работах [1]–[3] эта конструкция использована для замены больших решеток функциональных клонов на конечных множествах на универсально эквивалентные им (в теоретико-модельном смысле) решетки ограниченно порожденных клонов, для замены больших решеток подмногообразий дискриминаторных многообразий универсальных алгебр на универсально эквивалентные им решетки ограниченно базируемых подмногообразий и для замены в ряде случаев решеток подалгебр на решетки ограниченно порожденных подалгебр этих алгебр.

В настоящем разделе аналогичный подход применяется к решеткам конгруэнций.

Далее через $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ будем обозначать решетку конгруэнций универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, при этом будем отождествлять конгруэнцию θ алгебры $\mathfrak{A}$ с подмножеством множества A^2 — графиком отношения θ.

Напомним, что многообразие V универсальных алгебр называется многообразием с продолжимыми конгруэнциями (таковы, к примеру, многообразия абелевых групп, дистрибутивных решеток, дискриминаторные многообразия и целый ряд других, см., в частности, [5]), если для любой V-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, любой ее подалгебры $\mathfrak{L} = \langle B; \sigma\rangle$ и любой конгруэнции θ алгебры $\mathfrak{L}$ имеет место равенство $\langle\theta\rangle_{\mathfrak{A}} \cap B^2 = \theta$. Здесь и далее для любого $C \subseteq A^2$ через $\langle C\rangle_{\mathfrak{A}}$ обозначается конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством пар из C. Тем самым для любого многообразия V с продолжимыми конгруэнциями, любой V-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, любой ее подалгебры $\mathfrak{L} = \langle B; \sigma\rangle$ отображение ψ решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ на решетку $\mathrm{Con}\,\mathfrak{L}$, определенное как $\psi(\theta) = \theta \cap B^2$, является гомоморфизмом, а отображение $\varphi : \mathrm{Con}\,\mathfrak{L}$ в $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$, где $\varphi(\theta) = \langle\theta\rangle_{\mathfrak{A}}$ является вложением решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{L}$ в решетку $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$. При этом отображение $\psi\varphi$ тождественно на $\mathrm{Con}\,\mathfrak{L}$. Таким образом, решетка $\mathrm{Con}\,\mathfrak{L}$ является ретрактом решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ относительно пары отображений $\langle\varphi,\psi\rangle$.

Фиксируем теперь некоторое многообразие V с продолжимыми конгруэнциями. Пусть $\mathfrak{A}=\langle A;\sigma\rangle$ — некоторая алгебра из V. Пусть $\langle I;\leq\rangle$ — некоторое направленное вверх частично упорядоченное множество и $\mathcal{L}=\{\mathfrak{A}_i=\langle A_i;\sigma\rangle|i\in\langle I;\leq\rangle\}$ некоторая система собственных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$, такая что $\mathfrak{A}_i$ является собственной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_j$ для $i<j$ из I и $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=A$ — *направленная система собственных подалгебр алгебры* $\mathfrak{A}$. Отметим, что совокупность всех конечно порожденных подалгебр алгебры, не являющейся конечно порожденной, является, к примеру, направленной системой собственных подалгебр этой алгебры.

Конгруэнцию θ алгебры $\mathfrak{A}$ назовем i-порожденной (для $i\in I$), если $\theta=\langle\theta\cap A_i^2\rangle_{\mathfrak{A}}$. Совокупность i-порожденных конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ образует подрешетку $\mathrm{Con}_i\mathfrak{A}$ решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ изоморфную решетке $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i$. Конгруэнцию θ алгебры $\mathfrak{A}$ назовем $\mathfrak{L}$-*ограниченно порожденной*, если она i-порождена для некоторого $i\in I$. Так же очевидно, что совокупность $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ $\mathfrak{L}$-ограниченно порожденных конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ образует подрешетку решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$. При этом $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}=\bigcup\limits_{i\in I}\mathrm{Con}_i\mathfrak{A}$.

Опять же, в силу замеченного выше об алгебрах многообразий с продолжимыми конгруэнциями, определяя для $i<j$ из I отображения $\varphi_j^i:\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i\to\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_j$ как $\psi_i^j(\theta)=\langle\theta\rangle_{\mathfrak{A}_j}$ и отображения $\psi_i^j:\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_j\to\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i$ как $\psi_i^j(\theta)=\theta\cap A_i^2$ получаем ретрактивный спектр $S=\langle\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i|\varphi_j^i,\psi_i^j$ для $l\leq j\in\langle I;\leq\rangle\rangle$.

При этом с прямым пределом прямого спектра

$$\overrightarrow{S}=\langle\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i|\varphi_j^i\text{ для }l\leq j\in\langle I;\leq\rangle\rangle$$

естественным образом отождествима решетка $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$, а с обратным пределом обратного спектра $\overleftarrow{S}=\langle\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}_i|\psi_i^j$ для $l\leq j\in\langle I;\leq\rangle\rangle$ — решетка $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$. В работе [1] доказана универсальная эквивалентность (в теоретико-модельном смысле, т.е. то что на них истинны одни и те же $\forall$-формулы логики первого порядка) прямых и обратных пределов ретрактивных спектров. Тем самым имеет место

Теорема 1. *Для любого многообразия V с продолжимыми конгруэнциями, любой V-алгебры $\mathfrak{A}$ и любой направленной системы $\mathfrak{L}$ собственных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ решетка конгруэнций $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ этой алгебры и решетка ее $\mathfrak{L}$-ограниченно порожденных конгруэнций $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ универсально эквивалентны.*

Следствие 2. *Для любого многообразия V с продолжимыми конгруэнциями и любой бесконечно порожденной, т. е. не являющейся конечно* *порожденной, V-алгебры $\mathfrak{A}$ решетки* $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ *и* $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ *универсально эквивалентны. Здесь $\mathfrak{L}$ — совокупность конечно порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.*

В частности решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ и $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ содержат одни и те же конечные подрешетки и на них истинны одни и те же тождества. При этом, в случае счетности и локальной конечности алгебры $\mathfrak{A}$ и континуальности решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ мы имеем возможность заменить эту континуальную решетку $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ на счетную решетку $\mathrm{Con}_{\mathfrak{L}}\mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{L}$ — система конечных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$) с сохранением свойств решетки $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$, выразимых $\forall$-формулами.

2

Рассмотрим здесь еще один случай возможности применения ретрактивных спектров и их пределов, связанный с решетками расширений элементарных теорий (или двойственными к ним решетками аксиоматизируемых подклассов некоторого аксиоматизируемого класса моделей).

Пусть T — некоторая фиксированная элементарная (в логике первого порядка аксиоматизируемая) теория сигнатуры σ. Через L_T обозначим решетку (относительно теоретико-множественного отношения включения $\subseteq$) ее элементарных расширений. Через T_1' для $T_1 \supseteq T$ обозначим совокупность формул $T_1 \backslash T$. Для любой совокупности формул F сигнатуры σ через $\langle F \rangle$ обозначим элементарную теорию сигнатуры σ аксиоматизируемую совокупностью F. Для решеточных операций $\wedge$ и $\vee$ решетки L_T имеем равенства $T_1 \vee T_2 = \langle T_1 \cup T_2 \rangle$ и $T_1 \wedge T_2 = \langle \{\phi_1 \vee \phi_2 | \phi_i \in T_i\} \rangle$ для $T_1, T_2 \in L_T$.

Элементарную формулу Φ сигнатуры σ назовем *n-сколемовски ограниченной относительно T* (здесь n — некоторое натуральное число), если для некоторой пренексной нормальной формы (относительно теории T) формулы Φ ее сколемовские функции имеют арность не превосходящую n. Теорию $T_1 \in L_T$ назовем *n-сколемовски ограниченным расширением теории T*, если T_1 аксиоматизируема формулами $T \cup F$, где $F \subseteq T_1 \backslash T$ — некоторая совокупность n-сколемовски ограниченных относительно T формул. То есть быть n-сколемовски ограниченным расширением теориии T означает для теории T_1 возможность обогащения сигнатуры σ исходной теории T до сигнатуры σ' функциями арности не превосходящей числа n с тем что бы класс моделей теории T_1 был σ-обеднением некоторого $\forall$-класса моделей сигнатуры σ' внутри класса моделей теории T. Теорию $T_1 \in L_T$ назовем *сколемовски ограниченным* *расширением* теории T, если она есть n-сколемовски ограниченное расширение теории T для некоторого натурального n.

Прежде всего заметим, что любое конечно аксиоматизируемое над T расширение теории T является сколемовски ограниченным расширением теории T. Приведем также несколько примеров сколемовски ограниченных расширений для конкретных теорий T, не являющихся конечно аксиоматизируемыми расширениями последних.

Пусть T — элементарная теория деревьев бесконечной высоты, рассматриваемых как частично упорядоченные множества в сигнатуре $\langle \leq \rangle$. Тогда теория T_n (n- произвольное фиксированное натуральное число) — элементарная теория подобных деревьев с n ветвлениями в каждой вершине является конечно аксиоматизируемым над T 1-сколемовски ограниченным расширением T. В то же время T_∞ — элементарная теория T-деревьев с бесконечным числом ветвлений в каждой вершине является 1-сколемовски ограниченным расширением теории T, не являющимся конечно аксиоматизируемым над T расширением последней.

Пусть T — теория булевых алгебр, T_1 — теория булевых алгебр с бесконечным числом атомов, а T_2 — теория атомных булевых алгебр с бесконечным числом атомов. Тогда T_1 является 0-сколемовски ограниченным расширением теории T, не являющимся конечно аксиоматизируемым над T, а T_2 — 1-сколемовское ограниченное расширение T, не являющееся конечно аксиоматизируемым над T.

Наконец, пусть T — теория абелевых групп, а T_1 — теория делимых абелевых групп. Опять же T_1 — 1-сколемовски ограниченное расширение теории T, не являющиеся конечно аксиоматизируемым над T.

В силу приведенных выше определений операций $\wedge$ и $\vee$ решетки L_T очевидно, что совокупности L_T^{n-sr} -сколемовски ограниченных расширений теории T (для любого фиксированного n) образуют подрешетки решетки L_T и для натуральных $n \leq m$ решетка L_T^{n-sr} является подрешеткой решетки L_T^{m-sr}. Через F_T^n обозначим совокупность n-сколемовски ограниченных относительно теории T элементарных формул сигнатуры σ. Отображение ψ^n решетки L_T в решетку L_T^{n-sr} определим следующим образом: для $T_1 \in L_T$ пусть $\psi^n(T_1) = \langle T \cup (T_1' \cap F^n) \rangle$. Непосредственно замечается, что ψ^n является гомоморфизмом решетки L_T на решетку L_T^{n-sr} и решетка L_T^{n-sr} является ретрактом относительно этого гомоморфизма и тождественного вложения L_T^{n-sr} в L_T. Через ψ_n^m (для $n \leq m$) обозначим ограничение гомоморфизма ψ^n до подрешетки L_T^{m-sr} решетки L_T. Точно так же L_T^{n-sr} является ретрактом решетки L_T^{m-sr} относительно гомоморфизма ψ_n^m и тождественного вложения id_m^n решетки L_T^{n-sr} в решетку L_T^{m-sr}.

Таким образом мы имеем дело с ретрактивным спектром $S = \langle L_T^{n-sr}(n \in \omega); \psi_n^m, \varphi_m^n(n \leq m \in \omega)\rangle$.

При этом прямой предел $\lim\limits_{\to} \overrightarrow{S}$ соответствующего прямого спектра $\overrightarrow{S} = \langle L_T^{n-sr}(n \in \omega); \mathrm{id}_m^n(n \leq m \in \omega)\rangle$ отождествим с $\bigcup\limits_{n\in\omega} L_T^{n-sr} = L_T^{sr}$-решеткой сколемовски ограниченных расширений теории T, а обратный предел $\lim\limits_{\leftarrow} \overleftarrow{S}$, здесь $\overleftarrow{S} = \langle L_T^{n-sr}(n \in \omega); \psi_m^n(n \leq m \in \omega)\rangle$ — с решеткой L_T.

Опять же, в силу теоремы из [1], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой элементарной теории T решетка ее сколемовски ограниченных расширений L_T^{sr} универсально эквивалентна решетке L_T всех ее расширений.*

Список литературы

[1] А. Г. Пинус, О прямых и обратных пределах ретрактивных спектров, СМЖ, **58**, 6 (2017), в печати.

[2] А. Г. Пинус, О фрагментах функциональных клонов, Алгебра и логика, **56**, 4 (2017), в печати.

[3] А. Г. Пинус, Решетки ограниченно аксиоматизируемых ∀-подклассов ∀-классов универсальных алгебр, Алгебра и логика, сдана в печать.

[4] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, Математическая логика, из-во “Лань”, Санкт-петербург, Москва–Краснодар, 2005.

[5] G. Gratzer, Universal Algebra, Second Edition, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979.

ФРАГМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОСЛЕДНИХ

А. Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: ag.pinus@gmail.com

Функциональные клоны на множествах A (системы функций на A, замкнутые относительно суперпозиций и включающие в себя селекторные функции $e^i_n(x_1, \cdots, x_n) = x_i$, для $i \leq n \in \omega$) играют заметную роль не только в различных разделах дискретной математики и ее приложениях, но и конкретно в универсальной алгебре (поскольку большинство понятий, связанных с универсальной алгеброй $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ зависят, в конечном счете, не от сигнатурных функций этой алгебры, а от клона $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}$ ее термальных функций, т.е. не от самой $\mathfrak{A}$, а от совокупности рационально эквивалентных ей, в смысле А.И.Мальцева [1], алгебр). При этом главное внимание при изучении функциональных клонов на множествах A традиционно было сосредоточено на изучении решеток L_A этих клонов (совокупности F_A всех клонов на A упорядоченной отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$). Определяющую роль в изучении этих решеток играли результаты Е. Поста [2] и Ю. И. Янова с А. А. Мучником [3], указывающие на принципиальную разницу в ситуации с рассмотрением совокупностей F_A клонов на двухэлементном ($|A| = 2$) и не менее чем трехэлементном ($|A| \geq 3$) множествах. В первом случае Е. Постом детально описано не только строение решетки L_A всех клонов на двухэлементном множестве A, но также строение и самих клонов из F_A, включая их порядки, базисы и пр.. Во втором же случае (когда $|A| \geq 3$) Ю. И. Янов и А. А. Мучник доказали не менее чем континуальность совокупности F_A, существование клонов на A, не имеющих базисов, и наличие целого ряда иных сложностей при работе с клонами из F_A. Тем самым, в случае когда $|A| \geq 3$, полное описание строения решетки L_A (подобное описанию Е. Поста для случая $|A| = 2$) принципиально невозможно. В силу этого основное внимание при исследовании совокупностей F_A (для $|A| \geq 3$) было сосредоточено либо на исследовании различных частей этой совокупности (в частности, интервалов решетки L_A), либо на исследовании клонов на A, удовлетворяющих тем или иным значащим условиям (в том числе и экстремальным точкам решеток L_A: атомам, коатомам и т. д.). Подобные вопросы разрабатывались советско-российской школой исследователей дискретных функций (не претендуя на полноту, упомянем здесь А. И. Мальцева, С. В. Яблонского, О. Б. Лупанова, Ю. И. Янова, А. А. Мучника, А. А. Булатова, Г. П. Гаврилова, И. А. Мальцева, А. А. Крохина, Б. А. Ромова, Л. А. Калужнина, С. С. Марченкова и д.р.), чешской школой во главе с И. Розенбергом, венгерской — А. Сцендрей и др., канадской — Р. Квакенбуш и др., германской — К. Денеке, Д. Лау, Р. Пешел и др., австрийской — М. Пинскер и др. Обширная библиография подобных работ приведена в монографии А. И. Мальцева и И. А. Мальцева [4].

В ряде работ [5]–[8] автора данной статьи предложен метод исследования совокупностей F_A (и, в частности, решеток L_A) на основе естественной аппроксимации клонов их фрагментами. Изложению этого подхода и обзору полученных на его основе результатов и посвящена данная работа.

Понятие *фрагмента клона* $F \in F_A$ введено в работе [5] и связано с ограничением на арность входящих в F функций. *n-фрагментом* F^n функционального клона F на множестве A ($n \in \omega$) называется совокупность всех функций из F, арность которых не превышает числа n.

В силу включения в клоны селекторных функций а, значит, и наличия возможности добавлять к аргументам функции фиктивные аргументы, имеют место включения $F^n \subseteq F^m$ для любых $n \leq m$ и $F \in F_A$. При этом $F = \bigcup\limits_{n\in\omega} F^n$. Поскольку совокупность Φ_A всех функций на A и сама является клоном, совокупность Φ_A^n всех не более чем n-местных функций на A является фрагментом клона и для любого $F \in F_A$ имеет место $F^n = F \cap \Phi_A^n$.

Через F'_A обозначим совокупность всех фрагментов функциональных клонов на множестве A. Отношение строгого порядка $<$ на F'_A определим следующим образом: для $\Phi', \Phi'' \in F'_A$ положим $\Phi' < \Phi''$ тогда и только тогда, когда для некоторых $F_1, F_2 \in F_A$ и натуральных $m < n$ имеет место $\Phi' = F_1^m$, $\Phi'' = F_2^n$ и $F_1^m \subseteq F_2^n$. Упорядоченная совокупность $\langle F'_A; < \rangle$ является лесом, т. е. объединением некоторой совокупности деревьев. А клоны F на множестве A отождествимы с ветвями V_F леса $\langle F'_A; < \rangle$ их фрагментов.

Далее, говоря об *n-ограниченной суперпозиции* функций из Φ_A^n, будем считать, что при суперпозиции этих функций их аргументы входят некоторую фиксированную совокупность переменных $\{x_1, \cdots, x_n\}$ и, тем самым, совокупность функций Φ_A^n замкнута относительно n-ограниченных суперпозиций и включает в себя функции e_m^i для $i \leq m \leq n$.

Имеет место следующая характеризация n-фрагментов клонов из F'_A.

Утверждение 1. [5]. *Совокупность Φ функций на множестве A от не более чем n аргументов является n-фрагментом некоторого клона из F_A тогда и только тогда, когда она замкнута относительно n-ограниченных суперпозиций и включает в себя функции e_m^i для $i \leq m \leq n$.*

Понятие фрагмента клона служит основой для определения некоторой естественной меры отличия клонов на множестве A друг от друга и на основе этой меры столь же естественных понятий метрики на совокупности F_A и размерности элементов из F_A, т. е. клонов.

Определим расстояние d между клонами на множестве A (между $F_1, F_2 \in F_A$) следующим образом:

$$d(F_1, F_2) = \begin{cases} (\min\{n \in \omega' | F_1^n \neq F_2^n\})^{-1}, \text{ если } F_1 \neq F_2, \\ 0, \text{в случае, когда } F_1 = F_2 \end{cases}$$

Здесь $\omega' = \omega \backslash \{0\}$.

Очевидно, что $\langle F_A; d\rangle$ является метрическим пространством в котором системой окрестностей клона F служат множества $O_F^n = \{F_1 \in F_A | F_1^n = F^n\}$, где $n \in \omega'$.

Для любого $F \in F_A$ под *размерностью* $\dim F$ клона F будем понимать наименьшее натуральное число n (если подобное существует), такое что для любого $F_1 \in F_A$ равенство $F_1^n = F^n$ влечет совпадение клонов F_1 и F. В противном случае (в случае отсутствия подобного n) будем считать размерность клона F бесконечной.

Таким образом, изолированные точки пространства $\langle F'_A; d\rangle$ суть клоны конечной размерности и только они.

Отметим основные свойства пространств $\langle F_A; d\rangle$.

Утверждение 2. [5],[6]. *а) Для любого неодноэлементного A в пространстве $\langle F_A; d\rangle$ существуют предельные точки (т.е. клоны бесконечной размерности на A). При этом для двухэлементного A этих предельных точек восемь штук: $F_1^\infty, F_2^\infty, \cdots, F_8^\infty$ в обозначениях работы [4].*

б) Все пространства вида $\langle F_A; d\rangle$ полны.

в) Для любого бесконечного множества A пространство $\langle F_A; d\rangle$ не компактно. В то же время для двухэлементного A пространство

$\langle F_A; d\rangle$ компактно. Вопрос о компактности пространств $\langle F_A; d\rangle$ для не двухэлементных конечных A остается открытым.

