

Некоторые говорят, что Пифагор не оставил ни одного сочинения, но они ошибаются. Гераклит-физик едва ли не кричит: "Пифагор, Мнесархов сын, занимался собиранием сведений больше всех людей на свете и, понадергав себе эти сочинения, выдал за свою собственную мудрость многознайство и мошенничество"...

Диоген Лаэртий

ПОТОЧНЫЕ ШИФРЫ

**Результаты зарубежной открытой
криптологии**

Москва

1997

Предуведомление, поясняющее, как и для чего написана эта книга

"Революционные успехи, имевшие место в прошедшие десятилетия, преобразовали криптографию из полунаучной дисциплины в уважаемый раздел теоретической компьютерной науки.

Нашим намерением было написать книгу, которая представила бы базовые концепции, определения и результаты в криптографии"¹, а точнее - в конкретной ее области, охватывающей методы поточного шифрования.

"Данная книга предназначена в качестве справочника для профессиональных криптографов, здесь описаны заслуживающие внимания методы и алгоритмы, наряду с теоретическими концепциями и вспомогательными материалами. Книга является также обстоятельным источником криптографических сведений, полезных как студентам, так и преподавателям.

Нашей целью было собрать существующие криптографические знания в единый согласованный том, приемлемый как для специалистов-практиков, так и для академических математиков.

Хотя данная книга не предусматривает ее линейное чтение с начала до конца, материал подобран таким образом, чтобы и подобный подход не был бессмысленным. Двумя основными целями, мотивированными "справочной" природой книги, стали следующие - предоставить легкий доступ к самостоятельным результатам и обеспечить удобное соотнесение алгоритмов и теоретических результатов. Для облегчения доступа к материалу подразделы книги снабжены многоуровневой нумерацией."²

"Всякое сочинение, как дело человеческое, имеет свои недостатки. Я очень знаю, что мой труд более, нежели многие другие, должен, по сущности своей, подать повод к справедливым критическим замечаниям. Разнообразие предметов, которые для полноты должны входить в состав Лексикона, трудность соразмерить объем статей с относительную их важностью и не упустить из виду единства в изложении, решительная невозможность избежать в некоторых случаях повторений, необработанность нашего математического языка, - все это заставляет меня думать, что несмотря на все мои старания, книга моя далеко еще не удовлетворяет условиям хорошего лексикографического руководства. Может быть, отечественные математики найдут также, что некоторые термины и речения переданы не совсем удачно в моем Лексиконе; заранее прошу их быть снисходительными к таким недостаткам."³

"И все же я полагаю, что нечто неполное - это все-таки лучше, чем ничего"¹ ...

¹ Олед Голдрайх, из Предисловия к опубликованным в Internet фрагментам недописанной книги "Основания криптографии", 1995 год

² А. Менезес, П. Ван Оорсхот и С.Вэнстоун, "Справочник по прикладной криптографии", CRC Press, 1996 г., из Предисловия

³ "Предуведомление" из "Лексикона чистой и прикладной математики" В.Я.Буняковского, 1839 год.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 0. Введение

| | |
|--|---|
| 0.1 Базовая терминология и общие положения | 1 |
| 0.2 Концепция Рюппеля о четырех подходах к конструированию поточных шифров | 4 |
| 0.3 Классификация поточных шифров | 6 |
| 0.3.1 Синхронные поточные шифры и псевдослучайные генераторы | 7 |
| 0.3.2 Самосинхронизирующиеся поточные шифры и скремблеры | 8 |

Глава 1. Подход теории информации

| | |
|---|----|
| 1.1 Эпохи в криптологии | 10 |
| 1.2 Шенноновская модель криптоанализа | 11 |
| 1.3 Локальная рандомизация | 13 |
| 1.4 Практическая стойкость | 14 |

Глава 2. Строительные блоки для создания криптосхем

| | |
|---|----|
| 2.1 Конгруэнтные генераторы | 16 |
| 2.1.1 Генераторы псевдослучайных чисел | 16 |
| 2.1.2 Комбинирование ЛКГ и программная реализация | 18 |
| 2.2 Криптоанализ конгруэнтных генераторов | 20 |
| 2.2.1 Вскрытие конгруэнтных генераторов (неусеченных) | 21 |
| 2.2.2 Усеченные линейные конгруэнтные генераторы с известными параметрами | 22 |
| 2.2.3 Усеченные линейные конгруэнтные генераторы с неизвестными параметрами | 24 |
| 2.3 Регистры сдвига | 24 |
| 2.3.1 Алгебраические свойства регистров сдвига с линейной обратной связью .. | 25 |
| 2.3.2 РСЛОС максимального периода и примитивные многочлены | 27 |
| 2.3.3 Регистры Фибоначчи и Галуа, и их программная реализация | 29 |

| | |
|---------------------------|----|
| 2.4 Некоторые итоги | 33 |
|---------------------------|----|

Глава 3. Статистические свойства и меры сложности последовательностей

| | |
|--|----|
| 3.0 Подходы к анализу | 35 |
| 3.1 Статистические свойства последовательностей | 36 |
| 3.1.1 Постулаты Голомба | 36 |
| 3.1.2 Статистические тесты | 37 |
| 3.1.2.1 Теоретический фундамент | 37 |
| 3.1.2.2 Частотный тест | 38 |
| 3.1.2.3 Последовательный тест | 38 |
| 3.1.2.4 Тест серий | 39 |
| 3.1.2.5 Автокорреляционный тест | 39 |
| 3.1.2.6 Универсальный тест | 39 |
| 3.1.2.7 Тест повторений | 41 |
| 3.1.2.8 Сравнение тестов l -грамм | 42 |
| 3.1.2.9 Комбинирование тестов | 42 |
| 3.1.3 Отсечение слабых последовательностей | 43 |
| 3.2 Линейная сложность последовательностей и преобразования | 43 |
| 3.2.1 Концепция линейной сложности | 43 |
| 3.2.2 Алгоритм линейного синтеза Берлекампа-Мэсси | 44 |
| 3.2.3 Естественная интерпретация алгоритма Берлекампа-Мэсси | 47 |
| 3.2.4 Другие методы анализа линейной сложности | 50 |
| 3.2.5 Преобразования | 51 |
| 3.2.5.1 Дискретное преобразование Фурье и линейная сложность | 51 |
| 3.2.5.2 Преобразование Уолша и булевы функции | 53 |
| 3.2.5.3 Преобразование алгебраической нормальной формы | 54 |
| 3.2.6 Профиль линейной сложности | 56 |
| 3.3 Периодические последовательности | 57 |
| 3.3.1 Прагматические соображения | 57 |
| 3.3.2 Теоретический анализ периодических последовательностей | 58 |
| 3.4 Суммы и произведения периодических последовательностей | 59 |
| 3.4.1 Суммы периодических последовательностей | 59 |
| 3.4.2 Произведения периодических последовательностей | 60 |
| 3.4.3 Общая нижняя граница для линейной сложности произведения | 61 |

| | |
|---|----|
| 3.5 Другие меры сложности | 64 |
| 3.5.1 Общие результаты | 64 |
| 3.5.2 Квадратичный размах..... | 65 |
| 3.5.3 Деревья суффиксов | 66 |
| 3.6 Вместо резюме: две стороны теоретико-системного подхода | 68 |

Глава 4. Базовые схемы и их криптоанализ

| | |
|--|-----|
| 4.0 Функции от периодических последовательностей | 69 |
| 4.1 Фильтрующий генератор | 70 |
| 4.1.1 Линейная сложность фильтр-генератора | 70 |
| 4.1.2 Алгоритм для оценки линейного размаха нелинейно фильтруемых последовательностей | 72 |
| 4.2 Комбинирующий генератор | 77 |
| 4.3 Корреляционные методы вскрытия комбинирующих генераторов | 80 |
| 4.3.0 Общий обзор | 80 |
| 4.3.1 Базовая корреляционная атака Зигенталера | 84 |
| 4.3.2 Быстрая корреляционная атака Майера и Штаффельбаха | 86 |
| 4.3.3 Метод Пенцхорна для нахождения низковесовых полиномов проверки четности | 89 |
| 4.3.4 Метод итерационного вероятностного декодирования Михалевича-Голича | 94 |
| 4.3.5 Метод Маккея: алгоритм минимизации свободной энергии | 97 |
| 4.3.6 Сравнение алгоритмов и проблема сходимости | 102 |
| 4.4 Вскрытие фильтр-генераторов | 104 |
| 4.4.0 Основные результаты | 104 |
| 4.4.1 Метод Зигенталера: криптоаналитическое представление фильтр-генератора | 105 |
| 4.4.2 Модель Андерсона: на пути к "оптимальной корреляционной атаке" | 107 |
| 4.4.3 Математическая модель атаки Андерсона | 110 |
| 4.4.4 Инверсионная атака Голича | 111 |
| 4.4.5 Множества положительных разностей и корреляционный иммунитет | 114 |
| 4.4.6 Критерии обеспечения стойкости нелинейных фильтр-генераторов | 117 |

Глава 5. Криптографические функции. Критерии нелинейности и методы конструирования

| | |
|---|-----|
| 5.0 Общий обзор | 119 |
| 5.1 Корреляционный иммунитет порядка k | 122 |
| 5.1.1 Базовые понятия и результаты для узлов без памяти | 122 |
| 5.1.2 Конструирование корреляционно-иммунных функций | 124 |
| 5.1.3 Корреляционный иммунитет и автомат с памятью | 126 |
| 5.2 Классификация Майера-Штаффельбаха для критериев нелинейности | 129 |
| 5.2.1 Расстояние до линейных функций | 130 |
| 5.2.2 Функции с линейной структурой | 131 |
| 5.2.3 Совершенные нелинейные функции | 131 |
| 5.3 Бент-функции | 132 |
| 5.3.1 Конструкция Майораны-Макфарленда и бент-отображения Ньюберг | 133 |
| 5.3.2 Конструкции Карле | 134 |
| 5.3.3 Общая конструкция Доббертина | 137 |
| 5.4 Критерий распространения и эластичные функции | 141 |
| 5.4.1 Строгий лавинный критерий и критерий распространения | 141 |
| 5.4.2 Конструирование булевых функций, удовлетворяющих критериям сбалансированности, нелинейности и распространения | 142 |
| 5.4.2.1 Базовые понятия и аппарат адамаровых матриц..... | 142 |
| 5.4.2.2 Конкатенация и расщепление последовательностей..... | 145 |
| 5.4.2.3 Модификация и перемножение последовательностей..... | 147 |
| 5.4.2.4 Высоко нелинейные сбалансированные функции, удовлетворяющие критерию распространения большой степени..... | 149 |
| 5.4.3 Эластичные функции | 150 |
| 5.4.3.1 Свойства эластичных функций | 150 |
| 5.4.3.2 Конструирование новых эластичных функций из уже известных | 151 |
| 5.4.3.3 Преобразование линейных эластичных функций в нелинейные | 152 |
| 5.5 Рекомендации конструкторам криптосхем | 153 |

Глава 6. Схемы с неравномерным движением регистров и без памяти

| | | |
|---------|---|-----|
| 6.0 | Неравномерное движение как способ достижения нелинейности | 154 |
| 6.1 | Общий обзор конструкций с неравномерным движением регистров | 155 |
| 6.1.1 | Схемы с управляющим регистром, их период и линейная сложность | 155 |
| 6.1.1.1 | Базовая схема, генераторы "стоп-вперед" и "один-два шага" | 155 |
| 6.1.1.2 | Период и линейная сложность | 156 |
| 6.1.1.3 | Генератор с перемежающимся шагом | 158 |
| 6.1.1.4 | Каскадный генератор | 159 |
| 6.1.1.5 | Сжимающий генератор | 160 |
| 6.1.2 | Схемы с самоуправлением | 161 |
| 6.1.2.1 | Генератор $[d,k]$ -самоусечения | 161 |
| 6.1.2.2 | Самосжимающий генератор | 162 |
| 6.2 | Каскадные генераторы | 163 |
| 6.2.1 | Криптографические свойства "шаг $_{k,m}$ "-каскадов | 164 |
| 6.2.2 | Криптоанализ каскадов | 166 |
| 6.2.3 | Систематическая атака Меникоччи | 169 |
| 6.3 | Сжимающий и самосжимающий генераторы | 173 |
| 6.3.1 | Сжимающий генератор | 173 |
| 6.3.1.1 | Конструкция, период, линейная сложность и статистические свойства | 173 |
| 6.3.1.2 | Приложение преобразования Фурье и ε -смещенных распределений в анализе регистров с переменными точками съема и СГ | 175 |
| 6.3.1.3 | Криптоаналитические подходы к вскрытию схемы | 178 |
| 6.3.1.4 | Аспекты аппаратной и программной реализации | 179 |
| 6.3.2 | Сжимающий Фибоначчи-генератор (Fish) и его вскрытие | 180 |
| 6.3.2.1 | Обобщенный сжимающий генератор и алгоритм Fish | 180 |
| 6.3.2.2 | Вскрытие криптосхемы Fish | 181 |
| 6.3.3 | Самосжимающий генератор | 184 |
| 6.3.3.1 | Сжатие и самосжатие | 185 |
| 6.3.3.2 | Период и линейная сложность, примеры и экспериментальные результаты | 185 |

| | |
|---|-----|
| 6.3.3.3 Криптоанализ | 187 |
| 6.4 Вскрытие схем с неравномерным движением | 190 |
| 6.4.1 Краткий обзор основных результатов | 190 |
| 6.4.2 Восстановление начального заполнения регистра на основе новой меры расстояния между последовательностями | 192 |
| 6.4.3 Атака встраиванием и вероятностная корреляционная атака | 196 |
| 6.4.4 Восстановление полинома обратной связи и быстрая корреляционная атака | 200 |

Глава 7. Схемы с памятью

| | |
|---|-----|
| 7.1 Общий обзор | 208 |
| 7.1.1 Схемы с равномерным движением и памятью | 208 |
| 7.1.2 Схемы на регистрах сдвига с операцией переноса | 209 |
| 7.1.3 Схемы с неравномерным движением и памятью | 212 |
| 7.2 Корреляционные свойства комбинирующих узлов с 1 битом памяти | 213 |
| 7.2.1 Базовая схема сумматора | 213 |
| 7.2.2 Обобщенный комбинирующий узел с 1 битом памяти | 214 |
| 7.2.3 Корреляция, обусловленная известным выходом | 216 |
| 7.2.4 Криптоанализ сумматора с двумя входами | 217 |
| 7.3 Комбинирующий узел с произвольным числом бит памяти | 219 |
| 7.3.1 Обобщенный двоичный комбинирующий узел с памятью и корреляционные свойства векторных булевых функций | 219 |
| 7.3.2 Корреляционные свойства комбинирующих узлов с памятью | 222 |
| 7.3.3 Метод аппроксимации линейной последовательной схемой | 224 |
| 7.3.4 Корреляционная атака | 227 |
| 7.4 Регистры сдвига с переносом и 2-адический анализ | 228 |
| 7.4.1 Обзор 2-адических чисел | 229 |
| 7.4.2 Регистры сдвига с памятью, их реализация, требования к памяти | 230 |
| 7.4.3 Анализ РСОСП | 232 |
| 7.4.4 2-адический размах и сложность | 235 |
| 7.4.5 Алгоритм рациональной аппроксимации | 237 |
| 7.4.6 2-адический криптоанализ сумматора | 239 |
| 7.4.7 Длинные последовательности и их статистические свойства | 240 |
| 7.4.8 РСОСП максимального периода и криптосхемы на их основе | 241 |

Глава 8. Конкретные схемы криптогенераторов и самосинхронизирующиеся шифры

| | |
|---|-----|
| 8.1 Обзор ранних схем | 245 |
| 8.1.1 Генератор Геффе | 245 |
| 8.1.2 Генератор Плесса | 246 |
| 8.1.3 Генератор-мультиплексор Дженнингса | 247 |
| 8.1.4 Пороговый генератор | 248 |
| 8.1.5 Генератор скалярного перемножения | 249 |
| 8.1.6 Генератор Вольфрама | 250 |
| 8.1.7 Генератор "1/p" | 251 |
| 8.1.8 Генератор суммирования | 253 |
| 8.1.9 Ранцевый генератор | 254 |
| 8.1.10 Аддитивный генератор | 255 |
| 8.1.11 Генератор Гиффорда | 256 |
| 8.2 Алгоритм A5 | 257 |
| 8.2.1 Описание криптосхемы | 257 |
| 8.2.2 Криптоанализ шифра | 259 |
| 8.3 Алгоритм RC4 | 260 |
| 8.3.1 Описание криптосхемы | 260 |
| 8.3.2 Криптоанализ | 262 |
| 8.4 Алгоритм SEAL | 263 |
| 8.4.1 Семейство псевдослучайных функций | 263 |
| 8.4.2 Особенности SEAL | 264 |
| 8.4.3 Описание алгоритма | 265 |
| 8.4.4 Стойкость SEAL | 268 |
| 8.5 Обзор криптосхем 1990-х годов | 268 |
| 8.5.1 Фильтр-генератор на основе алгоритма сжатия данных Зива-Лемпела | 268 |
| 8.5.2 Модифицированный линейный конгруэнтный генератор (Чамберса) | 271 |
| 8.5.3 Каскад с неравномерным движением (Чамберса) | 273 |
| 8.5.4 Алгоритм WAKE | 275 |
| 8.5.5 Алгоритм PIKE | 276 |
| 8.5.6 Алгоритм GOAL | 277 |
| 8.5.7 Алгоритм ORYX | 278 |
| 8.5.8 Генератор ISAAC | 280 |
| 8.5.9 Chameleon - новое приложение криптографии | 283 |

| | |
|--|-----|
| 8.6 Самосинхронизирующиеся шифры | 284 |
| 8.6.1 Концептуальная схема | 285 |
| 8.6.2 Рекурсивная архитектура Маурера | 286 |
| 8.6.3 Схема Дэмена на регистре сдвига с условным дополнением | 287 |

Глава 9. Новые методы криптоанализа

| | |
|---|-----|
| 9.1 Метод "встреча посередине" | 290 |
| 9.2 Криптографические слабости ресинхронизаций | 291 |
| 9.2.1 Типы ресинхронизаций и их интерпретация | 292 |
| 9.2.2 Общая атака нелинейно фильтруемых систем | 294 |
| 9.2.3 Атака мультиплексор-генератора | 296 |
| 9.3 Дифференциальный криптоанализ | 297 |
| 9.3.1 Аддитивный естественный поточный шифр | 297 |
| 9.3.2 Дифференциальная атака | 298 |
| 9.3.3 Теоретический базис атаки | 299 |
| 9.4 Линейный криптоанализ | 300 |
| 9.4.1 Линейные модели поточных шифров | 300 |
| 9.4.2 Линейный анализ генераторов на основе регистров сдвига | 302 |
| 9.5 Методы дискретной оптимизации: симулятор отжига и генетический алгоритм | 302 |
| 9.5.1 Симулятор отжига и алгоритм Метрополиса | 302 |
| 9.5.2 Корреляционная атака, модифицированная симулятором отжига | 305 |
| 9.5.3 Генетические алгоритмы | 306 |
| 9.6 Оптимизация тотального перебора ключей | 307 |
| 9.7 О существовании стойких регистров сдвига | 310 |
| 9.7.1 Концептуальная модель | 310 |
| 9.7.2 Определения | 311 |
| 9.7.3 Существование стойких РСОС | 313 |
| 9.7.4 Атаки линейного синтеза | 315 |

Глава 10. Альтернативные конструкции

| | |
|---|-----|
| 10.0 Взгляды на теорию стойкости | 317 |
| 10.1 Подход с позиций теории сложности | 319 |
| 10.1.1 Базовые идеи и концепции | 320 |
| 10.1.2 Генераторы | 322 |
| 10.1.2.1 Псевдослучайный генератор Шамира | 322 |
| 10.1.2.2 Генератор Блюма-Микали | 324 |
| 10.1.2.3 Генераторы RSA | 326 |
| 10.1.2.4 Генератор квадратичных вычетов | 327 |
| 10.2 Рандомизированные шифры | 329 |
| 10.2.1 Шифр Диффи | 330 |
| 10.2.2 Шифр "Рип ван Винкль" | 330 |
| 10.2.3 Шифр Маурера | 332 |
| 10.3 Хаотические шифры | 333 |
| 10.4 Система гаммирования ROTP | 334 |
| Глава последняя. Заключение | |
| I. Современная ситуация в открытой криптографии | 337 |
| II. Критерии для сравнения алгоритмов | 338 |
| III. Программные и аппаратные шифры | 338 |
| IV. Развитие теории | 339 |
| V. Жизнь в реальном мире | 339 |
| Библиография | 341 |
| Англо-русский предметный указатель | 369 |
| Русско-английский предметный указатель | 378 |

Глава 0

Введение

0.1 Базовая терминология и общие положения

В зарубежной литературе для всей области защиты информации общепринятым является название *криптология* (происходящее от греческих корней "скрытно" и "слово"). Как пишет патриарх академической криптологии Джеймс Мэсси (университет ETH, Швейцария), криптология довольно естественным образом делится на два направления: *криптография* и *криптоанализ* [241]. Криптограф ищет методы для гарантирования засекречивания и/или подтверждения аутентичности сообщения. Криптоаналитик ищет способы вскрыть шифр или подделать код сигнала так, чтобы его принимали за аутентичный. Оригинал сообщения, который криптограф пытается засекретить, называется *открытым текстом*, плод его труда называется *шифртекстом* или *криптограммой*. Криптограф всегда использует *секретный ключ* для управления процессом шифрования. Часто (но не всегда) секретный ключ доставляется с соблюдением мер предосторожности (типа кейса, прикованного к запястью курьера) к тому, от кого ожидается получение криптограмм на этих ключах.

Почти универсальным предположением в криптографии является допущение, что криптоаналитик противника имеет полный доступ к криптограмме. Почти столь же единодушно криптографы исходят из предположения, впервые сформулированного голландцем А. Керкхоффсом (1835-1903), что стойкость шифра должна целиком сводиться к секретному ключу. Эквивалентной формулировкой *допущения Керкхоффса* будет такая: весь механизм шифрования, кроме значения секретного ключа, известен криптоаналитику противника. Если криптограф исходит только из этих двух допущений, то он разрабатывает криптосистему, стойкую к *атаке только по шифртексту*, предпринимаемой неприятелем. Если далее криптограф предполагает, что криптоаналитик каким-то образом сумеет заполучить пары открытого и зашифрованного текстов, зашифрованные на неизвестном ему секретном ключе, то шифрсистема разрабатывается стойкой к *атаке с известным открытым текстом*. Криптограф может даже предположить, что криптоаналитик врага имеет возможность составить собственный открытый текст и прогнать его через шифрсистему, получив взамен криптограмму на действующем секретном ключе (*атака с подобранным открытым текстом*). Иногда предполагают, что вражеский криптоаналитик может что-то засунуть в шифрсистему и получить взамен невнятный набор символов, "расшифрованных" действующим ключом (*атака с подобранным шифртекстом*). Большинство используемых сегодня шифрсистем разрабатываются их создателями для противостояния по крайней мере атаке с подобранным открытым текстом (одновременно при этом надеются, что криптоаналитик противника никогда не будет иметь возможности для построения атаки более изощренной, чем атака по шифртексту) [241].

В соответствии с общепринятой сегодня терминологией, криптосистемы делятся на *симметричные* или *с секретным ключом* и *асимметричные* или *с открытым ключом*. В криптосистеме с открытым ключом отправитель использует общедоступную известную информацию (открытый ключ) для того, чтобы послать сообщение получателю. Получатель, в свою очередь, использует секретную информацию для восстановления сообщения. В случае криптографии с секретным ключом отправитель и получатель предварительно договариваются о некоторой известной лишь им информации, которую они будут использовать как для зашифрования, так и для расшифрования. Эта информация должна храниться в секрете от потенциальных злоумышленников, перехватывающих сообщения.

Для симметричных шифрсистем имеется последующее разделение на *блочные шифры* и *поточные шифры*. Различие между этими криптосистемами можно суммарно выразить следующим образом: "Блочные шифры применяют одно постоянное преобразование к большим блокам данных открытого текста; поточные шифры применяют изменяющиеся во времени преобразования к отдельным цифрам открытого текста" [339].

Также общепринятым до сегодняшнего дня остается достаточно жесткое разделение криптографии на "военную" (или "секретную") и "открытую". В данной книге будет дан обзор разработанных в открытой криптографии схем поточного шифрования и методов их криптоанализа по состоянию на конец 1997 года. Всякий, кто возьмется за изучение открытой криптографической литературы, будет поражен тем, насколько по-разному обстоят дела с изучением блочных шифров и поточных шифров. Подавляющее большинство работ по криптоанализу блочных шифров сфокусировано на *DES-алгоритме* [277] и почти все предложенные блочные шифры в той или иной степени основаны на конструктивных принципах DES. В области же поточных шифров не существует алгоритма, который занимал бы равноценную позицию. Имеется огромное разнообразие альтернативных конструкций поточных шифров, и здесь криптоанализ имеет тенденцию к оформлению в самых общих терминах [322].

Кроме того, любопытно отметить, что исследование поточных шифров, по большому счету, является преимущественно европейским занятием. Сравнивая доклады двух основных криптографических конференций, нетрудно увидеть, что на кочующих по городам Европы симпозиумах Eurocrypt поточным шифрам посвящается несколько сессий, в то время как для американских встреч Crypto в калифорнийском г. Санта-Барбара более обычной является одна сессия. Столь явный дисбаланс, с одной стороны, является побочным продуктом повышенного интереса в США к алгоритму DES, с другой же - следствием значительного влияния на европейскую открытую криптографию Цюрихского политехникума (ETH, или Федеральный технологический институт). Этот знаменитый швейцарский институт, среди выпускников которого можно назвать Альберта Эйнштейна и Джона фон Неймана, имеет также мощную криптографическую школу, поставляющую кадры всемирно известным фирмам-производителям шифраппаратуры: Crypto AG, Gretag AG, Omnisec AG и др.. Эти фирмы имеют традиционный и естественный интерес к высокопроизводительным системам поточного шифрования, а многие выпускники и сотрудники ETH стояли у истоков создания в начале 1980-х годов Международной ассоциации криптографических исследований (IACR).

Вне всякого сомнения, в очень большой степени популярность поточных шифров можно связывать с работой Клода Шеннона, посвященной анализу *одноразовых гамм-блокнотов*, изначально именовавшихся *шифром Вернама* [376]. (Название "одноразовый блокнот" - стало общепринятым в годы Второй мировой войны, когда для шифрования широко использовались бумажные блокноты).

Одноразовый гамм-блокнот использует длинную *шифрующую последовательность* (или "гамму", как принято выражаться в отечественной криптографии), которая состоит из бит, выбираемых совершенно случайно. Шифрующая последовательность побитно накладывается на открытый текст. Шифрующая последовательность имеет ту же самую длину, что и сообщение, и может использоваться только единственный раз (о чем свидетельствует само название шифрсистемы); ясно, что при таком способе шифрования требуется огромное количество шифрующей гаммы. Открытый текст сообщения m записывают как последовательность бит $m = m_0m_1\dots m_{n-1}$, а двоичную шифрующую последовательность k той же самой длины как $k = k_0k_1\dots k_{n-1}$. Шифртекст $c = c_0c_1\dots c_{n-1}$ определяется соотношением

$$c_i = m_i \oplus k_i \text{ при } 0 \leq i \leq n-1,$$

где \oplus обозначает операцию побитового исключающего-или (XOR).

В своей исторической работе [360] Шеннон доказал то, во что многие до этого просто верили, а именно, что одноразовый гамм-блокнот является "невскрываемой" шифрсистемой. Фактически, Шеннон представил эту криптосистему как *совершенную*: даже противник, обладающий безграничным количеством вычислительной мощности не в силах сделать ничего лучшего, чем только предполагать значения бит сообщения, поскольку шифртекст статистически не зависит от открытого текста.

Поточный шифр по сути своей пытается имитировать концепцию одноразового гамм-блокнота, используя короткий ключ для генерации шифр-последовательности, которая "похожа на случайную" (см. Главу 1). Такую шифрующую последовательность часто именуют *псевдослучайной*, и изучение того, каким образом генерировать псевдослучайную последовательность и составляет основную часть работы в области поточных шифров. Принято говорить, что шифрующая последовательность порождается *генератором гаммы* или, как еще выражаются, *генератором псевдослучайной последовательности*.

Вообще говоря, последовательность считают случайной, если о ней нельзя сделать никаких предсказаний, и для нее нельзя найти никаких простых описаний. Но если фактически шифрующая гамма может генерироваться эффективно, то такое простое описание наверняка существует. Тем не менее, генератор может породить "неотличимые от случайной" последовательности, если к гамме не могут быть применены никакие вычисления, которые позволили бы обнаружить это простое описание. Исходный ключ должен быть преобразован таким сложным образом, чтобы было вычислительно невозможно его восстановить. Уровень случайности последовательности можно определять в терминах классов вычислений (тестов), которые не могут выявить в ней статистические нерегулярности. На практике применяют различные статистические тесты "на случайность", которые при помощи сравнительно несложных вычислений проверяют, чтобы статистические свойства исследуемой последовательности согласовывались с предсказанными, как если бы каждый элемент последовательности был взят из равновероятного вероятностного распределения (см. Главу 3).

Поточные шифры могут быть очень быстрыми в работе, в общем случае они намного быстрее блочных шифров. Поскольку шифрующая последовательность часто может генерироваться независимо от открытого текста или шифртекста, такие генераторы имеют преимущество в том, что шифрпоследовательность может вырабатываться до процесса шифрования или расшифрования, на который остается лишь единственная легкая операция наложения.

На начальном этапе открытой криптографии в качестве генераторов псевдослучайных последовательностей часто предлагались *регистры сдвига с линейной обратной связью (РСЛОС)* и *линейные конгруэнтные генераторы (ЛКГ)* (см. Главу 2). Но поскольку это линейные устройства, то они обычно легко поддаются криптоанализу независимо от того, насколько много параметров сохраняется в тайне. Сегодня РСЛОС и линейные конгруэнтные генераторы уже не рекомендуются как возможные генераторы шифрующей гаммы, хотя их продолжают широко использовать в качестве строительных блоков в конструкциях поточного шифрования.

0.2 Концепция Рюппеля о четырех подходах к конструированию поточных шифров



Райнер Рюппель

Относительно подходов к созданию поточных шифров имеется концепция, получившая достаточно широкое признание и принадлежащая авторитетному швейцарскому криптографу Райнеру Рюппелю. В 1980-е годы Рюппель работал в фирме Crypto AG, а с 1989 года возглавляет независимую консалтинговую криптофирму R³ Security Engineering. Рюппелю принадлежит ряд фундаментальных трудов по теории поточного шифрования [330] [334] [339], и большинство материалов данной книги о криптографических результатах 80-х годов изложено на основе этих работ (в основном, по [339]). В частности, Рюппелем выделяются четыре принципиальных подхода к конструированию схем поточного шифрования [338]. Эти подходы различаются в своих предположениях о свойствах и возможностях криптоаналитика, в определении криптоаналитического успеха, в понимании стойкости.

1. Подход теории информации (см. Главу 1). При теоретико-информационном подходе подразумевается, что криптоаналитик обладает неограниченным временем и вычислительными ресурсами. Криптоанализ - это процесс определения сообщения (или конкретного ключа) при наличии только криптограммы и априорных вероятностей для различных ключей и сообщений. Стойкость системы считается взломанной, если имеется "уникальное" решение для криптограммы: одно сообщение с необходимостью единственное, для всех остальных вероятность практически нулевая. Предположение о бесконечно мощном противнике означает, что положение о стойкости в шенноновской модели не зависит от сложности метода зашифрования или расшифрования. Говорят, что шифрсистема *совершенно стойкая*, если открытый текст и зашифрованный текст статистически независимы. То есть, криптоаналитику ничуть не становится лучше после

того, как он увидел криптограмму, чем до того. Говорят, что шифрсистема *идеально стойкая*, если криптоаналитик не может найти единственное решение для открытого текста независимо от того, сколько он сможет получить для анализа шифртекста.

Интересная подпроблема, именуемая проблемой локальной рандомизации, возникает в том случае, когда базовая теоретико-информационная модель модифицируется таким образом, что наблюдения оппонента подразумеваются ограниченными величиной, не превышающей определенное число (не обязательно последовательных) цифр шифртекста.

2. Подход теории систем (см. Главы 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Предмет теоретико-системного подхода - создать уверенность, что каждая новая криптосистема порождает сложную и прежде неизвестную проблему для криптоаналитика. Вскрытие такой системы - это "неудобная" проблема по сравнению с криптоанализом систем, основанных на какой-нибудь "знаменитой" проблеме типа факторизации или дискретного логарифмирования. Цель разработчика - показать, что ни один из фундаментальных криптоаналитических принципов (таких как, например, "разделяй-и-вскрывай", статистический анализ и т.п.) неприменим к новой системе. Для того, чтобы помешать криптоанализу на основе этих фундаментальных принципов, развит набор общих конструктивных критериев для генераторов шифрующей гаммы. Примерами таких критериев могут служить период, линейная сложность, статистические критерии, замешивание и рассеивание, критерии нелинейности для булевых функций. Поскольку эти многочисленные критерии по своей природе теоретико-системные, считается, что это подход теории систем. Система (поточного) шифрования разрабатывается таким образом, чтобы непосредственно удовлетворять набору определенных конструктивных критериев. Вне всякого сомнения, на сегодняшний день это наиболее распространенная методология подхода к практической разработке шифров.

3. Подход теории сложности (см. Раздел 10.1). При этом подходе все вычисления параметризуются параметром стойкости, обычно это длина ключа, и проводится асимптотический анализ. Вычислительно приемлемыми считаются только те алгоритмы, чье время работы может быть выражено в виде многочлена от размера входа. Криптоанализ - это процесс (а) предсказания отдельной цифры шифрующей гаммы либо (б) отличия последовательности шифрующей гаммы от истинно случайной последовательности. Цель разработчика - построить свою систему шифрования на основе некоторой проблемы, разрешение которой вычислительно недостижимо (либо ей эквивалентной). Генератор шифрующей гаммы определяется как *совершенный* если он (а) непредсказуем либо (б) невыделяем всеми статистическим тестами полиномиального времени. К сожалению, совершенный генератор - это гипотетическое устройство; о существовании такого устройства пока ничего не известно. Все предложенные генераторы построены на предполагаемой сложности одной из нескольких "знаменитых" проблем типа дискретного логарифма, квадратичной вычетности, инвертирования криптоалгоритма Райвиста-Шамира-Адлемана (RSA).

4. Рандомизированные поточные шифры (см. Раздел 10.2). Вместо попыток гарантировать, что криптоаналитический процесс потребует недостижимых трудозатрат, разработчик может попытаться доказать, что криптоаналитическая задача имеет необозримые размеры. Суть этого подхода можно свести к количеству бит, которые

криптоаналитику необходимо проанализировать в процессе криптоанализа, в то время как секретный ключ имеет небольшой размер. Это можно сделать с помощью большого для всех открытого случайного массива бит, используемого при зашифровании и расшифровании. Ключ здесь задает, какие части большого *рандомизатора* следует использовать, в то время как оппонент, не знающий секретного ключа, вынужден прочесывать весь массив случайных данных. Стойкость системы рандомизированного поточного шифрования может быть оценена (снизу) с помощью среднего числа бит, которые должен проанализировать криптоаналитик до того, как его шансы в определении ключа или открытого текста станут лучше, чем при чисто случайном предположении. Возможны различные интерпретации такого результата. Ожидаемое количество битовых тестов - это нижняя граница для количества шагов, которые должен выполнить любой вскрывающий систему алгоритм, а это ведет к идее вычислительной стойкости. Но ожидаемое количество битовых тестов - это также нижняя граница для количества бит, которые должен увидеть оппонент до того, как улучшатся его апостериорные вероятности для различных ключей, и таким образом это приводит к идее теоретико-информационной стойкости. Эти возможные интерпретации и являются причиной того, что такие системы поточного шифрования рассматриваются в самостоятельном разделе.

0.3 Классификация поточных шифров

Теория автоматов, в частности, теория автоматов с конечным числом состояний хорошо подходят для описания систем поточного шифрования и их различных режимов функционирования [339]. Пусть X означает алфавит открытого текста, Y - алфавит шифртекста, Z - алфавит шифрующей последовательности, S - пространство состояний (внутренних состояний) поточного шифра, K - пространство ключей. Пусть x_i , y_i , z_i и s_i означают, соответственно, цифру открытого текста, цифру шифртекста, цифру гаммы и внутреннее состояние в момент времени i . Ключ $k \in K$ выбирается в соответствии с вероятностным распределением P_K . Обычно ключ выбирается в соответствии с равномерным распределением, но в некоторых случаях может быть недостижимо выбирать ключ совершенно случайно.

В общем виде поточный шифр может быть описан уравнениями

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= F(k, s_i, x_i) \\ y_i &= f(k, s_i, x_i), \end{aligned}$$

где F - это функция следующего состояния, а f - функция выхода. Обычно

$$y_i = x_i + F(k_i, s_i),$$

это условие, необходимое и достаточное для того, чтобы поточный дешифратор функционировал без задержки [233]. Последовательность

$$\{z_i = f(k, s_i) : i \geq 1\}$$

именуется шифрующей гаммой. Для обеспечения стойкого шифрования гамма должна быть настолько случайной, насколько это возможно.

0.3.1 Синхронные поточные шифры и псевдослучайные генераторы.

Поточные шифры обычно подразделяют на *синхронные* и *самосинхронизирующиеся* системы. В синхронном поточном шифре шифрующая последовательность генерируется независимо от потока открытого текста и потока шифртекста. Функционирование генератора гаммы управляется двумя правилами:

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= F(k, s_i) \\ z_i &= f(k, s_i). \end{aligned}$$

Начальное состояние s_0 может быть функцией от ключа k , и, возможно, от некоторой рандомизирующей переменной. Цель генератора гаммы - развернуть короткий случайный ключ k в длинную псевдослучайную последовательность $z^l = z_1, z_2 \dots z_l$. Компактно это можно записать так

$$\begin{aligned} G : K &\rightarrow Z^l \\ z^l &= G(k), \end{aligned}$$

что подчеркивает функциональную взаимосвязь между ключом k и потоком гаммы z^l . Для двоичного ключа k^n длины n и двоичного потока гаммы длины l генератор (n, l) -последовательностей - это функция из $\{0,1\}^n$ в $\{0,1\}^l$ такая, что $z^l = G(k^n)$.

В теории сложности генератор задается асимптотически как бесконечный класс $\{G_n; n \geq 1\}$ генераторов $(n, l(n))$ -последовательностей, где l - это полиномиальная функция от индекса n , а время вычисления каждого генератора ограничено сверху полиномиальной функцией от n .

Синхронные поточные шифры далее могут быть расклассифицированы в соответствии с режимом, в котором они функционируют:

Режим счетчика [101]: Функция следующего состояния не зависит от бит ключа, но гарантированно проходит через все пространство состояний (или его большую часть).

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= F(s_i) \\ z_i &= f(k, s_i) \end{aligned}$$

Примеры для такой функции F - обычные счетчики и РСЛОС с максимальной длиной периода. Криптографическая стойкость с необходимостью базируется на выходной функции f .

Режим обратной связи от выхода (внутренней обратной связи) [64]: Выходная функция f не зависит от ключа.

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= F(k, s_i) \\ z_i &= f(s_i). \end{aligned}$$

Очень часто f просто состоит из 1-битового предиката текущего состояния (например, самый младший бит или бит четности). Иногда рассматривают вариант такого режима, при котором ключ k задает только начальное состояние:

$$\begin{aligned}s_0 &= k \\ s_{i+1} &= F(s_i) \\ z_i &= f(s_i).\end{aligned}$$

Синхронный поточный шифр имеет свойство не распространять ошибки. Расшифрование искаженной цифры шифртекста влияет только на соответствующую цифру открытого текста. Хотя такое свойство может показаться желательным, у него есть и другие стороны. Во-первых, в этом случае ограничивается возможность обнаружения ошибки при расшифровании, но что еще более важно, противник имеет возможность произвести управляемые изменения в части шифртекста, совершенно точно зная, какие это вызовет изменения в соответствующем открытом тексте.

С практической точки зрения еще более важным является то, что зашифровывающее и расшифровывающее устройства должны работать строго согласованно, поскольку расшифрование не может быть успешным до тех пор, пока шифрующие последовательности для шифрования и расшифрования не засинхронизированы. Если какая-то цифра добавилась или потерялась в процессе передачи, получатель обнаружит лишь бессмысленные данные с того места, где сбилась синхронизация. Восстановление синхронизации обычно требует поиска возможных сдвигов между тактами работы устройств отправителя и получателя. Обычно синхронизация достигается вставкой в передаваемое сообщение специальных "маркеров"; в результате этого бит шифртекста, пропущенный в процессе передачи, приводит к неправильному расшифрованию лишь до тех пор, пока не будет принят один из маркеров. Другое решение - реинициализация состояний как шифратора так и дешифратора при некотором предварительном согласованном условии.

0.3.2 Самосинхронизирующиеся поточные шифры и скремблеры

Так называемые *самосинхронизирующиеся* или *асинхронные* поточные шифры, напротив, имеют способность продолжать правильное расшифрование в том случае, когда шифрпоследовательность, генерируемая принимающим шифратором (дешифратором), выпадает из синхронизации с гаммой шифратора передающего. Для таких поточных шифров функция, определяющая следующее состояние криптосистемы, берет в качестве входа что-то из шифртекста, сгенерированного до этого.

Наиболее распространенный режим самосинхронизирующихся поточных шифров - это *режим обратной связи от шифртекста* (например CFB-режим DES [278]):

$$\begin{aligned}s_{i+1} &= F(y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-N}) \\ z_i &= f(k, s_i).\end{aligned}$$

Состояние такого поточного шифра задается предыдущими N символами шифртекста. Криптографическая стойкость сосредоточена в выходной функции. Обратим внимание, что вход (символы шифртекста) и выход (гамма) функции f известны

криптоаналитику при атаке с известным открытым текстом. Самосинхронизирующийся поточный дешифратор обладает свойством, как свидетельствует его название, автоматически синхронизировать себя без знания тактовой частоты работы шифратора. После приема N правильных последовательных цифр из канала состояние дешифратора становится идентичным состоянию шифратора, то есть синхронизация установлена. Самосинхронизирующийся поточный шифр имеет свойство ограниченного распространения ошибок. Искаженная в канале цифра остается во внутреннем состоянии поточного дешифратора для N последовательных цифр открытого текста (пока продвигается через его внутреннее состояние). После приема N последовательных неискаженных цифр из канала поточный дешифратор опять способен расшифровывать правильно.

Скрэмблер также определяется как конечный автомат, который независимо от начального состояния преобразует периодическую входную последовательность в периодическую выходную последовательность с вообще говоря большим, но по крайней мере таким же периодом [344]. Скрэмблеры оказывают рандомизирующий эффект на передаваемые паттерны данных и поэтому могут сократить чувствительность систем синхронизации к специфическим периодическим структурам в данных [396]. Обычно скрэмблеры представляют собой линейные устройства, цель которых - способствовать синхронизации. Нелинейные зависящие от ключа скрэмблеры (самосинхронизирующиеся поточные шифры) обладают потенциалом сочетать засекречивание с легкостью синхронизации. Некоторые базовые результаты по исследованию конкретных схем такого рода изложены в [233].

Применение самосинхронизирующихся криптосистем в значительно большей степени характерно для военной криптографии, так что в открытой литературе имеется сравнительно немного работ по данному классу схем (см. Раздел. 8.6). Поэтому фактически вся данная книга сосредоточена на синхронных поточных шифрах. ♦

Глава 1

Подход теории информации

1.1 Эпохи в криптологии [241]

Весь период с античности до 1949 г. можно рассматривать как эру донаучной криптологии, поскольку с ней обращались почти исключительно как с искусством, а не как с наукой.

Один из первых известных в истории шифров - шифр Цезаря - можно описать как

$$y = x \oplus k$$

где x - это буква открытого текста ($A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$), k - секретный ключ, y - буква шифртекста, а \oplus здесь означает сложение по модулю 26 (так что $23 \oplus 3 = 0$, $23 \oplus 4 = 1$ и т.д.).

Фактически, почти две тысячи лет после Цезаря у криптоаналитиков было большое преимущество перед криптографами. Затем, в 1926 году Дж. С. Вернам, инженер из американской компании American Telephone & Telegraph, опубликовал примечательный шифр для использования с двоичным кодом Бодо [376]. *Шифр Вернама* подобен шифру Цезаря в том, что он описывается таким же равенством, но теперь x , y и k принимают значения в двоичном алфавите $\{0,1\}$, а \oplus означает сложение по модулю 2 ($0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$). Новая же идея, выдвинутая Вернамом, была в использовании ключа только один раз, то есть шифровать каждый бит открытого текста новым случайно выбранным битом ключа. Это вызывает необходимость в надежной передаче секретного ключа такой длины, какая понадобится для шифрования открытого текста, но это обеспечивает по-настоящему невскрываемый шифр, как мы увидим ниже. Вернам действительно полагал, что его шифр невскрывается и опасался, что он не будет таковым, если случайно берущиеся биты будут впоследствии использованы еще раз, но он не предложил никаких доказательств для этих фактов. Более того, он привел в [376] результаты "полевых испытаний", которые подтверждали невскрываемость его шифра, а это нечто такое, что никаким количеством "проверок" на самом деле подтвердить невозможно. Причина нашего обращения к периоду до 1949 года, то есть эпохи донаучной криптологии, в том, что криптологи оперировали тогда в основном интуицией и "верой", которые они не могли подкрепить доказательствами.

Публикация в 1949 году Клодом Шенноном статьи "Коммуникационная теория засекречивающих систем" [360] возвестила эру научной криптологии с секретным ключом. Шеннон, получивший образование как математик и как инженер-электрик, разработал теорию систем засекречивания почти столь же обстоятельную, как и теория коммуникаций, которую он опубликовал годом раньше [359]. Он и построил свою статью 1949 года на фундаменте работы 1948 года, породившей новую дисциплину - теорию информации. Шеннон не только доказал невскрываемость случайного шифра Вернама, но

также создал четкие границы для требуемого количества секретного ключа, который должен безопасно передаваться назначенному получателю для организации совершенного шифрования.

В силу причин объективного характера, работа Шеннона 1949 года не привела к такому же взрыву исследований в криптологии, какой вызвала статья 1948 года в теории информации. Настоящий взрыв произошел в связи с публикацией в 1976 году Уитфилдом Диффи и Мартином Хеллманом их работы "Новые направления в криптографии" [100]. Диффи и Хеллман впервые показали, что засекреченная связь возможна без какой-либо передачи секретного ключа между отправителем и получателем, породив таким образом бурную эпоху криптографии с открытым ключом, которая не ослабевая продолжается и поныне. Ральф Меркль, написавший свою статью одновременно с Диффи и Хеллманом, но отправивший ее в другой журнал, совершенно независимо сформулировал некоторые из базовых идей криптографии с открытым ключом. К несчастью, длительная задержка в публикации работы Меркля [263] часто препятствует признанию его соответствующих заслуг.

Но криптография с открытым ключом - это совсем другая тема, далее практически не затрагиваемая в данной книге, целиком посвященной симметричным шифрсистемам.

1.2 Шенноновская модель криптоанализа [339]

В своей этапной работе [360] Шеннон разработал базовый теоретико-информационный подход к системам засекречивания. В модели Шеннона подразумевается, что криптоаналитик обладает неограниченным временем и вычислительной мощностью. Он ограничен условиями атаки только по шифртексту, но, как указали Диффи и Хеллман [101], известный сегмент открытого текста может браться в расчет как добавочная избыточность, поскольку он улучшает априорную информацию криптоаналитика об открытом тексте. Апостериорное знание состоит из (апостериорных) вероятностей различных сообщений и ключей, которые могли произвести наблюдавшийся шифртекст. Криптоанализ в шенноновской модели определен как процесс нахождения сообщения (или конкретного ключа) при наличии только криптограммы и априорных вероятностей различных ключей и сообщений. Система засекречивания считается вскрытой, когда имеется "уникальное" решение для криптограммы: шифртексту соответствует одно открытое сообщение с вероятностью по существу единичной, в то время как все остальные вероятности практически нулевые. Обратим внимание, что из допущения о бесконечно мощном противнике следует, что идея стойкости в шенноновской модели не зависит от сложности метода зашифрования или расшифрования.

Пусть $X^n = X_1, X_2, \dots, X_n$ обозначает n -битное сообщение открытого текста, пусть $Y^n = Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ обозначает соответствующее n -битное сообщение шифртекста, и пусть K - это ключ, взятый в соответствии с распределением вероятностей P_K . Если $H(X^n)$ обозначает неопределенность относительно открытого текста и $H(X^n | Y^n)$ - условную неопределенность после наблюдения Y^n , тогда взаимная информация между X^n и Y^n



Клод Шеннон

$$I(X^n; Y^n) = H(X^n) - H(X^n | Y^n)$$

является базовой мерой засекречивания в шенноновской модели. Возможны три случая:

1. $I(X^n; Y^n) = 0$ для всех n ; тогда X^n и Y^n статистически независимы, и шифрсистема именуется *совершенно стойкой*. Криптоаналитик не может сделать ничего лучше, чем предполагать сообщение в соответствии с вероятностным распределением осмысленных сообщений. Другими словами, (апостериорное) вероятностное распределение дешифрованных сообщений $D(K, y^n)$ после наблюдения текста y^n с ключом K , выбранным в соответствии с P_K , является для всех y^n идентичным (априорному) вероятностному распределению над пространством всех сообщений. В совершенной криптосистеме выполняется базовое неравенство $H(K) \geq H(X^n)$. Таким образом, свежие ключи должны поставляться с постоянной скоростью. Знание фрагмента открытого текста совершенного шифра может дать субключ, использованный для зашифрования этого фрагмента, но вообще говоря не позволяет уточнить апостериорные вероятности оставшихся фрагментов сообщения. Одноразовый блокнот, обсуждаемый ниже, является совершенным шифром.

2. $0 < I(X^n; Y^n) < H(X^n)$ для больших n ; тогда остается остаточная неопределенность относительно открытого текста, которая не может быть сведена к нулю (даже при неограниченных вычислительных ресурсах). Из этого условия следует, что ключевая неопределенность $H(K | Y^n) > 0$. Шифрсистемы с конечным ключом, для которых $H(K | Y^n) > 0$ при $n \rightarrow \infty$, называются *идеально стойкими*. Криптоаналитик может улучшить вероятностное распределение возможных сообщений X^n , но он не сможет найти уникальное решение для X^n . Это не обязательно означает, что система стойкая; остаточная неопределенность может влиять лишь на небольшой фрагмент открытого текста. Для достижения идеальной стойкости обычно требуется совершенное компрессирование данных, либо рандомизация открытого текста [169]. Заметим, что идеальная стойкость зависит от полной конфиденциальности открытого текста.

3. $I(X^n; Y^n) \approx H(X^n)$ для больших n ; после определенного количества бит шифртекста остается только одно решение для соответствующего открытого текста (и примененного ключа). Это типичный случай для реальных шифрсистем.

В качестве показателя теоретической стойкости шифрсистем Шеннон ввел *расстояние единственности* $n_u = \min \{n : H(K | Y^n) \approx 0\}$, представляющее собой требуемое количество шифртекста, по которому криптоаналитик в принципе может найти решение для ключа. Как только он узнает ключ, он знает также и сообщение. Для типичных криптосистем $n_u = H(K) / (1 - h)$, где h обозначает уровень информации на бит открытого текста, а $(1 - h)$ - избыточность на бит открытого текста. Следует отметить, что как для совершенной так и для идеальной криптосистем $n_u = \infty$, и поэтому появилась тенденция называть совершенную и идеальную шифрсистемы *безусловно стойкими* [96], [101]. По этому поводу Рюппель отмечает, что для совершенных криптосистем это полезное определение, но идеальная криптосистема может оказаться катастрофически нестойкой при атаке с известным открытым текстом. Поэтому, по его убеждению, представляется неприемлемым называть идеальную криптосистему безусловно стойкой.

Одной из наиболее знаменитых шифрсистем, несомненно, является одноразовый гамм-блокнот (иногда именуемый шифром Вернама) [360][376]. Он получил свое название из-за требования, чтобы каждая часть ключа использовалась только один раз.

Одноразовый блокнот:

Вход: сообщение: последовательность бит $x_i, i = 1, 2, \dots$

ключ: последовательность независимых и равномерно распределенных бит $k_i, i = 1, 2, \dots$

Выход: шифртекст $y_i = x_i \oplus k_i, i = 1, 2, \dots$, состоящий из побитового сложения операцией XOR потока сообщения и шифрующей последовательности (ключа).

Одноразовый блокнот - это поточный шифр в том смысле, что каждый бит сообщения преобразуется независимо с помощью изменяющегося во времени преобразования. Здесь нет генератора шифрующей гаммы, поскольку ключ непосредственно прибавляется к сообщению. Одноразовый блокнот является совершенной криптосистемой, $I(X^n; Y^n) = 0$. Знание части открытого текста не нарушает условия статистической независимости для остальных фрагментов. Количество бит ключа должно быть не меньше, чем количество бит сообщения. Проблемы генерации ключей, их распределения и управления огромны, поэтому эта шифрсистема используется только для нетипичных приложений, таких, например, как установка "горячей линии" с очень высокими требованиями к конфиденциальности.

Эквивалентно расстоянию единственности для шифрсистемы, можно определить *расстояние единственности для генератора гаммы* как количество символов гаммы, которое необходимо увидеть при атаке с открытым текстом для того, чтобы ключ можно было уникально определить. При атаке с известным открытым текстом нет неопределенности относительно открытого текста, $h=0$, и следовательно $n_{G,u} \approx H(K)$.

1.3 Локальная рандомизация [339]

Поскольку расстояние единственности генератора гаммы с конечным ключом составляет примерно $n_{G,u} \approx H(K)$ бит, то не остается никакой стойкости в шенноновском смысле, как только противник получает в свое распоряжение более $n_{G,u}$ бит гаммы. Интересная подпроблема возникает в том случае, когда модель Шеннона модифицируется таким образом, что противник получает прямой доступ к шифрующей гамме, но только к ограниченному количеству e ее бит (не обязательно последовательных) по своему выбору. Проблема доказательства стойкости при таком дополнительном ограничении называется проблемой локальной рандомизации [246]. Отметим, что e должно быть меньше чем $H(K)$. Шнорр [348] мотивировал проблему локальной рандомизации, представив следующую конструкцию.

Псевдослучайный генератор Шнора $G = \{G_n\}$:

Вход: ключ (зерно) k - это случайная функция $f: I_m \rightarrow I_m$; размер описания $m2^m$.

1. Пусть $y_i^0 = i$ для $i = 0, 1, \dots, 2^{2^m} - 1$.

2. Для $j = 0, 1, 2$ вычисляется

$$y_i^{j+1} = (R(y_i^j), L(y_i^j) \oplus f(R(y_i^j)))$$

(L и R означают левую и правую половины аргумента)

Выход $G_n(k)$: последовательность из $y_i^3, i = 0, 1, \dots, 2^{2^m} - 1$.

Отметим, что ключ k имеет размер $n = m2^m$ (дескрипция функции), и что $G_n(k)$ имеет длину $2m2^{2^m}$. Таким образом, данный генератор растягивает зерно длины n приблизительно в n^2 псевдослучайных бит. Генератор Шнора - это приложение генератора подстановочных функций, разработанного Луби и Раковым [224]. Этот генератор подстановок состоит из M -циклового DES-подобной структуры, где в каждом цикле i применяется отличающаяся (псевдо-) случайная функция f_i . Авторами показано, что трех циклов достаточно для обеспечения совершенства генератора результирующей подстановки (то есть вычислительной недостижимости за полиномиальное время) при условии вычислительной недостижимости функций f_i .

Шнорр использовал следующую асимптотическую идею о стойкости, заимствованную из теории сложности. Генератор $G = \{G_n\}$ доказуемо локально рандомизирован, если он проходит все (даже неограниченные по времени) статистические тесты $T = \{T_n\}$, которые зависят самое большее от $e(n)$ бит $G_n(k)$. Шнорр провозгласил, что генератор доказуемо локально рандомизирован с $e(m) = 2^{m/3 - (\log m)^2}$. В [337] Рюппелем было показано, что это не так. Фактически, им был представлен статистический тест, который эффективно выделяет генератор Шнора всего по $e(m) = 4m$ битам $G_n(k)$. Этот результат справедлив даже при произвольном количестве внутренних циклов (вместо предложенных 3), либо при четном количестве внутренних циклов, когда зерно удваивается и по выбору используются две функции f и g . Слабость конструкции Шнора независимо обнаружили также Ониши [290] и Чжень, Мацумото, Имаи [403], которые изучали конструкции псевдослучайных подстановок, предложенных Луби и Раковым [224]. Ониши обнаружил, что при четном количестве внутренних циклов генератор G может быть выделен при любой палиндромной расстановке функций.

Если же генератор Шнора подвергнуть теоретико-системному подходу, то результаты оказываются катастрофическими. Рюппелем построена атака с линейным временем, которая восстанавливает ключ по фрагменту из $m2^m + O(m)$ бит гаммы [337]. Следует отметить, что этот фрагмент лишь немного больше, чем расстояние единственности для G_n . Данная атака достигает предела производительности для любой атаки, поскольку простое считывание ключа из памяти требует линейного времени и линейного пространства в размере ключа. Этот результат наглядно показывает, что если допущения в теоретической модели стойкости не совпадают с практическими приложениями, вся стойкость может рухнуть.

1.4 Практическая стойкость [241]

Шеннон рассматривал две очень разные концепции стойкости криптографических систем. Сначала он рассмотрел вопрос о *теоретической стойкости*, под которой он подразумевал "насколько система является стойкой к криптоанализу в условиях, когда противник обладает неограниченным временем и человеческими ресурсами для анализа перехваченных криптограмм" [360]. Концепция теоретической стойкости Шеннона проливает много света на криптографию, но приводит к пессимистическим выводам о том, что объем секретного ключа, необходимый для построения теоретически стойкого шифра, будет непрактично большим для большинства приложений. Поэтому Шеннон рассмотрел также вопрос о *практической стойкости*, под которой он подразумевал следующее: "Является ли система стойкой к криптоанализу в условиях, когда противник обладает определенным ограниченным количеством времени и вычислительной мощности для анализа перехваченных криптограмм".

Выше отмечалась возможность для шифрсистемы с ключом ограниченной длины иметь бесконечное расстояние единственности и таким образом быть теоретически "невскрываемой". Шеннон назвал такие шифры *идеальными*, но отметил что их создание вызывает по существу непреодолимые практические проблемы [360]. Более практичные шифры должны опираться в своей стойкости не на теоретическую невозможность их вскрытия, а на практические трудности такого вскрытия.

Шеннон постулировал, что каждый шифр имеет *рабочую характеристику* $W(n)$, которая может быть определена как среднее количество работы (измеряемое в некоторых удобных единицах, типа часов работы суперкомпьютера Cray), требуемой для нахождения ключа при наличии n цифр шифртекста. Шеннон имел здесь в виду атаку только по шифртексту, но подобное определение можно дать для любой формы криптоаналитической атаки. Наибольший интерес представляет предел $W(n)$ когда n стремится к бесконечности, что обозначают $W(\infty)$ и что можно рассматривать как среднюю работу, необходимую для "вскрытия шифра". Неявно подразумевается, что при определении $W(n)$ имеется в виду наилучший из возможных криптоаналитических алгоритмов для вскрытия шифра. Таким образом, при вычислении или нахождении нижней границы $W(n)$ для данного шифра мы встаем перед чрезвычайно сложной задачей отыскания наилучшего способа вскрытия этого шифра, или по крайней мере в доказательстве нижних границ для работы, необходимой при наилучшей из атак. На сегодняшний день не существует известных практичных шифров (по крайней мере, исследователям, не входящим в секретное криптографическое сообщество) для которых была известна хотя бы интересная нижняя граница для $W(n)$. Такие реальные шифры обычно рассматривают в терминах так называемой "*исторической рабочей характеристики*" $W_h(n)$, которую можно определить как среднее количество работы для нахождения ключа по n цифрам шифртекста, когда используется "наилучшая из известных атак". Когда пишут о "шифре, для вскрытия которого требуются миллионы лет", то можно быть уверенным, что речь идет о $W_h(\infty)$. Когда вычисления проводит криптограф, полностью знакомый с техникой криптоанализа, $W_h(\infty)$ может быть достаточно надежной мерой реальной стойкости шифра, особенно если криптограф включает здравые "допущения на ошибку" в свои вычисления. Но всегда существует опасность что действительная $W(\infty) \ll W_h(\infty)$, поскольку вражеский криптоаналитик может изобрести новый и совершенно неожиданный способ атаки которая катастрофически понизит $W_h(\infty)$. История криптографии переполнена такими случаями! ♦

Глава 2

Строительные блоки для создания криптосхем

2.1 Конгруэнтные генераторы

2.1.1 Генераторы псевдослучайных чисел [346]

Некоторые из самых ранних реальных шифрсистем на самом деле изначально разрабатывались как генераторы псевдослучайных чисел, а не как генераторы шифрующей последовательности. Хотя эти задачи тесно друг с другом связаны, но в большинстве случаев к генерации псевдослучайных чисел на основе данной техники обращаются в связи с проблемами статистического тестирования. Так что криптографическая ценность подобных последовательностей часто оказывается весьма сомнительной.

Линейный конгруэнтный генератор - это генератор псевдослучайной последовательности вида

$$X_n = (a X_{n-1} + b) \bmod m,$$

где X_n - n -ое число в последовательности, а X_{n-1} - предыдущее число последовательности. Параметры a , b и m - константы: a - коэффициент, b - приращение, а m - модуль. Ключом (или зерном) является начальное значение X_0 .

Такой генератор имеет период, не превышающий m . Если параметры a , b и m подобраны надлежащим образом, то генератор будет *генератором максимального периода* (иногда говорят "максимальной длины") с периодом $m - 1$. Для этого, например, параметр b должен быть взаимно прост с m . Детальную информацию о подборе констант для обеспечения максимального периода можно найти в [197] [214]. Еще одна хорошая статья по линейным конгруэнтным генераторам и их теории - [356].

В Таблице, взятой из [307], дается список хороших констант для линейных конгруэнтных генераторов. Все они порождают генераторы максимального периода и, что еще более важно, проходят спектральные тесты на случайность для размерностей 2, 3, 4, 5 и 6 [83][197]. Их подбор сделан на основе принципа максимального произведения, не вызывающего переполнение определенной длины слова. Главные преимущества линейных конгруэнтных генераторов в том, что они быстро работают и требуют мало операций на бит последовательности. Самый большой недостаток - предсказуемость таких последовательностей.

Глава 2. Строительные блоки для создания криптосхем

| Таблица | | | |
|--|----------|----------|----------|
| Константы для линейных конгруэнтных генераторов | | | |
| Переполнение при : | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>m</i> |
| 2^{20} | 106 | 1283 | 6075 |
| 2^{21} | 211 | 1663 | 7875 |
| 2^{22} | 421 | 1663 | 7875 |
| 2^{23} | 430 | 2531 | 11979 |
| | 936 | 1399 | 6655 |
| | 1366 | 1283 | 6075 |
| 2^{24} | 171 | 11213 | 53125 |
| | 859 | 2531 | 11979 |
| | 419 | 6173 | 29282 |
| | 967 | 3041 | 14406 |
| 2^{25} | 141 | 28411 | 134456 |
| | 625 | 6571 | 31104 |
| | 1541 | 2957 | 14000 |
| | 1741 | 2731 | 12960 |
| | 1291 | 4621 | 21870 |
| | 205 | 29573 | 139968 |
| 2^{26} | 421 | 17117 | 81000 |
| | 1255 | 6173 | 29282 |
| | 281 | 28411 | 134456 |
| 2^{27} | 1093 | 18257 | 86436 |
| | 421 | 54773 | 259200 |
| | 1021 | 24631 | 116640 |
| | 1021 | 25673 | 121500 |
| 2^{28} | 1277 | 24749 | 117128 |
| | 741 | 66037 | 312500 |
| | 2041 | 25673 | 121500 |
| 2^{29} | 2311 | 25367 | 120050 |
| | 1807 | 45289 | 214326 |
| | 1597 | 51749 | 244944 |
| | 1861 | 49297 | 233280 |
| | 2661 | 36979 | 175000 |
| | 4081 | 25673 | 121500 |
| | 3661 | 30809 | 145800 |
| 2^{30} | 3877 | 29573 | 139968 |
| | 3613 | 45289 | 214326 |
| | 1366 | 150889 | 714025 |
| 2^{31} | 8121 | 28411 | 134456 |
| | 4561 | 51349 | 243000 |
| | 7141 | 54773 | 259200 |
| 2^{32} | 9301 | 49297 | 233280 |
| | 4096 | 150889 | 714025 |
| 2^{33} | 2416 | 374441 | 1771875 |
| 2^{34} | 17221 | 107839 | 510300 |
| | 36261 | 66037 | 312500 |
| 2^{35} | 84589 | 45989 | 217728 |

Для криптографических целей необходимо, чтобы генерируемые числа были непредсказуемы; если же модуль m известен, то параметры a и b несложно подобрать по двум соседним числам такой последовательности. Дональд Кнут рассмотрел вариацию генератора, когда модуль m является степенью двойки [198], а выходными битами являются только старшие биты чисел последовательности. Результат дал очень интересное сходство с результатами одной работы Даи [84], посвященной генерации подобных последовательностей при помощи регистров сдвига с линейной обратной связью.



Джим Ридз

Приведем некоторые результаты по криптоанализу конгруэнтных генераторов [322] (подробнее см. Раздел 2.2). В 1960-е годы Марсалья [229] одним из первых поставил под вопрос заявления о "достаточно случайном поведении" последовательностей, порождаемых линейными конгруэнтными генераторами. Впоследствии Джим Ридз [313][314][315], Кнут [198], Плюмстед [303], Хастад и Шамир [172], Фризе, Каннан и Лагарьяс [121] серьезно дискредитировали криптографическую ценность последовательностей, генерируемых с использованием мультипликативного конгруэнтного генератора. В частности, Джоан Бойяр (до замужества Плюмстед) вскрыла квадратичные генераторы вида

$$X_n = (a X_{n-1}^2 + b X_{n-1} + c) \bmod m$$

и кубические генераторы вида

$$X_n = (a X_{n-1}^3 + b X_{n-1}^2 + c X_{n-1} + d) \bmod m$$

Статья Фризе, Хастада, Каннана, Лагарьяса и Шамира [120] а также работа Бойяр [41] подорвали доверие к технике использования фрагментов целых чисел, вычисляемых на основе линейных конгруэнтных соотношений. Вскрытию конгруэнтных генераторов посвящены также работы [204], [205], [369]. Полученные результаты дают убедительные подтверждения тому, что конгруэнтные генераторы не стоит использовать в криптографических целях.

Выпадающей из общего ряда можно расценить статью Лагарьяса и Ридза [212], в которой делается вывод, что некоторая криптографическая стойкость может быть достигнута при переходе к более сложным рекуррентам, использующим полиномиальные выражения. Кравчик [204] развил результаты этой работы и статьи Плюмстед для очень общего анализа проблемы предсказания последовательностей, генерируемых с использованием различных форм полиномиальных рекуррентных соотношений.

2.1.2 Комбинирование ЛКГ и программная реализация

Следует отметить, что линейные конгруэнтные генераторы продолжают широко применяться для некриптографических приложений, таких, как симуляция случайного поведения. Такие последовательности эффективно генерируются и демонстрируют хорошие статистические свойства при испытании большинством эмпирических тестов.

Несколько работ затрагивают предмет комбинирования линейных конгруэнтных генераторов [389][213]. Эти результаты нельзя считать криптографически важными, но комбинации генераторов дают более длинные периоды и лучше проходят тесты на случайность.

В "Прикладной криптографии" Брюса Шнайера [346] для генерации на 32-битном компьютере длинной псевдослучайной последовательности (с периодом $(2^{31}-85)(2^{31}-249)$) рекомендуется использовать следующую программу:

```
static long s1 = 1 ; /* "long" должна быть длиной 32 бита */
static long s2 = 1 ;
#define MODMULT(a,b,c,m,s) q = s/a; s = b*(s-a*q) - c*q; if (s<0) s+=m ;
/* MODMULT(a,b,c,m,s) вычисляет s*b mod m, при условии что m=a*b+c и 0<=c<=m */

/* combinedLCG возвращает псевдослучайное действит.значение в пределах (0,1).
* Комбинируются линейн. конгруэнтные генераторы с периодами 231-85 и 231-249,
* результирующий период равен произведению этих простых чисел. */

double combinedLCG (void)
{
    long q ;
    long z ;

    MODMULT ( 53668, 40014, 12211, 2147483563L, s1 )
    MODMULT ( 52774, 40692, 3791, 2147483399L, s2 )
    z = s1 - s2 ;
    if ( z < 1 )
        z += 2147483562 ;
    return z * 4.656613e-10 ;
}

/*перед исполъз. combinedLCG следует вызывать инициализацию initLCG,
* для s1 нужно начальное значение между 1 и 2147483562,
* для s2 нужно начальное значение между 1 и 2147483398 */

void initLCG ( long Inits1, long Inits2 )
{
    s1 = Inits1 ;
    s2 = Inits2 ;
}
```

Такой генератор работает, пока компьютер может представлять все целые от $-2^{31}+85$ до $2^{31}-85$. Период генератора равен примерно 10^{18} .

Если же компьютер 16-битный, то рекомендуется использовать другую программу:

```
static int s1 = 1 ; /* "int" должна быть длиной 16 бит */
static int s2 = 1 ;
static int s3 = 1 ;
#define MODMULT(a,b,c,m,s) q = s/a; s = b*(s-a*q) - c*q; if (s<0) s+=m ;
/* MODMULT(a,b,c,m,s) вычисляет s*b mod m,
при условии, что m=a*b+c и 0 <= c <= m */

/* combinedLCG возвращает псевдослучайное действит. значение в пределах (0,1)
* Комбинируются линейные конгруэнтные генераторы с периодами 215-405, 215-1041
* и 215-1111, результирующий период равен произведению этих простых чисел. */

double combinedLCG ( void )
{
    int q ;
    int z ;
```

```

MODMULT ( 206, 157, 21, 32363, s1 )
MODMULT ( 217, 146, 45, 31727, s2 )
MODMULT ( 222, 142, 133, 31657, s3 )
z = s1 - s2 ;
if ( z > 706 )
    z -= 32362 ;
z += s3 ;
if ( z < 1 )
    z += 32362 ;
return z * 3.0899e-5 ;
}

/* перед использованием combinedLCG следует вызывать инициализацию initLCG ,
* для s1 нужно начальное значение между 1 и 32362,
* для s2 нужно начальное значение между 1 и 31726, для s3 - между 1 и 31656
*/

void initLCG ( long InitS1, long InitS2 )
{
    s1 = InitS1 ;
    s2 = InitS2 ;
}

```

Такой генератор работает, пока компьютер может представлять все целые от -32363 до 32363. Период генератора равен примерно 1.6×10^{13} .

Для двух приведенных генераторов значение параметра b равно 0.

2.2 Криптоанализ конгруэнтных генераторов [45]

Конгруэнтный генератор - это метод генерации последовательности s_0, s_1, \dots , где s_i вычисляется на основе рекуррентного соотношения

$$s_i \equiv \sum_{j=1}^k \alpha_j \phi_j(s_0, \dots, s_{i-1}) \pmod{m}.$$

Проведенные криптоаналитические исследования вскрыли серьезные слабости конгруэнтных генераторов с точки зрения их использования в качестве стойких генераторов псевдослучайных чисел. В частности, разработаны методы криптоанализа, при которых аналитику известны функции ϕ_j , а коэффициенты α_j и модуль m неизвестны. Эти результаты будут представлены в Разделе 2.2.1.

Простейший конгруэнтный генератор - *линейный конгруэнтный генератор* - имеет вид

$$s_i \equiv a s_{i-1} + b \pmod{m}.$$

Усеченный конгруэнтный генератор порождает последовательность x_0, x_1, \dots , где x_i - значащие t бит из s_i - членов некоторой последовательности, порожденной конгруэнтным генератором. Альтернативным вариантом задания x_i может быть некоторое "окно" из t бит, накладываемое на битовое представление s_i . Криптоаналитические исследования

показали, что усеченные линейные конгруэнтные генераторы нестойки даже в том случае, когда секретными являются все параметры a , b и m . Эти результаты представлены в Разделе 2.2.2.

2.2.1 Вскрытие конгруэнтных генераторов (неусеченных)

Оценим стойкость конгруэнтных генераторов относительно атак с известным открытым текстом. В модели будет подразумеваться, что криптоаналитику известны функции ϕ_j , но он не знает коэффициенты α_j и модуль m . Для анализа имеется подпоследовательность s_1, \dots, s_{i-1} , и надо "угадать" s_i . После того, как делается предположение, криптоаналитику сообщается верное значение. Будем говорить, что такая атака вскрывает шифрсистему, если на продолжительность атаки и на количество ошибок криптоаналитика имеется ограничение, полиномиальное от $\log m$ и k .



Джоан Бойар
(Плюмстед)

Криптоанализ конгруэнтных генераторов был начат Джоан Бойар [303], когда она обнаружила как можно вскрывать линейные конгруэнтные генераторы. (До этого некоторый результат был получен Дональдом Кнудом [198], но его алгоритм зависел экспоненциально от $\log m$.) Бойар показала также, каким образом вскрываются квадратичные и кубические конгруэнтные генераторы. Впоследствии Лагарьяс и Ридз [212] развили результат Бойар, показав, что тот же самый алгоритм может вскрывать любой конгруэнтный генератор, если $k = 1$, а ϕ - полином, зависящий только от s_{i-1} . Наконец, Кравчик [204] показал, как вскрывать любой конгруэнтный генератор, у которого функции ϕ_j вычисляются над целыми числами за время, полиномиальное от $\log m$.

Алгоритм Кравчика - это лишь небольшая модификация алгоритма Бойар, и здесь он представлен благодаря своей простоте. Основная идея, введенная Кравчиком, - не пытаться отыскивать коэффициенты α_j .

Пусть

$$B_i = \begin{pmatrix} \phi_1(s_0, \dots, s_{i-1}) \\ \phi_2(s_0, \dots, s_{i-1}) \\ \vdots \\ \phi_k(s_0, \dots, s_{i-1}) \end{pmatrix}.$$

Первая идея, которую использовали как Бойар так и Кравчик, - что для всех, кроме, возможно, k значений из i , существуют целые γ_j , $j = 1, \dots, i$, такие, что $\gamma_i \neq 0$ и $\gamma_i B_i = \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j B_j$. Тогда $\gamma_i s_i \equiv \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j s_j \pmod{m}$. Таким образом, либо s_i может быть предсказано (в случае, если $\gamma_i s_i \equiv \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j s_j$), либо может быть вычислено кратное m после того, как дано истинное значение s_i . Размер такого кратного m будет полиномом от $\log m$ и k .

Как только мы узнаем кратное m , мы проделываем следующее для каждого i . Пусть \hat{m} будет текущим известным значением кратного m .

1. По заданному s_{i-1} пытаемся выразить B_i как $B_i \equiv \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j B_j \pmod{\hat{m}}$.
2. Если шаг (1) успешен, вычисляем p как $p \equiv \sum_{j=0}^{i-1} \gamma_j s_j \pmod{\hat{m}}$ и если $p \neq s_i$, то заменяем \hat{m} на $\text{НОД}(\hat{m}, p - s_i)$.

Кравчик показал, что если $p \neq s_i$, то $\hat{m} \neq \text{НОД}(\hat{m}, p - s_i)$. Он показал также, что при фиксированном \hat{m} шаг (1) не удастся самое большее $k \log \hat{m} + 1$ раз. Из этих результатов следует, что представленный алгоритм вскрывает подобные конгруэнтные генераторы за полиномиальное время.

2.2.2 Усеченные линейные конгруэнтные генераторы с известными параметрами

В данном разделе будет рассмотрена стойкость усеченных линейных конгруэнтных генераторов в условиях, когда криптоаналитику известны параметры a , b и m . Криптографическую слабость этих генераторов продемонстрировали Фризе, Хастад, Каннан, Лагарьяс и Шамир в работах [120] [121] [172]. Эти атаки разработаны для линейных конгруэнтных генераторов, в которых некоторая постоянная доля бит от каждого s_j используется для формирования псевдослучайной последовательности. Все такие атаки построены на технике редуцирования базиса решетки. Каждая из описанных ниже атак вскрывает генераторы с определенным видом усечения, и неизвестно, будут ли они эффективны применительно к большинству усеченных линейных конгруэнтных генераторов.

Пусть s_i - последовательность, генерируемая соотношением

$$s_i \equiv a s_{i-1} + b \pmod{m}.$$

Пусть $n = \log_2 m$. Для $0 < \beta < 1$ такого, что βn - целое число, можно записать

$$s_i = x_i 2^{\beta n} + y_i,$$

так что y_i - младшие βn бит в s_i , а x_i - самые старшие $(1 - \beta)n$ бит s_i .

Для оценки стойкости таких последовательностей будем подразумевать, что криптоаналитику известны x_1, \dots, x_{i-1} , и он хочет предсказать x_i . До конца данного раздела будет предполагаться, что $b = 0$, так как если $b \neq 0$, то можно изучать последовательность $\hat{x} = x_i - x_{i-1}$. Эта последовательность - суть усечение последовательности $\hat{s} = s_i - s_{i-1}$, генерируемой соотношением $\hat{s}_i \equiv a \hat{s}_{i-1} \pmod{m}$. Если мы можем предсказывать последовательность \hat{x}_i , то мы также можем предсказывать и последовательность x_i .

Пусть L обозначает решетку, натянутую на вектор $(m, 0, \dots, 0)$ и на $k - 1$ векторов вида

$$(a^{i-1}, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0), \text{ для } i = 2, \dots, k,$$

где -1 находится на i -й координате. Все векторы $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ из L удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^k w_i s_i \equiv 0 \pmod{m}.$$

Криптоаналитическая атака состоит из двух шагов.

- (1). Сначала отыскивают редуцированный базис для L из векторов $\mathbf{w}^j, j = 1, \dots, k$. Мы имеем

$$\sum_{i=1}^k w_i^j s_i = \sum_{i=1}^k w_i^j x_i 2^{\beta n} + \sum_{i=1}^k w_i^j y_i.$$

- (2). Если

$$\left| \sum_{i=1}^k w_i^j y_i \right| < \frac{m}{2},$$

для $j = 1, \dots, k$, и поскольку мы знаем, что каждое равенство из (1) - это $0 \pmod{m}$, а x_i нам известно, то получаем k независимых уравнений над целыми числами относительно $s_i, i = 1, \dots, k$.

Если векторы в редуцированном базисе удовлетворяют соотношению из (2), то данная атака будет успешной.

Теорема [120]. Пусть m - свободное от квадратов число, $\varepsilon > 0$, и k - заданное целое. Существуют константы c_k и $C(\varepsilon, k)$ такие, что если $m > C(\varepsilon, k)$ и если $(1-\beta)n > n(\frac{1}{k} + \varepsilon) + c_k$, то редуцированный базис, найденный алгоритмом Ловача, будет удовлетворять соотношению из (2) для по крайней мере $1 - O(m^{-\varepsilon/2})$ возможных коэффициентов a .

Константы в теореме: $c_k = O(k^2)$ и $C(\varepsilon, k) = e^{2k^{d_0 \varepsilon^{-1}}}$ для некоторой постоянной d_0 . Фризе и др. также получили аналогичный результат для m , почти свободных от квадратов, и доказали приведенную выше Теорему для $k=3$ и любого m .

Описанная атака будет также эффективна в отношении тех усеченных линейных конгруэнтных генераторов, в которых для формирования псевдослучайной последовательности используется некоторый блок бит, отличающийся от набора самых старших бит. Однако, в этом случае алгоритм не столь эффективен и требует асимптотически в два раза больше бит для вскрытия системы.

2.2.3 Усеченные линейные конгруэнтные генераторы с неизвестными параметрами

В данном разделе подразумевается, что криптоаналитику неизвестны параметры a , b и m . Бойар показала в [41], что если усечено только несколько бит ($O(\log \log m)$), то ее атака по-прежнему срабатывает. Затем Жак Стерн [369] построил метод, развивающий подход Фризе и др. (Раздел 2.2.2), который вскрывает усеченные линейные конгруэнтные генераторы в условиях, когда отсекается постоянная доля бит.

Сначала рассмотрим алгоритм Стерна при известном m . Пусть \mathbf{v}_i обозначает вектор $(x_{i+1} - x_i, x_{i+2} - x_{i+1}, x_{i+3} - x_{i+2})$. В части 1 данного алгоритма для отыскания коротких целочисленных соотношений вида

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i = 0$$

используется алгоритм, описанный в работе [173].

Пусть \mathbf{w}_i обозначает вектор $(s_{i+1} - s_i, s_{i+2} - s_{i+1}, s_{i+3} - s_{i+2})$. Тогда пусть

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{w}_i.$$

Стерн показал, что если k равно по крайней мере $\sqrt{6(1-\beta) \log m}$, то, для большинства a , \mathbf{u} будет нулевым вектором. Если \mathbf{u} - нулевой вектор, то часть 1 успешна.

Если часть 1 успешна, то криптосистема оказывается нестойкой к атаке с известным открытым текстом. Предположим, криптоаналитику известны значения x_0, \dots, x_{i-1} , а также ему даны h самых младших бит x_i . На основе этой информации от него требуется предсказать следующий бит x_i . Стерном показано, что если часть 1 была успешна, то в $(1-\beta)n$ битах x_i ожидаемое количество ошибок составляет всего $\sqrt{6(1-\beta) \log \frac{m}{2}}$.

Теперь рассмотрим случай, когда криптоаналитику неизвестны a или m . Стерн показал, что если часть 1 была успешной, то многочлен $P(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i z^i$ удовлетворяет соотношению $P(a) \equiv 0 \pmod{m}$. Стерн выдвинул предположение, что, многократно повторяя часть 1, можно было бы получать много таких полиномов и использовать их для определения m и a .

2.3 Регистры сдвига

Подавляющее большинство предложенных до настоящего времени генераторов поточного шифрования так или иначе основано на использовании регистров сдвига, а более точно, на РСЛОС - *регистрах сдвига с линейной обратной связью* [20]. Этому имеются две главных причины: последовательности, которые генерируют РСЛОС, обладают рядом привлекательных статистических свойств, а их поведение легко анализируется с использованием алгебраической техники. Поточные шифры, построенные

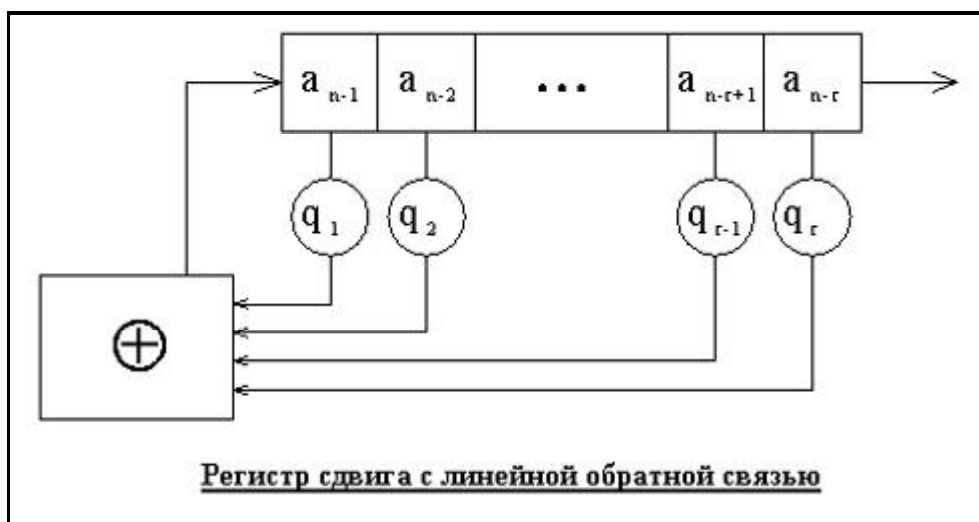
на регистрах сдвига, - это основа всех военных криптографических систем с момента появления радиоэлектронной элементной базы.

2.3.1 Алгебраические свойства регистров сдвига с линейной обратной связью

Регистр сдвига с обратной связью состоит из двух частей: регистра сдвига и функции обратной связи. По сути дела, регистр сдвига - это последовательность битовых ячеек, поэтому длину регистра выражают в битах: если регистр состоит из r ячеек, то говорят, что это r -битовый регистр сдвига. Каждый раз, когда должен быть сгенерирован новый бит, все биты регистра сдвигаются на позицию вправо (к примеру). Новый самый левый бит вычисляется как функция от остальных бит регистра, конкретный вид функции зависит от используемой обратной связи. Выходом регистра сдвига в каждом такте является 1 бит, часто это самый младший бит регистра. *Период* регистра сдвига - это длина выходной последовательности до того момента, как она начнет повторяться.

Простейшим типом регистров сдвига является *регистр сдвига с линейной обратной связью* или РСЛОС (см. рисунок). Двоичные псевдослучайные периодические последовательности, генерируемые с использованием регистров сдвига с линейной обратной связью (как правило, аппаратным способом), именуются РСЛОС-последовательностями или *линейными рекуррентными последовательностями*.

От определенных ячеек регистра делаются отводы, или *точки съема*, содержимое этих ячеек складывается по модулю 2, а сумма возвращается в первую ячейку регистра сдвига. (На рисунке $q_i \in \{0,1\}$ обозначают наличие или отсутствие точки съема у данной ячейки. Символ \oplus обозначает сложение по mod 2.)



Регистры сдвига с линейной обратной связью весьма глубоко изучены в электронной технике и теории кодирования [34], они очень хорошо подходят для высокоскоростной аппаратной реализации, легко моделируются на программном уровне.

Анализу РСЛОС-последовательностей посвящена практически вся Глава 3, здесь же приведем основные алгебраические свойства регистров сдвига с линейной обратной связью [196].

1. В РСЛОС длины r отводы ячеек q_1, q_2, \dots, q_r соответствуют *полиному обратной связи*

$$q(X) = q_r X^r + q_{r-1} X^{r-1} + \dots + q_1 X + 1$$

с коэффициентами q_i из $\mathbb{Z}/(2)$. Период и многие другие свойства РСЛОС-последовательности могут быть выражены в терминах теории Галуа применительно к этому многочлену.