г) Для любых множеств $B \subseteq A$ пространство $\langle F_B; d\rangle$ изометрически вложимо в пространство $\langle F_A; d\rangle$.

д) Для любого не менее чем трехэлементного A существует подрешетка L решетки L_A, образующая совершенное подмножество пространства $\langle F_A; d\rangle$, гомеоморфное канторову дисконтинууму.

Отметим так же что решеточные операции $\wedge, \vee$ на совокупности F_A (операции решетки L_A) непрерывны на пространстве $\langle F_A; d\rangle$, так что решетку L_A всех клонов на множестве A можно рассматривать как топологическую решетку.

Размерность $\dim F$ клона F (наряду с минимальным числом его порождающих и порядком клона) является одной из возможных естественных характеристик сложности строения клона F.

При этом порядком $O(F)$ клона F называется минимальный из порядков конечных базисов этого клона (если F конечно базируем), а порядок конечного множества функций это максимум порядков входящих в это множество функций. Порядок же функции — это число существенных (не фиктивных) аргументов этой функции.

Очевидно неравенство $O(F) \leq \dim F$, при этом возможно строгое неравенство $O(F) < \dim F$ и для любых $F_1, F_2 \in F_A$, если $m = \max\{O(F_1), O(F_2)\}$ и $F_1^m = F_2^m$, то $F_1 = F_2$.

Отметим следующее условие конечности размерности клона F из F_A в терминах решетки L_A.

Утверждение 3. [6]. *Если для конечно порожденного клона F из F_A существует лишь конечное число покрытий $F_1, \cdots, F_k$ в L_A, и для любого $F' \in F_A$ такого, что $F < F'$ в L_A имеет место одно из неравенств $F_i \leq F$ (для $i \leq k$) и при этом все клоны $F_1, \cdots, F_k$ конечно порождены, то размерность клона конечна.*

Далее, для любой совокупности Φ функций на множестве A через $\langle\Phi\rangle$ будем обозначать наименьший клон на A, включающий в себя Φ, клон порожденный совокупностью Φ.

Через F_A^n обозначим совокупность всех n-фрагментов функциональных клонов на A. Эта совокупность очевидным образом представляет собой некоторую решетку

$$L_A^n = \langle F_A^n; \wedge_n, \vee_n\rangle$$

относительно теоретико-множественного отношения $\subseteq$. Здесь $F_1^n \wedge_n F_2^n = F_1^n \cap_n F_2^n$ и $F_1^n \vee_n F_2^n = \langle F_1^n \cup_n F_2^n\rangle^n$ для любых $F_1, F_2 \in F_A^n$.

Отображение $\psi_n : F_A \to F_A^n$ определим как $\psi_n(F) = F^n$ для $F \in F_A$. Непосредственно проверяется, что ψ_n является гомоморфизмом решетки клонов $L_A = \langle F_A; \wedge, \vee\rangle$ на решетку их n-фрагментов $L_A^n = \langle F_A^n; \wedge_n, \vee_n\rangle$. Через φ_n обозначим отображение совокупности F_A^n в F_A, определенное как $\varphi_n(F^n) = \langle F^n\rangle$ для любого $F^n \in F_A^n$. Так же непосредственно замечается, что φ_n есть вложение решетки L_A^n в решетку L_A, а равенство $\psi_n(\varphi_n(F^n)) = F^n$ влечет то, что решетка L_A^n является ретрактом решетки L_A.

Для любых $m \leq n$ определим отображение (гомоморфизм) ψ_m^n решетки L_A^n на решетку L_A^m как $\psi_m^n(F^n) = F^m$ для любого $F \in F_A$. Отображение (вложение) ψ_n^m решетки L_A^m в решетку L_A^n (для $m \leq n$) определим, полагая $\varphi_n^m(F^m) = \langle F^m\rangle^n$. При этом $\psi_m^n(\varphi_n^m(F^m)) = F^m$ для любого $F \in F_A$.

Непосредственно замечается, что система решеток L_A^n $(n \in \omega)$ и их гомоморфизмов ψ_m^n (при $m \leq n$) образует обратный спектр $\overleftarrow{\mathfrak{L}}$, и при этом $\lim\limits_{\leftarrow} \overleftarrow{\mathfrak{L}} = L_A$. С другой стороны, система решеток L_A^n $(n \in \omega\ )$ и их вложений φ_n^m (при $m \leq n$) образует прямой спектр $\overrightarrow{\mathfrak{L}}$.

Клон $F \in F_A$ назовем *ограниченно порожденным*, если он порожден некоторым своим фрагментом (если $F = \langle F^n\rangle$ для некоторого $n \in \omega$) или, что то же самое, если существует система порождающих клон F функций, арности которых ограничены в совокупности. В случае конечности множества A понятия конечной и ограниченной порожденности клонов на A совпадают.

Через F_A^{rg} обозначим совокупность всех ограниченно порожденных клонов на A. Непосредственно замечается, что F_A^{rg} является подрешеткой $L_A^{rg} = \langle F_A^{rg}; \wedge, \vee\rangle$ решетки L_A всех клонов на A. При этом решетка L_A^{rg} отождествима с прямым пределом $\lim\limits_{\rightarrow} \overrightarrow{\mathfrak{L}}$ прямого спектра $\overrightarrow{\mathfrak{L}} = \langle L_n; \varphi_n^m | m \leq n \in \omega\rangle$. Таким образом, имеет место

Утверждение 4. [5]. *Решетка L_A функциональных клонов на множестве A отождествима с обратным пределом обратного спектра решеток L_A^n $(n \in \omega)$ n-фрагментов этих клонов, а ее подрешетка L_A^{rg} ограниченно порожденных клонов является прямым пределом прямого спектра этих решеток L_A^n $(n \in \omega)$.*

При этом в случае двухэлементного множества A решетки L_A и L_A^{rg} совпадают (т. к., как хорошо известно, любой клон на подобном A порожден некоторой системой состоящей из не более чем четырех функций). В случае же не менее чем трехэлементного конечного множества A

решетка L_A^{rg} является собственной счетной подрешеткой континуальной решетки L_A.

На самом деле из утверждения 4 вытекает совпадение свойств решеток L_A^{rg} и L_A, выразимых $\forall$–формулами в языке логики первого порядка.

Утверждение 5. [5]. *Решетка L_A^{rg} универсально эквивалентна, решетке L_A и является всюду плотной в пространстве $\langle F_A; d\rangle$.*

Это следует из общего, доказанного в работе [9], факта для прямых и обратных пределов так называемых ретрактивных спектров.

Из утверждения 5, в частности, следует совпадение совокупностей конечных подрешеток решеток L_A^{rg} и L_A, а различие между ними наступает, как это следует из приведенного далее утверждения 7 на уровне их конечно порожденных подрешеток.

Тем самым, счетная, а значит вполне возможно поддающаяся детальному описанию, решетка L_A^{rg} может играть роль модели для изучения свойств континуальных решеток L_A в случае конечности множества A.

В работе А. А. Булатова [10] доказано, что при $|A| \geq 3$ на решетке L_A не выполнено никакое решеточное тождество. Из этого результата и утверждения 4 вытекает

Утверждение 6. [5]. *Для любого не менее чем трехэлементного множества A выполняются следующие свойства:*
а) для любого решеточного тождества $t_1 = t_2$ существует натуральное m, такое что тождество $t_1 = t_2$ ложно на каждой из решеток L_A^n при $n \geq m$;
б) на решетке L_A^{rg} не выполнимо никакое решеточное тождество.

Среди свойств, различающих решетки L_A и L_A^{rg}, отметим следующее.

Как доказано А.А.Булатовым в работе [11] при $|A| \geq 4$ решетки L_A не являются локально конечными. В то же время (опять же, как это вытекает из утверждения 4, имеет место

Утверждение 7. [5]. *Решетка L_A^{rg} локально конечна для любого конечного A.*

Одним из важнейших понятий так называемых алгебраической и логической геометрий универсальных алгебр разрабатываемых школами Б. И. Плоткина (см., к примеру, [12], [13]) и В. Н. Ремесленникова (см., к примеру, [14]) являются понятия алгебраического и логического множеств универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$. При этом эти понятия, как это упоминалось в начале статьи, зависят не от сигнатуры σ алгебры $\mathfrak{A}$, а от клона $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}$ ее термальных функций. В силу этого представляется естественным рассмотрение соответствующих понятий для произвольного функционального клона F на множестве A (клона $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}_F$ термальных функций алгебры $\mathfrak{A}_F = \langle A; F\rangle$, сигнатура которой включает в себя все функции из F). Таким образом мы приходим к следующему определению.

Определение 8. Подмножество $B \subseteq A^n$ называется *n-алгебраическим для клона F* ($B \in \mathrm{Alg}_n F$), если $B = \{\overline{a} \in A^n | f_i^1(\overline{a}) = f_i^2(\overline{a})\}$ для некоторой совокупности $\{f_i^1, f_i^2 | i \in I\}$ функций из F^n.

Заметим, что совокупность $\mathrm{Alg}_n F$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного отношения $\subseteq$.

Под *алгебраической геометрией клона F* будем далее понимать последовательность $\mathrm{Alg}\, F = \langle \mathrm{Alg}_n F | n \in \omega\rangle$.

Через $\mathrm{Log}_n^0 F$ (для $F \in F_A$) обозначим булеву алгебру подмножеств множества A^n, определенных в алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; F\rangle$ бескванторными формулами логики первого порядка сигнатуры F. Множества из $\mathrm{Log}_n^0 F$ будем называть *n-L_0-логическими множествами для клона F*. Отметим, что как решетка $\mathrm{Alg}_n F$, так и булева алгебра $\mathrm{Log}_n^0 F$ определены, в конечном счете, не самим клоном F, а его фрагментом F^n.

Последовательность $\mathrm{Log}^0 F = \langle \mathrm{Log}_n^0 F | n \in \omega\rangle$ будем называть L_0- *логической геометрией клона F*.

Два клона F_1, F_2 на множестве A назовем *алгебраически $F_1 \sim_{\mathrm{alg}} F_2$* (*$L_0$-логически $F_1 \sim_{\mathrm{log}} F_2$*) *эквивалентными*, если совпадают их алгебраические (L_0-логические) геометрии, т.е. если $\mathrm{Alg}\, F_1 = \mathrm{Alg}\, F_2$ ($\mathrm{Log}^0 F_1 = \mathrm{Log}^0 F_2$).

Очевидно, что для любого множества A и любых клонов F_1, F_2 на A отношение $F_1 \sim_{\mathrm{alg}} F_2$ влечет отношение $F_1 \sim_{\mathrm{log}} F_2$. Обратное неверно.

Среди естественных вопросов, связанных с алгебраической и L_0-логической геометрией клонов F, отметим следующие.

1) Насколько начальный интервал

$$\langle \mathrm{Alg}_1 F, \cdots, \mathrm{Alg}_n F\rangle \qquad (\langle \mathrm{Log}_1^0 F, \cdots, \mathrm{Log}_n^0 F\rangle)$$

соответствующей геометрии клона F может определять весь клон F, либо всю его алгебраическую (всю его L_0-логическую) геометрию $\mathrm{Alg}\, F$ ($\mathrm{Alg}^0 F$)?

2) Сколько, для различных множеств A существует на A попарно не $\sim_{\mathrm{alg}}$-эквивалентных (не $\sim_{\mathrm{log}}$-эквивалентных) клонов? Т.е. вопрос о мощности множества $F_A/\sim_{\mathrm{alg}}$ ($F_A/\sim_{\mathrm{log}}$). Заметим при этом, что для любого не одноэлементного множества A отношение $\sim_{\mathrm{alg}}$ на F_A не тривиально.

3) Каковы мощности и как устроены (к примеру в решетке L_A всех клонов на A) классы $F/\sim_{\mathrm{alg}}$ ($F/\sim_{\mathrm{log}}$) для различных клонов F на множестве A.

В связи с первым вопросом введем следующие определения. Под *алгебраической размерностью* $\mathrm{alg}\text{-}\dim F$ (*строгой алгебраической размерностью* $\mathrm{st.alg}\text{-}\dim F$) клона F на A будем понимать наименьшее натуральное n (если подобное существует), такое что для любого клона F_1 на A равенство $\mathrm{Alg}_n F_1 = \mathrm{Alg}_n F$ влечет равенство $\mathrm{Alg}\, F_1 = \mathrm{Alg}\, F$ (совпадение клонов F_1 и F). В противном случае (в случае отсутствия такого n) будем говорить о бесконечности алгебраической (строгой алгебраической) размерности клона F.

Аналогичным образом, с заменой $\mathrm{Alg}_n F$ на $\mathrm{Log}^0_n F$ и $\mathrm{Alg}\, F$ на $\mathrm{Log}^0 F$ соответственно, определяются *логическая* $\mathrm{log}\text{-}\dim F$ (и *строгая логическая* $\mathrm{st.log}\text{-}\dim F$) *размерности* клона F.

В качестве примера отметим следующие равенства для клона Φ_2 всех функций на двухэлементном множестве $2 = \{0,1\}$: $\mathrm{alg}\text{-}\dim \Phi_2 = \mathrm{st.alg}\text{-}\dim \Phi_2 = 3$, при этом порядок $O(\Phi_2)$ и размерность $\dim \Phi_2$ равны двум. Заметим, что для любого клона имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \mathrm{alg}\text{-}\dim F &\le \mathrm{st.alg}\text{-}\dim F, \\ \mathrm{log}\text{-}\dim F &\le \mathrm{st.log}\text{-}\dim F \end{aligned}$$

Как открытые отметим вопросы о возможных значениях параметров $\dim F$, $\mathrm{alg}\text{-}\dim F$, $\mathrm{st.alg}\text{-}\dim F$, $\mathrm{log}\text{-}\dim F$, $\mathrm{st.log}\text{-}\dim F$ для клонов F на различных множествах A.

Ответы на второй и третий из отмеченных выше вопросов оказались связанными с введенными в работах автора понятиями условного и позитивно условного термов для универсальных алгебр.

Не останавливаясь здесь на определении этих понятий (см. о них, к примеру [15], [16]), отметим лишь, что совокупность $\mathrm{Ctr}\,\mathfrak{A}$ условно термальных (совокупность $\mathrm{PCtr}\,\mathfrak{A}$ позитивно условно термальных) функций алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ образует функциональный клон на множестве A. Для любого функционального клона F на A через CTF (PCTF) обозначим функциональный клон $\mathrm{Ctr}\,\mathfrak{A}_F$ ($\mathrm{PCtr}\,\mathfrak{A}_F$) на множестве A. Операторы $\mathrm{CT} : F \to \mathrm{CTF}$ ($\mathrm{PCT} : F \to \mathrm{PCTF}$) являются операторами замыкания на решетке L_A всех клонов на множестве A (т. е. они экзистенциальны, монотонны и идемпотентны на этой решетке).

Клон F на множестве A называется *эквационально аддитивным*, если совокупности множеств $\mathrm{Alg}_n F$ ($n \in \omega$) замкнуты относительно объединений конечных совокупностей своих элементов. В работе [14] приведены многочисленные примеры алгебр $\mathfrak{A}$ для которых клоны $\mathrm{Tr}\,\mathfrak{A}$ эквационально аддитивны.

Имеет место следующий частичный ответ на вопрос 2 для отношения $\sim_{\mathrm{alg}}$.

Утверждение 9. [7]. *Для любого конечного множества A число попарно алгебраически не эквивалентных эквационально аддитивных клонов на A конечно.*

Это связано с тем, что для эквационально аддитивных клонов F имеет место $F \sim_{\mathrm{alg}}$ PCTF, а число PCT-замкнутых клонов F на конечных множествах A конечно (их инвариантами служат полугруппы внутренних гомоморфизмов алгебр $\mathfrak{A}_F$).

Очевидно, что для любого клона F на множестве A класс $F/\sim$ alg является выпуклым в решетке L_A и замкнутым множеством в пространстве $\langle F_A; d\rangle$. Обратное неверно.

Для любого оператора замыкания g на произвольной решетке L подмножество B решетки L назовем *верхним полуинтервалом порожденным оператором* g, если для некоторого $b \in B$ имеет место $g(b) = b$ и $B = \{c \in L | g(c) = b\}$. Очевидно, что при этом $b = \sup B$.

Утверждение 10. [7]. *Для любого конечного множества A и любого эквационально аддитивного клона F на A класс $F/\sim$* alg *является объединением конечного числа верхних полуинтервалов, порожденных оператором замыкания* PCT *на решетке L_A.*

Среди открытых вопросов отметим вопрос о мощностях множеств $F_A/\sim$ alg для произвольных (в том числе и конечных) множеств A и о строении классов $F/\sim$ alg для любых клонов F из F_A.

В отличии от отношения $\sim_{\mathrm{alg}}$, для отношения $\sim_{\mathrm{log}}$, в случае конечности множества A, эти вопросы решены в полном объеме. В отличии от отношения $\sim_{\mathrm{alg}}$ отношение $F \sim_{\mathrm{log}}$ CTF имеет место уже для любых клонов F на произвольных множествах A и инвариантами для CT-замкнутых клонов F выступают полугруппы внутренних изоморфизмов алгебр $\mathfrak{A}_F$. Тем самым имеет место

Утверждение 11. [8]. *Для любого конечного множества A число попарно не $\sim_{\mathrm{log}}$-эквивалентных клонов на A конечно.*

Строение же классов $F/\sim_{\mathrm{log}}$ для конечных A описано в следующем предложении.

Утверждение 12. [8]. *Для любого конечного A и любого клона $F \in F_A$ класс $F/\sim_{log}$ является объединением конечного числа верхних полуинтервалов, порожденных оператором замыкания* CT *на решетке L_A.*

Из этих утверждений вытекает и

Утверждение 13. [8]. *Для любого конечного множества A и любого $F \in F_A$ логическая размерность* $\log\text{-}\dim F$ *конечна. Более того, существует натуральное число $n(A)$, такое что для любых $F_1, F_2 \in F_A$ равенство* $\mathrm{Log}^0_{n(A)} F_1 = \mathrm{Log}^0_{n(A)} F_2$ *влечет совпадение логических геометрий клонов F_1 и F_2.*

Наконец, укажем еще на некоторые результаты, связанные с фрагментами клонов. В работе [17] (на основе введенного Б. И. Плоткиным и Г. И. Житомирским [13], понятия логически эквивалентных алгебр) введено понятие элементарно эквивалентных клонов: клоны F_1, F_2 на множестве A *элементарно эквивалентны* ($F_1 \sim_{\mathrm{Log}} F_2$), если совпадают совокупности элементарных множеств для этих клонов. При этом множество $B \subseteq A^n$ называется *F-элементарным*, если $B = \{\overline{a} \in A^n | \mathfrak{A}_F \models \bigwedge\limits_{i \in I} \Phi_i(\overline{a})$ для некоторой совокупности $\{\Phi_i(\overline{x}) | i \in I\}$ элементарных (логики первого порядка) формул сигнатуры $F\}$.

В работе [17] доказано

Утверждение 14. [17]. *Для любого конечного множества A выполнены следующие свойства:*
а) число попарно не элементарно эквивалентных клонов на A конечно;
б) существует натуральное число $n(A)$ такое, что для любых $F_1, F_2 \in F_A$ совпадение совокупностей F_i-элементарных подмножеств множества $A^{n(A)}$ влечет элементарную эквивалентность клонов F_1 и F_2;
в) для любого $F \in F_A$ класс $F/\sim$ является объединением конечного числа верхних полуинтервалов порожденных оператором замыкания ECT *не решетке L_A.*

Здесь ECT — F-клон всех элементарно условно термальных функций ([8],[9]) алгебры $\mathfrak{A}_F$.

Список литературы

[1] А. И. Мальцев, Структурная характеристика некоторых классов алгебр, ДАН СССР, **120**, 1 (1958), 29–32.

[2] E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary proposition, Amer. J. Math, **56**, 2 (1921), 81–103; The two-valued iterative systems of math. Logic, Annals of Math. Studies, 1941, №5.

[3] Ю. И. Янов, А. А. Мучник, О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса, ДАН СССР, **127**, 1 (1959), 144–146.

[4] А. И. Мальцев, И. А. Мальцев, Итеративные алгебры Поста, Новосибирск, Из-во Ин-та математики СО РАН, 2009.

[5] А. Г. Пинус, О фрагментах функциональных клонов, Алгебра и логика, **56**, 4 (2017), в печати.

[6] А. Г. Пинус, Размерности функциональных клонов, метрика на их совокупности, Сибирские электронные математические известия, **13** (2016), 366–374.

[7] А. Г. Пинус, Об алгебраически эквивалентных клонах, Алгебра и логика, **55**, 6 (2016), 760–768.

[8] А. Г. Пинус, О логической эквивалентности функциональных клонов, СМЖ, **58**, 4 (2017).

[9] А. Г. Пинус, О прямых и обратных пределах ретрактивных спектров, СМЖ, **58**, 6 (2017), в печати.

[10] А. А. Булатов, Тождества в решетках замкнутых классов, Дискретная математика, **4**, 4 (1992), 140–148.

[11] А. А. Булатов, Конечные подрешетки в решетке клонов, Алгебра и логика, **33**, 5 (1994), 514–549.

[12] B. Plotkin, Some results and problems related to universal algebraic geometry, Int. J. Algebra Comput., **17**, 5/6 (2007), 1133–1164.

[13] B. Plotkin, G. Zhitomirski, Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras, Алгебра и анализ, **19**, 5 (2007), 214–245.

[14] Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами, Новосибирск, Из-во СО РАН, 2016.

[15] А. Г. Пинус, Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений, Новосибирск, Из-во НГТУ, 2002.

[16] А. Г. Пинус, Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений, Успехи матем. Наук, **56**, 4 (2001), 35–72.

[17] А. Г. Пинус, Об элементарной геометрии универсальных алгебр и об эквивалентности клонов относительно этой геометрии, Сибирские электронные математические известия, **14** (2017), в печати.

О НЕКОТОРЫХ E-ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССАХ ГИПЕРФУНКЦИЙ РАНГА 3

Л. В. Рябец* **М. И. Гончарова**

Иркутский государственный университет,
б. Гагарина, 20, Иркутск, 664003,
Россия

e-mail: riabets@rambler.ru e-mail: ritaa19952015@gmail.com

В работе рассматриваются некоторые замкнутые классы гиперфункций на трехэлементном множестве относительно оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства (E-оператор).

В последнее время при изучении функциональных систем применяют операторы замыкания, которые существенно сильнее оператора суперпозиции. Одним из таких операторов является оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства. Исследования действия этого оператора на множестве булевых функций, частичных булевых функций и функций многозначной логики проводились в работах [1, 2, 3]. В работе [4] получен критерий E-полноты на множестве гиперфункций ранга 2.

Пусть $E_3 = \{0, 1, 2\}$ и 2^{E_3} — множество всех подмножеств E_3. Определим множество H_3 — множество всех гиперфункций ранга 3:

$$H_3^n = \left\{ f \mid f : E_3^n \to 2^{E_3} \setminus \{\varnothing\} \right\},\ H_3 = \bigcup_n H_3^n.$$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n), f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — гиперфункции. Суперпозиция гиперфункций

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

определяет гиперфункцию $g(x_1, \ldots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_3^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-31-00209 мол_а.

Будем говорить, что гиперфункция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получается из гиперфункций $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим E-замыкание множества $Q \subseteq H_3$ как множество всех гиперфункций из H_3, которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства. Множество гиперфункций, которое совпадает со своим E-замыканием называется E-замкнутым классом.

Пусть множество A — непустое подмножество множества E_3, причем A не совпадает с E_3. Обозначим через T_A^- множество гиперфункций из H_3, таких что

$$T_A^- = \{f \in H_3 | f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing, \alpha_i \in A\}.$$

Всего существует шесть таких классов. Например, для $A = \{0\}$ класс T_0^- содержит гиперфункции, которые на нулевом наборе могут принимать значения $\{0\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$. Для $A = \{0,1\}$ класс T_{01}^- содержит гиперфункции, которые на наборах, состоящих из 0 и 1 не могут принимать значение $\{2\}$.

Теорема 1. *Классы T_A^- являются E-замкнутыми.*

Доказательство. Зафиксируем A и покажем замкнутость класса T_A^- относительно оператора суперпозиции гиперфункций.

Пусть функции $f(x_1, \ldots, x_m)$, $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $f_m(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат классу T_A^- и суперпозиция $f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ задает функцию $h(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим значение функции h на наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in A$.

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bigcup_{\gamma_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} f(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$$

и $f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing$ для всех i.

Пусть набор $(\gamma_, \ldots, \gamma_m)$ такой, что для любого i элемент $\gamma_i \in A$. Пусть $\delta_j = f(\gamma_, \ldots, \gamma_m))$. В силу того, что $f \in T_A^-$, справедливо $\delta_j \cap A \neq \varnothing$.

Таким образом, $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing$ и $h(x_1, \ldots, x_n) \in T_A^-$.

Нетрудно проверить, что класс T_A^- замкнут относительно операций отождествления переменных и введения фиктивных переменных.

Покажем замкнутость класса T_A^- относительно оператора разветвления по предикату равенства.

Рассмотрим гиперфункции $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n) \in T_A^-$. Определим гиперфункцию $h(x_1, \ldots, x_n)$

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Рассмотрим значение $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in A$. Если $\alpha_i = \alpha_j$, то

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing$.

Если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Таким образом, $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing$ и $h(x_1, \ldots, x_n) \in T_A^-$ □

В [3] показано, что система функций $\{0, 1, 2\}$ E-полна в классе P_3. Для класса гиперфункций на трехэлементном множестве справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2. *Система гиперфункций* $\big\{0, 1, 2, \{0, 1, 2\}\big\}$ *является E-полной в классе H_3.*

Рассмотрим свойство E-полноты описанных выше классов.

Теорема 3. *Классы T_A^- являются E-предполными.*

Доказательство. Зафиксируем множество A и рассмотрим гиперфункцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, не принадлежащую классу T_A^-. Тогда существует набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, состоящий из элементов $\alpha_i \in A$, такой что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = B$, где $B \subset E_3$ и $B \cap A = \varnothing$.

Для любого A класс T_A^- содержит соответствующий набор констант, а именно: для каждого $a_j \subseteq A$ функция $t_j(x_1, \ldots, x_n) \equiv a_j$ содержится в T_A^-. Таким образом, можно получить функцию

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(t_{j_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_{j_n}(x_1, \ldots, x_n)) \equiv B.$$

Рассмотрим гиперфункцию $g(x_1, \ldots, x_n) \in T_A^-$, такую что:

- на наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, в которых $\alpha_i \in A$ для всех i, значение $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap A \neq \varnothing$;

- на наборах $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, в которых для некоторого i элемент $\beta_i \notin A$, значение $g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = c$, $c \notin A$.

Рассмотрим суперпозицию гиперфункций

$$s(x_1, \ldots, x_n) = g(h(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h(x_1, \ldots, x_n)) = g(B, \ldots, B).$$

Для каждого уточнения $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ набора $(B, \ldots, B)$ значение гиперфункции $g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = c$. Тогда

$$s(x_1, \ldots, x_n) = \bigcup_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} g(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \bigcup_{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)} c = c.$$

Таким образом, удалось получить недостающие в классе T_A^- константы. □

Список литературы

[1] С. С. Марченков, Операторы замыкания с разветвлением по предикату, Вестник МГУ, Сер. 1: Математика и механика, 6 (2003), 37–39.

[2] С. С. Марченков, Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций, Дискретная математика, **20**, 6 (2008), 80–88.

[3] С. С. Марченков, Оператор *E*-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики, Математические вопросы кибернетики, М. : Физматлит, **19** (2013), 227–238.

[4] В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец, Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2, Вестн. ИГУ, Сер. Математика, **10** (2014), 93–105.

A NEW CHARACTERIZATION OF q_ω-COMPACT ALGEBRAS

M. Shahryari

Department of Pure Mathematics,
Faculty of Mathematical Sciences,
University of Tabriz, Tabriz, Iran
e-mail: mshahryari@tabrizu.ac.ir

1 Introduction

In this article, our notation is the same as in [1]–[5]. The reader should review these references for a complete account of the universal algebraic geometry. However, a brief review of fundamental notions will be given in the next section.

Let $\mathcal{L}$ be an algebraic language, A be an algebra of type $\mathcal{L}$, and S be a system of equations in the language $\mathcal{L}$. Recall that an equation $p \approx q$ is a logical consequence of S with respect to A, if any solution of S in A is also a solution of $p \approx q$. The radical $\mathrm{Rad}_A(S)$ is the set of all logical consequences of S with respect to A. This radical is clearly a congruence of the term algebra $T_{\mathcal{L}}(X)$ and in fact it is the largest subset of the term algebra which is equivalent to S with respect to A. Generally, this logical system of equations with respect to A does not obey the ordinary compactness of the first order logic. We say that an algebra A is q_ω-compact if for any system S and any consequence $p \approx q$ there exists a finite subset $S_0 \subseteq S$ with the property that $p \approx q$ is a consequence of S_0 with respect to A. This property of being q_ω-compact is equivalent to

$$\mathrm{Rad}_A(S) = \bigcup_{S_0} \mathrm{Rad}_A(S_0),$$

where S_0 varies in the set of all finite subsets of S. If we look at the map Rad_A as a closure operator on the lattice of systems of equations in the language $\mathcal{L}$ then we see that A is q_ω-compact iff Rad_A is algebraic. The class of q_ω-compact algebras is very important and it contains many elements. For example, all equationally noetherian algebras belong to this class. In [3], some equivalent conditions for q_ω-compactness are given. Another equivalent condition is obtained in [6] in terms of *geometric equivalence*. It is proved that (the proof is implicit in [6]) an algebra A is q_ω-compact iff A is geometrically equivalent to any of its filter-powers. We will discuss geometric equivalence in the next section. We will use this fact of [6] to obtain a new characterization of q_ω-compact algebras. Although our main result will be formulated in an arbitrary variety of algebras, in this introduction, we give a simple description of this result for the case of the variety of all algebras of type $\mathcal{L}$.

Roughly speaking, a *super-product operation* is a map C which takes a set K of congruences of the term algebra and returns a new congruence $C(K)$ such that for all $\theta \in K$ we have $\theta \subseteq C(K)$. For an algebra B define a map T_B which takes a system S of equations and returns

$$T_B(S) = \{\mathrm{Rad}_B(S_0) : \ S_0 \subseteq S, \ |S_0| < \infty\}.$$

Suppose for all algebra B we have $C \circ T_B \leq \mathrm{Rad}_B$. We prove that an algebra A is q_ω-compact if and only if $C \circ T_A = \mathrm{Rad}_A$.

2 Main result

Suppose $\mathcal{L}$ is an algebraic language. All algebras we are dealing with, are of type $\mathcal{L}$. Let $\mathbf{V}$ be a variety of algebras. For any $n \geq 1$, we denote the relative free algebra of $\mathbf{V}$, generated by the finite set $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, by $F_{\mathbf{V}}(n)$. Clearly, we can assume that an arbitrary element $(p, q) \in F_{\mathbf{V}}(n)^2$ is an equation in the variety $\mathbf{V}$ and we can denote it by $p \approx q$. We introduce the following list of notations:

1. $\mathrm{P}(F_{\mathbf{V}}(n)^2)$ is the set of all systems of equations in the variety $\mathbf{V}$;
2. $\mathrm{Con}(F_{\mathbf{V}}(n))$ is the set of all congruences of $F_{\mathbf{V}}(n)$;
3. $\Sigma(\mathbf{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(F_{\mathbf{V}}(n)^2)$;
4. $\mathrm{Con}(\mathbf{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Con}(F_{\mathbf{V}}(n))$;
5. $\mathrm{PCon}(\mathbf{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{Con}(F_{\mathbf{V}}(n)))$;
6. $q_\omega(\mathbf{V})$ is the set of all q_ω-compact elements of $\mathbf{V}$.

Note that we have $\mathrm{Con}(\mathbf{V}) \subseteq \Sigma(\mathbf{V})$. For any algebra $B \in \mathbf{V}$, the map $\mathrm{Rad}_B : \Sigma(\mathbf{V}) \to \Sigma(\mathbf{V})$ is a closure operator and B is q_ω-compact, if and only if this operator is algebraic. Define a map

$$T_B : \Sigma(\mathbf{V}) \to \mathrm{PCon}(\mathbf{V})$$

by

$$T_B(S) = \{\mathrm{Rad}_B(S_0) : \ S_0 \subseteq S, \ |S_0| < \infty\}.$$

Definition 1. A map $C : \mathrm{PCon}(\mathbf{V}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{V})$ is called a super-product operation, if for any $K \in \mathrm{PCon}(\mathbf{V})$ and $\theta \in K$, we have $\theta \subseteq C(K)$.

There are many examples of such operations. The ordinary product of normal subgroups in the varieties of groups is the simplest one. For another example, we can look at the map $C(K) = \mathrm{Rad}_B(\bigcup_{\theta \in K} \theta)$, for a given fixed $B \in \mathbf{V}$. We are now ready to present our main result.

Theorem 2. *Let C be a super-product operation such that for any $B \in \mathbf{V}$, we have $C \circ T_B \leq \mathrm{Rad}_B$. Then*

$$q_\omega(\mathbf{V}) = \{A \in \mathbf{V} : \ C \circ T_A = \mathrm{Rad}_A\}.$$

To prove the theorem, we first give a proof for the following claim. Note that it is implicitly proved in [6] for the case of groups.

An algebra is q_ω-compact iff it is geometrically equivalent to any of its filter-powers.

Let $A \in \mathbf{V}$ be a q_ω-compact algebra and I be a set of indices. Let $F \subseteq P(I)$ be a filter and $B = A^I/F$ be the corresponding filter-power. We know that the quasi-varieties generated by A and B are the same. So, these algebras have the same sets of quasi-identities. Now, suppose that S_0 is a finite system of equations and $p \approx q$ is another equation. Consider the following quasi-identity

$$\forall \overline{x}(S_0(\overline{x}) \to p(\overline{x}) \approx q(\overline{x})).$$

This quasi-identity is true in A iff it is true in B. This shows that $\mathrm{Rad}_A(S_0) = \mathrm{Rad}_B(S_0)$. Now, for an arbitrary system S, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}_A(S) &= \bigcup_{S_0} \mathrm{Rad}_A(S_0) \\ &= \bigcup_{S_0} \mathrm{Rad}_B(S_0) \\ &\subseteq \mathrm{Rad}_B(S). \end{aligned}$$

Note that in the above equalities, S_0 ranges in the set of finite subsets of S. Clearly, we have $\mathrm{Rad}_B(S) \subseteq \mathrm{Rad}_A(S)$, since $A \leq B$. This shows that A and B are geometrically equivalent. To prove the converse, we need to define some notions. Let $\mathfrak{X}$ be a prevariety, i.e. a class of algebras closed under product and subalgebra. For any $n \geq 1$, let $F_{\mathfrak{X}}(n)$ be the free element of $\mathfrak{X}$ generated by n elements. Note that if $\mathbf{V} = var(\mathfrak{X})$ then $F_{\mathfrak{X}}(n) = F_{\mathbf{V}}(n)$. A congruence R in $F_{\mathfrak{X}}(n)$ is called an $\mathfrak{X}$-radical, if $F_{\mathfrak{X}}(n)/R \in \mathfrak{X}$. For any $S \subseteq F_{\mathfrak{X}}(n)^2$, the least $\mathfrak{X}$-radical containing S is denoted by $\mathrm{Rad}_{\mathfrak{X}}(S)$.

Lemma 3. *For an algebra A and any system S, we have*

$$\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_{pvar(A)}(S),$$

where $pvar(A)$ is the prevariety generated by A.

Proof. Since $F_{\mathfrak{X}}(n)/\mathrm{Rad}_A(S)$ is a coordinate algebra over A, so it embeds in a direct power of A and hence it is an element of $pvar(A)$. This shows that

$$\mathrm{Rad}_{pvar(A)}(S) \subseteq \mathrm{Rad}_A(S).$$

Now, suppose (p, q) does not belong to $\mathrm{Rad}_{pvar(A)}(S)$. So, there exists $B \in pvar(A)$ and a homomorphism $\varphi : F_{\mathfrak{X}}(n) \to B$ such that $S \subseteq \ker\varphi$ and $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. But, B is separated by A, hence there is a homomorphism $\psi : B \to A$ such that $\psi(\varphi(p)) \neq \psi(\varphi(q))$. This shows that (p, q) does not belong to $\ker(\psi \circ \varphi)$. Therefore, it is not in $\mathrm{Rad}_A(S)$. □

Note that since $pvar(A)$ is not axiomatizable in general we cannot give a deductive description of elements of $\mathrm{Rad}_A(S)$. But for $\mathrm{Rad}_{var(A)}(S)$ and $\mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S)$ this is possible because the variety and quasi-variety generated by A are axiomatizable. More precisely, we have:

1. let $\mathrm{Id}(A)$ be the set of all identities of A. Then $\mathrm{Rad}_{var(A)}(S)$ is the set of all logical consequences of S and $\mathrm{Id}(A)$;

2. let $\mathrm{Q}(A)$ be the set of all identities of A. Then $\mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S)$ is the set of all logical consequences of S and $\mathrm{Q}(A)$.

We can now, prove the converse of the claim. Suppose A is not q_ω-compact. We show that

$$pvar(A)_\omega \neq qvar(A)_\omega.$$

Recall that for an arbitrary class $\mathfrak{X}$, the notation $\mathfrak{X}_\omega$ denotes the class of finitely generated elements of $\mathfrak{X}$. Suppose in contrary we have the equality

$$pvar(A)_\omega = qvar(A)_\omega.$$

Assume that S is an arbitrary system and $(p, q) \in \mathrm{Rad}_A(S)$. Hence, the infinite quasi-identity

$$\forall \overline{x}(S(\overline{x}) \to p(\overline{x}) \approx q(\overline{x}))$$

is true in A. So, it is also true in $pvar(A)$. As a result, every element from $qvar(A)_\omega$ satisfies this infinite quasi-identity. Let $F_A(n) = F_{var(A)}(n)$. We have $F_A(n) \in qvar(A)_\omega$ and hence $\mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S)$ depends only on $qvar(A)_\omega$. In other words, $(p,q) \in \mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S)$, so $p \approx q$ is a logical consequence of the set of $S + \mathrm{Q}(A)$. By the compactness theorem of the first order logic, there exists a finite subset $S_0 \subseteq S$ such that $p \approx q$ is a logical consequence of $S_0 + \mathrm{Q}(A)$. This shows that $(p,q) \in \mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S_0)$. But $\mathrm{Rad}_{qvar(A)}(S_0) \subseteq \mathrm{Rad}_A(S_0)$. Hence $(p,q) \in \mathrm{Rad}_A(S_0)$, violating our assumption of non-q_ω-compactness of A. We now showed that

$$pvar(A)_\omega \neq qvar(A)_\omega.$$

By the algebraic characterizations of the classes $pvar(A)$ and $qvar(A)$, we have

$$SP(A)_\omega \neq SPP_u(A)_\omega,$$

where P_u is the ultra-product operation. This shows that there is an ultra-power B of A such that

$$SP(A)_\omega \neq SP(B)_\omega.$$

In other words, the classes $pvar(A)_\omega$ and $pvar(B)_\omega$ are different. We claim that A and B are not geometrically equivalent. Suppose this is not the case. Let $A_1 \in pvar(A)_\omega$. Then A_1 is a coordinate algebra over A, i.e. there is a system S such that

$$A_1 = \frac{F_{\mathbf{V}}(n)}{\mathrm{Rad}_A(S)}.$$

Since $\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S)$, so

$$A_1 = \frac{F_{\mathbf{V}}(n)}{\mathrm{Rad}_B(S)},$$

and hence A_1 is a coordinate algebra over B. This argument shows that

$$pvar(A)_\omega = pvar(B)_\omega,$$

which is a contradiction. Therefore A and B are not geometrically equivalent and this completes the proof of the claim. We can now complete the proof of the theorem. Assume that $C \circ T_A = \mathrm{Rad}_A$. We show that A is geometrically equivalent to any of its filter-powers. So, let $B = A^I/F$ be a filter-power of A. Note that we already proved that for a finite system S_0 the radicals

$\mathrm{Rad}_A(S_0)$ and $\mathrm{Rad}_B(S_0)$ are the same. Suppose that S is an arbitrary system of equations. We have

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}_A(S) &= C(T_A(S))\\ &= C(\{\mathrm{Rad}_A(S_0):\ S_0 \subseteq S, |S_0| < \infty\})\\ &= C(\{\mathrm{Rad}_B(S_0):\ S_0 \subseteq S, |S_0| < \infty\})\\ &\subseteq \mathrm{Rad}_B(S).\end{aligned}$$

So, we have $\mathrm{Rad}_A(S) = \mathrm{Rad}_B(S)$ and hence A and B are geometrically equivalent. This shows that A is q_ω-compact. Conversely, let A be q_ω-compact. For any system S we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}_A(S) &= \bigcup_{S_0} \mathrm{Rad}_A(S_0)\\ &= \bigvee\{\mathrm{Rad}_A(S_0) : S_0 \subseteq S, |S_0| < \infty\}\\ &= \bigvee T_A(S),\end{aligned}$$

where $\bigvee$ denotes the least upper bound. By our assumption, $C(T_A(S)) \subseteq \mathrm{Rad}_A(S)$, so $C(T_A(S)) \subseteq \bigvee T_A(S)$. On the other hand, for any finite $S_0 \subseteq S$, we have $\mathrm{Rad}_A(S_0) \subseteq C(T_A(S))$. This shows that

$$C(T_A(S)) = \bigvee T_A(S),$$

and hence $C \circ T_A = \mathrm{Rad}_A$. The proof is now completed.