2. Положим, что $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - периодическая последовательность бит, полученная от РСЛОС длины r с полиномом обратной связи $q(X)$. Если $q(X)$ неприводим, а $\gamma \in GF(2^r)$ - корень $q(X)$, то для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$a_i = Tr(A\gamma^i)$$

для некоторого $A \in GF(2^r)$ (соответствующего выбору начального заполнения регистра сдвига). Здесь $Tr : GF(2^r) \rightarrow GF(2)$ обозначает функцию следа.

3. Всякая бесконечная последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ может быть идентифицирована с помощью ее производящей функции $A(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, являющейся элементом кольца $\mathbb{Z}/(2)[[X]]$ формальных степенных рядов с целочисленными коэффициентами по mod 2. Известно ([163]), что последовательность \mathbf{a} в конечном счете периодична тогда и только тогда, когда ее производящая функция равна частному от деления двух полиномов

$$A(X) = r(X)/q(X) \in \mathbb{Z}/(2)[[X]],$$

где знаменатель $q(X)$ - это полином обратной связи РСЛОС, порождающий периодическую часть последовательности \mathbf{a} . Последовательность \mathbf{a} строго периодична \Leftrightarrow когда $\deg(r) < \deg(q)$.

4. Размер наименьшего РСЛОС, порождающего заданную периодическую последовательность \mathbf{a} называется *линейной сложностью* или *эквивалентным линейным размахом* \mathbf{a} (или $\text{span}(\mathbf{a})$); этот параметр является важной мерой криптографической стойкости последовательности (подробно см. Раздел 3.2). Такой регистр сдвига (минимального размера) может быть найден эффективным способом с помощью *алгоритма Берлекампа-Мэсси*, который можно интерпретировать как разложение в непрерывную дробь частного $r(X)/q(X)$ над кольцом $\mathbb{Z}/(2)[[X]]$ формальных степенных рядов. Этот алгоритм оптимален в двух смыслах: (а) он определяет наименьший РСЛОС, выход которого совпадает с \mathbf{a} ; (б) он делает это на основе минимальной информации, т.к. для этого требуется всего всего $2 \cdot \text{span}(\mathbf{a})$ бит последовательности.
5. Производящая функция побитовой суммы двух двоичных псевдослучайных последовательностей $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ задается суммой $C(X) = A(X) + B(X) \in \mathbb{Z}/(2)[[X]]$ в кольце формальных степенных рядов. Если \mathbf{a} и \mathbf{b}

периодичны, то такой же будет и побитовая сумма c , а ее эквивалентный линейный размах не превышает суммы линейных размахов a и b (см. Раздел 3.4).

6. По определению, *m-последовательность* - это РСЛОС-последовательность максимально возможного периода $T = 2^r - 1$ (где r - число ячеек регистра). Примечательный и широко известный факт: *m-последовательности* - это в точности те последовательности, которые генерируются регистрами с примитивными полиномами обратной связи. Такие последовательности *сбалансированы* (имеют равное число нулей и единиц) и имеют *свойство Де Брюина*: в каждом отдельном периоде *m-последовательности* всякая ненулевая подпоследовательность длины r появляется ровно один раз (так называемые *последовательности Де Брюина*). Функция автокорреляции *m-последовательности* является двузначной; все несинфазные значения равны -1 (см. Раздел 3.1).

Многие современные поточные шифры сконструированы на основе комбинирования выходов от нескольких РСЛОС различными нелинейными способами (и, следовательно, чрезвычайно зависят от глубокого понимания архитектуры линейной обратной связи). С 1955 года предпринято огромное количество усилий по исследованию других ("нелинейных") архитектур обратной связи, которые дали бы толчок в развитии фундаментально новых или иных типов псевдослучайных последовательностей. Однако, как установлено, эти другие архитектуры оказывают чрезвычайное сопротивление попыткам их анализа: даже такие простые свойства как, например, период последовательностей от регистра сдвига с нелинейной обратной связью, по сути дела неизвестны. Несмотря на сорок лет исследовательской работы, в целом криптографам приходится констатировать, что пока имеется адекватное понимание только архитектуры с линейной обратной связью [196]. (Наиболее заметным продвижением в области исследования альтернативных архитектур стала теория регистров сдвига с переносом, построенная в 1990-е годы на базе аппарата 2-адических чисел, подробно см. Раздел 7.4).

2.3.2 РСЛОС максимального периода и примитивные многочлены

РСЛОС длиной n бит может находиться в одном из $2^n - 1$ внутренних состояний. Это означает, что теоретически он может генерировать псевдослучайную последовательность длины $2^n - 1$ до того, как начнет повторяться. (Максимально возможная длина равна $2^n - 1$, а не 2^n потому, что РСЛОС заполненный одними нулями станет генерировать последовательность, целиком состоящую из нулей.) Только РСЛОС с особо подобранными точками съема будут проходить через все $2^n - 1$ внутреннее состояние - это так называемые регистры максимального периода. Результирующие выходные последовательности таких регистров называются *m-последовательностями* (или иногда - *ml-последовательностями*, от **m**aximum **l**ength). Примечательно, что условия для генерации *m-последовательностей* легко могут быть определены, и это делает анализ подобных последовательностей достаточно простым.

Для того, чтобы РСЛОС был регистром максимального периода, соответствующий многочлен обратной связи должен быть *примитивным многочленом mod 2*. Степень

многочлена - это длина регистра сдвига. Примитивный многочлен степени n - это неприводимый многочлен, который делит $x^{2^n-1} + 1$, но не делит $x^d + 1$ для любого такого d , которое делит 2^n-1 . (Математическое обоснование этого можно найти в [163] [405].)

В общем случае, не существует простого способа для генерации примитивных многочленов mod 2 заданной степени. Самый простой способ - выбрать случайным образом многочлен и проверять, примитивен он или нет. Это непростая задача - нечто вроде тестирования случайных чисел на простоту - но некоторые математические программные пакеты это делают. Конкретные методы можно найти в [217][218].

Большинство таких методов начинают поиск примитивных многочленов с нахождения неприводимого mod 2 полинома [318]. Как правило, только некоторые неприводимые многочлены являются примитивными, но для полиномов, степень которых - число Мерсенна ($2^q - 1$, где q - целое), все неприводимые являются примитивными. Таким образом, выбирая степень, являющуюся мерсенновым числом, мы решаем проблему примитивности.

Отыскание неприводимых mod 2 полиномов близко связано с задачей факторизации многочленов над конечными полями. Примеры практичных (правда, не для серьезной криптографии) алгоритмов можно найти в [25] [197], почти все они вполне подходят для генерации небольших полиномов (по крайней мере, до степени 31). Например, полином, отыскиваемый с помощью известного метода решета Эратосфена, может достигать степени 31, если использовать таблицу неприводимых многочленов до степени 16 (также построенную с помощью этого решета). Хотя и довольно медленный, этот метод служит простым обоснованием для других техник.

Конечно, большие полиномы, необходимые в криптографических приложениях, требуют более эффективной реализации алгоритма. Большинство эффективных техник отыскания примитивных полиномов обычно основано на оценке $x^{2^n} \bmod p$. В качестве примера можно привести "Алгоритм А" из работы М.Бен-Ора [24], даваемый в виде "компьютерного псевдо-кода" для высокопроизводительных систем.

Алгоритм А Бен-Ора

1. Сгенерировать нормированный многочлен $g(x)$ степени n над $GF(q)$;
2. $ux := x$;
3. for $k := 1$ to $(n \text{ DIV } 2)$ do
4. $ux := ux^q \bmod g(x)$;
5. if $\text{НОД}(g(x), ux-x) = 1$ then go to 1 fi;
6. od

Результатом данного алгоритма (прошедшего все шаги) является "сертифицированный" неприводимый многочлен (как противоположность "вероятно простым" результатам вероятностных алгоритмов поиска). $GF(q)$ обозначает поле Галуа по простому основанию q ; для полиномов mod 2 это значение $q = 2$. Эти вычисления требуют выполнения арифметических операций с полиномами mod 2 больших степеней; " ux^q " - полином, возведенный в квадрат, а " $\bmod g(x)$ " - деление многочленов. Такие операции над многочленами являются весьма сложными для обычных компьютерных языков, но наибольшую вычислительную сложность дает операция отыскания наибольшего общего делителя в шаге 5.

Отметим, что время работы Алгоритма А до успеха является случайным в том смысле, что здесь формируется и затем проверяется произвольный полином; первое

значение может быть успешным, либо же процесс может никогда не привести к успеху. Но при большом количестве попыток должно получаться примерно два примитивных многочлена на каждые n случайно выбранных полиномов нечетной степени n (проверять имеет смысл только нечетные степени). Таким образом, если проверяется 12800 случайных полиномов степени 1279, то должно быть найдено примерно 20 примитивных. На практике время поиска одного примитивного многочлена широко варьируется от удивительно быстрого (изредка) до невыносимо медленного (довольно часто) [318].

Среди наиболее свежих методов отыскания неприводимых многочленов можно отметить опубликованный в 1996 году алгоритм рекурсивной генерации М. Ванга [381]. В двух словах, метод Ванга сводится к следующему. Если f - неприводимый над $GF(2)$ многочлен четной степени и нечетного веса, а $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ имеет степень k , то полином $h(x) = x^k g(x^{-1})$ также неприводим.

В "Прикладной криптографии" Шнайера [346] приводится сводная таблица некоторых "популярных" примитивных многочленов mod 2 различных степеней.

В данной таблице, к примеру, строка (32, 7, 5, 3, 2, 1, 0) означает, что следующий многочлен является примитивным mod 2:

$$x^{32} + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$$

С помощью этой таблицы легко строится РСЛОС максимального периода. Первое число - это длина регистра сдвига. Последнее число - всегда 0 и обозначает присутствие в многочлене константы 1. Все числа в строке кроме 0 задают последовательность точек съема, отсчитывая с левого конца регистра сдвига. То есть члены младших степеней многочлена соответствуют точкам съема, отсчитывая с левого конца регистра.

2.3.3 Регистры Фибоначчи и Галуа, и их программная реализация

Как правило, в реальных криптосхемах регистр сдвига с линейной обратной связью реализуется одной из двух различных конструкций, именуемых, соответственно, *регистрами Фибоначчи* и *Галуа* [346], но все наиболее важные теоретические результаты справедливы для обоих типов.

Регистры Фибоначчи. В литературе значительно чаще обращаются к регистрам Фибоначчи. Функция обратной связи здесь - простое сложение операций XOR (исключающее-или) определенных бит регистра.

В приведенном выше примере из таблицы многочленов строка (32, 7, 5, 3, 2, 1, 0) означает, что если взять 32-битовый регистр сдвига и генерировать новые биты XOR-сложением тридцать второго, седьмого, пятого, третьего, второго и первого битов, то результирующая последовательность будет иметь максимальный период - она пройдет через $2^{32} - 1$ значений до того, как начнет повторяться.

Глава 2. Строительные блоки для создания криптосхем

| Таблица. Некоторые примитивные многочлены mod 2 | | | |
|--|------------------------|------------------------|---------------------|
| (1,0) | (36,11,0) | (68, 9, 0) | (97, 6, 0) |
| (2,1,0) | (36, 6, 5, 4, 2, 1, 0) | (68, 7, 5, 1, 0) | (98,11,0) |
| (3,1,0) | (37, 6, 4, 1, 0) | (69, 6, 5, 2, 0) | (98, 7, 4, 3, 1, 0) |
| (4,1,0) | (37, 5, 4, 3, 2, 1, 0) | (70, 5, 3, 1, 0) | (99, 7, 5, 4, 0) |
| (5,2,0) | (38, 6, 5, 1, 0) | (71,6,0) | (100,37,0) |
| (6,1,0) | (39,4,0) | (71, 5, 3, 1, 0) | (100, 8, 7, 2, 0) |
| (7,1,0) | (40, 5, 4, 3, 0) | (72,10,9,3,0) | (101, 7, 6, 1, 0) |
| (7,3,0) | (41,3,0) | (72, 6, 4, 3, 2, 1, 0) | (102,6,5,3,0) |
| (8, 4, 3, 2, 0) | (42, 7, 4, 3, 0) | (73,25,0) | (103,9,9) |
| (9,4,0) | (42, 5, 4, 3, 2, 1, 0) | (73, 4, 3, 2, 0) | (104,11,10,1,0) |
| (10,3,0) | (43, 6, 4, 3, 0) | (74, 7, 4, 3, 0) | (105,16,0) |
| (11,2,0) | (44, 6, 5, 2, 0) | (75, 6, 3, 1, 0) | (106,15,0) |
| (12, 6, 4, 1, 0) | (45, 4, 3, 1, 0) | (76, 5, 4, 2, 0) | (107,9,7,4,0) |
| (13, 4, 3, 1, 0) | (46, 8, 7, 6, 0) | (77, 6, 5, 2, 0) | (108,31,0) |
| (14, 5, 3, 1, 0) | (46, 8, 5, 3, 2, 1, 0) | (78, 7, 2, 1, 0) | (109,5,4,2,0) |
| (15,1,0) | (47,5,0) | (79,9,0) | (110,6,4,1,0) |
| (16, 5, 3, 2, 0) | (48, 9, 7, 4, 0) | (79, 4, 3, 2, 0) | (111, 10,0) |
| (17,3,0) | (48, 7, 5, 4, 2, 1, 0) | (80, 9, 4, 2, 0) | (111,49,0) |
| (17,5,0) | (49,9,0) | (80, 7, 5, 3, 2, 1, 0) | (113,9,0) |
| (17,6,0) | (49, 6, 5, 4, 0) | (81,4,0) | (113,15,0) |
| (18,7,0) | (50, 4, 3, 2, 0) | (82, 9, 6, 4, 0) | (113,30,0) |
| (18, 5, 2, 1, 0) | (51, 6, 3, 1, 0) | (82, 8, 7, 6, 1, 0) | (114,11,2,1,0) |
| (19, 5, 2, 1, 0) | (52,3,0) | (83, 7, 4, 2, 0) | (115,8,7,5,0) |
| (20,3,0) | (53, 6, 2, 1, 0) | (84,13,0) | (116,6,5,2,0) |
| (21,2,0) | (54, 8, 6, 3, 0) | (84, 8, 7, 5, 3, 1, 0) | (117,5,2,1,0) |
| (22,1,0) | (54, 6, 5, 4, 3, 2, 0) | (85, 8, 2, 1, 0) | (118,33,0) |
| (23,5,0) | (55,24,0) | (86, 6, 5, 2, 0) | (119,8,0) |
| (24, 4, 3, 1, 0) | (55, 6, 2, 1, 0) | (87,13,0) | (119,45,0) |
| (25,3,0) | (56, 7, 4, 2, 0) | (87, 7, 5, 1, 0) | (120,9,6,2,0) |
| (26, 6, 2, 1, 0) | (57,7,0) | (88,11,9,8,0) | (121,18,0) |
| (27, 5, 2, 1, 0) | (57, 5, 3, 2, 0) | (88, 8, 5, 4, 3, 1, 0) | (122,6,2,1,0) |
| (28,3,0) | (58,19,0) | (89,38,0) | (123,2,0) |
| (29,2,0) | (58, 6, 5, 1, 0) | (89,51,0) | (124,37,0) |
| (30, 6, 4, 1, 0) | (59, 7, 4, 2, 0) | (89, 6, 5, 3, 0) | (125,7,6,5,0) |
| (31,3,0) | (59, 6, 5, 4, 3, 1, 0) | (90, 5, 3, 2, 0) | (126,7,4,2,0) |
| (31,6,0) | (60,1,0) | (91, 8, 5, 1, 0) | (127,1,0) |
| (31,7,0) | (61, 5, 2, 1, 0) | (91, 7, 6, 5, 3, 2, 0) | (127,7,0) |
| (31,13,0) | (62, 6, 5, 3, 0) | (92, 6, 5, 2, 0) | (127,63,0) |
| (32, 7, 6, 2, 0) | (63,1,0) | (93,2,0) | (128, 7, 2, 1, 0) |
| (32, 7, 5, 3, 2, 1, 0) | (64, 4, 3, 1, 0) | (94,21,0) | (129,5,0) |
| (33,13,0) | (65,18,0) | (94, 6, 5, 1, 0) | (130,3,0) |
| (33, 16, 4, 1, 0) | (65, 4, 3, 1, 0) | (95,11,0) | (131,8,3,2,0) |
| (34, 8, 4, 3, 0) | (66, 9, 8, 6, 0) | (95, 6, 5, 4, 2, 1, 0) | (132,29,0) |
| (34, 7, 6, 5, 2, 1, 0) | (66, 8, 6, 5, 3, 2, 0) | (96,10,9,6,0) | (133,9,8,2,0) |
| (35,2,0) | (67, 5, 2, 1, 0) | (96, 7, 6, 4, 3, 2, 0) | (134,57,0) |

| Некоторые примитивные многочлены mod 2 (продолжение) | | | |
|--|--------------------|-------------|---------------|
| (135,11,0) | (152,6,3,2,0) | (178,87,0) | (270,133,0) |
| (135,16,0) | (153,1,0) | (183,56,0) | (282,35,0) |
| (135,22,0) | (153,8,0) | (194,87,0) | (282,43,0) |
| (136,8,3,2,0) | (154, 9, 5, 1, 0) | (198,65,0) | (286,69,0) |
| (137,21,0) | (155,7,5,4,0) | (201,14,0) | (286,73,0) |
| (138,8,7,1,0) | (156,9,5,3,0) | (201,17,0) | (294,61,0) |
| (139,8,5,3,0) | (157, 6, 5, 2, 0) | (201,59,0) | (322,67,0) |
| (140,29,0) | (158, 8, 6, 5, 0) | (201,79,0) | (333,2,0) |
| (141,13,6,1,0) | (159,31,0) | (202,55,0) | (350,53,0) |
| (142,21,0) | (159,34,0) | (207,43,0) | (366,29,0) |
| (143,5,3,2,0) | (159,40,0) | (212,105,0) | (378,43,0) |
| (144,7,4,2,0) | (160, 5, 3, 2, 0) | (218,11,0) | (378,107,0) |
| (145,52,0) | (161,18,0) | (218,15,0) | (390,89,0) |
| (145,69,0) | (161,39,0) | (218,71,0) | (462,73,0) |
| (146,5,3,2,0) | (161,60,0) | (218,83,0) | (521,32,0) |
| (147,11,4,2,0) | (162, 8, 7, 4, 0) | (225,32,0) | (521,48,0) |
| (148,27,0) | (163,7,6,3,0) | (225,74,0) | (521,158,0) |
| (149,10,9,7,0) | (164, 12, 6, 5, 0) | (225,88,0) | (521,168,0) |
| (150,53,0) | (165, 9, 8, 3, 0) | (225,97,0) | (607,105,0) |
| (151,3,0) | (166, 10, 3, 2, 0) | (225,109,0) | (607,147,0) |
| (151,9,0) | (167,6,0) | (231,26,0) | (607,273,0) |
| (151,15,0) | (170,23,0) | (231,34,0) | (1279,216,0) |
| (151,31,0) | (172,2,0) | (234,31,0) | (1279,418,0) |
| (151,39,0) | (174,13,0) | (234,103,0) | (2281,715,0) |
| (151,43,0) | (175,6,0) | (236,5,0) | (2281,915,0) |
| (151,46,0) | (175,16,0) | (250,103,0) | (2281,1029,0) |
| (151,51,0) | (175,18,0) | (255,52,0) | (3217,67,0) |
| (151,63,0) | (175,57,0) | (255,56,0) | (3217,576,0) |
| (151,66,0) | (177,8,0) | (255,82,0) | (4423,271,0) |
| (151,67,0) | (177,22,0) | (258,83,0) | (9689,84,0) |
| (151,70,0) | (177,88,0) | (266,47,0) | |

Код программы для такого Фибоначчи-РСЛОС на языке Си выглядит следующим образом:

```
int  LFSR  ()
{
  static unsigned long ShiftRegister = 1 ;
  /* Все кроме 0 */
  ShiftRegister = ( ( ( ( ShiftRegister >> 31)
                    ^ ( ShiftRegister >> 6)
                    ^ ( ShiftRegister >> 4)
                    ^ ( ShiftRegister >> 2)
                    ^ ( ShiftRegister >> 1)
                    ^ ( ShiftRegister ) )
                  & 0x00000001 )
                 << 31)
                | ( ShiftRegister >> 1) ;
  return  ShiftRegister & 0x00000001 ;
}
```

Код программы оказывается несколько более сложным, когда длина регистра сдвига превышает длину слова компьютера, но отличие невелико.

Вообще говоря, РСЛОС в программной реализации работают довольно медленно, и скорость можно увеличить применением для программирования языка Ассемблер вместо Си. Еще одно возможное решение - запускать 16 РСЛОС (или 32, в зависимости от размера слова в компьютере) в параллельном режиме. Такая схема использует массив слов, так что каждая битовая ячейка регистра представлена отдельным РСЛОС. При условии, что все они имеют один и тот же полином обратной связи, такая схема работает весьма быстро. В общем случае наилучший способ обновлять состояния регистров сдвига - это умножать текущее состояние на соответствующие двоичные матрицы [206].

Регистры Галуа. В РСЛОС можно модифицировать схему обратной связи, преобразовав регистр в так называемую "конфигурацию Галуа". Нельзя сказать, что получившийся в результате генератор становится лучше с криптографической точки зрения, но он тоже может иметь максимальный период и прост в программной реализации [307]. В этой схеме вместо использования бит с точек съема для генерации нового самого левого бита, каждый бит с точки съема XOR-ится с выходом генератора и заменяется получившейся суммой; затем выход генератора становится новым самым левым битом. Таким образом, в отличие от регистра Фибоначчи, где обратная связь является функцией от всех ячеек в регистре, а результат помещается в самую левую ячейку, обратная связь в регистре Галуа потенциально применима к каждой ячейке регистра, хотя является функцией только от самой правой ячейки [322].

На языке Си это может выглядеть следующим образом:

```
#define  mask  0x80000057

static unsigned long ShiftRegister=1 ;
void seed_LFSR  ( unsigned long seed )
{
  if  ( seed == 0 ) /* во избежание катастрофы*/
    seed = 1 ;
  ShiftRegister = seed ;
}
```

```
int modified_LFSR (void)
{
    if ( ShiftRegister & 0x00000001 ) {
        ShiftRegister = (ShiftRegister ^ mask) >> 1 | 0x80000000 ;
        return 1 ;
    } else {
        ShiftRegister >>= 1 ;
        return 0 ;
    }
}
```

Выигрыш здесь в том, что все операции XOR можно выполнять как одну операцию. Эту схему также можно распараллелить, а отдельные многочлены обратной связи могут быть различны. Кроме того, конфигурация Галуа может работать быстрее и при аппаратной реализации, особенно при использовании заказных VLSI-чипов.

Подводя общий итог, можно сказать, что если используется элементная база с быстрой реализацией сдвигов, то следует обратиться к регистрам Фибоначчи; если же есть возможность применить распараллеливание, то лучший выбор - регистр Галуа.

В случае программной реализации самыми быстрыми являются примитивные трехчлены, поскольку для генерации каждого нового бита последовательности складываются всего два бита. Следует отметить, что все полиномы обратной связи, приведенные в таблице Раздела 2.3.2, являются *прореженными*, то есть имеют лишь по несколько ненулевых коэффициентов. Прореженность - это всегда источник слабости, облегчающей вскрытие такого алгоритма генерации. В криптографических приложениях лучше использовать *плотные* примитивные полиномы, то есть с большим количеством коэффициентов.

Но генерация плотных примитивных многочленов mod 2 является непростой задачей. В общем случае, для того, чтобы сгенерировать примитивные многочлены степени k , необходимо знать факторизацию 2^k-1 . Хорошими руководствами по нахождению примитивных полиномов являются [164][310][311].

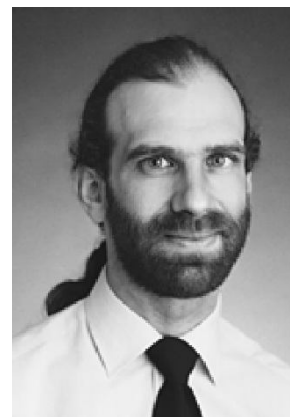
2.4 Некоторые итоги [346]

Вообще говоря, как бы ни был хорошо подобран полином обратной связи, РСЛОС остается линейным устройством. А такие устройства обычно легко поддаются криптоанализу независимо от того, насколько много параметров сохраняется в тайне. В современной криптографической литературе регистры сдвига с линейной обратной связью, как и линейные конгруэнтные генераторы, сами по себе не рекомендуются в качестве генераторов псевдослучайных шифрующих последовательностей. Имеется значительное количество литературы, посвященной анализу их характерных свойств, наиболее часто упоминаются следующие работы: [163], [217], [354], [404].

В то же время, подавляющее большинство реальных конструкций для поточного шифрования строится на основе РСЛОС. На заре радиоэлектроники их было легко производить, так как регистр сдвига - это просто массив бит памяти, а последовательность обратной связи - ряд XOR-вентилей. И даже на современной элементной базе VLSI-чипов поточный шифр на основе РСЛОС может давать весьма серьезную криптостойкость при помощи всего нескольких логических вентиляей.

Использование РСЛОС в программной реализации криптосхем намного проблематичней. Эффективны по скорости лишь прореженные полиномы, но они слабы в отношении корреляционных атак (см. Разделы 4.3 и 4.4); плотные же полиномы обратной связи слишком неэффективны. Стандартный поточный шифр выдает по одному биту за раз, и этот алгоритм приходится итерировать 64 раза для шифрования того, что DES делает за одну итерацию. Фактически оказывается, что несложный РСЛОС-алгоритм, типа сжимающего генератора (см. Раздел 6.3) в программной реализации оказывается не быстрее, чем значительно более сложный DES.

Раздел криптографии, посвященный поточному шифрованию, - один из наиболее разработанных и, одновременно, - один из наиболее политически зависимых, поскольку имеет глубокие корни в секретной военной криптографии. Подавляющая часть применяемых в настоящее время конструкций продолжают оставаться засекреченными. Известно, что большинство используемых сегодня военных шифраторов построено на основе РСЛОС. Известно также, что большинство знаменитых американских суперкомпьютеров Cray (Cray 1, Cray X-MP, Cray Y-MP) имеет довольно любопытную инструкцию, обычно именуемую как "подсчет популяции". Эта команда подсчитывает количество единичных бит в регистре и с равным успехом может использоваться как для эффективного вычисления расстояния Хэмминга между двумя двоичными словами, так и для реализации векторизованной версии РСЛОС. Как рассказывали Брюсу Шнайеру близкие к спецслужбам люди, эту команду называют "канонической инструкцией АНБ", и ее необходимое наличие оговаривается почти во всех компьютерных контрактах.



Брюс Шнайер

С другой стороны, за годы существования открытой криптографии вскрыто удивительно большое количество криптосхем на основе регистров сдвига. И, добавляет Шнайер в "Прикладной криптографии", нет никаких сомнений, что секретные спецслужбы типа АНБ вскрывают еще больше. ♦

Глава 3

Статистические свойства и меры сложности последовательностей

3.0 Подходы к анализу

Каждый раз, когда встает вопрос о том, насколько приемлемой является шифрующая последовательность, генерируемая тем или иным поточным шифром, следует иметь в виду, что спектр критериев оценки последовательностей чрезвычайно широк.

За годы развития криптографии появилось огромное количество разнообразных подходов к анализу, но, по мнению американского криптографа М. Робшоу [322], каждый из них в конечном счете можно отнести к одному из двух лагерей. В первой группе занимаются оценкой статистических свойств шифрпоследовательности: есть ли какой-либо дисбаланс в способе генерации этой последовательности, который позволил бы криптоаналитику предполагать следующий бит с вероятностью лучшей, чем при случайном выборе? Вторая группа критериев предоставляет аналитику возможность на основе уже имеющихся битов гаммы сконструировать свою собственную последовательность, которая повторяла бы шифрующую последовательность. В некотором смысле, здесь изучается присущая этой последовательности сложность и делается попытка ответить на вопрос - сложно ли воспроизвести эту последовательность?

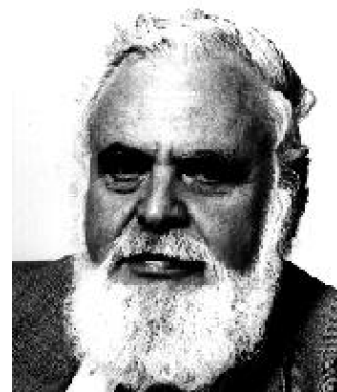
Этим двум базовым подходам и посвящен данный раздел книги. В совокупности же описанные здесь (а также в ряде последующих разделов) методы криптографического анализа некоторые авторы именуют "теоретико-системным подходом" к разработке поточных шифров [364]. Разработчик использует те тесты, которые доступны, а если в некотором классе последовательностей обнаруживается какая-нибудь новая статистическая слабость, то разрабатывается новый тест и добавляется в этот набор. Понятно, что это довольно специфический метод анализа, и многие предпочли бы иметь какие-то более твердые теоретические основы, на которых можно было бы обосновывать стойкость поточных шифрсистем.

Следует отметить, что к настоящему времени уже разработана весьма значительная теория для обоснования "доказуемой" стойкости того или иного поточного шифра, и этим результатам будет посвящен соответствующий раздел данной книги (Глава 10). Но сколь бы ни были впечатляющи достигнутые теоретические результаты, всегда остается справедливым следующее замечание: все построенные криптографами критерии обеспечивают только некоторые из условий, необходимых для стойкости шифрующей последовательности; последовательность может хорошо удовлетворять всем этим условиям и все-таки оказаться неспособной противостоять каким-то новым, пока неизвестным атакам [322].

3.1 Статистические свойства последовательностей

3.1.1 Постулаты Голomba

При многократном подбрасывании монеты можно ожидать примерно одинакового выпадения "орлов" и "решек". Аналогичным образом можно сформулировать и многие другие свойства для описания статистических характеристик последовательности, которая подразумевается сгенерированной совершенно случайным источником. Одна из первых формулировок некоторых основополагающих правил для статистических свойств периодических псевдослучайных последовательностей была представлена Соломоном Голломбом [163]. Три основных правила получили в открытой криптографии известность как *постулаты Голломба*.



Соломон Голломб

- G1. Количество "1" в каждом периоде должно отличаться от количества "0" не более, чем на единицу.
- G2. В каждом периоде половина серий (из одинаковых символов) должна иметь длину один, одна четверть должна иметь длину два, одна восьмая должна иметь длину три и т.д. Более того, для каждой из этих длин должно быть одинаковое количество серий из "1" и "0".
- G3. Предположим, у нас есть две копии одной и той же последовательности периода p , сдвинутые относительно друг друга на некоторое значение d . Тогда для каждого d , $0 \leq d \leq p-1$, мы можем подсчитать количество согласованностей между этими двумя последовательностями A_d , и количество несогласованностей D_d . Коэффициент автокорреляции для каждого d определяется соотношением $(A_d - D_d)/p$ и эта *функция автокорреляции* принимает различные значения по мере того, как d проходит все допустимые значения.

Тогда для любой последовательности, удовлетворяющей правилу G3, функция автокорреляции должна принимать лишь два значения (быть двузначной).

Правило G3 - это техническое выражение того, что Голломб описал как понятие независимых испытаний: знание некоторого предыдущего значения последовательности в принципе не помогает предположениям о текущем значении. Еще одна точка зрения на функцию автокорреляции состоит в том, что это некая мера способности, позволяющей различать последовательность и ее же копию, но начинающуюся в некоторой другой точке цикла.

Одна из главных причин того, что подавляющее большинство реальных генераторов поточного шифрования так или иначе основано на использовании регистров сдвига с линейной обратной связью, заключается в следующем: класс последовательностей, которые они генерируют, идеально соответствует духу постулатов Голломба [20]. В этом, правда, нет ничего удивительного, поскольку Голломб формулировал свои правила, по умолчанию подразумевая РСЛОС.

Последовательность, удовлетворяющая правилам G1-G3 часто именуется "*ПШ-последовательностью*", где ПШ обозначает "*псевдо-шумовая*". Должно быть понятно, что

одних лишь этих правил недостаточно для исследования столь важной проблемы, как случайный вид последовательности. К анализируемой последовательности применяется широкий спектр различных *статистических тестов* для исследования того, насколько хорошо она согласуется с допущением, что для генерации использовался совершенно случайный источник [113], [330].

3.1.2 Статистические тесты

3.1.2.1 Теоретический фундамент

Стойкость поточного шифра зависит от того, насколько близко генератор гаммы аппроксимирует генератор случайных чисел, или другими словами, насколько шифрующая последовательность будет вычислительно непредсказуема.

За последние двадцать лет разработано большое количество статистических тестов для анализа того, насколько последовательность способна демонстрировать случайное поведение. Меры, обычно используемые для исследования случайности двоичной гаммы длины N , проверяют нулевую гипотезу, согласно которой последовательность получена на основе N испытаний схемы Бернулли с вероятностью появления единицы, равной одной второй в каждом испытании.

С теоретической точки зрения, проблема тестирования выглядит следующим образом [249]. Статистический тест T для вырабатываемых генератором последовательностей длины N - это функция $T : B^N \rightarrow \{\text{"принять"}, \text{"отвергнуть"}\}$, которая разделяет множество B^N двоичных длины N последовательностей $s^N = s_1, \dots, s_N$ на (обычно небольшое) множество "плохих" или "неслучайных" последовательностей

$$S_T = \{s^N : T(s^N) = \text{"отвергнуть"}\} \subseteq B^N$$

и остальное множество последовательностей "хороших" или "случайных". Кавычки в данном случае обозначают тот факт, что термин "случайные" используется в интуитивно-понятном смысле. (Поскольку на философском уровне сам вопрос о детерминированности и случайности во Вселенной не решен).

Вероятность того, что выработанная генератором последовательность будет отвергнута, выражается соотношением $\rho = \frac{|S_T|}{2^N}$. В реальных тестах ρ должно быть невелико, к примеру $\rho \approx 0.001 \dots 0.01$.

Для выборки значительной длины N произвольный статистический тест T невозможно реализовать, проверяя все множество S_T . Вместо этого статистический тест обычно реализуют путем задания эффективно вычисляемой тестовой функции (статистики) f_T , которая отображает двоичные последовательности длины N в действительные числа. То есть, если обозначить за R^N последовательность из N статистически независимых и симметрично распределенных двоичных случайных величин, то можно определить вероятностное распределение случайной величины $f_T(R^N)$, принимающей действительные значения. Для f_T задают верхний и нижний пороги t_1 и t_2 такие, что

$$P[f_T(R^N) \leq t_1] + P[f_T(R^N) \geq t_2] = \rho.$$

Обычно, $P[f_T(R^N) \leq t_1] \approx P[f_T(R^N) \geq t_2] \approx \rho/2$. Множество же S_T "плохих" последовательностей с мощностью $|S_T| = \rho 2^N$ задается соотношением

$$S_T = \{s^N \in B^N : f_T(s^N) \leq t_1 \text{ либо } f_T(s^N) \geq t_2\}.$$

Обычно f_T подбирают таким образом, чтобы $f_T(R^N)$ была распределена (приблизительно) в соответствии с каким-нибудь хорошо известным вероятностным распределением. Чаще всего это бывают нормальное распределение или распределение хи-квадрат с d степенями свободы (где d - некоторое положительное целое). Поскольку для этих распределений доступны подробные числовые таблицы, то подобный выбор существенно упрощает определение порогов t_1 и t_2 при заданных ρ и N . К нормальному распределению приходят в тех случаях, когда суммируется большое количество независимых и идентично распределенных случайных величин. К распределению хи-квадрат с d степенями свободы - когда суммируются квадраты d независимых и нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией 1.

Рассмотрим далее вкратце несколько наиболее популярных статистических тестов для генераторов (псевдо-) случайных бит.

3.1.2.2 Частотный тест

Простейший, наверное, статистический тест T_F , в котором тестовый параметр $f_T(s^N)$ определяется как

$$f_{T_F}(s^N) = \frac{2}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^N s_i - \frac{N}{2} \right).$$

Количество "единиц" в случайной последовательности $R^N = R_1, \dots, R_N$ распределено в соответствии с биномиальным распределением, которое очень хорошо аппроксимируется нормальным распределением со средним $N/2$ и дисперсией $N/4$, поскольку $E[R_i] = 1/2$ и $D[R_i] = 1/4$ при $1 \leq i \leq N$. Таким образом, вероятностное распределение статистики $f_{T_F}(R^N)$ при достаточно больших N хорошо аппроксимируется нормальным распределением с нулевым средним и единичной дисперсией, а приемлемыми порогами будут следующие значения $t_2 = -t_1 \approx 2.5 \dots 3$.

3.1.2.3 Последовательный тест

В так называемом последовательном тесте T_S с параметром L последовательность s^N нарезается на N/L последовательных блоков длины L (например, $L=8$), и определяется число $n_i(s^N)$ появлений двоичного представления целого числа i для $0 \leq i \leq 2^L - 1$. Статистика теста определяется как

$$f_{T_S}(s^N) = \frac{L 2^L}{N} \sum_{i=0}^{2^L-1} \left(n_i(s^N) - \frac{N}{L 2^L} \right)^2.$$

Несколько упрощенное объяснение этой формулы состоит в том, что член $N / (L 2^L)$ - это ожидаемое значение для $n_i(s^N)$, а назначение члена $(L 2^L)/N$ - нормировать (невозведенные в

квадрат) члены суммы с нулевым средним для того, чтобы дисперсия стала равной 1. Вероятностное распределение $f_{T_S}(R^N)$ при больших N очень хорошо аппроксимируется распределением χ^2 с $2^L - 1$ степенями свободы.

При использовании теста хи-квадрат рекомендуется [197], чтобы ожидаемые значения по меньшей мере равнялись 5, то есть чтобы $N / (L2^L) > 5$. Таким образом, при избранной длине L размер массива для анализа должен составлять $5 \times L \times 2^L$ бит.

3.1.2.4 Тест серий

В серийном тесте T_R с параметром L для последовательности s^N определяется $n_i^0(s^N)$ - количество 0-серий длины i и, аналогично, $n_i^1(s^N)$ - количество 1-серий длины i для $0 \leq i \leq L$ (например $L = 15$). Статистика теста определяется как

$$f_{T_R}(s^N) = \sum_{b \in \{0,1\}} \sum_{i=1}^L \frac{(n_i^b(s^N) - N / 2^{i+2})^2}{N / 2^{i+2}}$$

Вероятностное распределение $f_{T_R}(R^N)$ при больших N очень хорошо аппроксимируется распределением χ^2 с $2L$ степенями свободы, поскольку члены суммы - квадраты независимых случайных величин, распределенных нормально с нулевым средним и единичной дисперсией.

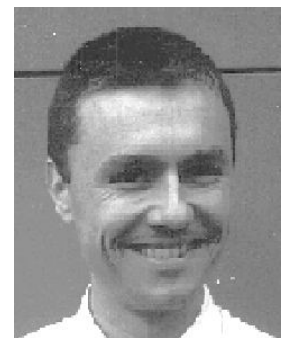
3.1.2.4 Автокорреляционный тест

Для исходной последовательности $s^N = s_1, \dots, s_N$ "автокорреляционным тестом с задержкой τ " называют частотный тест для последовательности $s_1 \oplus s_{1+\tau}, s_2 \oplus s_{2+\tau}, \dots, s_N - \tau \oplus s_N$, где \oplus означает сложение по модулю 2. Данный тест используется для выявления возможных корреляций между битами последовательности на расстоянии τ .

3.1.2.5 Универсальный тест.

Теперь рассмотрим два более сложных теста, предложенных для криптографического анализа псевдослучайных последовательностей в 1990-е годы. В этих тестах рассматриваются меры, связанные с появлением каждой возможной двоичной структуры (паттерна) заданной длины l . Отрезки берутся как неперекрывающиеся двоичные l -граммы, нарезаемые встык из шифрпоследовательности. *Универсальный тест* измеряет расстояние от последнего появления двоичной l -граммы; *тест повторений* измеряет количество повторений двоичных l -грамм.

Универсальный тест [249] был разработан Ули Маурером по просьбе известной криптографической фирмы "Omnisec AG" (Швейцария) для анализа генераторов, вырабатывающих криптоключи.



Ули Маурер

В случае, когда анализируемая последовательность разбита на неперекрывающиеся блоки длины l , данный алгоритм задает статистику, которая вычисляется путем

суммирования логарифмов (\log_2) расстояний до последнего появления каждой l -граммы тестируемой последовательности. Данная статистика близко связана в энтропией на бит, генерируемый источником. Этот тест задается двумя целочисленными параметра Q и K , сумма которых равна общему количеству l -грамм в исследуемой последовательности гаммы. Q представляет собой количество блоков инициализации (l -грамм), которые используются для начального заполнения табличного массива Tab размером 2^l . Значениями Tab являются позиции последнего появления каждой из наблюдаемых в последовательности l -грамм. Если какой-либо паттерн l -граммы не появился в процессе инициализации, тогда его Tab устанавливается в нуль. Маурер [249] рекомендует, чтобы $Q \geq 10 \times 2^l$. Параметр K представляет количество блоков, подлежащих тестированию, и Маурер рекомендует, чтобы он был настолько большим, насколько возможно ($K \geq 1000 \times 2^l$). Тестовая функция задается соотношением

$$f = \frac{1}{K} \left(\sum_{i=Q+1}^{Q+K} \log_2 (i - Tab[s(i)]) \right)$$

где $Tab[s(i)]$ - это значение из Tab или последняя наблюдавшаяся позиция в потоке двоичных l -грамм для данного паттерна $s(i)$, отмеченного на позиции i .

Программа на языке Паскаль для быстрого вычисления тестового параметра f для случая $l=8$ (и, соответственно, с размером массива Tab $V = 256$) выглядит так:

```

program UniversalTest(input,output);
const L=8; V=256; Q=2000; K=20000;
var i,n: integer; sum,fTU: real;
    tab: array [0..V-1] of integer;
    block: array [0..max] of integer;
begin
  for i := 0 to V-1 do tab[i] := 0; (* инициализация *)
  for n := 1 to Q do tab[block[n]]:= n; (* инициализация *)
  sum := 0.0;
  for n := Q+1 to Q+K do begin
    sum := sum + ln (n - tab[block[n]]);
    tab[block[n]] := n ;
  end ;
  fTU := (sum / K) / ln (2.0) ; writeln (fTU) ;
end.

```

Значения матожидания $E(f)$ и дисперсии $D(f)$ функции f , сведенные Маурером в таблицу, вычислены в предположении, что $s(i)$ независимы. Для дисперсии также введен множитель

$$c(L, K) \approx 0.7 - \frac{0.8}{l} + \left(4 + \frac{32}{l}\right) K^{-3/l} / 15 .$$

Окончательная статистика:

$$z = \frac{f - E(f)}{c(L, K) \sqrt{D(f)}}$$

сравнивается со случайной величиной стандартного нормального распределения. Это двусторонний тест. Минимальная длина шифрпоследовательности, необходимая для этого теста, составляет $l \times (10 \times 2^l + 1000 \times 2^l)$ бит.

| Таблица. Значения математического ожидания и дисперсии для универсального теста | | | | | |
|---|-----------|--------|-----|-----------|--------|
| l | $E(f)$ | $D(f)$ | l | $E(f)$ | $D(f)$ |
| 1 | 0.7326495 | 0.690 | 9 | 8.1764248 | 3.311 |
| 2 | 1.5374383 | 1.338 | 10 | 9.1723243 | 3.356 |
| 3 | 2.4016068 | 1.901 | 11 | 10.170032 | 3.384 |
| 4 | 3.3112247 | 2.358 | 12 | 11.168765 | 3.401 |
| 5 | 4.2534266 | 2.705 | 13 | 12.168070 | 3.410 |
| 6 | 5.2177052 | 2.954 | 14 | 13.167693 | 3.416 |
| 7 | 6.1962507 | 3.125 | 15 | 14.167488 | 3.419 |
| 8 | 7.1836656 | 3.238 | 16 | 15.167379 | 3.421 |

3.1.2.6 Тест повторений [170]

Этот новый тест для анализа l -грамм предложен в 1995 году австралийскими криптографами Густафсоном и Доусоном. Тест является результатом аппроксимации распределением Пуассона классической задачи о размещении в определенных условиях, когда количество возможных урн очень велико. В конструкции теста принимается во внимание количество пустых урн, а используемая здесь мера просто подсчитывает количество повторяющихся урн в тестируемой последовательности из R урн (или l -грамм, другими словами).



Эд Доусон

В классической задаче о размещении рассматривается эксперимент, заключающийся в бросании R шаров случайным образом в N урн, так что вероятность попадания каждого шара в любую конкретную урну составляет $1/N$. Количество пустых урн обозначается M_0 , и вероятность того, что ровно t из N урн останутся пустыми в теории вероятностей задается соотношением

$$P(M_0 = t) = \binom{N}{t} \sum_{v=0}^{N-t} (-1)^v \binom{N-t}{v} \left(1 - \frac{t+v}{N}\right)^R.$$

Матожидание μ_0 и дисперсия σ_0^2 количества пустых урн даются соотношениями

$$\begin{aligned} \mu_0 &= N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^R \\ \sigma_0^2 &= N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^R \left(1 - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^R\right) + N(N-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^R. \end{aligned}$$

При $R, N \rightarrow \infty$ и $R/N \rightarrow 0$ распределение случайной величины

$$w = M_0 - N + R$$

сходится к распределению Пуассона с матожиданием $\lambda = N e^{-\frac{R}{N}} - N + R \approx \frac{R^2}{2N}$. Поскольку

$N - M_0$ - это количество занятых урн, то значение w тестовой статистики представляет собой количество повторений паттернов в выборке. Важно подчеркнуть, что w - это

количество раз, когда появилось повторение, а не количество конкретных повторившихся паттернов. Важно также, что в отличие от теста на равномерность, где размер выборки R должен расти линейно от N , здесь достаточно, чтобы R росло линейно от \sqrt{N} , что позволяет проверять блоки вдвое большей длины. Это двусторонний тест, поскольку при случайном размещении не ожидается, что каждая урна должна быть занята до того, как появятся повторения.

Данный тест требует подсчета количества повторений паттернов, а не частот появления каждого паттерна, поэтому массив хранимых данных состоит из $R=2^r$ l -битных блоков, где $r = l/2 + 3$. При использовании подходящих алгоритмов сортировки [197] общая вычислительная сложность имеет порядок $r2^r$ при требуемой емкости массива хранения размером всего 2^r l -битных блоков. Это достижимо даже при $r \approx 32$ ($l \approx 64$).

3.1.2.7 Сравнение тестов l -грамм

В случае применения последовательного теста все ожидаемые частоты равны и должны быть не меньше 5, откуда следует, что минимальная длина тестируемого массива должна быть не менее $5 \times l \times 2^l$ бит. В случае применения универсального теста требуемая длина гаммы должна составлять $l \times (10 \times 2^l + 1000 \times 2^l)$ бит. В тесте повторений длина последовательности должна быть $l \times 2^{\frac{l}{2}+3}$ бит, то есть его следует применять при больших размерах l -грамм. В следующей таблице приводятся результаты сравнения минимальных длин шифрпоследовательности, требуемых для применения описанных тестов [170].

| <i>Длина l-граммы</i> | <i>Последовательный тест</i> | <i>Универсальный тест</i> | <i>Тест повторений</i> |
|---------------------------|----------------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 14 | 1.15×10^6 | 2.32×10^8 | 14 336 |
| 16 | 5.24×10^6 | 1.06×10^9 | 32 768 |
| 20 | 1.05×10^8 | 2.12×10^{10} | 1.64×10^5 |
| 24 | 2.01×10^9 | 4.07×10^{11} | 7.86×10^5 |
| 28 | 3.76×10^{10} | 7.59×10^{12} | 3.67×10^6 |
| 32 | 6.87×10^{11} | 1.39×10^{14} | 1.68×10^7 |

Таблица. Минимальная длина в битах для тестирования поточных шифров

3.1.2.8 Комбинирование тестов

На практике принятие или отвержение нулевой гипотезы основывают на результатах применения нескольких независимых тестов. Имеется два метода для комбинирования результатов ряда независимых тестов, используя вероятности хвоста распределения полученных статистик.

Если количество тестов невелико, то набор из k вероятностей хвоста распределения p_i ($i = 1, \dots, k$), полученных из тестовых статистик, можно комбинировать с помощью статистики Фишера-Пирсона. Эта статистика вычисляется по формуле

$L = -2 \sum_{i=1}^k \log_e p_i$ и сравнивается с распределением хи-квадрат с $2k$ степенями свободы [116].

Если же количество тестов достаточно велико, то можно применить тест Колмогорова-Смирнова [370]. Данный тест сравнивает совокупное распределение выборки вероятностей хвостовой области с гипотетической функцией совокупного распределения. Тестовая статистика - максимальное отклонение между двумя распределениями. Это различие сравнивается с квантилями распределения Колмогорова-Смирнова.

3.1.3 Отсечение слабых последовательностей

В заключение раздела, посвященного статистическому анализу, необходимо особо подчеркнуть некоторые моменты, которые следует учитывать конструкторам при тестировании генераторов шифрующей гаммы [322]. Предположим, последовательность длины p генерируется случайно, и эта конечная последовательность из p бит повторяется для формирования периодической последовательности. (Такая последовательность иногда именуется *полубесконечной* последовательностью.) Если бы p бит генерировались совершенно случайно, то с равной вероятностью мог бы появиться любой набор из p бит. В частности, и последовательность, состоящая из p нулевых бит (которые затем будут повторяться) могла бы появиться с тем же успехом, что и любая другая. При тестировании генератора индивидуальному изучению подвергается множество последовательностей; затем анализируется, какая часть сгенерированных последовательностей не проходит применяемые тесты. Если уровень неудач сравним с тем, что ожидается для последовательности, генерируемой совершенно случайным источником, тогда считается, что генератор подходящий. Конечно, с криптографической точки зрения даже последовательность, сгенерированная абсолютно случайным источником может оказаться совершенно неподходящей для зашифрования, подобно приведенному выше примеру с серией нулей. Поэтому конструкция генератора должна гарантировать, что катастрофически слабые последовательности никогда не появятся на выходе криптографического устройства.

3.2 Линейная сложность последовательностей и преобразования

3.2.1 Концепция линейной сложности

Одной из первых аналитических мер качества поточных шифров стала *линейная сложность* (или *линейный размах*) шифрующей последовательности, которая определяется как длина L самого короткого регистра сдвига с линейной обратной связью, способного породить эту последовательность.

Более подробно, линейной сложностью $\Lambda(s^l)$ последовательности $s^l = s_0, s_1, \dots, s_{l-1}$ называется длина L самого короткого РСЛОС, который может сгенерировать s^l , когда первые L цифр последовательности s^l являются начальным заполнением регистра. Эквивалентное определение: линейная сложность $\Lambda(s^l)$ определяется как наименьшее неотрицательное целое L такое, что существует линейная рекуррента с фиксированными константами c_0, c_1, \dots, c_L , удовлетворяющая равенству

$$s_j + c_1 s_{j-1} + \dots + c_L s_{j-L} = 0, \quad L \leq j \leq l.$$

Линейная сложность является очень полезной концепцией при изучении поточных шифров. Как было отмечено Джеймсом Мэсси [238], любая последовательность, которую можно сгенерировать конечным автоматом (линейным или нелинейным) над конечным полем, имеет также и конечную линейную сложность. Более того, существует эффективный алгоритм, так называемый *алгоритм Берлекампа-Мэсси* [232], который быстро находит такой кратчайший РСЛОС после изучения всего лишь первых $2L$ бит шифрующей последовательности. В своем классическом виде алгоритм Берлекампа-Мэсси используется для вычисления кратчайшей рекурренты над полем (в большинстве генераторов псевдослучайных бит операции выполняются над полем $GF(2)$, единственными элементами которого являются 0 и 1). Расширение этого алгоритма до более общего класса множеств - колец - было проделано Ридзом и Слоуном [316].

По своей сути алгоритм Берлекампа-Мэсси является универсальной криптоаналитической атакой на генераторы гаммы, поскольку несет в себе потенциал для замены любого шифргенератора его кратчайшим линейным эквивалентом. Таким образом, большая линейная сложность последовательности шифрующей гаммы - это необходимое (но далеко не достаточное) условие для практической стойкости всякого аддитивного поточного шифра [301] [334].

3.2.2 Алгоритм линейного синтеза Берлекампа-Мэсси

Задача алгоритма - найти регистр сдвига с линейной обратной связью, который при соответствующих начальных условиях порождает заданную последовательность a_0, a_1, \dots и является при этом кратчайшим [232][35].

Пусть произвольный РСЛОС задается многочленом обратной связи вида

$$f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \dots + f_1 x + 1$$

и длиной L регистра сдвига. Тогда для построения регистра сдвига надо определить две величины, обозначаемые как пара $(L, f(x))$, где $\deg f(x) \leq L$.

Рассматриваемая процедура построения является рекурсивной. Для каждого r , начиная с $r = 1$, мы будем строить регистр сдвига, порождающий последовательность a_0, a_1, \dots, a_r . Регистр сдвига минимальной длины, порождающий такую последовательность, обозначим через $(L_r, f^{(r)}(x))$. Этот регистр не обязательно должен определяться однозначно; возможно существование нескольких таких регистров с одной и той же длиной. К началу r -го шага имеется список регистров сдвига

$$(L_1, f^{(1)}(x)), (L_2, f^{(2)}(x)), \dots, (L_{r-1}, f^{(r-1)}(x)).$$

Алгоритм Берлекампа-Мэсси вычисляет новый кратчайший регистр $(L_r, f^{(r)}(x))$, генерирующий последовательность a_0, \dots, a_r . Для этого используется самый последний из вычисленных регистров, в котором по мере надобности модифицируются длина и коэффициенты в точках съема.

На r -м шаге вычисляется следующий элемент на выходе $(r - 1)$ -го регистра сдвига (над некоторым полем, не обязательно $GF(2)$):

$$\hat{a}_r = -\sum_{j=1}^{L_{r-1}} f_j^{(r-1)} a_{r-j}.$$

Пусть Δ_r обозначает разность между требуемым элементом на выходе a_r и истинным элементом, полученным на выходе самого последнего регистра сдвига:

$$\Delta_r = a_r - \hat{a}_r = a_r + \sum_{j=1}^{L_{r-1}} f_j^{(r-1)} a_{r-j}.$$

Эквивалентно,

$$\Delta_r = \sum_{j=0}^{L_{r-1}} f_j^{(r-1)} a_{r-j}.$$

Если $\Delta_r = 0$, то полагаем $(L_r, f^{(r)}(x)) = (L_{r-1}, f^{(r-1)}(x))$ и завершаем этим r -тую итерацию. В противном случае изменим коэффициенты в многочлене обратной связи по правилу:

$$f^{(r)}(x) = f^{(r-1)}(x) + Ax^l f^{(m-1)}(x),$$

где A - элемент поля, l - целое число и $f^{(m-1)}(x)$ - один из многочленов обратной связи, встречавшийся ранее в сформированном списке регистров сдвига. Используя этот новый многочлен, определим

$$\Delta'_r = \sum_{j=0}^{L_{r-1}} f_j^{(r)} a_{r-j} = \sum_{j=0}^{L_{r-1}} f_j^{(r-1)} a_{r-j} + A \sum_{j=0}^{L_{r-1}} f_j^{(m-1)} a_{r-j-l}.$$

Теперь все готово для определения величин m , l и A . Выберем m меньше r и такое, что $\Delta_m \neq 0$; выберем также $l = r - m$ и $A = -\Delta_m^{-1} \Delta_r$. Тогда

$$\Delta'_r = \Delta_r - \frac{\Delta_r}{\Delta_m} \Delta_m = 0,$$

так что новый регистр сдвига будет генерировать последовательность a_0, \dots, a_{r-1}, a_r . У нас остался произвол в выборе m , для которого $\Delta_m \neq 0$. Выбрав в качестве m номер ближайшей итерации, для которой выполнялось условие $L_m > L_{m-1}$, получим в каждой итерации регистр сдвига минимальной длины.

В более строгой форме алгоритм Берлекампа-Мэсси формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть заданы a_1, \dots, a_n из некоторого поля, и пусть при начальных условиях $f^{(0)}(x) = 1$, $t^{(0)}(x) = 1$ и $L_0 = 0$ выполняются следующие рекуррентные равенства, используемые для вычисления $f^{(n)}(x)$:

$$\Delta_r = \sum_{j=0}^{n-1} f_j^{(r-1)} a_{r-j},$$

$$L_r = \delta_r(r - L_{r-1}) + (1 - \delta_r)L_r,$$

$$\begin{bmatrix} f^{(r)}(x) \\ t^{(r)}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_r x \\ \Delta_r^{-1} \delta_r & (1 - \delta_r)x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{(r-1)}(x) \\ t^{(r-1)}(x) \end{bmatrix},$$

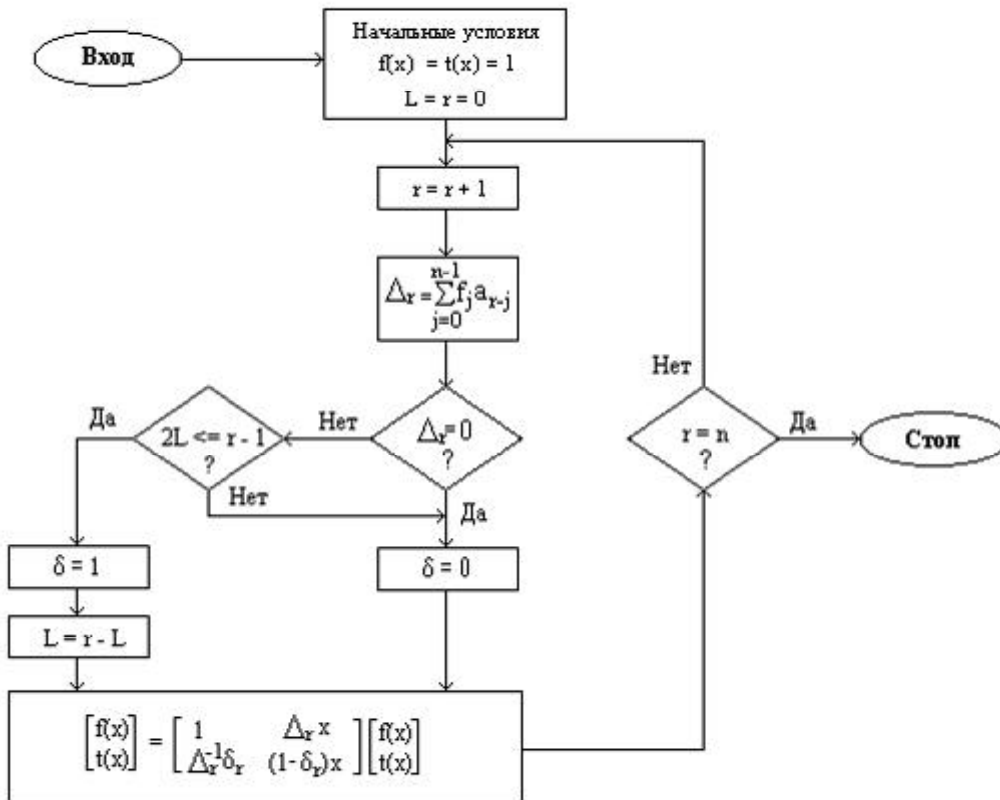
$r = 1, 2, \dots, 2n$, где $\delta_r = 1$, если одновременно $\Delta_r \neq 0$ и $2L_{r-1} \leq r-1$, и $\delta_r = 0$ в противном случае. Тогда $f^{(2r)}(x)$ является многочленом наименьшей степени, коэффициенты которого удовлетворяют равенствам $f_0^{(2r)} = 1$ и

$$a_r + \sum_{j=1}^{n-1} f_j^{(2r)} a_{r-j} = 0,$$

$$r = L_{2r} + 1, \dots, 2r.$$

В этой теореме Δ_r может обращаться в нуль, но только в том случае, когда $\delta_r = 0$. Положим тогда по определению $\Delta_r^{-1} \delta_r = 0$.

Блок-схема алгоритма Берлекампа-Мэсси приведена на рисунке.



На r -м шаге указанный алгоритм содержит число умножений, равное примерно удвоенной степени многочлена $f^{(r)}(x)$. Степень многочлена $f^{(r)}(x)$ равна примерно $r/2$, и всего имеется $2n$ итераций, так что всего алгоритм содержит примерно $2n^2 = \sum_{r=0}^{2n} r$ умножений и примерно такое же число сложений. Короче, можно сказать, что порядок числа умножений в алгоритме Берлекампа-Мэсси равен n^2 , или, формально, $O(n^2)$.

3.2.3 Естественная интерпретация алгоритма Берлекампа-Мэсси

Китайские математики З. Даи и К. Зенг показали [86], что алгоритм Берлекампа-Мэсси естественным образом следует из решения классической задачи о рациональной аппроксимации для произвольных элементов в поле

$$F_2((x)) = \left\{ \alpha = \sum_{i=m}^{\infty} a_i x^{-i} \mid m \in \mathbb{Z}, a_i \in F_2 \right\}$$

формальных рядов Лорана над двоичным полем F_2 . Данный факт делает совершенно понятной алгебраическую сущность алгоритма.

(I). Каждый элемент $\alpha \in F_2((x))$ записывается как сумма двух частей:

$$\alpha = \sum_{i=m}^0 a_i x^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{-i} = [\alpha] \text{ (целая часть)} + \{ \alpha \} \text{ (десятичная часть)},$$

и задается функция $Ord(\alpha)$ над $F_2((x))$:

$$Ord(\alpha) = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \alpha = 0 \\ w, & \text{если } \alpha \neq 0 \text{ и } [x^{-w}\alpha] = 1. \end{cases}$$

Несложно показать, что

$$\begin{aligned} Ord(\alpha\beta) &= Ord(\alpha) + Ord(\beta), \\ Ord(\alpha + \beta) &\leq \max\{Ord(\alpha), Ord(\beta)\}, \end{aligned}$$

с равенством тогда и только тогда, когда $Ord(\alpha)$ и $Ord(\beta)$ различны.

Это означает, что $Ord(\alpha)$ является метрикой поля $F_2((x))$.

Поле $F_2((x))$ содержит поле рациональных дробей $F_2((x))$ в качестве своего подполя таким образом, что последнее является плотным в смысле топологии, индуцированной метрикой $Ord(\alpha)$. Поэтому проблему рациональной аппроксимации (РАП) можно расширить до $F_2((x))$: Имея $\alpha \in F_2((x))$ и $n \in \mathbb{N}$, найти все рациональные дроби $\frac{v(x)}{u(x)}$ со знаменателями $u(x)$ наименьшей возможной степени, которые аппроксимировали бы α до порядка точности n , то есть

$$Ord\left(\frac{v(x)}{u(x)} - \alpha\right) < -n.$$

Очевидно, что при рассмотрении РАП уделять внимание следует лишь ненулевым многочленам $u(x)$, так как должно обеспечиваться соотношение $v(x) = [u(x)\alpha]$, и неравенство можно переформулировать в терминах одного $u(x)$:

$$\text{Ord}(\{u(x)\alpha\}) - \deg u(x) < -n.$$

Многочлен $u(x)$ называют решением задачи РАП.

(II). При рассмотрении задачи линейного синтеза для двоичной последовательности $\mathbf{a} = \{a_i \mid i \geq 0\}$, ее идентифицируют формальным рядом Лорана

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{-i-1},$$

элементом, принадлежащим максимальному идеалу соответствующего локального кольца.

РАП в $F_2((x))$ связывается с проблемой линейного синтеза через следующее простое наблюдение. Многочлен $u(x)$ является минимальным многочленом для начального отрезка $\mathbf{s}_n = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ двоичной последовательности \mathbf{a} тогда и только тогда, когда он является решением задачи РАП для порядка точности n , расширенной с учетом соответствующего элемента поля α .

(III). Инструментом для решения РАП служит аппарат анализа диофантовых уравнений в поле действительных чисел. Преобразуем α в простую цепную дробь

$$\alpha \sim [q_0(x), q_1(x), \dots, q_k(x), \dots],$$

полагая

$$\alpha_0 = \alpha, \quad q_0(x) = [\alpha_0], \quad \alpha'_1 = \{\alpha_0\},$$

и

$$\alpha_k = \alpha'_k{}^{-1}, \quad q_k(x) = [\alpha_k], \quad \alpha'_{k+1} = \{\alpha_k\},$$

всякий раз, когда $\alpha'_k \neq 0$, в противном же случае процедура прерывается. Вычисляем последовательные приближения цепной дроби в соответствии с рекуррентными соотношениями

$$u_k(x) = q_k(x)u_{k-1}(x) + u_{k-2}(x)$$

и

$$v_k(x) = q_k(x)v_{k-1}(x) + v_{k-2}(x)$$

с начальными установками

$$u_0(x) = 1, \quad u_{-1}(x) = 0; \quad v_0(x) = q_0(x), \quad v_{-1}(x) = 1,$$

и положим по определению

$$d_0 = 0; \quad d_k = \deg u_k(x) = \sum_{i=1}^k \deg q_i(x), \quad k \geq 1$$

с условием полагать $d_{N+1} = \infty$ в том случае, когда $\alpha'_{N+1} = 0$. Следует отметить, что всегда выполняется соотношение $d_k < d_{k+1}$, поскольку $\deg q_k(x) \geq 1$ для $k \geq 1$. В [86] доказана

Теорема 1. Если $d_{k-1} + d_k \leq n \leq d_k + d_{k+1}$, то $u(x)$ является решением РАП тогда и только тогда, когда $u(x) = u_k(x) + h(x)u_{k-1}(x)$, $\deg h(x) < 2d_k - n$.

(IV). Данная теорема в терминах многочленов $u_k(x)$ предоставляет полное описание множества решений задачи РАП для любого порядка точности, но не дает рекурсивного

алгоритма для нахождения такого решения. Однако, более тщательное исследование показывает, что ее можно усовершенствовать таким образом, чтобы нужный алгоритм был получен. При этом оказывается, что он совпадает с алгоритмом Берлекампа-Мэсси.

Сначала более утонченно задаются полиномы

$$q_k(x) = \sum_{r=1}^{w_k} x^{t_k - j_{k,r}}, \quad k \geq 1$$

$$0 = j_{k,1} < j_{k,2} < \dots < j_{k,w_k} \leq t_k$$

через ряд из w_k многочленов

$$q_{k,r}(x) = \sum_{i=1}^r x^{t_k - j_{k,i}}, \quad 1 \leq k \leq w_k,$$

а затем соответствующим образом переопределяются многочлены $u_k(x)$, $v_k(x)$ через два ряда полиномов $u_{k,r}(x)$ и $v_{k,r}(x)$, полагая

$$u_{k,r}(x) = q_{k,r}(x)u_{k-1}(x) + u_{k-2}(x)$$

и

$$v_{k,r}(x) = q_{k,r}(x)v_{k-1}(x) + v_{k-2}(x).$$

Легко увидеть, что все многочлены $u_{k,r}(x)$ с одним и тем же k имеют одинаковую степень d_k . Можно показать, что для любого $k \geq 1$ и $1 \leq r \leq w_k$

$$\text{Ord}(\{u_{k,r}(x)\alpha\}) = -d_{k-1} - j_{k,r+1},$$

при условии что $j_{k,w_k+1} = t_k + t_{k+1}$.

Если же теперь обозначить через $W_n(\alpha)$ множество всех многочленов, являющихся решением задачи рациональной аппроксимации (РАП) с точностью порядка n для α , то можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Определим последовательность многочленов $f_n(x)$, положив*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < d_1 \\ u_{k,r}(x), & k \geq 1, \quad d_{k-1} + d_k + j_{k,r} \leq n < d_{k-1} + d_k + j_{k,r+1} \end{cases}$$

и обозначив $l_n = \deg f_n(x)$. Тогда имеем

1) $f_n(x) \in W_n(\alpha)$,

2) Для любого $n \geq d_1$, если $f_n(x) \in W_{n+1}(\alpha)$, то $f_{n+1}(x) = f_n(x)$; в противном случае

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) + x^{(m-l_m)-(n-l_n)} f_m(x), & \text{если } (m-l_m) - (n-l_n) \geq 0, \\ x^{(n-l_n)-(m-l_m)} f_n(x) + f_m(x), & \text{если } (m-l_m) - (n-l_n) < 0, \end{cases}$$

где m - наибольшее целое такое, что $l_m < l_n$.

После доказательства данной теоремы в [86] делается вывод, что всякий раз, когда кто-то пытается синтезировать двоичную последовательность с помощью алгоритма

Берлекампа-Мэсси, он занимается ничем иным, как рекурсивным вычислением многочленов $f_n(x)$, априорным образом заданных в Теореме 2.

3.2.4 Другие методы анализа линейной сложности

Линейная рекуррента в алгоритме Берлекампа-Мэсси определяет также и регистр с линейной обратной связью, что является определенным показателем того, насколько сложным является воспроизведение данной последовательности. Высокая линейная сложность означает, что более длинной будет длина наблюдаемой последовательности для выявления рекурсии, и что длиннее должен быть регистр, требуемый для дублирования последовательности.

Хотя высокая линейная сложность является необходимым условием, следующий тривиальный пример демонстрирует, что это далеко не достаточное условие для приемлемости шифрующей последовательности. Рассмотрим периодическую последовательность периода p , состоящую из одной 1, а остальные биты равны 0. В данном случае линейная сложность равна p , поскольку нет никакого линейного соотношения короче чем $s_{i+p} = s_i$ для всех $i \geq 0$, удовлетворяющего каждому биту последовательности. В то же время ясно, что такая шифрующая последовательность совершенно бесполезна поскольку ее $p - 1$ бит равны нулю.

Эндрю Клаппер [188] продемонстрировал еще одно обстоятельство, важное для линейной сложности шифрпоследовательности, а именно, что последовательность должна иметь высокую линейную сложность не только при побитовом рассмотрении, но также и когда рассматривается как числа (0 или 1) над полями нечетной характеристики. В том случае, когда двоичная последовательность получается из последовательности над полем нечетной характеристики q , то имеется возможность найти q из дисбаланса в коротких подпоследовательностях. Хотя линейная сложность таких последовательностей над $GF(2)$ может быть весьма высокой, она оказывается намного меньшей над $GF(q)$. Клаппером в явном виде получена верхняя граница, и отмечено, в частности, что *геометрические последовательности* [72] вполне могут быть чувствительны к такого рода анализу. Итоговый вывод: хорошие криптографические последовательности должны иметь высокую сложность относительно всех небольших простых чисел.

Существуют и другие алгоритмы для определения линейной сложности двоичной последовательности, хотя практичными их назвать пока сложно. Один очень интересный алгоритм, принадлежащий Геймзу и Чену [125][324] исключительно элегантен, но может применяться только к последовательностям периода 2^n , для которых весь период последовательности известен. Хотя это алгоритм с ограниченной общей применимостью, его математические основы были использованы для доказательства некоторых очень интересных результатов [126][124] при изучении так называемых *последовательностей Де Брюина* [48]. Сравнительно недавно применимость этого алгоритма была расширена Блэкберном [32] до последовательностей с произвольным периодом, хотя по-прежнему для его использования требуется весь цикл последовательности.

3.2.5 Преобразования

Современный уровень изучения линейной сложности и других криптографических свойств последовательностей обстоятельно изложен в ставших уже классическими работах швейцарского криптографа Райнера Рюппеля, в 1980-е годы работавшего в известной фирме "Crypto AG". В 1984 г. Рюппель защитил докторскую диссертацию "Новые подходы к поточным шифрам" [330], которая стала основой книги "Анализ и синтез поточных шифров" [334], вышедшей в 1986 году. Как бы итогом его работы в этой области стала обширная обзорная работа "Поточные шифры" в сборнике 1992 года "Современная криптология" [339].

Для понимания последующего материала, во многом построенного на основе работ Рюппеля, необходимо ввести некоторые базовые понятия и описать технику преобразований, применяемых в настоящее время для анализа криптографических последовательностей и булевых функций.

3.2.5.1 Дискретное преобразование Фурье и линейная сложность

Если α примитивный N -й корень из единицы в произвольном поле \mathbb{F} , то *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ) последовательности из "временной области определения" $a^N = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ с компонентами из \mathbb{F} называется последовательность из "частотной области определения" $A^N = (A_0, A_1, \dots, A_{N-1})$, где

$$A_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \alpha^{ij} \quad i = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Соотношение для обратного ДПФ выглядит так

$$a_j = \frac{1}{N^*} \sum_{i=0}^{N-1} A_i \alpha^{-ij} \quad j = 0, 1, \dots, (N-1),$$

где $N^* = N \bmod p$, если характеристика \mathbb{F} равна p ; и $N^* = N$, если характеристика \mathbb{F} равна нулю.

Между ДПФ и линейной сложностью последовательности существует близкая взаимосвязь, исследованная в [345]. Вычисление i -ой компоненты A_i в ДПФ можно рассматривать как внутреннее произведение между a^N и последовательностью $(\alpha^{0i}, \alpha^{1i}, \alpha^{2i}, \dots, \alpha^{(N-1)i})$. Таким образом, можно описать ДПФ как матричное преобразование

$$A^N = a \cdot F,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha^{N-1} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Аналогично, обратное ДПФ дается как

$$a^N = \frac{1}{N^*} A^N \cdot F^{-1} ,$$

где

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} .$$

Теперь определим циркулянтную матрицу от a^N , обозначаемую $M(a^N)$, как матрицу, строки которой образованы N циклическими левыми сдвигами a^N :

$$M(a^N) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \\ \vdots & & & \\ a_{N-1} & a_0 & \dots & a_{N-2} \end{pmatrix} .$$

Пусть $L = \Lambda(\hat{a})$ - линейная сложность последовательности $\hat{a} = a_0, a_1, a_2 \dots$. Тогда, по определению линейной сложности, L - это наименьшее целое число такое, что $L+1$ -я строка матрицы $M(a^N)$ может быть записана как линейная комбинация предыдущих строк. Тогда ранг $M(a^N)$ равен по крайней мере L . С другой стороны, каждая строка с индексом $L \leq i \leq N-1$ может быть записана как линейная комбинация предыдущих строк (фактически, L предыдущих строк). Следовательно, ранг $M(a^N)$ равен L . Этим показано, что линейная сложность периодической, полубесконечной последовательности $\hat{a} = (a^N)^\infty$ равна рангу циркулянта $M(a^N)$.

Циркулянтная матрица $M(a^N)$ может быть записана как

$$M(a^N) = F^{-1} \cdot D_A \cdot F^{-1} ,$$

где F^{-1} - это инвертированная матрица ДПФ, а D_A - диагональная матрица $N \times N$, на диагонали которой расположены элементы A^N . В условиях того, что α - примитивный N -й корень из единицы, матрицы F и F^{-1} имеют полный ранг. Следовательно,

$$\text{rang}(M(a^N)) = \text{rang}(D_A) .$$

Но ранг D_A равен количеству ненулевых элементов в A^N , то есть равен весу Хэмминга $w_H(A^N)$. Это составляет первую часть следующей теоремы, которая неявно использовалась Блэйхутом [33], а впервые была выведена Мэсси в явном виде в [237]. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема Блэйхута: *Линейная сложность периодической, полубесконечной последовательности $\hat{a} = (a^N)^\infty$ из "временной области" равна весу Хэмминга последовательности конечной длины A^N из "частотной области", где A^N - это ДПФ a^N ,*

$$\Lambda((a^N)^\infty) = w_H(A^N).$$

Аналогично, линейная сложность периодической, полубесконечной последовательности $(A^N)^\infty$ равна весу Хэмминга последовательности конечной длины a^N , где a^N - это обратное ДПФ A^N ,

$$w_H(a^N) = \Lambda((A^N)^\infty).$$

Многие результаты относительно линейной сложности нелинейных комбинаций последовательностей от регистров сдвига имеют такие "перевернутые" доказательства в "частотной" области.

3.2.5.2 Преобразование Уолша и булевы функции

Преобразование Уолша для функции с действительными значениями $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как

$$F(\omega) = \sum_x f(x)(-1)^{\omega \cdot x},$$

где $\omega \cdot x$ обозначает скалярное произведение $\omega_1 x_1 \oplus \omega_2 x_2 \oplus \dots \oplus \omega_n x_n$.

Функция f может быть восстановлена с помощью обратного преобразования Уолша

$$f(x) = 2^{-n} \sum_{\omega} F(\omega)(-1)^{\omega \cdot x}.$$

Пусть функция с действительными значениями $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ будет задана естественно-упорядоченным вектором

$$[f(x)] = [f(0), f(1), \dots, f(2^n - 1)],$$

где $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x = x_1 + x_2 2 + \dots + x_n 2^{n-1}$. Аналогично, пусть преобразование Уолша $F: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{R}$ функции f задано естественно-упорядоченным вектором

$$[F(\omega)] = [F(0), F(1), \dots, F(2^n - 1)].$$

Тогда преобразование Уолша может быть представлено как матричное преобразование

$$[F(\omega)] = [f(x)] \cdot H_n,$$

где H_n обозначает *адамарову матрицу* порядка n . Матрица H_n задается рекурсивно как

$$H_0 = [1]$$

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes H_{n-1},$$

где \otimes обозначает кронекеровское произведение матриц. Поскольку $H_n^2 = 2^n I_n$, то обратное преобразование Уолша задается соотношением

$$[f(x)] = 2^{-n} [F(\omega)] \cdot H_n.$$

Рассматривая значения произвольной булевой функции $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ как действительные числа 0 и 1, можно определить преобразование Уолша для такой булевой функции f . Иногда более удобно работать с эквивалентной двоичной функцией $\hat{f}: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \{-1, +1\}$, задаваемой как

$$\hat{f}(x) = (-1)^{f(x)},$$

и преобразование Уолша которой имеет вид

$$\hat{F}(\omega) = \sum_x (-1)^{f(x) \oplus \omega \cdot x}.$$

Взаимосвязь между $\hat{F}(\omega)$ и $F(\omega)$ задается равенствами

$$\hat{F}(\omega) = 2^n \delta(\omega) - 2F(\omega)$$

$$F(\omega) = 2^{n-1} \delta(\omega) - \frac{1}{2} \hat{F}(\omega)$$

где $\delta(\omega) = 1$ для $\omega = 0$ и равна 0 в противном случае.

В последующем всюду, где бы ни применялось преобразование Уолша для выведения свойств булевой функции f , используется эквивалентная двоичная функция \hat{f} для вычисления \hat{F} .

3.2.5.3 Преобразование алгебраической нормальной формы

Пусть функция $f: \mathbb{F}_q^N \rightarrow \mathbb{F}_q$ - переключающая функция над полем \mathbb{F}_q . Тогда f может быть записана в *алгебраической нормальной форме* (АНФ) как

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_q^N} c_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{F}_q^N$, $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{Z}_q^N$, $c_{\mathbf{i}} \in \mathbb{F}_q$ и

$$\mathbf{x}^i = \prod_{n=1}^N x_n^{i_n}.$$

Порядок члена-произведения определяется как $\sum_{n=1}^N i_n$. Ненулевой постоянный член по определению имеет нулевой порядок. Линейные члены имеют порядок 1. Порядок функции f по определению равен максимальному порядку ее членов-произведений, имеющих ненулевые коэффициенты.

Теперь рассмотрим булеву функцию $f: \mathbb{F}_2^N \rightarrow \mathbb{F}_2$. Пусть функция f будет задана естественно-упорядоченным вектором

$$[f(x)] = [f(0), f(1), \dots, f(2^n - 1)]$$

где $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x = x_1 + x_2 2 + \dots + x_n 2^{n-1}$.

Пусть АНФ функции f задается естественно-упорядоченным вектором

$$[a_i] = [a_0, a_1, \dots, a_{2^n - 1}]$$

где $a_i = a(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $i = i_1 + i_2 2 + \dots + i_n 2^{n-1}$. Тогда преобразование АНФ задается в [177] (докторская диссертация криптографа Ц. Янсена из голландской фирмы Philips Crypto) и в [334] как

$$[a_i] = [f(x)] \cdot A_n,$$

а обратное преобразование АНФ

$$[f(x)] = [a_i] \cdot A_n,$$

где матрица A_n задается рекурсивно

$$A_0 = [1]$$

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes A_{n-1},$$

где \otimes обозначает кронекеровское произведение матриц. Отметим, что A_n - инволюция, то есть что $A_n^2 = I$.

Имеется быстрый способ итеративно вычислять двоичное преобразование АНФ [177] [334]. Пусть $[f^1(x)]$ и $[f^2(x)]$ - первая и вторая половина вектора $[f(x)]$. Тогда

$$[a_i] = [f(x)] \cdot A_n = [[f^1(x)] \cdot A_{n-1}, ([f^1(x)] + [f^2(x)]) \cdot A_{n-1}]$$

и итерация может продолжаться до тех пор, пока не будет достигнута A_0 .

Общее преобразование АНФ для функций над $\text{GF}(q)$ описано в [177].

3.2.6 Профиль линейной сложности.

В середине 1980-х годов Райнером Рюппелем было введено понятие профиля линейной сложности последовательности. Пусть L_i - линейная сложность подпоследовательности $s^i = (s_0, s_1, \dots, s_{i-1})$. Тогда последовательность L_1, L_2, \dots, L_l называется *профилем линейной сложности* последовательности s^l . Для двоичных независимых и равномерно распределенных последовательностей L_i становится случайной величиной. В [331] вычислены матожидание и дисперсия L_i :

$$E(L_i) = \frac{i}{2} + \frac{1}{4} + \frac{(-1)^i}{36} + O(i2^{-i})$$

$$\text{Var}(L_i) = \frac{86}{81} + O(i2^{-i})$$

Эти результаты были обобщены Смитсом [366] для последовательностей над произвольным конечным полем \mathbb{F}_q . Он показал, что дисперсия линейной сложности убывает с ростом размера алфавита последовательности; для больших значений q дисперсия примерно равна $1/q$. Таким образом, чем больше размер \mathbb{F}_q , тем ближе профиль сложности к линии $i/2$.

Близкая взаимосвязь между профилем линейной сложности и цепными (непрерывными) дробями была изучена в [85] [280] [281] [380]. Зная, что профиль линейной сложности случайных последовательностей обычно остается близким к линии $i/2$, можно обратиться к задаче и спросить, насколько случайна последовательность, у которой профиль линейной сложности совершенно соответствует линии $i/2$, то есть где $L_i = \lfloor (i+1)/2 \rfloor$ для $i \geq 1$. В работе [331] было предположено, что последовательность \tilde{s} , содержащая единицы на местах $i = 2^j - 1$ и нули в остальных случаях, обладает таким совершенным профилем линейной сложности. Данное предположение было доказано в [85] с помощью теоремы Евклида. Адаптированная версия этого доказательства была дана в [236] с использованием алгоритма синтеза Берлекампа-Мэсси. В [379] была получена полная характеристика всех двоичных последовательностей, обладающих совершенным профилем линейной сложности. Было показано, что двоичная последовательность \tilde{s} имеет совершенный профиль линейной сложности тогда и только тогда, когда $s_0=1$ и $s_{2i} = s_{2i-1} \oplus s_{i-1}$ для $i \geq 1$. Относительно короткое доказательство этого можно найти также в [281].

Вместо изучения совокупности всех последовательностей заданной длины i можно рассмотреть, как линейная сложность случайно выбранной и затем зафиксированной последовательности поведет себя при изменении i . Нидеррайтер [282] показал, что $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i / i = 1/2$ для почти всех последовательностей над \mathbb{F}_q . По его определению [283], последовательность \tilde{s} обладает хорошим профилем линейной сложности, если существует константа c (которая может зависеть от последовательности), такая что

$$\left| L_i - \frac{1}{2} \right| \leq c \text{Log } i \text{ для всех } i \geq 1,$$

где $\text{Log } i = \max\{1, \log i\}$, и показал что почти все последовательности над \mathbb{F}_q обладают таким хорошим профилем линейной сложности.

Пипер [301] показал, что шифрующая последовательность должна иметь приемлемый профиль линейной сложности для каждой начальной точки. Нидеррайтер показал [283] также, что $\lim_{i \rightarrow \infty} L_i(\tilde{s}_m) / i = 1/2$ для всех сдвинутых версий $\tilde{s}_m = s_m, s_{m+1}, \dots$, $m \geq 0$, почти всех последовательностей \tilde{s} над \mathbb{F}_q . Естественным образом расширив идею хорошего профиля линейной сложности, он дал определение, что последовательность обладает равномерно хорошим профилем линейной сложности, если существует константа c (которая может зависеть от последовательности, но не от сдвига m), такая что

$$\left| \Lambda_i(\tilde{s}_m) - \frac{1}{2} \right| \leq c \text{Log } i \quad \text{для всех } m \geq 0 \text{ и } i \geq 1 .$$

Однако, равномерно хороший профиль линейной сложности - это не типичное свойство случайных последовательностей, поскольку в [283] было показано, что почти никакая последовательность не имеет такого равномерно хорошего профиля линейной сложности.

Профиль линейной сложности совершенно естественным путем предлагает статистический тест: профиль линейной сложности хорошо сконструированного генератора гаммы неотличим от профиля линейной сложности случайных последовательностей. В [366] даны результаты экспериментального изучения практической применимости теста на профиль линейной сложности.

3.3 Периодические последовательности

3.3.1 Прагматические соображения

При изучении свойств последовательностей одна из наиболее важных характеристик - это длина периода. Общепринятой моделью для генератора шифрующей последовательности является *конечный автомат* или *машина с конечным числом состояний*.

В этой модели автомат регулярно изменяет свое содержимое, и на каждом такте его следующее внутреннее *состояние* задается состоянием автомата в настоящий момент времени. Одновременно, на выход автомата выдается какой-то фрагмент (бит, символ) шифрующей последовательности. Поскольку у автомата имеется конечное число состояний, то ясно, что в один из моментов времени некоторое внутреннее состояние появится вторично. Так как следующее состояние и выход детерминированы текущим состоянием, то с момента появления повторения шифрующая последовательность будет идентична той, что была порождена этим же состоянием при предыдущем появлении.