References

[1] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Unification theorems in algebraic geometry, Algebra and Discrete Mathamatics, **1** (2008), 80–112.

[2] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures, II: Fundations, J. Math. Sci., **185**, 3 (2012), 389–416.

[3] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures, III: Equationally noetherian property and compactness, South. Asian Bull. Math., **35**, 1 (2011), 35–68.

[4] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over algebraic structures, IV: Equatinal domains and co-domains, Algebra and Logic, **49**, 6 (2010), 483–508.

[5] P. Modabberi, M. Shahryari, Compactness conditions in universal algebraic geometry, Algebra and Logic, **55**, 2 (2016), 146–172.

[6] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups II. Logical Foundations, J. Algebra, 2000, **234**, 225–276.

[7] B. Plotkin, Seven lectures in universal algebraic geometry, 2002, `arXiv:math/0204245v1[math.GM]`.

CLASSIFICATION OF COUNTABLE MODELS OF COMPLETE THEORIES: POPULAR AND PHILOSOPHICAL ASPECTS

S. V. Sudoplatov*

Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia;
Novosibirsk State Technical University,
20, K.Marx avenue, Novosibirsk, 630073, Russia;
Novosibirsk State University,
1, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, Russia;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125, Pushkina Street, Almaty, 050010, Kazakhstan
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

To Professor Aleksandr Georgievich Pinus
in occasion with his 70th anniversary

We consider some basic aspects of the classification of countable models of complete theories [1].

1. At first, we recall related syntactic and semantic objects.

Collecting an information from the reality we get an (elementary) *theory* T, i. e., a consistent information. It produces the *syntax* written by first-order formulas. Among all theories any *complete theory* contains a maximal consistent information.

Semantic objects $\mathcal{M}$ interpreting, i.e., realizing the theory T are *models* of T. A *countable* model (a structure) is a model (of a theory) with countably many elements.

A (complete) *type* is a (complete) information about a finite set A in $\mathcal{M}$. Complete types are denoted by $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(A)$, $\mathrm{tp}(A)$ if $\mathcal{M}$ is fixed, or $p(\bar{x})$, where $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ is a tuple of variables, if there is *some* realization $A = a_1, \ldots, a_n$ (in a model $\mathcal{M}$ of T) for p.

*Partially supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (Grant NSh-6848.2016.1), by Russian Foundation for Basic Researches (Grant No. 17-01-00531), and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0830/GF4).

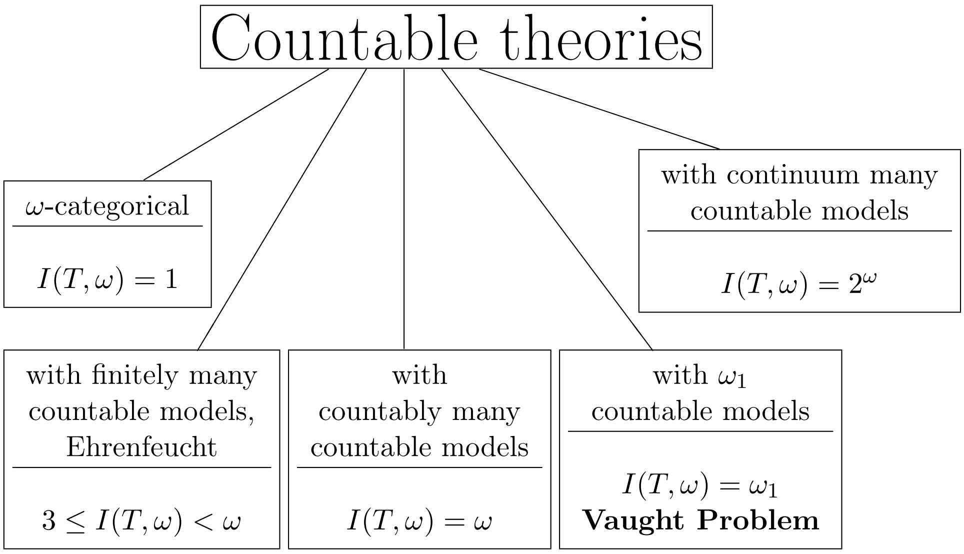


Fig 1:

2. We consider the classification of models of a theory up to isomorphisms, i.e., to one-to-one correspondences preserving relations and operations. It means that we take into consideration only essentially distinct objects.

3. For a complete theory T without finite models and for an infinite power λ, we denote by $I(T,\lambda)$ the number of pairwise non-isomorphic models of T, having λ elements.

The *spectrum function* $I(T,\cdot)$ maps a (finite or infinite) power $I(T,\lambda)$ for an infinite power λ.

We consider countable λ: $\lambda=\omega$, i.e., models are enumerable by natural numbers forming the set ω.

4. It is known that for any countable complete theory T,

- $I(T,\omega)\neq 2$, **Vaught Theorem**,
- if $I(T,\omega) > \omega_1$ (where ω_1 is the least uncountable power) then $I(T,\omega)=2^\omega$ (where 2^ω is the continuum, i.e., the set of all $\{0,1\}$-sequences), **Morley Theorem**.

Thus, $I(T,\omega)\in(\omega\setminus\{0,2\})\cup\{\omega,\omega_1,2^\omega\}$.

5. On Figure 1, possibilities for the number of countable models of complete countable theories are represented.

6. Classification of models is divided into two main parts: uncountable and countable (see Figure 2).

7. For countable models we have the following subdivisions (see Figure 3).

8. We denote by

- $P(T)$ the number of pairwise non-isomorphic (almost) prime models of T,
- $L(T)$ the number of pairwise non-isomorphic limit models of T,
- $\mathrm{NPL}(T)$ the number of pairwise non-isomorphic other countable models of T.

9. The set of all types of theory T is denoted by $S(T)$.

Countable theories are divided on two classes with respect to the number of types (Figure 4).

10. For countable models of small theories we have the following subdivisions with respect to spectrum function (see Figure 5).

11. The following theorem describes triples for distributions of countable models of theories with continuum many types.

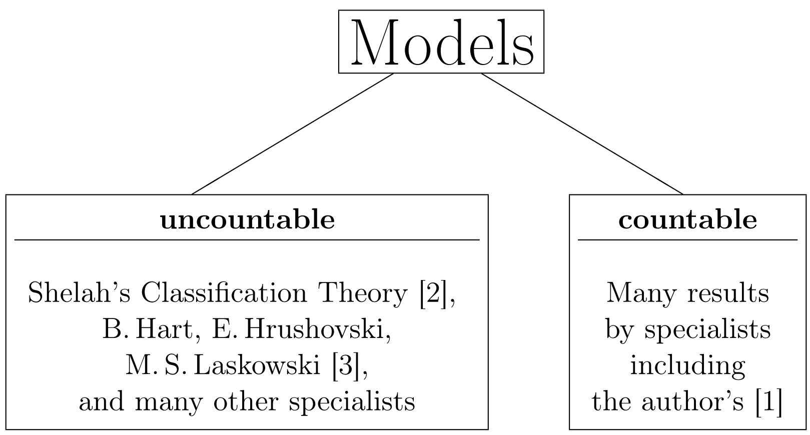


Fig 2:

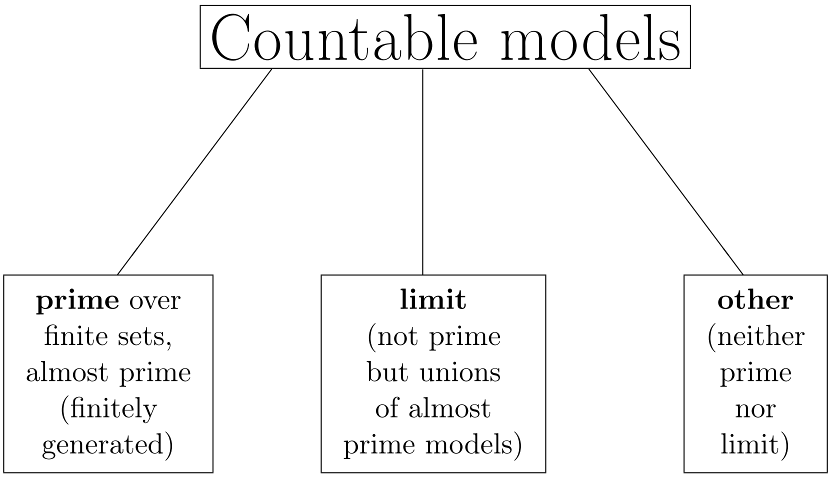

Countable models
prime over finite sets, almost prime (finitely generated)
limit (not prime but unions of almost prime models)
other (neither prime nor limit)

Fig 3:

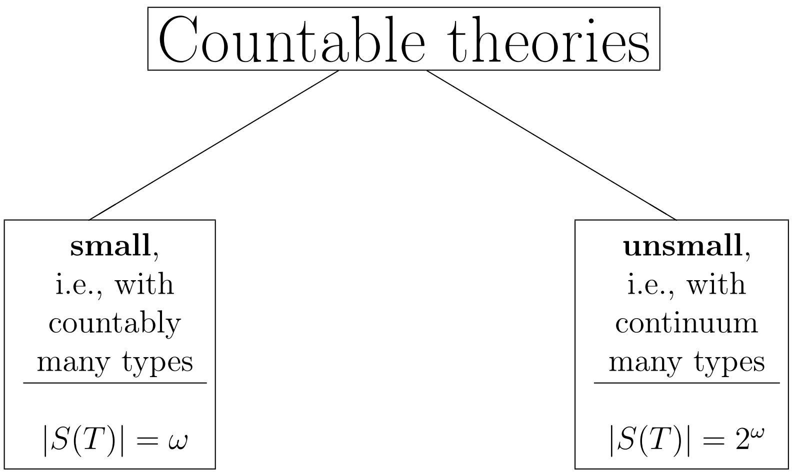

Countable theories
small, i.e., with countably many types
$|S(T)| = \omega$
unsmall, i.e., with continuum many types
$|S(T)| = 2^\omega$

Fig 4:

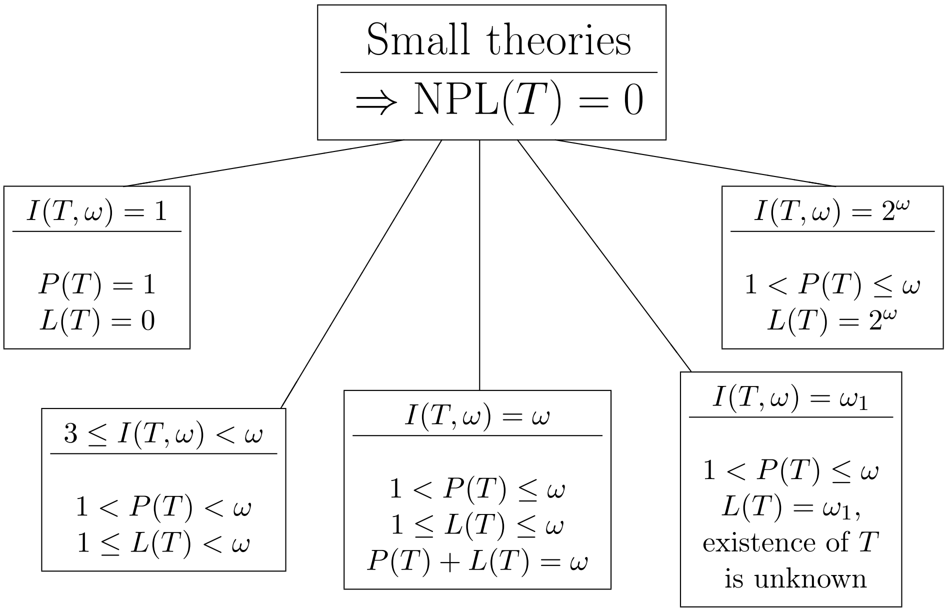


Fig 5:

Theorem 1 (R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov [1, 4].). *Assuming the continuum hypothesis, for any theory T in the class $\mathcal{T}_c$ of theories with continuum many types, the triple* $\mathrm{cm}_3(T) = (P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$ *has one of the following values:*

(1) $(2^\omega, 2^\omega, \lambda)$, *where* $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$;

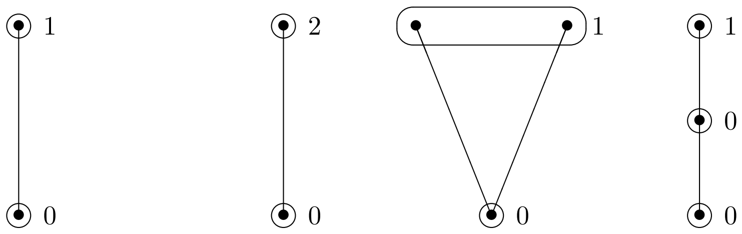
(2) $(0, 0, 2^\omega)$;

(3) $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, *where* $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$.

All these values have realizations in the class $\mathcal{T}_c$.

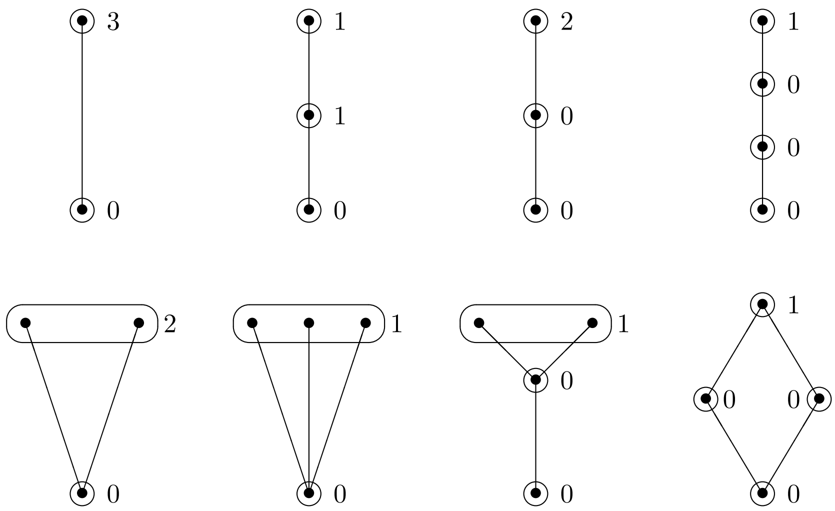
12. We consider two basic characteristics for the classification of countable models of a theory:

- Rudin–Keisler preorders $\leq_{\mathrm{RK}}$ for isomorphism types of almost prime models:
$$\mathcal{M}A \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}(B) \Leftrightarrow \mathcal{M}(B) \text{ realizestp}(A);$$
- distributions of limit models over equivalence classes of almost prime models.



$I(T,\omega) = 3$ $I(T,\omega) = 4$

Fig 6:



$I(T,\omega) = 5$

Fig 7:

We obtain a classification for the class of small theories, with respect to these characteristics.

The classification is generalized for the class $\mathcal{T}_c$ (with R.A. Popkov) [1, 4].

13. On Figures 6, 7 we represent examples of diagrams for Ehrenfeucht theories with respect to Rudin–Keisler preorders and distribution functions for limit models.

14. There are natural examples of Ehrenfeucht theories, among which there is the most clear and historically first series of examples by A. Ehrenfeucht:

Let T_n be the theory of a structure $\mathcal{M}^n$, formed from the structure $\langle\mathbb{Q};<\rangle$ by adding constants c_k, $c_k < c_{k+1}$, $k \in \omega$ such that $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$, and unary predicates $P_0, \ldots, P_{n-3}$ which form a partition of the set $\mathbb{Q}$ of rationals, with

$$\models \forall x, y\, ((x < y) \to \exists z\, ((x < z) \land (z < y) \land P_i(z))),\ i = 0, \ldots, n-3.$$

The theory T_n has exactly n pairwise non-isomorphic models:

(a) a prime model $\mathcal{M}^n$ ($\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty$);

(b) prime models $\mathcal{M}^n_i$ over realizations of powerful types $p_i(x) \in S^1(\varnothing)$, isolated by sets of formulas $\{c_k < x \mid k \in \omega\} \cup \{P_i(x)\}$, $i = 0, \ldots, n-3$ ($\lim\limits_{k\to\infty} c_k \in P_i$);

(c) a saturated model $\overline{\mathcal{M}}^n$ (the limit $\lim\limits_{k\to\infty} c_k$ is irrational).

At the same time, these and similar Examples “from the nature” do not cover all possibilities for the distributing spectrum for countable models of Ehrenfeucht theories.

15. Realizing all possible basic characteristics for the classification we use syntactic generalizations of semantic Jonsson–Fraïssé–Hrushovski–Herwig generic constructions based on syntactic amalgams.

Let $\Phi(A)$, $\Psi(B)$, $\mathrm{X}(C)$ be diagrams in a class $\mathbf{D}_0$ describing links between elements in finite sets A, B, C respectively, with some (maybe empty) extra-information, and such that $\Phi(A) \subseteq \Psi(B) \cap \mathrm{X}(C)$.

A (*syntactic*) *amalgam* of $\Psi(B)$ and $\mathrm{X}(C)$ over $\Phi(A)$ is a diagram $\Theta(D) \in \mathbf{D}_0$ such that $\Theta(D) \supseteq \Psi(B) \cup \mathrm{X}(C)$.

In particular, these diagrams can contain only inner descriptions for finite structures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ with universes A, B, C. In such a case, a structure $\mathcal{D}$ is a (*semantic*) amalgam of $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ over $\mathcal{A}$.

On Figures 8, 9, we illustrate a semantic amalgam and a syntactic one respectively.

16. We construct a *generic* structure $\mathcal{M}$ step-by-step using a given class $\mathbf{D}_0$ of diagrams and of their amalgams such that all diagrams in $\mathbf{D}_0$ are represented in $\mathcal{M}$:

(1) every finite set A_0 in the universe M of $\mathcal{M}$ is extensible to a finite set $A \subseteq M$ with a diagram $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ satisfied in $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models \Phi(A)$;

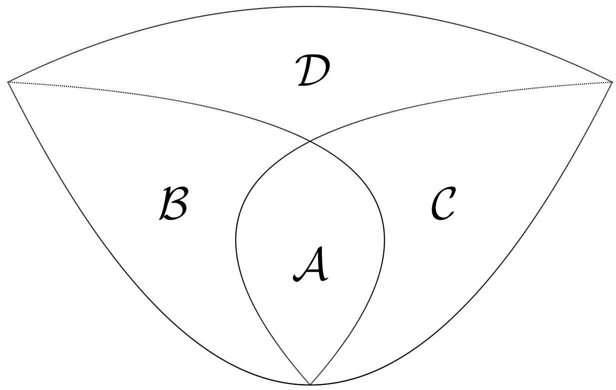


Fig 8:

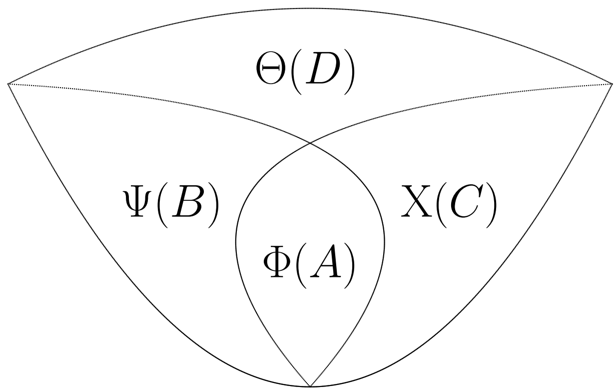


Fig 9:

(2) if $A \subseteq M$ is a finite set, $\Phi(A), \Psi(B) \in \mathbf{D}_0$, $\mathcal{M} \models \Phi(A)$, and $\Phi(A) \leqslant \Psi(B)$ (where $\leqslant$ is a given upward directed partial order for $\mathbf{D}_0$ coordinated with $\subseteq$), then there exists a set $B' \subseteq M$ such that $A \subseteq B'$ and $\mathcal{M} \models \Psi(B')$.

Every finite part of the extra-information should be realized on some step: if $\exists x\varphi(x) \in \Phi(A)$ then there are $B \supseteq A$ with $\Psi(B) \supseteq \Phi(A)$ and an element $b \in B$ such that $\varphi(b) \in \Psi(B)$.

Finite steps approximate the required generic structure.

17. We form a required theory (with desirable properties) introducing an appropriate class $\mathbf{D}_0$ of (in)complete diagrams.

If the process is organized uniformly then diagrams $\Phi(A) \in \mathbf{D}_0$ force complete types $\mathrm{tp}(A)$.

It is natural to take diagrams with a minimal information including atomic links by predicates and operations.

We put an information via the class $\mathbf{D}_0$ and obtain a *generic* theory T such that models of T realize the information I. Here, step-by-step we construct simultaneously a syntactic object T collecting the required information I and a semantic object $\mathcal{M}$ realizing I.

On the following examples, we illustrate the mechanism for realizations of basic characteristics of theories with three and four countable models [1].

18. For a theory T with $I(T,\omega)=3$, i.e., with $P(T)=2$ and $L(T)=1$, we consider countably many disjoint colors $0,1,\ldots,n,\ldots$ for elements and directed links by colored arcs also with countably many disjoint colors ordered by colors of elements.

For the theory T we have a prime model $\mathcal{M}_0$ whose all elements have finite colors.

Furthermore, there is a prime model $\mathcal{M}(a)$ over a realization a of the type describing the infinite color. The model $\mathcal{M}(a)$ has countably many essentially distinct extensions $\mathcal{M}(b_i)$ by arcs of colors i.

We introduce "bridges", i.e., principal edges $[b_i,b_j]$, guaranteing that any i-extension $\mathcal{M}_i=\mathcal{M}(b_i)$ is equal to a j-extension $\mathcal{M}_j=\mathcal{M}(b_j)$. Having these bridges we obtain unique limit model $\overline{\mathcal{M}}$ (together with two non-isomorphic almost prime models $\mathcal{M}_0$ and $\mathcal{M}(a)$). Links between the models are represented on Figure 10.

19. For a theory T with $I(T,\omega)=4$, $P(T)=2$, and $L(T)=2$ basing on the example of a theory with three countable models we consider again countably many disjoint colors $0,1,\ldots,n,\ldots$ for elements and directed links by colored arcs also with countably many disjoint colors ordered by colors of elements.

For the theory T we have a prime model $\mathcal{M}_0$ whose all elements have finite colors.

Furthermore, there is a prime model $\mathcal{M}(a)$ over a realization a of the type describing the infinite color.

The model $\mathcal{M}(a)$ has two essentially distinct extensions $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}(b_1)$ and $\mathcal{M}_2=\mathcal{M}(b_2)$ by arcs of colors 1 and 2 respectively.

We introduce arcs (b_2,b_1) guaranteing that any 2-extension $\mathcal{M}_2$ includes a 1-extension $\mathcal{M}_1$ but not vice versa. Having these arcs we obtain two limit models $\mathcal{M}_1^\infty$ and $\mathcal{M}_2^\infty$ corresponding to elementary chains of 1-extensions and of 2-extensions (together with two non-isomorphic almost prime models $\mathcal{M}_0$ and $\mathcal{M}(a)$). Here $\mathcal{M}_2^\infty$ is saturated.

Links between the models are represented on Figure 11.

20. For a theory T with $I(T,\omega)=4$, $P(T)=3$, $L(T)=1$, and a linear Rudin–Keisler preorder basing on the previous examples for two disjoint

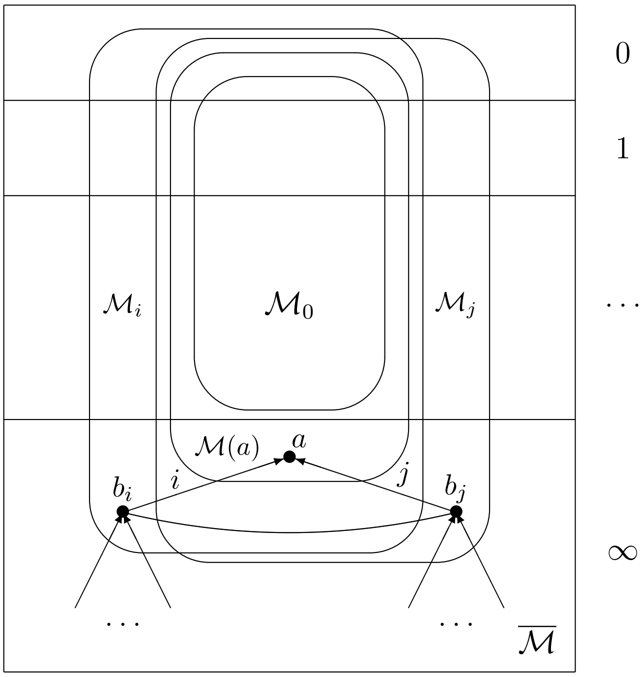

0
1
$\mathcal{M}_i$
$\mathcal{M}_0$
$\mathcal{M}_j$
...
$\mathcal{M}(a)$
a
i
j
b_i
b_j
∞
...
...
$\overline{\mathcal{M}}$

Fig 10:

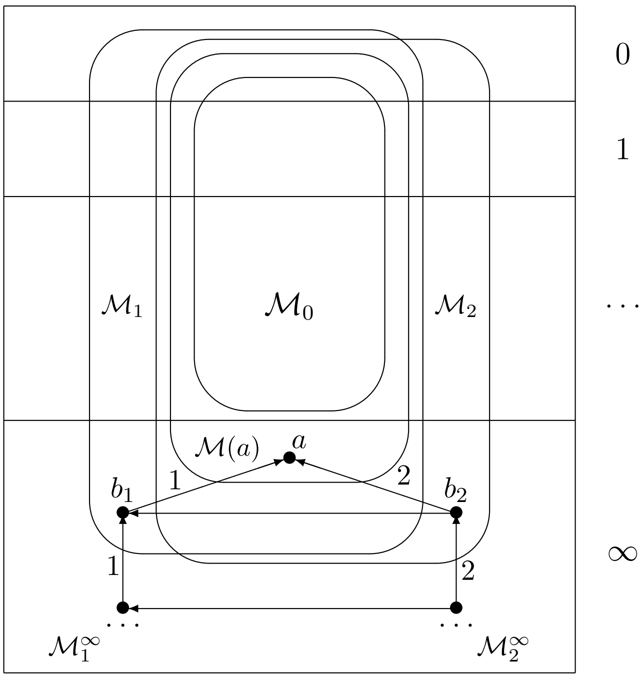

0
1
$\mathcal{M}_1$
$\mathcal{M}_0$
$\mathcal{M}_2$
...
$\mathcal{M}(a)$
a
1
2
b_1
b_2
1
2
∞
...
...
$\mathcal{M}_1^\infty$
$\mathcal{M}_2^\infty$

Fig 11:

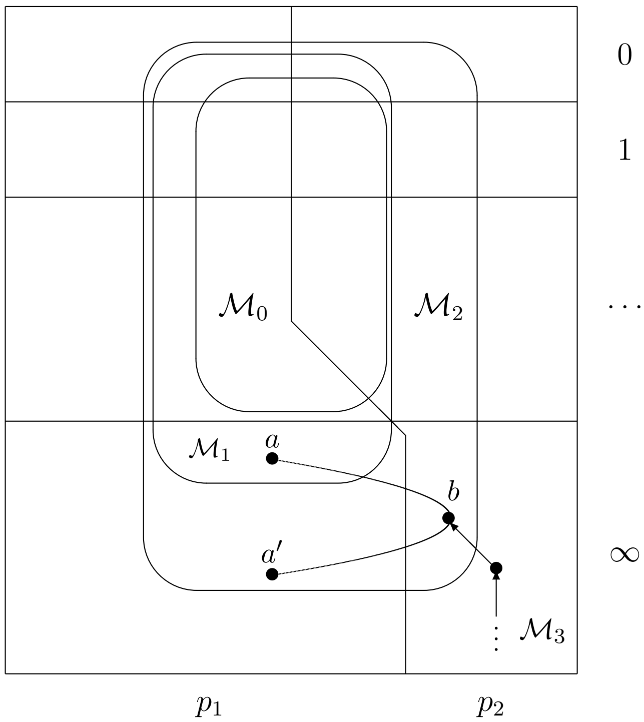


Fig 12:

infinite unary predicates P_0 and P_1, we consider countably many disjoint colors $0, 1, \ldots, n, \ldots$ for elements and directed links by colored arcs also with countably many disjoint colors ordered by colors of elements. Thus we have two non-isolated 1-types p_1 and p_2 realizing predicates P_0 and P_1 by elements of infinite color.

For the theory T we have a prime model $\mathcal{M}_0$ whose all elements have finite colors.

Furthermore, there is a prime model $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(a)$ over a realization a of the type p_1 such that $\mathcal{M}_1$ has a unique realization of p_1.

The model $\mathcal{M}(a)$ has an extension $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(b)$, where b is a realization of p_2. Moreover, having a and a realization $a' \neq a$ of p_1 we obtain a model isomorphic to $\mathcal{M}_2$. Without loss of generality we assume that $\mathcal{M}(b) = \mathcal{M}(a, a')$.

Extending the model $\mathcal{M}_2$ by principal arcs we get unique limit model $\mathcal{M}_3$.

Links between the models are illustrated on Figure 12.

21. For a theory T with $I(T, \omega) = 4$, $P(T) = 3$, $L(T) = 1$, and a non-linear Rudin–Keisler preorder, again for two disjoint infinite unary predicates P_0 and P_1, we consider countably many disjoint colors $0, 1, \ldots, n, \ldots$ for

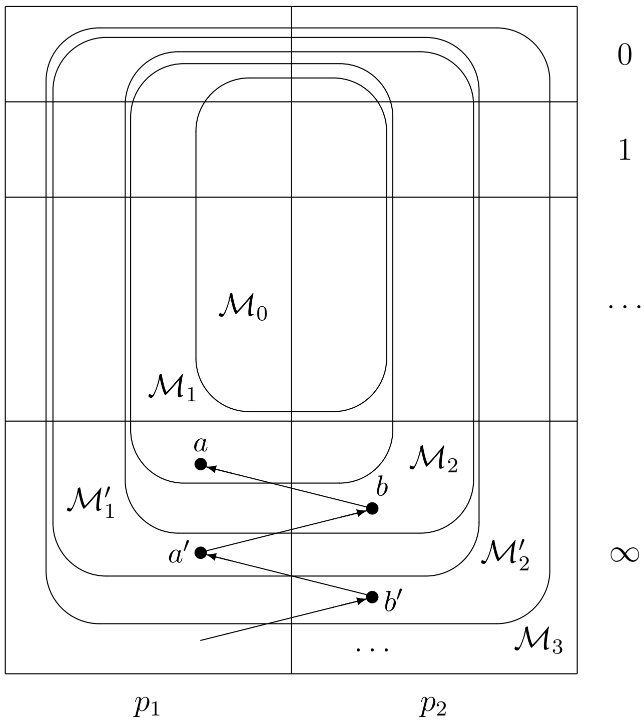


Fig 13:

elements and directed links by colored arcs also with countably many disjoint colors ordered by colors of elements. We have two non-isolated 1-types p_1 and p_2 realizing predicates P_0 and P_1 by elements of infinite color.

For the theory T we have a prime model $\mathcal{M}_0$ whose all elements have finite colors.

Furthermore, there is a prime model $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(a)$ over a realization a of the type p_1.

The model $\mathcal{M}(a)$ has a proper extension $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(b)$ by a principal arc (b, a), where b is a realization of p_2 and $\mathcal{M}_2$ is not isomorphic to $\mathcal{M}_1$.

Then the model $\mathcal{M}_2$ has a proper extension $\mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}(a')$ by a principal arc (a', b), where a' is a realization of p_1, $\mathcal{M}'_1$ has a proper extension $\mathcal{M}'_2 = \mathcal{M}(b')$ by a principal arc (b', a'), where b' is a realization of p_2, etc.

Extending the chain of almost prime models we get unique limit model $\mathcal{M}_3$.

Links between the models are illustrated on Figure 13.

References

[1] S. V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories, Monograph, two parts, Novosibirsk, NSTU, 2014.

[2] S. Shelah, Classification theory and the number of non-isomorphic models, Amsterdam, North-Holland, 1990, 705 p.

[3] B. Hart, E. Hrushovski, M. S. Laskowski, The uncountable spectra of countable theories, Ann. Math., **152**, 1 (2000), 207–257.

[4] R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov, Distributions of countable models of complete theories with continuum many types, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 267–291.

О ФОРМУЛАХ НА РАЗРЕШИМЫХ И НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

Е. И. Тимошенко*

Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: eitim45@gmail.com

Пусть G — некоторая группа, $\sigma = \langle \cdot, ^{-1}, e \rangle$ — групповая сигнатура, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ — формула языка 1-й ступени сигнатуры σ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$.

Подмножество

$$\Phi(\varphi) = \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \mid G \models \varphi(g_1, \ldots, g_n)\}$$

группы G^n называется *формульным,* или *определимым формулой* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Расширим понятие формульного множества. Для этого рассмотрим некоторое бесконечное семейство формул $\varphi_i(x_1, \ldots, bvx_n), i \in \mathbb{N}$. Множество

$$\Phi(\varphi_i) = \{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n \mid G \models \varphi_i(g_1, \ldots, g_n) \text{ для } \text{ всех } i \in \mathbb{N}\}$$

назовём *определимым множеством формул* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что любое множество, определимое совокупностью формул групповой сигнатуры, инвариантно под действием любого автоморфизма группы G.

Рассмотрим группу G, свободную в некотором многообразии групп $\mathfrak{M}$. Элемент $g \in G$ называется *примитивным,* если его можно дополнить до базиса этой группы.

Известно (см. [1], предложение 1), что множество примитивных элементов $P(F)$ свободной группы F конечного ранга n, не является формульным даже в сигнатуре σ, расширенной константами для свободных порождающих, если $n \geq 3$. Однако при $n = 2$ множество $P(F)$ формульно в сигнатуре σ, расширенной двумя константами для базиса $\{a, b\}$ группы F. Это следует из [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15–01–01485)

Группа G называется *однородной,* если для любого положительного n любые два упорядоченных набора элементов $\overline{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ и $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, удовлетворяющие одинаковому множеству формул $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, сопряжены покоординатно некоторым автоморфизмом группы G, то есть $g_i^{\alpha} = h_i, \ \alpha \in Aut(G)$.

Известно, что свободная группа конечного ранга F однородна [3,4]. Элементарная теория группы F разрешима. Поэтому можно эффективно выписать все формулы $\varphi(x)$, истинные на элементе g. Множество этих формул типово определяет орбиту элемента g. Значит орбита $O(g) = g^{AutG}$ произвольного элемента g свободной группы F конечного ранга является определимой некоторой совокупностью формул. Причем множество формул, определяющих $O(g)$, можно эффективно перечислить. В частности множество примитивных элементов $P(F)$ свободной группы F конечного ранга является определимым некоторым множеством формул. Совокупность формул, определяющих $P(F)$, можно эффективно перечислить.

Приведенные выше соображения для свободной группы не проходит для свободной метабелевой группы M_n конечного ранга $n \geq 2$. Во-первых, неизвестно, является ли эта группа однородной, и, во-вторых, элементарная теория группы M_n неразрешима. Тем не менее для группы M_2 мы явно укажем семейство формул, выделяющих множество примитивных элементов группы.

Определим

$$\varphi_i(x) \rightleftharpoons \exists g\, y_1 \ldots y_i \Big(\bigvee_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)} x = g^{\varepsilon_1 y_1} \ldots g^{\varepsilon_i y_i}) \Rightarrow \ \exists y (x = g^{\varepsilon y} \Big), \qquad (1)$$

где $\varepsilon_j, \varepsilon \in \{-1, 1\}$, а $g^{\varepsilon f} = f^{-1} g^{\varepsilon} f$.

Теорема 1. *Ti1 Множество $P(M_2)$ примитивных элементов свободной метабелевой группы M_2 ранга 2 определено $\exists-$ формулами* (1)*. Никакая конечная часть* (1) *не определяет множество $P(M_2)$.*

Доказательство. Пусть $h \in M_2$ и $M_2 \models \varphi_i(h)$ для $i \in \mathbb{N}$. Выберем в группе M_2 базис $\{x_1, x_2\}$ так, что $h = x_1^l c$, где $l \in \mathbb{Z}$, c — элемент из коммутанта группы M_2. Рассмотрим в формулах (1) качестве g элемент x_1. Так как при любом l элемент h принадлежит нормальной подгруппе, порожденной элементом x_1, справедлива хотя бы одна предпосылка в некоторой формуле $\varphi_i(x)$. Поэтому справедливо и следствие в этой формуле. Значит элемент h сопряжен с одним из элементов x_1 или x_1^{-1}. В том и другом случае h является примитивным элементом.

Наоборот, пусть h — примитивный элемент. Предположим, что предпосылка формулы φ_i верна, то есть $h = g^{\varepsilon_1 y_1} \dots g^{\varepsilon_i y_i}$ для некоторых элементов группы $g, y_1, \dots, y_i$ и некоторых $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Следовательно, элемент h принадлежит нормальной подгруппе, порожденной элементом g. Так как h — примитивный элемент, элемент g также примитивен и сопряжен с $h^{\pm 1}$ (см. [5]). Значит верна формула $\varphi_i(h)$.

В [6] доказано, что множество примитивных элементов свободной метабелевой группы нельзя определить $\exists$-формулой групповой сигнатуры. Отсюда следует вторая часть теоремы. □

Из леммы 3 работы [6] следует, что множество примитивных элементов свободой группы F конечного ранга также нельзя определить $\exists-$формулой групповой сигнатуры. Кроме того, в любой свободной группе F конечного ранга имеет место классический результат Магнуса [7], аналогичный теореме Эванса из [5]: если примитивный элемент $g \in F$ принадлежит нормальной подгруппе, порожденной в F элементом h, то g сопряжен с одним из элементов $h^{\pm 1}$.

Поэтому справедлива

Теорема 2. *Множеств примитивных элементов $P(F_2)$ свободной группы F_2 ранга 2 определяется формулами* (1). *Никакая конечная часть* (1) *не определяет множество $P(F_2)$.*

Для двух данных элементов g и h некоторой группы G будем писать $g \equiv_\exists h$, если эти элементы удовлетворяют одним и тем же $\exists$-формулам $\varphi(u)$ групповой сигнатуры.

Теорема 3. *Два данных элемента g и h из коммутанта свободной метабелевой группы M ранга 2 тогда и только тогда лежат в одной орбите под действием группы автоморфизмов $Aut(M)$, когда $g \equiv_\exists h$.*

Доказательство. Если один из данных элементов тривиален, то тривиален и другой. Поэтому будем считать, что данные элементы отличны от единицы группы.