Если период шифрпоследовательности окажется слишком коротким, то различные части открытого текста окажутся зашифрованными идентичным образом, а это составляет серьезную слабость шифра. Зная фрагмент открытого текста, противник может восстановить соответствующий фрагмент шифрующей последовательности. Тот факт, что данный участок гаммы появляется и во множестве других мест шифрпоследовательности, позволяет криптоаналитику противника успешно дешифровать другие шифртексты.

Кроме того, если имеются только шифртексты, зашифрованные одной и той же гаммой, то их можно попарно складывать друг с другом для получения последовательности, которая равноценна сумме двух открытых сообщений и не зависит от шифрующей гаммы. Имея необходимую статистику открытого текста, на этой основе можно восстановить как открытые тексты сообщений, так и саму шифрпоследовательность [322].

Вопрос о том, насколько большим должен быть период шифрующей последовательности, в открытой литературе является дискуссионным и решение его зависит от конкретной области применения. Как отмечает в [322] М. Робшоу, для поточного шифра, работающего на скорости 1 Мбайт/сек, последовательность с периодом 2^{32} повторит сама себя всего через 2^9 секунд или 8.5 минут, поэтому шифрсредства с подобной длиной периода не могут считаться адекватной защитой.

В 1980 году Национальный институт стандартов и технологий США (НИСТ) опубликовал стандарт FIPS-81, в котором заданы различные режимы использования блочного шифра DES (для придания криптоалгоритму надлежащей гибкости) [278]. В частности, режим OFB предусматривает использование алгоритма DES в качестве генератора шифрующей гаммы. Один из важных параметров спецификации допускал изменения в пределах от 8 бит до 64 бит. Вскоре после этого было обнаружено, что при всех значениях параметра кроме 64 период генерируемой последовательности наиболее вероятно становился равным примерно 2^{32} , что совершенно неприемлемо. Если параметр принимал значение 64, то период становился равным примерно 2^{63} , что уже приемлемо для определенных коммерческих приложений. Таким образом, в режиме OFB шифр DES должен использоваться только с обратной связью в 64 бита [91].

Тщательная оценка периода шифрпоследовательности, порождаемой генератором, совершенно необходима при разработке любого поточного шифра. С практической точки зрения, шифрующая последовательность должна быть достаточно длинной для того, чтобы в подавляющем большинстве случаев было невероятным повторное использование одного и того же фрагмента гаммы в процессе шифрования.

С терминологической точки зрения следует отметить, что многие из теоретических результатов в последующих разделах получены при рассмотрении того, что именуется "период" последовательности. Как правило, периодом некоторой последовательности именуется количество бит до того момента, как последовательность заикнется. Но в некоторых случаях, однако, говорят, что период образуют p последовательных бит гаммы, где p - это длина периода. Какой из двух смыслов вкладывается в термин "период" становится ясно из контекста.

3.3.2 Теоретический анализ периодических последовательностей

Пусть \mathbb{F}_q обозначает конечное поле порядка q с характеристикой p . Рассмотрим периодическую \mathbb{F}_q -последовательность $\tilde{s} = (s^T)^\infty$ в предположении, что

$$s_i + c_1 s_{i-1} + \dots + c_L s_{i-L} = 0, \quad L \leq i$$

- это линейная рекуррентна наименьшего возможного порядка, которая может генерировать последовательность \tilde{s} . Многочлен

$$m_{\tilde{s}}(x) = x^L + c_L x^{L-1} + \dots + c_1,$$

связанный с линейной рекуррентой, называется минимальным многочленом последовательности \tilde{s} . Старший коэффициент этого многочлена равен 1; $m_{\tilde{s}}$ является делителем характеристического многочлена любой другой линейной рекурренты, удовлетворяющей \tilde{s} . Последовательность \tilde{s} может быть представлена линейной комбинацией фундаментальных решений соответствующей линейной рекурренты, или эквивалентно, линейной комбинацией корней соответствующего минимального многочлена, давая таким образом прямое "решение из временной области" (см., к примеру, [184] [272] [407]). Пусть $m_{\tilde{s}}(x)$ состоит из K неприводимых множителей $m_k(x)$ кратности e_k ,

$$m_{\tilde{s}}(x) = \prod_{k=1}^K m_k^{e_k}(x).$$

Пусть, далее, d_k будет степенью, а α_k - одним из корней k -го неприводимого множителя. Тогда i -ый член последовательности \tilde{s} однозначно определяется выражением

$$s_i = \sum_{k=1}^K \sum_{j=0}^{d_k-1} \alpha_k^{iq^j} \sum_{l=0}^{e_k-1} A_{k,l}^{q^j} \binom{i+l}{l},$$

где $A_{k,l}^{q^j} \in GF(q^{d_k})$, $A_{k,e_k} \neq 0$ заданы начальными членами последовательности, а биномиальные коэффициенты вычисляются по модулю характеристики p поля \mathbb{F}_q .

Если $m_{\tilde{s}}(x)$ - минимальный многочлен последовательности \tilde{s} , тогда наименьший положительный период T последовательности \tilde{s} равен экспоненте (также именуемой порядком или периодом) многочлена $m_{\tilde{s}}(x)$. Если T_k обозначает экспоненту многочлена $m_k(x)$ или эквивалентно, мультипликативный порядок корня α_k , то ([25] [217])

$$T = p^e \text{НОК}(T_1, \dots, T_K),$$

где e - наименьшее целое такое, что $p^e \geq \max\{e_1, \dots, e_K\}$.

3.4 Суммы и произведения периодических последовательностей

3.4.1 Суммы периодических последовательностей

Когда \mathbb{F}_q -последовательности комбинируются друг с другом, то две операции - почленного сложения и почленного перемножения - представляют принципиальный интерес. Рассмотрим сначала сумму двух последовательностей $\tilde{z} = \tilde{x} + \tilde{y}$. В [167] даются следующие границы для линейной сложности суммы последовательностей

$$\Lambda(\tilde{x}) + \Lambda(\tilde{y}) - 2\text{НОД}(T_x, T_y) \leq \Lambda(\tilde{z}) \leq \Lambda(\tilde{x}) + \Lambda(\tilde{y}).$$

Эквивалентно, можно доказать, что $\Lambda(\tilde{z}) = \Lambda(\tilde{x}) + \Lambda(\tilde{y})$ если $\text{НОД}(T_x, T_y) = 1$ и $(x - 1)$ делит по крайней мере один из двух минимальных многочленов $m_{\tilde{x}}, m_{\tilde{y}}$ [136]. Период последовательности-суммы неявно ограничен следующим условием делимости [167] [334]

$$\frac{\text{НОК}(T_x, T_y)}{\text{НОД}(T_x, T_y)} \leq T_z \leq \text{НОК}(T_x, T_y),$$

где правая сторона известна по крайней мере со времен работы Селмера [354]. Как следствие этого, $T_z = T_x T_y$ тогда и только тогда, когда два периода взаимно просты [136].

3.4.2 Произведения периодических последовательностей

Теперь рассмотрим почленное произведение двух последовательностей (Херлестам [174] использует термин *адамарово произведение* для того, чтобы отличать почленное произведение двух последовательностей от правила перемножения в кольце формальных степенных рядов)

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \tilde{x} \wedge \tilde{y} \\ z_i &= x_i \cdot y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Основным фактом является то, что линейная сложность последовательности-произведения никогда не может превышать произведение линейных сложностей перемножаемых последовательностей [174] [407]. Следовательно, каждый раз, когда линейная сложность последовательности-произведения оказывается равна этой верхней границе, то говорят, что последовательность-произведение достигает максимальной линейной сложности.

Большой интерес вызывает вопрос, при каких условиях (в частности, при каких легко проверяемых условиях), сформулированных в терминах минимальных многочленов последовательностей, результирующая последовательность-произведение будет иметь максимальную линейную сложность. По крайней мере с работы Селмера [354] известно, что если два минимальных многочлена неприводимы и имеют взаимно простые степени, то последовательность-произведение достигает максимальной линейной сложности. По сути дела, Селмер представил ссылку на работу 1881 года, в которой этот результат появляется без доказательства.

Херлестам [174] [175] вывел следующее необходимое и достаточное условие для корней участвующих минимальных многочленов, которое гарантировало бы максимальную линейную сложность последовательности-произведения: $\Lambda(\tilde{z}) = \Lambda(\tilde{x}) \cdot \Lambda(\tilde{y})$ тогда и только тогда, когда самое большее один из многочленов $m_{\tilde{x}}, m_{\tilde{y}}$ имеет кратные корни, а все взаимные произведения их корней различны. К сожалению, это условие нельзя назвать легко проверяемым.

Основываясь на арифметических свойствах периодов T_x и T_y , Рюппель и Штаффельбах [335] вывели следующее условие: Пусть $m_{\tilde{x}}$ не имеет кратных корней и

пусть m_y - неприводим, тогда последовательность-произведение достигает максимальной линейной сложности в том случае, если

$$\text{ord}(q) \bmod t_y = L_x$$

где $\text{ord}(q) \bmod t$ обозначает мультипликативный порядок q по модулю t , а t_y определено как $T_y / \text{НОД}(T_x, T_y)$. Если оба многочлена m_x и m_y неприводимы, то для гарантирования максимальной линейной сложности выполняется либо $\text{ord}(q) \bmod t_y = L_x$, либо $\text{ord}(q) \bmod t_x = L_y$. Впоследствии Йован Голич [136] показал, что это условие является наиболее общим достаточным условием, выраженным в терминах лишь периодов минимальных многочленов. Он также вывел второе достаточное условие (в виде чрезвычайно навороченной формулы), которое представляет скорее теоретический интерес.

Если несложно найти делители t у $(q^L - 1)$, которые удовлетворяют условию $\text{ord}(q) \bmod t = L$, то также легко достигается максимальная линейная сложность последовательности-произведения. Следует обеспечить, чтобы период первого (неприводимого) минимального многочлена содержал t как сомножитель, и чтобы период второго (не обязательно неприводимого) многочлена был взаимно прост с t . Любое целое $t > 1$, которое делит $q^L - 1$, но взаимно просто с $q^i - 1$, $i < L$, называется примитивным фактором $q^L - 1$. Наибольший такой фактор обозначается F_L . Как немедленное следствие такого определения оказывается, что для любого делителя t числа F_L , мультипликативный порядок q по модулю t равен L . Таким образом, максимальная линейная сложность достигается тогда, когда t_y содержит примитивный фактор $q^{L_y} - 1$. Довольно интересно, что для всех целых $q > 1$ и $L > 2$, каждое $q^L - 1$ содержит примитивный фактор, кроме единственного случая $q = 2$ и $L = 6$. Более того, примитивный фактор F_L на самом деле может быть вычислен из L -го кругового многочлена. Как практическое следствие, любое произведение из N m -последовательностей будет достигать максимальной линейной сложности, если соответствующие степени различны между собой и больше 2 [335].

Наконец, менее общее, но более простое условие в том смысле, что оно зависит только от периодов T_x и T_y , дается в работах [136] [167]: последовательность-произведение достигает максимальной линейной сложности, если $\text{НОК}(T_x, T_y) = 1$ (при условии что последовательности ненулевые). Это же самое условие обеспечивает также и максимальный период последовательности-произведения (см. [217] или [354]).

3.4.3 Общая нижняя граница для линейной сложности произведения

В 1994 году австрийские математики Райнер Гёттферт и Харальд Нидеррайтер [165] получили общую нижнюю границу для линейной сложности произведения РСЛОС-последовательностей. Задача сформулирована в терминах минимального многочлена последовательности-произведения.

(I). Пусть \mathbb{F}_q обозначает конечное поле порядка q и с характеристикой p . Для произвольного поля F и монического многочлена (с единичным старшим коэффициентом) $f \in F[x]$ пусть $M_f(f)$ обозначает множество всех РСЛОС-последовательностей в F с минимальным многочленом f .



Харальд Нидеррайтер

Если $F = \mathbb{F}_q$, тогда для простоты пишут просто $M(f)$ вместо $M_F(f)$. Минимальный многочлен РСЛОС-последовательности σ в F будет обозначаться как $m_\sigma \in F[x]$.

В этих обозначениях проблема формулируется следующим образом: имея монические полиномы $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$, получить как можно больше информации о минимальном многочлене $m_{\sigma\tau} \in \mathbb{F}_q[x]$ последовательности-произведения $\sigma\tau = (s_n t_n)_{n=0}^\infty$ в \mathbb{F}_q , где $\sigma = (s_n)_{n=0}^\infty \in M(f)$ и $\tau = (t_n)_{n=0}^\infty \in M(g)$. Цирлер и Миллз [407] определили особого вида многочлен $Z(f, g) \in \mathbb{F}_q[x]$, который делится всеми минимальными многочленами $m_{\sigma\tau}$ с $\sigma \in M(f)$ и $\tau \in M(g)$. В качестве дополнения этого результата, Гёттферт и Нидеррайтер построили многочлен $A(f, g) \in \mathbb{F}_q[x]$, который делит все минимальные многочлены $m_{\sigma\tau}$ с $\sigma \in M(f)$ и $\tau \in M(g)$. Таким образом, получены соотношения делимости

$$A(f, g) \mid m_{\sigma\tau} \mid Z(f, g)$$

для всех $\sigma \in M(f)$ и $\tau \in M(g)$. Для определенных многочленов $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$ удовлетворяется равенство $A(f, g) = Z(f, g)$, и в этом случае из соотношения делимости следует

$$m_{\sigma\tau} = A(f, g) = Z(f, g) \quad \text{для всех } \sigma \in M(f) \text{ и } \tau \in M(g),$$

а это означает, что минимальный многочлен последовательности-произведения $\sigma\tau$ уникальным образом задается минимальными многочленами последовательностей σ и τ .

(II). Для описания многочлена $A(f, g)$ требуется введение следующего определения (подразумевается, что множество положительных целых обозначается как \mathbb{N} , а множество неотрицательных целых как \mathbb{N}_0).

Определение. Для $a, b \in \mathbb{N}$ определим $a \vee b$ как максимальное значение из $i+j+1$ таких, что

$$\text{биномиальный коэффициент } \binom{i+j}{i} \text{ не делится на } p, \text{ где } i, j \in \mathbb{N}_0 \text{ с } 0 \leq i \leq a-1 \text{ и } 0 \leq j \leq b-1.$$

На основании этого определения сразу получаем, что $\max(a, b) \leq a \vee b \leq a + b - 1$.

Более того, имеем

$$a \vee b = a + b - 1 \Leftrightarrow \binom{a+b-2}{a-1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Пусть f и g - неконстантные монические полиномы над \mathbb{F}_q . Без существенной потери общности можно считать, что $f(0) \neq 0$ и $g(0) \neq 0$. Пусть E - поле разложения многочлена fg над \mathbb{F}_q , и пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in E$ - различные корни f с соответствующими кратностями a_1, \dots, a_r , а $\beta_1, \dots, \beta_s \in E$ - различные корни g с соответствующими кратностями b_1, \dots, b_s .

Положим

$$C = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i \leq r \text{ и } 1 \leq j \leq s\}.$$

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ - будут различные элементы среди произведений $\alpha_i \beta_j$ с $(i,j) \in C$. Разложим C на попарно непересекающиеся подмножества

$$C_d = \{(i,j) \in C : \alpha_i \beta_j = \gamma_d\} \text{ для } 1 \leq d \leq t.$$

Теперь определим

$$A(f,g)(x) = \prod_{d=1}^t (x - \gamma_d)^{e_d} \in \mathbb{F}_q[x],$$

где звездочка означает, что произведение распространяется лишь на те d , которые удовлетворяют следующему свойству: множество C_d содержит пару (i,j) , для которой $\binom{a_i + b_j - 2}{a_i - 1} \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $a_k \vee b_l < a_i \vee b_j$ для всех $(k,l) \in C_d$ с $(k,l) \neq (i,j)$. С помощью такой уникально определенной пары $(i,j) \in C_d$ затем определяют $e_d = a_i \vee b_j = a_i + b_j - 1$.

(III). Главным полученным результатом является Теорема, впервые дающая общую нижнюю границу для линейной сложности произведения РСЛОС-последовательностей.

Теорема. Пусть $f, g \in \mathbb{F}_q[x]$ - неконстантные монические полиномы с $f(0)g(0) \neq 0$, и пусть $\sigma \in M(f)$ и $\tau \in M(g)$. Тогда минимальный многочлен $m_{\sigma\tau}$ последовательности-произведения $\sigma\tau$ делится описанным выше многочленом $A(f,g)$. В частности, для линейной сложности $L(\sigma\tau)$ последовательности $\sigma\tau$ имеем

$$L(\sigma\tau) \geq \deg(A(f,g)).$$

Для доказательства теоремы используются две важные леммы.

Лемма 1. Последовательность $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ в поле F является РСЛОС-последовательностью с минимальным многочленом $m \in F[x]$ тогда и только тогда, когда порождающая функция $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{-n-1}$ последовательности $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ является рациональной функцией вида h/m , где $h \in F[x]$, $\deg(h) < \deg(m)$, а $\text{НОД}(h,m) = 1$.

Лемма 2. Пусть F - произвольное поле с характеристикой p , пусть $\alpha, \beta \in F$ с $\alpha\beta \neq 0$, и пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $\sigma \in M_F((x - \alpha)^a)$ и $\tau \in M_F((x - \beta)^b)$ минимальный многочлен $m_{\sigma\tau} \in F[x]$ последовательности-произведения имеет вид

$$m_{\sigma\tau}(x) = (x - \alpha\beta)^c$$

с таким $c \in \mathbb{N}_0$, который может зависеть от σ и τ и удовлетворяет соотношению $0 \leq c \leq a \vee b$. Более того, $c = a + b - 1$ тогда и только тогда,

когда $\binom{a + b - 2}{a - 1} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

3.5 Другие меры сложности

3.5.1 Общие результаты

Этапной работой в области обобщения концепции линейной сложности стала докторская диссертация "Исследование нелинейных систем поточного шифрования. Методы конструирования и оценки" Ц. Янсена [177], голландского криптографа из фирмы Philips-Crypto. Янсенем тщательно изучены алгоритмы для оценки *сложности максимального порядка* последовательности. Данная концепция является обобщением линейной сложности в том смысле, что рекуррента, связывающая биты последовательности, больше не должна быть линейной. Таким образом, имея некоторую последовательность, можно идентифицировать ее гораздо более короткой рекуррентой, что позволяет воссоздать эту последовательность с помощью регистра сдвига с нелинейной обратной связью вместо чисто линейного регистра.

Существуют совершенно очевидные взаимосвязи между сложностью линейной и высшего порядка. Например, сложность максимального порядка всегда меньше или равна линейной сложности. Однако, ожидаемое поведение сложности максимального порядка для случайно генерируемой последовательности не так легко вычислить [177]. Поэтому практичность сложности максимального порядка в статистических тестах можно охарактеризовать как довольно ограниченную, хотя она и представляет большой теоретический интерес.

Во многих случаях ([274] [177]) сложность максимального порядка бывает труднее соотнести с линейной сложностью, чем с другой мерой сложности, именуемой *сложностью Зива-Лемпела* (или сложность Лемпела-Зива у других авторов) [408], [409]. Следует также отметить, что сложность Зива-Лемпела и сложность максимального порядка построены на совершенно различных принципах, поскольку сложность Лемпела-Зива дает некоторую меру скорости, с которой в последовательности генерируются новые паттерны. Корни сложности Зива-Лемпела уходят в область сжатия данных и того факта, что случайная последовательность не может быть существенно скомпрессирована. К несчастью, полезность этой меры также в настоящее время ограничена, поскольку довольно сложно задать практичную тестовую статистику, с помощью которой можно было оценивать генераторы шифрпоследовательностей.

Причина же того, что результаты оценки сложности максимального порядка и сложности Зива-Лемпела могут быть близко связаны, кроется в том факте, что обе эти сложности можно вычислять с использованием так называемого *дерева суффиксов* [113], [289] (см. Раздел 3.5.3). Линейная же сложность не может быть вычислена таким способом, и это делает непостоянной задачу соотнесения линейной сложности и сложности Зива-Лемпела. Янсен [177] описал похожую технику для вычисления сложности максимального порядка, используя *направленные ациклические графы слов*.

Использование дерева суффиксов показывает, что сложность максимального порядка оказывается полезной лишь в тех случаях, когда ее можно эффективно вычислять для представляющей интерес последовательности. Эта же самая проблема является главным камнем преткновения в развитии еще одной меры сложности - *квадратичного размаха* [73] (см. Раздел 3.5.2).

Квадратичный размах находится между линейной сложностью и сложностью максимального порядка, поскольку он сосредоточен на использовании квадратичных

рекуррент для генерации последовательности. В настоящее время это только лишь теоретически интересная мера, поскольку не существует эффективного способа вычисления квадратичного размаха произвольной последовательности. Поэтому пока имеется немного результатов по вычислению квадратичного размаха для имеющейся двоичной последовательности [71], [185] и еще меньше - по ожидаемым значениям для случайно генерируемой последовательности. Если же, однако, эти проблемы удастся преодолеть, то квадратичный размах почти наверняка станет еще одной полезной мерой сложности.

Наконец, следует также упомянуть так называемый *2-адический размах* последовательности [189], [191]. Новаторская техника 2-адического анализа, предложенная американцами Клаппером и Горецки, появилась в процессе изучения криптосхемы поточного шифрования на основе *сумматора* [333], и ей посвящен специальный Раздел 7.4 в данной книге. Эта техника показала способ строгой математической формализации еще одного класса регистров сдвига, и хотя большинство исследований сконцентрировано на криптоаналитическом потенциале новой техники, получены также результаты, интересные для разработчиков шифров [190], [192].

3.5.2 Квадратичный размах

В 1989 г. Чен и Геймз [73] представили алгоритм для вычисления квадратичного размаха последовательности. Этот алгоритм определяет коэффициенты полинома обратной связи в повторяющемся процессе решения систем линейных уравнений. Многочлен обратной связи $f(X)$ является квадратичным, если его можно записать в виде

$$f(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_i x_j,$$

где $a_{i,j} \in Z_2$ для $1 \leq i, j \leq m$, $i \neq j$. Например, если $s = s_1, s_2, \dots, s_8$ - последовательность длины 8, то коэффициенты полинома обратной связи для регистра сдвига длины 3 даются как решение системы

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_1 s_2 & s_3 & s_1 s_3 & s_2 s_3 \\ s_2 & s_3 & s_2 s_3 & s_4 & s_2 s_4 & s_3 s_4 \\ s_3 & s_4 & s_3 s_4 & s_5 & s_3 s_5 & s_4 s_5 \\ s_4 & s_5 & s_4 s_5 & s_6 & s_4 s_6 & s_5 s_6 \\ s_5 & s_6 & s_5 s_6 & s_7 & s_5 s_7 & s_6 s_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_{1,2} \\ a_3 \\ a_{1,3} \\ a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{pmatrix}.$$

Если данная линейная система не имеет решения, то квадратичный размах последовательности s с необходимостью превышает 3. Этот алгоритм Чена и Геймза, также как и алгоритм Берлекампа-Мэсси, является так называемым "*он-лайнным*" алгоритмом, то есть, другими словами, в данном алгоритме последовательность обрабатывается по одному знаку за один раз (слева направо) и размах вычисляется для того фрагмента последовательности, который к этому моменту считан.

Пусть размах первых k знаков последовательности s равен n_k , так что $f_k(X)$ - текущий полином обратной связи. Если $s_{k+1} \neq f(s_{k-n_k+1}, \dots, s_k)$, то говорят, что появилось *расхождение*. Когда появляется расхождение, то, по-видимому, необходимо увеличить длину регистра сдвига. В случае линейного размаха текущая величина размаха изменяется, если $n_k < \frac{k}{2}$; и в такой ситуации новый линейный размах задается как $(k+1) - n_k$ [334]. Эффективность алгоритма Берлекампа-Мэсси отчасти базируется на том факте, что он дает знание об истинной величине приращения регистра в случае появления расхождения. В случае же квадратичного размаха соответствующее приращение, которое необходимо сделать при появлении расхождения, точно неизвестно, и его необходимо отыскивать путем поиска в интервале возможных приращений. Алгоритм Чена и Геймза является очень общим, и фактически его можно использовать для вычисления размаха $F_k(s)$ при $f_k(X) \quad 0 \leq k \leq n$. Возможно, сами Геймз и Чен потому дали комментарий, что определение размаха последовательности является сложной проблемой, что их алгоритм становится менее эффективным для более высоких степеней полиномов обратной связи.

3.5.3 Деревья суффиксов

В 1992 году канадские криптографы Люк О'Коннор и Тим Снайдер из Университета Ватерлоо (Онтарио) представили метод оценки сложности максимального порядка на основе анализа структуры данных, известной как "дерево суффиксов" [289].

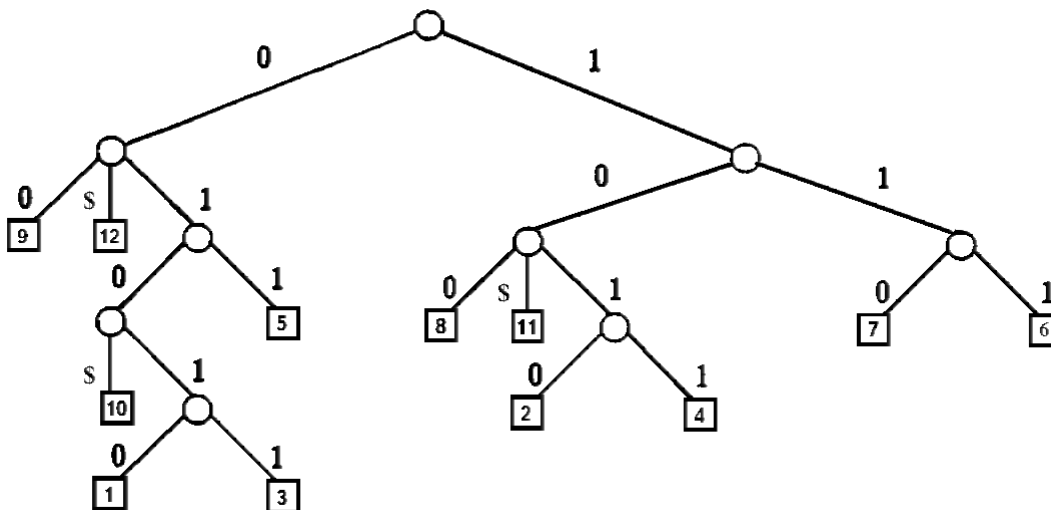
Алгоритмы сверки паттернов реализуют методы для нахождения и/или выделения некоторого паттерна или подпоследовательности w в заданном массиве текста Y [3]. Если планируется многократный поиск в Y , то массив Y можно обработать заранее и хранить его в виде определенной структуры данных для того, чтобы операции поиска были более эффективны. В работе [3] А.В. Ахо и др. предложили структуру представления данных, полезную при решении следующих задач сверки паттернов: (а) имея текст Y и паттерн w , найти все вхождения w в Y ; (б) имея текст Y , определить самую длинную повторяющуюся подпоследовательность в Y ; (в) имея два текста Y_1 и Y_2 , определить самую длинную подпоследовательность, встречающуюся как в Y_1 , так и в Y_2 . В данный момент наибольший интерес представляет задача (б).

Предложенная структура данных сначала получила название "дерево позиций", а позднее "дерево суффиксов". Пусть $\mathbf{w} = w_1, w_2, \dots, w_n, \$$ - последовательность длины $n+1$ такая, что $\$$ - уникальный знак, появившийся только на позиции $n+1$. Тогда каждая позиция в \mathbf{w} уникально идентифицируется по крайней мере одной подпоследовательностью \mathbf{w} , а именно $w_i, w_{i+1}, \dots, w_n, \$$. Такие подпоследовательности именуется *суффиксами* \mathbf{w} . Пусть $v(i)$ - кратчайшая подпоследовательность, однозначно идентифицирующая позицию i в \mathbf{w} . Рассмотрим процесс вставки $v(1), v(2), \dots, v(n)$ в дерево $T(\mathbf{w})$, которое называют *деревом суффиксов* для \mathbf{w} . Дерево $T(\mathbf{w})$ будет иметь n листьев, соответствующих первым n первым позициям \mathbf{w} , а концы этого дерева помечены так, что маршрут от корня до листа, представляющего позицию i , - это $v(i)$ для $0 \leq i \leq n$. Высота дерева суффиксов $h(T(\mathbf{w}))$ - это длина самого длинного маршрута от корня до листа.



Люк О'Коннор

Дерево суффиксов для $s = 010101110010\$$ представлено на рисунке.



Размах последовательности s превышает k , когда имеются две подпоследовательности $s^1 = s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k-1}$ и $s^2 = s_j, s_{j+1}, \dots, s_{j+k-1}$ такие, что $s^1_{i+h} = s^2_{j+h}, 0 \leq h < k$, а $s_{i+k} \neq s_{j+k}$. Будем говорить, что подпоследовательность $s' = s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k-1}$ появляется в s с двумя различными символами-преемниками. Тогда никакая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ от k переменных не может сгенерировать последовательность s , поскольку

$$f(s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k-1}) = s_{i+k} \neq s_{j+k} = f(s_j, s_{j+1}, \dots, s_{j+k-1})$$

Для последовательности w пусть $\text{СДПП}(w)$ обозначает самую длинную повторяющуюся подпоследовательность в w , и пусть $|\text{СДПП}(w)|$ обозначает длину $\text{СДПП}(w)$. Тогда отметим, что $|\text{СДПП}(w)| \leq h(T(w)) - 1$. Для приведенного на рисунке примера при $s = 010101110010\$$ будем иметь $\text{СДПП}(s) = 0101$ и $|\text{СДПП}(s)| = 4$. Здесь $|\text{СДПП}(w)| = h(T(w)) - 1$, что в общем случае не так. На самом деле, различие между размахом некоторой конечной последовательности и длиной ее самой длинной повторяющейся подпоследовательности может быть весьма существенным. Рассмотрим $(n+1)$ -битовую последовательность

$$s = 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1} \$,$$

для которой $|\text{СДПП}(s)| = n - 2$, в то время как размах $M(s) = 1$ (подразумевается, что регистр сдвига не должен генерировать $\$$, поскольку он добавляется лишь для завершения суффиксов). В таком случае, размах произвольной последовательности s - это самая длинная подпоследовательность s' , которая появляется в s с двумя различными символами-преемниками β_1, β_2 , такими что $\beta_1, \beta_2 \notin \{\$\}$. Более строго, в [289] доказана

Теорема. *Размах последовательности s равен самому длинному маршруту от корня дерева суффиксов $T(s)$ до листа u такого, что родитель u имеет по крайней мере двух детей, концы которых не помечены символом $\$$.*

В общем случае можно считать, что высота дерева суффиксов - это верхняя граница для сложности максимального порядка.

3.6 Вместо резюме: две стороны теоретико-системного подхода.

Теоретико-системный подход [339] к разработке поточных шифров имеет две стороны. Одна цель - это разработка методов и строительных криптоблоков, которые обладают доказуемыми свойствами относительно определенных теоретико-системных мер, таких как период, линейная сложность, распределение частот и т.п.. Вторая цель - изучение криптоаналитических принципов и разработка конструктивных решений, которые делали бы невозможными атаки на основе этих принципов. Такими фундаментальными криптоаналитическими принципами являются, к примеру (см. последующие разделы): замена и аппроксимация, предпочтительно линейными компонентами; корреляционные атаки "разделяй-и-вскрывай" (на ключевом пространстве), использование статистических недостатков (таких как межсимвольные зависимости). Для того, чтобы предотвратить криптоаналитические атаки, основанные на этих фундаментальных принципах, разработан и обновляется набор общих конструктивных критериев для генераторов шифрующей гаммы [20] [301] [334] [360], например:

1. Длинный период, отсутствие повторений;
2. Критерии линейной сложности: большая линейная сложность, профиль линейной сложности, локальная линейная сложность и т.д.;
3. Статистические критерии, такие как идеальные распределения l -грамм;
- 4.Замешивание: каждый бит гаммы должен быть результатом сложного преобразования всех или большинства бит ключа;
5. Рассеивание: избыточность в субструктурах должна быть рассеяна по статистике дальнего действия;
6. Критерии нелинейности для булевых функций, такие как корреляционный иммунитет порядка m , расстояние до линейных функций, лавинный критерий и т.д.

Любой стойкий генератор гаммы должен удовлетворять этому набору общих конструктивных критериев. При теоретико-системном подходе шифры разрабатываются для непосредственного удовлетворения этим критериям (вообще говоря, при наиболее благоприятных условиях для криптоаналитика). Несомненно, на сегодня это наиболее широко распространенный подход к практической стойкости.

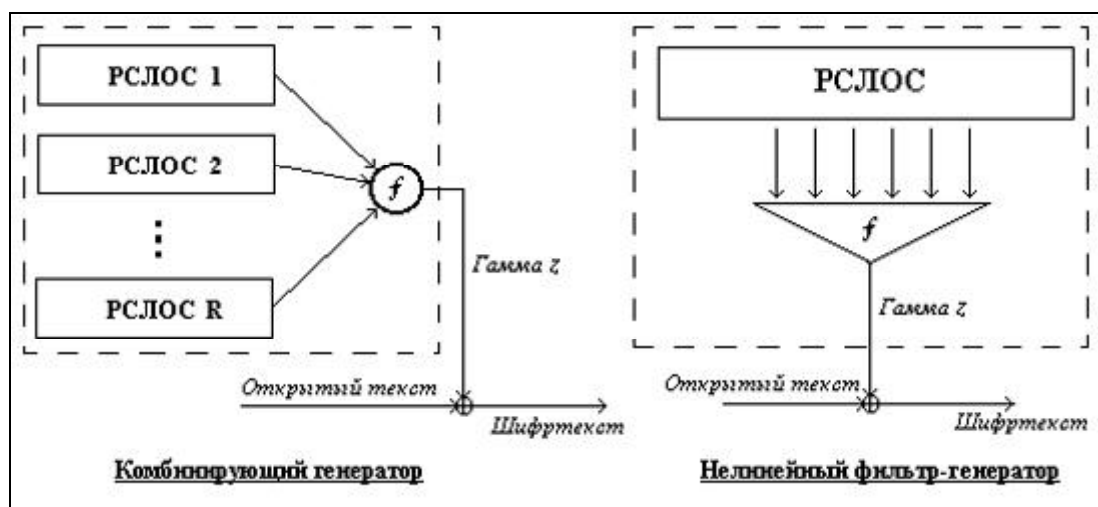
Но главная проблема в том, что эти конструктивные критерии лишь частично отражают общие криптоаналитические принципы. Может быть так, что генератор доказуемо удовлетворяет всем этим критериям, однако оказывается нестойким. Или другими словами, конструктивные критерии образуют набор необходимых, но не достаточных условий для стойкости генератора шифрующей гаммы. Преимущество теоретико-системного подхода в том, что каждая новая шифрсистема создает сложную и ранее неизвестную проблему для криптоаналитика. Вскрытие такой системы является "неудобной" проблемой по сравнению с криптоанализом систем, основанных на некоторых "известных" проблемах типа факторизации или дискретного логарифмирования. ♦

Глава 4

Базовые схемы и их криптоанализ

4.0 Функции от периодических последовательностей

При построении криптосхемы на основе регистров сдвига с линейной обратной связью имеется два альтернативных и достаточно очевидных способа генерирования шифрующей последовательности. Первый способ - использовать несколько регистров параллельно и комбинировать их выход каким-либо криптографически надежным (хочется надеяться) методом. Такие генераторы обычно именуется *комбинирующими генераторами* (см. Раздел 4.2). Другая альтернатива - генерировать выходную последовательность как некоторую нелинейную функцию от состояний единственного регистра (а в более общем случае - любого счетчикового устройства); такой регистр принято именовать *фильтр-генератором* или *фильтрующим генератором* (см. Раздел 4.1).



Очевидно, что фильтр-генератор можно рассматривать как частный случай комбинирующего генератора, у которого все комбинируемые последовательности удовлетворяют одной и той же рекурренте. Но, поскольку криптоанализ схем и особенности корреляционных атак (см. Разделы 4.3 и 4.4) несколько различаются, то полезно рассматривать каждый класс по отдельности.

Большинство из предложенных схем генераторов (см. Главу 8) попадает в один из этих двух классов. Во-первых, стимулом для этого стал технологический прогресс, поскольку регистры сдвига и комбинирующие компоненты, такие как триггеры, мультиплексоры, чипы памяти (RAM) и т.д., стали свободно доступны на рынке. Во-вторых, теоретико-системные свойства этих генераторов, такие как период, линейная

сложность и статистика часто поддаются анализу благодаря детерминированной природе этих (нелинейных) устройств.

При рассмотрении этих двух классов генераторов следует всегда помнить, что любая периодическая последовательность имеет конечный и уникальный линейный эквивалент. Основное требование для криптогенератора состоит в том, чтобы он был непредсказуем. Отсюда непосредственно следует, что линейная сложность его выходной последовательности должна быть достаточно большой, чтобы помешать любой атаке, основанной на алгоритме Берлекампа-Мэсси для синтеза регистра сдвига [232].

Для регистра сдвига с линейной обратной связью, порождающего последовательность максимальной длины (иначе, m -последовательность) принято обозначение m -РСЛОС. Для РСЛОС длины L и с полиномом обратной связи $C(D)$ принято обозначение $\langle C(D), L \rangle$.

4.1 Фильтрующий генератор

Обратимся к рассмотрению нелинейных комбинаций различных фаз одной последовательности (рассматривается двоичный случай).

Фильтр-генератор

Вход:

параметры: один m -РСЛОС $\langle C(D), L \rangle$

ключ: выходная функция $f: \mathbb{F}_2^L \rightarrow \mathbb{F}_2$

начальное состояние a_0 регистра

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть РСЛОС (преобразование состояния F): $a_i = F(a_{i-1})$

2. Вычислить $z_i = f(a_i)$

Выход: последовательность из $z_i, i = 1, 2, \dots$

4.1.1. Линейная сложность фильтр-генератора

Одна из самых ранних работ, посвященных фильтр-генераторам, статья Грота 1971г. "Генерирование двоичных последовательностей с контролируемой сложностью" [166] сосредоточена на использовании произведений второго порядка, которые применяются к ячейкам РСЛОС с примитивным многочленом обратной связи. Ни одной ячейке не позволялось использоваться больше одного раза. Для получения приемлемой статистики, Грот суммировал настолько много произведений второго порядка, насколько возможно. Нелинейность более высокого порядка достигалась с помощью многослойной структуры, когда последовательности, генерируемые суммированием произведений второго порядка, комбинировались в следующем слое с другими произведениями второго порядка, и так далее. Грот сумел показать рост матожидания линейной сложности генерируемой последовательности как функции от растущего порядка нелинейности. Но, как отмечает Рюппель [339], Грот не заметил, что максимальная линейная сложность достигается не

всегда. Таким образом, его результаты - это только верхняя граница для истинной линейной сложности.

Хорошо известно, что для регистра сдвига (или счетчика) периода T и последовательности с периодом, делящим T , существует функция f , отображающая этот счетчик в данную последовательность. Рассмотрим двоичный фильтр-генератор, его общий линейный эквивалент будет состоять из всех РСЛОС, чей характеристический многочлен делит $x^{2^L-1} - 1$. При этом $2^L - 1$ последовательностей, соответствующих $2^L - 1$ состояниям этого общего линейного эквивалента являются линейно независимыми. Также может быть показано [334], что линейно независимы $2^L - 1$ последовательностей, соответствующих $2^L - 1$ коэффициентам в АНФ функции f . Это предполагает принципиальную, по крайней мере, возможность решения проблемы генерации функций, которые порождают последовательности гарантированной линейной сложности. Сначала надо зафиксировать желаемую линейную сложность путем выбора нужной линейной комбинации из $2^L - 1$ базисных последовательностей, задаваемых общим линейным эквивалентом. Затем выразить результирующую последовательность в терминах базиса АНФ, что непосредственно даст требуемую функцию f . Но задание функции f , вообще говоря, требует столько данных, каков первый период последовательности. Таким образом, приведенная процедура довольно непрактична, и более реалистичная цель - находить классы функций с приемлемым ключевым пространством, которые генерировали бы большую линейную сложность при использовании в фильтр-генераторах.

Кей [184] показал, что если f имеет порядок k , то линейная сложность последовательности \tilde{z} ограничена сверху следующим выражением

$$\Lambda(\tilde{z}) \leq L_k = \sum_{j=1}^k \binom{L}{j}.$$

Но в криптографических приложениях гораздо больший интерес вызывает нижняя граница, другими словами, генерация последовательностей с гарантированно большой минимальной сложностью. Для некоторого подмножества класса *бент-функций* (см. Раздел 5.3) Кумар и Шольц [207] сумели вывести нижнюю границу, которая слегка превышает

$$\Lambda(\tilde{z}) \geq \binom{L/2}{L/4} 2^{L/4},$$

где L должно быть кратно 4. Бернаскони и Гюнтер [26], и независимо от них Рюппель [334] вывели несколько отличающиеся границы, комбинация которых дает следующую нижнюю границу. Пусть \tilde{z} порождается любой ненулевой линейной комбинацией из N последовательных произведений k -ого порядка ($k < L$) из эквидистантных фаз m -последовательности \tilde{s} ,

$$\tilde{z} = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \tilde{s}^j \tilde{s}^{j+\delta} \dots \tilde{s}^{j+(k-1)\delta},$$

где $\text{НОД}(\delta, 2^L - 1) = 1$, тогда линейная сложность последовательности \tilde{z} имеет нижнюю границу

$$\Lambda(\tilde{z}) \geq \binom{L}{k} - (N - 1)$$

Эта нижняя граница сохраняется, когда к данной сумме произведений k -ого порядка добавляется произвольная функция f' , при условии, что ее порядок k' меньше k . Как практическое следствие, имеется большой класс функций для реализации последовательностей с гарантированным минимумом линейной сложности.

В [334] Рюппелем проведен вероятностный анализ для случая, когда случайно выбираемая функция f порядка k применяется к состояниям m -РСЛОС простой длины L . Показано, что доля P_n фильтр-генераторов с нелинейным порядком k , порождающих последовательности линейной сложности L_k , ограничена снизу выражением

$$P_n \approx e^{-L_k/L2^L} > e^{-1/L}.$$

Следовательно, доля вырожденных последовательностей стремится к нулю с ростом L .

В 1994 году Джеймс Мэсси и Ширли Серчонек [242] представили новую технику для анализа линейной сложности нелинейно фильтруемых m -последовательностей. Их методика построена на основе дискретного преобразования Фурье и теоремы Блэйхута о том, что линейная сложность n -периодической последовательности в $GF(q^n)$ равна весу Хэмминга сопряженной с ней последовательности из частотной области определения (см. Раздел 3.2.5.1). Мэсси и Серчонек обобщили результат Кея [184], показав, что произведение второго порядка двух разных фаз m -последовательности никогда не вырождается только в том случае, если степень ее минимального многочлена проста.

4.1.2. Алгоритм для оценки линейного размаха нелинейно фильтруемых последовательностей

В 1995 году испанские математики П.Кабальеро-Гил и А.Фустер-Сабатер представили алгоритм для вычисления нижних границ глобальной линейной сложности нелинейно фильтруемых псевдошумовых (ППШ-) последовательностей [341]. В отличие от предшествовавших работ, предложенная ими схема применима к произвольной нелинейной функции (требуется лишь, чтобы был единственный член максимального порядка).

(I) Базовые обозначения и концепции. Пусть S - выходная последовательность РСЛОС, минимальный многочлен которого $m_s(x) \in GF(2)[x]$ примитивен; L - длина этого РСЛОС; $\alpha \in GF(2^L)$ - корень $m_s(x)$.

Пусть f обозначает единственный член максимального порядка в нелинейной k -ого порядка функции, применяемой к состояниям РСЛОС. То есть f - это произведение k различных фаз S , $f = s_{n+t_0} s_{n+t_1} \dots s_{n+t_{k-1}}$, где символы t_j ($j=0,1,\dots,k-1$) - целые, удовлетворяющие $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < 2^L - 1$. В рамках данной работы изучается только вклад f в линейную сложность результирующей последовательности.

Согласно Рюппелю [334], *тест на присутствие корня* для произведения различных фаз ПШ-последовательности формулируется следующим образом:

$\alpha^E \in GF(2^L)$ - корень минимального многочлена сгенерированной последовательности тогда и только тогда, когда

$$A_E = \begin{vmatrix} \alpha^{t_0 2^{e_0}} & \dots & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_0}} \\ \alpha^{t_0 2^{e_1}} & \dots & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{t_0 2^{e_{k-1}}} & \dots & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_{k-1}}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Здесь $\alpha^{e_j} \in GF(2^L)$ ($j=0,1,\dots,k-1$) связаны с k соответствующими фазами (s_{n+t_j}) ПШ-последовательности. E , репрезентативный элемент кругового смежного класса E , - это положительное целое число вида $E = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \dots + 2^{e_{k-1}}$, где e_i ($i=0,\dots,k-1$) - различающиеся друг от друга значения из интервала $[0,L)$. В этих условиях α^E и его сопряженные корни вносят вклад в линейную сложность нелинейно фильтруемой последовательности. Величина этого вклада равна количеству элементов в таком круговом смежном классе.

Определение. *Круговой смежный класс E является невырожденным, если соответствующий ему определитель A_E не равен нулю.*

Отметим, что каждый круговой смежный класс E легко можно связать с двоичной формой записи целого числа E . Этот факт позволяет совершенно естественным образом ввести двоичные наборы с длиной L и k "единицами". Действительно, круговой смежный класс E эквивалентным образом можно охарактеризовать с помощью:

- (i) целого числа E вида $E = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \dots + 2^{e_{k-1}}$.
- (ii) L -битного набора, в котором цифры "1" находятся на позициях $\{e_i\}_{i=0,\dots,k-1}$.
- (iii) определителя A_E как задано выше.

Пусть $E = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \dots + 2^{e_{k-1}}$ и $F = 2^{f_0} + 2^{f_1} + \dots + 2^{f_{l-1}}$ - два L -битных набора и $k < l$. Запись вида $E \subset F$ означает, что $\{e_i\}_{i=0,\dots,k-1} \subset \{f_i\}_{i=0,\dots,l-1}$. То есть, что все "единицы" в E имеются также в F . Для множества L -битных наборов $\{E_n\} = \{E_1, \dots, E_N\}$ запись $OR[\{E_n\}]$ означает L -битный набор, образованный побитовым применением операции OR к L -битным наборам этого множества. Очевидно, что $\forall n \in \{1, \dots, N\}, E_n \subset OR[\{E_n\}]$.

Определение. *Круговой смежный класс E_d является смежным классом с постоянным расстоянием, если его репрезентативный элемент E_d имеет вид $E_d = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \dots + 2^{e_{k-1}}$, $e_i \equiv d \cdot i \pmod{L}$ ($i=0,\dots,k-1$), где d - положительное целое меньше L такое, что $(d, L) = 1$.*

Для упрощения обозначений определитель A_{E_d} будет обозначаться просто A_d . Будем называть "j-ой 1 в E_d " ту единицу в L -битном наборе, связанном со смежным классом E_d , которая находится на позиции, обозначенной e_j . И, наконец, приведем результат, полученный этими же авторами годом раньше относительно линейной сложности функции с единственным членом максимального порядка [340]:

Теорема. Пусть f - член максимального порядка, определенный выше. Функция f является функцией k -го порядка тогда и только тогда, когда все смежные классы с постоянным расстоянием невырождены.

Следствие. Линейная сложность Λ результирующей последовательности ограничена снизу соотношением $\Lambda \geq N_L \cdot L$, где $N_L = \frac{\Phi(L)}{2}$ (как $\Phi(L)$ обозначена функция Эйлера). Здесь N_L представляет количество смежных классов с постоянным расстоянием, а L - количество элементов в таких смежных классах.

Следует отметить, что оба этих результата не зависят от РСЛОС, порядка k рассматриваемой функции и конкретного вида члена f .

(II) Теоретический фундамент. Основная идея данной работы сводится к следующему: одновременно может существовать немного вырожденностей. Для доказательства этого предположения предприняты три шага. Во-первых, полагаются одновременно вырожденными N смежных классов, образующих некоторое особое множество. Затем доказано, что только m таких классов ($m < N$) одновременно могут быть вырожденными. Следовательно, $(N - m)$ смежных классов вносят вклад в линейную сложность результирующей последовательности.

Более формально, новое множество смежных классов задается так.

Определение. Имея смежный класс с постоянным расстоянием $E_d = 2^{e_0} + 2^{e_1} + \dots + 2^{e_{k-1}}$ и $j \in \{0, \dots, k-1\}$, будем называть j -ым классом с квази-постоянным расстоянием (сокращенно, " j -ый кпр-класс") всякий круговой класс смежности, чей репрезентативный элемент F_d^j имеет вид

$$F_d^j = 2^{f_0} + 2^{f_1} + \dots + 2^{f_{k-1}}, \text{ так что } \{e_i\}_{i=0, \dots, k-1; i \neq j} \subset \{f_i\}_{i=0, \dots, k-1}.$$

Другими словами, j -ый кпр-класс F_d^j - это любой круговой смежный класс, соответствующий L -битный набор которого содержит все "единицы" L -битного набора, соответствующего E_d , кроме той, что находится на позиции $(j-1)$. Как это было сделано ранее, определитель $A_{F_d^j}$ будем обозначать A_d^j . Множество j -ых кпр-классов будет обозначено как $\{F_{d,n}^j\} = \{F_{d,1}^j, \dots, F_{d,N}^j\}$.

Лемма. Пусть F_d^j - произвольный j -ый кпр-класс, тогда ассоциированный с ним определитель A_d^j имеет по меньшей мере $(k-1)$ -го порядка минор (без j -ой строки и j -ого столбца), который не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \alpha^{t_0 2^{e_0}} & \cdot & \alpha^{t_{i-1} 2^{e_0}} & \alpha^{t_{i+1} 2^{e_0}} & \cdot & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_0}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{t_0 2^{e_{j-1}}} & \cdot & \alpha^{t_{i-1} 2^{e_{j-1}}} & \alpha^{t_{i+1} 2^{e_{j-1}}} & \cdot & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_{j-1}}} \\ \alpha^{t_0 2^{e_{j+1}}} & \cdot & \alpha^{t_{i-1} 2^{e_{j+1}}} & \alpha^{t_{i+1} 2^{e_{j+1}}} & \cdot & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_{j+1}}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^{t_0 2^{e_{k-1}}} & \cdot & \alpha^{t_{i-1} 2^{e_{k-1}}} & \alpha^{t_{i+1} 2^{e_{k-1}}} & \cdot & \alpha^{t_{k-1} 2^{e_{k-1}}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теорема. Пусть E_d - произвольный смежный класс с постоянным расстоянием и $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Если для некоторого множества j -ых кпр-классов $\{F_{d,n}^j\}$ существует по крайней мере один смежный класс E_d с фиксированным расстоянием такой, что $E_d \subset OR[\{F_{d,n}^j\}]$, то классы из $\{F_{d,n}^j\}$ одновременно не могут быть вырожденными.

После доказательства данной теоремы в [341] представлен алгоритм, практически реализующий полученные результаты посредством обработки L -битных наборов.

(III) Алгоритм. На вход алгоритма поступают L (длина РСЛОС) и k (порядок функции) с $2 < k < L - 2$, выходом алгоритма является нижняя граница Δ линейной сложности. Для краткости в блок-схеме приняты следующие обозначения.

$FDC(i)$ ($i = 1, \dots, N_L$) означает L -битный набор, соответствующий i -ому смежному классу с фиксированным расстоянием.

$FCC(i, j)$ ($j = 1, \dots, k - 1$) означает L -битный набор, полученный из $FDC(i)$ заменой j -ой "1" на "0". Отметим, что $FCC(i, 0)$ - это сдвинутая версия $FCC(i, k-1)$.

$CD(i, j)$ означает группу L -битных наборов, ассоциированных с j -ыми кпр-классами $\{F_{d,n}^j\}$. Всякий L -битный набор в $CD(i, j)$, рассмотренный ранее, должен быть исключен. Для того, чтобы это сделать, сначала выявляются смежные классы с постоянным расстоянием при помощи операций AND. Затем, после применения операций XOR с каждым предыдущим FCC, те классы, которые производят по крайней мере один набор с единственной 1 исключаются из $CD(i, j)$.

m - это уменьшающийся счетчик, первое значение которого (обозначенное $mpri$) - это количество L -битных наборов в $CD(i, j)$ после исключений.

$a(n)$ ($n = 1, \dots, \binom{mpri}{m}$) означает каждый $mpri$ -битовый набор с m "единицами".

VOR означает набор, получающийся в результате применения операции OR среди тех m смежных классов в $CD(i, j)$, что отмечены позициями "единиц" в $a(n)$.

$V1$ - это двоичная переменная, значение которой зависит от применения операции AND между VOR и каждым $FDC(i)$.

Под "Шаг 1" и "Шаг 2" в блок-схеме подразумевается следующее.

Шаг 1

Вычислить N_L значений d .

Сгенерировать $FDC(i)$ ($i = 1, \dots, N_L$).

Инициализировать нижнюю границу $\Delta = L \cdot N_L$.

Шаг 2

Сгенерировать $FCC(i, j)$. $m = L - k$.

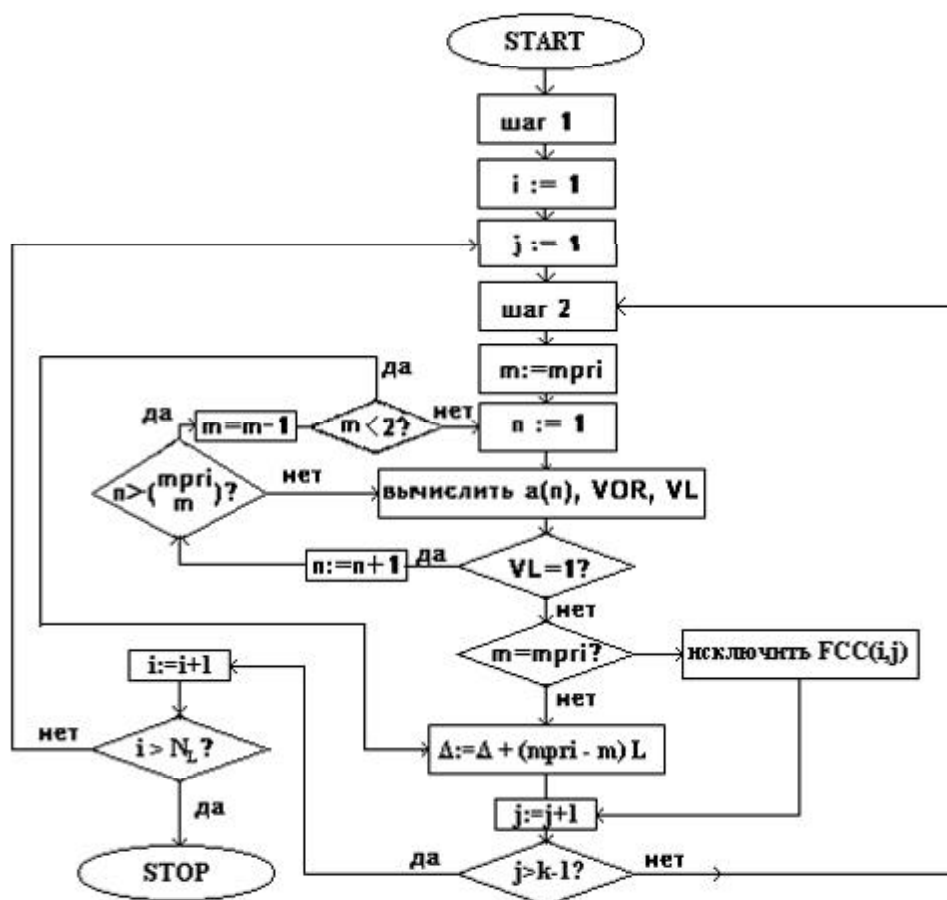
Сгенерировать группу $CD(i, j)$.

Применить AND между каждым $FDC(l)$ ($l=1, \dots, N_L$) и каждым классом в $CD(i, j)$.

Каждый раз, когда некоторое логическое произведение совпадает с $FDC(l)$, соответствующий смежный класс исключается из $CD(i, j)$ и $m = m - 1$.

Применить XOR между каждым $FCC(o, p)$ ($o = 1, \dots, i - 1$; $p = 1, \dots, k - 1$; $o = i$; $p = 1, \dots, j - 1$) и каждым смежным классом в $CD(i, j)$.

Каждый раз, когда какой-либо результат имеет единственную "1", соответствующий смежный класс исключается из $CD(i, j)$ и $m = m - 1$.



В [341] рассмотрен иллюстративный и достаточно компактный пример применения данного алгоритма при значениях параметров $L=11$, $k=6$, $d=1,2,3,4,5$ и $N_{11}=5$. Получен результат для нижней границы линейной сложности $\Delta = 242$.

Этот конкретный пример дает авторам основания для следующих комментариев. Поскольку построенный алгоритм не зависит от конкретного вида функции и многочлена, полученная нижняя граница справедлива для любой нелинейной функции с единственным членом максимального порядка 6 и для любого m -РСЛОС длины 11. Если бы для получения этого же результата пришлось использовать тест на присутствие корня, то потребовалось бы вычислить (для каждой функции порядка 6 и каждого m -РСЛОС длины 11) по крайней мере 22 определителя порядка 6 над $GF(2^{11})$. Для этого потребовалось бы свыше миллиона операций над конечным полем [197].

В заключение приведем таблицу с некоторыми экспериментальными результатами компьютерного применения алгоритма к различным простым L . За G в таблице обозначено количество смежных классов, гарантированно невырожденных.

| L | k | G | Граница |
|-----|-----|------|---------|
| 11 | 6 | 22 | 242 |
| 17 | 9 | 184 | 3128 |
| 23 | 12 | 363 | 8349 |
| 29 | 15 | 770 | 22330 |
| 37 | 19 | 1296 | 47952 |
| 43 | 22 | 1764 | 75852 |
| 47 | 24 | 2115 | 99405 |
| 53 | 27 | 2702 | 143206 |

Главный вывод работы: полученные числовые результаты показывают, что нижние границы линейной сложности нелинейно фильтруемых последовательностей имеют весьма высокие значения без каких-либо ограничений на функции или полиномы. Это подтверждает выводы Рюппеля и дает криптографам веские основания для использования схем на основе нелинейных фильтр-генераторов.

4.2 Комбинирующий генератор

Рассмотрим теперь более общий случай, когда N периодических \mathbb{F}_q -последовательностей комбинируются с помощью функции без памяти $f: \mathbb{F}_q^N \rightarrow \mathbb{F}_q$. Ограничим алгебраическую нормальную форму f степенями $i \in \mathbb{Z}_2^N$.

Комбинирующий генератор:

Вход:

параметры: N регистров сдвига $\langle C_j(D), L_j \rangle$

нелинейная выходная функция $f: \mathbb{F}_q^N \rightarrow \mathbb{F}_q$

ключ: N начальных состояний $a_0^{(j)}$ регистров сдвига.

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Для $j = 1, \dots, N$ выполнить

сдвинуть РСЛОС $_j$

выделить $a_i^{(j)}$

2. Вычислить $z_i = f(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(N)})$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Определим целочисленную функцию $f^*: \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$, соответствующую f , как

$$f^*(\mathbf{x}) = \sum_i c_i^* x^i,$$

где $c_i^* = 0$ если $c_i = 0$ и $c_i^* = 1$ если $c_i \neq 0$ [335]. Из результатов, изложенных в Главе 3 относительно суммы и произведения последовательностей, следует, что линейная

сложность и период шифрпоследовательности, генерируемой комбинирующим генератором ограничены сверху неравенствами [174] [335]

$$\Lambda(\tilde{z}) \leq f^*(L_1, \dots, L_N)$$

$$T_z \leq \text{НОК}(T_1, \dots, T_N).$$

Кей [184] показал для двоичного случая, что верхняя граница может быть достигнута в том случае, когда в f комбинируются m -последовательности взаимно-простых степеней.

Рюппелем [334] разработан набор условий, каждое из которых гарантирует максимальную линейную сложность. Наибольшее практическое значение имеют два из них:

1. Если N \mathbb{F}_q -РСЛОС, задействованные в комбинирующем генераторе, подобраны так, что имеют примитивные многочлены обратной связи $C_j(D)$ и различные длины L_j , то шифрующая последовательность будет иметь максимальную линейную сложность $\Lambda(\tilde{z}) = f^*(L_1, \dots, L_N)$.
2. Если N \mathbb{F}_2 -"РСЛОС", задействованные в комбинирующем генераторе, подобраны так, что это фильтр-генераторы с попарно взаимно-простыми длинами L_j , то шифрующая последовательность будет иметь максимальную линейную сложность $\Lambda(\tilde{z}) = f^*(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$, где Λ_j обозначает линейную сложность j -ого фильтр-генератора.

Обратим внимание, что в двоичном случае можно генерировать последовательности с линейной сложностью, которая экспоненциально зависит от количества задействованных в регистрах ячеек. В [335] дается простая конструкция генератора, который с помощью 150 ячеек памяти генерирует шифрующую последовательность с линейной сложностью, равной по крайней мере 2^{146} .

Гоlichem показано [136], что основываясь на попарной взаимной простоте периодов (см. Раздел 3.4) можно вывести нижнюю границу для линейной сложности. Пусть N $GF(q)$ -последовательностей являются ненулевыми и имеют взаимно-простые периоды, тогда

$$\Lambda(\tilde{z}) \geq f^*(\Lambda_1 - 1, \dots, \Lambda_N - 1),$$

где Λ_j обозначает экспоненту j -ого минимального многочлена.

Теперь рассмотрим функцию мощности $f: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$, $q = p^m$, определенную как $f(x) = x^e$ где e зафиксировано и лежит в пределах $0 \leq e \leq q - 1$. Херлестам [174] [175] показал, что линейная сложность $\tilde{z} = f(\tilde{x}) = \tilde{x}^e$ (вычисленная почленно) ограничена сверху выражением

$$\Lambda(\tilde{x}^e) \leq \prod_k \binom{\Lambda(\tilde{x}) + e_k - 1}{e_k},$$

где e_k - цифры p -ичного разложения $e = e_0 + e_1 + \dots + e_{m-1}p^{m-1}$. Брюнелльсон [49] доказал, что верхняя граница достигается в том случае, если \tilde{x} является последовательностью

максимальной длины периода $\Lambda(\tilde{x}) = L$. Когда характеристика $p = 2$, эта формула становится особо простой

$$\Lambda(\tilde{x}) = L^{W_H(e)},$$

где $W_H(e)$ означает вес Хэмминга e . Этот результат обобщен до случая произвольного многочлена $f(x) = \sum_{i=0}^{q-1} a_i x^i$. В [49] показано, что для $p = 2$ и последовательности \tilde{x} максимальной длины с периодом L

$$\Lambda(f(\tilde{x})) = \sum_{i: a_i \neq 0} L^{W_H(i)}.$$

Подобная проблема была исследована Ченом и Геймзом в [72]. Пусть \tilde{s} - последовательность максимальной длины периода L и с цифрами из \mathbb{F}_q , q - нечетное, и пусть $f: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_2$ - произвольное отображение (нелинейная функция). Рассмотрим двоичную последовательность $\tilde{z} = f(\tilde{s})$. Чен и Геймз показали, что результирующая последовательность имеет линейную сложность

$$\Lambda(\tilde{z}) = \frac{q^L - 1}{q - 1} \Lambda(\tilde{u}),$$

где \tilde{u} обозначает двоичную последовательность, полученную применением определяющего отображения f к перечню ненулевых элементов \mathbb{F}_q , построенному в соответствии со степенями некоторого примитивного элемента. Поскольку такие последовательности можно рассматривать как взятые из конечной геометрии, их называют двоичными *геометрическими последовательностями*. В [75] изучаются функции автокорреляции и кросскорреляции таких двоичных геометрических последовательностей, включая случай, когда q четное.

Теперь рассмотрим произвольную функцию $f: \mathbb{F}_q^2 \rightarrow \mathbb{F}_q$, у которой АНФ является многочленом от двух переменных:

$$f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_q^2} a_{ij} x^i y^j.$$

Брюнельссон показал в [49], что для $p = 2$ и \tilde{x}, \tilde{y} - последовательностей максимальной длины периодов L_1 и L_2 соответственно, линейная сложность последовательности $\tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет равенству

$$\Lambda(f(\tilde{x}, \tilde{y})) = \sum_{(i,j): a_{ij} \neq 0} L_1^{W_H(i)} L_2^{W_H(j)}.$$

В 1996 году Джеймс Мэсси и Ширли Серчонек [243], основываясь на своей работе 1994 года о линейной сложности нелинейно фильтруемых m -последовательностей [242], разработали общую теорию линейной сложности для произвольных периодических

последовательностей. Обобщив дискретное преобразование Фурье с помощью аппарата матриц Хассе и производных, они дали обобщение теоремы Блэйхута и алгоритма Геймза-Чена. Техника Мэсси-Серчонек позволяет работать с нелинейно комбинируемыми последовательностями, представляя их как линейные комбинации различных адямаровых произведений от входных последовательностей.



Фильтрующий и комбинирующий генераторы - это особые классы генераторов поточного шифрования, в силу своей общности представляющие повышенный интерес для теоретических исследований. Данные конструкции именуются в литературе "схемы без памяти и с равномерным движением".

Более конкретным и специфическим схемам криптографических генераторов, а также соответствующим им методам теоретико-системного анализа, посвящены отдельные главы данной книги (Главы 6, 7, 8, 9).

4.3 Корреляционные методы вскрытия комбинирующих генераторов

4.3.0 Общий обзор

Корреляционная атака - это широко распространенный метод криптоанализа, который может быть успешно применен к генераторам, комбинирующим выход от нескольких криптографически слабых генераторов шифрующей гаммы. Исторически, корреляционные атаки были предложены для вскрытия двух базовых криптосхем генераторов поточного шифрования: комбинирующего генератора, состоящего из набора регистров сдвига и нелинейной выходной функции f [37] [254] [363] [397]; и фильтрующего генератора, состоящего из регистра сдвига с нелинейным фильтром состояний f [119] [362].

Корреляционный метод использует некоторые слабости в комбинирующей функции, которые позволяют по выходной последовательности получить информацию об отдельных входных последовательностях узла усложнения. В этом случае говорят, что имеется корреляция между выходной последовательностью и одной из внутренних последовательностей. Вследствие такой корреляции отдельная внутренняя последовательность может быть проанализирована индивидуально вплоть до восстановления начального заполнения соответствующего регистра, затем внимание аналитика переключается на одну из других внутренних последовательностей. Подобным способом может быть восстановлен весь генератор - в литературе этот метод часто называют *атака "разделяй-и-вскрывай"*.

Интересен тот факт, что структура, идентичная комбинирующему генератору, использовалась в системе космического дальногомера, разработавшегося в американском центре космических исследований JPL (Jet Propulsion Laboratory) под руководством Соломона Голомба в конце 1950-х годов [162] [373]. В таких дальногомерах, для обеспечения высокой помехоустойчивости, изменение частоты сканирования управляется псевдослучайной последовательностью. Цель работы Голомба была следующая:

разработать булевый комбинирующий узел для последовательностей от регистров сдвига с короткими попарно взаимно-простыми периодами для того, чтобы порождалась последовательность, период которой был бы произведением периодов компонент, и чтобы сама она сильно коррелировала с каждой последовательностью-компонентой для облегчения вычисления расстояний.

Фактически, такая проблема космического дальногомера оказывается двойственной к интересующей нас криптографической проблеме: скомбинировать набор последовательностей от регистров сдвига таким образом, чтобы результирующая последовательность имела наименьшую возможную корреляцию с последовательностями-компонентами. На рубеже 70-80-х годов Блэйзер и Хайнцман [37] обратили внимание, что корреляционные методы анализа можно было бы использовать как способ атаки на комбинирующие генераторы с плохо подобранными узлами усложнения f (то есть такими узлами, которые выдают в результирующую гамму информацию о последовательностях-компонентах). Их работа о криптографическом значении этого метода вышла намного позже и независимо от работы Голомба в JPL.

Затем в 1984 году криптограф Томас Зигенталер из швейцарского Федерального технологического института (ETH, Цюрих) разработал базовую корреляционную атаку [361], построенную на расстоянии Хэмминга между двумя двоичными последовательностями одинаковой длины (см. Раздел 4.3.1).

В классической схеме криптоанализа комбинирующего генератора рассматриваются R регистров сдвига с длинами k_i , $i = 1, 2, \dots, R$ и примитивными полиномами обратной связи, которые полагаются известными противнику. Секретным ключом такой шифрсистемы считается начальное заполнение для каждого РСЛОС. Суммарное количество ключевых бит, необходимых для задания генератора, равно $\sum_{i=1}^R k_i$. При вскрытии генератора тотальным опробованием ключа необходимо перебрать $\prod_{i=1}^R 2^{k_i}$ возможных начальных заполнений, что недостижимо в реальных вычислительных системах. Однако, Зигенталер показал, что если имеется некоторая мера корреляции между результирующей шифрпоследовательностью и выходами отдельных РСЛОС, то существует возможность определять начальное состояние каждого такого РСЛОС независимо, сокращая таким образом криптоанализ до атаки "разделяй-и-вскрывай", приближительная сложность которой составляет уже $\sum_{i=1}^R 2^{k_i}$. Зигенталер успешно продемонстрировал такую корреляционную атаку на примере вскрытия конкретных комбинирующих функций, предложенных в литературе, в частности, схем Брюера [46], Геффе [129] и Плесса [302]. Алгоритм Зигенталера подразумевает тотальный перебор начальных состояний каждого отдельного РСЛОС. Несмотря на свою эффективность, такая атака возможна только для значений длин регистров k , не превышающих примерно 50.

Томас Зигенталер положил начало большому количеству исследовательских работ, посвященных вскрытию криптосхем на основе регистров сдвига. Примечательно, что одну из ведущих ролей здесь сыграли швейцарские криптографы, в том числе и непосредственно работавшие во всемирно известных фирмах, выпускающих шифраторы. Пытаясь объяснить подобную, мягко говоря не совсем обычную, криптоаналитическую активность криптографов-разработчиков, Райнер Рюппель пишет: "Главной тому причиной было желание повысить эффективность алгоритмов и расширить сферу их применения" [339].

В 1989 году появилась еще одна работа, положившая начало *быстрым корреляционным атакам* и практически сразу ставшая классической. Швейцарцы Майер и Штаффельбах [R87] показали, что если количество t точек съема какого-то регистра невелико ($t < 10$), то можно определять его начальное заполнение с помощью некоторого итерационного алгоритма со сложностью, значительно меньшей, чем при поиске тотальным опробованием. Их алгоритм эксплуатирует тот факт, что биты последовательности, генерируемой РСЛОС, удовлетворяют некоторому количеству линейных соотношений, именуемых *уравнениями проверки четности* или просто *проверками четности* (см. Раздел 4.3.2).

Вкратце суть метода такова. Пусть последовательность a_n порождается РСЛОС, имеющим t точек съема, и примитивным характеристическим многочленом $p(x)$ степени k

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k,$$

где $c_0 = 1$ и $c_1, c_2, \dots, c_k \in \{0,1\}$. Выходная последовательность (a_j) от регистра сдвига задается линейным рекуррентным соотношением

$$a_j = c_1 a_{j-1} + c_2 a_{j-2} + \dots + c_k a_{j-k} = \sum_{i=1}^k c_i a_{n-i} \quad j = k, k+1, k+2, \dots$$

Количество точек съема t в РСЛОС равно количеству ненулевых коэффициентов $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ характеристического многочлена $p(x)$. В случае линейных рекуррентных последовательностей над $GF(2)$ эти ненулевые коэффициенты имеют значения $c_i = 1$. В таком случае, последнее линейное соотношение можно переписать как *уравнение проверки четности*, состоящее из $t+1$ членов РСЛОС-последовательности (a_j) :

$$L = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_t = 0,$$

где члены a_i обозначают те цифры последовательности, которые умножались на ненулевые коэффициенты c_i .

Если считать, что известные криптоаналитику биты шифртекста z_n заменяют в таких уравнениях (неизвестные) биты РСЛОС-последовательности a_n , то некоторые из уравнений, естественно, перестанут выполняться. Процедура побитового восстановления исходной последовательности в алгоритме Майера-Штаффельбаха основана на принципах итеративного вероятностного и порогового декодирования. Алгоритм строится из двух этапов: *вычислительной фазы*, когда итерационно вычисляются условные вероятности; и *фазы дополнения*, когда подозреваемые биты заменяются на свои дополнения. Эти две фазы повторяются до тех пор, пока все биты в первоначально полученном шифртексте не будут изменены таким образом, чтобы выполнялись линейные соотношения. Тогда измененный шифртекст станет идентичен исходной неизвестной РСЛОС-последовательности. Следовательно, станет известным и начальное заполнение соответствующего регистра.

Этот алгоритм имеет асимптотическую сложность $O(k)$ в том случае, когда количество точек съема t зафиксировано. Как было отмечено в [254][78], количество точек съема РСЛОС, определяющее количество ненулевых членов в проверочном уравнении L , сильно влияет на вычислительную сложность алгоритма (если t растет линейно вместе с ростом k , то сложность алгоритма зависит от k экспоненциально).

Таким образом, для того, чтобы полностью использовать выявленную корреляцию между РСЛОС-последовательностью (a_i) и шифрпоследовательностью (z_i) , принципиально важно отыскивать низковесовые проверки четности, имеющие малое количество ненулевых членов.

Несколько исследователей предложили модификации исходного алгоритма для преодоления ограничений базового алгоритма [78] [267] [397]. Одна из самых последних и заметных работ на эту тему - статья 1996 г. [296] математика из ЮАР Вальтера Пенцхорна. Применяя идеи мажоритарной логики декодирования циклических блочных кодов, Пенцхорн разработал эффективный алгоритм для вычисления низковесовых уравнений проверки четности. Этот алгоритм можно использовать в рамках метода Майера-Штаффельбаха, причем его вычислительная сложность в принципе не зависит от количества точек съема в характеристическом многочлене анализируемого РСЛОС. Предложенный им алгоритм можно использовать для вычисления уравнений проверки четности с весами 3 и 4. Приблизительная вычислительная сложность этого алгоритма равна $O(2^{2k/3})$, и при тщательном подборе параметров делает достижимыми низковесовые проверки четности для значений k , достигающих примерно 100 (см. Раздел 4.3.3).

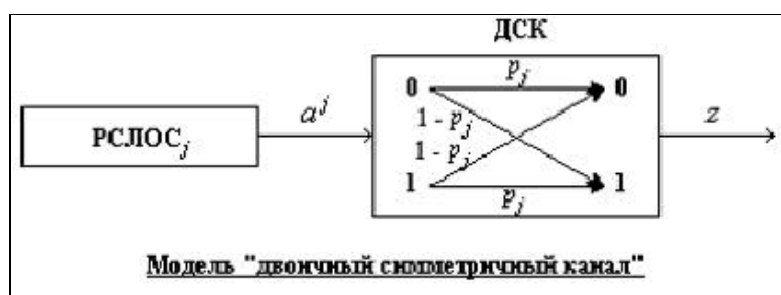
После новаторской работы Майера и Штаффельбаха в 1990-е годы было опубликовано значительное количество статей, в которых теоретически либо экспериментально анализируются методы быстрых корреляционных атак. Наиболее заметный вклад в этой области внесли криптографы из Югославии - Голич, Живкович и Михалевич [266], [267], [268], [270] [81] [147]. Также часто ссылаются на работы Чепыжова и Смитса [78], Форре [119], Зенга, Янга, Рао [398]. Несмотря на значительное количество разных подходов, практически все они имеют единый фундамент: некоторый итерационный исправляющий ошибки алгоритм и некоторый метод проверки четности низкой плотности (см. Разделы 4.3.4 и 4.3.6).

Альтернативный (и для криптографии несколько экзотический) подход к быстрой корреляционной атаке представил в конце 1994 года англичанин Дэвид Маккей из Кавендишской лаборатории Кембриджа [226]. На основе применяемого в статистической физике математического аппарата им разработан так называемый алгоритм "минимизации свободной энергии", позволяющий весьма эффективно вскрывать начальные заполнения регистров сдвига (см. Раздел 4.3.5).

В итоге проводимых криптоаналитических исследований общепризнанным стало следующее требование к конструкции поточного шифра: наличие корреляционного иммунитета является основным критерием при разработке комбинирующих узлов. Эффективность применения корреляционных атак зависит, во-первых, от выбора выходной функции f (см. Главу 5), и, во-вторых, от параметров РСЛОС.

4.3.1 Базовая корреляционная атака Зигенталера

Рассмотрим двоичный комбинирующий генератор (см Раздел 4.2) и будем подразумевать, что $f: \mathbb{F}_2^N \rightarrow \mathbb{F}_2$ выдает в гамму \tilde{z} информацию о последовательности $\tilde{a}^{(j)}$, порожденной j -ым регистром сдвига. Представляя входы f как последовательности, порожденные независимыми и равномерно распределенными двоичными случайными величинами, и принимая в расчет то, что f по своей природе лишена памяти, можно вычислить вероятность $p_j = P(f(A_1, \dots, A_N) = A_j)$. Здесь p_j аппроксимирует вероятность того, что цифра выходной шифрпоследовательности совпадет с цифрой из последовательности $\tilde{a}^{(j)}$, порожденной j -ым регистром сдвига. Для того, чтобы обособить эффект j -ого РСЛОС на шифрпоследовательность, можно смоделировать остальную часть комбинирующего генератора как *двоичный симметричный канал (ДСК)* с вероятностью ошибки $(1 - p_j)$. Таким образом, с концептуальной точки зрения можно рассматривать шифрующую последовательность как искаженную версию последовательности регистра сдвига $\tilde{a}^{(j)}$.



Теперь проблема сокращается до нахождения верной фазы $a_0^{(j)}$ (начального заполнения регистра), исходя из фрагмента гаммы z^n конечной длины и избыточности, содержащейся в $\tilde{a}^{(j)}$ (то есть линейных соотношений, управляющих поведением $\tilde{a}^{(j)}$). Зигенталер [363] разработал и проанализировал "базовую корреляционную атаку" (здесь обозначенную как "алгоритм А"). Подразумевается, что криптоаналитику известно полное описание комбинирующего генератора, за исключением применявшегося ключа.

Алгоритм А: Базовая корреляционная атака на комбинирующий генератор

Вход: описание комбинирующего генератора $\langle L_i, C_i(D), f \rangle$
фрагмент гаммы z^n длины n
ключ: N начальных состояний $a_0^{(j)}$ регистров сдвига

Для $j = 1, 2, \dots, N$ выполнить

1. На основе модели ДСК, исходя из функции f , вычислить корреляционную ("утекающую") вероятность $p_j = P(z = a^{(j)})$.
Если $p_j = \bullet$, то прервать работу с РСЛОС $_j$ и перейти к $j = j+1$.
2. Корреляционная фаза (перебор начальных заполнений регистра):
для $d = 1$ до (максимум) $2^{L_j} - 1$ выполнить
 - а. Вычислить кросс-корреляционную функцию

$$C_{\tilde{a}^{(j)}, \tilde{z}}(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{z_i} (-1)^{a_{i+d}^{(j)}}$$

- b.** Если $C_{\tilde{a}^{(j)}, \tilde{z}}(d)$ больше, чем некоторое подходящее пороговое значение T , то перейти к шагу верификации **c**, в противном случае переходим к $d = d + 1$.
- c.** Проверить d путем коррелирования дополнительного фрагмента гаммы $z'^{n'}$ с соответствующим фрагментом из $\tilde{a}_d^{(j)}$
- d.** Если тест прошел успешно, то считаем что d_j - это верная фаза и переходим к $j+1$ - му РСЛОС, в противном случае переходим к $d = d + 1$.

Выход: набор начальных состояний $\{a_0^{(j)}\}$ для тех РСЛОС, которые выдают информацию в гамму.

Для того, чтобы эта атака была успешной, необходимо определенное количество гаммы и должен быть выбран подходящий порог T . Определим

$$P_f = P(C_{\tilde{a}^{(j)}, \tilde{z}}(d) \geq T | \text{ неверная фаза}),$$

как вероятность "ложной тревоги". Определим также

$$P_m = P(C_{\tilde{a}^{(j)}, \tilde{z}}(d) < T | \text{ верная фаза}),$$

как вероятность пропуска истинного начального заполнения. Вероятность P_m может быть выбрана свободно, например, $P_m = 0.01$ согласно тому риску, на который можно пойти в пропуске верной фазы. Для минимизации количества шагов верификации в алгоритме **A** выбираем $P_f = 2^{-L}$. Тогда из этого выбора следуют значение порога T и необходимое количество n цифр гаммы [363]. Например, при вероятности "утечки" $p = 0.75$, вероятности $P_m = 0.01$ пропуска верной фазы и регистре сдвига длины $L = 41$, необходимо самое большее $n = 355$ цифр гаммы с порогом $T = 0.394$. Естественным методом является использование теста максимального правдоподобия для минимизации величины $P_m + 2^L P_f$, которая аппроксимирует вероятность ошибки [50]. Тогда для заданных значений результатом становится порог $T = 0.408$ с $P_m = 0.022$ и $P_f = 0.017 \cdot 2^{-41}$.

Другой возможностью является рассмотрение k наиболее коррелированных фаз. Аппроксимацию для вероятности того, что верный вариант находится среди отобранных, можно найти в [51]. При заданных значениях параметров и $n=300$ цифрах гаммы необходимо просмотреть 1000 наибольших корреляционных значений для того, чтобы иметь вероятность успеха 0.98 при нахождении верного варианта.

Вычислительная сложность алгоритма **A** составляет в среднем $\sum_{j=1}^N 2^{L_j}$ (при условии, что f допускает "утечку"), и это выглядит намного привлекательней по сравнению со сложностью $\prod_{j=1}^N 2^{L_j}$, требующейся при поиске ключа тотальным перебором. Исторически сложилось так, что подобный криптоаналитический подход, в

котором последовательно находят отдельные субключи в регистрах сдвига, именуется атакой "разделяй и вскрывай" (по аналогии с древнеримской формулой "divide et impera" - "разделяй и властвуй"). Хорошо сконструированный генератор не должен поддаваться такого рода атакам. Алгоритм А применим лишь в тех случаях, когда регистры сдвига имеют небольшую длину L_j и когда нелинейный комбинирующий узел f допускает утечку информации об отдельных входных переменных. При $L_j \geq 50$ алгоритм А становится неприменим.

4.3.2 Быстрая корреляционная атака Майера и Штаффельбаха

Алгоритм А (Раздел 4.3.1) атакует субключ, заполнявший РСЛОС $_j$, путем тотального перебора всех возможных фаз (вариантов начального заполнения). Если же вместо слепого поиска среди начальных заполнений регистров можно предложить более быстрый метод поиска, то речь идет уже о так называемых "быстрых корреляционных атаках". В частности, не все фазы являются равновероятными. Например, из самого факта корреляции между $\tilde{a}^{(j)}$ и \tilde{z} следует, что фазы $\tilde{a}^{(j)}$, имеющие меньшее расстояние Хэмминга до \tilde{z} , являются более вероятными, чем фазы с большим расстоянием Хэмминга.

Взглянув на проблему с этой точки зрения, швейцарцы Вилли Майер (HTL Brugg-Windisch) и Отмар Штаффельбах (GRETAG AG) усовершенствовали алгоритм А [254], построив первый метод быстрой корреляционной атаки. Было замечено, что одним из улучшений может стать попытка отбирать в z^n цифры, имеющие более высокую вероятность того, что это неискаженные копии соответствующих цифр в a^n , и затем искать корреляции со всеми фазами, близкими к этим высоко надежным цифрам.

Процесс вычисления того, какие цифры могли бы быть неизменившимися, основан на линейной рекурренте, удовлетворяющей $\tilde{a}^{(j)}$. Пусть t обозначает количество точек съема в РСЛОС, порождающем $\tilde{a}^{(j)}$. Тогда каждая цифра a_i последовательности участвует ровно $t + 1$ раз в линейной рекурренте, реализуемой этим регистром:

$$a_j = c_1 a_{j-1} \oplus c_2 a_{j-2} \oplus \dots \oplus c_L a_{j-L},$$

а именно на тех позициях, где $c_k \neq 0$, включая $c_0=1$. Другие линейные соотношения, задействующие a_i , можно находить с помощью полиномиальных кратных многочлена обратной связи $C(D)$. В частности,

$$(C(D))^{2^k} = C(D^{2^k})$$

- это преобразование, сохраняющее количество точек съема t . Это свойство является важным, поскольку применимость корреляционной атаки сильно зависит от небольшого количества точек съема. Предположим, что в нашем распоряжении имеется m линейных соотношений. Фиксированная цифра a в последовательности $\tilde{a}^{(j)}$ должна удовлетворять всем m соотношениям,

$$LR_k = a \oplus A_k = 0 \quad k = 1, \dots, m,$$

где каждое A_k - это сумма из t различных членов последовательности $\tilde{a}^{(j)}$. После прохождения $\tilde{a}^{(j)}$ через ДСК с вероятностью ошибки $(1 - p)$ линейные соотношения становятся искаженными:

$$LR_k = z \oplus Z_k \quad k = 1, \dots, m,$$

где теперь каждое Z_k - это сумма из t различных членов последовательности \tilde{z} и не обязательно обращается в нуль при суммировании с z . Для рассматриваемой цифры z подсчитываем количество h линейных соотношений LR_k , которые выполняются. При условии того события, что h линейных соотношений выполнены, априорная вероятность $p = P(z = a)$ может быть модифицирована в апостериорную вероятность p^* . Когда $z = a$, то ожидается большее количество h выполняющихся соотношений, нежели в случае $z \neq a$. Или другими словами, вероятностное распределение h при $z = a$ может быть отличным от вероятностного распределения h при $z \neq a$ в том случае, если имеется достаточное количество шифрующей гаммы. Следовательно, базовый корреляционный алгоритм может быть улучшен путем добавления оценочной фазы [254], которая предварительно определяет набор высоконадежных цифр для того, чтобы сократить работу следующей, вычислительно трудоемкой корреляционной фазы.