Пусть $\{x, y\}$ — базис группы M и $g = g(x, y),\ h = h(x, y)$ — записи элементов через базис. Достаточно проверить, что из $g \equiv_\exists h$ следует существование автоморфизма группы M, отображающего g в h.

Очевидно, что для формулы

$$\varphi_g(z) \rightleftharpoons \exists uv\big(g(u, v) = z\big)$$

имеем $M \models \varphi_g(g)$. Значит, $M \models \varphi_g(h)$. Другими словами, элемент h является образом элемента g при эндоморфизме

$$\alpha = \{x \mapsto u,\ y \mapsto v\}.$$

Аналогично, существует эндоморфизм β, отображающий h в g. Значит эндоморфизм $\varphi = \alpha\beta$ оставляет неподвижным неединичный элемент из коммутанта группы M.

Элемент группы называется *тестовым*, если любой эндоморфизм, оставляющий этот элемент неподвижным, является автоморфизмом.

В [8] приведено описание тестовых элементов в свободной метабелевой группе ранга $r, r \geq 2$. Из этой теоремы следует, что неединичный элемент c из коммутанта $[M, M]$ является тестовым тогда и только тогда, когда любой эндоморфизм γ группы M, действующий на элемент c тождественно, индуцирует автоморфизм группы $M/[M, M]$.

Возьмем в качестве c элемент g, а в качестве γ примем $\alpha\beta$. Имеем $g\gamma = g$. Покажем, что γ индуцирует автоморфизм группы $M/[M, M]$. Элемент g запишем в виде $g = [x, y]^a$, где a некоторый элемент из кольца $\mathbb{Z}[M/[M, M]]$. Предположим, что γ действует на базисе $\{x, y\}$ следующим образом

$$x \mapsto x^n y^m c_1,\ \ y \mapsto x^p y^q c_2,\quad n, m, p, q \in \mathbb{Z},\ c_1, c_2 \in [M, M].$$

Число $nq - pm$ обозначим через d. Нетрудно подсчитать, что $([x, y]^a)\gamma = [x, y]^{d(a\overline{\gamma})}$. Так как γ оставляет элемент g неподвижным и модуль $[M, M]$ не имеет $\mathbb{Z}[M/[M, M]]$-кручения, то $a = d(a\overline{\gamma})$. Так как отображение $\overline{\gamma}$ не изменяет множество коэффициентов при элементах группы $M/[M, M]$, входящих в запись элемента a, то $d = \pm 1$. Это означает, что γ индуцирует автоморфизм группы $M/[M, M]$. Значит, α — автоморфизм. $\square$

Сформулируем три свойства для относительно свободной группы G конечного ранга r.

Свойство 1. *Существует формула $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ групповой сигнатуры со свободными переменными $x_1, \ldots, x_r$, такая что элементы $g_1, \ldots, g_r \in G$ удовлетворяют формуле тогда и только тогда, когда они являются базисом для G.*

Свойство 2. *Существует формула $\varphi(x)$ групповой сигнатуры со свободной переменной x такая, что элемент $g \in G$ удовлетворяет формуле тогда и только тогда, когда является примитивным.*

Свойство 3. *Группа является однородной.*

Если группа G обладает свойством 1, то очевидно, что она обладает свойством 2. Проверим, что она обладает свойством 3.

Итак, пусть формула $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ выделяет базисы группы G. Предположим, что наборы элементов $\overline{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ и $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ удовлетворяют одним и тем же формулам от n свободных переменных. Рассмотрим формулу

$$\phi_{\overline{g}}(x_1, \ldots, x_n) \rightleftharpoons \exists y_1 \ldots y_r \big(\varphi(y_1, \ldots, y_r) \wedge \bigwedge_{i=1}^{r} g_i(y_1, \ldots, y_n) = x_i\big).$$

Ей удовлетворяют элементы $g_1, \ldots, g_n$. В качестве $y_1, \ldots, y_r$ можно выбрать элементы базиса $\{a_1, \ldots, a_r\}$ группы G, в котором записаны g_i и h_i. Значит эта формула верна для элементов $h_1, \ldots, h_n$. Пусть в качестве y_i выбраны элементы b_i. Следовательно элементы h_i являются образами элементов g_i при автоморфизме

$$\alpha = \{a_1 \to b_1, \ldots, a_r \to b_r\}.$$

Тем самым доказано, что группа G однородна.

Так как базисы свободной нильпотентной (неабелевой) группы конечного ранга формульны [6], получаем

Предложение 4. *Свободная нильпотентная группа конечного ранга является однородной.*

Пусть $Th(G)$ — *теория группы* G*,* то есть множество всех предложений групповой сигнатуры, истинных на группе G.

В [9] определен класс QA-групп, а именно, конечно порожденная бесконечная группа G называется *квазиаксиоматизированной или* QA*-группой*, если для любой конечно порожденной группы H верна импликация

$$Th(G) = Th(H) \implies G \cong H.$$

Из классификации [10] абелевых групп следует, что любая конечно порожденная бесконечная абелева группа принадлежит классу QA.

В [11] доказано, что свободная метабелева группа конечного ранга является QA-группой, а в [12] установлено, что любая конечно порожденная 2-ступенно нильпотентная группа без кручения является QA-группой. Там же приведен пример конечно порожденной 3-ступенно нильпотентной группы, которая не лежит в классе QA.

Мы докажем, что любая частично коммутативная нильпотентная группа является QA-группой.

Напомним определение частично коммутативной группы в некотором многообразии $\mathfrak{M}$. Пусть Γ конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, X — множество вершин графа Γ, E — множество его рёбер. Также множество X является базисом свободной группы $F(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$. Ребро, соединяющее вершины x_i и x_j, обозначим (x_i, x_j). По графу Γ определим частично коммутативную группу этого многообразия $G(\Gamma, \mathfrak{M})$ как фактор-группу $F(\mathfrak{M})/R$, где R порождена как нормальная подгруппа теми коммутаторами $[x_i, x_j] = x_i^{-1}x_j^{-1}x_ix_j$, для которых вершины x_i и x_j смежны в графе Γ, то есть $(x_i, x_j) \in E$. Граф Γ называется *определяющим графом* для группы $G(\Gamma, \mathfrak{M})$.

Частично коммутативную группу многообразия $\mathfrak{N}_c$ нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leq c$ будем обозначать $N_{c,\Gamma}$.

Предложение 5. *Каждая частично коммутативная нильпотентная группа $N_{c,\Gamma}$, $c \geq 2$, принадлежит классу QA.*

Доказательство. Пусть H — конечно порожденная нильпотентная группа, элементарная теория которой совпадает с элементарной теорией группы $G = N_{c,\Gamma}$.

Предположим, что какая-то вершина, например x_n, графа Γ смежна со всеми остальными вершинами. Обозначим через Δ подграф Γ, порожденный вершинами $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

В [12] доказано, что две конечно порожденные нильпотентные группы G_1 и G_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $G_1 \times \mathbb{Z} \cong G_2 \times \mathbb{Z}$.

Группа G изоморфна прямому произведению групп $N_{c,\Delta} \times \langle x_n \rangle$. Значит

$$N_{c,\Delta} \times \langle x_n \rangle \times \mathbb{Z} \cong H \times \mathbb{Z}.$$

Из [13], лемма 1, в таком случае получаем

$$N_{c,\Delta} \times \langle x_n \rangle \cong H,$$

то есть $G \cong H$.

Пусть граф Γ не содержит вершин, смежных со всеми остальными. Переходя к группе $N_{2,\Gamma}$ и используя [14], легко убедиться, что в этом случае центр $Z(G)$ группы G принадлежит её коммутанту $[G, G]$. Конечно порожденные нильпотентные группы, обладающие тем свойством, что их центр лежит в изоляторе коммутанта, лежат в классе QFA. В [15] доказана теорема 10. Согласно ей для каждой группы $A \in QFA$ существует предложение φ, истинное на A, причём для любой конечно порожденной группы B верна импликация

$$B \models \varphi \Longrightarrow A \cong B.$$

Поэтому $G \in QFA \subset QA$. □

Список литературы

[1] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, “Definable subsets in a hyperbolic group”, `arXiv:1111.0577v5 [math.GR] 3 Dec 2012`, 1–7.

[2] J. Nilsen, “Die isomorphismen der algemeinen mendlicher Gruppe mit zwei Erzeugenden, Math. Ann., **78** (1917), 385–397.

[3] C. Perin, R. Sklinos, “Homogeneity in the free group”, `arXiv 1003.4095v1, 22 Mar 2010`, 1–26.

[4] A. O. Houcine, “Homogeneity and prime model in torsion-free hyperbolic groups”, Confluentes Mathematici, **3**, 1(2011), 121–155.

[5] M. Evans, “Presentations of the free metabelian group of rank 2”, Canadian Math. Bull., **37** (1994), 468–472.

[6] Е. И. Тимошенко, “О теориях относительно свободных разрешимых групп с дополнительным предикатом”, Алгебра и логика, принята в печать.

[7] W. Magnus, “Untersuchungen uber einige unendliche diskontinuierliche Gruppen”, Math. Ann., **105** (1931), 52–74.

[8] Е. И. Тимошенко, “Тестовые элементы и тестовый ранг свободной метабелевой группы”, СМЖ, **41**, 6 (2000), 1451–1456.

[9] A. Nise, “Separating classes of groups by first-order sentences”, International Journal of Algebra and Computations, **13**, 3 (2003), 287–302.

[10] W. Szmielew, ”Elementary properties of Abelian groups”, Fund. Math., **41** (1954), 203–271.

[11] Н. С. Романовский, Е. И. Тимошенко, “О некоторых элементарных свойствах 2-ступенно разрешимых групп”, СМЖ, **44**, 2 (2003), 438–443.

[12] F. Oger, “Cancellation and elementary equivalence of finitely generated finite-by-nilpotent groups”, J. London Math.Soc, **30** (1991), 293-299.

[13] R. Hirshon, “Some cancellation theorems,with applications to nilpotent groups”, J. Austral Math. Soc. (Series A), **23** (1977), 147–165.

[14] А. А. Мищенко, А. В. Трейер, “Структура централизаторов для частично коммутативной двуступенно нильпотентной Q-группы”, Вестн. Омск. ун-та, специальный выпуск (2007), 98—102.

[15] F. Oger, G. Sabbagh, “Quasi-finitely axiomatizable nilpotent groups”, Journal of Group Theory, **9** (2006), 95–106.

НОВЫЕ ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ НА ЛОГИЧЕСКИХ ВЫСКАЗЫВАНИЯХ С УЧЕТОМ ЭКСПЕРТНЫХ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ ФОРМУЛ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ ЛУКАСЕВИЧА ДЛЯ КОЛЛЕКТИВНОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ФОРМУЛ ИЗ БАЗЫ ЗНАНИЙ

А. А. Викентьев*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга, д. 4, Новосибирск, 630090, Россия;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия;
Новосибирский государственный технический университет
пр. К. Маркса, д. 20, г. Новосибирск, 630073, Россия
e-mail: vikent@math.nsc.ru

1 Введение

Философская доктрина, утверждающая, что из одних законов логики следуют, что всё в мире предопределено и поэтому человек не имеет свободы воли, получила название доктрины логического фатализма. Аргумент логического фатализма с целью его опровержения впервые был изобретен Аристотелем (IV в. до н.э.) в его знаменитой 9-й главе трактата “Об истолковании” [Аристотель 1978 (переиздание)].
Сам аргумент можно представить в следующем виде. Предположим,

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, проекты 14-07-00851а, 14-07-00249а.

сейчас истинно, что завтра будет морское сражение. Из этого следует, что не может быть, чтобы завтра не было морского сражения. Следовательно, необходимо, что завтра морское сражение произойдет (принцип необходимости). Подобно этому, если сейчас ложно, что завтра будет морское сражение, то необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Но само высказывание о том, что завтра произойдет морское сражение, сейчас либо истинно, либо ложно (логический принцип двузначности). Следовательно, или необходимо, что морское сражение завтра произойдет, или необходимо, что морское сражение завтра не произойдет. Обобщив этот аргумент, получаем, что всё происходит по необходимости и нет ни случайных событий, ни свободы воли.
Логическая структура данного аргумента:
"p" — высказывание о будущем случайном событии;
"$\sim p$" — высказывание, противоречащее p, и читается как "не p";
$T(p)$ — "истинно, что p";
$\sim\sim F(p)$ — "ложно, что ";
$\sim\sim N(p)$ — "необходимо, что р".
Тогда имеем:

(1) $T(p) \to N(p)$ — принцип необходимости,

(2) $F(p) \to N(\sim p)$ — то же самое,

(3) $T(p) \vee F(p)$ — принцип двузначности,

(4) $N(p) \vee N(\sim p)$ — из (1-3) по правилу классической логики: из $A \to C, B \to D$ и $A \vee B \Rightarrow C \vee D$.

На основание этого фатализма и возникла идея введения других истинностных значений кроме 1 и 0. Одним из первых был Лукасевич, который предложил ввести третье истинностное значение, интерпретируя его как "безразлично". В своей статье "О детерминизме" Лукасевич даёт философское обоснование введения в логику третьего истинностного значения. В нём Лукасевич пишет, что существуют будущие факты, для которых еще нет соответствующих фактов в настоящем, т.е. нет ничего, что с необходимостью заставило бы нас принять высказывание о таком будущем факте как истинное. С другой стороны, мы не можем утверждать, что такое высказывание ложно, если в настоящее время не существует факта, являющегося причиной того, что будущий факт не произойдет. Такие высказывание в этой статье Лукасевич называет "безразличными" и делает важное заключение, что альтернатива, составленная из двух подобных высказываний, например, "Ян будет завтра в полдень дома, либо Яна завтра не будет в полдень дома", должно быть истинно согласно закону исключения третьего. Лукасевич утверждал, что аристотелевское решение проблемы, по-видимому, состоит в том, что альтернатива "завтра произойдет морское сражение или завтра не произойдет морское сражение" уже сегодня истинна, но ни высказывание "завтра будет морское сражение", ни высказывание "завтра не будет морского сражения" не являются ни истинными ни ложными, как относящиеся к ближайшему будущему. Предложив такую интерпретацию Аристотеля, Лукасевич, однако, заключает, что доводы Аристотеля подрывают не столько закон исключения третьего, сколько один из глубочайших принципов всей нашей логики, который им же впервые и установлен, а именно, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно (закон бивалентности). Для простоты и погружения в детали далее рассматриваем 3-значную логику Лукасевича.

2 О трехзначной логике Лукасевича

Лукасевич строил свою логику по аналогии с C_2, с сохранением свойств непротиворечивости, полноты и разрешимости. $Ł_3$ является расширением C_2, несмотря на не прохождение в первой основных законов классической логики, как закон исключения третьего и закон непротиворечия. Для построения Логики Лукасевича нам надо доопределить некоторые логические связки (заметим, что мы оставляем классический смысл импликации $\rightarrow$ и отрицания $\sim$) $(1 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 0) = 1/2$;
$(0 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 1/2) = (1/2 \rightarrow 1) = 1$;
$\sim 1/2 = 1/2$.

Посредством исходных связок определяются другие логические связки: $p \vee q = (p \rightarrow q) \rightarrow q$;
$p \wedge q = \sim (\sim p \vee \sim q)$;
$p \equiv q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Запишем таблицы истинности:

p	$\sim p$
1	0
1/2	1/2
0	1

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	1/2
0	1	1	1

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\equiv$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2
0	0	1/2	1

Оценка множества формул For в трехзначной логике Лукасевича есть функция $\nu : \mathrm{For} \to \{0, 1/2, 1\}$, "совместная" с приведенными выше таблицами. Формула называется *тавтологией*, если при любой оценке *пи* принимает *выделенное значение* 1. Множество данных тавтологий называется трехзначной (матричной) логикой Лукасевича и обозначается посредством Ł$_3$.
Первая аксиоматизация множества тавтологий Ł$_3$ принадлежит ученику Лукасевича М.Вайсбергу [Weisberg 1931]:

1. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
2. $p \to (q \to p)$
3. $(\sim p \to \sim q) \to (q \to p)$
4. $((p \to \sim p) \to p) \to p$

Правила вывода такие же, как для классической логики.

R1. Modus ponens.

R2. Подстановка.

Аксиоматизация Вайсберга означает, что для Ł$_3$, как и для C_2, имеет место

Теорема адекватности. *Для всякой формулы A имеет место $\vdash A$ в Ł$_3$ тогда и только тогда, когда $\models A$ в Ł$_3$.*

Таким образом, исчисление Ł$_3$ непротиворечиво и дедуктивно полно.

3 Интерпретации трехзначной логики Лукасевича Ł$_3$

С формальной точки зрения трехзначная логика Лукасевича выглядит безупречно: показана её непротиворечивость, т.е. в Ł$_3$ недоказуема некоторая формула A вместе со своим отрицанием $\sim A$, доказана дедуктивная полнота Ł$_3$ и, как и классическая логика, Ł$_3$ является разрешимой. Но поскольку построение Ł$_3$, т.е. введение в логику третьего истинностного значения, имело сугубо содержательные предпосылки, а именно идею отразить в логической форме индетерминистический статус высказываний о будущих случайных событиях и таким образом опровергнуть фаталитический аргумент Аристотеля, то встает вопрос: насколько формальные свойства Ł$_3$ оказались адекватными для выражения этой идеи. Чтобы это понять надо уяснить смысл истинностных значений Ł$_3$, а главное смысл 1/2. Первым этим вопросом задался А. Н. Прайор [Prior 1953]. По его мнению, Аристотель в девятой главе трактата "Об истолковании" пытается преодолеть истинную трудность — возможность использовать высказывания во вневременном смысле для описания событий типа "завтрашнего морского сражения". Прайор делает вывод, что Аристотель говорит о некоторых высказываниях о будущем, как не являющихся ни истинными, ни ложными, поскольку еще нет определенного факта, с которым эти высказывания можно соотнести; однако как утверждение, так и отрицание подобных высказываний потенциально истинно или потенциально ложно, но не актуально истинно или ложно. Когда же эта потенциальность исчезает со временем, тогда значение "1" приписывается высказываниям определенно истинным, т.е. при описание будущих событий как предопределенных или событий, которые уже стали настоящими или прошлыми. Такие высказывания и являются "необходимыми". Таким образом, утверждение высказываний о состоянии дел в настоящем и прошлом и утверждение их "необходимости" являются эквивалентными в Ł$_3$. Казалось бы, все трудности преодолены, но Аристотель утверждал, что альтернатива $p \vee \sim p$ в любом случае является всегда истинной. Однако, в Ł$_3$ это не верно, т.е. дизъюнкция в предполагаемой трехзначной логике Аристотеля не была бы истинностно-функциональной [Prior 1953].

4 О тезисе Сушко

В 1975 году Р. Сушко построил бивалентную семантику для трехзначной логики Лукасевича Ł$_3$ и внёс сумятицу в умы многозначников, утверждая, что каждая пропозициональная логика является двузначной. Пусть For обозначает множество формул пропозиционального языка L, а $\{0, 1\}$ — множество истиностных значений. Тогда LV_3 есть множество всех функций $t : \mathrm{For} \to \{0, 1\}$, таких что для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{For}$ справедливы следующие утверждения:

1. $t(\alpha) = 0$ или $t(\sim \alpha) = 0$;
2. $t(\alpha \to \beta) = 1$ всегда, когда $t(\beta) = 1$;
3. если $t(\alpha) = 1$ и $t(\beta) = 0$, то $t(\alpha \to \beta) = 0$;
4. если $t(\alpha) = t(\beta)$ и $t(\sim \alpha) = t(\sim \beta)$, то $t(\alpha \to \beta) = 1$;
5. если $t(\alpha) = t(\beta) = 0$ и $t(\sim \alpha) \neq t(\sim \beta)$, то $t(\alpha \to \beta) = t(\sim \alpha)$;
6. если $t(\sim \alpha) = 0$, то $t(\sim\sim \alpha) = t(\alpha)$;
7. если $t(\alpha) = 1$ и $t(\beta) = 0$, то $t(\sim (\alpha \to \beta)) = t(\sim \beta)$;
8. если $t(\alpha) = t(\sim \alpha) = t(\beta)$ и $t(\sim \beta) = 1$, то $t(\sim (\alpha \to \beta)) = 0$.

В итоге мы получили адекватную семантику для трехзначной логики Лукасевича $Ł_3$. При таком подходе элементы трехзначной матрицы Лукасевича $1, 1/2$ и 0 не рассматриваются как логические значения; они предстают, по Сушко, как алгебраические значения. По Сушко, логической оценкой являются бивалентные оценки, рассмотренные как характеристические оценки множества формул.

Тезис Сушко вызвал определенную критику. Например, Г. Малиновский [Malinowski 1994] сконструировал трехзначную квази-матричную логику, для которой метод Сушко не может быть применен. Обсуждению дилеммы двузначности и многозначности посвящена значительная часть работы [Beziau 1997].

5 О методе Скотта

Д. Скотт [Scott 1973,1974], заменяя истинностные значения оценками, пытается придать более очевидную характеристику конечным многозначным конструкциям. Оценки являются двухзначными функциями и задают распределение множества высказываний данного языка по типам, соответствующим исходным логическим значениям. Пусть For — множество формул данного пропозиционального языка L и $V = \{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{n-1}\} (n \geq 1)$ —-конечное множество оценок: элементы множества V являются произвольными функциями $\nu_i : For \to \{t, f\}$ с t, обозначающим истину, и f — ложь. Под типом высказываний языка L относительно V мы понимаем произвольное множество Z_β вида

$$Z_\beta = \{\alpha \in \mathrm{For} : \nu_i(\alpha) = \nu_i(\beta) \text{ для произвольного } i \in \{0, 1, ..., n-1\}\}.$$

Используя n-элементное множество оценок, можно ввести максимально 2^n типов. Например, двухэлементное множество оценок $\{\omega_0, \omega_1\}$ определяет четыре типа: Z_1, Z_2, Z_3, Z_4. Накладывая ограничения на оценки, мы сокращаем число типов. Только что рассмотренное множество оценок будет определять три (самое большое) типа: Z_1, Z_2, Z_4, когда мы потребуем, чтобы $\omega_0(\alpha) \leq \omega_1(\alpha) \forall \alpha \in \mathrm{For}$, два типа: Z_2, Z_3, если $\omega_0(\alpha) \neq \omega_1(\alpha) \forall \alpha \in For$, и Z_1, Z_4, при условии, что $\omega_0 = \omega_1$.

	ω_0	ω_1
Z_1	f	F
Z_2	f	T
Z_3	t	F
Z_4	t	T

Такие типы являются аналогами логических значений. Дана Скотт говорит о них как об “индексах”.

Используя этот метод, Скотт получил описание импликативной системы n-значной логики Лукасевича с помощью $(n-1)$-элементарного множества оценок

$$VL_n^* = \{\nu_0, \nu_1, ..., \nu_{n-2}\},$$

такого что для любых $i, j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$ и $\alpha \in \mathrm{For}^*$ (For^* используется для обозначения множества формул языка L^*, включающего связки отрицания и импликации $\rightarrow$):

$$(mon) \nu_j(\alpha) = t \Leftarrow \nu_i(\alpha) = t \text{ и } i \leq j$$

и, более того, $\nu_0(\alpha) \neq f$ и $\nu_{n-2}(\alpha_2) \neq t$ для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in For^*$. Далее мы вернемся к нашей трехзначной логике и рассмотрим метод Скотта для неё.

$$VL_3^* = \{\nu_0, \nu_1\}$$

Ниже приведена таблица показывающая, что множество VL_3^* определяет 3 типа Z_1, Z_2 высказываний:

	ν_0	ν_1
Z_0	t	t
Z_1	f	t
Z_2	f	f

Функция $f(Z_i) = 2 - i$ является однозначным обратно направленным отображением множества типов в универсум матрицы Лукасевича

$M_3 * L$. Связки отрицания и импликации определяются стандартным образом. Множество всех формул языка Ł*, истинных при произвольной оценке $\nu_i \in VL_n^*$, есть в точности содержание матрицы M_3^*

$$E(M_3^*) = \{\alpha \in For^* : \nu_i(\alpha) = t, i \in \{0, 1\}\}$$

Одновременно, однако, соотношение следования $\models_3^* \subseteq 2^{For^*} \times For^*$:
$X \models_3^* \alpha$, если и только если $\nu_i(\alpha) = t$ всегда, когда $\nu_i(X) \subseteq t$ для произвольного $\nu_i \in VL_3^*$.
Д. Скотт предлагает, чтобы равенство формы "$\nu_i(\alpha) = t$", для $i \in \{0, 1\}$, читались как "(утверждение) α истинно в степени i". Следовательно, он предполагает, что числа в ряду "$0 \leq i \leq 1$" символизирует степени заблуждения в отклонении от истины. Степень 0 — самая сильная и соответствует "совершенной" истине или отсутствию заблуждения: все тавтологии логики Лукасевича являются схемами утверждений, имеющих в качестве своей степени заблуждения 0. Кроме того, импликация Лукасевича может быть удобно истолкована в этих терминах: предположив $i + j \leq 1$, мы получаем, что $\nu_i(\alpha \to \beta) = t$ и $\nu_i(\alpha) = t$ дает $\nu_{i+j}(\beta) = t$. Так, используя высказывания $\alpha \to \beta$, можно выразить величину различия между степенями заблуждения посылки и заключения, которая является мерой заблуждения всей импликации.

К вопросу об интерпретации импликации Лукасевича $\to$ Д. Скотт возвращается в работе [Scott 1976] в разделе "Логика заблуждений". Здесь Скотт делает интересное замечание о том, что многоместное отношение следования

$$A_0, A_1, \cdots A_{n-1} \vdash B_0, B_1, \cdots B_{m-1}$$

имеет простую интерпритацию в терминах степени заблуждения i: всегда, когда $i \geq A_t$, для всех $i \leq n$, тогда $i \geq B_u$ для некоторых $u < m$.

Заметим, что логика заблуждений Скотта была подвергнута критике Дж. Смайла. Например, указывается, что в подобных терминах нельзя проинтерпретировать операцию отрицания $\sim$.

6 Постановка задачи

Дано M — конечное число экспертов, и каждый из них упорядочивает элементарные высказывания, входящие в базу знаний. Зададим упорядочения с помощью функций

$$p_i(x) : S(\Sigma) \to (0, 1], i = 1, \ldots, M.$$

Для построения расстояния учитывающего “мнения о расстоянии” каждого эксперта сначала введём расстояние для одного фиксированного эксперта. Для простоты обозначения временно опустим индекс. Расстояние между формулами будем строить поэтапно, для начала введём расстояние между моделями с фиксированным упорядочением элементарных высказываний. Вторым этапом построим расстояние между множествами моделей. Далее пользуясь построенными расстояниями, введём расстояние между формулами исчисления высказываний с учётом расстояний для конечного множества экспертов. Ранее аналогичные вопросы в другой ситуации рассматривались в работах [6]–[8]. Желательно знакомство с работами [1]–[5].

7 Расстояния на высказываниях экспертов с привлечением моделей и их свойств. Необходимые определения

Под логическими высказываниями понимаем формулу исчисления высказываний (ИВ), определенную на множестве исходных простейших логических высказываний, называемых элементарными формулами. Пусть Σ - база знаний, состоящая из формул ИВ.

Определение 1. Множество $S(\varphi)$ элементарных высказываний, используемых при написании формулы ИВ φ, назовем *носителем формулы* φ.

Определение 2. Назовем *носителем совокупности знаний* $S(\Sigma)$ объединение носителей формул, входящих в Σ, т.е. $S(\Sigma) = \bigcup\limits_{\varphi\in\Sigma} S(\varphi)$. Рассмотрим множество $P(S(\Sigma)) = 3^{S(\Sigma)}$ всевозможных подмножеств множества $S(\Sigma)$. Элементы множества $P(S(\Sigma))$ называем *моделями.*

Известно, что $|P(S(\Sigma))| = 3^{|S(\Sigma)|}$.

Пример 3. $\varphi = (A_{1/2} \wedge B \wedge \sim C) \vee \sim D_{1/2}$, $S(\varphi) = \{A_{1/2}, B, C, D_{1/2}\}$.

Определение 4. Элементарная формула A истинна на модели M (т.е. $M \models_1 A$) тогда и только тогда, когда $A_1 \in M$ ($_1$ можем опускать), т.е.

1. $M \models_1 A \Leftrightarrow A_1 \in M$
2. $M \models_2 A \Leftrightarrow A_{1/2} \in M$

3. $M \models_1 \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow (M \models_1 \varphi_1)$ и $(M \models_1 \varphi_2)$
4. $M \models_1 \varphi_1 \vee \varphi_2 \Leftrightarrow (M \models_1 \varphi_1)$ или $(M \models_1 \varphi_2)$

.

Обозначим через $\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A)$ множество моделей из $S(\Sigma)$, на которых истинна A, т.е.

$$\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A) = \{M | M \in P(S(\Sigma)), M \models A\}.$$

Обозначим через $T_{S(\Sigma)}(M)$ множество формул, построенных с помощью элементов $S(\Sigma)$, истинных на M: $T_{S(\Sigma)}(M) = \{\varphi | S(\varphi) \subseteq S(\Sigma), M \models \varphi\}$.

Лемма 5. *Имеют место равенства:*

1. $\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A \wedge B) = \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A) \cap \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(B)$

2. $Mod_{S(\Sigma)}(A \vee B) = \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A) \cup \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(B)$

.

Таким образом, любая формула φ, такая что $S(\varphi) \subseteq S(\Sigma)$, соответствует совокупности $\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)$ моделей из $P(S(\Sigma))$, на которых истинна φ.

Определение 6. *Расстоянием* между формулами φ и ψ при $(S(\varphi) \cup S(\psi) \subseteq S(\Sigma))$ на множестве $P(P(\Sigma))$ назовем величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = \frac{|Mod_{S(\Sigma)}((\sim \varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sim \psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}$$

8 Расстояние между моделями

Для любых двух моделей и на множестве всех конечных моделей $P(S(\Sigma))$, и фиксированного задания $p(x)$ экспертом, определим расстояние между этими моделями A и B формулой:

$$\rho(A, B) = \frac{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x) - \chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x \in S(\Sigma)} p^2(x)}}$$

Теорема 7. *На классе $P(S(\sigma))$ конечных моделей с фиксированным заданием $p(x)$ экспертом, функция $\rho(A,B)$ удовлетворяет свойствам метрики, т.е. $\langle P(S(\sigma)),\rho\rangle$ является метрическим пространством.*

Доказательство. 1. $\rho(A,B)=0 \Leftrightarrow A=B$.
Пусть $\rho(A,B)=0$ докажем, что при этом $A=B$. $\rho(A,B)=0$, следовательно, $\chi_A(x)-\chi_B(x)=0$, $\forall x\in S(\Sigma)$, то есть либо $x\notin A$, $x\notin B$, либо $x\in A, x\in B$, значит $A=B$.

Теперь пусть $=$ докажем, что при этом $\rho(A,B)=0$.
$A=B\Rightarrow \chi_A(x)=\chi_B(x)\Rightarrow \chi_A(x)-\chi_B(x)=0, \forall x\in S(\Sigma)$, следовательно, $\rho(A,B)=0$.

2.$\rho(A,B)=\rho(B,A)$.
Очевидно из определения.

3.$\rho(A,B)\le\rho(A,C)+\rho(C,B)$.
Докажем от противного. Пусть $\rho(A,B)\ge\rho(A,C)+\rho(C,B)$, тогда

$$\begin{gathered}\frac{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)}} > \\ \frac{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)}}+\frac{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}}{\sqrt{\sum\limits_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)}}.\end{gathered} \tag{$*$}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_B(x))^2} > \\ > \sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}+\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}\end{gathered}$$

Возведем неравенства в квадрат.

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_B(x))^2 > \sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2 +$$
$$+2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}+$$
$$+\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2.$$

Тогда

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_B(x))^2 - \sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2 -$$
$$-\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2 >$$
$$2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}.$$

Имеем

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)((\chi_A(x)-\chi_B(x))^2-(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2-(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2) >$$
$$2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}.$$

Далее возводя в квадрат и приводя подобные,

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(-2\chi_A(x)\chi_B(x)+2\chi_A(x)\chi_C(x)-2\chi_C(x)^2+2\chi_B(x)\chi_C(x)) >$$
$$>2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2};$$

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(2\chi_B(x)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))-2\chi_C(x)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))) >$$
$$>2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2}$$

Получаем:

$$\sum_{x\in S(\Sigma)} 2p^2(x)((-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x)) >$$
$$> 2\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_A(x)-\chi_C(x))^2}\sqrt{\sum_{x\in S(\Sigma)} p^2(x)(\chi_C(x)-\chi_B(x))^2} \qquad (**)$$

Рассмотрим одно из слагаемых $(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x))$ и проверим, когда оно положительно. Это возможно в двух случаях. Первый

$$\begin{cases} -\chi_A(x)+\chi_C(x) > 0 \\ \chi_B(x)-\chi_C(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A(x) < \chi_C(x) \\ \chi_B(x) > \chi_C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \wedge x \in C \\ x \in B \wedge x \notin C \end{cases}$$

Получаем противоречие (если $\chi_A(x)=0, \chi_B(x)=1, \chi_C(x)=1/2$, то $(*)$ будет равенством и всё хорошо), рассмотрим второй случай

$$\begin{cases} -\chi_A(x)+\chi_C(x) < 0 \\ \chi_B(x)-\chi_C(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A(x) > \chi_C(x) \\ \chi_B(x) < \chi_C(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin C \\ x \notin B \wedge x \in C \end{cases}$$

Снова противоречие (если $\chi_A(x)=1, \chi_B(x)=0, \chi_C(x)=1/2$, то $(*)$ будет равенством), неравенство $(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x)) > 0$ невозможно, значит $\forall x \in S(\Sigma)(-\chi_A(x)+\chi_C(x))(\chi_B(x)-\chi_C(x)) \leq 0$, противоречие с $(**)$, т.к. справа стоит неотрицательная величина.

□

Примечание. В работе используется программа, считающая расстояния между двумя любыми моделями по формуле из Теоремы **??**.

9 Расстояние между множествами моделей

Далее перейдем к введению расстояния между множествами моделей для определения степени разброса моделей двух формул с учетом упорядочения и фиксированным заданием $p(x)$ экспертом.

Определение 8. Расстояние между элементами x метрического пространства $\langle P(S(\Sigma)), \rho\rangle$ и множеством (моделью) B из этого метрического пространства с фиксированным заданием $p(x)$ (экспертом), зададим следующим образом:

$$d(x,B) = \min\{\rho(x,y) | y \in B\}$$

Определение 9. Введем в рассмотрение функцию от множества A и B из метрического пространства $\langle P(S(\Sigma)), \rho\rangle$ с фиксированным заданием $p(x)$ (экспертом), определяемую как

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) | x \in A\}$$

Заметим, что $d(A, B)$ метрику, вообще говоря, не определяет (так как не выполняется, например, аксиома симметрии).

Определение 10. Расстояние $\hat{\rho}$ между двумя конечными множествами моделей A и B из метрического пространства $\langle P(S(\Sigma)), \rho\rangle$ с фиксированным заданием $p_i(x)$ экспертом, зададим формулой:

$$\hat{\rho}(A, B) = \frac{d(A, B) + d(B, A)}{2}.$$

Покажем, что $\hat{\rho}$ действительно определяет метрику.

Теорема 11. *Функция $\hat{\rho}$ является метрикой.*

Доказательство. Требуется проверить выполнимость аксиом.
1. $\hat{\rho}(A, B) \geq 0$. Это следует из определения $\hat{\rho}$, так как величины $d(A, B)$ и $d(B, A)$ неотрицательны.

2. $\hat{\rho}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. Если $A = B$, то, очевидно, $\hat{\rho}(A, B) = 0$. С другой стороны, если $\hat{\rho}(A, B) = 0$, то $d(A, B) = -d(B, A)$. Т.к. $d(A, B) \geq 0$, имеем $d(A, B) = d(B, A) = 0$. Вследствие свойств функции d получаем $A = B$.

3. $\hat{\rho}(A, B) = \hat{\rho}(B, A)$. Это утверждение следует из определения $\hat{\rho}$.

4. $\hat{\rho}(A, C) \leq \hat{\rho}(A, B) + \hat{\rho}(B, C)$. Сначала покажем, что для любых $A, B, C \subseteq P(S(\Sigma))$ выполняется $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Докажем первое равенство. Пусть $a \in A$, тогда $d(a, C) = \min\{\rho(x, c) | c \in C\}$. Для каждого $b \in B$:

$$\begin{aligned} d(a, C) \leq &\min\{d(a, b) + d(b, c) | c \in C\} \leq d(a, b) + \min\{d(b, c) | c \in C\} \leq \\ \leq &d(a, B) + \max\{d(b, C) | b \in B\} \leq d(a, b) + d(B, C). \end{aligned}$$

Так как это равенство верно при любом $a \in A$, получаем $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$. Далее, суммируем два неравенства:
$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ и $d(C, A) \leq d(B, A) + d(C, B)$, делим на 2. Получаем $\hat{\rho}(A, C) \leq \hat{\rho}(A, B) + \hat{\rho}(B, C)$. □

10 Расстояние между двумя пропозициональными логическими формулами

Определение 12. Расстояние между двумя формулами высказываний эксперта с фиксированным заданием $p(x)$ экспертом, зададим формулой:

$$\tilde{\rho}(\varphi,\psi) = \frac{\rho(\varphi,\psi) + \hat{\rho}(Mod_{S(\Sigma)}(\varphi), Mod_{S(\Sigma)}(\psi))}{2}$$

Утверждение 13. *На множестве классов эквивалентности высказываний экспертов с фиксированным заданием $p(x)$, $\tilde{\rho}$ определяет метрику.*

Доказательство получается из свойства, что линейная комбинация метрик является метрикой.

Пример 14. Пусть база знаний экспертов состоит из трех элементарных высказываний $S(\Sigma) = \{A, B, C\}$, упорядочение для фиксированного эксперта: $A < B < C, P(A) = 1, P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$.

φ	ψ	$\rho(\varphi,\psi)$	$\tilde{\rho}(\varphi,\psi)$
$A \wedge B$	$A \to B$	$1/3$	0,406245
$A \wedge B$	$A \vee B$	$2/9$	0,325397
$A \vee B$	$A \to B$	$2/9$	0,325397
$\to (B \wedge C)$	$A \to (B \vee C)$	$2/27$	0,181216
$A \wedge (B \to C)$	$\sim A \vee C$	$10/27$	0,411062
$(A \vee B) \wedge C$	$A \to C$	$5/27$	0,221362
$\sim A$	$B \to C$	$7/27$	0,408301
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C$	$3/27$	0,269841

11 Формула для расстояния при наличии нескольких различных экспертов

Теорема 15. *На множестве классов эквивалентности экспертных высказываний можно задать расстояние ρ^* (а также ρ^{**} с весами), являющееся метрикой с учётом упорядочения элементарных высказы-*

ваний каждым экспертом и степени разброса каждого эксперта:

$$\rho^*(\varphi,\psi) = \frac{\sum\limits_{i\in\{1,\dots,M\}} \tilde{p}_i(\varphi,\psi)}{M} = \\ = \frac{\rho(\varphi,\psi)}{2} + \frac{\sum\limits_{i\in\{1,\dots,M\}} \tilde{p}_i(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi), \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\psi))}{2M},$$

а также с весами

$$\rho^{**}(\varphi,\psi) = \alpha\rho(\varphi,\psi) + \frac{\sum\limits_{i\in\{1,\dots,M\}} \gamma_i\tilde{p}_i(\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi), \mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\psi))}{M},$$

где $\alpha + \sum\limits_{i\in\{1,\dots,M\}} \gamma_i = 1.$

Заметим, что коэффициенты α и γ_i можем выбрать методом наименьших квадратов, если будем иметь дополнительные сведения о желаемом расстояние ρ^{**}.

ρ^* и ρ^{**} будут расстояниями, так как являются линейной комбинацией расстояний.