Алгоритм В: Оценочная/корреляционная атака на комбинирующий генератор

Вход: описание комбинирующего генератора $\langle L_j, C_j(D), f \rangle$
 n цифр гаммы z^n

Для $j = 1, 2, \dots, N$ выполнить

1. Вычислить корреляционную ("утекающую") вероятность $p_j = P(z=a_j)$ исходя из функции f и в предположении, что N ДСК являются входом для f .
 Если $p_j = \bullet$, то прервать работу с РСЛОС $_j$ и перейти к $j = j+1$
2. Оценочная фаза: найти набор высоко надежных цифр в z^n
 - а. Вычислить ожидаемое число m для $t+1$ соотношений, доступных при проверке z^n

$$m = (t_j + 1) \log\left(\frac{n}{2L_j}\right)$$

- б. Выбрать $h \leq m$ таким образом, чтобы по крайней мере L_j цифр z^n удовлетворяли h или большему числу линейных соотношений.
 - в. Для каждой цифры z^n вычислить апостериорную корреляционную вероятность p_j^* при условии, что h из m соотношений для z^n удовлетворяются. Выбрать те линейно независимые L_j цифр, которые имеют наивысшую вероятность p_j^* как исходное предположение I_0 для начального состояния a_j^n .
2. Корреляционная фаза: выявить и исправить оставшиеся ошибки
 - а. Вычислить соответствующее начальное состояние $a_0^{(j)}$ и проверить его корректность по корреляции результирующей РСЛОС-последовательности $(a^{(j)})^n$ с последовательностью z^n .
 - б. Если такая корреляция свидетельствует, что начальное состояние $a_0^{(j)}$ найдено неверно, систематически модифицировать начальное предположение

добавлением в I_0 исправляющих структур с весом Хэмминга 1, 2, ... и возвращаться к шагу верификации до тех пор, пока не будет обнаружено истинное начальное состояние $a_0^{(j)}$.

Выход: набор начальных состояний $\{a_0^{(j)} \mid j = 1, \dots, N\}$ для тех РСЛОС, которые выдают информацию в результирующую гамму.

Вычислительные затраты данного алгоритма главным образом сосредоточены в корреляционной фазе. Чем больше ошибок было сделано в оценочной фазе, тем больше начальных точек a_0 придется проверять в корреляционной фазе. В своем предельном случае этот алгоритм вырождается в тотальный перебор всех начальных состояний исследуемого РСЛОС; но даже тогда некоторое преимущество по сравнению с алгоритмом **A** остается, поскольку корреляционный поиск начинается с наиболее вероятных начальных состояний, а не со случайно выбранных. В общем случае алгоритм **B** имеет вычислительную сложность $O(2^{cL})$ с $0 \leq c \leq 1$; параметр c зависит от вероятности "утечки" p , количества точек съема t , и от соотношения n/L . Алгоритм **B** является успешным в том случае, если имеется достаточно длинный фрагмент шифрующей гаммы z^n , если количество точек съема t невелико ($t \leq 10$), и если РСЛОС существенно "протекает" в гамму ($p \geq 0.6$).

С другой стороны, для алгоритма **B** существует четкое ограничение: если $t > 16$, а $p \leq 0.75$, то никаких преимуществ перед тотальным перебором уже нет. Как следствие, алгоритм **B** предполагает конкретные правила для разработки комбинирующих генераторов:

1. Выбирать f так, чтобы обеспечивался корреляционный иммунитет k -го порядка (см Раздел 5.1).
2. Выбирать длинные РСЛОС ($L \geq 100$) с полиномами обратной связи, имеющими много точек съема ($t \geq 10$).

В алгоритме **B** отбираются и обрабатываются только цифры, имеющие высокую вероятность того, что они верные. В качестве добавления можно использовать цифры, имеющие большую вероятность того, что они искажены.

Еще одно улучшение относительно алгоритма **A** может быть таким: пытаться исправлять ошибки в искаженном "кодовом слове" z^n , чтобы вернуться к неискаженному "кодовому слову" a^n , восстанавливая таким образом информационные символы a^L (начальное состояние); при подобном подходе больше не нужно вычислять кросс-корреляционную функцию. В работе китайских авторов К.Зенга и М.Хуаня "О применении линейного синдрома в криптоанализе" [397] предложен метод, в котором дополнению подлежат те цифры в z^n , для которых количество выполняемых уравнений проверки четности (линейных соотношений) меньше, чем определенное необходимое значение. Этот порог установлен равным примерно $m/2$, где m - общее количество уравнений проверки на четность. После шага внесения исправлений процедура итерационно повторяется. Данный подход имеет сходство с алгоритмом итерационного декодирования Галлагера [123].

4.3.3 Метод Пенцхорна для нахождения низковесовых полиномов проверки четности

В быстрой корреляционной атаке (Раздел 4.3.2), разработанной Майером и Штаффельбахом для вскрытия определенных поточных шифров, требуется, чтобы количество точек съема в характеристическом полиноме было небольшим, как правило меньше 10. В то же время авторы данного криптоаналитического метода показали, что их атаку можно распространить и на многочлены с произвольным количеством точек съема, если в наличии имеется эффективный алгоритм для вычисления низковесовых полиномов проверки четности.

В 1995 году математики из Университета Претории (ЮАР) В.Пенцхорн и Г.Кюн описали технику нахождения таких полиномов на основе логарифмов Цеха [295]. По сравнению с методом полиномиальных кратных Майера и Штаффельбаха, для метода Пенцхорна-Кюна требовалась значительно меньшего размера вычислительная таблица, за которую, правда, приходилось платить большей вычислительной сложностью.

После этой работы Вальтер Пенцхорн, по совету Джеймса Мэсси, для отыскания низковесовых проверочных полиномов обратился к мажоритарной логике декодирования. Результатом его исследований стала статья 1996 г. [296], в которой представлен новый метод вычисления низковесовых проверок четности, построенный на основе теории циклических кодов, исправляющих ошибки. Вычислительная сложность алгоритма Пенцхорна оценивается в наихудшем случае величиной $O(2^{2k/3})$ и не зависит от количества точек съема в характеристическом многочлене анализируемого РСЛОС. Данный алгоритм применим к регистрам размера приблизительно до 100 бит.

(I). **Базовые факты алгебраической теории кодирования.** Вкратце представим основные факты из теории алгебраического кодирования с исправлением ошибок. Более подробную информацию и доказательства можно найти, к примеру, в [219].

Линейный двоичный (n,k) блочный код над $GF(2)$ - это множество из 2^k векторов длины n (n -грамм) с компонентами, взятыми из $GF(2)$. Эти n -граммы обычно именуют *кодowymi словами* или *векторами кода*. Произвольный линейный двоичный блочный код - это подпространство в векторном пространстве V_2^n всех n -грамм или двоичных векторов длины n .

Порождающая матрица G для (n,k) блочного кода C над $GF(2)$ - это матрица $k \times n$, строки которой линейно независимы и образуют базисные векторы для линейного подпространства V_2^k в n -мерном векторном пространстве V_2^n . Все 2^k кодовых слов из C являются линейными комбинациями над $GF(2)$ строк матрицы G .

Вес Хэмминга $w(a)$ кодового слова a равен количеству ненулевых цифр в кодовом слове. *Расстояние Хэмминга $d(a,b)$* между двумя кодowymi словами a и b равно количеству координатных позиций, на которых они различаются. Для линейного кода C минимальное расстояние d между любыми двумя различными кодowymi словами a и b задается как

$$d = \min\{d(a,b) : a,b \in C, a \neq b\} \\ = \min\{w(a)\}.$$

Для любой $k \times n$ порождающей матрицы G с k линейно независимыми строками существует $(n - k) \times n$ матрица проверки четности H с $(n - k)$ линейно независимыми строками длины n . Произвольная n -грамма \mathbf{a} является кодовым словом в коде, порожденном матрицей G , тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} \cdot H = 0$. Из этого утверждения следует, что $G \cdot H = 0$.

Если $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ - двоичные векторы, то их скалярное произведение задается соотношением:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}.$$

Если C - (n, k) линейный двоичный код, то его дуальный или ортогональный код C^* - это множество векторов, для которых скалярное произведение со всеми векторами из C равно нулю, то есть $C^* = \{ \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \text{ для всех } \mathbf{b} \in C \}$. Если C имеет порождающую матрицу G и матрицу проверки четности H , то C^* имеет порождающую матрицу H и матрицу проверки четности G . Таким образом, C^* - это $(n, n - k)$ код, и C^* - это ортогональное подпространство или нуль-пространство для C . Следовательно, ортогональный код C^* состоит из 2^{n-k} двоичных векторов, взятых из векторного пространства V_2^{n-k} , которое является нуль-пространством V_2^k .

Каждый вектор из V_2^n может быть представлен как многочлен от x степени, меньшей либо равной $n - 1$. Компоненты этого вектора образуют коэффициенты такого полинома, т.е. кодовое слово $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ соответствует многочлену $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$.

Некоторый (n, k) блочный код называется циклическим, если всякий раз, когда $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in C$, то также и $\mathbf{a}' = (a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in C$. В полиномиальном представлении циклический сдвиг соответствует выражению $a_{n-1} + a_0x + a_1x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-1}$, что эквивалентно выражению $xa(x) \pmod{x^n + 1}$. Таким образом, кодовые слова из C соответствуют всем полиномам степени меньшей n в кольце многочленов $(\text{mod } x^n + 1)$.

Всякий нетривиальный циклический (n, k) код C содержит одно кодовое слово $g(x)$ степени $(n - k)$, которое называют порождающим многочленом. Циклический код C имеет следующую порождающую матрицу:

$$G = \begin{pmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ \vdots \\ x^{k-1}g(x) \end{pmatrix}.$$

Все остальные кодовые слова C получаются перемножением $g(x)$ на $q(x)$, где $q(x)$ - любой многочлен степени $k - 1$ или меньше. Для любого кодового слова $a(x)$ из C выполняется:

$$a(x) = q(x) g(x) \equiv 0 \pmod{g(x)}.$$

Порождающий многочлен $g(x)$ имеет такое свойство, что он делит $x^n + 1$, то есть $g(x)h(x) = x^n + 1$. Полином $h(x)$ имеет степень k и обычно именуется полиномом проверки четности. Каждое кодовое слово $a(x)$, порожденное $g(x)$, удовлетворяет соотношению

$$a(x)h(x) \equiv 0 \pmod{x^n + 1}.$$

Пусть C - (n, k) циклический код с порождающим многочленом $g(x)$. Тогда его *дуальный код* C^* также является циклическим и порождается многочленом $g^*(x) = x^k h(x^{-1})$, где

$$h(x) = \frac{x^n + 1}{g(x)}.$$

(II) **Коды максимальной длины и ортогональные проверки четности.** С криптоаналитической точки зрения важно отметить, что любую последовательность длины $2^k - 1$, порождаемую РСЛОС длины k и с характеристическим полиномом $p(x)$, можно рассматривать как кодовое слово из *кода с максимальной длиной блока*. Для любого целого $k > 3$ существует нетривиальный исправляющий ошибки код C с максимальной длиной блока, имеющий следующие параметры:

- Длина блока: $n = 2^k - 1$;
- Количество информационных цифр: k .

Код максимальной длины C - это циклический блочный код, описанный в терминах примитивного полинома $p(x)$ степени k . Порождающий многочлен для этого кода задается соотношением $g(x) = x^n + 1 / p^*(x)$, где $p^*(x)$ - это полином, обратный к многочлену четности $p(x)$, то есть $p^*(x) = x^k p(x^{-1})$. Отметим, что $p^*(x)$ - также примитивный многочлен степени k .

Этот код C состоит из вектора "все нули" и $2^k - 1$ кодовых векторов веса 2^{k-1} . Вследствие своей циклической природы, эти $2^k - 1$ ненулевых кодовых слов - суть сдвинутые версии порождающего многочлена $g(x)$.

С точки зрения криптоанализа поточных шифров важно отметить, что эти $2^k - 1$ ненулевых кодовых слов кода C можно интерпретировать как $2^k - 1$ выходных последовательностей, которые порождаются РСЛОС длины k . В подобном аспекте рассмотрения k -битный *информационный вектор*, который кодируется с помощью C , можно интерпретировать как *секретный ключ*, который используют для начального заполнения РСЛОС и, следовательно, для задания выходной последовательности, генерируемой этим РСЛОС.

Дуальный код к коду C максимальной длины - это $(2^k - 1, 2^k - k - 1)$ циклический блочный код C^* , порождаемый многочленом четности $p(x)$. Легко показать, что дуальный код C^* , являющийся нуль-пространством для кода максимальной длины, - это *код Хэмминга*. Хорошо известно, что код Хэмминга содержит векторы веса 3.

Цель, которую поставил перед собой Вальтер Пенцхорн, - разработать эффективный метод для вычисления низковесовых уравнений проверки четности, которые можно было бы использовать в алгоритме Майера-Штаффельбаха. Метод Пенцхорна построен на основе принципов так называемого *мажоритарного декодирования* циклических блочных кодов.

Рассмотрим максимальной длины (n, k) код C с матрицей проверки четности H . Пространство строк H - это $(n, n - k)$ код Хэмминга, обозначенный C^* , который является нуль-пространством для C . Для любых кодового вектора $a \in C$ и кодового вектора $h \in C^*$ их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$h \cdot a = h_0 a_0 + h_1 a_1 + \dots + h_{n-1} a_{n-1} = 0$$

Это соотношение называют уравнением проверки четности, количество таких уравнений равно 2^{n-k} .

Предположим теперь, что кодовый вектор $\mathbf{a} \in C$ передается по двоичному симметричному каналу. Вследствие шума в канале вектор претерпевает искажения. Обозначим вектор добавочного двоичного шума как $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$, а принятый вектор как $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$. Тогда

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + \mathbf{e}.$$

Для любого вектора $\mathbf{b} \in C^*$ можно построить следующее уравнение проверки четности:

$$L = \mathbf{h} \cdot \mathbf{z} = h_0 z_0 + h_1 z_1 + \dots + h_{n-1} z_{n-1}.$$

Если принятый вектор \mathbf{z} - это кодовый вектор из C , то L должно быть равно нулю; если же, однако, \mathbf{z} не является допустимым кодовым словом, то L может не быть нулем. Комбинируя две последние формулы, получаем соотношение между проверочной суммой L и цифрами ошибок в \mathbf{e} :

$$L = \mathbf{h} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{e}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = h_0 e_0 + h_1 e_1 + \dots + h_{n-1} e_{n-1}.$$

Определение. Множество уравнений проверки четности называют ортогональным к i -ой цифре, если x^i появляется в каждом уравнении, но никакой другой x^j не появляется более одного раза в данном множестве.

Теперь рассмотрим следующее множество различных ортогональных кодовых полиномов

$$S = \{h(x) = x^i + x^j + x^{n-1} \mid 0 \leq i < j \leq n-1\},$$

где $h(x)$ берутся из C^* , $(2^k - 1, 2^k - k - 1)$ код Хэмминга в нуль-пространстве кода C . Никакие два многочлена из S не имеют общих членов кроме члена x^{n-1} . В противном случае, сумма этих двух многочленов была бы кодовым многочленом, состоящим всего из двух членов в коде Хэмминга. Это невозможно, поскольку минимальный вес в коде Хэмминга равен 3. Следовательно, множество S содержит полиномы, ортогональные к позиции высшего порядка x^{n-1} . Для каждого многочлена $h(x) \in S$ выполняется:

$$h(x) = x^i + x^j + x^{n-1} \equiv 0 \pmod{p(x)}.$$

Для вычисления таких $h(x)$ начинают с полинома $x^{n-1} + x^j$ для $0 \leq j \leq n-1$, а затем определяют x^i такой, чтобы $x^{n-1} + x^j + x^i$ делился на $p(x)$. Делать это можно следующим образом. Делить $x^{n-1} + x^j$ на $p(x)$ шаг за шагом, используя "длинное деление" (с выпиской всех промежуточных членов), до тех пор, пока отдельный член x^i не появится в конце определенного шага. Тогда $h(x) = x^{n-1} + x^j + x^i$ - полином, ортогональный к цифре на позиции x^{n-1} . Понятно, что если начать с полинома $x^{n-1} + x^j$, то получится тот же самый многочлен $h(x)$. Таким образом, можно отыскать $(n-1)/2 = 2^{k-1} - 1$ многочленов, ортогональных к позиции x^{n-1} .

Уравнения веса 3. Вычисление с помощью длинного деления проверок четности веса 3, ортогональных к x^{n-1} , можно непосредственно применять в алгоритме Майера-Штаффельбаха. Однако, для этого алгоритма более удобно иметь проверки четности, ортогональные к x^0 , а не к x^{n-1} . Поскольку найденные уравнения проверки четности $h(x)$ - это кодовые слова кода Хэмминга, являющегося *циклическим кодом*, то каждый циклический сдвиг уравнений проверки четности порождает еще одну допустимую проверку четности. В частности, имеющиеся уравнения можно циклически сдвигать для получения проверок четности, ортогональных к x^0 . Вообще же говоря, интерес представляют проверки четности, ортогональные к *любой* цифре j в РСЛОС-последовательности.

Следуя Майеру и Штаффельбаху [254], дальнейшие уравнения проверки четности можно получать итерационным возведением в квадрат уже найденных уравнений. Этим способом из уже имеющихся уравнений веса 3 можно получить несколько новых проверок четности, ортогональных к x^0 .

Алгоритм деления для вычисления проверок четности веса 3

1. [Инициализация] Выбрать подходящее значение для длины подпоследовательности $T < 2^k - 1$, доступной для анализа, и значение $v_{\max} \leq T < 2^k - 1$ для максимальной степени уравнения проверки четности веса 3.
2. [Начальная установка] Установить значение $j = v_{\max} - 1$.
3. [Деление] Используя длинное деление делить $x^{v_{\max}} + x^j$ на $p(x)$ до тех пор, пока в остатке не будет получен отдельный член x^i . Требуемая проверка четности $x^i + x^j + x^{v_{\max}}$.
4. [Выход] Установить значение $j = j - 1$. Если $j > 0$, вернуться к шагу 3. В противном случае закончить.

Данный алгоритм может быть реализован очень эффективно, поскольку требуемые арифметические операции сводятся к сдвигу и сложению по модулю 2. Как было показано ранее, общее количество проверок четности веса 3, доступных в (n, k) коде максимальной длины, равно $2^k - 1$. Сложность процесса длинного деления для вычисления проверок веса 3 по последовательности длины $N = 2^k - 1$ огрубленно оценивается величиной $O(2^{2k})$. Однако, в реальной ситуации криптоаналитик имеет в своем распоряжении подпоследовательность длины $T \ll N$. В этом случае вычислительная сложность алгоритма аппроксимируется величиной $O(T^2)$.

Уравнения веса 4. В работе Пенцхорна проведен статистический анализ, показывающий, что если криптоаналитику доступен лишь небольшой фрагмент шифрпоследовательности, то вероятность получения достаточного количества уравнений проверки четности веса 3 чрезвычайно мала. Вследствие этого целесообразно обратиться также к рассмотрению полиномов веса 4. Описанный выше алгоритм деления легко может быть адаптирован к вычислению проверок четности веса 4. Единственное отличие в том, что требуется остаток из двух членов вместо одного. Преимущество же алгоритма в том, что в процессе длинного деления обнаруживается более одного полинома проверки четности веса 4. Следовательно, процесс деления следует продолжать и после нахождения первого уравнения.

Также следует отметить, что возможна генерация проверок четности веса 4 на основе имеющихся проверок веса 3. Рассмотрим два уравнения проверки четности, ортогональных к x^0 , с целыми i, j и s, t такими, что $0 < i < j$ и $0 < s < t$:

$$\begin{aligned} x^0 + x^i + x^j &\equiv 0 \pmod{p(x)} \\ x^0 + x^s + x^t &\equiv 0 \pmod{p(x)}. \end{aligned}$$

Полагаем, что $j > s$. Тогда, домножая второе равенство на $x^{j-s} = x^\delta$ и складывая результат с первым, получаем уравнение веса 4:

$$x^0 + x^i + x^{j-s} + x^{t+j-s} = x^0 + x^i + x^\delta + x^{t+\delta}.$$

Если же $j < s$, то полагаем $\delta' = s - j$ и получаем аналогичное уравнение. Таким образом, если $\max\{t + \delta, t + \delta'\} < T$, то найдена проверка четности веса 4, ортогональная к x^0 . Будем полагать, что если $|\delta| < T/2$, то пригодные соотношения получаются.

Предположим, что требуется иметь m уравнений проверки четности для алгоритма Майера-Штаффельбаха. Пусть r - количество заходов для вычисления m уравнений проверки четности. Тогда вероятность p того, что две успешно найденные позиции для уравнений веса 3 лежат на расстоянии не более $T/2$ (как требуется для проверок веса 4), оценивается величиной $p = 1 - e^{-rT/2N} \approx rT/2N$, если $rT \ll N$. Если произведено r заходов, то ожидаемое количество пригодных пар составляет $pr = r^2T/2N \geq m$. Заданное значение r , при фиксированном характеристическом полиноме, определяет длину подпоследовательности, необходимой для анализа.

Таким образом, делается вывод, что если криптоаналитик имеет в своем распоряжении шифрпоследовательность длиной $N = 2^{k/3}$, то при помощи алгоритма деления с высокой вероятностью будет найдено достаточное количество проверок четности веса 4. В этом случае вычислительная сложность алгоритма аппроксимируется величиной $O(2^{2k/3})$, и она по сути своей не зависит от количества точек съема в характеристическом многочлене. Следовательно, данный метод применим для РСЛОС длиной примерно 100 бит.

4.3.4 Метод итерационного вероятностного декодирования Михалевича-Голича

В 1991 году для быстрой корреляционной атаки на комбинирующий генератор сербские математики Михалевич и Голич [267] предложили алгоритм, представляющий собой итерационную процедуру с ортогональными проверками четности различных, возможно, весов и байесовским правилом принятия решения при коррекции ошибок в каждом бите.

Рассматривается стандартная модель "двоичного симметричного канала". Имеющаяся последовательность гаммы $z = \{z_i\}_{i=1}^N$ представляется как зашумленная версия РСЛОС-последовательности $a = \{a_i\}_{i=1}^N$, то есть $z_i = a_i \oplus e_i$, где \oplus - сложение по модулю 2, а $e = \{e_i\}_{i=1}^N$ - последовательность двоичного случайного шума с $P\{e_i = 1\} = p$ для всех $i = 1, \dots, N$. Подразумевается, что криптоаналитику известен $f(x)$ - характеристический полином РСЛОС длины r . Задача - восстановить РСЛОС-последовательность $a = \{a_i\}_{i=1}^N$

по известному отрезку гаммы $z = \{z_i\}_{i=1}^N$ в условиях, когда $r < N < 2^r - 1$, а значение N мало настолько, насколько возможно.

Напомним, что проверкой четности называют любое линейное соотношение, которому удовлетворяет РСЛОС-последовательность. Хорошо известно, что проверки четности взаимосвязаны с полиномиальными кратными $f(x)$ (см., к примеру [78]). В частности, любое полиномиальное кратное, вес которого (количество ненулевых членов) равен W , задает набор из W проверок четности, связанных с его различными фазовыми сдвигами. В [254] применяется простая алгебраическая техника для составления набора уравнений проверок четности. Эта техника построена на повторяющемся возведении в квадрат характеристического многочлена $f(x)$ до тех пор, пока не будет найден полином с максимальной степенью, не превышающей $N - 1$. При этом каждое соответствующее уравнение проверки четности имеет одно и то же количество членов, то есть имеет один вес $w + 1$, где w - количество точек съема РСЛОС. Набор проверок четности называют *ортогональным* к данному биту, если кроме этого бита любой другой участвующий бит появляется ровно в одном из уравнений проверок четности.

Пусть $\Pi_i = \{\pi_k(i)\}_{k=1}^{|\Pi_i|}$ ($|\Pi_i|$ обозначает мощность Π_i) - это множество проверок четности, ортогональных к i -ому биту, $i = 1, \dots, N$. Пусть значение проверки четности будет определено как сумма по модулю два $c_k(i) = \sum_{l \in \pi_k(i)} z_l$. Поскольку шумовая последовательность e случайна, то такими же являются и значения проверок четности. В случае, когда уравнения проверки четности ортогональны, соответствующая постериорная вероятность для бит шума при имеющихся значениях проверки четности принимает следующий вид (выведено в [267]):

$$p_i = P(e_i = 1 | \{c_k(i)\}_{k=1}^{|\Pi_i|}) = \frac{q_i \prod_{k=1}^{|\Pi_i|} q_k(i)^{\bar{c}_k(i)} (1 - q_k(i))^{c_k(i)}}{q_i \prod_{k=1}^{|\Pi_i|} q_k(i)^{\bar{c}_k(i)} (1 - q_k(i))^{c_k(i)} + (1 - q_i) \prod_{k=1}^{|\Pi_i|} (1 - q_k(i))^{\bar{c}_k(i)} q_k(i)^{c_k(i)}}$$

для любого $i = 1, \dots, N$, где q_i обозначает априорную вероятность того, что i -ый шумовой бит равен 1; $\bar{c}_k(i) = 1 - c_k(i)$, $q_k(i) = (1 - \prod_{l=1}^w (1 - 2q_{m_l})) / 2$. Здесь $\{m_l\}_{l=1}^w$ обозначает множество индексов бит, участвующих в проверке четности $\pi_k(i)$, для любых $k = 1, \dots, |\Pi_i|$ и $i = 1, \dots, N$. Как отмечается в [81], эту формулу можно использовать и в тех случаях, когда уравнения проверки четности не ортогональны. Кроме того, аналогичное выражение выведено Михалевичем для проверок четности различных весов [268].

В самом начале итерационного процесса априорные вероятности для шумовых бит все полагаются равными p . Каждая итерация состоит из двух основных этапов. На первом этапе проверки четности вычисляются последовательно бит за битом. На втором этапе производится байесовское побитовое исправление ошибок, основанное на оценке релевантных постериорных вероятностей, полученных с использованием постериорных вероятностей предыдущей итерации в качестве априорных вероятностей текущей итерации. Если постериорная вероятность p_i превышает одну вторую, тогда бит шума e_i выставляется равным 1, бит шифрпоследовательности z_i заменяется дополнением, а p_i устанавливается равным $1 - p_i$.

При первой итерации оптимальным байесовским решением минимизируется степень ошибки символа p_e (средняя вероятность ошибки на символ). При последующих итерациях степень ошибки почти всегда понижается вследствие двух причин. Во-первых,

выполняемое алгоритмом исправление ошибок может сокращать количество ошибок в корректируемой шифрпоследовательности, и, во-вторых, повторяющееся использование вектора вероятностей в соответствии с расчетной формулой приводит к тому, что вероятности для большинства шумовых бит сходятся к нулю (после замены соответствующих бит гаммы на дополнения).

Часто случается, что алгоритм "попадает в ловушку" локального минимума степени ошибки, $p_e \approx 0$, в результате чего процедура исправления ошибок в гамме останавливается. В такой ситуации (как было предложено в [254]), если значение p_e меньше некоторого ε , то можно заменить текущий вектор вероятностей на априорный и продолжить алгоритм с шага 1. Такой трюк называют *перезагрузкой алгоритма*. Перезагрузка алгоритма повышает способность алгоритма к исправлению ошибок и увеличивает количество выполненных уравнений проверки четности. Множество итераций между двумя последовательными перезагрузками называют *циклом алгоритма*. Базовый алгоритм итерационно-вероятностного декодирования (ИВД) выглядит следующим образом.

Алгоритм ИВД

- *Вход*: Шифрпоследовательность $z = \{z_i\}_{i=1}^N$, вероятность p , набор (ортогональных) проверок четности $P_i = \{\pi_k(i)\}_{k=1}^{|P_i|}$, $i = 1, \dots, N$.
- *Инициализация*: $j = 0$, $k = 0$ и $q_i = p$, $i = 1, \dots, N$, где j - индекс текущей итерации, а k - индекс текущего цикла. Также зададим максимальное количество циклов k_{\max} , минимальную степень ошибки ε и параметр J - максимальное количество итераций без изменения в количестве выполняющихся проверок четности.
- *Критерий перезагрузки*: Вероятности подлежат перезагрузке, когда средняя вероятность ошибки на символ (степень ошибки) p_e опускается ниже ε , либо когда количество выполненных проверок четности не изменилось в течение J итераций.
- *Критерий остановки*: Работа алгоритма останавливается, когда количество циклов достигает значения k_{\max} , либо, в идеальном случае, когда все уравнения проверки четности выполняются.
- *Шаг 1*: Вычислить значения проверки четности $\{c_k(i)\}_{k=1}^{|P_i|}$, $i = 1, \dots, N$, по имеющемуся отрезку шифрпоследовательности. Если все проверки четности удовлетворяются, перейти к шагу 7. Если количество удовлетворяющихся проверок четности не изменилось за J итераций, перейти к шагу 6.
- *Шаг 2*: Используя приведенную выше формулу, вычислить постериорные вероятности p_i , $i = 1, \dots, N$.
- *Шаг 3*: Если $p_i > 0.5$, положить $z_i = z_i \oplus 1$, $p_i = 1 - p_i$, $i = 1, \dots, N$.
- *Шаг 4*: Подставить постериорные вероятности текущей итерации в качестве априорных вероятностей следующей итерации: $q_i = p_i$, для $i = 1, \dots, N$.
- *Шаг 5*: Если $p_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i > \varepsilon$, то увеличить j на 1 и перейти к шагу 1.
- *Шаг 6*: Положить $q_i = p$, для $i = 1, \dots, N$ и увеличить k на 1. Если $k < k_{\max}$, то перейти к шагу 1.
- *Шаг 7*: Положить $a_i = z_i$, $i = 1, \dots, N$. Остановить процедуру.
- *Выход*: Восстановленная РСЛОС-последовательность $a = \{a_i\}_{i=1}^N = z = \{z_i\}_{i=1}^N$.

Модифицированный алгоритм ИВД с быстрой перезагрузкой. В 1995 году Йован Голич, перебравшийся работать в Австралию, совместно с коллективом авторов из Технологического университета Куинсленда, представил модифицированную версию этого алгоритма [147]. Улучшению был подвергнут этап перезагрузки, что позволило повысить количество выполняющихся проверок четности. Перезагрузка шага 5 в базовом алгоритме получила название *медленная перезагрузка*. Улучшенный метод был назван *быстрой перезагрузкой*.

Реконструкция имеющейся шифрпоследовательности выполняется на шаге 3 базового алгоритма, когда полагается $z_i = z_i \oplus 1$. Однако, такие исправления не эффективны из-за преобразования постериорных вероятностей $p_i \rightarrow 1 - p_i$ (повторное использование вероятностей с исправлением или без него имеет один и тот же эффект при ортогональных проверках четности, см [410]). Исправления становятся эффективными только после перезагрузки, где такое преобразование не производится. Конечно же, не все такие исправления являются верными, и алгоритм может вносить новые ошибки в анализируемую гамму. Если количество верных исправлений превышает количество неверных исправлений, то вероятность ошибок в шифрпоследовательности понижается. Но из-за свойства самосходимости алгоритма этого может не произойти, если ждать, пока степень ошибки понизится до нуля. Соответственно, можно предположить, что производительность алгоритма повысится, если перезагрузку выполнять до того, как степень ошибки упадет ниже порогового значения. Говоря строже, в тот момент, когда суммарное количество исправлений в каждом цикле достигает заранее выбранного значения C , мы заменяем $q_i = p$, $i = 1, \dots, N$. Этот трюк назван *быстрой перезагрузкой* и позволяет существенно улучшить производительность базового алгоритма.

– *Шаг 5:* Если $p_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i > \varepsilon$ и суммарное количество исправлений меньше чем C , то увеличить j на 1 и перейти к шагу 1.

На практике параметр C можно оптимизировать в зависимости от имеющейся в наличии гаммы, вероятности шума или используемых уравнений проверки четности [81].

4.3.5 Метод Маккея: алгоритм минимизации свободной энергии

В 1994 английский исследователь Дэвид Маккей [226] из Кавендишской лаборатории Кембриджа представил быстрый алгоритм для решения задач, которые можно представить в виде $(\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}) \bmod 2 = \mathbf{r}$, где \mathbf{s} - это двоичный вектор длины N , \mathbf{n} и \mathbf{r} - двоичные векторы длины M , а \mathbf{A} - двоичная матрица. Задача при этом заключается в нахождении \mathbf{s} при известных \mathbf{A} и \mathbf{r} . Данный алгоритм построен на основе взятого из статистической физики "вариационного метода минимизации свободной энергии". В случае его конкретного применения для быстрой корреляционной атаки, вектор \mathbf{s} обозначает неизвестную выходную последовательность от РСЛОС, вектор \mathbf{r} содержит M значений проверок четности, а \mathbf{n} , по сути дела, игнорируется (полагается стремящимся к 0). Матрица A в качестве своих строк имеет все проверки четности для каждой битовой позиции.

(I) **Формулировка задачи.** В соответствии с теоремой Байеса, постериорное распределение \mathbf{s} выражается формулой:

$$P(\mathbf{s}|\mathbf{r}, \mathbf{A}) = \frac{P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{A})P(\mathbf{s})}{P(\mathbf{r}|\mathbf{A})}. \quad (1)$$

Цель - найти наиболее вероятный вектор \mathbf{s} , то есть такой \mathbf{s} , который максимизирует данное выражение над множеством всех \mathbf{s} . Подразумевается, что тотальный перебор 2^N последовательностей неприемлем. Один из способов атаки на проблему дискретной комбинаторики - построить связанную с ней задачу, в которой дискретные переменные \mathbf{s} заменяются переменными с действительными значениями, над множеством которых можно проводить непрерывную оптимизацию (см., например, [176] [4] [110] [297] [128] [36]). В таком контексте вопрос формулируется следующим образом: "как обобщить постериорную вероятность (1) до случая, когда \mathbf{s} заменяется вектором с действительными компонентами?".

Метод вариационной минимизации свободной энергии был предложен в 1972 году Ричардом Фейнманом: берется "жуткое" вероятностное распределение, такое как в (1), и делается попытка аппроксимировать его более простым распределением $Q(\mathbf{s};\theta)$, параметризованным вектором параметров θ . Для краткости в работе Маккея сложное вероятностное распределение $P(\mathbf{s}|\mathbf{A}, \mathbf{r})$ обозначается как $P(\mathbf{s})$. Мерой качества аппроксимирующего распределения является вариационная свободная энергия,

$$F(\theta) = \sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s};\theta) \log \frac{Q(\mathbf{s};\theta)}{P(\mathbf{s})}. \quad (2)$$

Функция $F(\theta)$ имеет нижнюю границу равную нулю, которая достигается только при таком θ , что $Q(\mathbf{s};\theta) = P(\mathbf{s})$ для всех \mathbf{s} . В тех случаях, когда Q имеет достаточно простую форму, задача оптимизации F над θ становится разрешимой. Отыскивается такой θ^* , который минимизирует $F(\theta)$, что позволяет по аппроксимирующему распределению $Q(\mathbf{s};\theta^*)$ получить полезную информацию о $P(\mathbf{s})$. В частности, можно надеяться, что такое \mathbf{s} , которое максимизирует $Q(\mathbf{s};\theta^*)$, будет хорошим предположением для \mathbf{s} , максимизирующего $P(\mathbf{s})$. Вообще же говоря, минимизация свободной энергии порождает аппроксимирующее распределение $Q(\mathbf{s};\theta^*)$, которое более компактно, нежели истинное распределение $P(\mathbf{s})$.

(II) **Аппроксимирующее распределение.** Распределение Q выбирается сепарабельным,

$$Q(\mathbf{s};\theta) \equiv \prod_n q_n(s_n; \theta_n),$$

с компонентами θ_n , задающими вероятности q_n следующим образом:

$$\begin{aligned} q_n(s_n = 1; \theta_n) &= \frac{1}{1 + e^{-\theta_n}} \equiv q_n^1 \\ q_n(s_n = 0; \theta_n) &= \frac{1}{1 + e^{+\theta_n}} \equiv q_n^0 \end{aligned} \quad (3)$$

для $n = 1, \dots, N$. Построенная таким образом параметризация удобна тем, что логарифм соотношения вероятностей имеет вид $\log(q_n^1/q_n^0) = \theta_n$.

Затем Маккей выводит алгоритм, который позволяет вычислять F , заданную формулой (2), и ее градиент от θ за время, пропорциональное w_A - весу матрицы \mathbf{A} (то есть количеству единиц в матрице). Свободная энергия может быть представлена с помощью трех членов:

$$F(\theta) = E_L(\theta) + E_P(\theta) - S(\theta), \quad (4)$$

или "энергии правдоподобия $E_L(\theta)$ ", "априорной энергии $E_P(\theta)$ " и "энтропии $S(\theta)$ ". Здесь "энтропия" равна

$$S(\theta) \equiv -\sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}; \theta) \log Q(\mathbf{s}; \theta) = -\sum_n [q_n^0 \log q_n^0 + q_n^1 \log q_n^1],$$

с производной $\frac{\partial}{\partial \theta_n} S(\theta) = -q_n^0 q_n^1 \theta_n$; "априорная энергия" равна

$$E_P(\theta) \equiv -\sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}; \theta) \log P(\mathbf{s}) = -\sum_n b_n q_n^1,$$

где $b_n = \log[P(s_n=1) / P(s_n=0)]$, а производная равна $\frac{\partial}{\partial \theta_n} E_P(\theta) = -q_n^0 q_n^1 b_n$;

"энергия правдоподобия" равна

$$E_L(\theta) \equiv -\sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}; \theta) \log P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{A}) = -\sum_m g_m \sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}; \theta) t_m(\mathbf{s}) + \text{const}.$$

Аддитивная константа не зависит от θ и будет опущена.

Здесь g - это (1,-1)-двоичное кодирование вектора проверки четности (или вектора синдрома), полученного на основе имеющейся гаммы. Функция правдоподобия записана как $P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{A}) = \prod_m e_m^{t_m(\mathbf{s})} (1 - e_m)^{(1-t_m(\mathbf{s}))}$, где \mathbf{e} - вектор вероятностей. Логарифм правдоподобия можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \log P(\mathbf{r}|\mathbf{s}, \mathbf{A}) &= \sum_m t_m(\mathbf{s}) \log \frac{e_m}{1 - e_m} + \text{const} \\ &\equiv \sum_m t_m(\mathbf{s}) g_m + \text{const} \end{aligned}$$

где $g_m = \log[e_m/(1-e_m)]$.

Для того, чтобы вычислить E_L , требуется среднее значение $t_m(\mathbf{s})$ в условиях сепарабельного распределения $Q(\mathbf{s}; \theta)$, то есть вероятность того, что $\sum_n A_{mn} s_n \bmod 2 = 1$. Эту вероятность для каждого m можно вычислять с помощью рекурсии, оперирующей последовательностью вероятностей $p_{m,v}^1$ и $p_{m,v}^0$ для $v = 1 \dots N$. Это вероятности того, что частичная сумма $t_m^{1v} = \sum_{n=1}^v A_{mn} s_n \bmod 2$ равна 1 и 0, соответственно. Эти вероятности удовлетворяют соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} p_{m,v}^1 &= q_v^0 p_{m,v-1}^1 + q_v^1 p_{m,v-1}^0 \\ p_{m,v}^0 &= q_v^0 p_{m,v-1}^0 + q_v^1 p_{m,v-1}^1 \end{aligned} \right\} \text{если } A_{mv} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} p_{m,v}^1 &= p_{m,v-1}^1 \\ p_{m,v}^0 &= p_{m,v-1}^0 \end{aligned} \right\} \text{если } A_{mv} = 0.$$
(5)

Начальное условие рекурсии $p_{m,0}^1 = 0$ и $p_{m,0}^0 = 1$. Желаемая величина достигается за время, линейно зависящее от веса строк m матрицы \mathbf{A} :

$$\sum_{\mathbf{s}} Q(\mathbf{s}; \theta) t_m(\mathbf{s}) = p_{m,N}^1.$$

Количество $p_{m,N}^1$ - это обобщение на непрерывное пространство величины произведения $t_m = \mathbf{A}_m \mathbf{s} \bmod 2$ с тем подходящим свойством, что если любой из входящих членов q_v^1 равен 0.5, то и результирующее значение $p_{m,N}^1$ равно 0.5. Таким образом, энергия E_L задается соотношением:

$$E_L(\theta) = -\sum_m g_m p_{m,N}^1.$$

Для получения производной энергии E_L необходимо выполнить такое же количество вычислений еще раз. Для этого вводится еще одна, "обратная" последовательность вероятностей $r_{m,v}^1$ и $r_{m,v}^0$ для $v = N \dots 1$. Это вероятности того, что частичная сумма $t_m^{vN} = \sum_{n=v}^N A_{mn} s_n \bmod 2$ равна 1 и 0, соответственно. Такие вероятности можно вычислять с помощью рекурсивной процедуры, эквивалентной уравнениям (5). Тогда можно показать, что производная представляется выражением:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_n} E_L(\theta) = -q_n^0 q_n^1 \sum_m g_m d_{mn},$$

где $d_{mn} = (p_{m,n-1}^1 r_{m,n+1}^1 + p_{m,n-1}^0 r_{m,n+1}^0) - (p_{m,n-1}^1 r_{m,n+1}^0 + p_{m,n-1}^0 r_{m,n+1}^1)$.

Таким образом, суммарная производная свободной энергии представляется как

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_n} = q_n^0 q_n^1 \left[\theta_n - b_n - \sum_m g_m d_{mn} \right].$$

С помощью приравнивания производной нулю выводится "переоценочный оптимизатор", который определяет порядок рекурсивного обновления процедуры для параметра θ . Маккей вводит параметр "отжига" β , который постепенно уменьшается в процессе работы алгоритма. Его цель - предотвратить слишком быстрое устремление поиска к локальному минимуму. Окончательно, вектор θ обновляется в соответствии с уравнением

$$\theta_n = b + \beta \sum_m g_m d_{m,n}, \quad n = 1, \dots, N.$$

(III). **Алгоритм МСЭ.** Градиент свободной энергии может быть вычислен за время, линейно зависящее от w_A . Если алгоритм сходится, то максимальное время его работы оценивается величиной Nw_A . Однако, сходимость алгоритма не гарантируется.

Алгоритм Минимизации Свободной Энергии

- *Вход:* Вектор-синдром \mathbf{r} , матрица проверки четности \mathbf{A} , вероятность шума p , начальное значение для β (β_0), масштабирующий сомножитель для β (β_f), максимальное значение для β (β_{\max}) и максимальное количество итераций.
- *Условия инициализации:* Количество итераций = 0, $\beta = \beta_0$,

$$g_m = \begin{cases} +1 & \text{если } r_m = 1 \\ -1 & \text{если } r_m = 0 \end{cases}, \quad m = 1, \dots, M$$

$$b = \theta_n = \log\left(\frac{p}{1-p}\right), \quad n = 1, \dots, N$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{m,0}^1 = r_{m,0}^1 = 0 \\ p_{m,0}^0 = r_{m,0}^0 = 1 \end{array} \right\}, \quad m = 1, \dots, M.$$

- *Критерий остановки:* Работа алгоритма останавливается после некоторого зафиксированного количества итераций, либо когда β превысит β_{\max} .
- *Шаг 1:* Обновить значения $q_n^1, q_n^0, n = 1, \dots, N$ используя (3).
- *Шаг 2:* (Прямой прогон) Обновить $p_{m,n}^1$ и $p_{m,n}^0$ для $m = 1 \dots M$ и $n = 1 \dots N$ в соответствии с рекуррентой (5).
- *Шаг 3:* (Обратный прогон) Обновить $r_{m,n}^1$ и $r_{m,n}^0$, используя (5) в обратном направлении, то есть для $m = M, \dots, 1$ и $n = N, \dots, 1$.
- *Шаг 4:* Обновить каждый $\theta_n, n = 1, \dots, N$ путем вычисления градиента и используя (6).
- *Шаг 5:* Увеличить индекс количества итераций.
- *Шаг 6:* Вычислить свободную энергию, используя (4). Если эта энергия уменьшилась по сравнению с предыдущей итерацией, то вернуться к шагу 1.
- *Шаг 7:* Промасштабировать β с помощью β_f , то есть положить $\beta = \beta \times \beta_f$. Если $\beta < \beta_{\max}$, а количество итераций меньше максимального, то вернуться к шагу 1.
- *Шаг 8:* Выдать на выход последовательность шума в зависимости от θ : если $\theta_n > 0$, то выход равен 1; в противном случае выход равен 0, для $n = 1, \dots, N$. Тогда РСЛЮС-последовательность может быть получена как сумма по модулю 2 от выходной шумовой последовательности и имеющейся в наличии гаммы.

Автор алгоритма Дэвид Маккей рекомендует использовать следующие значения параметров: $\beta_0 = 0.25$; $\beta_f = 1.4$; $\beta_{\max} = 4$.

4.3.6 Сравнение алгоритмов и проблема сходимости

После знаменитой криптоаналитической работы Майера и Штаффельбаха [R87], открывшей эру быстрых криптоаналитических атак, появилось большое количество статей, где теоретически и экспериментально анализируются методы этой техники вскрытия поточных шифров (см. Раздел 4.3.0). Как отмечается в обзоре Йована Голича "О стойкости генераторов на регистрах сдвига" [142], для всех этих работ характерны два общих признака: некоторый итерационный исправляющий ошибки алгоритм и некоторый метод проверки четности низкой плотности. (Основополагающие идеи, образующие фундамент вероятностного декодирования линейных кодов с проверкой четности низкой плотности можно найти в работах Галлагера [123] и Мэсси [231].)

Если используется простой метод проверки четности, предложенный Майером и Штаффельбахом [254], то вычислительная сложность остается существенно линейно зависящей от длины регистра сдвига, но возможности восстановления при этом ограничены. Если же выстраивают все проверки четности вплоть до определенных веса и длины, основываясь на всех кратных полинома обратной связи (Чепыжов, Смитс [78]), то эффективность алгоритма возрастает, но ценой вычислительной сложности, повышающейся экспоненциально с ростом длины регистра.

Как показывают исследования, в настоящее время наиболее эффективными методами быстрых корреляционных атак считаются "модифицированное итерационно-вероятностное декодирование" (МИВД, см. Раздел 4.3.4) и "минимизация свободной энергии" (МСЭ, см. Раздел 4.3.5). В 1996 году коллектив австралийских авторов [81] представил результаты сравнительного анализа этих двух алгоритмов.

Эксперименты проводились с 50 различными образцами гаммы длиной по 10000 бит. Для генерации гаммы использовались регистры сдвига с тремя различными характеристическими полиномами:

| Количество точек съема | Длина РСЛОС | Примитивный многочлен |
|------------------------|-------------|------------------------------|
| 2 | 31 | $1+x^3+x^{31}$ |
| 4 | 50 | $1+x^2+x^3+x^4+x^{50}$ |
| 6 | 72 | $1+x+x^2+x^3+x^4+x^6+x^{72}$ |

Наилучшее значение для порога C в МИВД-алгоритме с быстрой перезагрузкой определялось экспериментально. В случае двух точек съема C полагался равным 10. При четырех и шести точках съема было выбрано значение $C = 100$. Для алгоритма МСЭ Маккея значения параметров брались в соответствии с рекомендациями автора: $\beta_0 = 0.25$, $\beta_f = 1.4$, $\beta_{\max} = 4$. Оба алгоритма использовали одни и те же наборы (неортогональных) уравнений проверки четности для каждого из соответствующих характеристических многочленов. Проверки четности были получены путем повторяющегося возведения в квадрат характеристического многочлена до тех пор, пока не был найден многочлен с максимальной степенью, не превышающей $N-1$ (в данном случае 9999). Количество проверок четности в каждом случае равно $\lceil \log_2(N-1)/r \rceil + 1$, где r - степень характеристического многочлена $f(x)$. Для регистров сдвига длин 31, 50 и 72 количество проверок четности составляет 9, 8 и 8, соответственно. Как предложено в [254], использовались все фазы проверок четности. Однако, в конечных областях можно

использовать лишь некоторые из этих фаз. В этом случае использовалось максимально возможное количество фаз.

Для каждого теста были получены два набора результатов. В первом применялось нахождение минимального расстояния Хэмминга между истинным выходом РСЛОС и решением, найденным каждым из алгоритмов. Этим давалась оценка того, насколько близко алгоритм приближается к истинному решению. Во втором случае использовались *свободные от ошибок информационные множества* (информационное множество - это любое множество линейно независимых бит в РСЛОС-последовательности, по которым можно восстановить всю последовательность [80]). В частности, применялась техника "скользящего окна" [266], в которой проводится поиск r последовательных бит, удовлетворяющих характеристическому многочлену (r - длина РСЛОС). Если r таких бит можно отыскать, то атака считается успешной.

Эксперименты показали, что МИВД-алгоритм с быстрой перезагрузкой превосходит МСЭ-алгоритм Маккея при каждом из рассмотренных количеств точек съема. Еще одним преимуществом метода итерационно-вероятностного декодирования можно считать то, что вполне понятен принцип его работы - обновление постериорной вероятности для каждой битовой позиции. При подходе Маккея суть выполняемых алгоритмом операций не столь очевидна. С точки зрения сложности (в терминах времени работы) оба алгоритма показали сравнимые результаты.

При анализе работы алгоритмов итерационного исправления ошибок важным параметром является так называемая *критическая вероятность шума* [268], то есть вероятность шума, за пределами которого успешное исправление ошибок невозможно при выбранном наборе проверок четности. Для этой вероятности Михалевичем и Голичем получена аппроксимация в форме

$$p_{cr} = \frac{1 - M_w^{\frac{1}{w-1}}}{2},$$

где M_w - среднее количество проверок четности (веса $w + 1$) на бит, используемых в алгоритме. Если вероятность шума $p > p_{cr}$, то в среднем быстрые корреляционные атаки ожидает неуспех. Однако, имеется возможность улучшить множество низковесовых проверок четности, используя технику, отличную от повторяющихся возведений в квадрат характеристического полинома (см. Раздел 4.3.3). Это, в свою очередь, повышает порог критической вероятности.

Другим важным вопросом является проблема сходимости предлагаемых итерационных исправляющих ошибки алгоритмов. Выведение аналитической формулы, выражающей необходимое и достаточное условие сходимости для базового итерационного алгоритма Майера-Штаффельбаха, все еще остается открытой проблемой. Миодрагом Живковичем [410] получена математическая характеристика процесса сходимости, но это пока не условие сходимости в терминах параметров задачи. Условие сходимости, теоретически выведенное Михалевичем и Голичем [268], представляется достаточно хорошей аппроксимацией для требуемого необходимого и достаточного условия. Оно утверждает, что байесовский итерационный алгоритм, основанный на ортогональных проверках четности, сходится к истинному решению тогда и только тогда, когда

$$\frac{p}{1-p} \prod_{\omega \in \Omega} \left(\frac{1 + (1-2p)^\omega}{1 - (1-2p)^\omega} \right)^{N_\omega} > 1,$$

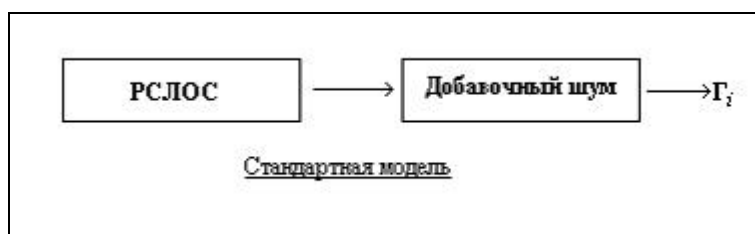
где p - корреляционная вероятность шума; N_ω - количество проверок четности веса ω (вес определяется как количество бит, вовлеченных в проверку четности, минус один); а Ω - множество возможных весов, используемых в данной атаке. Говоря более точно, это условие применимо к упрощенной версии итерационного алгоритма, в котором при каждой итерации предыдущие вероятности подразумеваются равными для каждого бита шума.

4.4 Вскрытие фильтр-генераторов

4.4.0 Основные результаты

В настоящее время в определенном числе реальных шифрсистем используется нелинейный фильтр-генератор для разворачивания короткого ключа в длинную последовательность шифрующей гаммы. Типичные системы такого рода строятся на основе линейного регистра сдвига длиной от 61 до 127 бит и нелинейной фильтрующей функции различной степени сложности [250] [211] [52]. В некоторых вариантах одновременно используется несколько функций для параллельной генерации набора бит гаммы [251].

Классическая атака на фильтр-генератор состоит из двух этапов [361] [363] [254]. Сначала отыскивается функция от шифрующей гаммы, коррелирующая с исходной РСЛОС-последовательностью. Можно показать, что такая функция всегда существует [392], даже когда комбинирующая функция задействует память [141]. Результирующая гамма рассматривается как зашумленная версия РСЛОС-последовательности и восстанавливается с помощью различных методов.



Эта "стандартная модель", исследуемая в большинстве публикаций по данному вопросу, была впервые предложена Зигенталером [362] (см. Раздел 4.4.1). Его исходная атака подразумевала тотальный перебор всех фаз регистра сдвига для отыскания максимальной корреляции [363]. Позднее Майер и Штаффельбах показали, что значительно быстрее срабатывает техника итерационного восстановления, особенно в том случае, когда полином $f(x)$ обратной связи регистра сдвига имеет малый вес (т.е. количество ненулевых членов) [254]. Михалевич и Голич показали условия, при которых эти быстрые корреляционные атаки сходятся [268].

В тех случаях, когда $f(x)$ не разрежен, можно работать с прореженной версией последовательности, чей полином будет разрежен [9], или более обобщенно - с кратными полинома f (так называемый метод низковесовой проверки четности) [78]. Майер и Штаффельбах показали, что низковесовой контроль четности можно реализовать с помощью техники "встреча посередине" [254]; и если $f(x)$ имеет степень n , то это

потребуется около $\frac{n}{2} 2^{\binom{n}{2}}$ операций. В работе 1994 года Ван Оорсхота и Винера показано, что возможно построение специализированного программно-аппаратного устройства для отыскания коллизий при величине n до 128 или около того [375]. Таким образом, проблема стойкости нелинейных фильтр-генераторов сводится к задаче отыскания хороших корреляций между результирующей гаммой и лежащим в ее основе регистром сдвига.

В 1994 году Россом Андерсоном был представлен новый практичный метод для эффективного отыскания наилучших локальных корреляций [13], основанный на тщательном изучении того, как сдвинутые копии фильтр-функции взаимодействуют между собой (см. Раздел 4.4.2). По классификации Голича, рассматривающего нелинейный фильтр-генератор как комбинирующий узел с конечной входной памятью, атаку Андерсона можно рассматривать как условную корреляционную атаку. В 1996 году Голичем [148] сформулированы необходимые и достаточные условия того, что выходная последовательность нелинейного фильтр-генератора будет чисто случайной при наличии такой последовательности на входе. Им же предложены новый метод криптоанализа, так называемая "инверсионная атака", и новые конструктивные критерии, которые следует применять при разработке нелинейных фильтр-генераторов (см. Разделы 4.4.3 - 4.4.6).

4.4.1 Метод Зигенталера: криптоаналитическое представление фильтр-генератора

Рассмотрим случай двоичного фильтрующего генератора. Для того, чтобы развернуть далее имеющийся в наличии фрагмент гаммы z^n , у криптоаналитика есть два основных пути: (1) можно попытаться непосредственно определить использованный для генерации гаммы ключ; (2) либо попытаться определить эквивалентную систему, которая порождает ту же самую шифрпоследовательность. В частности, конкретный фильтр-генератор всегда можно смоделировать счетчиком с периодом $(2^L - 1)$ и подходящей выходной функцией. Отметим, что отсюда следует возможность генерации шифрпоследовательности с помощью любого m -РСЛОС длины L с соответствующим образом подобранной выходной функцией. Еще один подход к определению эквивалентной системы - подбор эквивалентного линейного генератора гаммы.

При обоих этих подходах криптоаналитик не использует свое знание полинома обратной связи в исходной системе. Если же принимать в расчет полином обратной связи, то исходную систему можно моделировать комбинирующим генератором из нескольких m -РСЛОС, каждый из которых реализует один и тот же известный примитивный многочлен, и соответственно подобранной нелинейной комбинирующей функции g . Такие эквивалентные системы существуют всегда; если k обозначает количество точек съема в f , то просто помещаем k фаз, снимаемых функцией f , в отдельные регистры сдвига и полагаем $g = f$ для получения тривиальной эквивалентной системы. Для ее анализа Томас Зигенталер рассматривает периодическую кросс-корреляционную функцию

$$C_{\bar{a}, \bar{z}}(d) = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} (-1)^{z_i} (-1)^{a_{i-d}}$$

между последовательностью регистра \tilde{s} и шифрующей гаммой \tilde{z} . В [362] выведено аналитическое выражение для $C_{\tilde{a},\tilde{z}}$ с привлечением преобразования Уолша \hat{F} для функции $\hat{f}(x) = (-1)^{f(x)}$

$$C_{\tilde{a},\tilde{z}} = 2^{-k} \left(1 + \frac{1}{T}\right) \hat{F}(v(d)) - \frac{\hat{f}(0)}{T},$$

где $v(d)$ обозначает ту линейную комбинацию из L последовательностей, которая порождает d -ый сдвиг $\tilde{s}(d)$ последовательности \tilde{s} . Изучение приведенного выше выражения показывает, что пик в кросс-корреляционной функции может появиться только в том случае, если $|\hat{F}(v(d))|$ велико. Но преобразование Уолша $\hat{F}(v(d))$ обращается в нуль для всех линейных комбинаций $v(d)$, которые отбирают последовательность состояний, не соответствующую точкам съема f . Таким образом, имеется самое большее $2^k - 1$ пиков в кросс-корреляционной функции. Из них самое большее k находятся на позициях d_i таких, что соответствующие последовательности $\tilde{s}(d_i)$ являются линейно независимыми. В принципе, можно непосредственно вычислять фильтрующую функцию f инвертированием преобразования Уолша \hat{F} , значения которого известны из кросс-корреляционной функции $C_{\tilde{a},\tilde{z}}$. Но на практике это недостижимо, поскольку требуется знание и вычислительные операции с полным периодом шифрующей гаммы. Поэтому на практике необходимо вычислять кросс-корреляцию с коротким фрагментом из n бит гаммы, который несет определенное количество шума. В зависимости от длины фрагмента n , количества точек съема k , и свойств фильтрующей функции f может быть так, что релевантные пики кросс-корреляционной функции $C_{\tilde{a},\tilde{z}}$ исчезают в шуме. Следующий алгоритм, предложенный Зигенталером в [362] пытается сконструировать эквивалентный генератор из набора пиков, обнаруженных в кросс-корреляции, позиции которых соответствуют линейно-независимым последовательностям $\tilde{s}(d_i)$.

Алгоритм: Криптоаналитическое представление фильтр-генератора

Вход: описание $\langle C(D), L \rangle$
фрагмент гаммы z^n длины n

1. Вычислить кросс-корреляционную функцию для всех d в пределах $0 \leq d \leq 2^L - 2$

$$C_{\tilde{a},\tilde{z}}(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{z_i} (-1)^{a_{i-d}}$$

2. Составить список из L самых сильных значений $C_{\tilde{a},\tilde{z}}(d)$.
3. Выбрать базис $\tilde{a}(d_1), \dots, \tilde{a}(d_m)$ размерности $m \leq n$ для последовательностей $\tilde{a}(d_1), \tilde{a}(d_2), \dots$, соответствующих позициям d_1, d_2, \dots обнаруженных пиков.
4. Вычислить g по m входным последовательностям $\tilde{a}(d_1), \dots, \tilde{a}(d_m)$ и соответствующей выходной последовательности \tilde{z} .

Выход: набор из m линейно независимых начальных состояний $\{a_0^{(d_j)}\}$ и функция $g: \mathbb{F}_2^m \rightarrow \mathbb{F}_2$.

Вопрос о том, в каких условиях описанная атака оказывается успешной, является открытой проблемой, поскольку для любого другого m -РСЛОС длины L существует соответствующая функция f' , которая генерирует такой же поток гаммы, что и исходная конструкция [334]. Следовательно, можно прийти к выводу, что корреляция с любым максимальной длины регистром сдвига длины L воспроизведет еще одну действующую эквивалентную систему. Однако, практика показывает, что этот метод срабатывает только для небольших функций (небольшого количества точек съема) с выраженной корреляцией между выходом и линейной комбинацией входов. Поскольку описанный выше алгоритм использует корреляцию со значительной частью периода РСЛОС, он применим только при $L < 50$ [362].

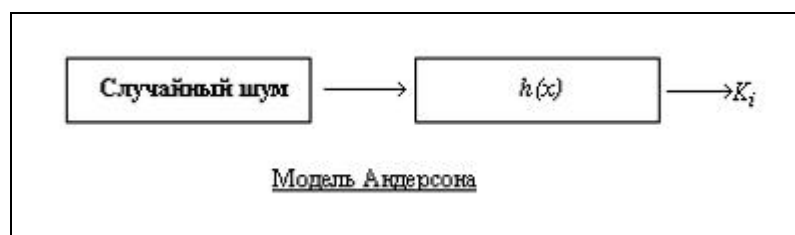
4.4.2 Модель Андерсона: на пути к "оптимальной корреляционной атаке"

Новаторский подход к криптоанализу поточных шифров, построенных на основе регистров сдвига с равномерным движением, был представлен в 1994 году английским криптографом Россом Андерсоном (Компьютерная лаборатория Кэмбриджа) [13]. Им было продемонстрировано, что нелинейные фильтрующие функции, используемые в таких системах, могут выдавать в гамму значительную информацию в тех случаях, когда комбинируются сдвинутые копии одной и той же последовательности. Это дает основания для построения нового метода отыскания корреляций между гаммой и лежащей в ее основе РСЛОС-последовательностью.



Росс Андерсон

(I) Основная идея. Росс Андерсон, главный девиз которого "стойкость системы зависит от четкости формулировок" [12], предложил взглянуть на анализируемую конструкцию несколько иначе. Корреляция имеется всегда. Следовательно, модель можно представить так:



По сути своей эта модель рассматривает проблему, дуалистичную той, что изучается в "стандартной модели". Здесь цель - отыскать, насколько много информации о некотором произвольном сигнале просачивается через функцию $h(x)$ в гамму K_i . Решение этой проблемы зависит от нелинейной структуры h : если $K_i = S_i + S_{i+1}$, то знание K_i ничего не говорит нам о S_i ; в то время как при $K_i = S_i S_{i+1}$ всякий раз, когда $K_i = 1$ мы знаем, что и $S_i = 1$. При этом следует обратить внимание, что при атаке на фильтр-генератор мы всегда можем снять влияние линейной функции путем перехода к другой фазе исходного регистра сдвига, так что на самом деле нас интересует отыскание максимальной "протечки" $h(l(x))$ на множестве всех линейных функций $l(x)$.

(II) Отыскание корреляции. Рассмотрим конкретный пример. Предположим, что нелинейная комбинирующая функция h задается равенством

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4 + x_5) + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)x_5.$$

Данная функция используется в качестве примитива в [210] и, похоже, используется также в других реальных конструкциях [211]; она примечательна тем, что при своей компактности является и сбалансированной, и имеющей корреляционный иммунитет второго порядка (см. Раздел 5.1).

Как уже отмечалось, при стандартной атаке на подобный шифр начинают искать такие линейные функции от гаммы и исходной РСЛОС-последовательности, которые бы коррелировали; как вариант можно также упомянуть метод "наилучшей аффинной аппроксимации" Диня, Сяо и Шена [106]. Однако, обе эти атаки отбрасывают значительное количество информации о нелинейной структуре h , а наша цель - попытаться выявить - и если можно, то использовать - всю информацию, выдаваемую h .

Если $K_i = f(S_{i-2}, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$, то биты гаммы K_{i-2}, \dots, K_{i+2} все зависят от S_i , и если мы хотим аппроксимировать S_i , то нам нужна функция вида $S_i = g(K_{i-2}, K_{i-1}, K_i, K_{i+1}, K_{i+2})$. Однако, эти биты K_{i-2}, \dots, K_{i+2} зависят от девяти бит S_{i-4}, \dots, S_{i+4} , поэтому представляется естественным взглянуть на множество входных 9-грамм от последовательности регистра сдвига, которые оказывают влияние на любой возможный 5-битовый фрагмент выходной гаммы. Функцию, переводящую 9 бит в 5, будем называть *полненной функцией* h и обозначать как \bar{h} .

Если подсчитать 5-битовые выходы \bar{h} для каждого из 512 возможных входов, то получим:

| ВЫХОД | КОЛ-ВО ВХОДОВ | ВЫХОД | КОЛ-ВО ВХОДОВ | ВЫХОД | КОЛ-ВО ВХОДОВ | ВЫХОД | КОЛ-ВО ВХОДОВ |
|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|-------|------------------|
| 0 | 18 | 8 | 11 | 16 | 16 | 24 | 23 |
| 1 | 16 | 9 | 17 | 17 | 18 | 25 | 17 |
| 2 | 14 | 10 | 12 | 18 | 16 | 26 | 10 |
| 3 | 20 | 11 | 12 | 19 | 18 | 27 | 18 |
| 4 | 16 | 12 | 23 | 20 | 12 | 28 | 17 |
| 5 | 14 | 13 | 13 | 21 | 10 | 29 | 15 |
| 6 | 21 | 14 | 13 | 22 | 15 | 30 | 19 |
| 7 | 17 | 15 | 19 | 23 | 15 | 31 | 17 |

Понятно, что в действительно хорошей системе всякий выход должен порождаться шестнадцатью входами, но данная таблица явно неравновероятна и это дает нам путь к взлому системы. Например, имеются два выхода (21 и 26), порождаемые всего десятью входами, и если взглянуть на входные векторы, порождающие 26, то обнаружим, что это:

```
001010101
001110001
001110010
100110001
100110010
101001011
101110001
101110010
110110001
110110010
```

Изучив эту матрицу, можно заметить, что в пятом столбце всего один нуль, а в шестом и седьмом - всего по одной единице. Другими словами, если $K_i, \dots, K_{i+4} = 11010$, то $S_{i+2}=1$, $S_{i+3}=0$ и $S_{i+4}=0$ с вероятностью 0.9 в каждом случае. Другие столбцы дают нам корреляции с вероятностью 0.7, 0.8 и т.д. Сам факт того, что имеются негладкие корреляции между нелинейно фильтруемой последовательностью и исходным регистром сдвига, был впервые отмечен Форре [119], но она не стала углубляться в этот предмет. Теперь же эта нерегулярность объяснена - надо просто подсчитать стабильность входа/выхода пополненной функции \bar{h} .

Конечно же, мы получаем информацию не только по тем входам, которые имеют наименьшее количество выходов. Например, если рассмотреть 17 входов, порождающих выход 9, то нас ожидает приятное открытие: все эти 17 входных векторов имеют нуль в четвертом бите. Значит, всякий раз когда мы видим, что $K_i, \dots, K_{i+4} = 01001$, мы точно знаем, что $S_{i+1}=0$.

Теперь примерно понятной становится идея "оптимальной корреляционной атаки". В случае, когда h - функция, отображающая m бит в 1 бит, то каждый бит регистра сдвига будет вносить вклад в ровно m бит гаммы, и можно ожидать, что всю корреляционную информацию можно найти путем исследования пополненной функции, порождающей эти биты. Если нам повезет, то мы отыщем корреляции с вероятностью единица и сможем вскрывать шифр непосредственно с помощью линейной алгебры. В противном случае мы все равно будем иметь значительное количество корреляций порядка 0.8-0.9, с помощью которых вероятностное восстановление становится совершенно простым [226].

Однако, мы можем узнать еще больше, чем просто корреляции между K_i и S_i . Более пристально взглянув на выписанную выше матрицу, мы заметим, что столбцы 5 и 6 являются инвертированными копиями друг друга. Из этого следует, что всякий раз, когда $K_i, \dots, K_{i+4} = 11010$, то $S_{i+2} = 1 + S_{i+3}$. Подобные же соотношения будут найдены и в других множествах выходов; например, если все биты от K_i до K_{i+4} равны нулю, то $S_{i+3} = S_{i+4} = S_{i+5}$. Каждое такое равенство сокращает наполовину ключевое пространство, в котором нам все еще предстоит вести поиск.

Насколько хорошо работает предложенная техника против других нелинейных функций усложнения? В последние годы большое внимание уделяется *бент-функциям* [255] (см. Раздел 5.3). Для примера, Р. Андерсон исследовал типичную бент-функцию

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6$$

и обнаружил, что она существенно хуже, нежели корреляционно-иммунная функция, обсужденная выше. Оказалось, что здесь пополненная функция вообще никогда не принимает девяти возможных выходных значений (12,15,30,31,47,60,61,62,63), в то время как нулевое выходное значение принимается 100 раз. Просачивание информации очень мощное: например, выходное значение 17 принимается 12 раз, при этом во всех 12 входных векторах оказывается $S_1 = S_2 = 1$ и $S_4 = S_5 = S_{11} = 0$.

Исследовано также поведение *почти бент-функций*: это бент-функции, которые делают сбалансированными путем замены нескольких выходных значений. Если в приведенной выше бент-функции заменить выход с 0 на 1 для входных значений 7,11,23 и 27, то оказывается, что поведение в столбцах становится менее выраженным, но при этом семь из девяти отсутствовавших выходных значений достигаются малым количеством входов (а выход 31 порождается лишь единственным входом 00010111011). В итоге

делается заключение, что фильтр-генератор на основе бент- или почти бент-функции - это легкая мишень для криптоаналитика.

Реальные устройства, описанные в [251] и [250], используют в качестве фильтра так называемую *функцию Де Брюина* - функцию от k входных бит, которая при подаче на ее вход числа n дает на выходе n -ый бит из 2^k -битной последовательности Де Брюина. Такой фильтр имеет интересное свойство: его пополненная функция сбалансирована, так что каждый возможный выход достигается ровно 2^k раз. Но также имеется и другое свойство: для каждого выходного значения во всех соответствующих входных векторах последние k бит идентичны. Например, для одной из де-брюиновских функций, реализованной в [250], выходное значение 21 принимается при 32 входах вида *****10110. Говоря же другими словами, происходит тотальное просачивание информации.

(III) Выводы. Представлен практичный метод для отыскания наилучших локальных корреляций в нелинейно фильтруемых последовательностях от регистра сдвига. Суть метода - исследовать то, как реагирует фильтрующая функция на сдвинутые собственные копии. Продемонстрировано, что многие криптографически привлекательные функции реагируют на это плохо. В частности, это касается бент-функций и функций Де Брюина. Делается вывод, что и в тех случаях, когда одновременно используется несколько различных фильтр-функций, необходимо тщательно исследовать их взаимное воздействие друг на друга.

С теоретической точки зрения, для криптографов, изучающих булевы функции, обрисована новая область исследований: какие функции обладают слабым "просачиванием" (определенным как максимальный дисбаланс в любой входной переменной для каждого выходного значения пополненной функции). В более же общей формулировке, какими свойствами должно обладать множество функций для того, чтобы не взаимодействовать ослабляющим образом.

4.4.3 Математическая модель атаки Андерсона

Андерсон [13] первым в открытой литературе показал, что в нелинейном фильтр-генераторе существуют другие корреляции, которые могут быть полезны для повышения успеха быстрых корреляционных атак (см. Раздел 4.4.2). Изучив его метод, Йован Голич построил математическую модель атаки и создал на ее основе общую теорию стойкости нелинейных фильтр-генераторов, которую представил в 1996 году [148].

Для того, чтобы вкратце описать атаку Андерсона, введем некоторые необходимые обозначения. Пусть $x = (x(t))_{t=-r}^{\infty}$ - двоичная максимальной длины последовательность с периодом $2^r - 1$ (в таких обозначениях $(x(t))_{t=-r}^{-1}$ - начальное состояние РСЛОС). Пусть $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ - булева функция от n ($n \leq r$) невырожденных входных переменных, и пусть $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n$ - возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел (точек съема), такая что $\gamma_1=0$ и $\gamma_n \leq r-1$. Тогда выходная последовательность $y = (y(t))_{t=0}^{\infty}$ нелинейного фильтр-генератора задается как

$$y(t) = f(x(t - \gamma_1), \dots, x(t - \gamma_n)), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Пусть $y_i^m = (y(i))_{i=t-m+1}^t$ и $x_i^m = (x(i))_{i=t-m+1}^t$ обозначают блоки из m последовательных выходных и входных бит к моменту t . Понятно, что $y_i^m = F_m(x_i^{m+\gamma_n})$, где F_m - это m -мерная векторная булева функция от $m+\gamma_n$ не обязательно невырожденных переменных, которая зависит только от булевой функции f и последовательности точек съема γ .

В рассмотренных Андерсоном [13] примерах подразумевалось, что γ - набор последовательных целых чисел ($\gamma_n = n - 1$) и рассмотрены выходные блоки из n последовательных бит. Функция F_n названа *пополненной фильтр-функцией*. Следовательно, $y_i^n = F_n(x_i^{2n-1})$. Основная идея метода Андерсона - изучать статистическую зависимость известного выходного блока y_i^n от входного блока x_i^{2n-1} путем анализа таблицы истинности функции F_n . В частности, можно рассматривать корреляционный коэффициент различных линейных функций от входа x_i^{2n-1} при наличии известного выхода y_i^n . Как выяснилось, некоторые из этих корреляционных коэффициентов могут оказаться значительно больше, чем можно было бы ожидать от (безусловных) корреляционных коэффициентов фильтр-функции f , а некоторые из них даже могут быть равными ± 1 . Эти новые условные корреляции можно использовать для кардинального повышения успешности быстрых корреляционных атак на неизвестную РСЛОС-последовательность при знании полинома обратной связи и фильтр-функции f с последовательностью точек съема γ . Что касается вычислительной сложности данной атаки, то, исходя из $2^{2\gamma_m+1}$ возможных входных линейных функций, количество вычислений, требуемых для определения условных корреляционных коэффициентов, пропорционально величине $2^{2\gamma_m+1}$.

Для минимизации утекаемой информации Андерсон [13] настоятельно рекомендует тщательно исследовать свойства задействуемых булевых функций. Гоlichem же показано [148], что намного более важным, нежели выбор f , является выбор последовательности точек съема γ , определяющей ячейки, с которых берутся входные биты для фильтрующей функции f .

Для того, чтобы прояснить суть атаки Андерсона, а также для построения теоретического фундамента для другой, более эффективной атаки на нелинейные фильтр-генераторы, Голич подчеркивает, что *каждый нелинейный фильтр-генератор является комбинирующим узлом с конечной входной памятью, одним входом и одним выходом*. Размер его памяти, очевидно, равен $M = \gamma_n - \gamma_1 = \gamma_n$ и ограничен сверху величиной $r - 1$. Любопытно, что данный фундаментальный факт до работы Голича 1996 года в явном виде никем не формулировался, хотя в неявном виде использовался Рюппелем за десять лет до этого [334].

4.4.4 Инверсионная атака Голича

Поскольку выходная последовательность нелинейного фильтр-генератора порождается с той же скоростью, что и входная последовательность, то входы на фильтр-функцию с необходимостью коррелированы, независимо от выбора последовательности точек съема. Как следствие этого, даже если мы подразумеваем, что входная последовательность чисто случайна (другими словами, это последовательность равновероятно распределенных и независимых бит), и что фильтр-функция сбалансирована (порождает сбалансированный,

т.е. равновероятный, выход при сбалансированном входе), то выходная последовательность не обязательно такова. Первая проблема, которая здесь будет рассмотрена, - отыскание условий того, чтобы выходная последовательность была чисто случайна при наличии такой последовательности на входе. Этот естественный конструктивный критерий для комбинирующих узлов с памятью был предложен Гоlichem в работах [141] и [149].

Рассматривается вероятностная модель, в которой входная последовательность $x = (x(t))_{t=-r}^{\infty}$ считается последовательностью сбалансированных и независимых бит. Понятно, что выходная последовательность $y = (y(t))_{t=0}^{\infty}$ будет последовательностью сбалансированных бит тогда и только тогда, когда фильтр-функция f сбалансирована. В общем случае, y - последовательность сбалансированных и независимых бит тогда и только тогда, когда векторная булева функция F_m , ассоциированная с m последовательными битами выхода, сбалансирована для каждого $m \geq 1$. Более точно, исходя из конечной входной памяти, имеется следующее утверждение.

Лемма. *Для нелинейного фильтр-генератора со входной памятью размера M выходная последовательность является чисто случайной (при наличии такой последовательности на входе) тогда и только тогда, когда функция F_{M+1} сбалансирована.*

Но это пока еще не характеристика генератора в терминах его фильтр-функции и последовательности точек съема.

Теорема. *Для нелинейного фильтр-генератора с фильтр-функцией f , не зависящей от последовательности точек съема γ , выходная последовательность чисто случайна, при наличии такой последовательности на входе, в том случае (и только в том), если $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ сбалансирована для каждого значения (z_2, \dots, z_n) , то есть, если*

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 + g(z_2, \dots, z_n), \quad (2)$$

либо если $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ сбалансирована для каждого значения (z_1, \dots, z_{n-1}) , то есть, если

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_n + g(z_1, \dots, z_{n-1}). \quad (3)$$

Гоlichem доказана только достаточная часть этих условий. Для того, чтобы доказать предполагаемую необходимость ("и только в том случае"), осталось решить достаточно тонкие комбинаторные проблемы.

Как бы там ни было, введенного аппарата достаточно, чтобы сформулировать алгоритм *инверсионной атаки* Голича. Цель данной атаки - восстановить начальное состояние РСЛОС по фрагменту шифрующей последовательности при условии, что известны полином обратной связи РСЛОС степени r , фильтр-функция f и последовательность точек съема γ . Подразумевается, что фильтр-функция имеет вид (2). Тогда соотношение (1) можно представить в следующем виде

$$x(t) = y(t) + g(x(t - \gamma_2), \dots, x(t - \gamma_n)), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Это означает, что фильтр-генератор, рассматриваемый как комбинирующий узел с одним входом и одним выходом, обращаем (инвертируем), если известно начальное состояние памяти. Тогда прямая инверсионная атака строится так, как описано ниже. Обратная инверсионная атака основана на (3) и по сути своей такая же как и прямая, но работает в обратную сторону по времени.

Àéáîðè : èí àáðñèíí àðàèá Áîèè÷à

1. Предположить (не проверенные ранее) M бит $(x(t))_{t=-M}^{-1}$ неизвестного начального состояния памяти.
2. Используя (4), сгенерировать отрезок $(x(t))_{t=0}^{r-M-1}$ входной последовательности по известному отрезку гаммы $(y(t))_{t=0}^{r-M-1}$.
3. Используя линейную рекурренту РСЛОС, сгенерировать последовательность $(x(t))_{t=r-M}^{N-1}$ по первым r битам $(x(t))_{t=-M}^{r-M-1}$.
4. Используя (1), вычислить $(\hat{y}(t))_{t=r-M}^{N-1}$ по $(x(t))_{t=r-2M}^{N-1}$ и сравнить с наблюдаемым $(y(t))_{t=r-M}^{N-1}$. Если они совпадают, то принять предположенное начальное состояние памяти и остановиться. В противном случае перейти к шагу 1.

Чем привлекательна инверсионная атака помимо своей простоты, это тем, что ее вычислительная сложность имеет порядок 2^M , то есть экспоненциально зависит от размера входной памяти M , а не от размера памяти РСЛОС - r . Поэтому для гарантирования противостояния криптосхемы относительно инверсионной атаки следует выбирать M достаточно большим, предпочтительно близким к максимально возможному значению $r - 1$. Одновременно следует обратить внимание, что неправильный подбор точек съема может кардинально сокращать размер входной памяти. Например, рассмотрим эквидистантную последовательность точек съема $\gamma = (i\delta)_{i=0}^{n-1}$, где δ - положительное целое. Тогда, вместо рассмотрения самих входных и выходных последовательностей, следует рассматривать их равномерные усечения на δ , что эффективно сокращает размер входной памяти в δ раз.

Что будет в том случае, если избрать для схемы сбалансированную фильтр-функцию f , которая не удовлетворяет условиям Теоремы? Это означает, что имеется доля p_+ значений входных переменных (z_2, \dots, z_n) , при которых f равна нулю или единице (с равной вероятностью) независимо от z_1 ; и, аналогично, имеется доля p_- значений входных переменных (z_1, \dots, z_{n-1}) , при которых f равна нулю или единице (с равной вероятностью) независимо от z_n . В этом случае следует сначала найти минимум p_+ и p_- , а затем соответствующим образом применить обобщенную инверсионную атаку в прямом или обратном направлении. При обобщенной инверсионной атаке цель поиска - для каждого предполагаемого начального состояния памяти найти все возможные входные последовательности длины $r - M$ по известному фрагменту гаммы такой же длины. Теперь, вообще говоря, входная последовательность не будет уникальной. В [148] предложено несколько возможных методов дальнейшего вскрытия. Но в любом случае следует иметь в виду, что если фильтр-функция не удовлетворяет предполагаемым условиям Теоремы, то выходная шифрпоследовательность имеет статистическую

слабость, которая (согласно Лемме) проявляется в (самое большое) $M+1$ последовательных выходных битах. Также следует отметить, что для любого размера M входной памяти, чем больше сложность обобщенной инверсионной атаки, тем легче выявить эту статистическую слабость.

4.4.5 Множества положительных разностей и корреляционный иммунитет

Цель данного раздела - исследовать дополнительные критерии, предъявляемые к фильтр-функции f и последовательности точек съема γ для повышения стойкости фильтр-генератора.

(I) Выбор точек съема. Введем несколько новых определений. Пусть $\Gamma = \{\gamma_i : 1 \leq i \leq n\}$ - множество из n неотрицательных целых чисел, соответствующих возрастающей последовательности неотрицательных целых $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n$, где $\gamma_1 = 0$ а $\gamma_n = M \leq r - 1$. Пусть $\Gamma_\tau = \{\gamma_i + \tau : 1 \leq i \leq n - 1\}$, $\tau \geq 0$ - фазовый сдвиг Γ . Пусть $I(\tau) = |\Gamma_\tau \cap \Gamma|$ обозначает мощность пересечения между Γ_τ и Γ , и называется *коэффициентом пересечения*. При $\tau > M$ $I(\tau) = 0$. Пусть $I_{\max} = \max \{I(\tau) : 1 \leq \tau \leq M\}$. Далее, множество Γ называют *эквилидистантным* с расстоянием δ , если его элементы эквидистантны, то есть для некоторого положительного целого δ имеем $\Gamma_\tau = \{\gamma_i + i\delta : 1 \leq i \leq n\}$. Множество Γ называют *полным множеством положительных разностей*, если все положительные попарные разности между его элементами различны. Такие множества используются при разработке самоортогональных сверточных кодов (смотри, к примеру, [219]).

Значение $I(\tau)$ - это количество входных переменных, совместно разделяемых как функцией f , так и ее фазовым сдвигом на τ . Интуитивно понятно, что информационное просачивание через пополненную функцию F_{M+1} связано со значениями коэффициентов пересечения: грубо говоря, чем больше коэффициенты пересечения, тем больше просачивание. Поэтому ясно, что желательно минимизировать максимальный коэффициент пересечения. Базовые свойства коэффициентов пересечения будут описаны с помощью трех простых лемм. Первая лемма дает интерпретацию $I(\tau)$ в терминах положительных попарных разностей элементов Γ ; вторая лемма показывает, что суммарный коэффициент пересечения не зависит от Γ ; а третья лемма определяет минимальное и максимальное значения I_{\max} , а также необходимое и достаточное условия для их достижения.

Лемма 1. Для любого $\tau \geq 1$ коэффициент пересечения $I(\tau)$ равен количеству пар элементов Γ , находящихся на расстоянии τ .

Лемма 2. Для любого Γ суммарный коэффициент пересечения задается равенством

$$\sum_{\tau=1}^M I(\tau) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (5)$$

Лемма 3. *Максимальный коэффициент пересечения I_{\max} удовлетворяет ограничениям*

$$1 \leq I_{\max} \leq n - 1 \quad (6)$$

где максимум и минимум достигаются тогда и только тогда, когда Γ - эквидистантное множество и полное множество положительных разностей соответственно.

Таким образом, естественным выбором для Γ является полное множество положительных разностей. Однако, для любого множества положительных разностей Γ из n элементов максимальная разность M не может быть меньше чем $n(n - 1)/2$. Поскольку $M \leq r - 1$, то отсюда следует, что в этом случае n должно быть меньше, чем примерно $\sqrt{2r}$. Если Γ - полное множество положительных разностей, а n зафиксировано, то I_{\max} остается равным единице независимо от M , но большие значения M предпочтительны при учете инверсионной атаки. Полные множества положительных разностей можно получать путем систематического поиска (разновидность целочисленного линейного программирования, см. [223]) либо из таблиц, уже опубликованных в литературе (см., например, [219] и [223]).

Нижняя граница в (6) не может быть достигнута в том случае, если $r \leq n(n - 1)/2$, другими словами, если n больше, чем примерно $\sqrt{2r}$. В этом случае базовым конструктивным принципом становится выбор такого Γ , которое минимизирует I_{\max} при заданных r и n . С учетом Леммы 1 это эквивалентно минимизации максимального количества пар элементов из Γ , находящихся на одном и том же расстоянии друг от друга. Соответственно, для некоторого положительного целого λ будем называть Γ *множеством положительных разностей порядка λ* , если λ - это максимальное количество пар его элементов с одной и той же взаимной разностью (при $\lambda = 1$ получаем полное множество положительных разностей). Понятно, что необходимым условием для существования такого множества является выполнение $n(n - 1) / (2\lambda) \leq M \leq r - 1$, где M обозначает максимальную положительную разность. Поскольку наша цель - минимизировать $I_{\max} = \lambda$, то сначала мы выбираем $\lambda = \lceil n(n - 1) / (2(r - 1)) \rceil$, а затем отыскиваем множество Γ положительных разностей порядка λ такое, чтобы $n(n - 1) / (2\lambda) \leq M \leq r - 1$. Множество положительных разностей порядка λ можно сконструировать способом, аналогичным способу отыскания полного множества положительных разностей.

Таким образом, для оптимального выбора точек съема при заданных параметрах r и n следует отыскать такое множество Γ , чтобы значение I_{\max} было минимизировано. Решением данной задачи является полное множество положительных разностей или множество положительных разностей порядка λ с минимально возможным λ .

(II) Выбор фильтр-функции. Учитывая полученные к настоящему времени в открытой криптографии результаты, сегодня уже ясно, что подходящую фильтр-функцию следует искать среди сбалансированных корреляционно-иммунных функций [361] (см. Раздел 5.1). Но в случае фильтр-генератора следует также учитывать требования Теоремы из Раздела 4.4.4. В этих условиях f является сбалансированной и корреляционно-иммунной порядка t тогда и только тогда, когда g сбалансирована и имеет корреляционный иммунитет порядка $(t-1)$. Для того, чтобы исследовать статистическую

зависимость между входом фильтр-функции и выходной шифрпоследовательностью, Голичем [148] построена соответствующая математическая модель проблемы.

Пусть $X(t) = (x(t - \gamma_i))_{i=1}^n$ обозначает упорядоченное множество входных бит (двоичных случайных величин) входной последовательности x , используемой для порождения выходных бит $y(t)$, для любого $t \geq 0$. Тогда уравнение фильтра (1) приобретает вид $y(t) = f(X(t))$. В более общей форме, пусть $T^k = (t_i)_{i=1}^k$ обозначает возрастающую последовательность (упорядоченное множество) из k различных неотрицательных целых; и пусть $y(T^k) = (y(t_i))_{i=1}^k$ и $X(T^k) = \bigcup_{i=1}^k X(t_i)$, где $X(T^k)$ упорядочено. Тогда $y(T^k)$ - это k -мерная векторная булева функция от $X(T^k)$. Далее, пусть для любых T^{k_1} и T^{k_2} обозначение $P(X(T^{k_1}) | y(T^{k_2}))$ означает условную вероятность того, что случайный вход, соответствующий T^{k_1} , имеет конкретное значение $X(T^{k_1})$, когда случайный выход, соответствующий T^{k_2} , равен конкретному значению $y(T^{k_2})$ (для простоты, одно и то же обозначение будет применяться для случайных величин и их значений).

Лемма 4. Пусть Γ - множество положительных разностей порядка λ и пусть f - сбалансированная с корреляционным иммунитетом порядка t булева функция. Тогда для любого k такого, что $1 \leq k \leq \lfloor t / \lambda \rfloor + 1$, и любого T^k функция $y(T^k)$ является сбалансированной функцией от $X(T^k)$.

Лемма 5. Пусть Γ и f - такие же как в Лемме 4. Тогда для любых k_1 и k_2 таких, что $k_1, k_2 \geq 1$ и $2 \leq k_1 + k_2 \leq \lfloor t / \lambda \rfloor + 1$, и любых непересекающихся T^{k_1} и T^{k_2} функция $y(T^{k_2})$ является сбалансированной функцией от $X(T^{k_2})$ для любого фиксированного $X(T^{k_1})$.

Теорема 2. Пусть $\Gamma, f, k_1, k_2, T^{k_1}$ и T^{k_2} такие же как в Лемме 5. Тогда

$$P(X(T^{k_1}) | y(T^{k_1} \cup T^{k_2})) = P(X(T^{k_1}) | y(T^{k_1})) \quad (7)$$

где $T^{k_1} \cup T^{k_2}$ означает упорядоченное объединение T^{k_1} и T^{k_2} . Более того, для каждого $1 \leq k \leq \lfloor t / \lambda \rfloor + 1$ и каждого $T^k = (t_i)_{i=1}^k$

$$P(X(T^k) | y(T^k)) = P(X(t_1) | y(t_1)) \prod_{i=2}^k P(X(t_i) | y(t_i), X((t_j)_{j=1}^{i-1})). \quad (8)$$

По мнению Голича, Теорема 2 показывает, что статистическая зависимость между входной последовательностью и любыми $\lfloor t / \lambda \rfloor + 1$ или менее входными битами имеется только из-за самой фильтр-функции f , а не из-за взаимодействия между f и ее сдвинутыми версиями (как полагал Р. Андерсон). Таким образом, для того, чтобы условная корреляционная атака была эффективной (другими словами, для получения большей информации о входной последовательности, нежели при безусловной корреляционной атаке на основе f), необходимо изучить по крайней мере $\lfloor t / \lambda \rfloor + 2$ выходных бита и проанализировать соответствующую векторную булеву функцию. Сложность такой атаки

зависит от количества невырожденных входных переменных этой функции. Если мы возьмем минимальное количество $k = \lfloor m / \lambda \rfloor + 2$ выходных бит с позиций, заданных множеством $T^k = (t_i)_{i=1}^k$, то количество невырожденных входных переменных для $y(T^k)$ как векторной булевой функции от $X(T^k)$ в точности равно мощности множества $X(T^k)$, являющегося объединением отдельных множеств $X(t_i)$, $1 \leq i \leq k$. Мощность каждого из этих множеств в точности равна количеству n невырожденных входных переменных для f . И поскольку Γ - это множество положительных разностей порядка λ , то мощность его попарных пересечений равна самое большее λ согласно Лемме 1. Тогда, в соответствии с хорошо известным принципом включения-исключения, мощность их объединения по меньшей мере равна следующему выражению:

$$K = (\lfloor m / \lambda \rfloor + 2) \left(n - \lambda \frac{\lfloor m / \lambda \rfloor + 1}{2} \right). \quad (9)$$

Для каждой линейной функции-кандидатуры на вход сложность условной корреляционной атаки ограничена снизу значением 2^K , и для проверки всех 2^K из них сложность составит по крайней мере 2^{2K} . Конечно, в действительности сложность больше, поскольку при больших коэффициентах условной корреляции обычно требуется исследовать более чем $\lfloor m / \lambda \rfloor + 2$ выходных бит. Если m достаточно велико в сравнении с λ , и относительно велик параметр n , то K легко можно сделать достаточно большим.

Интересно также проанализировать K как функцию от λ в условиях, когда зафиксированы длина r РСЛОС и соотношение n/m , имея при этом в виду, что n не может превышать примерно $\sqrt{2r\lambda}$. Оказывается, что в этом случае K понижается в зависимости от λ , хотя и не существенно. Это означает, что увеличение значений n и m может не влиять на увеличение λ . С другой стороны, для обеспечения небольших коэффициентов безусловной корреляции функции f , более крупные значения n выглядят предпочтительней.

4.4.6 Критерии обеспечения стойкости нелинейных фильтр-генераторов

Имеющиеся на сегодня результаты криптоанализа [148] позволяют сформулировать следующие конструктивные критерии для разработки нелинейных фильтр-генераторов:

- Для достижения большого периода и высокой линейной сложности длина r соответствующего РСЛОС и алгебраический порядок k фильтр-функции f должны быть достаточно велики, так чтобы величина $\binom{r}{k}$ была значительно больше, чем предполагаемая в приложениях длина шифрпоследовательности.
- Для гарантирования хороших статистических свойств фильтр-функция f должна удовлетворять условиям Теоремы из Раздела 4.4.4
- Для успешного противостояния инверсионной атаке необходимо:
 - (а) выбирать последовательность точек съема γ таким образом, чтобы размер M входной памяти был большим, предпочтительно близким к максимально возможной величине $r - 1$;

- (б) для того, чтобы криптоаналитическая техника равномерного усечения не сокращала размер входной памяти, наибольший общий делитель элементов γ должен быть равен 1 (первый элемент γ без ограничения общности подразумевается равным нулю).
- Для того, чтобы сделать неэффективной условную корреляционную атаку, параметр сложности K в равенстве (9) должен быть достаточно большим. Для этого:
 - (а) количество n невырожденных входов функции f должно быть достаточно большим;
 - (б) γ должна выбираться в соответствии с полным или λ -порядка множеством положительных разностей, где значение λ минимально при заданных r и n ;
 - (в) порядок t корреляционного иммунитета функции f должен быть достаточно велик в сравнении с λ .
 - Для противостояния быстрым корреляционным атакам ненулевые корреляционные коэффициенты функции f относительно линейных функций (как безусловных, так и обусловленных своим двоичным выходом) должны быть относительно малы и взаимно близкими по величине. Для достижения этого параметр n должен быть достаточно большим. Для этого можно использовать композицию линейной векторной булевой функции, основанной на линейном исправляющем ошибки коде с заданным минимальным расстоянием, и случайной сбалансированной булевой функции от менее чем n входных переменных (смотри, например, [372] [391] [401]).
 - Количество ненулевых членов в полиноме обратной связи РСЛОС и в любом из его "низкой" степени полиномиальных кратных не должно быть "малым". Это требование является важным как для противостояния быстрым корреляционным атакам, так и для понижения линейной статистической слабости [144][145].

Примечательно, что все эти конструктивные требования легко реализовать одновременно.



Глава 5

Криптографические функции. Критерии нелинейности и методы конструирования.

5.0 Общий обзор

Наиболее распространенный метод построения генератора шифрующей гаммы - комбинировать выходы от нескольких регистров сдвига с помощью некоторой нелинейной функции. Блэйзер и Хайнцманн [37] первыми в открытой криптографии отметили, что если комбинирующая функция пропускает на выход информацию о своих функциях-компонентах, то работа по вскрытию такой шифрсистемы может быть существенно сокращена. Эта идея получила свое дальнейшее развитие в работе Томаса Зигенталера 1984 года, где была введена новая концепция, получившая название *корреляционно-иммунные функции* [361]. С тех пор данная тема является областью активных криптографических исследований, а корреляционный иммунитет стал одним из ключевых конструктивных критериев при разработке поточных шифров на основе регистров сдвига [334] [339].

С практической точки зрения, наибольшую важность имеет отыскание методов для легкого конструирования корреляционно-иммунных функций (см. Раздел 5.1). Зигенталером в [361] был представлен самый первый метод для построения (сбалансированных) корреляционно-иммунных функций. Его метод является рекурсивным по своей природе и поэтому не очень удобен в практических приложениях. В 1991 году французские математики Камион, Карле, Шарпен и Сендрие исследовали корреляционно-иммунные функции с точки зрения теории алгебраического кодирования, и ими был представлен свой метод для конструирования корреляционно-иммунных функций любого порядка [55]. В 1993 году криптографы Себерри, Чжань и Чжень из австралийского университета Воллонгонга подошли к этой проблеме с позиций теории адамаровых матриц [352]. Ими разработан собственный метод непосредственного построения сбалансированных корреляционно-иммунных функций любого порядка и способ конструирования корреляционно-иммунных функций в пространстве большей размерности при помощи комбинирования известных корреляционно-иммунных функций из пространства меньшей размерности.

Оценивая нелинейность булевых функций как качество, фундаментально важное с криптографической точки зрения, швейцарцы Вилли Майер и Отмар Штаффельбах

подошли к проблеме отыскания "хороших" функций с более общих позиций (см. Раздел 5.2). В 1989 году они представили общий метод оценки критериев нелинейности для булевых функций [255], позволяющий классифицировать критерии по степени их пригодности к измерению нелинейности. Такой подход, основанный на исследовании инвариантности критерия относительно возможно большей группы преобразований и на расстоянии функции до множеств криптографически слабых функций, привел авторов к классу нелинейных функций, обладающих множеством привлекательных криптографических свойств. Класс этих функций, имеющих максимальное расстояние до аффинных функций и линейных структур, получил название "*совершенные нелинейные функции*", и оказалось, что найденное так множество совпадает с классом функций, известным в комбинаторике под названием "*бент-функции*".

Бент-функции (см. Раздел 5.3), определенные на $(GF(2))^m$, это такие булевы функции $f(x)$, ($x = (x_1, \dots, x_m)$), которые удовлетворяют одному из следующих эквивалентных свойств ([105][328][59]):

- расстояние Хэмминга от f до кода Рида-Маллера порядка 1 (то есть множества всех аффинных функций на $(GF(2))^m$) максимально;
- для любого ненулевого элемента s из $(GF(2))^m$ функция $x \rightarrow f(x) + f(x + s)$ является сбалансированной (т.е. имеет несущее множество размера 2^{m-1});
- преобразование Уолша функции с действительными значениями $f_{\chi}(x) = (-1)^{f(x)}$, т. е.

$$\hat{f}_{\chi}(s) = \sum_{x \in (GF(2))^m} (-1)^{f(x)+x \cdot s}$$

имеет постоянную величину. Из соотношения Парсевалия

$$\sum_{s \in (GF(2))^m} \hat{f}_{\chi}^2(s) = 2^{2m}$$

следует, что эта константа имеет величину $2^{m/2}$.

В [208] Кумар, Шольц и Уэлч исследовали обобщенные бент-функции $\mathbb{Z}_q^n \rightarrow \mathbb{Z}_q$, где q - положительное целое. Впоследствии Ньюберг [285] рассмотрела криптографические свойства таких обобщенных бент-функций. Ньюберг расширила идею совершенной нелинейности на q -ичный случай: функция $f: \mathbb{Z}_q^n \rightarrow \mathbb{Z}_q$ является совершенной нелинейной, если для всех ненулевых $a \in \mathbb{Z}_q^n$ и $b \in \mathbb{Z}_q$ выполняется соотношение

$$|\{x : f(x) = f(x + a) + b\}| = q^{n-1}.$$

Ясно, что совершенная нелинейная функция является бент-функцией. Но бент-функция является совершенной нелинейной только в том случае, когда q - простое. Можно показать, что бент- (совершенные нелинейные) функции $f: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow \mathbb{Z}_p$ существуют для каждого нечетного простого p и каждого положительного целого n . Ньюберг [285]

рассмотрела, в частности, распределения значений p -ичных бент-функций, p - простое, и их расстояния Хэмминга до множества аффинных функций.

Конструкции (булевых) бент-функций весьма интересуют криптографов. Количество булевых бент-функций остается открытой проблемой. В [395] можно найти список конструкций, обнаруженных к концу 1980-х годов. В Разделе 5.3 описаны как уже хорошо известные конструкции Ротхауса, Диллона и Майораны-Макфарленда, так и построенные в 1990-е годы новые конструкции бент-функций Клода Карле и Ханса Доббертина.

Несмотря на свои привлекательные криптографические свойства, бент-функции не могут полностью удовлетворить потребности конструкторов криптосхем: бент-функции не сбалансированы (их нулевое и единичное выходное значение неравоятны), кроме того, они существуют лишь в тех случаях, когда количество входных координат четно. По этой причине разработаны и другие важные критерии оценки булевых функций - *строгий лавинный критерий* и *критерий распространения*, представленные в Разделе 5.4.1.

Говорят, что булева функция от n входных координат удовлетворяет *критерию распространения относительно некоторого ненулевого вектора*, если комплементарное дополнение входных координат функции в соответствии с этим вектором приводит к тому, что выход функции комплементарно дополняется в 50% случаев для всех возможных векторов входа. *Критерий распространения степени k* удовлетворяется в том случае, если комплементация k или менее входных координат приводит к комплементации выхода в 50% случаев при всех возможных входных векторах. *Строгий лавинный критерий (СЛК)*, введенный в криптографический обиход несколько ранее, совпадает с критерием распространения степени 1. Впервые концепция СЛК была введена в 1985 году Уэбстером и Таваресом [383], в одну сторону его обобщила Р. Форре [118], в другую - Эдамс и Таварес [2]. Сведение этих обобщений к единой концепции критерия распространения было проведено коллективом бельгийских авторов (Б.Пренэль и др.) в 1990-1991 годах [304] [305].

В Разделе 5.4.2 представлены методы для систематического конструирования (на основе бент-функций) криптографически сильных функций, удовлетворяющих критериям сбалансированности, высокой нелинейности и критерию распространения высокой степени. Описанную технику построения таких функций разработали Себерри, Чжань и Чжень [351][353].

Два последних автора - выходцы из КНР, работающие в Австралии - в 1997 году опубликовали еще одну заметную работу, посвященную "*эластичным функциям*" [402]. Криптографически важная концепция эластичных функций была введена в 1985 году Хором с коллегами [79] и, независимо от них, Беннетом, Брассаром и Робером [23]. Функция F с n -входом и t -выходом называется (n, t) -*эластичной*, если она пробегает все возможные выходные t -граммы равное количество раз в том случае, когда t произвольных входов зафиксировано, а остальные $n - t$ входов пробегают через все 2^{n-t} входных векторов по разу. Как оказалось, сбалансированные корреляционно-иммунные функции, введенные Зигенталером [361], - это особый частный случай эластичных функций. В Разделе 5.4.3 представлен обзор современных результатов по исследованию эластичных функций и описаны методы синтеза таких конструкций с высокими криптографическими свойствами.

В завершение данной главы приводятся общие рекомендации разработчикам криптосхем по выбору сильных булевых функций из работы Райнера Рюппеля "Поточные шифры" [339] (Раздел 5.5).

5.1 Корреляционный иммунитет порядка k

Булевы функции называют корреляционно-иммунными, если в их выход не просачивается никакая информация об их входе. Такого рода функции представляют особую ценность при конструировании генераторов шифрующей последовательности. Отыскание методов легкого конструирования корреляционно-иммунных функций является областью активных криптографических исследований с момента введения самой этой концепции Томасом Зигенталером в 1984 году [361]

5.1.1 Базовые понятия и результаты для узлов без памяти

Рассматривается V_m - векторное пространство m -грамм с элементами из $GF(2)$. Отметим, что имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между векторами из V_m и целыми числами из $[0, 2^m - 1]$. Это позволяет упорядочить данные векторы в соответствии с их целочисленными значениями. Для удобства, как α_i будет обозначаться вектор, чье целочисленное представление равно i .

Пусть f - функция из V_m в $GF(2)$ (или просто функция над V_m). Поскольку f может быть выражена как уникальный полином от m переменных x_1, x_2, \dots, x_m , то будем идентифицировать f с помощью ее уникального многочлена $f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Для того, чтобы отличать вектор от его отдельных координат, будем векторы обозначать как w, x, y или z ; в то время как координаты - w_i, x_i, y_i или z_i , где i - индекс. *Алгебраическая степень функции f* определяется как количество координат в ее самом длинном члене при представлении с помощью алгебраической нормальной формы. При этом f называется *аффинной функцией*, если принимает вид $f(x) = a_1x_1 \oplus \dots \oplus a_mx_m \oplus c$, где $a_j, c \in GF(2)$. В частности, f именуется *линейной функцией*, если $c = 0$.

Последовательность функции f - это $(1,-1)$ -последовательность, задаваемая как $((-1)^{f(\alpha_0)}, (-1)^{f(\alpha_1)}, \dots, (-1)^{f(\alpha_{2^m-1})})$; *таблица истинности f* - это $(0, 1)$ -последовательность, задаваемая как $(f(\alpha_0), f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{2^m-1}))$. Говорят, что f является *сбалансированной функцией*, если ее таблица истинности имеет 2^{m-1} нулей (единиц).

В рамках данной главы для скалярного произведения двух векторов будет использоваться, помимо $\alpha \cdot \beta$, обозначение $\langle \alpha, \beta \rangle$. В частности, в том случае, когда $\alpha, \beta \in V_m$, то $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1b_1 \oplus \dots \oplus a_mb_m$, где сложение и перемножение выполняются над $GF(2)$; а когда α и β - это $(1,-1)$ -последовательности, то $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$, где сложение и умножение выполняется над действительными числами.

Теперь будет введена концепция *корреляционно-иммунной функции* - центральное понятие данного раздела. Пусть f - функция над V_m . Пусть X - случайная величина, принимающая значения $x \in V_m$ с равномерной вероятностью 2^{-m} , пусть X_i - случайная величина, соответствующая значению i -ой координаты $x_i \in GF(2)$, и пусть Y - случайная величина, порождаемая функцией f , то есть $Y = f(X)$. Говорят, что функция f имеет *корреляционный иммунитет порядка k* , если случайная величина Y статистически не зависит от любого подмножества X_{i_1}, \dots, X_{i_k} ее k входных координат [361].

Сяо и Мэсси [392] показали, что это условие эквивалентно тому, что $Y = f(X)$ статистически независима от суммы

$$\beta_1 X_1 \oplus \beta_2 X_2 \oplus \dots \oplus \beta_m X_m$$

для каждого вектора $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in V_m$, такого, что $1 \leq W(\beta) \leq k$, где $W(\beta)$ обозначает вес Хэмминга (количество ненулевых компонент) вектора β .

Наиболее простое доказательство этого условия впоследствии было дано Брюнельссоном [51] с использованием следующих соображений. Рассмотрим преобразование Уолша распределения условной вероятности $p(x|y)$ для подмножества X_1, \dots, X_k от k двоичных переменных

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_m} p(x|y) (-1)^{\langle \beta, x \rangle} &= E[(-1)^{\langle \beta, X \rangle} | Y = y] = \\ &= E[(-1)^{\langle \beta, X \rangle}] = \sum_{x \in V_m} p(x) (-1)^{\langle \beta, X \rangle} \end{aligned}$$

Таким образом, $p(x|y)$ и $p(x)$ идентичны, поскольку идентичны их преобразования Уолша.

Напомним, что преобразование Уолша \hat{f} функции f над V_m определяется как принимающая действительные значения функция

$$\hat{f}(\beta) = \sum_{x \in V_m} f(x) (-1)^{\langle \beta, x \rangle},$$

где $\beta \in V_m$. Отметим, что в данной сумме $f(x)$ и $\langle \beta, x \rangle$ рассматриваются как функции, принимающие действительные значения.

Сяо и Мэсси дали эквивалентное определение корреляционного иммунитета в терминах преобразования Уолша [392]. Функция f над V_m имеет *корреляционный иммунитет порядка k* , если ее преобразование Уолша удовлетворяет равенству $\hat{f}(\beta) = 0$ для всех $\beta \in V_m$ таких, что $1 \leq W(\beta) \leq k$.

Зигенталер [361] показал, что существует взаимосвязь между алгебраической степенью функции и достижимым уровнем корреляционного иммунитета. Порядок k корреляционного иммунитета функции над V_m и ее алгебраическая степень d жестко связаны соотношением $k + d \leq m$. Единственными функциями над V_m , достигающими максимального порядка $(m - 1)$ корреляционного иммунитета являются

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_m \quad \text{и} \quad g(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_m \oplus 1,$$

обе из которых являются аффинными. Для сбалансированных функций, если $k \neq 0$ или $m - 1$, то соотношение приобретает вид $k + d \leq m - 1$ [361].

Сяо и Мэсси [392] несколько развили эти результаты, показав что для любой функции с корреляционным иммунитетом порядка k все коэффициенты членов степени $(m - k)$ в алгебраической нормальной форме функции f должны быть равны. Другими словами, либо все они присутствуют, либо все отсутствуют. Если f должна быть сбалансированной, то все они отсутствуют, как было замечено уже в [361]. Поскольку и

преобразование АНФ, и преобразование Уолша оба линейные, то их композиция - это линейное отображение, которое непосредственно вычисляет алгебраическую нормальную форму функции f по коэффициентам Уолша. Тогда верхняя граница достижимой алгебраической степени для корреляционно-иммунной функции k -ого порядка следует из пропадающих коэффициентов Уолша и структуры преобразования "Уолш-в-АНФ".

5.1.2 Конструирование корреляционно-иммунных функций

(I). Первая рекурсивная конструкция была представлена Зигенталером в его новаторской работе [361]. Пусть f_1 и f_2 - функции над V_m с корреляционным иммунитетом порядка k . Тогда конкатенация их последовательностей приводит к новой корреляционно-иммунной функции, а именно, функция

$$f(u,x) = (u \oplus 1) f_1(x) \oplus u f_2(x) \quad (1)$$

является корреляционно-иммунной функцией k -го порядка над V_{m+1} , где u - переменная над $GF(2)$, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

(II). П. Камион, К. Карле, П. Шарпен и Н. Сендрие из французского института INRIA в своей работе 1991 года [55] показали, что если в конструкции Зигенталера преобразования Уолша функций f_1 и f_2 удовлетворяют условию

$$\hat{f}_1(\lambda) + \hat{f}_2(\lambda) = 0, \quad \text{для всех } \lambda \in V_m \text{ таких, что } W(\lambda) = k,$$

то порядок корреляционного иммунитета функции f улучшается до $k + 1$. В частности, французские авторы показали, что данному условию удовлетворяют следующие две пары функций:

1. $g(x)$ и $1 \oplus g(x)$;
2. $g(x)$ и $g(\bar{x})$, где $\bar{x} = (1 \oplus x_1, 1 \oplus x_2, \dots, 1 \oplus x_m)$;

где g - корреляционно-иммунная k -го порядка функция над V_m . Отметим, что $1 \oplus g(x)$ дополняет выход, в то время как $g(\bar{x})$ дополняет вход. Таким образом, обе функции

$$f(x) = (u \oplus 1) g(x) \oplus u (1 \oplus g(x)) = u \oplus g(x)$$

и

$$f(x) = (u \oplus 1) g(x) \oplus u g(\bar{x}) = g(x) \oplus u (g(x) \oplus g(\bar{x}))$$

являются корреляционно-иммунными функция $(k + 1)$ -го порядка над V_{m+1} .

В этой же статье Камион и др. продемонстрировали метод для непосредственного конструирования корреляционно-иммунных функций. Пусть m и n - положительные целые и $m > n$. Пусть r и $p_j, j = 1, 2, \dots, n$ - произвольные функции над V_{m-n} . И пусть также $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-n})$. Положим

$$f(y, x) = \bigoplus_{j=1}^n x_j p_j(y) \oplus r(y). \quad (2)$$

Тогда определенная таким образом функция f является сбалансированной корреляционно-иммунной k -го порядка функцией над V_m , где k - целое, удовлетворяющее соотношению $k \geq \min\{W(P(y)) \mid y \in V_{m-n}\} - 1$, а $P(y) = (p_1(y), p_2(y), \dots, p_n(y))$.

(III). В работе 1993 года Дженнифер Себери, Сян-Мо Чжань и Юлиань Чжень из университета г. Воллонгонг (Австралия) представили свою технику для конструирования корреляционно-иммунных функций на основе теории адамаровых матриц [352].

Для последующего изложения необходимо ввести следующее обозначение. При заданном произвольном векторе $\delta = (i_1, \dots, i_s) \in V_s$ определим функцию $D_\delta(y)$ над V_s как

$$D_\delta(y) = (y_1 \oplus \bar{i}_1) \dots (y_s \oplus \bar{i}_s),$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$, а $\bar{i} = 1 \oplus i$ обозначает двоичное дополнение (комплемент) для i . Отметим, что поскольку $D_\delta(y) = 1$ тогда и только тогда, когда $y = \delta$, то произвольную функцию f над V_{s+t} можно представить в виде

$$f(y, x) = \bigoplus_{\delta \in V_s} D_\delta(y) f(\delta, x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_t)$.

Пусть m и n - положительные целые и $m > n$. Предположим, что $\Phi_{m,n} = \{\varphi_{0\dots 0}, \varphi_{0\dots 1}, \dots, \varphi_{1\dots 1}\}$ - это множество, содержащее 2^{m-n} линейных функций над V_n , каждая из которых проиндексирована вектором из V_{m-n} . $\Phi_{m,n}$ может быть мульти-множеством, другими словами, линейным функциям допускается появляться более одного раза в $\Phi_{m,n}$. Пусть также $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-n})$. Положим

$$g(y, x) = \bigoplus_{\delta \in V_{m-n}} D_\delta(y) \varphi_\delta(x) \oplus r(y). \quad (3)$$

Тогда определенная таким образом функция f является сбалансированной корреляционно-иммунной k -го порядка функцией над V_m , где k - целое, удовлетворяющее соотношению $k \geq \min\{W(\gamma_\delta) \mid \delta \in V_{m-n}\} - 1$, а $\varphi_\delta(x) = \langle \gamma_\delta, x \rangle \in \Phi_{m,n}$ и $\gamma_\delta \in V_n$.

После доказательства этого утверждения австралийские авторы показали также, что их конструкция и конструкция французов задают на самом деле одно и то же множество функций.

В качестве практического способа конструирования сбалансированных функций с заданным порядком корреляционного иммунитета авторами предложена следующая схема. Для целых k и n , где $0 \leq k < n$, пусть $\Omega_{k,n}$ обозначает множество линейных функций над V_n , имеющих $k+1$ или более ненулевых коэффициентов, а именно

$$\Omega_{k,n} = \{\varphi \mid \varphi(x) = \langle \beta, x \rangle, \beta \in V_n, W(\beta) \geq k+1\},$$



Дженнифер Себери

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда доказано, что возможно решение задачи в таком виде. При двух заданных целых числах m и k , где $m \geq 3$ и $0 \leq k < m - 1$, сбалансированная k -го порядка корреляционно-иммунная функция над V_m может быть сконструирована следующим образом.

1. Зафиксировать целое n такое, что $k < n < m$.
2. Создать множество $\Phi_{m,n}$ путем отбора линейных функций непосредственно из $\Omega_{k,n}$. Отметим, что размер $\Phi_{m,n}$ равен 2^{m-n} , и при отборе допускаются повторения.
3. Сконструировать функцию способом (3).

Опираясь на свою конструкцию, австралийские авторы в этой же работе предложили три метода построения корреляционно-иммунных функций над пространством большей размерности, используя такие функции из пространства меньшей размерности.

5.1.3 Корреляционный иммунитет и автомат с памятью

В работе Рюппеля 1985 года [333] был исследован вопрос, как введение памяти может помочь в задаче конструирования корреляционно-иммунных комбинирующих узлов. Было показано, что конечный (комбинирующий) автомат может расчлнить взаимосвязанные ограничения относительно корреляционного иммунитета и алгебраической степени. Комбинирующие узлы следующего вида

$$z_i = \sum_{j=1}^n x_{j,i} \oplus g(\sigma_{i-1})$$

$$\sigma_i = F(\sigma_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1})$$

где σ_i обозначает внутреннее состояние автомата в момент времени i , достигают корреляционного иммунитета максимального порядка $n - 1$ (здесь n - размерность векторного пространства). При этом функции F и g могут быть сконструированы так, чтобы удовлетворять подходящему критерию нелинейности, такому как максимальная алгебраическая степень, без ограничения на желаемый порядок корреляционного иммунитета. В частности, 1 бита памяти достаточно для того, чтобы расчлнить ограничения взаимной зависимости.

Рюппелем показано также, что целочисленное сложение n целых чисел с необходимостью задает конечный комбинирующий автомат с корреляционным иммунитетом максимального порядка. Входные последовательности можно интерпретировать как двоичные представления целых чисел, начиная с первого бита как самого младшего. Для вычисления i -го бита суммы требуются все i -ые биты входных последовательностей и перенос с младших позиций суммы. Для хранения информации переноса требуется некоторая конечная память.

В работе 1990 года [256] Майером и Штаффельбахом исследована суммарная корреляция конечных комбинирующих автоматов с 1 битом памяти. Для изложения их

результатов необходимо вкратце представить используемые авторами понятия и обозначения.

Пусть $f, g: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ - булевы функции и пусть X - случайная величина, принимающая значения $x \in \mathbb{F}_2^n$ с равномерной вероятностью 2^{-n} . Интерес представляет описание статистических зависимостей случайных величин $Z = f(X)$ и $Y = g(X)$ в терминах их порождающих функций f и g . Функция кросс-корреляции f и g определяется как

$$C_{fg}(t) = \sum_x (-1)^{f(x)} (-1)^{g(x \oplus t)}$$

Отметим, что коэффициент корреляции $c(f, g)$, как было определено в [255], удовлетворяет соотношению

$$c(f, g) = 2^{-n} C_{fg}(0).$$

Положим, что g - это (неконстантная) линейная функция $g(x) = \omega_1 x_1 \oplus \dots \oplus \omega_n x_n$. Такие линейные функции будут обозначаться $L_\omega(x)$. Тогда

$$c(f, L_\omega) = 2^{-n} \sum_x (-1)^{f(x)} (-1)^{\omega x} = 2^{-n} \hat{F}(\omega).$$

Легко видеть, что $Z = f(X)$ и $L_\omega(X)$ статистически независимы тогда и только тогда, когда $c(f, L_\omega) = 0$, или эквивалентно в терминах преобразования Уолша, тогда и только тогда, когда $\hat{F}(\omega) = 0$. При разработке корреляционно-иммунных функций одна из главных целей - воспрепятствовать корреляции с линейными функциями L_ω , особенно с теми, для которых мал вес Хэмминга $W_H(\omega)$. Наконец, рассмотрим суммарную корреляцию булевой функции f с набором всех линейных функций [255], определенную как

$$\begin{aligned} C^2(f) &= \sum_\omega c^2(f, L_\omega) \\ &= 2^{-2n} \sum_\omega \hat{F}^2(\omega) \\ &= 2^{-n} \sum_x f^2(x) \\ &= 1, \end{aligned}$$

где при выведении используется теорема Парсеваля. Как можно видеть, суммарная корреляция не зависит от функции f , фактически это константа.

Теперь обратимся к суммарной корреляции конечных комбинирующих автоматов с 1 битом памяти. Поскольку выходная цифра z_i такого автомата в момент времени i зависит самое большее от цифр $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,i}$ для $1 \leq j \leq n$, то должна быть корреляция с линейными функциями вида

$$\sum_{k=0}^i \sum_{j=1}^n \omega_{j,k} x_{j,k}.$$

Имеется $2^{n(i+1)}$ таких функций. Теперь рассмотрим обобщенный комбинирующий автомат с 1 битом памяти, со сбалансированным выходом и функциями следующего состояния $f_0, f_s : \mathbb{F}_2^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}_2$

$$\begin{aligned} z_i &= f_0(x_{1,i}, \dots, x_{n,i}, \sigma_{i-1}) \\ \sigma_i &= f_s(x_{1,i}, \dots, x_{n,i}, \sigma_{i-1}) \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 0)$ и $\beta = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, 1)$ обозначают линейные комбинации, которые в явном виде исключают и включают состояние σ . Разложим суммарную корреляцию $C^2(f_0)$:

$$\begin{aligned} C^2(f_0) &= \sum_{\alpha} c^2(f_0, L_{\alpha}) \sum_{\beta} c^2(f_0, L_{\beta}) \\ &= C_0^2(f_0) + C_1^2(f_0) = 1 \end{aligned}$$

Эквивалентно, $C^2(f_s)$ можно разложить на $C_0^2(f_s) + C_1^2(f_s)$. Затем в [256] доказано, что суммарная корреляция выходной цифры z_i , снимаемой с 1-битового комбинирующего автомата с $N = 2^{n(m+1)}$ (где $1 \leq m \leq i$) линейными функциями вида

$$L_{\omega, m} = \sum_{k=i-m}^i \sum_{j=1}^n \omega_{j,k} x_{j,k}$$

удовлетворяет равенству

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 = C_0^2(f_0) + C_1^2(f_0) [1 - (C_1^2(f_s))^m].$$

Отметим, что эта суммарная корреляция сходится к 1, за исключением единственного случая $C_0(f_s) = 0$, где предел равен $C_0^2(f_0)$. Таким образом, в несингулярном случае суммарная корреляция не зависит от функций f_0, f_s , задействованных в 1-битовом комбинирующем узле. Этим обобщается соответствующий результат для комбинирующих функций (без памяти). Если на 1-битовый комбинирующий узел подаются РСЛОС-последовательности, то ненулевая корреляция с функциями $L_{\omega, m}$ ведет к ненулевой корреляции с суммами $\sum_{j=1}^n s_j$ РСЛОС-последовательностей $s_j = \sum_{k=i-m}^i \omega_{j,k} x_{j,k}$, где s_j - фаза j -ого РСЛОС. Самое лучшее, что можно сделать в такой ситуации, это построить 1-битовый комбинирующий узел так, чтобы он имел корреляционный иммунитет максимального порядка [334]. Это условие соответствует требованию, чтобы для всех неисчезнувших корреляционных коэффициентов не было корреляции с суммой менее чем N РСЛОС-последовательностей [256]. "Сумматор" или *суммирующий комбинирующий узел* [333] для любого числа n входных последовательностей является примером такого конечного автомата с корреляционным иммунитетом максимального порядка (подробнее см. Раздел 7.2).

5.2 Классификация Майера-Штаффельбаха для критериев нелинейности

В 1989 году швейцарцы Вилли Майер и Отмар Штаффельбах [255] представили свой метод оценки критериев нелинейности для булевых функций. Нелинейность криптографических булевых функций является фундаментально важным качеством, поскольку большинство линейных функций легко вскрывается криптоаналитическими методами. По этой причине представляется важным иметь критерии, которые являлись бы мерами нелинейности функций. Швейцарские криптографы поставили перед собой задачу построения общей теории, которая давала бы возможность классифицировать уже известные и появляющиеся новые критерии с точки зрения их пригодности к измерению нелинейности. Такой подход привел авторов к классу нелинейных функций, обладающих множеством привлекательных криптографических свойств.

В основу классификации положена идея о том, что всякий полезный критерий должен оставаться инвариантным относительно определенной группы преобразований. Такая концепция является фундаментальной в чистой математике, например, в алгебре. В криптографии подобная точка зрения может быть мотивирована следующим образом: всякая функция считается слабой, если ее можно свести к криптографически слабой функции с помощью простых (например, линейных или аффинных) преобразований.

Для иллюстрации можно привести булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, алгебраическая нормальная форма которой получена суммированием всех возможных произведений из x_1, x_2, \dots, x_n . На первый взгляд - это хорошая нелинейная функция, коль скоро она содержит все нелинейные члены. Но, с другой стороны, функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно записать как произведение $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)$, которое преобразуется в одночленную функцию $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ простым дополнением всех аргументов. Таким образом, большое количество нелинейных членов не подходит в качестве критерия нелинейности, раз оно не обеспечивает инвариантности относительно простых преобразований.

Понятно также, что критерий нелинейности должен оставаться инвариантным относительно возможно большей группы преобразований (группы симметрии). Для анализа критериев нелинейности фундаментально полезной мерой представляется расстояние до набора криптографически слабых функций. *Расстояние* между двумя двоичными функциями f и g определяется как

$$d(f,g) = |\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq g(x)\}|,$$

другими словами, это расстояние Хэмминга между двумя таблицами функций.

Два критерия привлекли особый интерес авторов - расстояние до линейных структур и расстояние до аффинных функций, для которых показана инвариантность относительно всех аффинных преобразований. В контексте двух этих критериев рассмотрен оптимальный класс функций, которые одновременно имеют максимальное расстояние до аффинных функций и максимальное расстояние до линейных структур (а также минимальную корреляцию с аффинными функциями). Доказано, что класс функций с такими свойствами совпадает с классом функций, известным в комбинаторике под названием "*бент-функции*".

5.2.1 Расстояние до линейных функций

Расстояние от f до линейной функции L_ω близко связано с корреляционным коэффициентом $c(f, L_\omega)$

$$d(f, L_\omega) = 2^{n-1}(1 - c(f, L_\omega))$$

и может быть эквивалентно выражено в терминах преобразования Уолша $\hat{F}(\omega)$

$$d(f, L_\omega) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \hat{F}(\omega).$$

Максимальное расстояние до аффинной функции равно 2^{n-1} , поскольку из $d(f, \omega \cdot x) = d$ следует $d(f, \omega \cdot x \oplus 1) = 2^n - d$. Следовательно, булева функция f имеет корреляционный иммунитет порядка m , если ее расстояние $d(f, L_\omega) = 2^{n-1}$ для всех линейных функций $L_\omega(x) = \omega \cdot x$ с весом Хэмминга $W_H(\omega) \leq m$. Но, как и в случае суммарной корреляции, невозможно достичь максимального расстояния до всех линейных функций.

Пусть расстояние $d(f, S)$ от f до множества функций S определяется как

$$d(f, S) = \min_{g \in S} \{d(f, g)\}$$

то есть, как расстояние между f и ближайшим соседом функции f в S . Как следствие, расстояние от f до множества аффинных функций A задается как

$$d(f, A) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{\omega} \{|\hat{F}(\omega)|\}$$

Следовательно, для расстояние $d(f, A)$ может быть получена верхняя граница, если мы можем дать нижнюю границу для $\hat{F}^2(\omega)$. Используя теорему Парсеваля, находят

$$\sum_{\omega} \hat{F}^2(\omega) = 2^{2n}.$$

Таким образом, существует ω , для которого $\hat{F}^2(\omega) \geq 2^n$. Отсюда делается заключение, что для четного n и любой булевой функции f

$$d(f, A) \leq 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1}$$

Аналогично может быть показано, что для четного n и любой сбалансированной булевой функции f

$$d(f, A) \leq 2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}-1} - 2$$

В [255] показано, что $d(f,A)$ удовлетворяет свойству инвариантности, то есть $d(f, A)$ остается инвариантным относительно группы всех аффинных преобразований.

5.2.2 Функции с линейной структурой

Еще одно множество потенциально слабых функций - это множество L функций с линейной структурой, введенное в криптографический обиход в середине 1980-х годов при анализе DES-алгоритма. По определению, булева функция f имеет *линейную структуру* [76] [114] при $a \in \mathbb{F}_2^n$, если существует такое $a \in \mathbb{F}_2^n$, что для всех $x \in \mathbb{F}_2^n$ выполняется либо равенство $f(x) = f(x \oplus a)$, либо неравенство $f(x) \neq f(x \oplus a)$.

Аффинные функции имеют линейную структуру для всех $a \neq 0$. Но произвольная функция с линейной структурой не обязательно является аффинной. В качестве примера можно привести нелинейную функцию $f(x) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_2x_3$, имеющую линейную структуру при $a=(1,0,1)$. В [255] доказано, что

$$d(f,L) \leq 2^{n-2}$$

и показано, что $d(f,L)$ также удовлетворяет свойству инвариантности, то есть $d(f,L)$ остается инвариантным относительно группы всех аффинных преобразований.

5.2.3 Совершенные нелинейные функции

Основываясь на определении функций с линейными структурами, Майер и Штаффельбах [255] ввели идею совершенной нелинейности. По определению, функция является *совершенной нелинейной*, если

$$(\forall a \neq 0) \quad |\{x \in \{0,1\}^n : f(x) = f(x \oplus a)\}| = |\{x \in \{0,1\}^n : f(x) \neq f(x \oplus a)\}| = 2^{n-1},$$

то есть, если для каждого ненулевого вектора a значения $f(x)$ и $f(x \oplus a)$ совпадают точно для половины аргументов x и отличаются для остальной половины. Эквивалентно, f является совершенной нелинейной, если для ее автокорреляционной функции $C_f(a)$

$$C_f(a) = \sum_x \hat{f}(x \oplus a) \hat{f}(x) = 0 \quad (\forall a \neq 0).$$

Привлекая теорему Винера-Хинчина (согласно которой $C_f(a)$ и спектральная функция $\hat{F}^2(\omega)$ являются парой преобразования Уолша), получаем альтернативную характеристику для совершенной нелинейной функции в области преобразования:

$$\hat{F}^2(\omega) = 2^n.$$

Таким образом, а ± 1 -значная булева функция является совершенной нелинейной тогда и только тогда, когда $|\hat{F}(\omega)| = 2^{n/2}$ для всех ω . А это в точности определение свойства бент-функций, введенных Ротхаусом [328] в комбинаторной теории. Показано, что класс совершенных нелинейных (бент-) функций является оптимальным относительно обоих расстояний; при четном количестве аргументов n совершенные нелинейные (бент-) функции одновременно имеют максимальное расстояние $2^{n-1} - 2^{(n/2)-1}$ до всех аффинных функций и максимальное расстояние 2^{n-2} до всех функций с линейной структурой.

5.3 Бент-функции

Грубо говоря, бент-функции - это булевы функции, равномерно достигающие максимально возможной нелинейности. Более строго, это булевы функции, у которых максимально расстояние Хэмминга до множества всех аффинных функций над $(GF(2))^n$. Концепция бент-функций была введена в математику О.Ротхаусом в 1960-е годы, однако в открытой литературе его пионерная работа [328] была опубликована лишь спустя примерно 10 лет, в 1976 году [353]. В середине 1990-х годов (видимо, с подачи Австралии, где наиболее размыта грань между секретной и открытой наукой) в область академической криптографии введена самая ранняя из опубликованных работ по данной теме "Обзор бент-функций" Дж.Ф.Диллона 1972 года [103] из несекретного "Технического журнала АНБ" (некоторые результаты из этого обзора можно найти в Разделе 5.4). В 1974 году Диллон защитил докторскую диссертацию [104] в Мэрилендском университете, известной "кузнице кадров" Агентства национальной безопасности США.

Диллоном дано альтернативное определение бент-функций в терминах комбинаторных структур, именуемых *множества разностей* [105]:

Определение. Функция $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ является бент-функцией тогда и только тогда, когда множество $S_1 = \{x: f(x) = 1\}$ является множеством разностей в \mathbb{F}_2^n с параметрами $(2^n, 2^{n-1} \pm 2^{\frac{n}{2}-1}, 2^{n-2} \pm 2^{\frac{n}{2}-1})$. (То есть в S_1 имеется $2^{n-1} \pm 2^{\frac{n}{2}-1}$ элементов, и каждый ненулевой $x \in S_1$ может быть выражен $2^{n-2} \pm 2^{\frac{n}{2}-1}$ способами как разность $x = y \oplus z$ элементов $y, z \in S_1$.)

Бент-функции являются довольно сложными комбинаторными объектами, и задача описания бент-функций решается через задание конкретных классов. Ротхаус показал [328], что бент-функции существуют только для четного числа аргументов n , и что их нелинейный порядок ограничен значением $n/2$. Им же даны в явном виде конструкции бент-функций:

1. Пусть $n = 2m$ и g - произвольная функция; тогда функции вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_m) \oplus x_1 x_{m+1} \oplus \dots \oplus x_m x_n$$

являются бент-функциями.

2. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и пусть $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ - бент-функции такие, что $a(x) \oplus b(x) \oplus c(x)$ - тоже бент-функция. Тогда функция вида

$$f(x_1, x_{n+1}, x_{n+2}) = a(x)b(x) \oplus a(x)c(x) \oplus b(x)c(x) \oplus [a(x) \oplus b(x)] x_{n+1} \oplus [a(x) \oplus c(x)] x_{n+2} \oplus x_{n+1}x_{n+2}$$

также является бент-функцией.

5.3.1 Конструкция Маиораны-Макфарленда и бент-отображения Ньюберг

Более общая конструкция для булевых бент-функций была дана Маиораной (неопубликованная работа, см. [105][285]). Эквивалентный ей метод дан Макфарлендом в работе [253].

В рамках данного раздела поле Галуа порядка 2 будем обозначать как \mathbb{F} , а n и p - положительные целые, отвечающие соотношению $n = 2p$.

Р. Л. Макфарлендом доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $g: \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}$ - произвольная булева функция и пусть $\pi: \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^p$ - произвольное биективное преобразование (подстановка). Тогда функция $f: \mathbb{F}^n = \mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}$, задаваемая как

$$f(x,y) = x \cdot \pi(y) \oplus g(y)$$

является бент-функцией. (Здесь " \cdot " означает скалярное произведение.)

Кайса Ньюберг (являющаяся официальным криптографом министерства обороны Финляндии) дала в [286] следующее обобщение свойства "бентности".

Определение. Отображение $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ является совершенным нелинейным (бент), если для каждого фиксированного ненулевого $w \in \mathbb{F}^n$ разность $f(u+w) + f(u)$ принимает каждое значение $v \in \mathbb{F}^m$ для q^{n-m} значений $u \in \mathbb{F}^n$.

Для бент-отображений Ньюберг дала следующее полезное описание.

Теорема. Отображение $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ является бент-отображением тогда и только тогда, когда каждая нетривиальная линейная комбинация его координатных функций является бент-функцией, то есть для каждого ненулевого $c \in \mathbb{F}^m$ функция $u \mapsto c \cdot f(u)$ является бент-функцией.

В [286] бент-отображение конструируется следующим образом. Пусть $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ - некоторое отображение, и f_1, f_2, \dots, f_m - координатные функции f . Подразумевается, что каждая f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, - это функция Маиораны, то есть вида

$$f_i(x,y) = x \cdot \pi_i(y) \oplus g_i(y),$$

где \cdot - подстановка над \mathbb{F}^p , а g_i - булева функция над \mathbb{F}^p . Тогда $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ - бент-отображение, если каждая нетривиальная комбинация подстановок π_i , $i = 1, 2, \dots, m$, - подстановка над \mathbb{F}^p . Отметим, что $m \leq p$.

Один из способов конструирования подходящего семейства подстановок над \mathbb{F}^p - использовать двоичный регистр сдвига с линейной обратной связью (РСЛОС) длины p с примитивным полиномом обратной связи [287]. Пусть A - отображение преобразования состояний РСЛОС. Тогда A , так же как и его степени A^i , - это подстановки над \mathbb{F}^p . Более того, согласно хорошо известному свойству РСЛОС, порождающих последовательности максимальной длины, каждая нетривиальная линейная комбинация подстановок $I, A, A^2, \dots, A^{p-1}$ - это степень A и, следовательно, подстановка.

Тогда элементарной реализацией бент-отображения с n двоичными входами и m двоичными выходами, $n \geq 2m$, может быть следующая. Взять двоичный РСЛОС длины p с примитивным полиномом обратной связи. Разделить вход из n бит на две половины x и y . Загрузить РСЛОС вектором y , либо, как вариант, вектором $\pi(y)$, где π - (нелинейная) подстановка над \mathbb{F}^p . Первый бит выходного блока длины m получается вычислением скалярного произведения вектора x и начального содержимого регистра. Для получения второй цифры регистр один раз сдвигается, и вычисляется скалярное произведение нового содержимого и вектора x . Таким же образом каждый сдвиг регистра порождает новую цифру выхода.

Описанная базовая схема работает очень быстро. Если же для усложнения использовать нелинейную подстановку π или добавлять к координатным функциям нелинейные булевы функции g_i , то время вычислений, как правило, возрастает [287].

5.3.2 Конструкции Карле

Описанная в предыдущем разделе конструкция Маиораны-Макфарленда для бент-функций и построенная на ее основе конструкция бент-отображений имеют слабость: если вторая половина входа сохраняется постоянной, то результирующие функции и отображения линейно зависят от первой входной половины. В данном разделе описаны конструкции, не имеющие такой слабости. Два новых класса бент-функций были представлены французским математиком Клодом Карле в 1993 году [57]. Фактически, статья Карле стала первой с 1975 года публикацией в открытой литературе, где сконструированы новые классы бент-функций. В конце того же 1993 года Кайса Нюберг дала нетривиальные примеры бент-функций Карле и построила на их основе соответствующие бент-отображения [287].

(I). Первый новый класс бент-функций назван Карле классом D и построен на основе результатов, полученных Диллоном. Начальная идея была такова: если мы хотим получить новые бент-функции, то следует использовать уже известные функции и изменять их, не теряя необходимых свойств "бентности".

Одно из утверждений, доказанных Дж. Диллоном в его диссертации [104], можно сформулировать следующим образом. Пусть f - бент-функция над \mathbb{F}^n . Предположим, ее несущее множество содержит p -мерное линейное подпространство E . Тогда, если обозначить за Φ_E булеву функцию несущего множества E , то $f + \Phi_E$ - бент-функция.

На основе этого результата Карле построил класс бент-функций D .

Определение. Классом бент-функций D являются все булевы функции вида:

$$(x,y) \mapsto \Phi_E(x,y) + x \cdot \pi(y), \text{ где } (x,y) \in \mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p.$$

Здесь Φ_E - это характеристическая функция подпространства $E = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 - подпространства \mathbb{F}^p такие, что $\dim E_1 + \dim E_2 = p$, а π - подстановка над \mathbb{F}^p такая, что $\pi(E_2) = E_1^*$ (или другими словами, $x \cdot \pi(y) = 0$ для всех $(x,y) \in E$).

Конструкция бент-отображений К. Ньюберг на основе этого класса выглядит следующим образом [287]. Положим $n = 2p = 4s$, где s - положительное целое. Для построения класса бент-отображений $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^s$ выбирается РСЛОС с отображением преобразования состояний A . Пусть двоичный РСЛОС имеет длину p , а полином обратной связи C - это произведение двух примитивных многочленов степени s , которые обозначены C_1 и C_2 . Тогда каждая ненулевая последовательность, генерируемая этим регистром, имеет линейную сложность по крайней мере s , а это означает, что каждая нетривиальная линейная комбинация подстановок $I, A, A^2, \dots, A^{s-1}$ является подстановкой над \mathbb{F}^p . E_2 выбирается таким образом, чтобы это было подпространство \mathbb{F}^p , состоящее из блоков длины p последовательности максимальной длины, генерируемой РСЛОС с полиномом обратной связи C_1 . Тогда E_2 - инвариантное подпространство подстановки A и, более того, всех подстановок π , являющихся линейными комбинациями $I = A^0, A, A^2, \dots, A^{s-1}$. Положим

$$E_1 = \pi(E_2)^* = E_2^*.$$

Тогда E_1 - это подпространство \mathbb{F}^p , натянутое на s векторов

$$\begin{aligned} e_1 &= (c_0, \dots, c_s, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, c_0, \dots, c_s, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ e_s &= (0, \dots, 0, c_0, \dots, c_s), \end{aligned}$$

где за c_0, \dots, c_s обозначены коэффициенты полинома обратной связи C_1 .

Пусть G - подпространство \mathbb{F}^p , натянутое на s векторов, начиная с

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$$

Тогда характеристическая функция Φ_G , определенная на \mathbb{F}^p , имеет следующее выражение

$$\Phi_G(x) = \Phi_G(x_1, \dots, x_p) = (x_{s+1} + 1)(x_{s+2} + 1) \dots (x_p + 1).$$

Имея базис E_1 , мы получаем его характеристическую функцию Φ_{E_1} как скомбинированные функции линейного преобразования и Φ_G . По определению E_2 мы имеем

$$\Phi_{E_2}(y_1, \dots, y_p) = \prod_{j=1}^s (e_j \cdot y + 1).$$

Тогда Φ_E легко вычисляется как

$$\Phi_E(x, y) = \Phi_{E_1 \times E_2}(x, y) = \Phi_{E_1}(x) \Phi_{E_2}(y)$$

для всех $(x, y) \in \mathbb{F}^n$.

Для $i = 1, 2, \dots, s$ и $(x, y) \in \mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p$ мы полагаем

$$f_i(x, y) = \delta_i \Phi_E(x, y) + x \cdot A^{i-1}(y),$$

где $\delta_i = 0$ или 1 , а $f = (f_1, f_2, \dots, f_s)$. Тогда f - это бент-отображение $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^s$, чьи координатные функции и их линейные комбинации принадлежат классу D .

(II). Второй класс бент-функций, введенный Карле, обозначен им как C [57]. Для построения этого класса полученный выше результат распространен на случай, когда E - плоское, а его размерность не обязательно равна p . В этих условиях Карле показал, что новый класс бент-функций может быть задан следующим образом.

Определение (точнее, следствие доказанной теоремы). Пусть L - произвольное линейное подпространство пространства \mathbb{F}^p , а π - подстановка над \mathbb{F}^p такая, что для любого элемента $\lambda \in \mathbb{F}^p$, множество $\pi^{-1}(\lambda + L)$ - плоское. Тогда функция над $\mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p$ вида

$$x \cdot \pi(y) + \Phi_{L^\perp}(x)$$

является бент-функцией.

Конструкция одного из бент-отображений, построенных К. Ньюберг на основе класса C выглядит следующим образом [287]. Пусть r - произвольное целое между 1 и s , а A - отображение преобразования состояний РСЛОС, чей полином обратной связи - произведение двух примитивных многочленов степеней r и $p - r$, где $r \leq p/2$. Пусть C - многочлен степени r , а L - инвариантное подпространство отображения A размерности r , которое состоит из блоков длины p последовательности, генерируемой РСЛОС с полиномом C . Мы произвольно выбираем подстановку σ над \mathbb{F}^p такую, чтобы для всех $\lambda \in \mathbb{F}^p$, множество $\sigma^{-1}(\lambda + L)$ было плоское. Тогда это условие выполняется для всех подстановок π вида $B \circ \sigma$, где B - ненулевая линейная комбинация из $I, A, A^2, \dots, A^{r-1}$. Для $i = 1, 2, \dots, m$, $m \leq r$ и $(x, y) \in \mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p$ мы полагаем

$$f_i(x,y) = x \cdot A^{i-1}(\sigma(y)) + \delta_i \Phi_{L^\perp}(x),$$

где $\delta_i = 0$ или 1 . Тогда $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ - это бент-отображение с координатными функциями из класса C .

5.3.3 Общая конструкция Доббертина

В 1994 году немецкий криптограф Ханс Доббертин [108] из Германского агентства информационной безопасности описал в явном виде общую конструкцию бент-функций, которая объединила в себе известные конструкции Майораны-Макфарленда [253] и Диллона [105] в качестве противоположных экстремальных случаев. Помимо этого, Доббертин представил новый способ порождения бент-функций и показал, как их можно модифицировать в высоко нелинейные сбалансированные булевы функции.

(I). Тройная конструкция.

Определение (Тройная конструкция). Пусть L - поле $GF(2^n)$. Выберем три отображения (σ, ϕ, ψ) таким образом, чтобы было

$$\sigma : L \rightarrow GF(2) \text{ сбалансированное,}$$

$$\phi : L \rightarrow L \text{ биективное,}$$

$$\psi : L \rightarrow L \text{ произвольное.}$$

Булева функция $f = f_{\sigma, \phi, \psi}$ над L^2 , соотнесенная с тройкой (σ, ϕ, ψ) , задается следующим образом:

$$f(x, \phi(y)) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{x + \psi(y)}{y}\right) & \text{для } y \neq 0 \\ 0 & \text{в противном сл.} \end{cases}$$

Несущее множество функции f

$$\text{supp } f = \bigcup_{y \in L} (yS + \psi(y)) \times \{\phi(y)\},$$

где $S = \text{supp } \sigma$.

Будем называть (σ, ϕ, ψ) бент-тройкой, если соответствующая булева функция $f_{\sigma, \phi, \psi}$ является бент-функцией.

Майорана-Макфарленд и Диллон дали две различных конструкции бент-функций, здесь именуемых соответственно ММ-типа и Д-типа.

Бент функция ММ-типа. Это функция, имеющая вид $g(x,y) = \langle x, \pi(y) \rangle + h(y)$, где π - это биекция на $GF(2)^n$, h - произвольная булева функция на $GF(2)^n$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - каноническое скалярное произведение.

Бент функция Д-типа. Пусть $E = GF(2^{2n})$ и E рассматривается как расширение поля $L=GF(2^n)$. Выберем элемент $\alpha \in E$ с $E = L[\alpha]$. Мы полагаем

$$\bar{x} = x^{2^n} \quad (x \in E),$$

для автоморфизма Фробениуса $E : L$. Отображение

$$h: \begin{cases} x \mapsto \bar{x} / x \\ E^* \rightarrow E^* \end{cases}$$

- это мультипликативный гомоморфизм с образом

$$H = \{z \in E^* : z\bar{z} = 1\}.$$

Ядром h является L^* . Таким образом, H - это система представления для элементов фактор-группы E^*/L^* , то есть множеств вида xL^* ($x \in E^*$). С точки зрения того, что $H \cong E^*/L^*$, мы имеем

$$\#H = 2^n + 1.$$

Положим $H_1 = H \setminus \{1\}$. Тогда *бент-функции Д-типа* - это в точности характеристические функции множеств вида

$$D(Z) = \bigcup_{z \in Z} zL^*,$$

где $Z \subseteq H_1$ имеет ровно 2^{n-1} .

Преобразование Уолша булевой функции g , определенной на конечном векторном пространстве V над $GF(2)$, обозначается как g^W :

$$g^W(a) = \sum_{x \in V} (-1)^{g(x) + \langle a, x \rangle}.$$

При последующем изложении для скалярного произведения будут использоваться обозначения

$$\langle x, y \rangle = \text{Tr}(xy),$$

если функция g определена на поле L , и

$$\langle (x, u), (y, v) \rangle = \text{Tr}(xy + uv),$$

если g определена на L^2 .

Для формулировки основного результата данного раздела необходимо привести вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть U - подпространство векторного пространства $V = GF(2)^n$, и $y_0 \in V$. Тогда имеется такое линейное "на"-отображение $\rho : V \rightarrow U$, что взаимно-однозначное соответствие между булевыми функциями $\sigma : V \rightarrow GF(2)$ с

$$\text{supp } \sigma^W \subseteq y_0 + U$$

и всеми булевыми функциями τ на U задается следующим образом

$$\sigma(x) = \tau \rho(x) + \langle x, y_0 \rangle.$$

Кроме того, все σ сбалансированы тогда и только тогда, когда $y_0 \notin U$.

Теорема. Пусть $L = GF(2^n)$ и пусть (σ, ϕ, ψ) - описанная выше тройка отображений.

1. Если σ - аффинное, то (σ, ϕ, ψ) - бент-тройка для произвольных ϕ, ψ . В этом случае получается в точности функция ММ-типа.
2. Напротив, если ϕ и ψ - аффинные, то (σ, ϕ, ψ) - бент-тройка для произвольного σ . В этом случае функции $f_{\sigma, \phi, \psi}$ и $f_{\sigma, \text{id}, 0}$ аффинно эквивалентны. Бент функции Д-типа - это в точности функции вида $f_{\sigma, \text{id}, 0}$.
3. Помимо этих двух противоположных крайних случаев 1 и 2 существуют другие бент-тройки.

Положим $\phi(x) = x^d, \psi(x) = x^{d'}$ (или $\psi = 0$) для $d, d' < 2^n - 1$, и пусть нетривиальное подпространство U в L и $y_0 \in L \setminus U$ заданы таким образом, что выполняются следующие условия:

- (а) ϕ биективно, то есть d взаимно просто с $2^n - 1$,
- (б) ϕ и ψ не аффинны, то есть d и d' не являются степенями 2,
- (в) ϕ и ψ аффинны на $y_0 + U$.

Определим $\sigma : L \rightarrow GF(2)$ как неаффинную сбалансированную булеву функцию такую, что несущее множество σ^W - это подмножество $y_0 + U$. Это означает, что σ имеет вид

$$\sigma(x) = \tau \rho(x) + \text{Tr}(xy_0),$$

где $\rho : L \rightarrow U$ - линейное отображение "на", выбранное в соответствии с Леммой, а τ - произвольная неаффинная булева функция над U .

Тогда (σ, ϕ, ψ) - это бент-тройка, причем ни ММ-типа, ни Д-типа. Явное задание соответствующей бент-функции выглядит следующим образом

$$f(x, y^d) = \begin{cases} \tau \rho\left(\frac{x}{y} + y^{d'-1}\right) + \text{Tr}\left(\left(\frac{x}{y} + y^{d'-1}\right)y_0\right) & \text{если } y \neq 0 \\ 0 & \text{если } y = 0 \end{cases}$$

(II) Сбалансированные булевы функции.

Спектральным радиусом булевой функции $f : GF(2)^m \rightarrow GF(2)$ называют

$$R_f = \max \{|f^W(a)| : a \in GF(2)^m\}.$$

R_f можно рассматривать как меру линейности функции f . Таким образом, если нас интересуют булевы функции с высокой нелинейностью, то нам следует искать функции с маленьким радиусом R_f .

Но бент-функции являются несбалансированными. Поэтому если требуются сбалансированные функции с высокой нелинейностью, то естественно попытаться "сделать бент-функцию сбалансированной" и чтобы при этом спектральный радиус увеличился как можно меньше. Руководствуясь такими соображениями, Доббертин показал способ конструирования сбалансированных функций почти с той же самой нелинейностью, что и у бент-функций. Им доказано следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $W = GF(2)^n$ и $V = W^2$. Пусть f - нормальная бент-функция на V , то есть бент-функция от $2n$ переменных, постоянная на n -мерном аффинном подпространстве. Не теряя общности можно считать, что $f(x, 0) = 0$ для всех $x \in W$. Пусть задана сбалансированная функция $\theta : W \rightarrow GF(2)$. Положим для $x, y \in W$

$$\Theta(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } y \neq 0 \\ \theta(x), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Тогда функция Θ - сбалансированная и

$$\Theta^w(a, b) = \begin{cases} f^w(a, b) + \theta^w(a), & \text{если } a \neq 0 \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$R_\Theta = 2^n + R_\theta.$$

С практической точки зрения, для порождения булевых функций с высокими криптографическими качествами, можно индуктивно объединить рецепты Теоремы и Утверждения. Если же добавить сюда формирование прямых сумм, аффинные модификации, аффинные сложения, дуализацию и (обобщенный) пропуск, то все это можно рассматривать как "поваренную книгу" для приготовления как бент-функций, так и высоко нелинейных сбалансированных функций с четным количеством переменных.

В заключение Доббертином показано, что в сбалансированном случае максимальная нелинейность для $2n$ переменных связана с максимальной нелинейностью для n переменных неравенством

$$RB(2n) \leq 2^n + RB(n),$$

где $RB(m) = \min \{R_f | f : GF(2)^m \rightarrow GF(2) \text{ сбалансированная}\}$.

Однако проблема определения максимальной нелинейности сбалансированных булевых функций остается открытой.

5.4 Критерий распространения и эластичные функции

5.4.1 Строгий лавинный критерий и критерий распространения

Нелинейность булевой функции определяется как минимальное расстояние от этой функции до аффинных функций. Высокая степень нелинейности - одно из основных требований, предъявляемых к криптографически сильной функции. Хорошо известно (см. Раздел 5.3), что бент-функции характеризуются высочайшей степенью нелинейности, но две особенности препятствуют их непосредственному применению на практике. Во-первых, бент-функции не сбалансированы, а во-вторых, они существуют лишь в тех случаях, когда количество входных координат четно. В большом числе криптографических приложений от булевых функций требуется сбалансированность; нечетное количество входных координат функции усложнения - также нередко возникающее требование при конструировании криптосхем. Короче говоря, у криптографов имеются веские основания для создания и других критериев оценки пригодности булевых функций.

В 1985 году канадцы Уэбстер и Таварес [383] ввели идею *строгого лавинного критерия (СЛК)*, родившуюся при изучении проблемы конструирования S-боксов для блочных шифров (см., кроме того, [97]). Полезность данной концепции также и для поточных шифров очевидна. По определению, булева функция удовлетворяет СЛК, если любой выходной бит изменяется с вероятностью строго $\frac{1}{2}$ при комплементарной замене одного входного бита. То есть, если

$$(\forall a : W_H(a) = 1) \quad P(f(X) = f(X \oplus a)) = \frac{1}{2}.$$

Эквивалентно, функция f удовлетворяет СЛК, если ее автокорреляционная функция обращается в нуль при всех аргументах с весом Хэмминга 1:

$$(\forall a : W_H(a) = 1) \quad C_f(a) = 0.$$

По теореме Винера-Хинчина обратное преобразование Уолша $\hat{F}^2(\omega)$ должно удовлетворять

$$(\forall a : W_H(a) = 1) \quad \sum_{\omega} \hat{F}^2(\omega)(-1)^{\omega \cdot a} = 0.$$

Данное выражение - это в точности спектральная характеристика Форре для булевых функций, удовлетворяющих СЛК [118]. Затем Форре расширила базовую идею, дав определение СЛК порядка m : функция f удовлетворяет СЛК порядка m [118] [220] тогда и только тогда, когда любая частичная функция, полученная из f фиксацией константами m ее входов, удовлетворяет СЛК (для любого выбора позиций и значений для бит-констант). В [220] доказано, что существует 2^{n+1} функций от n переменных, удовлетворяющих СЛК максимального порядка $n - 2$.

Совершенные нелинейные (бент-) функции также удовлетворяют строгому лавинному критерию. Фактически, определение СЛК соответствует определению совершенной нелинейности, ограниченному векторами сдвига a с весом Хэмминга 1. Таким образом, совершенная нелинейность - это более сильное требование, нежели СЛК. В [304] дана конструкция для всех 2^{n+1} функций, удовлетворяющих СЛК порядка $n - 2$.

Обратив внимание на схожесть определений совершенной нелинейности и СЛК, в 1990 году бельгийские криптографы из Лувенского университета (Б. Пренэль, В. Ван Леквийк, Л. Ван Линден, Р. Говэртс и Й. Вандевалле) в [304] предложили критерий нелинейности, включающий в себя оба предыдущих. По их определению, булева функция $f: \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ удовлетворяет критерию распространения степени k , если

$$(\forall a : 1 \leq W_H(a) \leq k) \quad P(f(X) = f(X \oplus a)) = \frac{1}{2}.$$

Пусть $PC(k)$ обозначает класс функций, удовлетворяющих критерию распространения степени k . Эквивалентно, f входит в $PC(k)$, если

$$(\forall a : 1 \leq W_H(a) \leq k) \quad C_f(a) = 0,$$

или, привлекая теорему Винера-Хинчина:

$$\sum_{\omega: 1 \leq W_H(\omega) \leq k} \hat{F}^2(\omega) (-1)^{\omega \cdot a} = 0.$$

Отметим, что для булевой функции СЛК соответствует $PC(1)$, а совершенная нелинейность соответствует $PC(n)$.

5.4.2 Конструирование булевых функций, удовлетворяющих критериям сбалансированности, нелинейности и распространения

В 1993-1995 годах математики из Австралии Дж. Себери, С.-М. Чжань и Ю. Чжень исследовали свойства сбалансированности и нелинейности булевых функций, разработав методы для конструирования высоко нелинейных криптографических функций с требуемыми характеристиками [351][353].

5.4.2.1 Базовые понятия и аппарат адамаровых матриц.

Рассматриваются функции, отображающие $V_n \rightarrow GF(2)$ (или просто булевы функции на V_n), где V_n - векторное пространство n -грамм с элементами из $GF(2)$. Отметим, что функции на V_n можно представлять в виде полиномов от n переменных, в частности, в алгебраической нормальной форме как сумму произведений координат. Алгебраическая степень функции - это количество координат в самом длинном члене-произведении АНФ. Поскольку имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между векторами из V_n и целыми числами из $[0, 2^n - 1]$, то можно упорядочить данные векторы в соответствии

с их целочисленными значениями. Для удобства, как α_i будет обозначаться вектор, чье целочисленное представление равно i .

Пусть f - функция на V_n . Последовательность функции f - это (1,-1)-последовательность, задаваемая как $((-1)^{f(\alpha_0)}, (-1)^{f(\alpha_1)}, \dots, (-1)^{f(\alpha_{2^m-1})})$; таблица истинности f - это (0, 1)-последовательность, задаваемая как $(f(\alpha_0), f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_{2^m-1}))$.

Про (0, 1)-последовательность (или (1,-1)-последовательность) говорят, что она является сбалансированной, если в ней содержится равное количество нулей и единиц (единиц и минус единиц). Функция сбалансирована, если сбалансирована ее последовательность.

Очевидно, что если (a_0, \dots, a_{2^n-1}) и (b_0, \dots, b_{2^n-1}) - последовательности функций f и g на V_n , то $(a_0 b_0, \dots, a_{2^n-1} b_{2^n-1})$ - это последовательность функции $f(x) \oplus g(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В частности, $-(a_0, \dots, a_{2^n-1}) = (-a_0, \dots, -a_{2^n-1})$ - последовательность $1 \oplus f(x)$.

Функция f называется *аффинной*, если принимает вид $f(x) = a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_m x_m \oplus c$, где $a_j, c \in GF(2)$. В частности, f именуется *линейной функцией*, если $c = 0$. Соответственно, и последовательности таких функций именуется аффинная и линейная. Вес Хэмминга $W(\alpha)$ последовательности α - это количество единиц в α . Расстояние Хэмминга между последовательностями α и β одинаковой длины, обозначаемое как $d(\alpha, \beta)$ - это количество позиций, в которых последовательности различаются. Для двух функций f и g на V_n расстояние Хэмминга между ними определяется как $d(f, g) = d(\xi_f, \xi_g)$, где ξ_f и ξ_g - таблицы истинности f и g , соответственно. *Нелинейность* функции f , обозначаемая как N_f , - это минимальное расстояние Хэмминга между f и всеми аффинными функциями на V_n .

Для скалярного произведения двух векторов будет использоваться обозначение $\langle \alpha, \beta \rangle$. В частности, в том случае, когда $\alpha, \beta \in V_n$, то $\langle \alpha, \beta \rangle = a_1 b_1 \oplus \dots \oplus a_n b_n$, где сложение и перемножение выполняются над $GF(2)$; а когда α и β - это (1,-1)-последовательности, то $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, где сложение и умножение выполняется над действительными числами.

Кронекеровское произведение матрицы A размера $m \times n$ и матрицы B размера $s \times t$, обозначаемое как $A \otimes B$, - это матрица размера $ms \times nt$, задаваемая как

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

где a_{ij} - элемент i -ой строки и j -ого столбца матрицы A . В частности, кронекеровское произведение последовательности α длины m и последовательности β длины n - это последовательность длины mn , задаваемая равенством $\alpha \otimes \beta = (a_1 \beta, a_2 \beta, \dots, a_m \beta)$, где a_i - i -ый элемент в α .

Адамаровой матрицей называется (1,-1)-матрица H порядка n такая, что $HH^t = nI_n$, где H^t - транспонированная матрица H , а I_n - единичная матрица порядка n . Хорошо известно, что порядок адамаровых матриц равен 1, 2 или делится на 4. В контексте настоящей работы интерес представляет особый вид адамаровых матриц, именуемый *матрицей Сильвестра-Адамара* или *матрицей Уолша-Адамара*. Матрица Сильвестра-Адамара порядка 2^n , обозначаемая как H_n , порождается следующим рекурсивным соотношением

$$H_0 = 1, \quad H_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes H_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обратим внимание, что H_n можно представлять как $H_n = H_s \otimes H_t$ для любых s и t , $s + t = n$. Хорошо известно, что такие матрицы тесно связаны с линейными функциями. Если записать матрицу с помощью ее строк l_i

$$H_n = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{2^n-1} \end{bmatrix},$$

то l_i - это последовательность линейной функции $h_i = \langle \alpha_i, x \rangle$, где α_i - это вектор из V_n , чье целочисленное представление равно i , а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Верно и обратное: последовательность любой линейной функции на V_n - это строка матрицы H_n . Отсюда следует, что строки $\pm H_n$ охватывают последовательности всех аффинных функций на V_n .

При получении функционального представления последовательностей, объединяемых конкатенацией, очень полезно следующее обозначение. При заданном произвольном векторе $\delta = (i_1, \dots, i_p) \in V_p$ определим функцию $D_\delta(y)$ на V_p как

$$D_\delta(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_1 \oplus i_1 \oplus 1) \dots (y_p \oplus i_p \oplus 1).$$

Пусть $f_0, f_1, \dots, f_{2^p-1}$ - функции на V_q . Пусть ξ_i - последовательность f_i , $i = 0, 1, \dots, 2^p-1$, и пусть ξ - конкатенация последовательностей $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2^p-1}$, а именно $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2^p-1})$. Можно показать, что ξ - это последовательность следующей функции на V_{p+q}

$$f(y, x) = \bigoplus_{i=0}^{2^p-1} D_{\alpha_i}(y) f_i(x),$$

где $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$, а α_i - вектор из V_p , чье целочисленное представление равно i . Например, если ξ_1, ξ_2 - последовательности функций f_1, f_2 на V_n , то $\eta = (\xi_1, \xi_2)$ - последовательность функции на V_{n+1} вида $(1 \oplus u) f_1(x_1, \dots, x_n) \oplus u f_2(x_1, \dots, x_n)$.

Концепции бент-функций и критерия распространения в контексте данной работы вводятся следующим образом.

Определение. Функция f на V_n называется бент-функцией, если

$$2^{-\frac{n}{2}} \sum_{x \in V_n} (-1)^{f(x) \oplus \langle \beta, x \rangle} = \pm 1$$

для всех $\beta \in V_n$. Здесь $f(x) \oplus \langle \beta, x \rangle$ рассматривается как функция с действительными значениями. Последовательность бент-функций именуется бент-последовательностью.

Из определения видно, что бент-функция на V_n существует лишь тогда, когда n - четное. В обзоре бент-функций Дж. Диллона [103] можно найти следующий интересный результат для бент-функций.

Лемма. Пусть f - функция на V_n , и пусть ξ - последовательность функции f . Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

(i) f - бент-функция;

(ii) $\langle \xi, l \rangle = \pm 2^{\frac{1}{2}n}$ для любой аффинной последовательности l длины 2^n ;

(iii) $f(x) \oplus f(x \oplus \alpha)$ сбалансирована для любого ненулевого вектора $\alpha \in V_n$;

(iv) $f(x) \oplus \langle \alpha, x \rangle$ принимает значение единица $2^{n-1} \pm 2^{\frac{1}{2}n-1}$ раз $\forall \alpha \in V_n$.

По пункту (iv) данной леммы, если f - бент-функция на V_n , то $f(x) \oplus h(x)$ - также бент-функция при любой аффинной функции h на V_n .

Определение. Пусть f - функция на V_n . Говорят, что f удовлетворяет

1. критерию распространения относительно ненулевого вектора $\alpha \in V_n$, если $f(x) \oplus f(x \oplus \alpha)$ - сбалансированная функция.

2. критерию распространения степени k , если она удовлетворяет критерию распространения относительно всех $\alpha \in V_n$ с $1 \leq W(\alpha) \leq k$.

Когда n - четное, только бент-функции удовлетворяют критерию распространения максимальной степени n . Другое важное свойство бент-функций - они достигают максимально возможной нелинейности.

Относительно верхних границ нелинейности получены следующие результаты. Для любой функции f на V_n ее нелинейность удовлетворяет соотношению $N_f \leq 2^{n-1} - 2^{\frac{1}{2}n-1}$. Функция достигает этой верхней границы нелинейности тогда и только тогда, когда она бент-функция.

Бент-функции несбалансированы. Для сбалансированных функций на V_n ($n \geq 3$) в [353] показано, что

$$N_f \leq \begin{cases} 2^{n-1} - 2^{\frac{1}{2}n-1} - 2, & n = 2k \\ \left\lfloor \left\lfloor 2^{n-1} - 2^{\frac{1}{2}n-1} \right\rfloor \right\rfloor, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

где $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor$ обозначает максимальное четное целое, меньшее либо равное x .

5.4.2.2 Конкатенация и расщепление последовательностей.

При вычислении нелинейности булевой функции полезна следующая лемма.

Лемма. Пусть f и g - функции на V_n , последовательности которых ξ_f и ξ_g , соответственно. Тогда расстояние между f и g можно вычислять по формуле

$$d(f,g) = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \langle \xi_f, \xi_g \rangle.$$

Следующая лемма задает нижнюю границу для нелинейности функции, полученной путем конкатенации последовательностей двух функций.

Лемма. Пусть f_1 и f_2 - функции на V_n , и пусть g - функция на V_{n+1} , заданная как

$$g(u, x_1, \dots, x_n) = (1 \oplus u) f_1(x_1, \dots, x_n) \oplus u f_2(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Положим, что ξ_1 и ξ_2 , последовательности f_1 и f_2 , соответственно, удовлетворяют соотношениям $\langle \xi_i, l \rangle \leq P_i$ и $\langle \xi_2, l \rangle \leq P_2$ для любой аффинной последовательности l длины 2^n , где P_1 и P_2 - положительные целые. Тогда нелинейность функции g удовлетворяет соотношению

$$N_g \geq 2^n - \frac{1}{2} (P_1 + P_2).$$

Поскольку бент-функции не существуют на V_{2k+1} , то интересен вопрос, какие функции на V_{2k+1} являются высоко нелинейными. Следующий результат, как особый случай последней леммы, показывает, что такие функции можно получить конкатенацией бент-функций. Эта конструкция была описана Майером и Штаффельбахом в [255].

Следствие. В конструкции (1), если обе f_1 и f_2 - бент-функции на V_{2k} , то $N_g \geq 2^{2k} - 2^k$.

Подобный результат можно получить и в случае, когда конкатенацией объединяются последовательности четырех функций.

Лемма. Пусть f_0, f_1, f_2 и f_3 - функции на V_n , чьи последовательности ξ_0, ξ_1, ξ_2 и ξ_3 , соответственно. Полагаем, что $\langle \xi_i, l \rangle \leq P_i$ для каждого $0 \leq i \leq 3$ и для каждой аффинной последовательности l длины 2^n , где каждое P_i - положительное целое. Пусть g - функция на V_{n+2} , заданная как

$$g(y, x) = \bigoplus_{i=0}^3 D_{\alpha_i}(y) f_i(x), \quad (2)$$

где $y = (y_1, y_2)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, а α_i - вектор на V_2 , целочисленное представление которого равно i . Тогда $N_g \geq 2^{n+1} - \frac{1}{2} (P_0 + P_1 + P_2 + P_3)$. В частности, когда n - четное, а f_0, f_1, f_2 и f_3 - все бент-функции на V_n , то

$$N_g \geq 2^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Данную лемму несложно обобщить до случая конкатенации последовательностей функций, количество которых равно 2^t , $t \geq 1$. Надлежащим выбором исходных функций в (1) и (2) результирующую функцию можно сделать сбалансированной.

Теперь рассмотрим обратную операцию - расщепление бент-функций.

Лемма. Пусть $f(x_1, \dots, x_{2k})$ - бент-функция на V_{2k} , η_0 - последовательность функции $f(0, x_2, \dots, x_{2k})$ и η_1 - последовательность функции $f(1, x_2, \dots, x_{2k})$. Тогда для любой аффинной последовательности l длины 2^{2k-1} , мы имеем

$$-2^k \leq \langle \eta_0, l \rangle \leq 2^k \text{ и } -2^k \leq \langle \eta_1, l \rangle \leq 2^k.$$

Следствием этой леммы является то, что нелинейность отщепленных функций $f(0, x_2, \dots, x_{2k})$ и $f(1, x_2, \dots, x_{2k})$ равна по крайней мере $2^{2k-2} - 2^{k-1}$. Интересно отметить, что как конкатенация, и так и расщепление бент-последовательностей достигают одной и той же нелинейности. Расщепленные бент-последовательности также можно сводить к сбалансированным функциям, в [353] приводятся возможные способы таких манипуляций, заключающиеся в перестановке членов и перемене знаков.

5.4.2.3 Модификация и перемножение последовательностей.

Напомним, что бент-последовательность длины 2^{2k} содержит $2^{2k-1} + 2^{k-1}$ единиц и $2^{2k-1} - 2^{k-1}$ нулей, либо наоборот. Как было замечено Майером и Штаффельбахом в [255], комплементарное дополнение $2^k - 1$ позиций в бент-последовательности приводит к сбалансированной функции на V_{2k} , имеющей нелинейность по крайней мере $2^{2k-1} + 2^k$. Эта нелинейность та же самая, что и при конкатенации четырех бент-последовательностей длины 2^{2k-2} по методу Себери и др. (см. раздел 5.4.2.2 выше). Однако, конкатенация обладает преимуществами перед комплементацией в том смысле, что криптографические свойства функций типа характеристик распространения значительно удобнее обсуждать в терминах конкатенации.

В данном разделе показано, как модифицировать бент-последовательности длины 2^{2k} , сконструированные из адамаровых матриц, таким образом, чтобы результирующие функции на V_{2k} были сбалансированными и имели намного большую нелинейность, нежели при конкатенации четырех бент-последовательностей. Полученный результат позволяет конструировать сбалансированные функции на V_{2k+1} , $k \geq 14$, имеющие более высокую нелинейность, чем у функций, полученных конкатенацией или расщеплением бент-последовательностей.

Сначала рассмотрим V_{2k} . При четном $n \geq 4$, его можно представить как $n = 4t$, либо как $n = 4t + 2$, где $t \geq 1$.

Лемма. Для любого целого $t \geq 1$ существует

- (i) сбалансированная функция f на V_{4t} такая, что $N_f \geq 2^{4t-1} - 2^{2t-1} - 2^t$,
- (ii) сбалансированная функция f на V_{4t+2} такая, что $N_f \geq 2^{4t+1} - 2^{2t} - 2^t$.

На основе данного результата строится итеративная процедура для дальнейшего улучшения нелинейности сбалансированной функции. Отметим, что четное $n \geq 4$ можно представить как $n = 2^m$, $m \geq 2$, либо как $n = 2^s(2t + 1)$, где $s \geq 1$ и $t \geq 1$.

Рассмотрим случай $n = 2^m$, $m \geq 2$. Начинаем с бент-последовательности, полученной конкатенацией строк адамаровой матрицы $H_{2^{m-1}}$. Эта последовательность состоит из $2^{2^{m-1}}$ последовательностей длины $2^{2^{m-1}}$. Затем заменяем ведущую последовательность из всех единиц на бент-последовательность той же длины, полученную конкатенацией строк матрицы $H_{2^{m-2}}$. Длина новой ведущей последовательности становится $2^{2^{m-2}}$. Она заменяется еще одной бент-последовательностью такой же длины. Такой процесс замен

продолжается до тех пор, пока длина ведущей последовательности из всех единиц не станет $2^2 = 4$. Для завершения процесса заменяем ведущую последовательность $(1,1,1,1)$ на $(1,-1,1,-1)$. Последняя замена делает всю последовательность сбалансированной. По индукции можно доказать, что нелинейность полученной последовательности равна по крайней мере

$$2^{2^m-1} - \frac{1}{2}(2^{2^m-1} + 2^{2^m-2} + \dots + 2^{2^2} + 2 \cdot 2^2).$$

Процедура модификации для случая $n = 2^s(2t + 1)$, где $s \geq 1$ и $t \geq 1$, строится аналогично за исключением последней замены. Здесь процесс замен продолжается до тех пор, пока длина ведущей последовательности из всех единиц не станет 2^{2t+1} . Последняя ведущая последовательность заменяется на $l_0^* = (e_{2^t}, e_{2^{t+1}}, \dots, e_{2^{t+1}-1})$, вторую половину бент-последовательности $(e_0, e_1, \dots, e_{2^{t+1}-1})$, где каждое e_i - строка матрицы H_{t+1} .

Общий результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. Для любого целого $n \geq 4$ существует сбалансированная функция f^* на V_n , нелинейность которой

$$N_{f^*} \geq \begin{cases} 2^{2^m-1} - \frac{1}{2}(2^{2^m-1} + 2^{2^m-2} + \dots + 2^{2^2} + 2 \cdot 2^2), & n = 2^m, \\ 2^{2^s(2t+1)-1} - \frac{1}{2}(2^{2^{s-1}(2t+1)} + 2^{2^{s-2}(2t+1)} + \dots + 2^{2^{2t+1}} + 2^{2t+1} + 2^{t+1}), & n = 2^s(2t+1) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь случай V_{2k+1} . Для получения сбалансированных функций полезны следующие утверждения, доказанные в [353].

Лемма. Пусть ξ_1 - последовательность f_1 на V_s , и ξ_2 - последовательность f_2 на V_t . Тогда

1. $f_1(x_1, \dots, x_s) \oplus f_2(y_1, \dots, y_t)$ - сбалансированная функция на V_{s+t} , если f_1 или f_2 сбалансирована;
2. Кронекеровское произведение $\xi_1 \otimes \xi_2$ - это последовательность функции $f_1(x_1, \dots, x_s) \oplus f_2(y_1, \dots, y_t)$.