Пример 16. Пусть база знаний экспертов состоит из трех элементарных высказываний: $S(\Sigma) = \{A, B, C\}$ и двух экспертов. Для первого возьмём упорядочение: $P(A) = 1, P(B) = 1/2, P(C) = 1/3$. Для второго: $P(A) = 1/2, P(B) = 2/3, P(C) = 1/4$.

φ	ψ	$\tilde{\rho}_1(\varphi,\psi)$	$\tilde{\rho}_2(\varphi,\psi)$	$\rho^*(\varphi,\psi)$
$A \wedge B$	$A \to B$	0,406245	0,406123	0,406184
$A \wedge B$	$A \vee B$	0,325397	0,302676	0,314037
$A \vee B$	$A \to B$	0,325397	0,398459	0,361928
$A \to (B \wedge C)$	$A \to (B \vee C)$	0,181216	0,180711	0,180964
$A \wedge (B \to C)$	$\sim A \vee C$	0,411062	0,345825	0,378444
$(A \vee B) \wedge C$	$A \to C$	0,221362	0,297184	0,259270
$\sim A$	$B \to C$	0,408301	0,34514	0,37672
$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C$	0,269841	0,19923	0,2345355

Поиск коэффициентов. Известны расстояния:
$\rho(A \wedge B, A \to B) = 0{,}4$
$\rho(A \vee B, A \to B) = 0{,}3$

$\rho(A \to (B \wedge C), A \to (B \vee C)) = 0{,}2$
$\rho(A \wedge (B \to C), \sim A \vee C) = 0{,}4$
$\rho(A \wedge (B \vee C), (A \wedge B) \vee C) = 0{,}25$
Ищем коэффициенты методом наименьших квадратов для первого эксперта:
$\rho_i x + \hat{\rho}_i(1-x) - \tilde{\rho}_i = 0$
$x = 0{,}53; y = 0{,}47 \qquad \rho(A \wedge B, A \vee B) = 0{,}319206; \rho((A \vee B) \wedge C, A \to C) = 0{,}219192; \rho(\sim A, B \to C) = 0{,}399358$
для второго эксперта:
$x = 0{,}5583; y = 0{,}4417 \qquad \rho(A \wedge B, A \vee B) = 0{,}293295; \rho((A \vee B) \wedge C, A \to C) = 0{,}284125; \rho(\sim A, B \to C) = 0{,}335127$
С оптимальными коэффициентами для обоих экспертов(с равной степенью доверия) расстояния получатся:
$\rho(A \wedge B, A \vee B) = 0{,}3062505; \rho((A \vee B) \wedge C, A \to C) = 0,!251583; \rho(\sim A, B \to C) = 0,!36724$
Стоит заметить, что исходя из известных расстояний мы можем выбрать коэффициенты доверия эксперту. В нашем примере получим $\gamma_1 = 3/4; \gamma_2 = 1/4$.
$\rho(A \wedge B, A \vee B) = 0{,}31273; \rho((A \vee B) \wedge C, A \to C) = 0{,}235425; \rho(\sim A, B \to C) = 0{,}3833$.

12 Меры информативности и недостоверности (нетривиальности)

Определим информативность и недостоверность в терминах теории моделей для трехзначной логики. Под информативностью высказывания будем понимать относительное число моделей, на которых это высказывание ложно, или, что то же самое, нормированное расстояние от высказывания до тождественно истинной формулы 1. Понятно, что высказывание тем информативней, чем меньше моделей из данного класса, на котором оно истинно. При этом предполагаем что оно имеет модели.

$$\mu_{S(\Sigma)}(A) = \rho_{S(\Sigma)}(A, 1) = \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim A)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$$

Для трехзначной логики можно ввести меру недостоверности — относительное число моделей на которых высказывание не истинно.

$$\eta_{S(\Sigma)}(A) = 1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(A)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$$

Аналогично можно ввести новую меру информативности $\tilde{\mu}_{S(\Sigma)}(\varphi)$, как расстояние от искомой формулы до тождественной формулы, используя при этом введенное ранее расстояние, т.е.

$$\tilde{\mu}_{S(\Sigma)}(A) = \tilde{\rho}_{S(\Sigma)}(A, 1).$$

Теорема 17. (свойства мер информативности и недостоверности)

1. $0 \leq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi) \leq 1$;
2. $\mu_{S(\Sigma)}(\sim \varphi) \neq 1 - \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$;
3. $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi) \geq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi)$;
4. $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$;
5. *если* $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = 1$, *то* $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) = 1$ *и* $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \phi) = 0$;
6. *если* $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) = 0$, *то* $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) = \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$ *и* $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) = \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$;
7. $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) = \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) + \mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi)$;
8. $\min\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi), \mu_{S(\Sigma)}(\psi)\} \geq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \geq \max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi), \mu_{S(\Sigma)}(\psi)\} - \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi)$ *и* $\min\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi), \mu_{S(\Sigma)}(\psi)\} + \rho_{S(\Sigma)}(\varphi, \psi) \geq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi) \geq \max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi), \mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}$.

Доказательство. 1. $0 \leq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi) \leq 1$;
Очевидно, что свойство 1 выполняется для $\mu_{S(\Sigma)}(A)$ и $\eta_{S(\Sigma)}(A)$.
2. $\mu_{S(\Sigma)}(\sim \varphi) \neq 1 - \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$;
а) $\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \neq 1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$
$\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)|+|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \neq 1$
Пусть $\varphi = A \wedge B$, тогда $1 \neq \frac{1+5}{9} = \frac{2}{3}$. В формуле можно поставить $\leq$.
б) $1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \neq 1 - 1 + \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$
$1 \neq \frac{|Mod_{S(\Sigma)}(\varphi)|+|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$ Аналогично а), в формуле можно поставить $\geq$.
3. $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi) \geq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi \wedge \psi)$;
а) $\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\wedge\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\wedge\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}} =$
$\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi\vee\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)\cup\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \geq \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$.
б) $1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} = 1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)\cap\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \geq 1 - \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$
4. а) $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi \vee \psi) \leq \mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$;
$\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\vee\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi\wedge\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} = \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)\cap\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}} \leq \frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$.

б)$1-\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}=1-\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)\cup\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}\leq 1-\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}$.
5. если $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=1$, то $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)=1$ и $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\phi)=0$.
Свойство верно, если φ и ψ не принимают значения $1/2$, т.е. $\varphi=\sim\psi$ и одни двузначные.
6. если $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0$, то $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)=\mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$ и $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)=\mu_{S(\Sigma)}(\varphi)$.
Очевидно, так как из $\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)=0$ следует, что $\varphi\equiv\psi$.
7. $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)+\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)$;
$\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\wedge\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}=\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}((\sim\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sim\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}+\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\vee\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}$;
$\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\wedge\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}-\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim(\varphi\vee\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}=\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}((\sim\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\sim\psi))|}{3^{|S(\Sigma)|}}$;
слева из числа моделей, на которых истинна φ, или ψ, или обе ложны, вычитается число моделей, на которых и φ и ψ ложны. Получается число моделей, на которых истинна или φ или ψ, но не $\varphi\wedge\psi$ — а это и есть симметрическая разность, записанная справа.
8. $\min\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}\geq\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)\geq\max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}-\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)$ и $\min\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}+\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)\geq\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)\geq\max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
а) $\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)=\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)\cap\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}\leq\min\{\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)|}{3^{|S(\Sigma)|}},\frac{|\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\psi)|}{3^{|S(\Sigma)|}}\}$ очевидно.

$\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\vee\psi)+\rho(\varphi,\psi)\geq\max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}$ слева, все модели, кроме тех, где $\varphi\wedge\psi$ истинна, справа все модели, кроме минимального из множеств $\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\sim\varphi)$ и $\mathrm{Mod}_{S(\Sigma)}(\psi)$.

$\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)-\rho_{S(\Sigma)}(\varphi,\psi)$ — число моделей на которых φ и ψ ложны. Это число не больше, чем $\min\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}$.
$\mu_{S(\Sigma)}(\varphi\wedge\psi)\geq\max\{\mu_{S(\Sigma)}(\varphi),\mu_{S(\Sigma)}(\psi)\}$ очевидно;
б) аналогично, с использованием свойств 3,4,7.

□

13 Примеры кластеризации формул

Пусть база знаний экспертов состоит из трех элементарных высказываний $S(\Sigma)=\{A,B,C\}$ и есть упорядочение эксперта: $P(A)=1,P(B)=2/3,P(C)=1/3$.
$\varphi_1=A\wedge B$
$\varphi_2=A\vee B$
$\varphi_3=A\rightarrow B$
$\varphi_4=\sim A$
$\varphi_5=B\rightarrow C$

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1		0,31156	0,407573	0,67267	0,496536
φ_2	0,31156		0,365195	0,55638	0,27815
φ_3	0,407573	0,365195		0,25600	0,26497
φ_4	0,67267	0,55638	0,25600		0,36348
φ_5	0,496536	0,27815	0,26497	0,36348	

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
μ	5/9	1/9	1/9	3/9	1/9

Используем объединение кластеров по методу "ближайшего соседа". Описание алгоритма: Применим иерархический алгоритм кластеризации к некоторой группе n высказываний. Сначала считаем, что у нас есть n кластеров. Построим матрицу расстояний для группы из n высказываний, потом выделим наименьшее расстояние между формулами φ_i и φ_j , и объединим формулы φ_i и φ_j в один кластер. Затем пересчитаем матрицу расстояний для уже $n-1$ высказывания, и будем повторять действия до тех пор, пока все высказывания не объединятся в один кластер. Кластеры будем объединять по методу ближайшего соседа, то есть, $\rho(\varphi_k,\varphi_{ij}) = \min\{\rho(\varphi_k,\varphi_i),\rho(\varphi_k,\varphi_j)\}$.
Шаг 1: $\min\rho(\varphi_i,\varphi_j) = 0{,}25600 = \rho(\varphi_3,\varphi_4)$. Кластеры: $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{34},\varphi_5$;
Шаг 2: $\min\rho(\varphi_i,\varphi_j) = 0{,}26497 = \rho(\varphi_{34},\varphi_5)$. Кластеры: $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{345}$;
Шаг 3: $\min\rho(\varphi_i,\varphi_j) = 0{,}27815 = \rho(\varphi_2,\varphi_{345})$. Кластеры: φ_1,φ_{2345};
Шаг 4: $\min\rho(\varphi_i,\varphi_j) = 0{,}31156 = \rho(\varphi_1,\varphi_{2345})$. Кластеры: φ_{12345}. В случае, если оптимальное число кластеров заранее не известно, в качестве критерия остановки алгоритма объединения можно взять меру информативности высказываний. Например, если перед началом кластеризации задать максимальную допустимую разницу между мерами информативности элементов одного кластера, то алгоритм будет продолжаться до достижения этого значения.
На шаге 1 максимальная разница между мерами информативности одного кластера:
$\max\|\mu(\varphi_i),\mu(\varphi_j)\| = 2/9$; на шаге 2: $2/9$; на шаге 3: $2/9$; на шаге 4: $4/9$. Таким образом, если мы зададим максимальное значение разности мер информативности одного кластера равное $2/9$, то алгоритм остановится после первого шага, и результатом будут кластеры $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_{34},\varphi_5$. Если зададим $3/9$, то результат φ_1,φ_{2345}. Если $4/9$, то φ_{12345}.

Пусть нам надо разбить множество наших формул на определенное число кластеров, допустим на 2:
Возьмем формулы, расстояние между которыми максимальное: в нашем случае это φ_1 и φ_4 , $\rho(\varphi_1,\varphi_4) = 0{,}67267$. Логично будет поместить эти формулы в разные кластеры. Искать разбиение на 2 кластера будем так:

для каждого элемента найдем ближайшего соседа из тех высказываний, которые уже приписаны к какому-нибудь кластеру, и припишем его к тому же кластеру.
Шаг 1: $\min \rho(\varphi_2, \varphi_i) = 0{,}31156 = \rho(\varphi_2, \varphi_1)$. Кластеры: φ_{12}, φ_4;
Шаг 2: $\min \rho(\varphi_3, \varphi_i) = 0{,}25600 = \rho(\varphi_3, \varphi_4)$. Кластеры: $\varphi_{12}, \varphi_{34}$;
Шаг 3: $\min \rho(\varphi_5, \varphi_i) = 0{,}26497 = \rho(\varphi_5, \varphi_3)$. Кластеры: $\varphi_{12}, \varphi_{345}$;
Получаем 2 класса $K_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}, K_2 = \{\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$.

14 Заключение

Во введении приводятся различные подходы в изучении формул многозначной логики Лукасевича. Результатом работы является Теорема 7 о метрике с учетом упорядочения элементарных высказываний каждым экспертом, изученная автором ранее в классическом случае и Теорема 11 о метрике, построенной с помощью степени разброса. Приведены примеры с подсчетом расстояний между формулами, свидетельствующие о новизне метрики, и приведена Теорема 15 о построении новой (коллективной) метрики по уже имеющимся. Введены меры информативности и недостоверности и Теорема 17, указывающая на свойства этих мер. Приведены алгоритмы кластеризации многозначных формул при помощи введенных расстояний и примеры.

Список литературы

[1] А. С. Карпенко, Логики Лукасевича и простые числа - М.: Наука, 2000.

[2] Г. С. Лбов, Н. Г. Старцева, Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений, Новосибирск: Издательство Института Математики, 1999.

[3] Г. С. Лбов, В, Б. Бериков, Устойчивость решающих функций в задачах распознавания образов и анализа разнотипной информации, Новосибирск: Издательство Института математики, 2005.

[4] А. А. Викентьев, Г. С. Лбов, Setting the metric and informativeness on statements of experts, Pattern Recognition and Image Analysis, **7**, 2 (1997), 175–183.

[5] D. Kachi, Bourne on future contingents and three-valued logic, Logic and Logical Philosophy, **18** (2009), 33–43.

[6] A. A. Vikent'ev, Distances and Degrees of Uncertainty in Many-Valued Propositions of Experts and Application of These Concepts in Problems of Pattern Recognition and Clustering, Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications, **24**, 4 (2014), 409–421.

[7] А. А. Викентьев, В. В. Фефелова, Новые модельные расстояния и меры достоверности формул логики Лукасевича в автоматической кластеризации высказываний баз данных, Algebra and Model Theory 10: Collection of papers (Eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko.) 2015, Novosibirsk: NSTU, 197–209.

[8] A. A. Vikent'ev, M. C. Avilov, New Model Distances and Uncertainty Measures for Multivalued Logic, Artificial Intelligence: Methodology, Systems, and Applications C. (Dichev, G. Agre (Eds.)), Lecture Notes on Computer Science, LNCS 9883, 2016. 89–98.

Abstracts

S. G. Afanasyeva. *Algebraic sets in divisible 2-rigid group.*
We give a description of finite unions of special irreducible algebraic sets in a divisible 2-rigid group such that these unions are algebraic.

K. Ahmadidelir. *Non-associating graph of a finite Moufang loop and its relationship with the non-commuting graph.*
The non-commuting graph associated to a non-abelian group G is a graph with vertex set $G \setminus Z(G)$ where distinct non-central elements x and y of G are joined by an edge iff $xy \neq yx$. The non-commuting graph of a non-abelian finite group has received some attention in existing literature. Recently, many authors have studied the non-commuting graph associated to a non-abelian group. They have shown that some classes of groups can be characterized (or at least order characterized) with non-commuting graphs. Specially, Woldar has proved that all finite non-abelian simple groups can be characterized with their non-commuting graphs.

Also, the author has defined the same concept for a finite non-commutative Moufang loop M and tried to characterize some finite non-commutative Moufang loops with their non-commuting graph and obtained some results related to the non-commuting graph of a finite non-commutative Moufang loop.

In this paper, we are going to associate a new graph to a finite non-associative Moufang loop and call it non-associating graph of this loop and try to derive its important and interesting graph properties and then to determine its relationship with its non-commuting graph. We define this graph as follows. Let M be a non-associative Moufang loop with nucleus $N(M)$. The non-associating graph associated to M is a graph with vertex set $M \setminus N(M)$ where distinct non-nuclear elements x and y of M are joined by an edge iff for some $z \notin M$ we have $[x, y, z] \neq 1$.

S.S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov. *On expansions of models of 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theories.*
We find necessary and sufficient conditions for an 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal structure of convexity rank 1 or 2 at expanding by an equivalence relation partitioning the universe into infinitely many infinite convex classes to preserve both countable categoricity and weak o-minimality.

O. V. Bryukhanov. *On ascending HNN-extensions of polycyclic-by-finite groups..*

It is proven a holomorph of a poly-ascending HNN-extension of a polycyclic-by-finite group is isomorphically represented by matrices of finite size over field of rational numbers.

D. Y. Emelyanov. *Algebras of binary isolating formulas for simplex theories.*
Algebras of binary isolating formulas for simplex theories are described.

E. V. Grachev, A. M. Popova. *Factorization problem of integral group rings of finite groups automorphisms.*
We present the factorization of integer group rings of finite groups. The proposed factorization differs from the Zassenhaus factorization.

Y. Kiouvrekis. *Agent-behavior system: An introduction to a topological approach.*
In this paper, we give a first definition about stable behavior through topological approach using coalgebraic tools and notions. Also, we argue that it is important to develop syntax and semantics of modal logics for reasoning about multiple parties, creating a map of formal verification projects on Digital Currency field and templates and languages which are suitable for formal verification.

M. G. Peretyat'kin. *First-order combinatorics and a definition to the concept of a model-theoretic property with demonstration of possible applications.*
The work is devoted to the first-order combinatorics presenting a conceptual foundation for investigations concerned the expressive power of predicate logic. We give a definition to the concept of a model-theoretic property, and specify in detail the pragmatic approach that turns out to be the most adequate to the real practice of investigations in model theory.

N. A. Peryazev, I. K. Sharankhaev. *Algebras of multioperations.*
Ratios between superclones and algebras of n-seater multioperations are considered.

A. G. Pinus. *On restrictedly generated congruences and Skolem restricted extensions of theories.*
Universal equivalence for lattices of restrictedly generated congruences and lattices of all congruences of algebras and an analogous result for lattices of Skolem-restricted extensions of theories and lattices of all extensions of elementary theories are proved.

A. G. Pinus. *Fragments of functional clones as a method of studying the latter ones.*

There is a review of the author's results on fragments of functional clones.

L. V. Ryabets, M. I. Goncharova. *About E-precomplete Classes of Hyperfunctions on Three-Element Set.*

In this work, we consider the closure operator with the equality predicate branching (E-operator) on the set of hyperfunctions on three-element set. With respect to this operator six closed classes of hyperfunctions are generated. It is shown that these classes are precomplete.

M. Shahryari. *A new characterization of q_ω-compact algebras.*

In this note, we give a new characterization for an algebra to be q_ω-compact in terms of super-product operations on the lattice of congruences of the relative free algebra.

S. V. Sudoplatov. *Classification of countable models of complete theories: popular and philosophical aspects.*

We consider main notions and steps related to the classification of countable models of complete theories. These objects are represented and illustrated within popular and philosophical viewpoints.

E. I. Timoshenko. *On formulas on soluble and nilpotent groups.*

Let G be the free group F of rank 2 or the free metabelian group M of rank 2 and P the set of all primitive elements of G. First, there is a countable set of $\exists$-formulas defining the set P however no finite part of these formulas defines P. Secondly, two elements of the commutant $[M, M]$ are conjugate by some automorphism of M iff they satisfy the same $\exists$-formulas. Thirdly, free nilpotent groups of finite rank are homogeneous and partially commutative nilpotent groups are QA-groups.

A. A. Vikent'ev. *New model distances on logical sentences used expert interpretations formulas of many-valued Lukasiewicz's logic for collective clustering of formulas from the knowledge base.*

New model distances on logical sentences used expert interpretations for formulas of many-valued Lukasiewicz's logic for collective clustering of formulas from the knowledge base are considered.

Contents

ALGEBRA AND MODEL THEORY 11

Collection of papers

Edited by *A. G. Pinus, E. N. Poroshenko,*
S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции.
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано к печати 10.11.2017. Формат 70×108 1/16. Бумага офсетная
Тираж 140 экз. Уч.-изд. л. 16,45. Печ. л. 11,75. Изд. № 159. Заказ № 2066.

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20