Лемма. Пусть ξ_1 - последовательность f_1 на V_s , и ξ_2 - последовательность f_2 на V_t . Также пусть

$$g(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t) = f_1(x_1, \dots, x_s) \oplus f_2(y_1, \dots, y_t).$$

Положим, что $\langle \xi_1, l_1 \rangle \leq P_1$ и $\langle \xi_2, l_2 \rangle \leq P_2$, где l_1 - произвольная аффинная последовательность длины 2^s , l_2 - произвольная аффинная последовательность длины 2^t , а P_1 и P_2 - положительные целые. Тогда нелинейность функции g удовлетворяет соотношению

$$N_g \geq 2^{s+t-1} - \frac{1}{2} P_1 \cdot P_2.$$

5.4.2.4 Высоко нелинейные сбалансированные функции, удовлетворяющие критерию распространения большой степени.

В данном разделе описано два метода для систематического конструирования сбалансированных функций высокой нелинейности, удовлетворяющих критерию распространения большой степени. За основу взяты следующие базовые структуры.

Сначала рассмотрим случай на V_{2k+1} . Пусть f - бент-функция на V_{2k} , и пусть g - функция на V_{2k+1} , задаваемая как

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_{2k+1}) &= \\ &= (1 \oplus x_1) f(x_2, \dots, x_{2k+1}) \oplus x_1 (1 \oplus f(x_2, \dots, x_{2k+1})) = \\ &= x_1 \oplus f(x_2, \dots, x_{2k+1}). \end{aligned}$$

В [353] показано, что определенная таким образом функция является сбалансированной и удовлетворяет критерию распространения относительно всех ненулевых векторов $\gamma \in V_{2k+1}$, $\gamma \neq (1, 0, \dots, 0)$. Нелинейность g удовлетворяет соотношению $N_g \geq 2^{2k} - 2^k$.

Рассмотрим случай на V_{2k} . Пусть f - бент-функция на V_{2k-2} , и пусть g - функция на V_{2k} , получаемая из f следующим образом

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_{2k}) &= \\ &= (1 \oplus x_1) (1 \oplus x_2) f(x_3, \dots, x_{2k}) \oplus (1 \oplus x_1) x_2 (1 \oplus f(x_3, \dots, x_{2k})) = \\ &= x_1 (1 \oplus x_2) (1 \oplus f(x_3, \dots, x_{2k})) \oplus x_1 x_2 f(x_3, \dots, x_{2k}) = \\ &= x_1 \oplus x_2 \oplus f(x_3, \dots, x_{2k}). \end{aligned}$$

Показано, что определенная таким образом функция g является сбалансированной и удовлетворяет критерию распространения относительно всех ненулевых векторов $\gamma \in V_{2k}$, за исключением трех вида $\gamma = (c_1, c_2, 0, \dots, 0)$, где $c_1, c_2 \in GF(2)$. Нелинейность g удовлетворяет соотношению $N_g \geq 2^{2k-1} - 2^k$.

Описанные выше функции удовлетворяют критерию распространения степени нуль, поэтому для практической реализации они непригодны. Известно, что сбалансированность, нелинейность и количество векторов, на которых удовлетворяется критерий нераспространения, - все инвариантны относительно аффинного преобразования координат. Это означает, что степень критерия нераспространения можно повысить при помощи подходящего аффинного преобразования координат. Для описанных базовых функций показано, что те их векторы, где критерий распространения не выполняется, можно преобразовать в векторы с высоким весом Хэмминга. Таким способом удастся получить высоко нелинейные сбалансированные функции, удовлетворяющие критерию распространения высокой степени. В частности, доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть f - бент-функция на V_{2k} и пусть $g^*(x_1, \dots, x_{2k+1}) = x_1 \oplus f(x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_3, \dots, x_1 \oplus x_{2k+1})$. Тогда g^* - сбалансированная функция на V_{2k+1} и удовлетворяет критерию распространения степени $2k$. Нелинейность g^* удовлетворяет соотношению $N_{g^*} \geq 2^{2k} - 2^k$.

Аналогично можно построить и функции на V_{2k} , надлежащим образом выбрав векторы γ_1^* и γ_2^* . Но здесь степень критерия распространения, достигаемая функциями, равна $4k/3$, а не $2k - 1$.

Утверждение 2. Положим, что $2k = 3t + c$, где $c = 0, 1$ или 2 . Тогда существуют сбалансированные функции на V_{2k} , удовлетворяющие критерию распространения степени $2t - 1$ (когда $c = 0$ или 1), либо $2t$ (когда $c = 2$). Нелинейность таких функций равна по крайней мере $2^{2k-1} - 2^k$.

Надлежащие векторы задаются как $\gamma_1^* = (a_1, \dots, a_{3t+c})$ и $\gamma_2^* = (b_1, \dots, b_{3t+c})$, где

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{для } j = 1, \dots, 2t + c_1, \\ 0 & \text{для } j = 2t + c_1 + 1, \dots, 3t + c. \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{для } j = 1, \dots, t + c_2, \\ 1 & \text{для } j = 2t + c_2 + 1, \dots, 3t + c. \end{cases}$$

Если $c = 1$, то полагают $c_1 = 0, c_2 = 1$; в противном случае $c_1 = c_2 = c/2$.

5.4.3 Эластичные функции

5.4.3.1 Свойства эластичных функций

Основные результаты исследования эластичных функций можно найти в работах [79] [23] [29] и [402].

Определение. Пусть $F = (f_1, \dots, f_m)$ - функция $V_n \rightarrow V_m$, где $n \geq m \geq 1$, и пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n$.

1. Функцию F называют несмещенной относительно фиксированного подмножества $T = \{j_1, \dots, j_t\}$ из $\{1, \dots, n\}$, если для каждого $(a_1, \dots, a_t) \in V_t$ функция

$$(f_1(x), \dots, f_m(x)) \Big|_{x_{j_1}=a_1, \dots, x_{j_t}=a_t}$$

пробегает через все векторы в V_m по 2^{n-m-t} раз каждый, когда $(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-t}})$ пробегает векторы V_{n-t} по разу. Здесь $t \geq 0$, $\{i_1, \dots, i_{n-t}\} = \{1, \dots, n\} - \{j_1, \dots, j_t\}$ и $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-t}$.

2. Функцию F называют (n, m, t) -эластичной, если F несмещенная относительно каждого подмножества T из $\{1, \dots, n\}$ с $|T| = t$. Параметр t называют эластичностью функции.

Очевидно, что для всех (n, m, t) -эластичных функций выполняется $n - m \geq t$.

Эластичные функции тесно связаны с корреляционно-иммунными функциями, введенными Зигенталером (см. Раздел 5.1). По сути дела, $(n, 1, t)$ -эластичная функция - это то же самое, что сбалансированная функция с корреляционным иммунитетом порядка t .

Следующая лемма, именуемая XOR-леммой, полезна для понимания взаимосвязи между эластичной функцией и ее функциями-компонентами.

Лемма. Пусть $F = (f_1, \dots, f_m)$ - функция $V_n \rightarrow V_m$, где $n \geq m \geq 1$, а каждая f_j - функция на V_n . Тогда F - несмещенная, (а именно, пробегает все векторы в V_m по 2^{n-m} раз каждый, когда x пробегает векторы V_n по разу) тогда и только тогда, когда каждая ненулевая линейная комбинация функций f_1, \dots, f_m сбалансирована.

На основе этого результата можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть $F = (f_1, \dots, f_m)$ - функция $V_n \rightarrow V_m$, где $n \geq m \geq 1$, а каждая f_j - функция на V_n . Тогда F является (n, m, t) -эластичной функцией тогда и только тогда, когда каждая ненулевая комбинация f_1, \dots, f_m , $f(x) = \bigoplus_{j=1}^m c_j f_j(x)$ является $(n, 1, t)$ -эластичной функцией.

Из данной теоремы следует, что если $F = (f_1, \dots, f_m)$ - это (n, m, t) -эластичная функция, то $G = (f_1, \dots, f_s)$ - это (n, s, t) -эластичная функция для каждого целого $1 \leq s \leq m$. Кроме того, теорема показывает, что каждая (n, m, t) -эластичная функция дает $2^m - 1$ различных сбалансированных корреляционно-иммунных порядка t функций на V_n . Понятно также, что можно изучать (n, m, t) -эластичные функции, включая их свойства и конструкции, путем исследования корреляционно-иммунных характеристик их функций-компонент.

В частности, в [402] показано, что f - $(n, 1, t)$ -эластичная функция тогда и только тогда, когда для каждой линейной функции $\varphi(x) = c_1 x_1 \oplus \dots \oplus c_n x_n$ с весом Хэмминга $W(c_1, \dots, c_n) \leq t$ функция $f(x) \oplus \varphi(x)$ сбалансирована (по сути дела, это эквивалентное определение корреляционного иммунитета порядка t , данного Сяо и Мэсси в [392]). Отсюда следует, что F является (n, m, t) -эластичной функцией тогда и только тогда, когда она (n, m, s) -эластичная функция для каждого $1 \leq s \leq t$.

5.4.3.2 Конструирование новых эластичных функций из уже известных

Имеется два противоположных подхода к конструированию новых функций из старых: строить "большие" из "маленьких" и наоборот - "маленькие" из "больших". По причине близкой взаимосвязи между эластичными функциями и кодами, исправляющими ошибки [23] [29], множество методов такого конструирования позаимствовано из теории кодирования. Эти методы существенно обогатил Дуг Стинсон своей работой об эквивалентности эластичных функций и больших множеств ортогональных массивов [371]. Конкретные примеры конструирования новых функций из старых можно найти в [29].

Рассмотрим простейший пример, начав с пары (сбалансированных) корреляционно-иммунных функций. Пусть f_i - $(n_i, 1, t_i)$ -эластичная функция, $i = 1, 2$. Несложно показать, что в этом случае функция $f_1(x) \oplus f_2(y)$ - это $(n_1 + n_2, 1, t_1 + t_2)$ - эластичная функция. По индукции можно доказать аналогичный результат и для суммы из s таких функций, когда степень эластичности результирующей функции задается соотношением $s - 1 + \sum_{j=1}^s t_j$.

На основе этих результатов в [402] доказан уже менее очевидный результат, что если $F = (f_1, \dots, f_m)$ является (n, m, t) -эластичной функцией, то $G(x, y, z) = (F(x) \oplus F(y), F(y) \oplus F(z))$ - это $(3n, 2m, 2t+1)$ -эластичная функция, где $x, y, z \in V_n$. Аналогично, $G(x, y, z, u) = (F(x) \oplus F(y), F(y) \oplus F(z), F(z) \oplus F(u))$ - это $(4n, 3m, 2t+1)$ -эластичная функция, где $x, y, z, u \in V_n$. В итоге, для исходной (n, m, t) -эластичной функции построена итеративная процедура, позволяющая конструировать $((h+1)^k n, h^k m, 2^k(t+1)-1)$ -эластичные функции для всех $h = 2, 3, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$.

Приведем еще два имеющих практическое значение результата.

Пусть $F = (f_1, \dots, f_m)$ - (n_1, m, t_1) -эластичная функция и $G = (g_1, \dots, g_m)$ - (n_2, m, t_2) -эластичная функция. Тогда $P(z) = F(x) \oplus G(y) = (f_1(x) \oplus g_1(y), \dots, f_m(x) \oplus g_m(y))$ - это (n_1+n_2, m, t_1+t_2) -эластичная функция.

Пусть $F = (f_1, \dots, f_k)$ - (n_1, k, t_1) -эластичная функция и $G = (g_1, \dots, g_l)$ - (n_2, l, t_2) -эластичная функция. Тогда $P(z) = (f_1(x), \dots, f_k(x), g_1(y), \dots, g_l(y))$ - это $(n_1+n_2, k+l, \rho)$ -эластичная функция, где $\rho = \min\{t_1, t_2\}$.

5.4.3.3 Преобразование линейных эластичных функций в нелинейные

Эластичную функцию называют *линейной*, если линейны все ее функции-компоненты. В противном случае эластичная функция называется *нелинейной*. Когда впервые вводилась концепция эластичных функций, то было выдвинуто предположение, что если существует нелинейная функция с некоторыми заданными параметрами, то существует и линейная функция с теми же параметрами [23] [29]. Это предположение было опровергнуто Стинсоном и Мэсси [372], которые показали, что имеется бесконечный класс нелинейных эластичных функций, для которых не существует линейных эластичных функций с такими же параметрами. Для доказательства они использовали нелинейные исправляющие ошибки коды. В [402] Чжань и Чжень исследовали данную проблему в обратном направлении. Они показали, что верно обращение начального предположения, а именно, если существует линейная эластичная функция с определенными параметрами, то существует и нелинейная эластичная функция с такими же параметрами.

В частности, доказано, что если F - (n, m, t) -эластичная функция, а G - подстановка на V_m , то $P = G \circ F$, а именно $P(x) = G(F(x))$, - также эластичная функция. Первым же следствием этого результата является то, что имеющаяся (n, m, t) -эластичная функция порождает $2^m!$ различных (n, m, t) -эластичных функций.

Далее показано, что если F - линейная (n, m, t) -эластичная функция, а G - подстановка на V_m , нелинейность которой равна N_G , то $P = G \circ F$ - это (n, m, t) -эластичная функция, причем (а) нелинейность функции P удовлетворяет соотношению $N_P = 2^{n-m} N_G$, и (б) алгебраическая степень P та же самая, что у G . Вследствие этого, если существует некоторая линейная (n, m, t) -эластичная функция, то существует и нелинейная (n, m, t) -эластичная функция P , нелинейность которой удовлетворяет соотношению $N_P \geq 2^{n-1} - 2^{\frac{n-1}{2}-m}$ и алгебраическая степень которой равна $m - 1$.

Важным практическим результатом этого является возможность получения из линейной эластичной функции большого количества нелинейных эластичных функций с теми же параметрами.

5.5 Рекомендации конструкторам криптосхем

Подводя итоги результатам исследований криптографически сильных булевых функций, Райнер Рюппель [339] формулирует ряд практических соображений, которые надо учитывать при разработке генераторов шифрующей гаммы.

Для нелинейно фильтруемого РСЛОС шифрпоследовательность коррелирует самое большее с 2^n фазами того же самого РСЛОС с постоянной суммой $\sum c^2 = 1$ (суммарная корреляция). Таким образом, нулевая корреляция с некоторыми фазами с необходимостью влечет более высокую корреляцию с остальными фазами. Самое лучшее, что здесь можно сделать, - это равномерно минимизировать кросс-корреляцию, что делается выбором f насколько возможно близкой к совершенной нелинейной функции.

Для нелинейного узла усложнения с памятью, комбинирующего n последовательностей от N различных РСЛОС, шифрпоследовательность скоррелирована самое большее с 2^n линейными комбинациями фаз от N регистров сдвига. Атака "разделяй и вскрывай" возможна в том случае, когда имеется корреляция с линейной комбинацией фаз от менее чем N регистров сдвига. Таким образом, лучшее что можно сделать [255] [333] - выбрать f с максимальным порядком корреляционного иммунитета, так чтобы была только корреляция с суммами фаз РСЛОС, включающими все N регистров сдвига. Оставшуюся неизбежную корреляцию можно равномерно минимизировать. Когда конкретное приложение требует использования сбалансированных функций, Майер и Штаффельбах [255] рекомендуют случайно выбирать бент-функцию (если таковая имеется) и комплементарно дополнять произвольное множество из $2^{(n/2)-1}$ единиц (нулей) в таблице функции. Результирующая сбалансированная функция именуется "почти совершенной". Когда в приложении требуется соответствие и другим конкретным критериям, они рекомендуют систематически генерировать случайную совершенную нелинейную функцию, а затем искать для нее ближайшую функцию, удовлетворяющую также дополнительным критериям. ♦

Глава 6

Схемы с неравномерным движением регистров и без памяти

6.0 Неравномерное движение как способ достижения нелинейности

Одна из идей, привлекающих наибольшее внимание разработчиков генераторов гаммы, - неравномерное движение определенных частей генератора с той целью, чтобы достичь эффектов нелинейности. Напомним, что в общепринятой интерпретации регистра сдвига этот регистр сдвигается регулярно, и содержимое ячеек обновляется при каждом тактовом импульсе. Если же проделать некоторое усложнение схемы, при котором управление движением регистра становится зависящим каким-то образом от другого регистра, то выглядит разумным предположение, что генерируемые последовательности станут сложнее.

Наиболее обстоятельный обзор регистров сдвига с неравномерным движением по состоянию на конец 1980-х годов дан в работе Голльмана и Чамберса [158]. Обобщенное обсуждение техники управления движением проведено Баумом и Блэкберном в [19].

В разделе 6.1 настоящей главы дан общий обзор схем с неравномерным движением регистров и без памяти на основе концепции Р. Рюппеля [339], выделяющего два класса таких конструкций: (I) *управление с помощью специального управляющего регистра* и (II) *самоуправление с помощью обратной связи*. Отдельные Разделы 6.2 и 6.3 посвящены конкретным схемам с неравномерным движением регистров - *каскадным генераторам* и *сжимающим генераторам*, вызывающим у исследователей повышенный интерес своими привлекательными криптографическими свойствами. В Разделе 6.4 дан обзор общих криптоаналитических подходов к вскрытию схем с неравномерным движением.

Общий криптоаналитический подход к различным схемам строится на том факте, что изменение закона движения регистра, по сути дела, сводится к некоторому *усечению* (то есть удалению бит) исходной выходной последовательности. Следовательно, лежащую в теоретической основе конструкции линейную алгебру можно использовать для выражения новой последовательности в терминах старой.

Интересен тот факт, что операции *усечения*, а также *прослаивания* или *переплетения* (то есть комбинирования нескольких последовательностей в одну) являются мощным инструментом при исследовании многих других схем генераторов [323]. Часто главной проблемой является то, что границы, которые при анализе получают для линейной сложности последовательностей - это верхние границы; для практических же целей обычно желательно получить нижнюю границу. Вдобавок к этому, часто сложно вывести условия, при которых удавалось бы достичь этой верхней границы. Некоторая форма нижней границы иногда может быть получена рассмотрением периода

последовательности, поскольку нижняя граница периода (возможно, полученная с помощью использования комбинаторной техники) обычно может быть переведена в результат о линейной сложности последовательности. Получены и другие, более общие теоретические результаты относительно того, что именуется *равномерным* и *неравномерным усечением* последовательностей [135].

После периода значительного начального интереса к регистрам с неравномерным движением в середине 80-х годов, вызванного доказуемо высокими периодом и линейной сложностью результирующих последовательностей, в 90-е годы наметилось определенное ослабление интенсивности исследований в данном направлении [322]. Наиболее заметная работа продолжается в области *каскадов регистров* и *сжимающего генератора* - самой свежей концепции на сегодняшний день.

6.1 Общий обзор конструкций с неравномерным движением регистров

Данный обзор построен на основе работы Райнера Рюппеля [339], который для упорядочивания классификации выделяет два основных способа управления движением регистров: с помощью управляющего регистра (Раздел 6.1.1) и самоуправление с помощью обратной связи (Раздел 6.1.2).

6.1.1 Схемы с управляющим регистром, их период и линейная сложность

6.1.1.1 Базовая схема, генераторы "стоп-вперед" и "один-два шага"

Базовая схема управления движением - это ситуация, когда один регистр с равномерным движением используется для управления движением другого регистра.

Базовый генератор с управлением движением:

Вход: параметры: управляющий регистр $\langle L_1, C_1(D) \rangle$ с периодом T_1
генерирующий регистр $\langle L_2, C_2(D) \rangle$ с периодом T_2
отображение $f: \mathbb{F}_2^{L_1} \rightarrow \mathbb{Z}_{T_2}$

ключ: начальные состояния x_0, y_0 двух регистров и, возможно, функция f

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть РСЛОС₁ один раз и вычислить $f(x_i)$.
2. Сдвинуть РСЛОС₂ $f(x_i)$ раз и взять результирующий выход $y_{\sigma(i)}$, где $\sigma(i)$ обозначает накопленную сумму всех тактовых импульсов, поступивших на РСЛОС₂ к моменту времени i .
3. Присвоить $z_i = y_{\sigma(i)}$.

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Функционирование такого генератора управляется соотношениями

$$z_i = y_{\sigma(i)} \quad \sigma(i) = \sum_{k=1}^i f(x_k).$$

В зависимости от реализации функции f различают разные типы генераторов с управляющим регистром. Если $f(x_i) = x_i$, то есть если выходной бит регистра управления непосредственно является значением тактового импульса для генерирующего регистра, то схема именуется "генератором стоп-вперед" [28] [377]. Такой генератор, в котором при значении тактового импульса 0 на выходе повторяется предыдущий бит гаммы, обладает довольно слабыми криптографическими и статистическими свойствами. Каждый раз, когда бит гаммы изменяет значение от момента времени i к моменту времени $i+1$, становится известно, что регистр управления выдал 1. Более того, в этом генераторе имеется сильная межзнаковая зависимость, поскольку половину времени (в зависимости от количества нулей в управляющей последовательности) предыдущий символ гаммы копируется в следующее состояние. Генератор "стоп-вперед" можно улучшить простым добавлением 1 к управляющей последовательности, то есть $f(x_i) = 1 + x_i$, преобразовав таким образом схему в "генератор один-два шага". В работе Чамберса и Дженнинга [65] описан так называемый BRM-генератор (Binary Rate Multiplier), у которого функция f имеет вид

$$f(\mathbf{x}_i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} x_{i-j} 2^j \quad n \leq L_1.$$

6.1.1.2 Период и линейная сложность

Одно из первых исследований периода генераторов с неравномерным движением было проведено С. Треттером в 1974 году [374]. Управляющий регистр выдает постоянное количество нулей и единиц за периодический цикл своей работы. Следовательно, количество тактовых импульсов, поступающих на генерирующий регистр за один цикл регистра управления постоянно. Определим

$$S = \sigma(T_1) = \sum_{k=1}^{T_1} f(\mathbf{x}_k).$$

После того, как $\text{НОК}(S, T_2)$ тактовых импульсов поступило на генерирующий регистр, оба регистра возвращаются в их начальные состояния. Откуда получается, что данный генератор является периодическим с периодом $T_1(\text{НОК}(S, T_2)/S) = T_1 T_2 / \text{НОД}(S, T_2)$. Если $\text{НОД}(S, T_2) = 1$, то можно показать, что общий период достигает своего максимального значения $T_1 = T_1 T_2$. В дальнейшем при обсуждении управляющих регистров будет подразумеваться, что условие $\text{НОД}(S, T_2) = 1$ всегда выполняется.

Одно из первых исследований линейной сложности, достижимой в генераторах с неравномерным движением, было проделано в докторской диссертации П. Ньюфелера [288] (Бернский университет, 1975 год). Верхняя граница для линейной сложности шифрующей гаммы может быть выведена следующим образом. Рассечем шифрпоследовательность на T_1 компонент, то есть рассмотрим множество последовательностей

$$\{z_{j+kT_1}\}_k = \{y_{\sigma(j+kT_1)}\}_k = \{y_{\sigma(j)+kS}\}_k$$

для $1 \leq j \leq T_1$. Каждая из этих T_1 последовательностей - это S -усечение регулярной выходной последовательности \hat{y} от генерирующего регистра. Пусть $C_S(D)$ означает полином обратной связи, который может порождать все такие S -усечения. Тогда многочлен $C_S(D^{T_1})$ может порождать шифрующую последовательность для всех выборов параметров и ключей. Таким образом, линейная сложность шифрующей гаммы ограничена сверху неравенством $\Lambda(\hat{z}) \leq L_2 T_1$. Для генератора "стоп-вперед" верхняя граница достигается в том случае, если управляющий регистр генерирует m -последовательность, то есть если $T_1 = 2^{L_1} - 1$ и если $\text{НОД}(L_1, L_2) = 1$ [28].

Один из способов доказательства того, что верхняя граница достигнута, - доказать, что генерирующий гамму многочлен $C_S(D^{T_1})$ неприводим. Положим, что $C_S(D)$ степени L неприводим и имеет порядок T . Если для любого простого p , делящего T_1 , выполняется, что p делит T , но не делит $(2^L - 1)/T$, то $C_S(D^{T_1})$ неприводим. В частности, степень $C_S(D^{T_1})$ равна LT_1 . Версии этого результата можно найти в [65] [288] [355] [365] [377]. Например, генераторы "стоп-вперед" и "один-два-шага" достигают максимальной линейной сложности, если оба регистра - управляющий и генерирующий - порождают одну и ту же m -последовательность периода $T = 2^L - 1$ [377], поскольку в этом случае гамма имеет период T^2 , а линейная сложность равна TL . Для особого случая $T_1 = 2^n$ Гюнтер [168] вывел нижнюю границу $\Lambda(\hat{z}) > \frac{1}{2} L_2 T_1$, которая выполняется при условии, что $C_2(D)$ неприводим.

Когда генерирующий регистр генератора "один-два-шага" порождает m -последовательность, то можно показать, что все l -граммы длины $l \leq (L_2 + 1)/2$ появляются в выходной последовательности с той же самой частотой, что и в исходной m -последовательности \hat{y} .

Голич и Живкович [135] рассмотрели следующее обобщение базовой схемы с управлением движением. Пусть генерирующий регистр будет m -РСЛОС, и пусть управляющий регистр будет чисто циклическим регистром длины T_C , случайно заполненным цифрами $0 \leq d_i \leq 2^{L_2} - 1$. В момент времени i цифра d_i определяет, сколько шагов должен выполнить генерирующий регистр. Последовательность \hat{d} названа *последовательностью разностей усечения*. Показано, что максимальная линейная сложность $L_2 T_C$ выходной последовательности может быть достигнута лишь в том случае, если мультипликативный порядок 2 по модулю $T_2/\text{НОД}(S, T_2)$ равен L_2 . Более того, для случая, когда последовательность разностей усечения выбирается случайно и равномерно, получена нижняя граница вероятности того, что усеченная m -последовательность имеет максимальную линейную сложность $T_C L_2$. Эта граница может быть сделана произвольно близкой к 1 при соответствующем выборе параметров T_C и L_2 .

6.1.1.3 Генератор с перемежающимся шагом

Для улучшения плохой статистики генератора "стоп-вперед" при сохранении максимальной скорости, Гюнтер предложил схему *генератора с перемежающимся шагом* [168]. Суть этого генератора составляют два генератора "стоп-вперед", движением которых управляет один общий регистр; соответствующие выходные последовательности затем складываются для генерации шифрующей гаммы.

Генератор с перемежающимся шагом:

Вход: параметры: управляющий регистр $\langle L_C, C_C(D) \rangle$ с периодом T_C
 пара генерирующих регистров $\langle L_1, C_1(D), L_2, C_2(D) \rangle$
 ключ: начальные состояния $x_0, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}$ трех регистров

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть РСЛОС_C один раз и взять x_i
2. Если $x_i = 1$, то сдвинуть РСЛОС₁ и выработать $y_{\sigma(i)}^{(1)}$
 Если $x_i = 0$, то сдвинуть РСЛОС₂ и выработать $y_{i-\sigma(i)}^{(2)}$
3. Присвоить $z_i = y_{\sigma(i)}^{(1)} + y_{i-\sigma(i)}^{(2)}$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Для анализа данной схемы в [168] полагается, что управляющий регистр вырабатывает последовательность де Брюина с периодом $T_C = 2^k$. Если $C_1(D)$ и $C_2(D)$ различны и неприводимы, и если $\text{НОД}(T_1, T_2) = 1$, то период шифрпоследовательности максимален и равен $T = 2^k T_1 T_2$, а линейная сложность гаммы ограничена следующими неравенствами:

$$(L_1 + L_2)2^{k-1} < \Lambda(\hat{z}) \leq (L_1 + L_2)2^k.$$

В более общем случае Гюнтер показал также, что условия $\text{НОД}(S, T_1) = \text{НОД}(T_C - S, T_2) = \text{НОД}(T_1, T_2) = 1$ и $T_1, T_2 \geq 1$ являются достаточными для гарантирования максимального периода $T = T_C T_1 T_2$. Используя результат из [168], согласно которому сумма двух последовательностей $\hat{x} \oplus \hat{x}'$ имеет линейную сложность по крайней мере $L + L' - 2\text{НОД}(T, T')$, можно получить нижнюю границу для общего случая $\Lambda(\hat{z}) \geq (L_1 + L_2 - 2)T_C$.

Если два генерирующих регистра регулярно вырабатывают m -последовательности, тогда частота появления всех l -грамм длины $l \leq \min\{L_1, L_2\}$ равна 2^{-l} с отклонением порядка $O(1/2^{L_1-l}) + O(1/2^{L_2-l})$, то есть эти частоты близки к идеальным. Подобный результат выполняется и для автокорреляционной функции, если задержки ограничены значениями $|\tau| \leq T_C - 1$.

В [168] было отмечено, что генератор с перемежающимся шагом поддается атаке "разделяй-и-вскрывай" в отношении управляющего регистра. При наличии фрагмента шифрпоследовательности длиной около $4L_C$, поиск по всем фазам управляющего регистра приведет к нахождению истинного заполнения. При знании состояния регистра

управления движением легко восстанавливается остальная гамма. Таким образом, в предположении что все регистры имеют сравнимые длины, эффективная длина ключа перемежающего генератора является самое большее корнем третьей степени из количества возможных ключей.

6.1.1.4 Каскадный генератор

Как естественное развитие базовой схемы можно считать конструкцию, в которой базовый регистр с неравномерным движением может быть использован для управления движением третьего регистра сдвига, выход которого может управлять движением четвертого регистра, и так далее. Такая конструкция получила название *каскадный генератор* [67] [154] [187] [374] [377].

Каскадный генератор:

Вход: параметры: базовый регистр сдвига $\langle L, C(D) \rangle$ с периодом T_0

N ступеней, каждая из которых образуется базовым регистром сдвига

ключ: начальные состояния $s_0^{(n)}$, $n = 1, \dots, N$

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть регистр ступени 1 и выработать $y_i^{(1)}$

2. Для $n = 2 \dots N$ выполнить

Сдвинуть регистр n -ой ступени $y_i^{(n-1)}$ раз и выработать

$$y_i^{(n)} = y_i^{(n-1)} \oplus s_{\sigma_{n-1}(i)}^{(n)}$$

$$\sigma_{n-1}(i) = \sum_{k=1}^i y_i^{(k-1)}$$

В альтернативном варианте можно сдвигать n -ый регистр $y_i^{(n-1)} + 1$ раз

3. Присвоить $z_i = y_i^{(N)}$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Проанализированы две такие конструкции: каскад m -последовательностей [158] [187] [374] [377] и каскад p -циклов. В каскаде m -последовательностей базовый регистр сдвига вырабатывает последовательность максимальной длины с периодом $T_0 = 2^L - 1$. Для каждой ступени могут быть выбраны различные примитивные многочлены. Можно показать, что выходная последовательность непосредственно после регистра сдвига n -ой ступени имеет период T_0^n и линейную сложность LT_0^{n-1} . Тогда шифрующая гамма является суммой всех непосредственных выходов и имеет период T_0^N и линейную сложность $1 + L(T_0 + \dots + T_0^{N-1})$, которая больше чем LT_0^{N-1} .

В каскаде p -циклов базовый регистр сдвига состоит из чисто циклического регистра простой длины p . Если подразумевать, что каждый регистр загружен вектором с четной четностью, тогда минимальный многочлен p -циклического регистра может быть самое

большее $C_p(D) = 1 + D + \dots + D^{p-1}$. Многочлен $C_p(D)$ неприводим тогда и только тогда, когда 2 - примитивный элемент в $GF(p)$. Такие простые числа именуется 2-простыми [67]. Артен выдвинул предположение [203], что около 37% всех простых чисел являются 2-простыми. Если p^2 не делит $2^{p-1}-1$, тогда линейная сложность каскада p -циклов равна p^N , что в точности равно периоду. Если имеется регистр, чье состояние имеет нечетную четность, то можно показать, что линейная сложность может понизиться самое большее на 1, то есть p^{N-1} . В [157] описан любопытный эффект: в предположении, что известна последовательность, вырабатываемая базовым регистром сдвига, но неизвестны соответствующие заполнения ступеней, можно восстановить истинные заполнения ступень за ступенью. Этот эффект получил название *эффекта записания*. Для каскада p -циклов эффективное ключевое пространство сокращается с $(2^p-2)^n$ до $((2^p-2)/p)^n$, что может быть существенным при малом значении p .

Подробнее о каскадных схемах и их криптоанализе см. Раздел 6.2

6.1.1.5 Сжимающий генератор

Сжимающий генератор - одна из новейших схем, предложенная в 1993 году криптографами из IBM Копперсмитом, Кравчиком и Мансуром [82] (подробно см. Раздел 6.3). В схеме используется техника, подобная неравномерному движению, и фактически этот генератор может рассматриваться как реализация некоторой формы переменного управления движением. Одним из результатов такой эквивалентности является то, что общие криптоаналитические результаты Голича и О'Коннора [143] (см. Раздел 6.4) в равной степени применимы также и к сжимающему генератору, и к его модификации - самосжимающему генератору (см. Раздел 6.1.2.2).

Практически, сжимающий генератор реализуется с помощью двух РСЛОС-последовательностей (максимального периода), которые генерируются параллельно. На каждом такте работы выходным битом является выход от второй последовательности, но лишь в том случае, если выход первой последовательности равен 1, в противном же случае на выходе нет ничего.

Как и в других схемах, строящихся на основе m -последовательностей, границы для периода и линейной сложности результирующей последовательности могут быть легко вычислены. Также как и у многих последовательностей, сконструированных на основе строительных блоков из m -последовательностей, статистические свойства в общих чертах оказываются весьма хорошими.

Как отмечает М. Робшоу [322], представляется интересным применение к таким выходным последовательностям техники *усечения* и *прослаивания*, и может быть показано, что выход можно рассматривать как прослаивание многих сдвиговых копий некоторой одной m -последовательности. Хотя пока еще довольно рано решать, насколько данный факт важен для криптоанализа, но все же уже ясно, что в основе данных последовательностей лежит важная структура.

С практической точки зрения данный генератор очень быстр, хотя и страдает от того недостатка, что скорость его выхода нерегулярна. Для разрешения этой проблемы предложена техника буферизации [82], хотя и не очень ясно, насколько серьезные трудности создаст нерегулярная скорость в реальных воплощениях. Проблемы практической реализации схемы обсуждаются в [206].

6.1.2 Схемы с самоуправлением

6.1.2.1 Генератор $[d,k]$ -самоусечения

В [336] Рюппелем была разработана идея регистра сдвига, который управляет собственным движением. Всякий раз, когда выходной символ равен нулю, на РСЛОС подается d тактовых импульсов, а в случае, когда выходной символ равен единице, на РСЛОС подается k тактовых импульсов. Для выходной последовательности это будет иметь эффект нерегулярного усечения. По этой причине результирующая последовательность именуется $[d,k]$ -самоусеченной последовательностью.

Генератор $[d,k]$ -самоусечения:

Вход: параметры: регистр сдвига $\langle L, C(D) \rangle$ с периодом T_0
закон движения $f: \{0,1\} \rightarrow \mathbb{Z}_{T_0}$

ключ: начальное состояние y_0

Для $i = 0, 1, 2, \dots$ выполнить

1. Взять $z_i = y_{\sigma(i)}$
2. Подать $f(y_{\sigma(i)})$ тактовых импульсов к РСЛОС и обновить $\sigma(i)$

$$\sigma(i + 1) = \sigma(i) + f(y_{\sigma(i)})$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 0, 1, 2, \dots$

Ясно, что генератор $[d,k]$ -самоусеченной последовательности является *сингулярным устройством*, то есть его диаграмма состояний в общем случае состоит из (одного или нескольких) циклов и хвостов. В зависимости от начального состояния, в самоусеченной последовательности может быть предпериод. Подразумевается, что регистр сдвига порождает последовательность максимальной длины, то есть $T_0 = 2^L - 1$. Тогда имеется 2^{L-2} состояний, у которых нет предшествующих на диаграмме состояний при условии, что $d \neq k$. Этот результат сразу же создает универсальную верхнюю границу для периода такого генератора, $T \leq (3/4)(2^L - 1)$. Если d - это единица по модулю T_0 , то общее правило самоусечения может быть разделено на два: $[d, k] = [d][1, k]$, то есть постоянное и следующее за ним $[1, k]$ -усечение. Можно показать, что последовательность состояний генератора самоусечения имеет период

$$T_L = \left\lfloor \frac{2}{3}(2^L - 1) \right\rfloor$$

для всех правил самоусечения $[d, k] = [g][1, 2] \bmod (2^L - 1)$ с $\text{НОД}(g, 2^L - 1) = 1$. Подобный же результат выполняется для $[d, k] = [g][1, 2^L - 1] \bmod (2^L - 1)$ с $\text{НОД}(g, 2^L - 1) = 1$. Распределение нулей и единиц в самоусеченной последовательности сбалансировано и то же самое справедливо для l -грамм коротких длин. Эксперименты показывают, что линейная сложность $[1, 2]$ -самоусеченных последовательностей согласуется с нижней границей 2^{L-1} , но доказательства этому нет.

Очевидно, что генератор самоусечения нельзя использовать непосредственно в качестве генератора гаммы, поскольку любая из его цифр на выходе выдает бит состояния, и, если известен закон движения, позиция бита следующего состояния будет скопирована в выходную последовательность. Простое улучшение было предложено Гюнтером: использовать различные элементы последовательности регистра сдвига для управления обратной связью и для выхода. Если оба значения $d, k \geq 2$, то

$$z_i = y_{\sigma(i)+1} \text{ и } \sigma(i+1) = \sigma(i) + f(y_{\sigma(i)})$$

не будут выдвигать позицию следующей цифры гаммы.

Чамберс и Голльман [67] предложили модификацию генератора самоусечения, которая позволила им найти случаи, когда выходная последовательность достигает максимальной линейной сложности. Пусть, как ранее, $z_i = y_{\sigma(i)}$ и регистр сдвигается регулярно до тех пор, пока не выполнится условие

$$y_{\sigma(i)}, \dots, y_{\sigma(i)-(z-1)} = 0.$$

Тогда происходит сдвиг на два шага. Для четного $L - z$ можно показать, что генератор самоусечения имеет период $T = 2^L - 1 - (2/3)(2^{L-z} - 1)$. Был проведен тотальный перебор для нахождения пар (L, z) , приводящих к 2-простым значениям для периода T . Если $T - 2$ - простой, то многочлен $C_p(D) = 1 + D + \dots + D^{T-1}$ неприводим, а выходная последовательность имеет линейную сложность T или $T - 1$. Такой модифицированный генератор самоусечения можно затем использовать как базовый элемент в каскаде p -циклов, поскольку для больших значений p чисто циклические регистры становятся неосуществимы.

6.1.2.2 Самосжимающийся генератор

Самосжимающийся генератор является вариантом сжимающего генератора и был предложен Майером и Штаффельбахом в 1994 году [259] (подробно см. Раздел 6.3). Вместо генерации от двух разных регистров управляющей последовательности и последовательности, подлежащей сжатию, они обе берутся из одного и того же регистра. РСЛОС сдвигается на два такта. Если первый бит в паре равен 1, то выход генератора - второй бит. Если первый бит 0, то оба бита игнорируются и делается еще два такта. Хотя это сокращает примерно вдвое количество пространства, требуемого для реализации, но это же означает, что результирующая последовательность генерируется примерно вдвое медленнее чем в сжимающем генераторе.

Имеется некоторый дуализм между сжимающим и самосжимающим генератором. Легко удостовериться в том, что любой сжимающий генератор может быть реализован с помощью некоторого самосжимающего генератора, верно и обратное. С другой стороны, сжимающий генератор, эквивалентный самосжимающим генераторам Майера и Штаффельбаха, не обладает в точности той же формой, что была предложена Копперсмитом и др. [82], а раз так, то теоретические результаты, полученные для сжимающего генератора, не могут быть распространены на данную схему.

Хотя в последовательностях, порождаемых самосжимающим генератором, имеется важное и необъясненное поведение, Майер и Штаффельбах доказали нижние границы как

для периода, так и для линейной сложности схемы. Следовательно, при практической реализации можно выбрать параметры, обеспечивающие адекватные характеристики [322].

6.2 Каскадные генераторы

Основная идея каскадов - распространить простой конструктивный тип "стоп-вперед" (Раздел 6.1.1) на последовательность регистров, в которой выход первого используется некоторым образом для управления движением второго, выход второго - для управления третьим и т.д.

Большинство ранних теоретических работ по каскадам было представлено в сочетании с предложениями относительно законов управления движением [154] [158]. Привлекательность каскадов в том, что они концептуально очень просты и могут быть использованы для генерации последовательностей с огромными (и вероятно огромными) периодами, а также с гарантированной линейной сложностью [154]. Кроме того, они представляются имеющими хорошие статистические свойства [154] [156].

Однако, они склонны к эффекту, именуемому *запирание* [157]. Криптоаналитик может попытаться реконструировать вход на последний регистр, используя добытую выходную последовательность генератора и предполагая вероятные, но неизвестные, параметры для последнего регистра. Эффект "запирания" обеспечивает то, что в результате нескольких связанных друг с другом предположений можно восстановить входную последовательность на последний регистр. В этом случае криптоаналитик может последовательно вскрывать каскад регистр за регистром, а конечным результатом запирания становится сокращение в эффективном ключевом пространстве каскадного генератора. Это может быть серьезной слабостью в некоторых ситуациях, хотя можно предпринять некоторые контрмеры для сокращения эффективности криптоаналитической атаки основанной на эффекте запирания.

Чамберс и Голльман указали, что с другой стороны, если каскад используется как механизм шифрования с открытым текстом в качестве входа на первом этапе (вместо последовательности из всех 1, применяемой в генераторах шифрующей гаммы), то эффект запирания может быть конструктивно использован для восстановления синхронизации после появления ошибки при передаче.

Сравнительно недавние криптоаналитические результаты по каскадам получены итальянским криптографом Ренато Меникоччи [261]. Им показано, что всегда имеется некоторая корреляция между выходной последовательностью с первого регистра и выходом всего каскада, то есть информация о первом регистре просачивается в выходную последовательность. Меникоччи предполагает, что это может послужить базисом для атаки. Для обеспечения же того, чтобы данный эффект было невозможно эксплуатировать, Меникоччи предлагает делать каскад длиной по меньшей мере в 10 регистров.

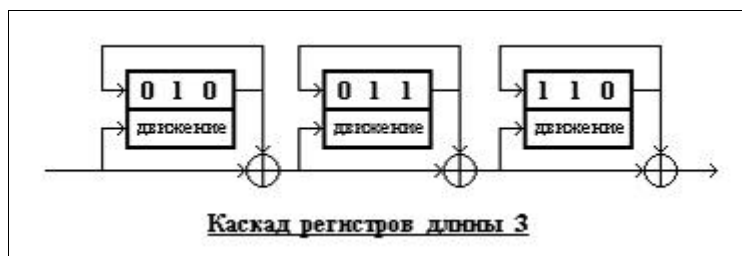
Однако, южнокорейские криптографы С.-Й. Парк, С.-Й. Ли и С.-Ч. Го в 1995 году представили еще более сильные результаты о криптографической слабости так называемых "каскадов Голльмана" [294]. Корейскими авторами построен метод конструирования переходной матрицы T_n для условных вероятностей, связывающих

входные и выходные подпоследовательности ступени каскада. Это позволило построить алгоритм атаки для вероятностного нахождения начального заполнения первого РСЛОС с желаемой надежностью. В алгоритме используется переходная матрица $S_n = T_n^{k-1}$ условных вероятностей между входной подпоследовательностью второй ступени и выходом последней ступени заданного k -ступенчатого каскада. Теоретически оценена стойкость каскадов к такого рода атакам. В результате исследований опровергается вывод Меникоччи о том, что невозможны атаки на 10-ступенчатые каскады с РСЛОС длиной 100 бит. Эксперименты корейцев показали, что 9-ступенчатый каскад на 100-битных регистрах совершенно нестоек, а применение 10-ступенчатого каскада может быть небезопасно.

6.2.1 Криптографические свойства "шаг _{k,m} "-каскадов

В электронных устройствах закон управления движением может быть легко обобщен от тривиальной схемы "стоп-вперед" до функций с произвольным шагом. Интуитивно понятно, что стойкость криптогенератора может быть повышена путем усложнения закона движения. В работе Дитера Голльмана и Уильяма Чамберса 1989 г. [159] введена концепция "шаг _{k,m} "-каскадов и проанализированы криптографические свойства такой криптосхемы, построенной на основе p -циклов.

(I) **Каскады регистров с управляемым движением.** Рассматриваются каскады неравномерно движущихся чисто цикловых регистров над GF(2).



Шаг _{k,m} -регистр сдвигается k раз при наличии на входе 0 и m раз при наличии на входе 1. Таким образом, "стоп-вперед" - это схема "шаг_{0,1}". Выход регистра и вход на его функцию движения складываются по модулю 2 для формирования входа на функцию движения следующего регистра (или выхода каскада, соответственно). Ни один регистр не должен загружаться векторами 0...0 и 1...1. Свойства шаг_{0,1}-каскадов представлены, например, в работах [154] [157] и суммируются в следующей теореме. (Здесь $\text{prob}_n(w)$ обозначает вероятность получить двоичное слово w в выходной последовательности, порожденной каскадом из n регистров, в условиях, когда на вход постоянно подается 1.)

Теорема 1. Шаг_{0,1}-каскады из n регистров длины p , $p \geq 3$ простое, генерируют последовательности со следующими свойствами:

- период p^n ;

- линейная сложность, большая или равная $d \frac{p^n - 1}{p - 1}$, где d - степень неприводимых полиномов с периодом p и $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}_n(w) = \frac{1}{2^{|w|}}$;
- различные выходные последовательности для всех $(2^p - 2)^n$ допустимых начальных заполнений.

Установлена криптографическая слабость схемы: шаг_{0,1}-каскады инвертируемы и инверсный каскад может быть синхронизирован [157]. С высокой вероятностью ротация (вращение) регистров может приводить выходную последовательность к инверсному каскаду. Таким образом, стойкость каскада следует соотносить не с величиной $(2^p - 2)^n$, а с $((2^p - 2) / p)^n$ - количеством классов эквивалентности по модулю ротации регистров.

(II) **Свойства шаг_{k,m}-каскадов.** Большинство свойств шаг_{0,1}-каскадов выполняется также и для шаг_{k,m}-каскадов. В [159] доказан ряд лемм:

Леммы 1. а) Шаг_{k,m}-каскад из n регистров длины p , $p \geq 3$ простое, $k \neq m$ генерирует последовательности с периодом p^n .

б) Шаг_{k,m}-каскад из n регистров длины p , $p \geq 3$ простое, $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$, $k \neq m$, генерирует последовательности с линейной сложностью, большей или равной $d \frac{p^n - 1}{p - 1}$, где d определяется как в Теореме 1.

в) Шаг_{k,m}-регистр длины p , $p \geq 3$ простое, $k \neq m$, является инвертируемым. Инверсный автомат может быть синхронизирован.

г) Каскады из шаг_{k,m}-регистров длины p , $p \geq 3$ простое, $k \neq m$, генерируют последовательности с $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}_n(w) = \frac{1}{2^{|w|}}$.

Теоретическая скорость сходимости, которая следует из доказательства утверждения г), намного медленнее той, которая наблюдается на практике. В частном случае шаг_{1,2}-каскадов из регистров длины 3 доказано, что выходные последовательности имеют почти идеальные статистические свойства. Распределение s -грамм на выходе почти плоское при всех значениях $s \geq 1$. Слова одинаковой длины появляются с вероятностями, отличающимися самое большее на $1/3^n$:

$$\frac{1}{3^n} \left[\frac{3^n}{2^{|w|}} \right] \leq \text{prob}_n(w) \leq \frac{1}{3^n} \left[\frac{3^n}{2^{|w|}} \right].$$

(III) **Эквивалентные состояния в шаг_{k,m}-каскадах.** Два состояния конечного автомата называют эквивалентными, если при любом входе они порождают одинаковые выходы. Конечный автомат называют минимальным, если из эквивалентности состояний следуют их равенство. Рассмотрим шаг_{k,m}-каскады с постоянным входом 1. Эквивалентные состояния - это заполнения, порождающие одну и ту же псевдослучайную последовательность. Таким образом, множество ключей - это не множество заполнений, а

множество классов эквивалентности. Различные заполнения порождают различные последовательности тогда и только тогда, когда каскад минимален. Доказаны следующие результаты:

- Леммы 2.** а) Если два состояния q и q' в шаг $_{k,m}$ -каскаде эквивалентны, то соответствующие внутренние сигналы автомата либо идентичны, либо побитно комплементарны.
 б) Шаг $_{k,m}$ -каскад минимален тогда и только тогда, когда $k \neq p - m$.

(IV) **Итоговые результаты** анализа шаг $_{k,m}$ -каскадов собраны в следующую теорему.

Теорема 2. Шаг $_{k,m}$ -регистр длины p , $p \geq 3$ простое, $k \neq m$, является инвертируемым. Инверсный автомат может быть синхронизирован. Каскад из n шаг $_{k,m}$ -регистров длины p , $p \geq 3$, простое, $k \neq m$, генерирует последовательности с

- периодом p^n ;
- линейной сложностью $\geq d \frac{p^n - 1}{p - 1}$, где d определяется как в Теореме 1 и $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{prob}_n(w) = \frac{1}{2^{|w|}}$;
- различными выходными последовательностями для всех $(2^p - 2)^n$ допустимых начальных заполнений тогда и только тогда, когда $k \neq -m \pmod{p}$.

Минимальность шаг $_{k,m}$ -каскадов зависит только от выбора функций управления движением. При шаг $_{k,-k}$, например, количество полезных начальных состояний сокращается до $((2^p - 2)/2p)^n$. Интересно также отметить, что последовательности от шаг $_{1,2}$ -каскадов из регистров длины 3 в одно и то же время и абсолютно криптографически нестойки, и обладают почти совершенными статистическими свойствами типа линейной сложности или статистического распределения (см. следующий раздел).

6.2.2 Криптоанализ каскадов

В данном разделе представлен обзор Дитера Голльмана, посвященный криптоаналитическим подходам к вскрытию каскадных схем (главным образом, на p -циклах) [161].

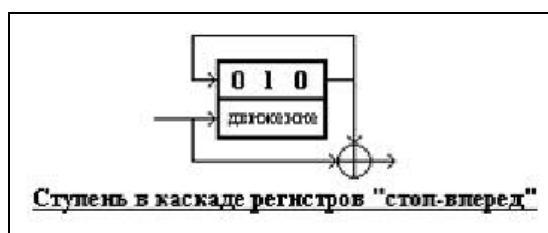
(I) **Теория автоматов.** Теория автоматов предоставляет разнообразные методы для анализа машин с конечным числом состояний. Такие методы, как алгоритмы синхронизации могут быть непосредственно использованы для атак на заданный генератор, другие же, типа исследования обращения (инверсии) машины, могут предоставить новые подходы и исходные позиции для криптоаналитических атак.

Аналитическое исследование вопроса о существовании эквивалентных состояний в каскадах регистров с неравномерным движением проведено в [160]. Эти результаты весьма похожи по своему характеру на те, что были получены в свое время для роторных (дисковых) шифраторов (см., например, главу 5 в [202]). В частности, главный результат

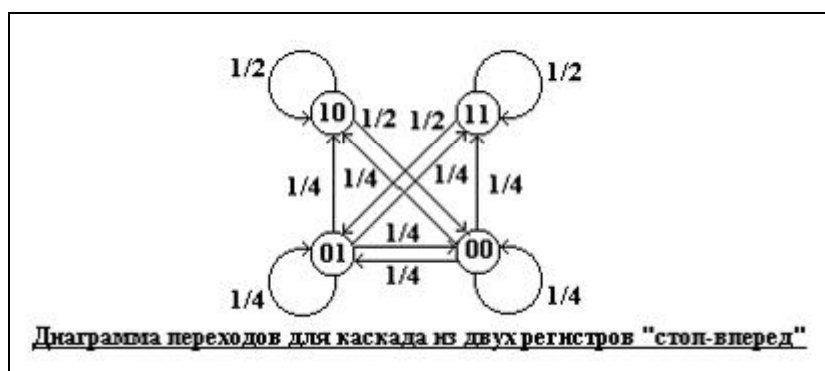
сводится к тому, что только "шаг_{1,-1}"-каскады имеют множества состояний с нетривиальными классами эквивалентности и, таким образом, имеют неустранимое сокращение эффективной мощности ключевого пространства.

Весьма интересна атака, построенная на принципе синхронизации инвертированного каскада. Для каскада из n регистров, период каждого из которых равен p , выходная последовательность длины np^2 с высокой вероятностью будет служить в качестве синхронизирующей последовательности для инверсного каскада. Строгую формулировку этого утверждения и подтверждающие экспериментальные результаты можно найти в [157]. Таким образом, имея выходную последовательность и делая предположение о начальных заполнениях регистров каскада с точностью до ротации, можно ожидать получение истинного заполнения анализируемого каскада за np^2 шагов, направляя выходную последовательность в инверсный каскад. Результатом этого является существенное сокращение эффективной мощности множества состояний. Это доказывает, что зависящий от входа закон движения регистров существенно ослабляет криптосхему.

(II) **Статистические аномалии.** В работах Р. Меникоччи [260] [261] исследованы каскады регистров "стоп-вперед", где выход каждой ступени каскада - это XOR-сумма выхода регистра и его же управляющей последовательности.



Режим "стоп-вперед" приводит к некоторым аномалиям в статистическом соответствии между управляющей последовательностью и выходной последовательностью. Для иллюстрации, рассмотрим каскад из двух регистров. Вход каскада всегда равен 1.



Вершины графа на диаграмме помечены битами выхода двух регистров. Если выход первого регистра также равен 1, то управляющий бит входа на второй регистр равен $1 \oplus 1 = 0$. Следовательно, второй регистр не сдвигается. Когда регистр сдвигается, то значение его выходного бита может измениться. Ради простоты, полагаем, что изменения появляются с вероятностью $1/2$ и независимо от предыдущих изменений. Ребра графа на

диаграмме соответствуют изменениям состояния и помечены соответствующими им вероятностями.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда мы не имеем предварительной информации о состоянии каскада и на выходе наблюдаем 00. Первый 0 говорит нам, что выходные биты двух регистров - это либо 10, либо 01. Вероятность каждого случая равна 1/2. После же наблюдения второго 0 вероятность для 10 становится 3/4. Более длинная серия нулей (или единиц) еще больше увеличивает вероятность конфигурации 10 (11, соответственно).

Данный факт может быть использован в качестве фундамента для статистической атаки, которая позволяет восстановить заполнение регистра, а затем и его управляющую последовательность. Данный подход можно развить на каскады произвольной длины, но его эффективность быстро падает с ростом длины каскада [261]. Кроме того, алгоритм неприменим к схемам, отличающимся от режима "стоп-вперед".

(III) **Причудливый результат.** В работе [159] (см. предыдущий раздел) дается необычный аналитический результат относительно статистических свойств выходных последовательностей, порождаемых каскадами шаг_{1,2}-регистров длины 3. Рассмотрим такой шаг_{1,2}-регистр, у которого начальное состояние $q(0)$ может быть любой ротацией вектора 100. Для каждого из трех возможных начальных состояний мы применим все входы x_1x_2 длины 2. Соответствующие финальные состояния $q(2)$ и выходы y_1y_2 , данные как функция от $q(0)$ и x_1x_2 , сведены в следующую таблицу.

| | 100 | 001 | 010 |
|----|--------|--------|--------|
| 00 | 001/00 | 010/10 | 100/01 |
| 01 | 100/01 | 001/11 | 010/00 |
| 10 | 100/11 | 001/00 | 010/10 |
| 11 | 010/10 | 100/01 | 001/11 |

Теперь преобразуем состояния, входы и выходы в целые числа, достаточно произвольно положив $x := 2\bar{x}_2 + x_1$, $y := 2\bar{y}_2 + y_1$, и перекодировав состояния по правилу 100→0, 001→1, и 010→2. Заменой получаем

| | 0 | 1 | 2 |
|---|-----|-----|-----|
| 2 | 1/2 | 2/3 | 0/0 |
| 0 | 0/0 | 1/1 | 2/2 |
| 3 | 0/1 | 1/2 | 2/3 |
| 1 | 2/3 | 0/0 | 1/1 |

Выражая $q(2)$ и x как функции от $q(0)$ и y , то есть конструируя инверсию данного регистра сдвига с управляемым движением, мы получаем

| | 0 | 1 | 2 |
|---|-----|-----|-----|
| 0 | 0/0 | 0/1 | 0/2 |
| 1 | 0/3 | 1/0 | 1/1 |
| 2 | 1/2 | 1/3 | 2/0 |
| 3 | 2/1 | 2/2 | 2/3 |

Из этой таблицы вытекает следующее алгебраическое соотношение между входом, выходом, начальным и финальным состоянием:

$$3y + q(0) = 4q(2) + x, \text{ т.е. } 3y + q(0) \equiv x \pmod{4}.$$

Когда данный каскад используется в качестве псевдослучайного генератора, то входом каскада является последовательность из всех единиц. Следовательно, x известно, и мы имеем алгебраическое соотношение между y и $q(0)$. Это соотношение можно развить на входные последовательности любой длины и, используя выход одного регистра как вход на следующий, на любой каскад из шаг_{1,2}-регистров длины 3 [159].

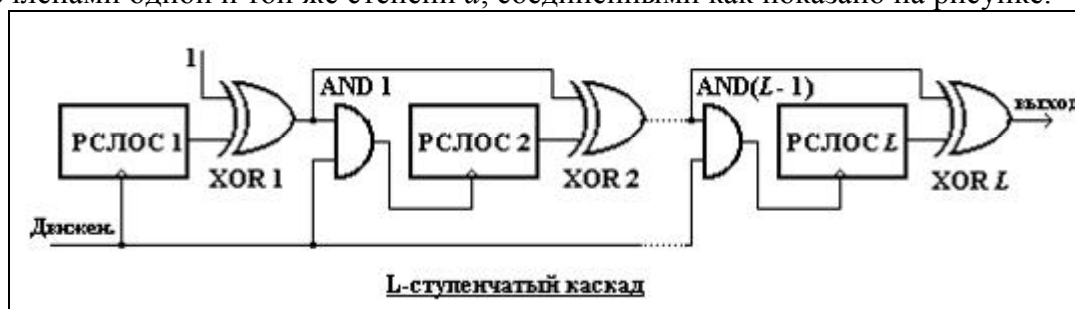
Данное соотношение между выходом и начальным состоянием является базисом как для доказательства того, что получена наилучшая аппроксимация для равновероятного распределения m -грамм любой длины, так и для демонстрации того, что начальное заполнение подобного каскада можно непосредственно вычислять по короткому фрагменту выходной последовательности (линейно растущему от длины каскада). В первом случае достаточно исследовать выходы, порождаемые при варьировании всех возможных начальных состояний. Во втором случае мы имеем выходную последовательность и вычисляем целое число, надлежащее представление которого дает начальные заполнения всех регистров каскада. Данный причудливый результат интересен по той причине, что это прекрасный пример того, как достижение совершенства в одной области может усилить слабость по отношению к другому критерию.

Пока не было попыток обобщить данную технику применительно к другим каскадам или же с общих позиций дать объяснение тому, почему этот метод срабатывает в данном частном случае.

6.2.3 Систематическая атака Меникоччи

Один из наиболее часто упоминаемых в литературе каскадных генераторов - это так называемый *каскад m -последовательностей*, привлекающий повышенный интерес своими хорошими криптографическими свойствами [158][339]. Однако, в 1993 г. итальянский криптограф Ренато Меникоччи [261] указал на внутренне присущую слабость данной схемы в том случае, когда управление движением регистров осуществляется в режиме "стоп-вперед". В данном разделе представлена "систематическая атака" на подобные каскады m -последовательностей, разработанная Меникоччи на базе обнаруженной им слабости [262].

(I) **Базовые результаты.** "Стоп-вперед" каскад длины L состоит из L регистров с линейной обратной связью (РСЛОС) с примитивными характеристическими многочленами одной и той же степени d , соединенными как показано на рисунке.



Первый регистр каскада (РСЛОС1) движется равномерно, в то время как движение n -го регистра ($2 \leq n \leq L$) управляется $(n - 1)$ предыдущими регистрами. Если обозначить за $s_n^*(t)$ выход РСЛОС n на шаге t , а за $e_{n-1}(t)$ - соответствующий бит управления движением на входе AND($n-1$), то справедливо: $e_{n-1}(t) = 0 \Rightarrow s_n^*(t+1) = s_n^*(t)$. Обозначая сложение по mod 2 как \oplus , имеем: $e_n(t) = e_{n-1}(t) \oplus s_n^*(t)$, так что выход каскада на шаге t дается соотношением $e_{L-1}(t) \oplus s_L^*(t)$.

Криптографический интерес к каскаду такого рода лежит главным образом в его простой модульной схеме, понятным образом влияющей на большие значения периода (T) и линейной сложности (LC) порождаемой выходной последовательности. Известно [400], что $T = (2^d - 1)^L$ и $LC \geq d(2^d - 1)^{L-1}$.

Рассмотрим подробнее внутренне присущую слабость данной схемы [261]. В качестве модели исследуемого каскада рассмотрим схему из L двоичных случайных генераторов (ДСГ), как представлено на следующем рисунке.



Здесь:

- (i) $G_h^* = \{g_h^*(t)\}$ ($1 \leq h \leq L$) - последовательность, порождаемая ДСГ h под управлением последовательности $Z_{h-1} = \{z_{h-1}(t)\}$ ($z_0(t) = 1, z_k(t) = z_{k-1}(t) \oplus g_k^*(t), 1 \leq k \leq L$);
- (ii) если h_1, \dots, h_N ($1 \leq h_1 < \dots < h_N \leq L$) - такие значения h , что $z_{h-1}(t) = 0$, то генераторы ДСГ $h_1, \dots, \text{ДСГ } h_N$ не могут изменить свой выход на следующем шаге, то есть

$$g_h^*(t+1) = g_h^*(t), \quad h \in \{h_1, \dots, h_N\},$$

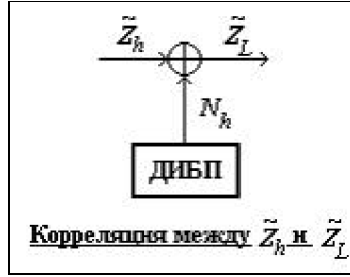
в то время как остальные генераторы на шаге $t+1$ ведут себя как $(L - N)$ несоединенных ДСГ.

Далее в данном разделе для любой двоичной последовательности $A = \{a(t)\}$ будут использоваться следующие обозначения:

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}(t)\} = \{a(t) \oplus a(t+1)\},$$

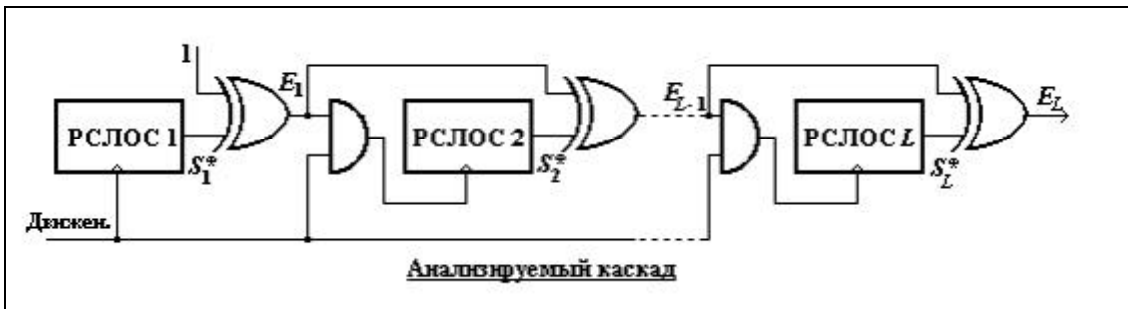
$$A^{(q)} = a(0), a(1), \dots, a(q-1), q \geq 1.$$

В [262] доказано, что последовательность \tilde{Z}_L можно рассматривать как последовательность \tilde{Z}_h ($h = 1, 2, \dots, L-1$), искаженную шумовой последовательностью $N_h = \{n_h(t)\}$, которая порождается двоичным источником без памяти (ДИБП). Вероятность совпадения между $\tilde{z}_h(t)$ и $\tilde{z}_L(t)$ (или, другими словами, вероятность $n_h(t)=0$) составляет $1/2 + 1/2^{L+1-h}$.



Если для удобства обозначить $\tilde{Z}_{L,k}$, $(0 \leq k \leq L-1)$, последовательность, биты которой задаются как $\tilde{z}_{L,k}(t) = \tilde{z}_L(t) \oplus \tilde{z}_k(t)$, то следствие найденного корреляционного результата можно сформулировать следующим образом. Последовательность $\tilde{Z}_{L,h-1}$ можно рассматривать как последовательность \tilde{G}_h^* $(1 \leq h \leq L)$, искаженную шумовой последовательностью от ДИБП. Вероятность совпадений между $\tilde{g}_h^*(t)$ и $\tilde{z}_{L,h-1}(t)$ равна $1/2 + 1/2^{L+1-h}$.

(II) **Криптоаналитические следствия.** Рассмотрим L -ступенчатый каскад регистров, где $S_k^* = \{s_k^*(t)\}$ и $E_k = \{e_k(t)\}$ ($e_0(t) = 1$, $e_k(t) = e_{k-1}(t) \oplus s_k^*(t)$, $1 \leq k \leq L$).



Обозначим как $\tilde{E}_{L,k-1}$ и R_k $(1 \leq k \leq L)$ последовательности, биты которых получаются на основе соотношений $\tilde{e}_{L,k-1}(t) = \tilde{e}_L(t) \oplus \tilde{e}_{k-1}(t)$ и $r_k(t) = \tilde{s}_k^*(t) \oplus \tilde{e}_{L,k-1}(t)$, соответственно. Наконец, предположим, что начальные заполнения L регистров выбраны случайно (заполнения из всех нулей исключаются) и что их полиномы обратной связи $f_1(x), f_2(x), \dots, f_L(x)$ примитивны. В этом случае последовательности $S_1^*, S_2^*, \dots, S_L^*$ могут быть локально смоделированы соответствующими последовательностями $G_1^*, G_2^*, \dots, G_L^*$.

Теперь предположим, что известен достаточно длинный фрагмент $E_L^{(N)}$ выходной последовательности каскада. Покажем, что можно восстановить начальное заполнение регистра РСЛОС h при условии, что известны фрагмент $E_{h-1}^{(N)}$ и полином $f_h(x)$.

Когда заданы $E_L^{(N)}$ и $E_{h-1}^{(N)}$, можно получить фрагмент $\tilde{E}_{L,h-1}^{(N-1)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{L,h-1}^{(N-1)} &= \tilde{s}_h^*(0) \oplus r_h(0), \tilde{s}_h^*(1) \oplus r_h(1), \dots, \tilde{s}_h^*(N-1) \oplus r_h(N-1) \\ &= s_h^*(0) \oplus s_h^*(1) \oplus r_h(0), s_h^*(1) \oplus s_h^*(2) \oplus r_h(1), \dots, s_h^*(N-1) \oplus s_h^*(N) \oplus r_h(N-1), \end{aligned}$$

где $r_h(t)$ подразумевается генерируемым от ДИБП с вероятностью нуля

$$\text{Prob}(r_h(t) = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{L+1-h}}.$$

Поскольку $E_{h-1}^{(N)}$ полагается известным и $e_{n-1}(t) = 0 \Rightarrow s_n^*(t+1) = s_n^*(t)$, то можно удалить все члены $s_h^*(t) \oplus s_h^*(t+1) \oplus r_h(t)$, так что $s_h^*(t+1)$ вынужденно равен $s_h^*(t)$ из фрагмента $\tilde{E}_{L,h-1}^{(N-1)}$. Выполняя такую операцию, мы получим следующий фрагмент

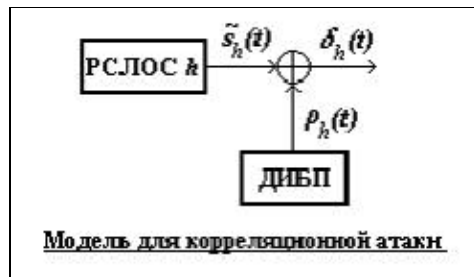
$$\begin{aligned} \Delta_{L,h-1}^{(M)} &\stackrel{\text{def}}{=} \delta_{L,h-1}(0), \dots, \delta_{L,h-1}(M-1) \\ &= s_h^*(\tau_0) \oplus s_h^*(\tau_0+1) \oplus r_h(\tau_0), \dots, s_h^*(\tau_{M-1}) \oplus s_h^*(\tau_{M-1}+1) \oplus r_h(\tau_{M-1}), \end{aligned}$$

где $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{M-1}$ - это позиции единиц в фрагменте $E_{h-1}^{(N-1)}$, а M , в среднем, - равно $N/2$ (заметим, что поскольку $e_0(t) = 1$, фрагменты $\tilde{E}_{L,h-1}^{(N-1)}$ и $\Delta_{L,h-1}^{(M)}$ совпадают при $h=1$). Теперь обозначим за $S_h^{(M+1)} = s_h(0), s_h(1), \dots, s_h(M)$ фрагмент, который был бы сгенерирован РСЛОС h в том случае, если бы он двигался равномерно. Поскольку же РСЛОС h в действительности сдвигался только на шагах $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{M-1}$, то получаем

$$\begin{aligned} \delta_{L,h-1}(t) &= s_h(t) \oplus s_h(t+1) \oplus \rho_h(t) = \tilde{s}_h(t) \oplus \rho_h(t), \quad 0 \leq t \leq M-1, \quad \rho_h(t) = r_h(\tau_t), \\ \text{Prob}(\rho_h(t) = 0) &= 1/2 + 1/2^{L+1-h}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно видно, что фрагменты $\Delta_{L,h-1}^{(M)}$ и $\tilde{S}_h^{(M)}$ скоррелированы, что подтверждают также и результаты компьютерного моделирования схемы.

Таким образом, коль скоро $\tilde{S}_h^{(M)}$ порождается регистром РСЛОС h , то можно построить корреляционную атаку для восстановления последовательности \tilde{S}_h в соответствии с моделью, изображенной на следующем рисунке.



Следующий шаг - восстановление последовательности S_h на основе рекуррентного соотношения, соответствующего полиному обратной связи $f_h(x)$, который полагается известным.

Когда восстановлен фрагмент $S_h^{(N)}$, то легко получить фрагменты $E_h^{(N)}$ и $\tilde{E}_{L,h}^{(N-1)}$. Таким образом, предыдущую процедуру теперь можно использовать для восстановления заполнения регистра РСЛОС $(h+1)$ при условии, что известен полином $f_{h+1}(x)$. И так далее. Поскольку $E_0^{(N)}$ (то есть фрагмент $e_0(0), e_0(1), \dots, e_0(N-1)$) всегда состоит из одних единиц, то первая итерация процедуры ($h=1$) требует лишь знания $E_L^{(N)}$ и $f_1(x)$. Из

конструкции данного алгоритма следует, что L -ступенчатый каскад может быть вскрыт за L итераций описанной выше процедуры.

Представленный метод вскрытия построен на основе корреляции, существующей между выходной последовательностью каскада и выходными последовательностями промежуточных ступеней. Легко увидеть, что достаточным условием для недостижимости подобной атаки является недоступность самого первого шага. Следовательно, поскольку корреляционная вероятность при $h=1$ стремится к нулю с ростом L , то требуемого уровня практической стойкости можно достичь, делая L достаточно большим.

6.3 Сжимающий и самосжимающий генераторы

6.3.1 Сжимающий генератор

В 1993 году американские криптографы Дон Копперсмит (один из создателей DES-алгоритма), Хьюго Кравчик и Йишаи Мансур, работающие в Уотсоновском исследовательском центре компании IBM, представили новую конструкцию криптогенератора на основе простой комбинации из двух РСЛЮС [82]. Данная конструкция, получившая название "*сжимающий генератор*", имеет такие привлекательные свойства, как простота, масштабируемость, доказуемые минимальные условия стойкости (экспоненциальные период и линейная сложность, хорошие статистические свойства) и иммунитет к известным криптоаналитическим подходам. Данная конструкция расценивается как подходящий выбор для практической реализации эффективной криптосхемы поточного шифрования.

6.3.1.1 Конструкция, период, линейная сложность и статистические свойства

В схеме использованы два источника псевдослучайных бит для создания третьего источника псевдослучайных бит (потенциально) лучшего качества, чем у исходных источников. Под качеством подразумевается сложность предсказания псевдослучайной последовательности. Генерируемая последовательность - это подпоследовательность бит от первого источника, когда элементы подпоследовательности выбираются в соответствии с расположением бит "1" в последовательности от второго источника. Другими словами, пусть a_0, a_1, \dots обозначает первую последовательность, а s_0, s_1, \dots - вторую. Конструируется третья последовательность z_0, z_1, \dots , которая включает в себя те биты a_i , для которых соответствующие s_i равны "1". Остальные биты первой последовательности игнорируются. (Таким образом, результирующая последовательность - это как бы "сжатая" версия первой.) Формальным языком, для всех $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем $z_k = a_{i_k}$, где i_k - это позиция k -той "единицы" в последовательности s_0, s_1, \dots . Такой псевдослучайный генератор и получил название *сжимающий генератор* (СГ).

Эта общая идея может быть применена к любой паре псевдослучайных источников. Здесь анализируется конструкция, в которой источниками являются регистры сдвига с линейной обратной связью. В РСЛЮС бит обратной связи вычисляется как линейная

комбинация битов этого регистра. Эта линейная комбинация может быть фиксированной (провода в аппаратной реализации) или переменной. В последнем случае каждая линейная комбинация (точки съема или коммутации) задается двоичным вектором, длина которого равна длине РСЛОС. (При аппаратной реализации это достигается установкой программируемого управляющего регистра, который задает те ячейки регистра сдвига, с которых биты подаются на XOR-узел).

Первый РСЛОС в анализируемой схеме обозначается A , а второй - S (от "селектор"). $|A|$ и $|S|$ - их длины. Последовательности, которые они генерируют (после фиксации коммутаций и начального заполнения регистров) обозначаются как a_0, a_1, \dots и s_0, s_1, \dots соответственно, а также именуется A -последовательность и S -последовательность. Наконец, результирующая сжатая последовательность обозначается как z_0, z_1, \dots и именуется Z -последовательность.

Такая конструкция хорошо описывается как для фиксированных, так и для переменных точек съема (коммутаций) в РСЛОС. В общем случае рекомендуется использование переменных коммутаций из соображений обеспечения как стойкости, так и гибкости схемы.

Авторами конструкции выведены экспоненциальные границы для периода и линейной сложности последовательностей, порождаемых сжимающим генератором. С помощью алгебраической техники доказаны следующие результаты.

Теорема. Пусть A и S образуют сжимающий генератор Z . Обозначим как T_A и T_S периоды соответствующих A - и S -последовательностей. Если

- A и S имеют максимальную длину (т.е. полиномы примитивны);
- $(T_A, T_S) = 1$,

то сжатая последовательность Z имеет период

$$T_A \cdot 2^{|S|-1} = (2^{|A|}-1) \cdot 2^{|S|-1}$$

и линейную сложность LC , удовлетворяющую неравенствам

$$|A| \cdot 2^{|S|-2} < LC \leq |A| \cdot 2^{|S|-1}.$$

Если период и линейная сложность исследованы как для фиксированных, так и для переменных коммутаций, то при статистическом анализе последовательностей брались в расчет переменные коммутации (равновероятно выбираемые на множестве примитивных коммутаций). В данной работе всюду подразумевается, что в конструкции СГ используются примитивные коммутации. Показано, что пространство результирующих последовательностей обладает статистическими свойствами, необходимыми для псевдослучайного генератора: малая корреляция между битами последовательности, нормализованное появление нулей и единиц, сбалансированное распределение m -грамм. При статистическом анализе в качестве основных инструментов используются преобразование Фурье (для булевых доменов) и эpsilon-смещенные распределения.

6.3.1.2 Приложение преобразования Фурье и ε -смещенных распределений в анализе регистров с переменными точками съема и сжимающего генератора

Преобразование Фурье. Булевы функции от n переменных рассматриваются как функции, принимающие действительные значения $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{-1,1\}$. Множество всех таких действительных функций на кубе - это 2^n -мерное векторное пространство с внутренним произведением, задаваемым как

$$\langle g, f \rangle = 2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} f(x)g(x) = E(gf).$$

Как обычно, норма функции задается соотношением $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, что является евклидовой нормой.

Базис куба \mathbb{Z}_2^n задается следующим образом. Для каждого подмножества S из $\{1, \dots, n\}$ определим функцию χ_S , задаваемую четностью суммы ее координат:

$$\chi_S(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} +1 & \text{если } \sum_{i \in S} x_i = 2m \\ -1 & \text{если } \sum_{i \in S} x_i = 2l + 1 \end{cases}.$$

Легко можно проверить следующие свойства таких базисных функций:

- Для каждых A, B : $\chi_A \chi_B = \chi_{A \Delta B}$, где $A \Delta B$ - симметричная разность для A и B .
- Семейство $\{\chi_S\}$ для всех $S \subset \{1, \dots, n\}$ формирует ортонормальный базис, т.е. если $A \neq B$, то $\langle \chi_A, \chi_B \rangle = 0$ и для каждого A выполняется $\langle \chi_A, \chi_A \rangle = 1$.

Любая функция на данном кубе (с действительными значениями) может быть уникальным образом выражена как линейная комбинация базисных функций, т.е. как $\sum_S c_S \chi_S$, где c_S - действительные константы. Преобразование Фурье функции f - это выражение f в виде линейной комбинации функций χ_S . Для некоторых функции f и подмножества $S \subset \{1, \dots, n\}$, S -й коэффициент Фурье, обозначаемый как $\hat{f}(S)$, является тем, что ранее именовалось c_S , то есть $f = \sum_S \hat{f}(S) \chi_S$.

Поскольку функции χ_S - это ортонормальный базис, то коэффициенты Фурье находятся через соотношение $\hat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle$. Для булевой функции это сводится к виду

$$\hat{f}(S) = Pr[f(x) = \bigoplus_{i \in S} x_i] - Pr[f(x) \neq \bigoplus_{i \in S} x_i],$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ выбирается равновероятно и случайно.

Эпсилон-смещенные распределения. Рассмотрим функцию распределения как функцию из $\{0,1\}^n$ в интервал $[0,1]$. Дано вероятностное распределение μ , тогда $\sum_x \mu(x) = 1$ и $\mu(x) \geq 0$. Можно обращаться с μ как с любой другой функцией и рассмотреть ее коэффициенты Фурье. Например, равномерное (равновероятное) распределение - это $U(x) = 1/2^n$, откуда следует, что $\hat{U}(S) = 0$, для $S \neq \bullet$, и $\hat{U}(\bullet) = 1/2^n$.

Некоторое распределение является ε -смещением, если оно "близко" к равномерному распределению в следующем смысле.

Определение. Распределение μ над $\{0,1\}^n$ называют распределением ε -смещения, если для каждого подмножества $S \subset \{1, \dots, n\}$, $|\hat{\mu}(S)| \leq \varepsilon 2^{-n}$.

Идея ε -смещенного распределения введена в 1990 году в работе Дж. и М. Наор [275], главной ее мотивацией была дерандомизация рандомизированных алгоритмов и конструирование аппроксимаций равновероятного распределения.

Следующая теорема из работы [6] объединяет РСЛОС и ε -смещенные распределения.

Теорема. Рассмотрим распределение $D(m,n)$ последовательностей длины n , выдаваемых на выходе РСЛОС A длины m , где набор точек съема в A выбирается равновероятно среди всех примитивных полиномов степени m над $GF(2)$, а начальное заполнение A выбирается равновероятно на множестве всех ненулевых двоичных векторов длины m . Тогда $D(m,n)$ - это $(n-1)/2^m$ -смещенное распределение.

Пусть f - функция из $\{0,1\}^n$ в действительные числа. Норму L_1 функции определяют как $L_1(f) = \sum_S |\hat{f}(S)|$. В [209] показана следующая связь между ε -смещенным распределением μ и L_1 -нормой:

$$|E_U[f] - E_\mu[f]| \leq \varepsilon L_1(f),$$

где U - равновероятное распределение. Функция f может рассматриваться в качестве теста на отличие распределения μ от равновероятного. Приведенное неравенство задает верхнюю границу для качества такого различия и, таким образом, полезно при тестировании псевдослучайности.

Норма L_1 полезна в тех случаях, когда можно оценивать ее верхнюю границу. Можно показать, что для функций, отображающих $\{0,1\}^n$ в действительные числа, справедливо:

$$L_1(fg) \leq L_1(f)L_1(g) \text{ и } L_1(f + g) \leq L_1(f) + L_1(g).$$

Для многих простых функций можно показать, что значение L_1 мало:

- Пусть $sum(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, тогда $L_1(sum) = n$.
- Пусть $AND(x) = \prod_i x_i$, тогда $L_1(AND) = 1$.
- Для $B \in \{0,1,*\}^n$ задается функция $template$ (шаблон): $template_B(x) = 1$ тогда и только тогда, когда x и B согласованы в каждом 0 или 1 вектора B , то есть для каждого $b_i \neq *$ выполняется $b_i = x_i$. (Например, $template_{10*1*}(10110) = 1$, но $template_{10*1*}(00110) = 0$.) Для произвольного $B \in \{0,1,*\}^n$ справедливо $L_1(template_B) = 1$.

Приложение к РСЛОС с переменными точками съема. С помощью аппарата эpsilon-смещенных распределений показано, что последовательности от РСЛОС с переменными коммутациями имеют много сходства со случайными последовательностями.

В частности, пусть A - РСЛОС, в котором коммутации выбираются случайно и равновероятно среди всех примитивных многочленов степени m над $GF(2)$. Пусть X - сумма n различных бит i_1, \dots, i_n из A -последовательности (подразумевается, что $i_j \leq 2^m - 1$). Пусть $Y = \sum_{i=1}^n y_i$, где y_i - $\{0,1\}$ -случайные переменные и $\Pr[y_i = 1] = 1/2$. Показано, что ожидаемое значение X ограничено сверху величиной $n^2/2^m$, разность дисперсий X и Y ограничена величиной $(n^3 + n^2)/2^m$, и, кроме того, $|E[X^k] - E[Y^k]| \leq n^k/2^m$.

Применяя в этих же условиях к РСЛОС-последовательности концепцию обобщенного шаблона показано, что вероятность появления всякого шаблона близка к вероятности его появления в случайной последовательности. Более строго, пусть X - первые n выходных бит регистра A и пусть Y - случайная последовательность из n бит. Пусть $B \in \{0,1,*\}^n$ - некоторый произвольный шаблон. Тогда

$$|E[\text{template}_B(X)] - E[\text{template}_B(Y)]| \leq n/2^m.$$

Доказано также, что если за $i_k(A)$ обозначить позицию k -го единичного бита в последовательности, то матожидание $E_A[i_k(A)] = O(k)$.

Приложение к сжимающему генератору. С помощью введенного аппарата показано, что хорошие случайно-подобные свойства РСЛОС с переменными коммутациями сохраняются и для сжимающего генератора (имеющего, помимо этого, и другие привлекательные свойства, не свойственные РСЛОС, например, экспоненциальную линейную сложность). В частности, доказаны следующие результаты.

Теорема. Пусть Z - последовательность, порождаемая сжимающим генератором с регистрами A и S .

Если X - сумма n последовательных бит в Z -последовательности (подразумевается, что $n|S| \leq 2^{|A|}$), а $Y = \sum_{i=1}^n y_i$, где y_i - $\{0,1\}$ -случайные переменные и $\Pr[y_i = 1] = 1/2$, то ожидаемое значение $|X|$ ограничено сверху величиной $n^2/2^{|A|}$, разность дисперсий X и Y ограничена величиной $(n^3 + n^2)/2^{|A|}$, и, кроме того, $|E[X^k] - E[Y^k]| \leq n^k/2^{|A|}$.

Если X - первые n выходных бит регистра A , Y - случайная последовательность из n бит, $B \in \{0,1,*\}^n$ - некоторый произвольный шаблон, то

$$|E[\text{template}_B(Z)] - E[\text{template}_B(Y)]| = O(n/2^{|A|}).$$

Следствие. Если X_1 и X_2 - два бита в Z -последовательности, находящиеся на расстоянии l , то корреляция между X_1 и X_2 ограничена величиной $O(l/2^{|A|})$.

Если P - произвольная двоичная k -грамма (паттерн), а X_k - это k последовательных бит из Z , то вероятность того, что $X_k = P$ лежит в границах $2^{-k} \pm O(k/2^{|A|})$.

6.3.1.3 Криптоаналитические подходы к вскрытию схемы

Авторами конструкции исследованы несколько известных криптоаналитических подходов на предмет вскрытия сжимающего генератора.

Атаки через S . Если известны точки съема регистров A и S , то возможен тотальный перебор начальных заполнений S . Показано, что сложность такой атаки экспоненциально зависит от $|S|$ и полиномиально от $|A|$, или более точно - $O(2^{|S|} \cdot |A|^3)$.

Если переменные коммутации A являются секретным ключом, как рекомендуют авторы, то такой метод уже не срабатывает, поскольку для составления системы линейных уравнений необходимо знание точек съема. В этом случае рассмотрена атака, не прибегающая к тотальному перебору коммутаций A , а перебирающая только начальные заполнения и коммутации для S (точки съема S подразумеваются секретными). Каждая пара заполнение-коммутация S используется для разворачивания t -битного фрагмента S -последовательности. По этому фрагменту и достаточно большому фрагменту выходной гаммы Z (около $t/2$ бит) можно сгенерировать первые t бит последовательности-произведения $p_i = a_i \cdot s_i$. (Отметим, что биты A -последовательности, соответствующие позициям единиц в S -последовательности, известны благодаря отрезку гаммы Z , а позиции, в которых $s_i = 0$, также заняты нулями и в произведении). Интересным свойством такой последовательности-произведения является то, что ее линейная сложность самое большее равна $|A| \cdot |S|$ (см. [339]). Отсюда следует, что значения $t = 2 \cdot |A| \cdot |S|$ достаточно для полного нахождения последовательности-произведения p_i . Вычислительная стоимость квадратично зависит от $|A| \cdot |S|$. Эта информация вместе с известной S -последовательностью позволяет полностью восстановить последовательность Z_i . Таким образом, трудоемкость атаки оценивается количеством перебираемых начальных заполнений и коммутаций S (около $2^{2|S|}/|S|$), помноженным на сложность восстановления бит последовательности p_i по ее линейной сложности (т.е. $O((|A| \cdot |S|)^2)$). Необходимое для вскрытия количество бит гаммы Z равно $|A| \cdot |S|$.

Атака через линейную сложность. Атака СГ через его линейную сложность требует знания экспоненциально зависящего от $|S|$ количества бит генерируемой последовательности, более точно, $2^{|S|-2} \cdot |A|$ бит по крайней мере. С другой стороны, типичный случай квадратичных трудозатрат на восстановление последовательности по фрагменту для данной ситуации не характерен. Здесь сложность вскрытия оценивается величиной $O(2^{|S|} \cdot |A|^2)$. Показано, что имея отрезок из $2^{|S|} \cdot |A|$ бит гаммы можно восстановить последовательность целиком. Делается вывод, что параметры для СГ следует подбирать таким образом, чтобы противник не имел возможности получить фрагмент гаммирующей последовательности подобной длины.

6.3.1.4 Аспекты аппаратной и программной реализации

Аппаратная реализация. Вследствие способа задания СГ, скорость выхода бит зависит от появления "1" в регистре S . Таким образом, эта скорость составляет в среднем 1 бит на каждые два такта работы РСЛОС. Эта проблема имеет два аспекта. Первый - это

понижение выходной скорости по сравнению со скоростью РСЛОС, второй - нерегулярность выхода.

Показано, что эти очевидные практические слабости могут быть преодолены ценой небольших затрат при аппаратной реализации (с другой стороны, эти "слабости" обеспечивают криптографическую стойкость конструкции). Подчеркнуто, что аппаратное ускорение работы РСЛОС стоит обычно меньше, чем добавление в конструкцию дополнительных регистров (даже одного).

Проблема нерегулярной скорости выхода может быть серьезной помехой в приложениях, работающих в масштабах реального времени, где повторяющиеся задержки неприемлемы. Но и эта проблема решается ценой небольших затрат. В качестве решения предлагается использование короткого буфера для накопления битов выхода СГ с целью компенсации задержек в генерации гаммы. Для оценки влияния такого буфера на выходную скорость СГ применим марковский анализ. Показано, что даже с короткими буферами (16 или 24 бита) и со скоростью РСЛОС, вдвое превышающей требуемую скорость выхода, вероятность иметь неготовый байт гаммы очень мала ($3 \cdot 10^{-7}$ для 24-битного буфера). В случаях же, когда такое происходит, предлагается поочередно вставлять "0" и "1". Другой выход (но не столь простой) - периодически буферизовать некоторые биты A -последовательности, соответствующие "нулям" в S для того, чтобы использовать их для восполнения недостающих бит в случае необходимости.

Отдельно рассмотрен вопрос о преимуществе переменных коммутаций сравнительно с постоянными. Помимо повышения стойкости шифрсистемы, использование переменных точек съема обеспечивает высокую степень гибкости конструкции. Путем программирования этих коммутаций стойкость системы можно понижать или повышать без каких-либо изменений в аппаратном обеспечении. Это очень важное свойство для криптографических систем, продаваемых в различных странах с различными уровнями дозволенной стойкости. Понижение стойкости достигается виртуальным укорачиванием регистров путем загрузки нулей в самые старшие ячейки управляющих регистров.

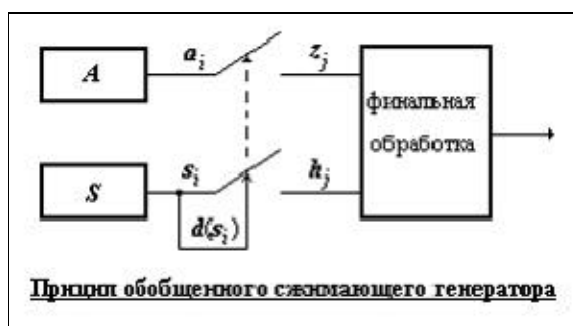
Программная реализация. Хотя первоначально для новой криптосхемы подразумевалась аппаратная реализация, практически сразу начались работы по оптимизации и чисто программных решений. В конце 1993 года один из соавторов сжимающего генератора, Хьюго Кравчик, представил результаты практической программной реализации СГ в стенах IBM [206]. Алгоритм был построен для поддержки случайных переменных коммутаций. Программа, написанная на языке Си, давала скорость генерации 2.5 Мбит/сек на рабочей станции IBM с 33 Мгц-процессором. Этим результатам соответствуют регистры длиной 61-64 бита каждый. Реализация РСЛОС построена на основе того факта, что каждый блок выхода регистра (например, 32 бита) может быть вычислен как линейное преобразование, т.е. матричное перемножение предыдущего выходного блока. Такая матрица зависит только от коммутаций соответствующего РСЛОС, а операция матричного перемножения ускоряется с помощью механизма просмотрной таблицы. Наконец, сама операция сжатия также выполняется с использованием этого механизма.

6.3.2 Сжимающий Фибоначчи-генератор (Fish) и его вскрытие

6.3.2.1 Обобщенный сжимающий генератор и алгоритм Fish

В конце 1993 г. немецкие криптографы, работающие в фирме Siemens AG, Уве Блехер и Маркус Дихтль представили программный поточный шифр [38], названный ими **Fish** и основанный на принципе сжимающего генератора в приложении к *запаздывающему генератору Фибоначчи* [197] (Fish - **F**ibonacci **s**hrinking). Схема разработана для полноценного использования 32-битной длины слова в популярных процессорах. На 33-Мгц процессоре Intel 486 достигается скорость шифрования 15 Мбит/сек при реализации программы на языке Си.

Авторами сделано небольшое обобщение первоначального принципа СГ. Рассматриваются два псевдослучайных генератора A и S . A генерирует последовательность a_0, a_1, \dots элементов из $GF(2)^{n_A}$. S генерирует последовательность s_0, s_1, \dots элементов из $GF(2)^{n_S}$. Для решения о том, какие элементы выбирать, а какие игнорировать, к элементам s_0, s_1, \dots применяется отображение $d: GF(2)^{n_S} \rightarrow GF(2)$. В исходной схеме брались и отвергались только элементы, генерируемые A . В данной обобщенной схеме в равной степени задействован и выход S . Другое отличие этой схемы - выбранные элементы не являются конечным результатом, а требуется еще один этап обработки. Процедура сжатия описывается следующим образом: если $d(s_i) = 1$, тогда a_i и s_i берутся, в противном случае они пропускаются. То есть, определяется последовательность $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$, где i_k - это k -я позиция в s_0, s_1, \dots с $d(s_i) = 1$. После этого рассматриваются сжатые последовательности: z_0, z_1, \dots , представляющая собой a_{i_1}, a_{i_2}, \dots ; и h_0, h_1, \dots , представляющая собой s_{i_1}, s_{i_2}, \dots . Для всех элементов h_j выполняется $d(h_j) = 1$.



В оригинальном сжимающем генераторе было $n_A = 1$ и $n_S = 1$. Отображение $d()$ было тождественным, z_0, z_1, \dots использовались как выходные биты генератора. В данной схеме для полноценного использования 32-битной длины слова было выбрано $n_A = 32$ и $n_S = 32$. Для реализации A и S был выбран самый быстрый из известных авторам генераторов, а именно, *аддитивный генератор* [197] (см. Раздел 8.1.10), именуемый также запаздывающим генератором Фибоначчи. Заданы следующие параметры A и S :

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-55} + a_{i-24} \pmod{2^{32}} \\ s_i &= s_{i-52} + s_{i-19} \pmod{2^{32}}, \end{aligned}$$

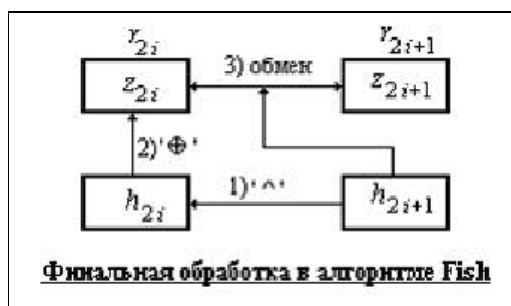
где $+$ обозначает арифметическое сложение с переносом, а двоичные векторы интерпретируются как обычные числа без знака. Значения $a_{-55}, a_{-54}, \dots, a_{-1}$ и $s_{-52}, s_{-51}, \dots, s_{-1}$ являются начальным заполнением генераторов и берутся из ключа. Последовательность

самых младших бит запаздывающего генератора Фибоначчи генерируется РСЛОС с трехчленом обратной связи.

Отображение $d: GF(2)^{32} \rightarrow GF(2)$ отображает 32-битный вектор в его самый младший бит $d(b_{31}, b_{30}, \dots, b_0) = b_0$. Было бы слишком слабым использовать сжатую последовательность z_0, z_1, \dots в качестве результирующей, поскольку использованная линейная структура может быть выявлена. Эту линейную структуру необходимо скрыть, для чего последовательности z_0, z_1, \dots и h_0, h_1, \dots разбиваются на пары (z_{2i}, z_{2i+1}) и (h_{2i}, h_{2i+1}) , на основе которых формируются два 32-битных выходных слова r_{2i} и r_{2i+1} следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{2i} &= z_{2i} \oplus (h_{2i} \wedge h_{2i+1}) \\ d_{2i} &= h_{2i+1} \oplus (c_{2i} \wedge z_{2i+1}) \\ r_{2i} &= c_{2i} \oplus d_{2i} \\ r_{2i+1} &= z_{2i+1} \oplus d_{2i}, \end{aligned}$$

где \oplus - побитовая логическая операция XOR и \wedge - побитовое логическое AND. Последние три уравнения осуществляют обмен тех бит c_{2i} и z_{2i+1} , которые соответствуют 1 в h_{2i+1} .



Самые младшие биты h_{2i} и h_{2i+1} равны 1 вследствие выбора функции d . Поэтому можно восстановить самые младшие биты у z_{2i} и z_{2i+1} по r_{2i} и r_{2i+1} , и наоборот младшие биты r_{2i} и r_{2i+1} следуют из z_{2i} и z_{2i+1} . Отсюда следует, что самые младшие биты выходных слов алгоритма Fish являются битами лежащего в основе сжимающего генератора РСЛОС с трехчленом обратной связи.

К выходной последовательности алгоритма Fish было применено около полутора десятков известных статистических тестов. Ни один из них не смог выявить отклонений от поведения случайной последовательности. Тем не менее, как будет видно из следующего подраздела, данная схема имеет серьезные криптографические слабости.

6.3.2.2 Вскрытие криптосхемы Fish

В 1994 году английский криптограф Росс Андерсон опубликовал работу, посвященную анализу криптогенераторов на основе *последовательностей Фибоначчи* [14]. Большая часть статьи - это описание техники вскрытия алгоритма Fish, к тому времени уже получившему эпитет "сименсовский" (см. 6.3.2.1).

В целом, в работе рассмотрены генераторы, построенные на базе обобщенной последовательности Фибоначчи, описываемой рекуррентным соотношением

$$s_i = a_{n-1} s_{i-1} + a_{n-2} s_{i-2} + \dots + a_1 s_{i-n+1} + a_0 s_{i-n} \pmod{m},$$

где m - подходящая степень 2. Характеристический полином такой последовательности -

$$X^n + \sum a_i X^i,$$

и имеются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы порождаемая им последовательность имела максимальную длину (см. [43]). Эти условия не совсем такие же, как для полиномов регистра сдвига, но они совпадают для трехчленов степени, превышающей 2. Следует также отметить, что самые младшие биты последовательности Фибоначчи образуют РСЛОС-последовательность с характеристическим полиномом $X^n + \sum a'_i X^i$, где $a'_i \equiv a_i \pmod{2}$.

При переходе к анализу "Сименсовского сжимающего Фибоначчи-генератора (FISH)" Андерсон несколько усовершенствует авторские обозначения Блехера и Дихтля. В основе генератора лежат две Фибоначчи-последовательности, именуемые A и S , и отвечающие рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-55} + a_{i-24} \pmod{2^{32}} \\ s_i &= s_{i-52} + s_{i-19} \pmod{2^{32}}. \end{aligned}$$

Самые младшие биты слов s_i используются для сжатия a_i в z_i , а s_i в h_i . Андерсоном j -й бит в a_i записывается как $a_{i,j}$, так что правило сжатия записывается следующим образом: если $s_{i,0}=1$, то a_i добавляется в последовательность z_k , а s_i - в h_k . Теперь, обозначив за \oplus операцию побитового XOR и за \wedge операцию побитового AND, вводятся элементы c_i :

$$\begin{aligned} c_{2i} &= z_{2i} \oplus (h_{2i} \wedge h_{2i+1}) \\ c_{2i+1} &= z_{2i+1}. \end{aligned}$$

Тогда выходная гамма r_i получается из c_i путем перестановки (своппинга) бит $c_{(2i)j}$ и $c_{(2i+1)j}$ всякий раз, когда $h_{(2i+1)j} = 1$.

Первое наблюдение, которое должно быть отмечено относительно данного генератора - то, что самые младшие биты в A образуют последовательность стандартного сжимающего генератора: $\{z_{i,0}\}$ - это просто $\{a_{i,0}\}$, сжатая с помощью $\{s_{i,0}\}$. Делая предположения о $\{s_{i,0}\}$, можно вскрыть эту последовательность тотальным перебором в среднем за 2^{51} подходов.

Но найден и значительно лучший подход из двух этапов: продемонстрирован способ для ускорения ключевого поиска, а затем показано, как восстанавливать весь ключ по его самым младшим битам.

Опасность прореженности. Как указано авторами концепции сжимающего генератора (Копперсмит и др.) [82], использование регистров сдвига с прореженными точками съема таит в себе опасность. Фактически, поскольку A удовлетворяет трехчленному соотношению [334], оказывается, что 1/8 этих триплетов $\{a_{i,0}, a_{(i+31),0}, a_{(i+55),0}\}$ проявится в $z_{i,0}$. Их появление - случайная величина, детерминированная последовательностью S , но если присмотреться к соотношениям подобного вида, скажем $z_{(i-12),0} + z_{i,0} + z_{(i+15),0}$, то следует ожидать выполнения данного соотношения более часто,

нежели при случайной схеме. Фактически, можно просматривать все соотношения вида $z_{(i-x),0} + z_{i,0} + z_{(i+y),0}$, где x лежит между (скажем) 12 и 19, а y - между 9 и 15.

Для оценки трудозатрат на подобную атаку следует отметить, что каждый бит в $z_{i,0}$ будет средним битом в одном соотношении для A . Тогда имеется вероятность $1/4$ того, что другие два бита попадают в $z_{i,j}$, и 12% того, что они оба попадут в рамки, обозначенные выше. Если $z_{i,0} = 1$ и установлено, что $z_{(i-19),0} \dots z_{(i-12),0} = 11110111$, в то время как $z_{(i+9),0} \dots z_{(i+15),0} = 111111$, то можно перепробовать шесть соотношений $(0,1,1)$ зная, что имеется 12-процентный шанс для того, чтобы одно из них было действительным соотношением в A . Так что всякий раз, когда имеется достаточно гаммы для того, чтобы отыскать паттерн подобного вида, можно ожидать, что примерно за 25 циклов ключевого поиска удастся восстановить состояние S .

Когда удастся узнать соотношение, имеются условия для атаки "разделяй-и-вскрывай" применительно к S . Если, например, найдена единица в $z_{(i-12),0} + z_{i,0} + z_{(i+15),0}$, то в точности 15 из $s_{(i-31),0}, \dots, s_{i,0}$ являются единицей, вместе с 12 из $s_{i,0}, \dots, s_{(i+24),0}$; и можно получить 3 из этих последних 25 бит по остальным, используя соотношение $s_i = s_{i+12} + s_{i-19}$. Это существенно понижает сложность атаки (но порядок ее все еще значительно превышает общепризнанный на сегодня критический порог из 2^{40} опробований).

Сложность каждого ключевого опробования можно сократить с $O(|A|^3)$ до $O(|A|)$ используя трюк, описанный в другой работе Андерсона [7]. Вместо того, чтобы восстанавливать $|A|$ по гамме, с помощью линейной алгебры находя решения для $a_{i,0}$ и сверяя эти предположения с остальной гаммой, можно просто по одному вставлять биты гаммы в $a_{i,0}$ до тех пор, пока рекуррентное соотношение не даст конфликт. Ожидается, что около $2|A|$ бит будет достаточно для того, чтобы выявить почти все ложные варианты для S , при этом следует подчеркнуть, что имеется возможность для весьма эффективного ключевого поиска такого рода при аппаратной реализации метода.

Наиболее важный момент, однако, заключается в том, что старшие биты r_i выдают побочную информацию относительно того, какой из возможных триплетов $z_{(i-x),0} + z_{i,0} + z_{(i+y),0}$ представляет собой действительное соотношение генератора A . Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть серию выходных слов r_i . Для краткости показаны только 16 самых правых (младших) бит:

```

r0 = 0110101011010110
r1 = 1010001101011010
r2 = 1001011010110111
r3 = 0011100110011011
...

```

Теперь, если $h_{(2i+1),j} = 0$, то $z_{(2i+1),j} = r_{(2i+1),j}$; в противном случае $z_{(2i+1),j} = r_{(2i),j}$. Так что всякий раз, когда $r_{(2i+1),j} = r_{(2i),j}$, то это равно и $z_{(2i+1),j}$. Тогда приведенная выше таблица r_i дает частичную таблицу для z_i :

```

z0 = ???????????????0
z1 = ??10?01??101??10
z2 = ???????????????1
z3 = 00?1?????10?1??11
...

```

Другими словами, можно получить около половины бит в $z_{(2^{i+1})}$, что составляет $1/4$ в z_i или $1/8$ в a_i . В таких условиях, имея около 2^{12} слов гаммы, к примеру, можно ожидать обнаружения примерно одного действительного и трех ложных решений в виде

$$\begin{aligned} z_{i-x} &= ??????????????0110 \\ &\quad \dots \\ z_i &= ??????????????1011 \\ &\quad \dots \\ z_{i+y} &= ??????????????0001 \end{aligned}$$

Отыскание таких паттернов сокращает сложность атаки с примерно 25 ключевых опробований до приблизительно двух из них.

Восстановление остальной части ключа. Имея $s_{i,0}$ и $a_{i,0}$, затем можно восстановить старшие биты a_i ; имеется информация о каждом восьмом бите из $a_{i,j}$ для каждого j . Согласно результатам, полученным в [254], при корреляции порядка 0.125 и трехчленном рекуррентном соотношении, восстановление приводит к успеху при длине гаммы от 550 до 5500 знаков (ближе к первому значению). Конечно, в данном случае рекуррента действует по модулю 2^k , а не над $GF(2)$, так что приходится иметь дело с битами переноса, когда таковые имеются. Для этого случая подходит алгоритм, подобный описанному в [226] (см. Раздел 4.3.5), с его помощью восстанавливается сначала $a_{i,1}$, затем $a_{i,2}$ и так далее до $a_{i,31}$.

Когда найдены a_i , можно получить старшие биты s_i , используя те биты из r_i , где $r_{(2^i)j} \neq r_{(2^{i+1})j}$. Сравнение их с восстановленными значениями z_i дает около половины значений $h_{(2^{i+1})j}$, и таким образом - одну восьмую значений $s_{i,j}$. С этого места можно строить корреляционную атаку по типу описанной ранее: от $s_{i,0}$ к $s_{i,1}$, $s_{i,2}$ и так далее до $s_{i,31}$.

Продемонстрировав общую методику вскрытия схемы FISH (что можно перевести как "Рыба"), Андерсон задается вопросом, а можно ли построить такой Фибоначчи-генератор, который одновременно обеспечивал бы и быструю работу в программной реализации, и необходимую криптографическую стойкость. В качестве возможного ответа на этот вопрос он предлагает собственную криптосхему PIKE (или "Щука"), концептуально опирающуюся на идеи криптоалгоритма A5, применяемого в цифровой сотовой связи стандарта GSM (подробности об этих схемах см. в Главе 8, Раздел 8.5.5 и Раздел 8.2).

6.3.3 Самосжимающийся генератор

В 1994 г. криптографы из Швейцарии Вилли Майер (HTL Brugg-Windisch) и Отмар Штаффельбах (Gretag AG) представили свою версию концепции сжатия - так называемый *самосжимающийся генератор* [259]. Для данной схемы характерна еще большая конструктивная простота, поскольку в основе ее лежит единственный регистр сдвига с линейной обратной связью, выходная последовательность которого сжимается по принципу, предложенному Копперсмитом и др. [82]. Принципиальное отличие новой

конструкции - сжатие РСЛОС-последовательности осуществляется под управлением того же самого регистра.

В самосжимающем генераторе исходная РСЛОС-последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ рассматривается как последовательность пар бит $((a_0, a_1), (a_2, a_3), \dots)$. Если пара (a_{2i}, a_{2i+1}) принимает значения (1,0) или (1,1), то на выход генератора поступает бит 0 или 1, соответственно, в зависимости от второго бита в паре. Если же пара оказывается равной (0,0) или (0,1), то она игнорируется, другими словами, никак не участвует в формировании выходной последовательности $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$. Таким образом ожидается, что для порождения выхода генератора из исходной последовательности изымается в среднем $3/4$ бит, то есть скорость генерации гаммы сокращается в 4 раза.

Ключ генератора - начальное заполнение РСЛОС, а также, предпочтительно, логика обратной связи регистра. Для практических приложений подразумевается, что полином обратной связи порождает РСЛОС-последовательности максимальной длины.

6.3.3.1 Сжатие и самосжатие

Естественно задаться вопросом - можно ли самосжимающий генератор реализовать как особый случай сжимающего генератора? Для показа того факта, что так оно и есть, достаточно заметить, что согласно правилу самосжатия последовательность (a_0, a_2, a_4, \dots) от РСЛОС длины N играет роль управляющей последовательности, а (a_1, a_3, a_5, \dots) - роль последовательности управляемой. Обе такие последовательности могут быть порождены этим же РСЛОС, если его загрузить начальными состояниями $(a_0, a_2, \dots, a_{2N-2})$ и $(a_1, a_3, \dots, a_{2N-1})$, соответственно. Из этого следует, что самосжимающий генератор может быть реализован с помощью сжимающего генератора на двух РСЛОС с идентичными коммутациями обратной связи.

С другой стороны, можно показать, что и сжимающий генератор можно реализовать как особый случай самосжимающего генератора. Пусть сжимающий генератор задается двумя регистрами РСЛОС 1 и РСЛОС 2 с полиномами обратной связи $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Пусть $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ и $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ - выходные последовательности этих РСЛОС. Тогда применением правила самосжатия к *прослойной* последовательности $\mathbf{a} = (c_0, b_0, c_1, b_1, c_2, b_2, \dots)$ воспроизводится оригинальная выходная последовательность сжимающего генератора. Можно показать, что последовательность \mathbf{a} может быть порождена с помощью РСЛОС с полиномом обратной связи $f(x^2) g(x^2) = f(x)^2 g(x)^2$. Из этого следует, что сжимающий генератор имеет эквивалентную реализацию посредством самосжимающего генератора.

При исследовании свойств сжимающего генератора в [82] (Раздел 6.3.1) подразумевается, что задействованные в схеме РСЛОС независимы, то есть их периоды взаимно-просты. Поэтому аналитические результаты, полученные Копперсмитом и др. в [82] относительно периода и линейной сложности, неприменимы к самосжимающему генератору.

6.3.3.2 Период и линейная сложность, примеры и экспериментальные результаты

Нижние и верхние границы для периода и линейной сложности оцениваются для самосжатых последовательностей, порождаемых регистрами с максимальной длиной периода (то есть m -РСЛОС).

Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - выходная последовательность нетривиально инициализированного m -РСЛОС длины N , то есть период \mathbf{a} равен $2^N - 1$. Показано, что самосжатая последовательность \mathbf{s} , полученная из \mathbf{a} , является сбалансированной последовательностью, период которой делит $2^N - 1$. Нижние границы для периода и линейной сложности такой последовательности задаются следующей теоремой.

Теорема. *Период P и линейная сложность L самосжатой РСЛОС-последовательности максимальной длины от РСЛОС длины N удовлетворяют соотношениям*

$$P \geq 2^{\lfloor N/2 \rfloor},$$

$$L > 2^{\lfloor N/2 \rfloor - 1}.$$

Полученные теоретические результаты являются грубыми оценками. Результаты же экспериментов поддерживают предположение о том, что период P достигает своего максимального значения для РСЛОС размера $N > 3$, то есть $P = 2^N - 1$. Для линейной сложности L экспериментальные результаты следующие: $2^{N-2} < L \leq 2^{N-1}$. Но даже теоретических результатов вполне достаточно для реализации конструкции на практике, поскольку, к примеру, при $N = 200$ период и линейная сложность доказуемо достигают величины не менее 10^{30} .

При экспериментальных исследованиях авторами найден всего один случай, когда период не достигает своего максимального значения $2^N - 1$: m -РСЛОС длины 3, задаваемый рекуррентой $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$, где самосжатая последовательность имеет период только 2 вместо максимально возможного значения 4. Проведен тотальный перебор всех m -РСЛОС длины $N < 20$, результаты которого подтверждают предположение о максимальном периоде самосжатой последовательности. В таблице приведены минимальные и максимальные значения линейной сложности для всех самосжатых последовательностей от m -РСЛОС длины $N \leq 15$.

| N , длина РСЛОС | Кол-во m -РСЛОС | L_{minimum} | L_{maximum} | δ |
|-------------------|-------------------|----------------------|----------------------|----------|
| 2 | 1 | 2 | 2 | 0 |
| 3 | 2 | 2 | 3 | 1 |
| 4 | 2 | 5 | 5 | 3 |
| 5 | 6 | 10 | 13 | 3 |
| 6 | 6 | 25 | 28 | 4 |
| 7 | 18 | 54 | 59 | 5 |
| 8 | 16 | 118 | 122 | 6 |
| 9 | 48 | 243 | 249 | 7 |
| 10 | 60 | 498 | 504 | 8 |
| 11 | 176 | 1009 | 1015 | 9 |
| 12 | 144 | 2031 | 2038 | 10 |
| 13 | 630 | 4072 | 4085 | 11 |
| 14 | 756 | 8170 | 8180 | 12 |
| 15 | 1800 | 16362 | 16371 | 13 |

Комментируя таблицу, следует отметить, что для последовательности с четным числом единиц в периоде P максимальная линейная сложность равна $P - 1$, поскольку $\sum_{i=0}^P s_{n-i} = 0$. Для самосжатых m -РСЛОС-последовательностей максимальная и минимальная линейная сложность оказываются близки друг другу и очень близки к максимально возможному значению $2^{N-1} - 1$.

Таблица показывает примечательное свойство: за исключением случая $N = 4$, верхняя граница, достигаемая линейной сложностью, равна $2^{N-1} - \delta$, где $\delta = N - 2$. Эта верхняя граница справедлива и для исключительного случая $N = 4$. Следовательно, для $2 \leq N \leq 15$ многочлен $(x^{2^{N-1}} - 1) / (x - 1)^{N-2}$ - это характеристический полином любой самосжатой m -РСЛОС-последовательности, порождаемой РСЛОС длины N . Данный факт можно рассматривать как сохранившееся алгебраическое свойство самосжатой РСЛОС-последовательности, хотя основная часть алгебраической структуры исходной m -РСЛОС-последовательности разрушена.

6.3.3.3 Криптоанализ

В данном подразделе рассмотрено несколько подходов для возможных криптоаналитических атак и оценена их сложность. Первым рассматривается общий метод восстановления исходной последовательности по известному фрагменту выходной гаммы. Данный метод не ограничивается случаем, когда исходная последовательность порождена РСЛОС.

Пусть (s_0, s_1, s_2, \dots) - известный фрагмент самосжатой последовательности. Бит s_0 порождается парой бит (a_j, a_{j+1}) исходной последовательности, где индекс j неизвестен. Наша цель - восстановить исходную последовательность в прямом направлении начиная с позиции j . Поскольку мы знаем s_0 , то делаем вывод, что $a_j = 1$ и $a_{j+1} = s_0$. Для следующей пары бит (a_{j+2}, a_{j+3}) остаются три возможности: $a_{j+2} = 1$ и $a_{j+3} = s_1$, если данная пара была использована для порождения s_1 ; либо две альтернативы $a_{j+2} = 0, a_{j+3} = 0$ и $a_{j+2} = 0, a_{j+3} = 1$, если эта пара была проигнорирована. Для каждой из этих трех возможностей опять имеется три альтернативы относительно следующей пары бит. Таким образом, для восстановления n битовых пар, то есть при $N = 2n$ получаем суммарное количество возможных решений

$$S = 3^{n-1} \approx 3^{N/2} = 2^{((\log_2 3)/2)N} = 2^{0.79 \cdot N} \quad (1)$$

Однако, эти решения имеют различные вероятности. Поясним этот факт рассмотрением пары бит (a_{j+2}, a_{j+3}) . В предположении, что исходная последовательность чисто случайна, $a_{j+2} = 1$ с вероятностью $1/2$. Следовательно, первая альтернатива имеет вероятность $1/2$, а остальные два случая - вероятности по $1/4$. В терминах теории информации неопределенность относительно этой пары бит выражается как

$$H = -(1/2) \log_2(1/2) - (1/4) \log_2(1/4) - (1/4) \log_2(1/4) = 3/2.$$

Поскольку при восстановлении отдельных битовых пар полагается их независимость друг от друга, то суммарная энтропия для n пар равна $3n/2$. Таким образом, оптимальная

стратегия при восстановлении N бит исходной последовательности имеет среднюю сложность $2^{3N/4}$. Например, при $N = 200$ эта сложность эквивалентна поиску ключа тотальным перебором при длине ключа в 150 бит.

До сих пор не принимался в расчет тот факт, что исходную последовательность порождает РСЛОС. В криптографических приложениях ключ состоит из начального заполнения регистра и, предпочтительно, из полинома обратной связи. Для того, чтобы оценить стойкость конструкции, здесь полином обратной связи полагается известным. В этом предположении будет оценена сложность нахождения начального заполнения РСЛОС. При описанном выше методе нахождения ключа средняя сложность ограничена сверху величиной $2^{3N/4}$, где N - это длина РСЛОС. Если регистр имеет лишь немного точек съема, либо если они сконцентрированы в нескольких локальных областях, то, как будет показано ниже, имеется возможность для более быстрых атак. Но с другой стороны, если исключить такие особые ситуации, то авторам неизвестны методы восстановления начального заполнения РСЛОС лучшие, чем описанный выше.

Положим для примера, что РСЛОС имеет всего две точки съема (что является минимальным количеством для m -РСЛОС). Тогда рекуррентное соотношение может быть записано в виде $a_k + a_{k+t} + a_{k+t+s} = 0$, для всех $k \in N$. Пусть a_j - бит исходной последовательности, задающий первый известный бит s_0 сжатой последовательности. Наша цель - тотальным перебором провести поиск двух m -битных блоков

$$B_1 = (a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+m-1})$$

$$B_2 = (a_{j+t}, a_{j+t+1}, \dots, a_{j+t+m-1})$$

при подходящем m . Для каждого выбора таких двух блоков третий блок

$$B_3 = (a_{j+t+s}, a_{j+t+s+1}, \dots, a_{j+t+s+m-1})$$

определяется соотношением обратной связи. Самосжатие приводит к некоторым трем битовым комбинациям. Известный фрагмент самосжатой последовательности сканируется на предмет появления таких комбинаций. При правильном выборе m -битных блоков ожидается, что эти три комбинации будут отстоять примерно на $s/4$ или $t/4$ бит друг от друга.

Пару блоков называем решением, если три таких комбинации можно найти на подходящих позициях. Исследуем проблему на предмет количества решений, которое можно ожидать. Согласно соотношению (1), имеется около $3^{m/2}$ решений для B_1 . Если в сжатой последовательности известна позиция подпоследовательности, порожденной вторым блоком B_2 , то опять имеется около $3^{m/2}$ решений для B_2 . Поскольку эта позиция точно не известна, то количество решений для B_2 несколько больше. Поэтому делается вывод, что имеется по крайней мере $3^{m/2} \cdot 3^{m/2} = 3^m$ решений для пары (B_1, B_2) . С помощью тех же рассуждений делается вывод, что имеется по меньшей мере $3^{m/2}$ решений для B_3 . Следовательно, с вероятностью около $p = 3^{m/2}/2^m$ случайный блок B_3 совместим со сжатой последовательностью. Таким образом, благодаря рекуррентному соотношению количество решений для пары (B_1, B_2) сокращается в p раз. Тогда остается около

$$T = 3^m \frac{3^{m/2}}{2^m} = \frac{3^{3m/2}}{2^m} = 2^{[3(\log_2 3)/2 - 1]m} = 2^{1.38m} \quad (2)$$

решений. Для нахождения этих решений необходим поиск среди 2^{2m} пар блоков.

Подобным же образом, со сложностью 2^{2m} , проводится поиск тотальным перебором среди m -битных блоков

$$\begin{aligned} B'_1 &= (a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-m}) \\ B'_2 &= (a_{j+t-1}, a_{j+t-2}, \dots, a_{j+t-m}) \end{aligned}$$

в обратном направлении с позиции j или $j+t$, соответственно. Как и для (B_1, B_2) остается $T = 2^{1.38 \cdot m}$ решений для (B'_1, B'_2) . Каждое решение для (B_1, B_2) и (B'_1, B'_2) задает $4m$ бит РСЛОС-последовательности. Поскольку для реконструкции исходной РСЛОС-последовательности требуется N бит, то выбирается $m = N/4$. Таким образом, сложность поиска составляет $2 \cdot 2^{N/2}$ с возможностью того, что останется $T^2 = 2^{[3(\log_2 3)/2-1]N/2} = 2^{0.69 \cdot N}$ решений. Истинное решение находится опробованием всех этих возможных решений. Этот второй тотальный перебор имеет сложность $2^{0.69 \cdot N}$, которая доминирует над всей остальной сложностью атаки. Следовательно, тот факт, что РСЛОС имеет всего две точки съема, позволяет провести атаку, несколько более быструю, чем общий метод вскрытия, сложность которого $2^{0.75 \cdot N}$.

Описанный метод - это атака "разделяй-и-вскрывай". Ключ разделяется на две пары блоков (B_1, B_2) и (B'_1, B'_2) , и поиск для каждой пары проводится индивидуально. Представляется очевидным развить эту атаку до поиска k пар m -битных блоков вместо двух. Сложность ее была бы $k2^{2m}$, при $(2^{1.38 \cdot m})^k$ остающихся возможных решениях. Каждое решение требовало бы $2km$ бит РСЛОС-последовательности. Для получения N бит выбиралось бы $k = N/(2m)$. При $k > 2$ начальный поиск имеет более низкую сложность, но в общей сложности атаки по-прежнему доминирует количество решений, которое равно $(2^{1.38 \cdot m})^{N/(2m)} = 2^{0.69 \cdot N}$, как и при $k = 2$.

Оказывается также, что данная атака становится менее эффективна при возрастании количества точек съема f . В соответствии с позициями точек съема в РСЛОС, теперь ищутся наборы m -битных блоков (B_1, \dots, B_f) . После каждого поиска остаются решения, количество которых задается уже не выражением (2), а следующим:

$$T = (3^{m/2})^f \frac{3^{m/2}}{2^m} = 3^{((f+1)/2)m} 2^{-m} = 2^{[(\log_2 3)(f+1)/2-1]m}$$

Следуя концепции "разделяй-и-вскрывай", надо искать по крайней мере $k = 2$ таких наборов. При $k = 2$ этим определяется $2fm$ бит исходной РСЛОС-последовательности. Отсюда выбирается $m = N/(2f)$. Тогда сложность поиска опять составляет $2 \cdot 2^{N/2}$, но возможных решений будет $T^2 = 2^{[(\log_2 3)(f+1)/2-1]N/f} = 2^{[(\log_2 3)(1/2-1/(2f))]N}$. При $f = 4$ это количество составляет $2^{0.74 \cdot N}$, а асимптотическое значение при возрастающем f равно $2^{0.79 \cdot N}$, что совпадает с количеством решений (1), полученным для общего метода.

Применимость данной атаки ограничена также в случаях, когда блоки становятся короче. При укорачивании блоков более вероятно, что соответствующие сжатые подпоследовательности будут появляться в гамме случайно. В результате более сложно привязать эти блоки к соответствующим позициям. Следовательно, еще больше возрастает вероятность неверных решений при начальном поиске.

Полученные криптоаналитические результаты не дают путей к вскрытию самосжимающего генератора, если исключить особые ситуации. Самый лучший метод из найденных авторами для восстановления начального состояния РСЛОС длины N имеет сложность $2^{0.75 \cdot N}$, даже если логика обратной связи известна. Если же расположение точек съема является частью ключа, то восстановление начального состояния придется сочетать с тотальным перебором всех примитивных полиномов. То есть сложность атаки возрастает в $\varphi(2^N - 1)/N$ раз, что при больших N аппроксимируется величиной 2^N . Следовательно, суммарная сложность такой атаки аппроксимируется величиной $2^{1.75 \cdot N}$.

6.4 Вскрытие схем с неравномерным движением

6.4.1 Краткий обзор основных результатов

В открытой литературе опубликовано большое количество результатов, показывающих, что использование неравномерно сдвигающихся регистров в генераторах гаммы - это хороший способ для получения последовательностей с большими периодами, высокой линейной сложностью и привлекательными статистическими свойствами [142]. Среди наиболее информативных материалов можно посоветовать работы Голльмана и Чамберса [158], Рюппеля [339], Диня, Сяо и Шена [106], Голича и Живковича [135].

Хотя представляется бесспорным, что в криптогенераторах подобного рода на выходе достигается более высокая сложность, нежели у исходных последовательностей, но некоторая их структура унаследуется и выходной последовательностью. Возможно удивительно, но твердый теоретический базис для анализа таких последовательностей строится достаточно просто. Изменение закона движения одного регистра по сути дела обеспечивает лишь тот факт, что выходная последовательность - это некоторым образом *усеченная* или *сэмплированная* (как предпочитают выражаться некоторые американские исследователи) версия оригинала. Следовательно, лежащую в теоретической основе линейную алгебру можно использовать для выражения новой последовательности в терминах старой.

В данном разделе будут вкратце описаны корреляционные подходы к криптоаналитическому вскрытию схем на основе регистров с неравномерным движением в предположении, что в каждом такте регистры сдвигаются по крайней мере один раз. (Примечательно, что практически все криптоаналитические результаты в данной области получены югославскими математиками Голичем, Михалевичем, Петровичем и Живковичем.)

В условиях, когда регистры движутся неравномерно, уже невозможно применение классических корреляционных методов из Главы 4, поскольку расстояние Хэмминга между последовательностями разной длины лишено смысла. Однако, в начале 1990-х годов Голичем и Михалевичем [137] [138] было показано, что в этом случае можно использовать так называемые "ограниченные Левенштейн-подобные расстояния", а затем применять в основе своей те же самые статистические корреляционные методы, что и в случае равномерного движения. В общем случае *ограниченное расстояние Левенштейна* (ОРЛ) определяется как минимальная сумма элементарных расстояний, связываемых с операциями редактирования (удаления, вставки и замены), необходимыми для преобразования одной последовательности в другую, при условии наложения заданных

ограничений на операции. В нашем случае вставки не разрешены, а ограничения вытекают из характеристик последовательностей от регистров с управляемым движением. Типичное ограничение связано с максимальным количеством последовательных удалений. Проблема эффективного вычисления ОРЛ решена в работе Голича и Михалевича [138] с помощью рекурсивного алгоритма, подобного алгоритмам динамического программирования. В итоге ими показано, что когда комбинирующая функция без памяти имеет корреляционный иммунитет нулевого порядка, то корреляционная атака на основе Левенштейн-подобных расстояний в принципе возможна для восстановления начального заполнения регистра, выход которого коррелирует с выходом генератора, независимо от начальных заполнений других регистров и независимо от регистров управления движением криптосхемы. Однако, задача отыскания условий, при которых данный метод с большой вероятностью приводит к успеху, представляется чрезвычайно сложной.

Рассмотрим теперь случай, когда нет "шума замены", то есть схему из единственного регистра сдвига с неравномерным движением. Для ситуации, когда два или более последовательных удалений не разрешены, или другими словами, когда регистр сдвигается в каждом такте на один или два шага, Живкович разработал корреляционную атаку *ограниченным встраиванием* [411]. Атака встраиванием заключается в попытке встроить имеющийся фрагмент гаммы в дважды более длинный фрагмент последовательности от равномерно движущегося регистра сдвига при каждом предполагаемом начальном состоянии, не допуская при этом двух или более последовательных вставок, кроме как в конце более короткой последовательности. Вероятность ограниченного встраивания для заданной последовательности определяется как вероятность того, что ее можно встроить в дважды более длинную чисто случайную двоичную последовательность в условиях заданных ограничений. Живкович вывел верхнюю границу для этой вероятности, которая экспоненциально стремится к нулю при росте длины имеющейся гамм-последовательности. Соответственно, восстановление начального состояния возможно в том случае, если длина гаммы превышает некоторое значение, линейно зависящее от длины регистра сдвига. Обратим внимание, что атака встраиванием по своей сути та же самая, что и атака с ограниченным расстоянием Левенштейна, поскольку встраивание возможно тогда и только тогда, когда это расстояние минимально. Открытая проблема - исследование общего случая, когда максимальное количество последовательных удалений является произвольным целым больше единицы. Такая атака применима к произвольному регистру с неравномерным движением, сдвигающемуся по крайней мере раз для каждого выходного символа. Подобная атака на основе вариации неограниченного расстояния Левенштейна была предложена Михалевичем [269] (см. Раздел 6.4.2), но без теоретического исследования эффективности метода.

В работе Голича и Петровича [139] показано, что вместо использования Левенштейн-подобных расстояний можно применить *вероятностное расстояние ограниченного редактирования* (ВРОР). ВРОР - это вероятность того, что одна последовательность трансформируется в другую в рамках соответствующим образом определенной статистической модели. В этой же работе авторами дан рекурсивный алгоритм для эффективного вычисления ВРОР. Концепция ВРОР приводит к правилу принятия решения с максимальной постериорной вероятностью, и, следовательно, статистически оптимальна для принятой статистической модели.

Обобщающая криптоаналитическая работа [143] по вскрытию класса схем с неравномерным движением была представлена в 1994 году Голичем и Люком О'Коннором (см. Раздел 6.4.3). Авторами в общем виде описаны методы восстановления начального заполнения регистров с помощью атаки встраиванием и вероятностной корреляционной атаки как для неограниченного случая (с произвольным количеством удалений бит из выходной последовательности в каждом такте), так и для ограниченного случая (не более d удалений за такт). Показано, что большинство генераторов гаммы с управляемым движением по крайней мере теоретически уязвимы для криптоаналитических атак. Одновременно признается, что в существующем виде данные методы пока не могут с легкостью применяться на практике [322].

Своеобразным итогом криптоаналитических исследований схем с неравномерным движением можно считать чисто теоретическую работу Й. Голича 1995 года [146], в которой впервые представлена методика вскрытия данного класса криптосхем за полиномиальное время, то есть техника быстрой корреляционной атаки (см. Раздел 6.4.4). Метод вскрытия построен на основе линейной статистической слабости усеченных РСЛОС-последовательностей, обнаруженной этим же автором ранее при анализе криптосхем с памятью [144] (см. Главу 7). Разработанный Голичем метод *аппроксимации последовательной линейной схемой* позволяет выявлять эту статистическую слабость и восстанавливать полином обратной связи в том случае, если он неизвестен. В условиях же известного полинома обратной связи построена итеративная процедура для быстрого восстановления начального заполнения регистра по имеющемуся фрагменту гаммы. Данная процедура строится на основе уравнений проверки четности, соответствующим образом определенных, и заключается в итеративном пересчете постериорных вероятностей для неизвестных элементов последовательности, управляющей движением. Вычисленные условия сходимости в терминах количества проверочных уравнений, необходимых для успешного восстановления, и полиномиальная вычислительная сложность показывают, что предложенная быстрая корреляционная атака может быть реалистична, особенно в случае, когда на закон движения наложены ограничения.

Результаты данной работы свидетельствуют, что критичным фактором для стойкости схем на неравномерно движущихся регистрах сдвига является количество полиномиальных кратных (для многочленов обратной связи) с относительно малым весом и не очень большой степенью.

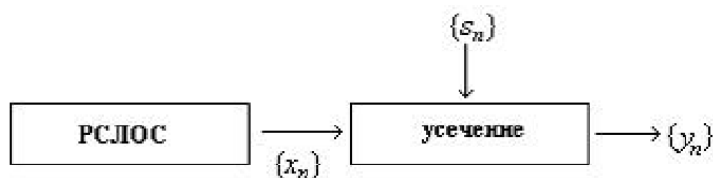
6.4.2 Восстановление начального заполнения регистра на основе новой меры расстояния между последовательностями

В 1992 году Миодраг Михалевич из белградского Института прикладной математики и электроники представил новый подход [269] к восстановлению начального заполнения X_0 заданного регистра сдвига (РСЛОС) с неравномерным движением, управляемым неизвестной последовательностью.

Пусть $\{x_n\}$ - фрагмент выходной последовательности от равномерно двигающегося РСЛОС, начальное заполнение которого подразумевается равным X_0 . Пусть $\{y_n\}$ - соответствующая выходная последовательность от РСЛОС с управляемым движением

$$y_n = x_{f(n)}, \quad f(n) = n + \sum_{i=1}^{f(n)} s_i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{s_n\}$ - двоичная последовательность управления движением, такая что каждая ее единица вызывает дополнительный ненаблюдаемый сдвиг РСЛОС. Эквивалентную модель РСЛОС с неравномерным движением можно представить на рисунке.



Здесь $\{s_n\}$ играет роль последовательности усечения. Блок усечения подает бит входа на выход только в том случае, когда $s_n = 0$. Следовательно, $\{y_n\}$ можно рассматривать как последовательность, получаемую удалением некоторого количества бит на произвольных позициях последовательности $\{x_n\}$. В статистической модели $\{s_n\}$ рассматривается как реализация последовательности независимых идентично распределенных (н.и.р.) двоичных переменных $\{S_n\}$, таких что $P(S_n = 1) = p$ для каждого n .

Криптоаналитическая проблема формулируется следующим образом: восстановить начальное заполнение X_0 в предположении, что известны характеристический многочлен РСЛОС, вероятность $p \leq 0.5$ единиц в $\{s_n\}$ и фрагмент гаммы $\{y_n\}_{n=1}^N$.

(I) **Базовые идеи.** Предположим, мы задали подходящую меру расстояния d между двумя двоичными последовательностями различной длины, которая отражает трансформацию РСЛОС-последовательности $\{x_n\}$ в выходную последовательность $\{y_n\}$. Для подобного сравнения последовательностей широко используется *расстояние Левенштейна* (РЛ), см. к примеру [343]. В работе [216] РЛ предложено и проанализировано в качестве меры расстояния для сравнения последовательностей и применения в исправляющем ошибки кодировании. Положим, что операции редактирования, трансформирующие одну последовательность в другую, - это удаление символа, вставка и замена. Тогда РЛ - это минимальное количество таких операций редактирования.

При имеющемся фрагменте $\{y_n\}_{n=1}^N$ оптимальная стратегия принятия решения (дающая минимальную вероятность ошибочного решения) - это принятие решения о начальном заполнении с максимальной постериорной вероятностью. При неравномерном движении регистра не очень ясно как отыскивать правило оптимального решения, но, во всяком случае, имея подходящую меру расстояния, можно определить такую процедуру, которая будет близка к оптимальной.

Пусть $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^M$ - РСЛОС-последовательность, соответствующая начальному заполнению \hat{X}_0 , где $M \geq N$. Пусть d - расстояние между $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^M$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$. Тогда возможны два гипотетических случая:

- H_0 : последовательность гаммы $\{y_n\}_{n=1}^N$ не порождена заполнением \hat{X}_0 ;
- H_1 : последовательность гаммы $\{y_n\}_{n=1}^N$ порождена заполнением \hat{X}_0 .

Следовательно, d - это реализация случайной переменной D с двумя возможными вероятностными распределениями (статистически усредненными над множеством всех начальных заполнений): $\{P(D | H_0)\}$ и $\{P(D | H_1)\}$.

Положим, они известны (и зависят от N). Сначала зададим порог t и длину N такие, чтобы достигались заданные вероятности "пропуска события" и "ложной тревоги" (ошибок I и II рода), соответственно P_m и P_f . Вероятность P_m можно выбрать близкой к нулю (например, 10^{-3}), а P_f - очень близкой к нулю (например, $P_f \approx 2^{-L}$), чтобы ожидаемое количество ложных тревог было очень мало (≈ 1). Тогда процедура принятия решения проходит следующие шаги для каждого возможного начального состояния \hat{X}_0 :

- сгенерировать $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^M$,
- вычислить расстояние d между $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^M$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$,
- используя порог t , принять H_0 или H_1 .

Выходом данной процедуры будет множество наиболее вероятных кандидатов на истинное начальное заполнение.

Соответственно, меру расстояния следует задавать так, чтобы она позволяла статистически разделять две ситуации: первая, когда сравниваемые последовательности взяты случайно, равновероятно и независимо (что является разумной моделью для H_0); и вторая, когда $\{y_n\}_{n=1}^N$ получена из $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^M$ удалением некоторых бит.

(II) **Сравнение последовательностей.** Предлагаемая новая мера расстояния между последовательностями построена на основе процедуры вычисления РЛ, описанной в [292] и [293].

Обозначим как $PL(\{a_i\}_{i=1}^M, \{b_i\}_{i=1}^N)$ расстояние Левенштейна между двумя произвольными двоичными последовательностями $\{a_i\}_{i=1}^M$ и $\{b_i\}_{i=1}^N$, $M \geq N$.

Новая мера расстояния d^* для заданного положительного целого Δ задается следующим образом:

$$d^* = \max \{ l \mid PL(\{a_i\}_{i=1}^{\Delta+l}, \{b_i\}_{i=1}^l) = \Delta \}.$$

Обратим внимание, что d^* можно эффективно вычислять с помощью процедуры для подсчета расстояния Левенштейна, предложенной в [292]. В двоичном случае, когда позволены только удаления и замены символов, основная часть алгоритма [292] - это генерация матрицы размера $(M - N) \times N$ с элементами $u(i, j)$ такими, что

$$\begin{aligned} u(i, 0) &= i & i &= 0, 1, \dots, M - N, \\ u(0, j) &= u(0, j - 1) + (a_j \oplus b_j), & j &= 0, 1, \dots, N, \\ u(i, j) &= \min \{ [u(i - 1, j) + 1], [u(i, j - 1) + (a_{i+j} \oplus b_j)] \}, & i &= 1, \dots, M - N; j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Непосредственно можно показать, что

$$d^* = \sum_{j=1}^N \delta_{u(M-N, 0), u(M-N, j)},$$

где δ означает символ Кронекера: $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{для } k = l \\ 0 & \text{для } k \neq l \end{cases}$.

С другой стороны, d^* можно рассматривать как реализацию стохастических целочисленных переменных D^* . В [269] Михалевицем доказаны следующие теоремы о вероятностном распределении D^* .

Теорема 1. *Предположим, что $\{a_i\}_{i=1}^M$ и $\{b_i\}_{i=1}^N$ - реализации последовательностей н.и.р. равновероятных двоичных переменных и обозначим этот случай как H_0 . Тогда*

$$P(D^* = d | H_0) = \frac{f(d)}{\left[\sum_{i=0}^{N-1} 2^{-(M-N+i)} \binom{M-N+i}{M-N} \right] + \left[\sum_{i=0}^{M-N} 2^{-(N+i)} \binom{N+i}{i} \right]},$$

где

$$f(d) = \begin{cases} 2^{-(M-N+d)} \binom{M-N+d}{d}, & d \leq N-1 \\ \sum_{i=0}^{M-N} 2^{-(N+i)} \binom{N+i}{i}, & d = N \end{cases}.$$

Теорема 2. *Пусть $\{b_i\}_{i=1}^N$ порождается из $\{a_i\}_{i=1}^M$ удалением $M - N$ бит, и обозначим этот случай как H_1 . Тогда*

$$P(D^* = d | H_1) = \begin{cases} 1 & \text{для } d = N \\ 0 & \text{для } 0 < d \leq N-1 \end{cases}$$

(III) **Алгоритм.** Для восстановления начального заполнения регистра сдвига применяется следующее правило принятия решения:

- принять H_1 , если $d^* = N$,
- в противном случае принять H_0 .

Отметим при этом, что вероятность P_m пропуска события задается как

$$P_m = P\left(\sum_{i=1}^M S_i > M - N\right) = \sum_{i=M-N+1}^M \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i}.$$

Алгоритм восстановления

Вход: $\{y_n\}_{n=1}^N$, p и характеристический полином РСЛОС.

Фаза I. Инициализация: При заданных N , p и приемлемом значении P_m определить минимальное значение M .

Фаза II. Проверка гипотезы: Для каждого возможного начального заполнения повторить следующие шаги:

Полагая новое начальное заполнение \hat{X}_0 отличающимся от всех ранее проверенных, сгенерировать соответствующую последовательность $\{\hat{x}_m\}_{m=1}^M$;

Пользуясь определением, вычислить меру расстояния d^* между $\{\hat{x}_m\}_{m=1}^M$ и $\{y_n\}_{n=1}^N$;

Если $d^* = N$, сохранить текущее значение \hat{X}_0 как возможного кандидата на решение.

Фаза III. Окончательная обработка: Используя подходящую методику, выбрать решение из отобранных кандидатур либо констатировать, что решение не найдено.

Выход: Решение X_0 либо вывод, что единственное решение не может быть найдено.

Количество гипотез, которые необходимо проверить во второй фазе данного алгоритма, равно 2^L , где L - длина регистра сдвига. С другой стороны, согласно определению меры расстояния, при заданном N количество элементарных операций, требуемых при проверке гипотезы, пропорционально $M - N$. Таким образом, общее количество элементарных операций алгоритма пропорционально величине $2^L(M - N)$.

6.4.3 Атака встраиванием и вероятностная корреляционная атака

В 1994 году Йован Голич и Люк О'Коннор, совместно работавшие в австралийском Университете Квинслэнда, представили работу [143] с описанием новых методов криптоаналитических атак на регистры сдвига с неравномерным движением, цель которых - восстановление начального заполнения регистра. В работе рассмотрены как неограниченный случай с произвольным количеством удаляемых бит в каждом такте, так и ограниченный случай, когда за такт работы удаляется самое большее d бит. Ниже будут представлены методы вскрытия для неограниченного случая.

(I) **Вероятностная модель.** Полагается, что $\tilde{X} = \{\tilde{x}_t\}_{t=1}^{\infty}$ - чисто случайная двоичная последовательность, то есть последовательность сбалансированных н.и.р. (независимых идентично распределенных) двоичных случайных переменных. Полагается также, что последовательность случайного усечения $\tilde{D} = \{\tilde{d}_t\}_{t=1}^{\infty}$ - это последовательность н.и.р. неотрицательных случайных переменных, независимая от \tilde{X} . Пусть $P = \{P(d)\}_{d \in D}$ обозначает вероятностное распределение величин усечения \tilde{d}_t для любого $t \geq 1$, где D - это множество значений с положительной вероятностью. Случайные последовательности \tilde{X} и \tilde{D} комбинируются с помощью уравнения усечения для получения выходной случайной последовательности $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_t\}_{t=1}^{\infty}$:

$$y_t = x_{\left(\sum_{i=1}^t d_i\right)}, \quad t \geq 1.$$

Операция усечения означает, что для получения следующего после y_{t-1} выходного символа y_t надо удалить d_t-1 последовательных символов из X (если $d_t \geq 1$), либо повторить y_{t-1}

(если $d_i = 0$). Если D означает множество всех возможных значений, принимаемых в D , то в случае когда $D = \{k, m\}$ принято говорить, что это регистр с $\{k, m\}$ -движением [159]. Если $D = [1, k] = \{1, 2, \dots, k\}$, то говорят, что регистр с $[1, k]$ -движением (методы криптоанализа такой схемы представлены в [138], [139]). В случае же произвольного D про неравномерно движущийся регистр говорят, что это регистр с D -движением.

Понятно, что выходная последовательность \tilde{Y} сама является чисто случайной двоичной последовательностью при условии, что $0 \notin D$. Теперь можно определить распределение совместных вероятностей $P(X, Y)$ для всех пар двоичных конечных последовательностей $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ и $Y = \{y_i\}_{i=1}^n$ для любых $m \geq n$, что является базисом для статистически оптимальной атаки с правилом принятия решения на основе максимальной постериорной вероятности.

Степень удалений p_d для произвольного вероятностного распределения усечений P определяется как

$$p_d = 1 - \frac{1}{\bar{d}}, \quad \bar{d} = \sum_{d \in D} dP(d),$$

что по сути своей является относительным ожидаемым количеством символов, удаленных из последовательности \tilde{X} для получения последовательности \tilde{Y} в рамках предполагаемой статистической модели. Концепция степени удалений понадобится для контроля за вероятностью пропуска события и для оценки эффективности атак в конструируемых методах криптоанализа.

(II) **Неограниченная атака встраиванием.** При заданном множестве неотрицательных целых D говорят, что двоичная последовательность $Y = \{y_i\}_{i=1}^n$ длины n может быть D -встроена в двоичную последовательность $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ длины m , если существует последовательность из неотрицательных целых длины n $D = \{d_i\}_{i=1}^n$ такая, что $d_i \in D$ и $y_i = x(\sum_{j=1}^i d_j)$, $1 \leq i \leq n$. Для проверки того, может ли Y быть D -встроена в X , в общем случае можно использовать *алгоритм непосредственного соответствия*, который дан в [411] для случая $D = \{1, 2\}$. А именно, сначала находим все подходящие позиции в X для первого символа из Y , используя заданные в D ограничения. Последующий процесс строится итерационно: после нахождения всех подходящих позиций в X для y_{i-1} , находим все подходящие позиции в X для следующего символа y_i в соответствии с D . Вычислительная сложность алгоритма составляет $O(mn)$. Другой подход - использовать алгоритм ограниченного расстояния Левенштейна [138] для случая $D = [1, k]$, либо же неограниченный вариант [269] для случая $D = Z^+$. Встраивание возможно тогда и только тогда, когда это расстояние (РЛ) равно минимальному значению, являющемуся по существу разностью длин последовательностей. Здесь вычислительная сложность равна $O(n(m-n))$.

При атаке D -встраиванием проверяют, может ли заданный фрагмент шифрпоследовательности Y длины n быть D -встроен в последовательность X длины $m(n)$ от равномерно движущегося регистра сдвига при всех возможных начальных заполнениях. Длину $m(n)$ последовательности X следует выбирать таким образом, чтобы

вероятность $P(\sum_{i=1}^n d_i > m(n))$ была равна верхней границе P_m - вероятности пропуска события, которая в свою очередь должна быть близка к нулю. Можно выбрать $m(n) = n/(1 - p_d) + c\sqrt{n}$, где p_d - это *степень удалений*, а c - константа, зависящая от P_m . С другой стороны, успешность атаки можно измерять с помощью вероятности ложной тревоги P_f , которую аппроксимировано выражают в терминах *вероятности D-встраивания* $P_{D,Y}(n, m(n))$ как $P_f = 1 - (1 - P_{D,Y}(n, m(n)))^{2^{r-1}}$ (где r - длина регистра сдвига). По определению, $P_{D,Y}(n, m(n))$ - это вероятность того, что двоичная последовательность Y длины n может быть D -встроена в чисто случайную двоичную последовательность X длины m . Критерий $P_f \approx 0$ хорошо аппроксимируется соотношением

$$2^r P_{D,Y}(n, m(n)) \leq 1,$$

откуда получается минимальная необходимая для анализа длина n гаммы. Минимальная длина n линейно зависит от r , если вероятность встраивания понижается экспоненциально с ростом n .

Общая проблема вывода вероятности D -встраивания для произвольного множества D представляется чрезвычайно сложной. В данном разделе рассматривается случай неограниченного встраивания, когда $D = Z^+$, множеству положительных целых. Для простоты $P_{Z^+, Y}(n, m)$ обозначается как $P_Y(n, m)$. В [143] доказан следующий результат.

Теорема 1. Для произвольной двоичной последовательности Y длины n вероятность неограниченного встраивания задается следующим выражением

$$\begin{aligned} P_Y(n, m) &= P_+(n, m) = \sum_{k=0}^{m-n} \binom{n-1+k}{k} 2^{-n-k} \\ &= 1 - 2^{-m} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} \end{aligned}$$

Проанализированы асимптотические свойства $P_+(m, n)$. Показано, что если последовательность положительных целых $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m(n)} = 1 - \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

то выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P_+(n, m(n))}{n} &= \frac{1 - H(\lambda)}{1 - \lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P_+(n, m(n)) &= \begin{cases} 0.5 & \lambda = 0.5 \\ 1 & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $H(x) = -x \cdot \log x - (1 - x) \cdot \log(1 - x)$ - функция двоичной энтропии (логарифм по основанию 2).

Отсюда для успеха криптоаналитической атаки получено следующее условие.

Теорема 2. Для произвольного $D \subseteq Z^+$ атака неограниченным встраиванием на регистр с D -движением и степенью удаления p_d приводит к успеху, если $p_d < 0.5$ и если длина n имеющейся гаммы удовлетворяет соотношению

$$n \geq r \frac{1 - p_d}{1 - H(p_d)}.$$

Если же $p_d \geq 0.5$, то данная атака не приведет к успеху.

Из этого результата следует, в частности, что регистр сдвига с Z^+ -движением теоретически стойк к атакам встраиванием, если обеспечено условие $p_d \geq 0.5$.

(III) **Неограниченная вероятностная атака.** Атаки встраиванием никак не используют вероятностное распределение последовательности усечения. То есть, вообще говоря, они не оптимальны. В рамках предполагаемой модели статистически оптимальной является вероятностная атака, основанная на совместной вероятности исходной и усекающей последовательностей. Для ограниченного случая $D = [1, k]$ данная задача решена в [139].

Здесь же будет рассмотрен неограниченный случай, когда регистр с Z^+ -движением управляется последовательностью, в которой вероятностное распределение усечений задается как $P(d) = p^{d-1}(1 - p)$, $d \in Z^+$. Отсюда следует, что $p_d = p$. Легко показать, что в этой ситуации вероятностная модель эквивалентна случаю, когда выходная двоичная последовательность \tilde{Y} получается из входной двоичной последовательности \tilde{X} посредством случайной двоичной последовательности независимых удалений символов из \tilde{X} с вероятностью p . Соответственно, желаемое совместное вероятностное распределение входной и выходной последовательностей в данной модели можно вычислять с помощью рекурсивного алгоритма, который описан ниже.

Цель алгоритма - определить совместную вероятность $P(X, Y)$ для описанной вероятностной модели при произвольных конечных двоичных последовательностях входа и выхода $X = \{x_t\}_{t=1}^m$ и $Y = \{y_t\}_{t=1}^n$, где $m \geq n$. Пусть $P(e, s)$ обозначает *частичную совместную вероятность* для префикса $X^{e+s} = \{x_t\}_{t=1}^{e+s}$ длины $e + s$ и префикса $Y^s = \{y_t\}_{t=1}^s$ длины s , для любых $1 \leq s \leq n$ и $1 \leq e \leq m - n$. Пусть $\delta(x, y)$ обозначает *вероятность замены*, по определению равную 0.5 когда x и y равны и нулю в противном случае.

Авторами алгоритма доказано, что частичная вероятность удовлетворяет рекурсии

$$P(e, s) = P(e - 1, s) p + P(e, s - 1)(1 - p)\delta(x_{e+s}, y_s),$$

для $1 \leq s \leq n$ и $1 \leq e \leq m - n$, при начальных значениях $P(e, 0) = p^e$ и $P(-1, s) = 0$.

В итоге $P(X, Y) = P(m - n, n)$.

Вычислительная сложность этого алгоритма $O(n(m - n))$. Таким образом, для решения криптоаналитической задачи по восстановлению начального заполнения регистра в рамках описанной модели, с помощью представленного алгоритма вычисляют совместную вероятность имеющегося фрагмента гаммы Y длины n и последовательности X длины $m(n)$ от равномерно движущегося регистра при всех возможных вариантах начального заполнения. Затем принимается решение об искомом начальном заполнении с максимальной совместной вероятностью. Длину $m(n)$ следует выбирать таким образом, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} n/m(n) = 1 - p$, например, $m(n) = n/(1 - p)$.

Авторами проведено исследование условий, при которых описанная методика приводит к успеху. Показано, что неограниченная вероятностная атака с независимыми удалениями теоретически успешна для любых значений $0 \leq p < 1$ при условии, что длина n имеющейся гаммы удовлетворяет условию

$$n > r \frac{1-p}{C},$$

где C - "пропускная способность канала", а r - длина регистра сдвига. Величина C очень хорошо аппроксимируется своей верхней границей, то есть $C \approx \bar{C}$, где

$$\bar{C}(p) = (1 - \frac{p}{2}) \log(2 - p) + \frac{p}{2} \log p.$$

6.4.4 Восстановление полинома обратной связи и быстрая корреляционная атака

В 1995 году Йован Голич представил теоретическую работу [146], где впервые предложена и обоснована техника быстрой корреляционной атаки криптосхемы с неравномерным движением.

Регистр с неравномерным движением рассматривается как генератор гаммы, состоящий из двоичного РСЛОС, неравномерным движением которого управляет неотрицательная целочисленная последовательность усечений. Значение усечения задает количество подлежащих удалению символов перед тем, как на выход будет выдан очередной символ. Таким образом подразумевается, что количество тактов на каждый выходной символ - это положительное целое. Сама последовательность усечений генерируется псевдослучайным образом генератором управления движением, к примеру, другим РСЛОС (см. [82]). Более строго, если $X = \{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ обозначает последовательность от равномерно движущегося РСЛОС, а $D = \{d_t\}_{t=0}^{\infty}$ - последовательность усечений, то выходная последовательность $Y = \{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ задается как усекаемая последовательность

$$y_t = x_{(t + \sum_{i=0}^t d_i)}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Подразумевается, что секретный ключ задает начальное заполнение РСЛОС и начальное заполнение (и, возможно, структуру) генератора управления движением. Кроме того, может подразумеваться, что полином обратной связи РСЛОС также задается секретным ключом, как предложено в [82]. Задача - восстановить начальное заполнение неравномерно движущегося РСЛОС с известным характеристическим многочленом по имеющемуся фрагменту гаммы. Если же полином обратной связи неизвестен, то сначала решить задачу его восстановления.

Поскольку последовательность усечений неизвестна, то разумно предполагать, что соответствующая вероятностная модель строится на основе частичного или полного знания структуры генератора управления движением. Пусть D - последовательность независимых идентично распределенных неотрицательных целочисленных случайных переменных с вероятностным распределением $P = \{P(d)\}_{d \in D}$, где D - множество целых с положительной вероятностью. Тогда *степень удалений* определяется как $\bar{p} = \frac{\bar{d}}{1 + \bar{d}}$, $\bar{d} = \sum_{d \in D} dP(d)$. Предполагается, что неизвестное начальное заполнение РСЛОС выбирается случайно и равновероятно.

(I) **Линейная статистическая слабость.** Пусть РСЛОС имеет длину r и полином обратной связи $f(z) = 1 + \sum_{i=1}^r f_i z^i = 1 + \sum_{k=1}^w z^{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_w = r$, где $W = w + 1$ - это вес полинома $f(z)$. Тогда *сжатый полином* многочлена $f(z)$ определяется как многочлен вида $\hat{f}(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\hat{r}} \hat{f}_i z^i = 1 + \sum_{k=1}^w z^{\hat{i}_k}$, где $1 \leq \hat{i}_1 < \dots < \hat{i}_w = r$ и $\hat{i}_k - \hat{i}_{k-1} \leq i_k - i_{k-1}$, $1 \leq k \leq w$, $\hat{i}_0 = i_0 = 0$. Вес сжатого полинома $\hat{f}(z)$ тот же самый, что и у $f(z)$, а его степень \hat{r} не больше, чем степень r . Эти степени равны тогда и только тогда, когда $\hat{f}(z) = f(z)$.

В работе Голича 1992 года [141] представлен метод *аппроксимации линейной последовательной схемой* (АЛПС, подробное описание см. в Разделе 7.3.3), в соответствии с которым в [144] показано, что линейное уравнение

$$y_t + \sum_{k=1}^w y_{t-\hat{i}_k} = 0 \quad (2)$$

выполняется в усеченной последовательности с вероятностью $(1 + c)/2$ для любого $t \geq \hat{r}$, где соответствующий корреляционный коэффициент c зависит от вероятностного распределения $P = \{P(d)\}_{d \in D}$. Для простоты рассматривается геометрическое распределение $P(d) = p^d (1 - p)$, $d \geq 0$, которое соответствует случаю независимых удалений с вероятностью $p > 0$. Произвольное вероятностное распределение P можно аппроксимировать геометрическим распределением, полагая $p = \bar{p}$, где \bar{p} - степень удаления. В этом случае корреляционный коэффициент [144] задается соотношением

$$c = p^{r-\hat{r}} (1-p)^{\hat{r}+1} \prod_{k=1}^w \left(\frac{\Delta_k}{\hat{\Delta}_k} \right), \quad (3)$$

где $\Delta_k = i_k - i_{k-1} - 1$ и $\hat{\Delta}_k = \hat{i}_k - \hat{i}_{k-1} - 1$, $1 \leq k \leq w$. Это соотношение имеет достаточно прозрачный комбинаторный смысл в терминах вероятности последовательностей усечения. Более строго, этот корреляционный коэффициент равен вероятности такого события, когда биты, удовлетворяющие полиному обратной связи в РСЛОС-последовательности, остаются неудаленными таким образом, что удовлетворяют сжатому полиному в усеченной последовательности. Подразумевается, что условный корреляционный коэффициент равен единице, когда событие происходит, и нулю в противном случае.

Следующий шаг. "Последовательность ошибок" $\{e_t\}$, порождаемая применением линейного преобразования, заданного полиномом \hat{f} , к последовательности гаммы $\{y_t\}$, $e_t = y_t + \sum_{k=1}^w y_{t-\hat{i}_k}$, $t \geq \hat{r}$, рассматривается как последовательность несбалансированных идентично распределенных двоичных случайных переменных с корреляционным коэффициентом c относительно постоянной нулевой переменной. Эти переменные не независимы. Для того, чтобы выявить статистическую слабость в последовательности ошибок можно применить обычный статистический тест хи-квадрат. Для последовательности длины n с n_0 нулями и n_1 единицами, значение статистики хи-квадрат дается равенством

$$\chi^2 = \frac{(n_0 - n_1)^2}{n} = nc'^2, \quad (4)$$

где $c' = (n_0 - n_1)/n$ обозначает оценку c . Таким образом, последовательность ошибок можно отличить от чисто случайной двоичной последовательности с вероятностью ошибки менее 10^{-3} в том случае, если n (примерно равное длине гаммы) равно $10/c^2$ или больше.

Корреляционный коэффициент зависит от выбранного сжатого полинома и достигает максимального значения, если

$$\hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_k^{opt} \stackrel{def}{=} \lfloor (1-p)(\Delta_k + 1) \rfloor, \quad 1 \leq k \leq w. \quad (5)$$

Максимальное значение, обозначаемое как c_f , задается формулой

$$c_f = (1-p)^{w+1} \prod_{k=1}^w p^{\Delta_k - \hat{\Delta}_k^{opt}} (1-p)^{\hat{\Delta}_k^{opt}} \left(\frac{\Delta_k}{\hat{\Delta}_k^{opt}} \right). \quad (6)$$

Анализ поведения c_f в экстремальных ситуациях, когда p относительно велико и относительно мало, показывает, что линейная статистическая слабость - это действительно реалистичная слабость, которая относительно просто может быть выявлена в условиях, когда оба параметра r и w не слишком велики.

При больших p получена оценка

$$c_f \cong (1-p) \left(\frac{2\pi p}{1-p} \right)^{-\frac{w}{2}} \left(\prod_{k=1}^w \Delta_k \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Наименьшее значение c_f получается при эквидистантном расположении точек съема обратной связи и оценивается следующим образом:

$$c_f \cong (1-p) \left(\frac{2\pi p}{1-p} \frac{r}{w} \right)^{-\frac{w}{2}}. \quad (8)$$

Таким образом, в наихудшем для криптоанализа случае, когда c_f принимает минимальное значение, верхние границы для длины гаммы и количества вычислений, требуемых для выявления слабости, оценены величиной $(10/(1-p)^2)(2\pi p/(1-p))^w((r-w)/w)^w$.

Для относительно небольшой степени удаления p , $p\Delta_k < 2 - p$ для всех k , получена нижняя граница

$$c_f \geq (1-p)^{r+1} \geq \left(1 - \frac{2w}{r}\right)^{r+1}. \quad (9)$$

Таким образом, минимальная длина для выявления слабости самое большее составляет $10/(1-p)^{2(r+1)} \leq 10/(1-2w/r)^{2(r+1)}$.

(II) Восстановление полинома обратной связи. Хотя в классической схеме криптоанализа характеристические многочлены регистров полагаются известными, однако, в предлагаемых последнее время криптосхемах полином обратной связи может зависеть от ключа, другими словами - неизвестен (см, например, [82]). Для достижения длинного периода и хороших статистических свойств полином f обычно выбирается примитивным или неприводимым. Но поскольку при заданном ключе полином f остается постоянным, то имеется и статистическая слабость, проанализированная в предыдущем разделе. Правда теперь возрастает (в общем случае) количество вычислений, необходимых для выявления этой слабости. Поскольку корреляционный коэффициент (3) зависит от предполагаемого сжатого полинома \hat{f} при заданном f и максимизирован при условии выполнения (5), то оценка c' для корреляционного коэффициента (см. (4)) может быть использована в качестве статистики для реконструкции полинома обратной связи f . Далее будут рассмотрены три случая: выявление слабости, восстановление полинома и быстрое восстановление полинома.

Как показывает практика, степень r многочлена f обычно известна с относительно малой неопределенностью. Первая цель - найти сжатый полином \hat{f} , близкий к оптимальному, дающему максимальное значение корреляционного коэффициента (6). Тогда его степень \hat{r} близка к $(1-p)r + pw$. Например, если $p = 1/2$, то $\hat{r} \cong (r+w)/2$, что может быть невелико. Для каждого предполагаемого w следует проверить $\binom{\hat{r}-1}{w-1}$ возможных кандидатур на оптимальный сжатый полином. Наилучшая кандидатура - та, которая имеет максимальное значение статистики c' на множестве всех возможных значений w . Слабость выявлена, если существенно значение хи-квадрат (4), соответствующее этому максимальному значению. Как правило, бывает доступна некоторая дополнительная информация о w , так что перебор становится не тотальным. Например, при аппаратных реализациях w невелик. Необходимая длина гаммы-последовательности зависит от f и возрастает до $10\hat{r}/c_f^2$, поскольку оптимальный сжатый

полином описывается \hat{r} битами, а длина, необходимая для разрешения неопределенности относительно каждого бита, составляет $10/c_f^2$. Поскольку f неизвестен, то вместо c_f можно использовать нижнюю границу (8) для относительно больших p , $p \geq w/r$, либо нижнюю границу (9) для относительно малых p , $p < w/r$. Полученное максимальное значение оценки c' должно быть согласовано с выбранной нижней границей. Количество вычислений для каждого из предполагаемых сжатых полиномов пропорционально длине гамм-последовательности. Другая возможность - одновременная проверка всех сжатых полиномов, близких к оптимальному, что сокращает требуемую длину гаммы. Неизвестное стандартное отклонение можно оценивать, основываясь на предположении об эквидистантных точках съема.

Вторая цель - восстановление полинома обратной связи f . Когда определен наилучший сжатый полином, то наиболее вероятный многочлен обратной связи удовлетворяет (5). Однако, решение об f на основе оценки c' корреляционного коэффициента (3) ненадежно, поскольку количество кандидатур на наилучший сжатый полином при использовании теста хи-квадрат обычно бывает довольно велико. Следовательно, много и кандидатур на наилучший многочлен обратной связи. Для выбора среди них следует использовать подходящие полиномиальные кратные этих многочленов. Конкретнее, для каждого выбранного кандидата на f отыскивается несколько полиномиальных кратных и для каждого из них вычисляется оценка c' корреляционного коэффициента, используя различные сжатые полиномы, близкие к оптимальному. Эти полиномиальные кратные предпочтительно должны иметь относительно небольшие степени и малые веса, так чтобы получались надежные оценки корреляционных коэффициентов по гамм-последовательности заданной длины. Кроме того, полиномиальные кратные различных кандидатур на f должны существенно различаться, так чтобы в итоге получить одну или лишь несколько кандидатур, чья оценка корреляционного коэффициента согласуется с максимальным значением, соответствующим (5). Так что, вообще говоря, чем длиннее имеющаяся гамма, тем меньше количество остающихся кандидатур. Однако, для получения подходящих полиномиальных кратных требуются дополнительные предвычисления. Для полинома-претендента g это можно делать путем вычисления вычетов по модулю g у многочленов вида z^i . Отметим, что отыскание низковесовых полиномиальных кратных многочлена обратной связи - принципиально важная задача для успеха быстрых корреляционных атак на регистры сдвига с равномерным движением (см. Главу 4) [254] [397] [78].

Третья цель - восстанавливать многочлен обратной связи каким-либо быстрым способом, сокращая вычислительные затраты, необходимые при отыскании оптимального сжатого полинома. Схема действий примерно та же. Но заметим, что среднее значение корреляционного коэффициента (3) над всеми сжатыми полиномами с фиксированными $\hat{\Delta}_i$ максимизировано, если (5) выполняется для $k = i$. Вместо одновременного поиска среди всех сжатых полиномов заданных веса и степени, можно заняться последовательной итеративной реконструкцией значений $\hat{\Delta}_i$, начиная с $i = 1$, к примеру.

Итеративная процедура восстановления оптимального сжатого полинома основана на оценке среднего корреляционного коэффициента вида

$$\bar{c}_f(\hat{\Delta}_i) = \frac{(1-p)^{w+1}}{\prod_{k \neq i} (\Delta_k + 1)} p^{\Delta_i - \hat{\Delta}_i} (1-p)^{\hat{\Delta}_i} \binom{\Delta_i}{\hat{\Delta}_i}.$$

Для любого предполагаемого значения $\hat{\Delta}_i$ количество различных сжатых полиномов, используемых для вычисления среднего корреляционного коэффициента, равно $1/\underline{c}$, где \underline{c} обозначает нижнюю границу для $c_f^{(i)}$ - коэффициента c_f без i -го мультипликативного члена в (6), соответствующего Δ_i (точнее, для $c_f^{(i)}/(1-p)^w$). Оценки для \underline{c} можно получить из (8) и (9).

В начальной фазе для любого возможного значения $\hat{\Delta}_1$ случайным образом выбираются $1/\underline{c}$ сжатых полиномов с фиксированным $\hat{\Delta}_1$, оценивается средний корреляционный коэффициент по имеющейся гамме и отыскивается наилучший кандидат для $\hat{\Delta}_1$ как значение, при котором оценка максимальна. На следующем этапе таким же способом отыскивается наилучший кандидат для $\hat{\Delta}_2$, но с условием, что $1/\underline{c}$ сжатых полиномов выбираются случайно из тех, что соответствуют найденному $\hat{\Delta}_1$. Эта же процедура продолжается итеративно и далее, используя находимые на каждом этапе $\hat{\Delta}_i$. После w шагов происходит пересчет наилучших кандидатур, полученных в предыдущем цикле, и эта процедура повторяется несколько циклов до тех пор, пока отмечаются существенные улучшения.

Осталось определить необходимую длину гамм-последовательности. Здесь важно отметить, что в данном алгоритме не требуется надежной оценки корреляционного коэффициента. Что требуется для сходимости итеративной процедуры к оптимальному сжатому полиному - это лишь небольшое улучшение неизвестного значения $\hat{\Delta}_i$ на каждом шаге итераций, где наиболее критичен самый первый цикл. Эта ситуация весьма похожа на процедуру итеративного вероятностного декодирования, используемую при быстрых корреляционных атаках [254] [397] [78] [267] [268] (Раздел 4.3.4). Соответственно, по аналогии делается вывод, что необходимое количество вычислений на каждом шаге составляет около $1/\bar{c}$, так что необходимая для криптоанализа длина равна \underline{c}/\bar{c} , где \bar{c} - это нижняя граница для $\bar{c}_f^{(i)}$, грубо оцениваемая величиной

$$\bar{c} = (1-p)^{w+1} \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r-1}{w-1/2} \right)^{-w+\frac{1}{2}}.$$

(III) Быстрый корреляционный метод восстановления начального заполнения.

В рамках данного подраздела полагается, что РСЛОС-полином обратной связи f степени r известен. Все предлагавшиеся ранее криптоаналитические методы восстановления начального заполнения регистра в схемах с неравномерным движением имеют экспоненциальную сложность вычислений. Цель настоящей работы - попытаться построить теоретический базис для корреляционных атак с линейной или полиномиальной сложностью.

Исходный пункт исследования - линейная статистическая слабость усеченной РСЛОС-последовательности, основанная на сжатых многочленах обратной связи и описанная в подразделе (I). Цель - восстановить последовательность усечений $\{d_i\}$ член за членом, основываясь на подходящих локально примененных сжатых полиномах. Отметим, что последовательность усечений синхронна с усеченной последовательностью

$\{y_t\}$, и что d_t - это количество бит, подлежащих удалению до того, как генерируется y_t для всех t . Последовательность усечений не нужно восстанавливать полностью: по сути дела, требуется лишь немногим более r ее последовательных членов для того, чтобы определить состояние РСЛОС однозначно или почти однозначно. (Конечно, известную последовательность усечений можно затем использовать для атаки на секретный ключ, задающий генератор управления движением, но эта проблема выходит за очерченные рамки данного исследования.)

В подразумеваемой вероятностной модели последовательность усечений рассматривается как последовательность независимых идентично распределенных неотрицательных целочисленных переменных с вероятностным распределением $P = \{P(d)\}_{d \in D}$. Таким образом, априорная информация о d_t задается предполагаемым вероятностным распределением. Для принятия статистического решения о конкретном члене d_t нужна некоторая локальная статистика, с необходимостью учитывающая два последовательных члена y_{t-1} и y_t . Эта статистика должна давать информацию о значении d_t таким образом, чтобы постериорная вероятность d_t существенно отличалась от априорной. Как и при "классической" быстрой корреляционной атаке (Раздел 4.3.2), где решение принимается по отдельным членам аддитивно зашумленной РСЛОС-последовательности, локальная информация извлекается из сумм проверки четности, соответствующих полиномиальным кратным многочлена обратной связи. Только в данном случае уравнения проверки четности задаются сжатыми полиномами соответствующих полиномиальных кратных для многочлена обратной связи.

Пусть $h(z) = 1 + \sum_{k=1}^w z^{j_k}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_w = m$, обозначает полиномиальное кратное степени m и веса $\Omega = w + 1$, и пусть $\hat{h}(z) = 1 + \sum_{k=1}^w z^{\hat{j}_k}$, $1 \leq \hat{j}_1 < \dots < \hat{j}_w = \hat{m}$, обозначает сжатый полином многочлена $h(z)$. Пусть $\tau_k = j_k - j_{k-1} - 1$ и $\hat{\tau}_k = \hat{j}_k - \hat{j}_{k-1} - 1$, $1 \leq k \leq w$, где $j_0 = \hat{j}_0 = 0$. Основная идея заключается в отыскании и использовании полиномиальных кратных $h(z)$ таких, что $\tau_i = d$, $d \in D$. Затем для каждого такого $h(z)$ использовать только различные сжатые полиномы $\hat{h}(z)$ такие, что $\hat{\tau}_i = 0$. Сумма проверки четности, действующая последовательные члены y_{t-1} и y_t , соответствует полиному $\hat{h}(z)$ очевидным образом. Каждый $h(z)$ может быть многократно использован для проверки одного и того же d , при всех тех i таких, что $\tau_i = d$. Пусть H_d обозначает множество полиномиальных кратных для проверки значения d .

Опишем итеративную процедуру статистического принятия решения, основанную на вычислении проверочных сумм. Статистически оптимальное решение для отдельных случайных переменных d_t основано на постериорных вероятностях. Пусть $\hat{P}_i(d)$ обозначает постериорную вероятность того, что $d_t = d$ при заданном множестве сумм проверок четности, задаваемых полиномами проверки четности из \hat{H}_d (множество различных сжатых полиномов для полиномов из H_d , нетривиальным образом сконструированное в [146]). Пусть $c(\hat{h})$ - условный корреляционный коэффициент, соответствующий полиному проверки четности \hat{h} в предположении, что $d_t = d$. Основополагающее предположение, обоснованное выбором полиномов проверки четности, что условный корреляционный коэффициент равен нулю и очень близок к нулю, когда $d_t \neq d$. Тогда, при упрощающем предположении о независимости отдельных проверочных сумм, справедливо соотношение

$$\frac{\hat{P}(d)}{1 - \hat{P}(d)} = \frac{P(d)}{1 - P(d)} \prod_{\hat{h} \in \hat{H}_d} (1 + c(\hat{h}))^{1-s(\hat{h})} (1 - c(\hat{h}))^{s(\hat{h})}, \quad (10)$$

где $s(\hat{h})$ - двоичное значение суммы проверки четности, задаваемой проверочным полиномом \hat{h} , а индекс t опущен для простоты выражения. Таким образом, постериорное вероятностное соотношение (или "шансы") события $d_t = d$ возрастает или уменьшается в зависимости от конкретных наблюдений.

Основная идея итеративной процедуры - использовать постериорные вероятности, полученные на предыдущем шаге с помощью (10), в качестве априорных вероятностей текущего шага. То есть концептуально идея аналогична процедуре итеративного вероятностного декодирования, описанной в Разделе 4.3.4. Конечно, поскольку предположение о независимости при различных d не совсем корректно, то постериорные вероятности, вычисляемые в (10), должны нормализовываться после каждого шага. Для того, чтобы данная итеративная процедура работала, требуется выражение для условного корреляционного коэффициента $c(\hat{h})$ в случае, когда вероятностное распределение $P = \{P(d)\}_{d \in D}$ зависит от времени. Упрощенное выражение для $c(\hat{h})$ имеет вид

$$c(\hat{h}) = (1 - p_0) \prod_{k \neq i} p_k^{\tau_k - \hat{\tau}_k} (1 - p_k)^{\hat{\tau}_k + 1} \binom{\tau_k}{\hat{\tau}_k},$$

где вероятности p_k вычисляются как подходящие средние значения на основе обновленного вероятностного распределения.

Данная итеративная процедура успешна, если она сходится к последовательности, близкой к той последовательности усечений, которая действительно породила наблюдаемую гамму. Важнейший вопрос - является ли реалистичным требуемое количество полиномов проверки четности, если принимать во внимание дополнительные ограничения, которые накладывает конструкция алгоритма на их выбор. В [146] получено компактное выражение для условия сходимости

$$\sum_w N_{d,w} (1 - p)^w > 1,$$

где $N_{d,w}$ обозначает количество полиномиальных кратных веса $w + 1$ в H_d , а p - степень удалений данной усекающей последовательности. Вычислительная сложность получения требуемых проверочных сумм, соответствующих полиному h веса $w + 1$ и степени m при относительно больших p ограничена сверху выражением $(2\pi p / (1-p)(m-w) / (w-1))^{(w-1)/2}$.

Выведенное условие сходимости и соответствующая полиномиальная вычислительная сложность показывают, что предложенный метод быстрой корреляционной атаки может быть реалистичен, особенно в ситуации ограниченного закона движения. Для подтверждения теоретических расчетов и уточнения технических деталей необходимо проведение обширных вычислительных экспериментов. ♦

Глава 7

Схемы с памятью

7.1 Общий обзор

7.1.1 Схемы с равномерным движением и памятью

Как было установлено Зигенталером [361], в классических криптогенераторах на основе регистров сдвига имеется неприятная балансировка между линейной сложностью и корреляционным иммунитетом - при повышении одного параметра понижается другой. Для преодоления этой проблемы Райнер Рюппель предложил использовать в генераторах функции с памятью [334]. Он развил идею корреляционного иммунитета на комбинирующие узлы с памятью и показал, что используя всего один бит памяти можно достичь корреляционного иммунитета максимального порядка в независимости от линейной сложности (см. Раздел 5.1.3). После этого было предложено несколько комбинирующих криптосхем с одним битом памяти, например, генератор-сумматор Рюппеля [333], схема Мэсси-Рюппеля [240], "последовательности универсальной логики" Доусона и Гольдбурга [92].

Майер и Штаффельбах [257] в общем виде исследовали данную схему с точки зрения побитовой корреляции (см. Раздел 7.2). В частности, они рассмотрели корреляцию между каждым битом выхода и линейными функциями от последовательных входов, получив соответствующую сумму квадратов корреляционных коэффициентов и развив, таким образом, свой более ранний результат для комбинирующих узлов без памяти [255]. Кроме этого, они ввели концепцию корреляционной обусловленности на выход.

Более общий случай равномерно движущихся регистров, комбинируемых с помощью произвольной функции с M битами памяти, был исследован в работах Голича [141] и [149] (см. Раздел 7.3). Он показал, что для такой общей схемы существует линейная функция от самое большее $M + 1$ последовательных выходных бит и линейная функция от самое большее $M + 1$ последовательных битовых векторов входа, которые порождают скоррелированные двоичные последовательности. Для отыскания пар таких функций разработана эффективная процедура, построенная на основе аппроксимации булевой функции с памятью при помощи линейной последовательной схемы. Для случая, когда регистры сдвига имеют попарно взаимно-простые полиномы обратной связи, показано, как получать скоррелированные линейные функции от выхода и от соответствующих отдельных входов. Из этого следует, что всякая такая схема с памятью

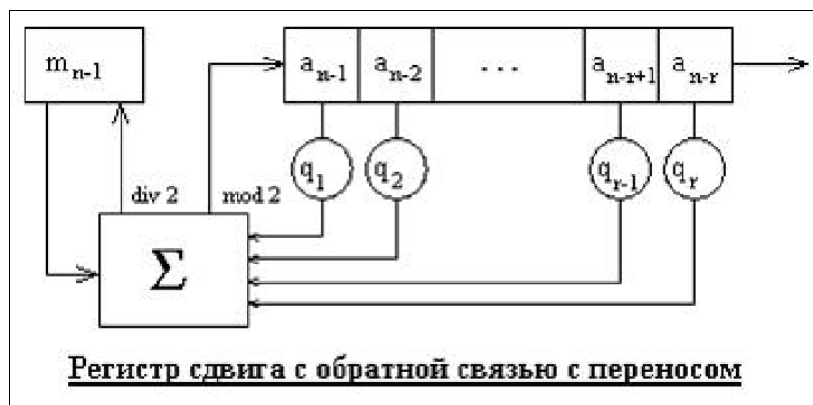
имеет корреляционный иммунитет нулевого порядка. Но в то же время, в отличие от комбинирующих узлов без памяти, может случиться так, что каждая линейная функция от входа, коррелирующая с выходом, будет на самом деле тождественно равна нулю, а это делает корреляционную атаку невозможной. Отмечено, что полное восстановление начального состояния возможно лишь тогда, когда полином, соответствующий входной линейной функции, взаимно-прост с полиномом обратной связи регистра сдвига. Если же полином регистра делит полином линейной функции, то никакое восстановление невозможно. В случае, когда найдена подходящая пара скоррелированных линейных функций от входа и выхода, становится возможной та же самая быстрая корреляционная атака, что и для функций без памяти (см. Раздел 4.3). Получено свидетельство, что в общем случае здесь вероятность шума ближе к $1/2$, чем в схемах без памяти, то есть данные конструкции более стойкие, особенно при больших значениях M . Подводя же итог исследованию, можно резюмировать, что криптоаналитическая техника аппроксимации линейной последовательной схемой дает следующие критерии стойкости комбинирующих криптогенераторов с памятью: большое расстояние до аффинных функций для сбалансированной функции выхода и для всех функций-компонент внутренней функции следующего состояния, а также хорошо известный рецепт не использовать низковесовые полиномы обратной связи [142].

Наглядной демонстрацией практической применимости криптоаналитической техники Голича для вскрытия комбинирующих узлов с памятью стала работа коллектива авторов из австралийского университета Квинслэнда [342], представленная в августе 1997 года на "Семинаре по избранным областям криптографии" SAC '97. В этой работе описана систематическая процедура для вскрытия криптосистем поточного шифрования, состоящая из четырех этапов: (1) выявление скоррелированных линейного входного и выходного преобразований с максимально возможным или относительно большим корреляционным коэффициентом; (2) вычисление низковесовых полиномиальных кратных на основе выявленного входного линейного преобразования; (3) применение итерационного алгоритма исправления ошибок к линейному преобразованию имеющейся шифрпоследовательности; (4) решение нескольких систем линейных уравнений для определения начальных состояний входных регистров сдвига. Данная криптоаналитическая процедура успешно применена для вскрытия трех известных поточных шифров: генератора-сумматора с тремя и пятью входами; нелинейного фильтр-генератора и генератора-мультиплексора.

7.1.2 Схемы на регистрах сдвига с операцией переноса

В течение 90-х годов два американских алгебраиста-криптографа Эндрю Клаппер и Марк Горецки разрабатывают теорию новой и очень простой архитектуры для генерации гаммы на основе регистров сдвига, которую они называли *регистры сдвига с "обратной связью с переносом"* (PCOSP) [189] [190] [192] [196] (см. Раздел 7.4).

PCOSP - это регистр сдвига, имеющий небольшое количество добавочной памяти. В своей простейшей форме ячейки регистра заполняют биты 0 и 1, а память содержит неотрицательное целое число.



Содержимое ячеек с точками съема прибавляется как целые числа к содержимому памяти для формирования суммы σ . Бит четности ($\sigma \bmod 2$) суммы σ в качестве обратной связи поступает на первую ячейку регистра, а старшие биты ($\lfloor \sigma / 2 \rfloor$) используются для образования нового значения памяти.

Как оказалось, для генерируемых РСОСП последовательностей характерны многие важные свойства, присущие линейным рекуррентным (РСЛОС-) последовательностям. Но для анализа РСОСП-последовательностей привлечен совершенно иной математический инструментарий: вместо арифметики над конечными полями Клаппер и Горецки используют арифметику 2-адических чисел. Как сообщают авторы, их основные результаты оказалось возможным получить лишь с помощью этой техники.

Алгебраические свойства РСОСП-последовательностей, представлены в виде, аналогичном результатам по исследованию свойств РСЛОС (см. Раздел 2.3.1).

1. В РСОСП длины r отводы ячеек q_1, q_2, \dots, q_r задают *целое число обратной связи*

$$q = q_r 2^r + q_{r-1} 2^{r-1} + \dots + q_1 2 - 1.$$

Период и многие другие свойства РСОСП-последовательности могут быть выражены в терминах теоретико-числовых свойств этого целого числа.

2. Если периодическая последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ получена от РСОСП с целым обратной связи q , и если $\gamma = 2^{-1} \in \mathbb{Z}/(q)$ - мультипликативная инверсия элемента 2 в кольце целых по модулю q , то существует $A \in \mathbb{Z}/(q)$ такое, что для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$a_i = (A \gamma^i \pmod{q}) \pmod{2}.$$

3. Всякая бесконечная последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ может быть идентифицирована с помощью формального степенного ряда $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$, являющегося элементом кольца 2-адических чисел \mathbb{Z}_2 . Последовательность \mathbf{a} в конечном счете периодична тогда и только тогда, когда 2-адическое число α является рациональным, то есть если существуют такие целые r и q , что

$$\alpha = r/q \in \mathbb{Z}_2.$$

В этом случае знаменатель q - это целое обратной связи для РСОСП, порождающего периодическую часть последовательности \mathbf{a} . Последовательность \mathbf{a} строго периодична \Leftrightarrow когда $\alpha < 0$ и $|r| < |q|$.

4. Размер наименьшего РСОСП, порождающего заданную периодическую последовательность \mathbf{a} назван *2-адическим размахом \mathbf{a}* . Такой регистр сдвига (минимального размера) может быть найден эффективным способом с использованием теории 2-адической аппроксимации. Построенный Клаппером-Горецки алгоритм оптимален в обоих смыслах: (а) он определяет наименьший РСОСП, выход которого совпадает с \mathbf{a} ; (б) он делает это на основе знания всего $2M + 2\log(M)$ бит последовательности (где M обозначает 2-адический размах \mathbf{a}). Хотя этот алгоритм построен на основе теории Де Вегера об аппроксимационных решетках, он отличается от алгоритма Де Вегера тем, что является *адаптивным*: каждый раз, когда определен новый бит (например, при атаке с открытым текстом), он используется для быстрого обновления определенного на предыдущем шаге РСОСП. Таким образом, количество бит не требуется знать заранее.

5. Рассмотрим схему сумматора, предложенного Мэсси и Рюппелем [240], в котором две бесконечные периодические последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ и $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ складываются с помощью операции *переноса*. Результирующая последовательность $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ задается сложением $\gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{Z}_2$ в кольце 2-адических целых (где $\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} c_i 2^i$). Доказано, что 2-адический размах последовательности \mathbf{c} аппроксимированно ограничен суммой 2-адических размахов последовательностей \mathbf{a} и \mathbf{b} .

6. По определению, *l-последовательность* - это РСОСП-последовательность максимально возможного периода $T = q - 1$ (где q - целое обратной связи РСОСП). Такие l -последовательности генерируются РСОСП с целыми обратной связи q , для которых 2 является примитивным корнем. Отдельный период l -последовательности - это циклический сдвиг последовательности, образованной *реверсированием* (обращением) отдельного периода в двоичном разложении дроби $1/q$. Такие последовательности изучаются еще со времен Гаусса и имеют примечательные вероятностные и корреляционные свойства, параллельные свойствам m -последовательностей.

Важным результатом с криптоаналитической точки зрения стал разработанный на данном базисе метод атаки криптосхемы сумматора. Хотя известно, что линейный размах результирующей последовательности \mathbf{c} равен произведению линейных размахов \mathbf{a} и \mathbf{b} , но, с другой стороны, из свойства (5) следует, что 2-адический размах \mathbf{c} равен лишь сумме 2-адических размахов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Более того, алгоритм рациональной аппроксимации (4) отыскивает эквивалентный РСОСП, который генерирует последовательность \mathbf{c} всего по (примерно) $2 \cdot \text{span}_2(\mathbf{c})$ битам.

Самый же примечательный результат - это то, что последовательности генерируемые на основе РСОСП-архитектуры в принципе поддаются строгому анализу. В данной связи Брюс Шнайер в своей знаменитой книге "Прикладная криптография" [346]

отмечает, что теперь количество известных криптосхем поточного шифрования на основе линейных регистров можно не только удвоить, заменяя РСЛОС на РСОСП, но и создавать новые схемы, комбинируя те и другие регистры друг с другом.

7.1.3 Схемы с неравномерным движением и памятью [142]

Рассмотрим теперь наиболее общий случай - неравномерно движущиеся регистры сдвига, выход которых комбинируется функцией с памятью. Главный вопрос - можно ли и к таким схемам подобрать корреляционные методы вскрытия типа "разделяй-и-вскрывай". Некоторый шаг в этом направлении предприняли Петрович и Голич в работе [299], где для того, чтобы справиться с памятью, введено специальное *расстояние ограниченного редактирования* (ROP) между подпоследовательностями типа "много-в-один". Опишем вкратце основные идеи. Редактирующее преобразование из множества входных подпоследовательностей в выходную подпоследовательность задается таким образом, что сначала удаляют символы из входных последовательностей, сокращая их таким образом до подпоследовательностей одинаковой длины, затем функцией с памятью преобразуют полученные подпоследовательности в скомбинированную выходную последовательность, и, наконец, в этой последовательности заменяют определенные символы для того, чтобы получить заданную гамму выхода. Расстояние ограниченного редактирования (ROP) определяется как минимальная сумма элементарных расстояний, связанных с редактирующими операциями удаления и замены, требуемыми для преобразования входных подпоследовательностей в выходную, в условиях заданных ограничений на максимальное количество последовательных удалений в каждой из входных подпоследовательностей. Эффективное вычисление ROP в случае без памяти можно строить на основе частично ограниченного расстояния редактирования $W(e_1, \dots, e_K, s)$ как ROP между K входными подпоследовательностями длин $e_i + s$, $1 \leq i \leq K$, и префиксом выходной последовательности длины s (см. [140]). В частности, показано, что $W(e_1, \dots, e_K, s)$ можно вычислять рекурсивно. Но в тех случаях, когда комбинирующая функция имеет память, это уже невозможно. Эта проблема может быть решена введением нового частично ограниченного расстояния редактирования $W(S, e_1, \dots, e_K, s)$, где переменная S представляет состояние памяти, порожденное во время последней замены [299].

Кратко поясним, каким образом так определенное ROP можно использовать для корреляционной атаки "разделяй-и-вскрывай". Отметим, что в комбинирующем узле с памятью функции выхода и перехода в следующее состояние всегда можно представить в виде

$$y_t = f(\underline{s}'_t, \underline{x}'_t) + \varepsilon(\underline{s}_t, \underline{x}_t), \quad t \geq 0$$

$$\underline{s}'_{t+1} = G'(\underline{s}'_t, \underline{x}'_t), \quad t \geq 0$$

где \underline{x}'_t - это субвектор входного вектора \underline{x}_t в момент времени t , \underline{s}'_t - это субвектор вектора состояния \underline{s}_t в момент времени t , y_t - это двоичный выход в момент времени t , а ε - несбалансированная булева функция. В действительности это означает, что выходная последовательность скоррелирована с последовательностью, порождаемой редуцированным комбинирующим узлом с памятью, функции выхода и перехода в следующее состояние равны f' и G' , соответственно. Легко увидеть, что подходящим

образом определенное РОР можно использовать для корреляционной атаки на последовательности от регистров сдвига, порождающих x'_t . Отметим, что даже если размерности у x'_t и x_t и у s'_t и s_t , соответственно, равны, то все еще имеется возможность для атаки "разделяй-и-вскрывай" относительно начальных заполнений регистров сдвига независимо от начальных состояний генераторов управления движением. В этом случае ε равняется нулю и нет редукции комбинирующего узла с памятью. Важно отметить, что рекурсивное вычисление $W(S, e_1, \dots, e_K, s)$ экспоненциально зависит от количества редуцированных бит памяти. Это следует принимать во внимание при оценке затрат на атаку. Соответственно, размер памяти оказывается важным параметром стойкости. Еще один следующий отсюда важный критерий - функция с памятью не должна иметь свойства редукции.

Подводя итог своим исследованиям в данной области, Йован Голич приходит к заключению [142], что в настоящее время проблема построения быстрой корреляционной атаки на криптосхемы с неравномерно движущимися регистрами, комбинируемыми функцией с памятью, представляется неразрешимой. Похоже, эти схемы обладают иммунитетом к такого рода атакам. Более того, хорошим способом для дальнейшего повышения их стойкости может стать использование неавтономных регистров сдвига с переменным движением.

7.2 Корреляционные свойства комбинирующих узлов с 1 битом памяти

Известно, что в комбинирующих узлах без памяти выходная последовательность имеет корреляцию с суммами определенных РСЛОС-последовательностей, корреляционные коэффициенты которых c_i удовлетворяют равенству $\sum_i c_i^2 = 1$ [255]. В 1990 году Вилли Майер и Отмар Штаффельбах доказали, что аналогичное соотношение выполняется также и для комбинирующих узлов с памятью [256].

Кроме того, в этой же работе показано, что если корреляционные вероятности обусловлены дополнительной информацией, например, о значениях бит в известном фрагменте выходной гаммы, то появляется новая или еще более сильная корреляция. Данный факт продемонстрирован на примере сумматора из двух РСЛОС, где такая корреляция позволяет строить криптоаналитическую атаку по известному открытому тексту. Приведен соответствующий алгоритм вскрытия начального заполнения регистров.

7.2.1 Базовая схема сумматора

Сумматор был рассмотрен Рюппелем в [333] как основной пример комбинирующего узла с памятью, предназначенного для генерации криптографически сильных двоичных последовательностей на основе заданных (криптографически слабых) последовательностей. Схема построена на основе целочисленного сложения, которое при рассмотрении над $GF(2)$ задает нелинейную функцию с памятью, корреляционный иммунитет которой максимален.

Для описания этой конструкции рассмотрим две двоичные последовательности $A = (a_0, a_1, \dots)$ и $B = (b_0, b_1, \dots)$. Для каждого n первые n цифр рассматриваются как двоичное представление целого числа, то есть $a = a_n \cdot 2^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$ и $b = b_n \cdot 2^{n-1} + \dots + b_1 \cdot 2 + b_0$. Тогда целочисленная сумма $z = a + b$ задает первые n цифр результирующей

последовательности $Z = (z_0, z_1, \dots)$. Если A и B - полубесконечные последовательности, то и Z определяется как полубесконечная последовательность. Цифра z_j рекурсивно вычисляется с помощью соотношений

$$z_j = f_0(a_j, b_j, \sigma_{j-1}) = a_j + b_j + \sigma_{j-1}$$

$$\sigma_j = f_1(a_j, b_j, \sigma_{j-1}) = a_j b_j + a_j \sigma_{j-1} + b_j \sigma_{j-1},$$

где σ_{j-1} обозначает бит переноса, а $\sigma_1 = 0$. Для этого базового сумматора можно дать явное описание всех корреляций, существующих между его выходом и линейными функциями от входов.

Если A и B полагаются независимыми и равновероятно распределенными последовательностями случайных переменных, то выходная последовательность $Z = (z_0, z_1, \dots)$ также распределена равномерно. Более того, z_j не зависит от a_j, b_j и суммы $a_j + b_j$. Но, с другой стороны, показано, что z_j коррелирует с $a_j + b_j + a_{j-1}$ и $a_j + b_j + b_{j-1}$ с вероятностью

$$p = P(z_j = a_j + b_j + a_{j-1}) = P(z_j = a_j + b_j + b_{j-1}) = 0.75.$$

Это означает, что соответствующий корреляционный коэффициент составляет $c = 2p - 1 = 0.5$. Если же подходить более обобщенно, то доказано, что для каждого $i, 1 \leq i \leq j$, имеется корреляция с $N = 2^{i+1} - 2$ линейными функциями вида

$$s = \sum_{k=j-i}^j \alpha_k a_k + \beta_k b_k,$$

а соответствующие корреляционные коэффициенты c_h удовлетворяют соотношению

$$\sum_{h=1}^N c_h^2 = 1 - \frac{1}{2^i}.$$

Отметим, что правая часть последнего равенства стремится к 1 при $i \rightarrow \infty$. Это означает, что суммарная корреляция для базового сумматора достигает 1, подобно случаю для комбинирующих узлов без памяти. Показано, что этот примечательный факт можно развить и на совершенно общий случай комбинирующих узлов с 1 битом памяти.

7.2.2 Обобщенный комбинирующий узел с 1 битом памяти

Обобщенная конструкция с 1 битом памяти описывается с помощью двух сбалансированных функций f_0 и f_1 следующим образом

$$z_j = f_0(x_{1j}, \dots, x_{nj}, \sigma_{j-1})$$

$$\sigma_j = f_1(x_{1j}, \dots, x_{nj}, \sigma_{j-1}).$$

Здесь σ_j обозначает состояние памяти, а входы $X_m = (x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots)$, $1 \leq m \leq n$, полагаются независимыми и равномерно распределенными последовательностями случайных переменных.

Для того чтобы изучить корреляционные свойства такого комбинирующего узла, исследуются корреляции комбинирующих функций $f_0, f_1: GF(2)^{n+1} \rightarrow GF(2)$ с линейными функциями. Корреляция произвольной функции $f: GF(2)^{n+1} \rightarrow GF(2)$ с линейной функцией $L_w(x) = w \cdot x$ ($w, x \in GF(2)^{n+1}$) вычисляется с помощью преобразования Уолша

$$F(w) = \sum_{x \in GF(2)^{n+1}} f(x) (-1)^{w \cdot x}$$

Здесь, в связи с требованиями преобразования Уолша, все булевы функции рассматриваются со значениями +1 и -1 (то есть $f(x)$ заменяется на $(-1)^{f(x)}$). Тогда корреляция между f и L_w вычисляется как

$$c(f, L_w) = F(w) / 2^{n+1}.$$

Для комбинирующих функций $f_0(x, \sigma)$ и $f_1(x, \sigma)$, $x \in GF(2)^n$, будут различаться корреляции с линейными функциями вида

$$L(x, \sigma) = w \cdot x$$

и

$$L(x, \sigma) = w \cdot x + \sigma.$$

Для функции f_0 соответствующие корреляционные коэффициенты задаются соотношениями $c_0(w) = F_0(w, 0) / 2^{n+1}$ и $c_1(w) = F_0(w, 1) / 2^{n+1}$, где F_0 обозначает преобразование Уолша для f_0 . Для того, чтобы различать корреляции с функциями двух указанных выше видов вводятся обозначения

$$C_0^2 = \sum_{w \in GF(2)^n} c_0(w)^2, \quad C_1^2 = \sum_{w \in GF(2)^n} c_1(w)^2.$$

Аналогичным образом для функции f_1 вводятся $d_0(w) = F_1(w, 0) / 2^{n+1}$ и $d_1(w) = F_1(w, 1) / 2^{n+1}$, и

$$D_0^2 = \sum_{w \in GF(2)^n} d_0(w)^2, \quad D_1^2 = \sum_{w \in GF(2)^n} d_1(w)^2.$$

Тогда по теореме Парсеваля

$$C_0^2 + C_1^2 = 1 \text{ и } D_0^2 + D_1^2 = 1.$$

Для данных рамок доказана теорема, являющаяся главным результатом относительно корреляций в обобщенных комбинирующих узлах с 1 битом памяти.

Теорема. Пусть $1 \leq i \leq j$. Тогда выходная цифра z_j обобщенного комбинирующего узла с одним битом памяти коррелирует с линейными функциями s_1, s_2, \dots, s_N вида

$$s = \sum_{k=j-i}^j \sum_{m=1}^n w_{mk} x_{mk},$$

а соответствующие корреляционные коэффициенты c_h удовлетворяют соотношению

$$\sum_{h=1}^N c_h^2 = C_0^2 + C_1^2 (1 - (D_1^2)^i).$$

Имеется $N = 2^{(i+1)n}$ таких функций s . Данная теорема имеет несколько следствий, важных при разработке схем поточного шифрования.

Прежде всего, отметим, что сумма квадратов корреляционных коэффициентов сходится к 1, за исключением единственного случая $D_0 = 0$, когда предел равен C_0^2 .

Если входные последовательности $X_m = (x_{m0}, x_{m1}, x_{m2}, \dots)$, $1 \leq m \leq n$, порождаются РСЛОС, то корреляция z_j с линейными функциями указанного вида приводит к корреляции суммами РСЛОС-последовательностей. Эти суммы задаются соотношениями $s = \sum_{m=1}^n (\sum_{k=j-i}^j w_{mk} x_{mk})$. Обратим внимание, что для каждого m внутренняя сумма

$s_m = \sum_{k=j-i}^j w_{mk} x_{mk}$ фактически является фазой m -го РСЛОС. Если какая-то определенная из этих s_m исчезает, то становится возможна атака "разделяй-и-вскрывай". Для предотвращения таких подходов к вскрытию в работах [334][255] постулирован *корреляционный иммунитет максимального порядка* (см. Раздел 5.1). Согласно приведенной выше Теореме, комбинирующий узел имеет корреляционный иммунитет максимального порядка, если для каждой линейной функции указанного вида с неисчезающим корреляционным коэффициентом, и для каждого m , $1 \leq m \leq n$, имеется по крайней мере один индекс k с $w_{mk} \neq 0$. Отметим, что это требование совпадает с аналогичным условием для комбинирующих узлов без памяти [255].

7.2.3 Корреляция, обусловленная известным выходом

До сих пор рассматривалась корреляция в независимости от значений выходных бит комбинирующего узла. Но ситуация совершенно различается в тех ситуациях, когда корреляция обусловлена событиями $z_j = 0$ или $z_j = 1$. Это продемонстрировано для базовой схемы сумматора с двумя входами, где знание некоторого фрагмента выходной последовательности может существенно сократить неопределенность относительно бита переноса. Это приводит к корреляции z_j с суммой входов $a_j + b_j$, хотя в среднем z_j и $a_j + b_j$ не скоррелированы.

Показано, что в выходной серии из s последовательных нулей биты переноса имеют тенденцию быть равными 1. Предположим, что $z_{j+1} = z_{j+2} = \dots = z_{j+s} = 0$. Тогда в конце данной серии бит переноса σ_{j+s} равен 1 с вероятностью по меньшей мере $1 - 2^{-s}$. В более же общем виде доказано, что для каждого t , $1 \leq t \leq s$, условная вероятность удовлетворяет соотношению $P(\sigma_{j+s} = \sigma_{j+s-1} = \dots = \sigma_{j+t} = 1) = 1 - 2^{-t}$. Аналогично, в выходной серии из s

последовательных единиц биты переноса имеют тенденцию быть равными 0. Следствие этого наблюдения сформулировано в следующее утверждение.

Утверждение. (1) *Предположим, что выход базового сумматора удовлетворяет соотношению $z_{j+1} = z_{j+2} = \dots = z_{j+s} = 0$, а $z_{j+s+1} = 1$. Тогда для каждого t , $1 \leq t \leq s$, следующие $s - t + 2$ уравнений*

$$\begin{aligned} z_{j+t+1} &= a_{j+t+1} + b_{j+t+1} + 1 = 0 \\ z_{j+t+2} &= a_{j+t+2} + b_{j+t+2} + 1 = 0 \\ &\dots \\ z_{j+s+1} &= a_{j+s+1} + b_{j+s+1} + 1 = 1 \\ z_{j+s+2} &= a_{j+s+2} + b_{j+s+2} + a_{j+s+1} \end{aligned}$$

выполняются одновременно с вероятностью по крайней мере $1 - 2^{-t}$.

(2) *Предположим, что выход базового сумматора удовлетворяет соотношению $z_{j+1} = z_{j+2} = \dots = z_{j+s} = 1$, а $z_{j+s+1} = 0$. Тогда для каждого t , $1 \leq t \leq s$, следующие $s - t + 2$ уравнений*

$$\begin{aligned} z_{j+t+1} &= a_{j+t+1} + b_{j+t+1} + 1 = 1 \\ z_{j+t+2} &= a_{j+t+2} + b_{j+t+2} + 1 = 1 \\ &\dots \\ z_{j+s+1} &= a_{j+s+1} + b_{j+s+1} + 1 = 0 \\ z_{j+s+2} &= a_{j+s+2} + b_{j+s+2} + a_{j+s+1} \end{aligned}$$

выполняются одновременно с вероятностью по крайней мере $1 - 2^{-t}$.

Заметим, что утверждение об одновременном выполнении ряда уравнений с определенной вероятностью значительно сильнее, чем утверждение о том, что эти соотношения выполняются с той же вероятностью по отдельности. Этот факт используется для построения криптоаналитического метода вскрытия, описанного в следующем разделе.

7.2.4 Криптоанализ сумматора с двумя входами

В схеме базового сумматора две входные последовательности, подаваемые на узел сложения, порождаются с помощью РСЛОС. Систему уравнений, приведенную в Утверждении предыдущего раздела, можно использовать в криптоаналитической атаке по известному открытому тексту. Предположим, что в гамме отмечена серия z_{j+1}, \dots, z_{j+s} из последовательных 0 или 1. Тогда, принимая в расчет биты $z_{j+t+1}, \dots, z_{j+s+2}$, строится $(s - t + 2)$ соответствующих уравнений, которые выполняются одновременно с вероятностью по крайней мере $1 - 2^{-t}$. Значение t , являющегося параметром для надежности уравнений, можно подбирать в зависимости от длины известного фрагмента гаммы. Поскольку цифры a_j и b_j в этих уравнениях линейно выражаются в терминах начальных состояний двух РСЛОС, то получается система из $s - t + 2$ линейных уравнений для исходных бит этих регистров. Наша цель - с высочайшей надежностью отыскать

достаточно много таких систем, которые в совокупности образуют систему линейных уравнений для восстановления бит начального состояния регистров.

Пусть N - длина известного фрагмента гаммы, а k - размер ключа (то есть сумма длин РСЛОС). Шифрпоследовательность сканируется на наличие серий из по крайней мере s последовательных 0 или 1. Предположим, что в общей сложности найдено n таких серий. В соответствии с желательной надежностью выбирается параметр t , и для каждой такой серии составляется "блок" из $d = s - t + 2$ уравнений. Таким образом, получается по крайней мере nd уравнений для бит начального заполнения. Предполагается, что $nd > k$, то есть $nd = \alpha k$, где $\alpha > 1$. Для нахождения ключа нужно $m = \lceil k / d \rceil \approx \alpha^{-1} n$ "верных" блоков уравнений. Для того, чтобы найти m таких блоков, поступают следующим образом.

1. Случайно выбрать m из n имеющихся блоков и решить результирующую систему линейных уравнений относительно k неизвестных.
2. Проверить все возможные решения, полученные на шаге 1 на предмет того, порождают ли они известную гамму. Если есть верное решение, то остановиться, в противном случае перейти к шагу 1.

В сложности данного криптоаналитического алгоритма доминирующей величиной является общее количество опробований. Для получения оценки этого количества, заметим, что каждый блок имеет вероятность ρ того, что он неверный, где $\rho \leq 2^{-t}$. Тогда среднее количество необходимых опробований задается величиной, обратной к вероятности q того, что m случайно выбранных блоков будут верными. Оценена эта вероятность для типичной ситуации, когда неверны ρn блоков (для простоты ρn полагается целым числом). Величина q оценена как

$$q = \left(1 - \frac{\rho n}{n}\right) \left(1 - \frac{\rho n}{n-1}\right) \dots \left(1 - \frac{\rho n}{n-(m-1)}\right) > \left(1 - \frac{\rho n}{n-m}\right)^m = \left(1 - \frac{\alpha \rho}{\alpha - 1}\right)^m$$

В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример. Рассмотрим базовый сумматор на двух РСЛОС длиной примерно 200 бит, то есть $k = 400$. Предположим, что имеется $N = 50000$ бит гаммы. Если эта последовательность сканируется на наличие серий, то ожидается в среднем

$$n \approx \frac{N}{2^s}$$

серий длины по крайней мере s . Если выбрать $s = 7$, то получим $n = 390$ серий длины не менее 7. Возьмем $t = 4$. Тогда $d = s - t + 2 = 5$ - длина блока, а $\rho = 2^{-4} = 1/16$ - вероятность того, что блок неверный. Кроме того, $m = k/d = 80$ блоков уравнений необходимо для того, чтобы найти ключ. Значение α получаем как $\alpha = n/m = 390/80 = 4.88$. Тогда

$$q > \left(1 - \frac{4.88}{3.88} \cdot \frac{1}{16}\right)^{80} = 0.0014 \quad \text{и} \quad q^{-1} < 699,$$

и, следовательно, менее 700 опробований уже достаточно.

Данный пример демонстрирует, что сумматор с двумя входами слаб к криптоаналитическим подходам даже при значительных длинах регистров и произвольно выбранных точках съема. Следует также отметить, что представленный алгоритм срабатывает и в тех случаях, когда известная гамма имеет несколько (но не очень много) "дыр".

В следующей работе Майера и Штаффельбаха [368] показано, что подобный криптоаналитический подход не срабатывает для сумматора, построенного на основе более двух РСЛОС. Основываясь на полученных результатах анализа, авторы рекомендуют при разработке криптосхем такого типа отдавать предпочтение большему количеству регистров средней длины, нежели меньшему количеству длинных регистров.

7.3 Комбинирующий узел с произвольным числом бит памяти

В 1996 году опубликована большая работа Йована Голича [149], посвященная криптоанализу обобщенной схемы комбинирующего узла с произвольным размером памяти. Исследованы корреляционные свойства таких узлов, обоснованы новые конструктивные критерии, предъявляемые к схемам подобного типа. Разработан эффективный метод *аппроксимации линейной последовательной схемой* для построения линейных функций от входа и выхода со сравнительно большим коэффициентом взаимной корреляции. Проанализирована соответствующая корреляционная атака.

7.3.1 Обобщенный двоичный комбинирующий узел с памятью и корреляционные свойства векторных булевых функций

Обобщенный двоичный комбинирующий узел с M битами памяти и N входами - это неавтономная последовательная схема или машина с конечным числом состояний, задаваемая соотношениями

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= F(X_t, S_t), \quad t \geq 0, \\ y_t &= f(X_t, S_t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где $F: GF(2)^N \times GF(2)^M \rightarrow GF(2)^M$ - векторная булева функция следующего состояния, $f: GF(2)^N \times GF(2)^M \rightarrow GF(2)$ - булева функция выхода, $S_t = (s_{1t}, \dots, s_{Mt})$ - вектор состояния в момент времени t , S_0 - начальное состояние, $X_t = (x_{1t}, \dots, x_{Nt})$ - вектор входа в момент времени t , а y_t - бит выхода в момент t . Обозначения $F(X, S)$ и $f(X, S)$ используются для функций следующего состояния и выхода, соответственно.

При корреляционном анализе рассматривается вероятностная модель, в которой входы подразумеваются взаимно независимыми и сбалансированными (равномерно распределенными) последовательностями двоичных случайных переменных $\{x_{it}\}_{t=0}^{\infty}$, $1 \leq i \leq N$. Для простоты начальное состояние также подразумевается сбалансированной случайной переменной, независимой от всех своих входов. Как обычно, одни и те же обозначения приняты для переменных и их значений. Следовательно, выход $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ - это также последовательность двоичных случайных переменных. Цель работы - исследовать статистические зависимости между последовательностями выхода и входа.

При криптоанализе узлов с памятью полезно изучить корреляционные свойства векторных булевых функций. Пусть $F: GF(2)^{n_1} \times GF(2)^{n_2} \rightarrow GF(2)^m$ обозначает произвольную векторную булеву функцию от $n = n_1 + n_2$ переменных. Для удобства обозначим $Z = F(X, Y)$, где $X \in GF(2)^{n_1}$ и $Y \in GF(2)^{n_2}$. Предполагается, что X и Y - независимые и сбалансированные случайные переменные. Цель - проанализировать статистическую зависимость между случайными переменными Z и X .

Введем обозначения

$$N_{XZ} = \#\{Y: Z = F(X, Y)\}$$

$$N_Z = \sum_{X \in GF(2)^{n_1}} N_{XZ}.$$

Тогда

$$\sum_{Z \in GF(2)^m} N_{XZ} = 2^{n_2}, \quad X \in GF(2)^{n_1}.$$

Понятно, что Z статистически не зависит от $X \Leftrightarrow$ когда $N_{XZ} = 2^{-n_1} N_Z$ для каждого Z и X , и что Z функционально зависит от $X \Leftrightarrow$ когда для каждого X существует значение Z такое, для которого $N_{XZ} = 2^{n_2}$. Для того, чтобы выразить степень статистической зависимости Z от X в промежутке между этими экстремальными значениями, рассмотрим корреляцию линейных функций от выхода с линейными функциями от входа. Пусть скалярное произведение $L_W(X) = W \cdot X$ обозначает линейную функцию от X , задаваемую с помощью $W \in GF(2)^{n_1}$, и пусть $L_V(F) = V \cdot F$ обозначает линейную комбинацию функций-компонент F , задаваемую с помощью $V \in GF(2)^m$. Коэффициент корреляции [255] между булевыми функциями $L_V(F)$ и L_W определяется как

$$c_{VW} = \frac{1}{2^{n-1}} \#\{(X, Y): V \cdot F(X, Y) = W \cdot X\} - 1.$$

Следующая лемма показывает, что суммарная корреляция между рассматриваемыми выходными и входными линейными функциями может быть выражена лишь в терминах чисел N_{XZ} , пропорциональных соответствующим совместным вероятностям.

Лемма 1.

$$C_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{V \neq 0} c_{V0}^2 = \frac{1}{2^m} \sum_Z \left(\frac{N_Z}{2^{n-m}} \right)^2 - 1,$$

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{V \neq 0} \sum_{W \neq 0} c_{VW}^2 = \frac{1}{2^{n_1+m}} \sum_X \sum_Z \left(\frac{N_{XZ}}{2^{n_2-m}} - \frac{N_Z}{2^{n-m}} \right)^2,$$

$$C_2 \stackrel{\text{def}}{=} C_0 + C_1 = \sum_{V \neq 0} \sum_W c_{VW}^2 = \frac{1}{2^{n_1+m}} \sum_X \sum_Z \left(\frac{N_{XZ}}{2^{n_2-m}} \right)^2 - 1.$$

Прямым следствием этой леммы является следующее свойство, охватывающее экстремальные случаи.

Свойство 1. *Корреляционная сумма C_0 равна своему минимальному значению 0 \Leftrightarrow когда F сбалансирована, и равна своему максимальному значению $2^m - 1 \Leftrightarrow$ когда F - константа. Корреляционная сумма C_1 равна своему минимальному значению 0 \Leftrightarrow когда $F(X,Y)$ статистически независима от X , и равна своему максимальному значению $2^m - 1 - C_0$, при заданном C_0 , \Leftrightarrow когда $F(X,Y)$ функционально зависима от X . Корреляционная сумма C_2 равна своему минимальному значению 0 \Leftrightarrow когда $F(X,Y)$ сбалансирована и статистически независима от X , и равна своему максимальному значению $2^m - 1 \Leftrightarrow$ когда $F(X,Y)$ функционально зависима от X .*

По сути дела это означает, что сумма C_1 квадратов корреляционных коэффициентов между всеми нетривиальными (ненулевыми) линейными функциями от $F(X,Y)$ и X , соответственно, является квадратичной мерой статистической зависимости между $F(X,Y)$ и X . С другой стороны, сумма C_0 квадратов корреляционных коэффициентов между всеми нетривиальными линейными функциями от $F(X,Y)$ и константной нулевой функцией является квадратичной мерой неравновероятности в распределении $F(X,Y)$. Хорошо известный результат Майера-Штаффельбаха о сумме квадратов корреляционных коэффициентов для булевых функций - это частный случай выражения для C_2 при $m = 1$ и $n_2 = 0$.

Свойство 2. *Векторная булева функция сбалансирована \Leftrightarrow когда все нетривиальные линейные комбинации ее булевых функций-компонент сбалансированы.*

Свойство 3. *Векторная булева функция $F(X,Y)$ статистически независима от $X \Leftrightarrow$ когда каждая нетривиальная линейная комбинация ее булевых функций-компонент статистически независима от каждой нетривиальной линейной функции от X .*

Свойство 1 дает условия, при которых корреляционные суммы достигают своих максимальных и минимальных значений. В то время как максимальные значения достижимы при любых n_1 , n_2 и m , минимальные значения могут быть недостижимы, если n_2 меньше чем m . Например, сбалансированная векторная булева функция $F(X,Y)$ не может быть сбалансированной при всех X , если $n_2 < m$. Это именно тот случай, который важен

при корреляционном анализе комбинирующих узлов с памятью. В данной ситуации корреляционная сумма C_1 , равная C_2 из-за $C_0 = 0$, с необходимостью превышает нулевое значение. Определено минимально достижимое значение C_2 вместе с условиями, при которых это возможно.

Лемма 2. Пусть $F(X, Y)$ - m -мерная векторная булева функция от n_1 переменных в X и от n_2 переменных в Y . Пусть $n_2 = m - k$, где $0 \leq k \leq m$. Тогда корреляционная сумма C_2 равна своему минимальному значению $2^k - 1 \Leftrightarrow$ когда $F(X, Y)$ инъективная функция от Y для каждого X .

7.3.2 Корреляционные свойства комбинирующих узлов с памятью

Рассматривается обобщенный двоичный комбинирующий узел с M битами памяти и N входами. Пусть, для каждого положительного целого m и каждого $t \geq m - 1$, $y_t^m = (y_t, \dots, y_{t-m+1})$ и $X_t^m = (X_t, \dots, X_{t-m+1})$ обозначают блоки из m последовательных бит выхода и m последовательных двоичных векторов входа к моменту t , соответственно. Из данного в предыдущем разделе определения узла следует, что

$$y_t^m = F_m(X_t^m, S_{t-m+1}), \quad t \geq m - 1,$$

где для каждого $m \geq 1$, F_m - это независимая от времени векторная булева функция $GF(2)^{mN} \times GF(2)^M \rightarrow GF(2)^m$, которую можно выразить в терминах выходной функции f и само-композиции функции следующего состояния F . Для простоты используется обозначение $F_m(X^m, S)$.

На основе установленных свойств векторных булевых функций доказаны две корреляционные теоремы, первая из которых - "о существовании", а вторая задает суммарную корреляцию между выходной и входными последовательностями узла с памятью.

Теорема 1. Пусть в двоичном комбинирующем узле с M битами памяти и N входами функция следующего состояния сбалансирована. Тогда для любого $m \geq 1$, любой линейной функции L_v от m двоичных переменных и любой линейной функции L_w от N - m двоичных переменных, коэффициент корреляции между линейными функциями $L_v(y_t^m)$ от самое большее m последовательных выходных бит и $L_w(X_t^m)$ от самое большее m последовательных входных векторов будет один и тот же для каждого $t \geq m - 1$. Для любого $m \geq 1$, если корреляционный коэффициент ненулевой, а L_v вырождена в первой переменной, то L_w должна быть вырожденной в первых N переменных. Если выходная последовательность сбалансирована и независима, то для $m = M + 1$ имеются линейная функция L_v , невырожденная в первой переменной, и нетривиальная линейная функция L_w такие, что соответствующий корреляционный коэффициент отличается от нуля. В частном случае, когда выходная функция $f(X, S)$ сбалансирована для каждого S , если корреляционный коэффициент ненулевой, а L_v невырождена в первой переменной, то L_w должна быть невырожденной по крайней мере в одной из первых N переменных.

Теорема 2. Пусть в двоичном комбинирующем узле с M битами памяти и N входами функция следующего состояния сбалансирована. Тогда для любого $t \geq 1$, сумма $C(t)$ квадратов корреляционных коэффициентов между всеми нетривиальными линейными функциями от t последовательных выходных бит y_i^m и всеми линейными функциями от t последовательных входных векторов X_i^m будет одна и та же для каждого $t \geq 1$ и удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \underline{C}(t) &\leq C(t) \leq \overline{C}(t), \quad t \geq 1, \\ \underline{C}(t) &= \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq M, \\ 2^{m-M} - 1, & t \geq M + 1, \end{cases} \\ \overline{C}(t) &= 2^s - 1, \quad t \geq 1. \end{aligned}$$

Минимальное значение $\underline{C}(t)$ достигается при всех $t \geq 1 \Leftrightarrow$ когда для любого $t \geq t - 1$ M последовательных выходных бит y_i^M сбалансированы и статистически независимы от M последовательных входных векторов X_i^M , то есть \Leftrightarrow когда $F_M(X^M, S)$ сбалансированная функция от S при любом X^M . Максимальное значение $\overline{C}(t)$ достигается для любого $t \geq 1 \Leftrightarrow$ когда выходная функция вырождена при всех значениях переменных состояния.

Следствие. Если выходная последовательность сбалансирована и независима, то Теорема 2 выполняется для суммы квадратов коэффициентов корреляции между всеми нетривиальными линейными функциями от t последовательных выходов и всеми нетривиальными линейными функциями от соответствующих t последовательных входов. Если выходная последовательность статистически независима от входных последовательностей, то есть, если вероятностное распределение множества всех достижимых (максимум 2^M) выходных последовательностей одно и то же для всех входных последовательностей, то Теорема 2 выполняется для суммы квадратов коэффициентов корреляции между всеми нетривиальными линейными функциями от t последовательных выходов и константной нулевой функцией.

Теорема 2 вместе со Следствием - это обобщение результата, полученного в [255] для суммарной корреляции в комбинирующих узлах без памяти. В отличие от схем без памяти, суммарная корреляция в узлах с памятью оказывается зависящей от выбора функций выхода и следующего состояния. Ее значение находится между $2^{m-M} - 1$ и $2^m - 1$ и поделено среди $(2^m - 1)2^{mN}$ пар выходных и входных линейных функций для каждого значения $t > M$. В частном случае, когда $M = 1$ и $t = 2$ суммарная корреляция не меньше единицы и не больше трех, и обе границы достижимы, что дополняет анализ, проведенный в [257]. Соответственно, максимальное абсолютное значение корреляционных коэффициентов не может быть меньше $2^{-(mN + M)/2}$ для каждого $t > M$, что имеет отношение к равновероятному распределению. Наибольшая нижняя граница достигается при $t = M+1$, когда минимум корреляционной суммы равен 1, и равняется в свою очередь $2^{-(MN + M + N)/2}$. Для комбинирующего узла без памяти и с тем же количеством входов эта граница равна $2^{-N/2}$. Потенциальное преимущество узлов с памятью оказывается существенным и может проявляться, когда распределение корреляции среди всех

возможных пар линейных функций примерно равномерно. Установлено, что даже при очень небольшом количестве входов N , что достаточно характерно для высокоскоростных приложений поточного шифрования на основе входных РСЛОС-последовательностей, стойкость комбинирующих узлов с памятью к корреляционным атакам может быть весьма значительна, если размер памяти M не очень мал.

Еще один интересный конструктивный критерий - это необходимое и достаточное условие для минимального значения суммарной корреляции, вытекающее из Теоремы 2. (Хотя красивая и общая формулировка данного условия в терминах функций выхода и следующего состояния - это пока открытая проблема). Необходимое условие, которое должно выполняться, - выходная функция $f(X,S)$ сбалансирована для каждого X . Отметим, что в этом случае нет почленной корреляции между выходной и входными последовательностями. Данное условие является также и достаточным при $M = 1$. В этом случае выходная функция должна иметь вид $f(X,s) = s + g(X)$. Если также потребована сбалансированность выходной функции для каждого s , что является достаточным условием для сбалансированности и независимости выходной последовательности, то функция $g(X)$ должна быть сбалансированной. Это условие удовлетворяется для предложенного в [333] комбинирующего узла с 1 битом памяти и корреляционным иммунитетом максимального порядка, где $g(X)$ линейная. Что же касается функции следующего состояния при $M = 1$, то единственное желательное свойство - чтобы она была сбалансирована. В общем же случае при $M > 1$ подходящим выглядит выбор такой сбалансированной функции следующего состояния $F(X,S)$, которая также является сбалансированной и для каждого S .

7.3.3 Метод аппроксимации линейной последовательной схемой

В данном разделе описана так называемая *аппроксимация линейной последовательной схемой* (АЛПС) для двоичных комбинирующих узлов с памятью. Это практическая процедура, позволяющая с высокой вероятностью находить пары взаимно скоррелированных линейных функций (от самое большее $M + 1$ последовательных выходных бит и самое большее $M + 1$ последовательных векторов входа) со сравнительно большими коэффициентами корреляции. Метод АЛПС состоит в задании и решении линейной последовательной схемы (ЛПС), которая аппроксимирует комбинирующий узел с памятью. Эта ЛПС имеет добавочные несбалансированные входы и основана на линейных аппроксимациях функции выхода и всех компонент функции следующего состояния. Линейная аппроксимация булевой функции - это любая линейная функция, с которой заданная булева функция скоррелирована. Описанный метод применим к произвольным комбинирующим узлам с памятью без ограничений на функции выхода и следующего состояния.

Сначала отыскиваются линейные аппроксимации функции выхода f и каждой из функций-компонент функции следующего состояния F . Это эквивалентно выражению каждой из этих $M+1$ функций в виде суммы линейной функции и несбалансированной функции. Если подлежащая декомпозиции функция уже несбалансирована, то можно выбрать константно-нулевую линейную функцию. Если подлежащая декомпозиции функция статистически независима от некоторого подмножества переменных, то каждая линейная аппроксимация с необходимостью должна задействовать по крайней мере одну из переменных этого подмножества (см. Свойство 3). Основное требование - чтобы

соответствующие корреляционные коэффициенты отличались от нуля. Также желательно, чтобы выбирались линейные аппроксимации с корреляционными коэффициентами, абсолютные значения которых близки к максимальным. Корреляционные коэффициенты можно определять с помощью техники *преобразования Уолша*.

На следующем шаге, получив линейные аппроксимации, в матричной форме записывают базовые уравнения комбинирующего узла с памятью

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= \mathbf{A}S_t + \mathbf{B}X_t + \Delta(X_t, S_t), \quad t \geq 0, \\ y_t &= \mathbf{C}S_t + \mathbf{D}X_t + \varepsilon(X_t, S_t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где векторы рассматриваются как матрицы-столбцы; \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} - двоичные матрицы; а ε и каждый компонент в $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_M)$ - несбалансированные булевы функции, именуемые функциями шума.

Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать $\{\varepsilon(X_t, S_t)\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\delta_i(X_t, S_t)\}_{t=0}^{\infty}$, $1 \leq i \leq M$, в качестве входных последовательностей, так что последние уравнения оказываются задающими неавтономную линейную машину с конечным числом состояний или ЛПС, именуемую АЛПС комбинирующего узла с памятью. Тогда можно решать эту ЛПС с использованием техники *производящих функций (D-преобразований)* (см., например, [131]). В частности, пусть \mathbf{S} , \mathbf{X} , Δ , ε , \mathbf{y} обозначают производящие функции от переменной z для последовательностей $\{S_t\}$, $\{X_t\}$, $\{\Delta(X_t, S_t)\}$, $\{\varepsilon(X_t, S_t)\}$, $\{y_t\}$, соответственно. Тогда уравнения сводятся к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= z\mathbf{A}\mathbf{S} + z\mathbf{B}\mathbf{X} + z\Delta + S_0, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{S} + \mathbf{D}\mathbf{X} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Решение имеет вид

$$\mathbf{y} = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(z\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{B}}{\det(z\mathbf{A} - \mathbf{I})} \right) \mathbf{X} - \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(z\mathbf{A} - \mathbf{I})}{\det(z\mathbf{A} - \mathbf{I})} (z\Delta + S_0) + \varepsilon,$$

где \mathbf{I} - единичная матрица, $\det(z\mathbf{A} - \mathbf{I}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z)$, $\varphi(0) = 1$, - многочлен, обратный к характеристическому многочлену матрицы переходов \mathbf{A} степени, не превышающей ранг \mathbf{A} ($\leq M$); а элементы (присоединенной) матрицы $\operatorname{adj}(z\mathbf{A} - \mathbf{I})$ - это полиномы от z степени не более $M - 1$. Вычислительная сложность для отыскания такого решения составляет $O(M^3(N+1))$. В другом виде решение можно переписать как

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\varphi(z)} \sum_{i=1}^N g_i(z) \mathbf{x}_i + \frac{1}{\varphi(z)} \sum_{j=1}^M h_j(z) (z\delta_j + s_{j0}) + \varepsilon, \quad (1)$$

где \mathbf{x}_i и δ_j обозначают производящие функции для $\{x_{it}\}$ и $\{\delta_j(X_t, S_t)\}$, а степени полиномов $g_i(z)$ и $h_j(z)$ самое большее равны M и $M - 1$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$, соответственно. Полагая $\varphi(z) = \sum_{k=0}^M \varphi_k z^k$, $g_i(z) = \sum_{k=0}^M g_{ik} z^k$ и $h_j(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{jk} z^k$, решение можно преобразовать к виду:

$$\sum_{k=0}^M \varphi_k y_{t-k} = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^M g_{ik} x_{i,t-k} + e(X_t^{M+1}, S_{t-M}), \quad t \geq M, \quad (2)$$

$$e(X_t^{M+1}, S_{t-M}) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{M-1} h_{jk} \delta_j(X_{t-1-k}, S_{t-1-k}) + \sum \varphi_k \varepsilon(X_{t-k}, S_{t-k}), \quad t \geq M, \quad (3)$$

где подразумевается, что вектор состояния S_{t-k} - это функция от $(X_{t-k-1}^{M-k}, S_{t-M})$ для каждого $0 \leq k \leq M - 1$. Выражение (2) относится к тому типу, которые рассматриваются в Теореме 1. Линейные функции входа и выхода в (2) скоррелированы тогда и только тогда, когда функция шума e несбалансирована. Коэффициент корреляции не зависит от времени, если функция следующего состояния сбалансирована. Если это условие не удовлетворяется, то корреляционный коэффициент может зависеть от времени, поскольку от S_t более не требуется сбалансированность для каждого $t \geq 0$. Функция шума e в (3) определена как сумма индивидуальных шумовых функций, которые несбалансированы при условии, что сбалансирована функция следующего состояния. Поскольку от индивидуальных шумовых функций не требуется быть независимыми, в принципе нельзя исключать возможность, что коэффициент корреляции e с константной нулевой функцией равен нулю или очень близок к этому значению. Однако, интуитивно понятно, что такая ситуация в высшей степени маловероятна. Это подтверждает следующий вероятностный аргумент, который можно доказать с помощью техники комбинаторного и асимптотического анализа.

Лемма 4. *Рассмотрим t булевых функций от одного числа n переменных и с коэффициентами корреляции c_i с константной нулевой функцией, $1 \leq i \leq t$. Если эти функции выбраны случайно, равновероятно и независимо, тогда при больших значениях 2^n вероятностное распределение корреляционного коэффициента их суммы асимптотически нормально с математическим ожиданием $\prod_{i=1}^m c_i$ и дисперсией $O(m/2^n)$.*

В рассматриваемом случае индивидуальные шумовые функции можно трактовать как булевы функции от $n = MN + N + M$ переменных в (X_t^{M+1}, S_{t-M}) . Следовательно, за исключением некоторых особых случаев, в общем случае можно с высокой вероятностью ожидать, что общий корреляционный коэффициент очень близок к произведению индивидуальных и, таким образом, отличается от нуля. Соответственно, метод АПЛС не только с высокой вероятностью дает взаимно скоррелированные линейные функции от входа и выхода, но также позволяет оценить значение соответствующего корреляционного коэффициента, используя независимость или другие вероятностные предположения.

Поскольку в идеальном случае хотелось бы получить такие АЛПС, в которых корреляционные коэффициенты по абсолютному значению близки к максимуму, то индивидуальные корреляционные коэффициенты должны быть крупными по величине, а количество шумовых членов в (3) должно быть маленьким. Конечно, эти требования могут противоречить друг другу. Поэтому хорошим подходом будет повторение процедуры АЛПС несколько раз, начиная с наилучших линейных аппроксимаций для функции выхода и компонент функции следующего состояния. Эта процедура может также выполняться для всех возможных линейных аппроксимаций, что представляется

единственным систематическим способом проверить все корреляции, выявленные в процессе применения метода АЛПС. В общем случае имеется самое большее $(M+1)2^{M+N}$ таких линейных аппроксимаций. Однако, в принципе всегда можно проверить все возможные линейные аппроксимации даже при большом M , поскольку в практических реализациях функции выхода и следующего состояния зависят от сравнительно небольшого количества переменных или же составлены из таких булевых функций.

7.3.4 Корреляционная атака

Рассматривается двоичный комбинирующий узел с M битами памяти и N входными последовательностями, порождаемыми РСЛОС. Пусть $\psi_i(z)$ обозначает полином обратной связи, возможно неприводимый или примитивный, для входной последовательности $\{x_{it}\}$, $0 \leq i \leq N$. Подразумевается, что секретный ключ управляет только начальными состояниями регистров, и также, возможно, начальным состоянием памяти. Цель - по имеющемуся фрагменту гаммы восстановить начальное заполнение регистров, основываясь на корреляции между гамм-последовательностью и РСЛОС-последовательностями. Как было показано выше, такая корреляция с необходимостью существует, если выходная шифрпоследовательность сбалансирована и независима.

Пара взаимно-скоррелированных линейных функций от выхода и входа может быть найдена либо тотальным перебором, если MN невелико, либо методом АЛПС, описанным в разделе 7.3.3. Коэффициент корреляции можно вычислить точно, если MN невелико, либо оценить приблизительно с использованием метода АЛПС. Еще одна возможность - получить эмпирическую оценку по имеющейся гамме заданной длины. В любом случае, базисом корреляционной атаки является корреляционное уравнение вида (2) или (1).

Данная атака в принципе может строиться лишь для тех РСЛОС-последовательностей, которые появляются в (2), то есть у которых полином $g_i(z)$ ненулевой. Более точно, восстановление начального состояния возможно лишь для тех РСЛОС-последовательностей, у которых полиномы $\psi_i(z)$ и $g_i(z)$ взаимно просты. В противном случае общие множители обрывают процедуру и полная реконструкция невозможна. В вырожденном случае, когда $\psi_i(z)$ - множитель $g_i(z)$, i -ая РСЛОС-последовательность исчезает из (2). С другой стороны, если полиномы обратной связи не взаимно-просты друг с другом, то полная реконструкция начального состояния невозможна, что естественно, поскольку в этом случае могут существовать эквивалентные секретные ключи.

Для простоты предполагается попарная взаимная простота полиномов обратной связи. Тогда полное восстановление всех соответствующих РСЛОС-последовательностей возможно в том случае, если имеющийся фрагмент гаммы достаточно длинный. Минимально необходимая длина для успешной реконструкции пропорциональна сумме длин задействованных регистров сдвига и обратно пропорциональна квадрату корреляционного коэффициента.

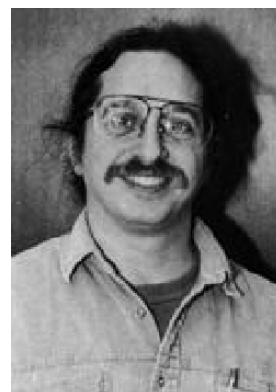
При слепом поиске среди всех возможных начальных состояний эффект "разделяй-и-вскрывай" достигается лишь тогда, когда количество задействованных РСЛОС-последовательностей меньше N . Однако, если коэффициент корреляции достаточно велик, то возможно применение методов быстрой корреляционной атаки на основе алгоритмов итеративного вероятностного декодирования [254](см. Раздел 4.3). Если комбинирующий узел имеет корреляционный иммунитет максимального порядка, то количество тех

РСЛОС-последовательностей в (2), для которых полином $g_i(z)$ ненулевой, всегда равно N , при условии ненулевого коэффициента корреляции. Следует отметить, что даже в этом случае возможен эффект "разделяй-и-вскрывай", если $\psi_i(z)$ делит $g_i(z)$ при некотором i .

В завершение показано, что каждый комбинирующий узел, основанный на РСЛОС, с памятью он или без нее, по своей сути имеет корреляционный иммунитет нулевого порядка. Это не особо удивительно, поскольку сама идея корреляционного иммунитета [333] (Раздел 5.1) сформулирована для сбалансированных и независимых входных последовательностей. Ясно, что каждый такой комбинирующий узел с N входами можно рассматривать как комбинирующий узел с произвольно выбранным единственным входом и расширенной памятью, которая включает в себя все остальные входные РСЛОС. Можно применить корреляционные теоремы из Раздела 7.3.2, которые показывают, что всякая входная последовательность коррелирует с выходом. Конечно, в принципе возможна ситуация, когда каждый полином, задающий входную линейную функцию и коррелирующий с выходом, содержит характеристический полином рассматриваемой РСЛОС-последовательности в качестве множителя. Атака АЛПС на комбинирующий узел с единственным входом может быть построена следующим образом. Сначала отыскивается АЛПС исходного комбинирующего узла с N входами, другими словами, корреляционные уравнения (1) и (2). Выделяется любой вход, эффективно присутствующий в (2). Затем делается умножение всех полиномов в (1) на НОК полиномов обратной связи других входов, также эффективно появившихся в (2). Это вызовет исчезновение всех этих входов из соответствующего уравнения (2), а новая шумовая функция с высокой вероятностью останется несбалансированной. Затем становится возможным восстановление выбранного РСЛОС, если его полином обратной связи взаимно прост со всеми остальными.

7.4 Регистры сдвига с переносом и 2-адический анализ

Начиная с 1993 года два американских алгебраиста Эндрю Клаппер (Университет Кентукки) и Марк Горецки (Принстонский институт передовых исследований) разрабатывают совершенно самостоятельное направление в теории систем поточного шифрования - 2-адический анализ регистров сдвига с переносом. Нельзя не отметить, что их работа - это практически первый серьезный вклад американской академической криптографии в анализ поточных шифров (не принимая в расчет частные криптосхемы), поскольку с момента опубликования DES-алгоритма среди шифрсистем с секретным ключом университетских криптографов США традиционно интересовали только блочные шифры.



Эндрю Клаппер

За несколько последних лет Клаппер и Горецки опубликовали значительный ряд работ ([189] [190] [191] [192] [193] [195] [196]), в которых исследованы вопросы теории, криптоанализа и реализации регистров сдвига с обратной связью и операцией переноса (РСОСП). Эта в целом новая элементная база систем поточного шифрования

анализируется с позиций математического аппарата 2-адических чисел, что позволило авторам установить множество параллелей с теорией линейных регистров сдвига. Полученные Клаппером и Горецки результаты вызвали большой интерес не только в кругах академического криптографического сообщества, но и, насколько можно судить, в спецслужбах. Так, последние их работы выполнены при финансовой поддержке АНБ США.

Настоящий раздел построен главным образом на основе обобщающей работы 1997 года [196].

7.4.1 Обзор 2-адических чисел

В данном разделе вкратце рассмотрены некоторые базовые факты относительно 2-адических чисел, заинтересованный читатель может найти массу дополнительной информации в соответствующей литературе, например [112] [199] [197].

2-адическое число - это формальный степенной ряд $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$, где $a_i \in \{0,1\}$. Такой степенной ряд не сходится в обычном смысле, но тем не менее с ним можно манипулировать как с формальным объектом. Множество всех таких степенных рядов образует кольцо 2-адических чисел \mathbb{Z}_2 . Главное отличие кольца \mathbb{Z}_2 и кольца $\mathbb{Z}/(2)[[X]]$ формальных степенных рядов от X в том, что сложение в \mathbb{Z}_2 выполняется "переносом" бит переполнения в члены старшего порядка, так что $2^i + 2^i = 2^{i+1}$. Умножение задается сдвигом и сложением. С этими операциями \mathbb{Z}_2 становится кольцом с аддитивной единицей 0 и мультипликативной единицей $1 = 1 \cdot 2^0$. (Некоторых читателей может сбивать использование степенных рядов от 2, поэтому вместо 2 иногда используют некий неопределенный Y и правило $Y^i + Y^i = Y^{i+1}$. Но использование 2 вместо Y облегчает многие вычисления, а также сравнения между 2-адическими числами и обычными целыми.)

Первый удивительный факт - это то, что число -1 представляется как

$$-1 = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots,$$

в чем можно убедиться прибавлением 1 к обеим частям равенства. Оказывается, что \mathbb{Z}_2 содержит *все* целые числа. Отрицательное целое $-q$ связывают с произведением

$$-q = (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots)(q_0 + q_1 2 + \dots + q_r 2^r).$$

Включение $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ совместимо со сложением и умножением. Для умножения на -1 имеется формула, значительно более простая, чем приведенная выше. Если

$$\alpha = 2^r (1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i),$$

то

$$-\alpha = 2^r (1 + \sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i 2^i),$$

где \bar{a}_i обозначает бит дополнения (или комплементарный бит). Для проверки этого достаточно убедиться, что $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Другими же словами, битовая последовательность для $\bar{\alpha}$ получается сохранением начальной подпоследовательности из 0 и первого ненулевого бита, с последующим комплементарным дополнением всех остальных бит.

Среди целых чисел только +1 и -1 имеют целочисленные обратные элементы (инверсии). В \mathbb{Z}_2 , однако, любой формальный степенной ряд

$$\alpha = 1 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \dots,$$

который начинается с 1, имеет (мультипликативную) инверсию

$$\alpha^{-1} = 1 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + \dots,$$

что можно проверить с помощью длинного деления. В частности, всякое нечетное целое $q \in \mathbb{Z}$ имеет в \mathbb{Z}_2 единственный обратный элемент. Следовательно, кольцо \mathbb{Z}_2 содержит всякое рациональное число p/q , при условии, что q нечетное. В явном виде это сформулировано в виде следующего утверждения.

Теорема 1. *Имеется взаимно-однозначное соответствие между рациональными числами $\alpha = p/q$ (где q нечетно) и в конечном счете периодическими двоичными последовательностями \mathbf{a} , которое связывает с каждым таким рациональным числом α битовую последовательность (a_0, a_1, a_2, \dots) его 2-адического разложения. Последовательность \mathbf{a} строго периодична \Leftrightarrow когда $\alpha \leq 0$ и $|\alpha| < 1$.*

Простым следствием данной теоремы является результат, полученный в прошлом веке Гауссом.

Следствие 1. *Если p и q взаимно просты, $-q < p \leq 0$, и q нечетно, то период битовой последовательности для 2-адического разложения числа $\alpha = p/q$ равен*

$$T = \text{ord}_q(2).$$

7.4.2 Регистры сдвига с памятью, их реализация, требования к памяти

Рассмотрим базовые свойства РСОСП, схематическое изображение которого представлено на рисунке в разделе 7.1.2.

Зафиксируем некоторое нечетное положительное целое $q \in \mathbb{Z}$, и пусть $r = \lfloor \log_2(q+1) \rfloor$ (то есть целая часть логарифма). Запишем

$$q + 1 = q_1 2 + q_2 2^2 + \dots + q_r 2^r$$

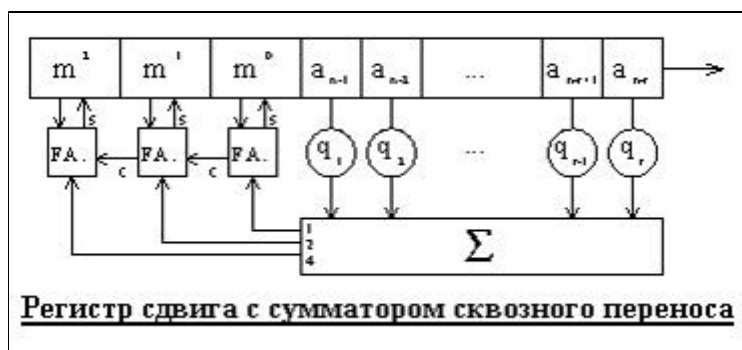
для двоичного представления целого $q + 1$ (так что $q_r = 1$). В данном регистре сдвига используется r ячеек и $\lfloor \log_2 r \rfloor$ дополнительных бит памяти (либо меньше, см. далее). Точки съема для обратной связи задаются соответственно битами $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$.

На рисунке в Разделе 7.1.2 символ Σ обозначает целочисленное сложение. Содержимое регистра в любой заданный момент времени состоит из r бит, обозначенных как $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r+1}, a_{n-r}$. Функционирование регистра описывается следующим алгоритмом:

- A1. Сформировать целочисленную сумму $\sigma_n = \sum_{k=1}^r q_k a_{n-k} + m_{n-1}$.
- A2. Сдвинуть содержимое на шаг вправо, подав на выход самый правый бит a_{n-r} .
- A3. Поместить $a_n = \sigma_n \pmod{2}$ в самую левую ячейку регистра сдвига.
- A4. Заменить целое число в памяти m_{n-1} на $m_n = (\sigma_n - a_n)/2 = \lfloor \sigma_n / 2 \rfloor$.

Число q именуется *целым обратной связи*, поскольку его двоичное разложение дает аналог полиному обратной связи в классической теории линейных регистров сдвига.

Реализация. Быстрая аппаратная реализация такой конструкции может быть упрощена с помощью *сумматора со сквозным переносом* и встраиванием памяти m в регистр так, как показано на рисунке. Здесь отдельные биты памяти обозначены как m^2, m^1, m^0 , хотя на самом деле, конечно, их может быть значительно больше. Символ Σ обозначает целочисленное сложение, а ФА. обозначает *полный сумматор* (сумматор с тремя входами).



Функционирование данного регистра может быть описано заменой шагов (A1)...(A4) на следующие (эквивалентные) шаги:

- V1. Сформировать целочисленную сумму $\sigma'_n = \sum_{k=1}^r q_k a_{n-k}$.
- V2. Прибавить σ'_n к содержимому памяти $m_{n-1} = \sum m^i 2^i$ в сумматоре со сквозным переносом
- V3. Передвинуть его ответ назад в раздел памяти регистра сдвига.
- V4. Сдвинуть весь регистр на один шаг вправо, подав на выход самый правый бит a_{n-r} .

Требования к памяти. Описанная аппаратная реализация генератора имеет ограничение - неотрицательное значение целого числа в памяти m . Однако, в целях

большой общности, все последующие результаты для РСОСП получены в условиях памяти для значений со знаком.

Рассмотрим РСОСП длины r с нечетным положительным целым обратной связи $q = -1 + q_1 2 + q_2 2^2 + \dots + q_r 2^r$. Пусть w обозначает количество ненулевых q_i , $i = 1, \dots, r$, то есть вес Хэмминга числа $q + 1$. Состояние РСОСП - это значение памяти m и содержимое всех ячеек регистра. Будем говорить, что состояние *периодическое*, если оставленный работать РСОСП в конечном счете вернется в то же самое состояние.

Теорема 2. *Если РСОСП находится в периодическом состоянии, то его память находится в пределах $0 \leq m < w$ (что может быть достигнуто, следовательно, использованием не более чем $\lfloor \log_2(w-1) \rfloor + 1$ бит памяти). Если начальная память $m_{n-1} \geq w$, то она будет монотонно уменьшаться и окажется в пределах $0 \leq m < w$ не более чем за $\lfloor \log_2(m_{n-1} - w) \rfloor + r$ шагов. Если начальная память $m_{n-1} < 0$, то она будет монотонно увеличиваться и окажется в пределах $0 \leq m < w$ не более чем за $\lceil \log_2(|m_{n-1}|) \rceil + r$ шагов.*

7.4.3 Анализ РСОСП

В данном разделе арифметика 2-адических целых используется для описания свойств выходной последовательности заданного РСОСП. Положим, зафиксирован некоторый r -элементный РСОСП с целым обратной связи $q = -1 + q_1 2 + q_2 2^2 + \dots + q_r 2^r$, с начальной памятью m_{r-1} и начальным заполнением $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_1, a_0$. Этот регистр будет генерировать бесконечную, в конечном счете периодическую битовую последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, с которой связывается 2-адическое целое $\alpha = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots \in \mathbb{Z}_2$, именуемое 2-адическим значением данного РСОСП (с его начальной загрузкой и начальной памятью). Зададим

$$p = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^i q_j a_{i-j} 2^i - m_{r-1} 2^r,$$

где положено $q_0 = -1$, так чтобы $q = \sum_{i=0}^r q_i 2^i$.

Теорема 3. *В РСОСП с целым обратной связи $q > 0$, начальным значением памяти m_{r-1} и начальным заполнением $a_{r-1}, a_{r-2}, \dots, a_1, a_0$ выходная последовательность \mathbf{a} - это битовая последовательность 2-адического представления рационального числа $\alpha = p/q$, другими словами,*

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}_2.$$

Теоремы 1, 2 и 3 дают следующее:

Следствие 2. Если $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - в конечном счете периодическая двоичная последовательность, то ассоциированное с ней 2-адическое число $\alpha = \sum a_i 2^i$ - это частное от деления двух целых $\alpha = p/q$, а знаменатель q - это целое обратной связи в РСОСП, который порождает последовательность \mathbf{a} . Последовательность \mathbf{a} - строго периодическая \Leftrightarrow когда $p \leq 0$ и $|p| < |q|$. В этом случае значения памяти могут быть взяты из промежутка $0 \leq m < W_H(q + 1)$, где W_H - вес Хэмминга.

Можно указать три простых начальных загрузки, гарантирующих строго периодический выход:

1. Положить $m = 1$, а все $a_j = 0$ (так что $p = -2^r$);
2. Положить $m = 1$, $a_0 = 1$, а все остальные $a_j = 0$ (так что $p = q - 2^{r+1}$);
3. Положить $m = 0$, $a_{r-1} = 1$, а все остальные $a_j = 0$ (так что $p = -2^{r-1}$).

Если $-q < p < 0$ и p взаимно просто с q , то по Следствию 1 период последовательности равен $T = \text{ord}_q(2)$. Если p и q имеют общий множитель, то период равен делителю $\text{ord}_q(2)$. Если $p \geq 0$ или $p \leq -q$, то последовательность имеет начальный префикс перед тем, как попадет на периодическое состояние. Представляется сложной задача определения того, какие положительные дроби $\alpha = p/q$ могут быть представлены с помощью выражения $p = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^i q_j a_{i-j} 2^i - m_{r-1} 2^r$, чтобы m_{r-1} было неотрицательно.

Большинство положительных дробей требуют отрицательных начальных значений памяти.

Начальное заполнение регистра и вырожденные случаи. Предположим, задана дробь $\alpha = p/q$ (где q - нечетное положительное целое). Как определить РСОСП и его начальное заполнение, дающий на выходе последовательность, совпадающую с 2-адическим разложением α ?

Положим $r = \lfloor \log_2(q + 1) \rfloor$. Запишем $q = \sum_{i=0}^r q_i 2^i$ с $q_0 = -1$ и $q_i \in \{0, 1\}$ для $i > 0$. Рассмотрим РСОСП с r ячейками и с целым обратной связи q . Начальная память m_{r-1} и начальная заполнение a_0, a_1, \dots, a_{r-1} связаны с p и q соотношением

$$\alpha = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^k q_i a_{k-i} 2^k - m_{r-1} 2^r}{q} = \frac{p}{q},$$

которое можно решать с использованием следующей процедуры.

- C1.** Вычислить $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{r-1} \cdot 2^{r-1} = p/q \pmod{2^r}$. (Это первые r бит в 2-адическом разложении для p/q .) Вообще говоря, вычисление модульных частных является трудной задачей. Но с другой стороны, когда модуль - степень простого числа, то эффективное вычисление возможно. Это делается напрямую за время $O(r^2)$.

С2. Вычислить $y = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^i q_j a_{i-j} 2^i$, например, с помощью модифицированного алгоритма перемножения.

С3. Вычислить $m = (y - p)/2^r$ за время $O(r)$.

PCOCP с целым обратной связи q , начальным заполнением a_0, a_1, \dots, a_{r-1} и значением m в качестве начальной памяти, будет давать на выходе 2-адическое разложение дроби p/q .

Говорят, что начальное заполнение является *вырожденным*, если 2-адическое число $\alpha = p/q$, соответствующее выходной последовательности, является целым числом (в обычном смысле). В этом случае после начального префикса некоторой длины PCOCP выдает на выходе одни нули (если $\alpha > 0$) либо только единицы (если $\alpha < 0$). Легко увидеть, что существует лишь два возможных вырожденных финальных состояния: (а) $m = 0$ и все $a_i = 0$; (б) $m = W_H(q + 1) - 1$ и все $a_i = 1$. Насколько длинным может быть префикс?

Теорема 4. *Рассмотрим PCOCP с r ячейками и нетривиальным отводом с последней ячейки (то есть $q_r = 1$). Предположим начальное заполнение вырожденное. Если начальная память m положительна, то выход стабилизируется в сплошные "1" после не более $\lceil \log_2(1+m) \rceil$ шагов (и не может стабилизироваться в сплошные "0"). Если начальная память $m < 0$, то выход не может стабилизироваться в сплошные "1": если регистр имеет по меньшей мере две точки съема, то выход стабилизируется в сплошные "0" в пределах $\lceil \log_2(W_H(q+1) + |m| - 1) \rceil$ шагов; если точка съема всего одна, то выход стабилизируется в сплошные "0" в пределах $\lceil \log_2(|m|2^r / (2^r - 1)) \rceil$ шагов. Если начальная память $m=0$, то единственным вырожденным начальным заполнением будет тривиальное, состоящее из всех 0.*

Экспоненциальное представление PCOCP-последовательностей. Одна из наиболее мощных техник для анализа последовательностей от регистров сдвига - это их экспоненциальное представление. Положим $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - периодическая последовательность бит, полученная от РСЛОС длины r с полиномом обратной связи $q(X)$. Если $q(X)$ неприводим, а $\gamma \in GF(2^r)$ - корень $q(X)$ в конечном поле из 2^r элементов, то для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$a_i = Tr(A\gamma^i)$$

для некоторого $A \in GF(2^r)$ (соответствующего выбору начального заполнения регистра сдвига). Здесь $Tr : GF(2^r) \rightarrow GF(2)$ обозначает функцию следа.

Аналогичный результат получен для представления периодических битовых последовательностей, генерируемых PCOCP.

Теорема 5. *Пусть периодическая последовательность $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ получена от PCOCP с целым обратной связи q . Пусть $\gamma = 2^{-1} \in \mathbb{Z}/(q)$ - мультипликативная инверсия элемента 2 в кольце целых по модулю q . Тогда существует $A \in \mathbb{Z}/(q)$ такое, что для всех $i = 0, 1, 2, \dots$*

$$a_i = A\gamma^i \pmod{q} \pmod{2}.$$

Здесь обозначение $(\text{mod } q) \pmod{2}$ означает, что сначала число $A\gamma^i$ следует сократить по модулю q для получения числа от 0 до $q - 1$, а затем это число следует сократить по модулю 2 для получения элемента из $\mathbb{Z}/(2)$. (Если q нечетно, то нет группового гомоморфизма $\mathbb{Z}/(q) \rightarrow \mathbb{Z}/(2)$, поэтому обозначение $(\text{mod } q) \pmod{2}$ требует строгого определения.)

Управление РСОСП другой последовательностью. Рассмотрим эффект управления данным РСОСП с помощью некоторой входной последовательности $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, подаваемой на еще один входной терминал сумматора Σ . Описанная техника анализа с помощью производящих функций может быть легко модифицирована для встраивания этого управляющего сигнала. Исходное соотношение (см. шаг (A1))

$$\sigma_n = m_{n-1} + \sum_{i=1}^r q_i a_{n-i}$$

принимает вид

$$\sigma_n = b_n + m_{n-1} + \sum_{i=1}^r q_i a_{n-i},$$

а соответствующее выражение для α становится таким

$$\alpha = \frac{\beta + x + m_{r-1} 2^r - \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{r-i-1} q_i 2^i a_j 2^j}{1 - \sum_{i=1}^r q_i 2^i},$$

где $\beta = \sum_{i=r}^{\infty} b_i 2^i \in \mathbb{Z}_2$ - 2-адическое число, представляющее сигнал управления \mathbf{b} , а $x = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \dots + a_{r-1} \cdot 2^{r-1}$, целое число, представляющее начальное заполнение регистра. По сути дела, это доказательство следующего утверждения.

Теорема 6. РСОСП с целым обратной связи q , начальным заполнением $a_i = 0$ ($i=0,1,\dots, r-1$) и начальной памятью $m_{r-1} = 0$, который управляется сигналом $\mathbf{b} = b_0, b_1, b_2, \dots$, имеет на выходе последовательность, которая задается 2-адическим целым $\alpha = \beta/q$.

Таким образом, если интерпретировать Z -преобразование как 2-адическое число (а не как формальный степенной ряд), то "функция" преобразования интерпретируется как деление на q . Аналогичный этому результат в теории линейных регистров выглядит следующим образом: РСЛОС с полиномом обратной связи $q(X)$ и начальной загрузкой из нулей, управляемый сигналом $\beta(X) = b_r X^r + b_{r+1} X^{r+1} + \dots$, имеет на выходе последовательность, которая задается коэффициентами разложения в формальный степенной ряд $\beta(X)/q(X)$.

7.4.4 2-адический размах и сложность

Как и в случае с линейным размахом, 2-адический размах последовательности вводится как мера того, насколько большой РСОСП требуется для генерации выходной последовательности. В случае РСЛОС эта мера дается количеством бит в регистре, порождающем последовательность, и совпадает со степенью полинома обратной связи, или, другими словами, знаменателя рациональной функции, дающей степенной ряд, коэффициенты которого - биты данной последовательности.

В 2-адическом случае ситуация несколько сложнее. Количество бит в целом обратной связи совпадает с размером базового регистра, но при этом требуется дополнительное пространство для памяти. Для чисто периодических последовательностей эта дополнительная память невелика (самое большее, логарифм от количества бит базового регистра), и, если бы такие последовательности были главной заботой, то память можно было бы игнорировать. Но *в конечном счете* периодические последовательности могут требовать существенных объемов памяти. Поэтому хотелось бы определить 2-адический размах в конечном счете периодической последовательности как "количество бит регистра + память" такого РСОСП, который выдает на выходе данную последовательность. Но даже к такому определению следует подходить с осторожностью, поскольку значение памяти может расти по мере работы РСОСП.

В данном разделе предложены две естественных концепции: *размах* или span (целое число, соответствующее количеству бит регистра + память) и *сложность* или complexity (действительное число) последовательности \mathbf{a} . Если \mathbf{a} строго периодическая, то количество ячеек в базовом регистре (не считая памяти) равно $\lceil \text{complexity}(\mathbf{a}) \rceil$. Показано, что эти две меры сложности отличаются самое большее на $\log_2(\text{complexity}(\mathbf{a}))$. С математической точки зрения, более естественным числом является сложность, с инженерной точки зрения более естественно выглядит размах.

Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - в конечном счете периодическая битовая последовательность. Положим, что эту последовательность генерирует РСОСП с целым обратной связи $q = -1 + q_1 2 + q_2 2^2 + \dots + q_r 2^r$ и начальной памятью m , и что $q_r = 1$ (то есть что $r = \lfloor \log_2(q+1) \rfloor$). С данным регистром связывается число

$$\lambda = r + \max(\lfloor \log_2(W_H(q+1)) \rfloor + 1, \lfloor \log_2(|m|) \rfloor + 1) + 1$$

бит в РСОСП, где $W_H(q+1)$ обозначает количество ненулевых q_i ($1 \leq i \leq r$).

Определение. 2-адический размах $\lambda_2(\mathbf{a})$ двоичной в конечном счете периодической последовательности $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - это наименьшее значение λ , появляющееся среди всех РСОСП, дающих на выходе последовательность \mathbf{a} .

Пусть $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}_2$ - несократимая дробь, 2-адическое разложение которой соответствует последовательности \mathbf{a} .

Определение. 2-адическая сложность последовательности \mathbf{a} - это действительное число $\phi_2(\mathbf{a}) = \log_2(\Phi(p, q))$, где $\Phi(p, q) = \max(|p|, |q|)$.

Показано, что 2-адические размах и сложность в конечном счете периодической последовательности связаны соотношениями

$$\begin{aligned} |(\lambda_2(\mathbf{a}) - 2) - \phi_2(\mathbf{a})| &\leq \log_2(\phi_2(\mathbf{a})) \\ |(\lambda_2(\mathbf{a}) - 2) - \phi_2(\mathbf{a})| &\leq \log_2(\lambda_2(\mathbf{a}) - 2) + 1. \end{aligned}$$

Принимая во внимание известную схему сумматора Рюппеля и Мэсси [240] [334], в котором целочисленное суммирование используется в качестве нелинейного преобразования при комбинировании последовательностей, доказаны следующие результаты.

Теорема 7. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} - периодические двоичные последовательности. Пусть \mathbf{c} обозначает двоичную последовательность, полученную из \mathbf{a} и \mathbf{b} сложением с переносом. Тогда 2-адическая сложность последовательности \mathbf{c} ограничена следующим соотношением

$$\phi_2(\mathbf{c}) \leq \phi_2(\mathbf{a}) + \phi_2(\mathbf{b}) + 1.$$

2-адический размах ограничен соотношением

$$\lambda_2(\mathbf{c}) \leq \lambda_2(\mathbf{a}) + \lambda_2(\mathbf{b}) + 2\log_2(\lambda_2(\mathbf{a})) + 2\log_2(\lambda_2(\mathbf{b})) + 2.$$

Что представляет из себя 2-адический размах m -последовательности? Хотя ответ на этот вопрос неизвестен, показано, что существуют m -последовательности с максимальным 2-адическим размахом.

Теорема 8. Пусть \mathbf{a} - периодическая последовательность с периодом $T = 2^N - 1$. Предположим, что $2^T - 1$ - простое. Тогда 2-адический размах \mathbf{a} равен $T + 2$.

Из доказательства данной теоремы следует, что 2-адический размах любой периодической последовательности с периодом T больше или равен $\log_2(r+1) + 1$, где r - наименьший простой делитель $2^T - 1$.

7.4.5 Алгоритм рациональной аппроксимации

Предположим, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - в конечном счете периодическая битовая последовательность. Рассматривается проблема отыскания РСОСП, выход которого совпадает с \mathbf{a} . Напомним, что аналогичная проблема для РСЛОС полностью решена алгоритмом Берлекампа-Мэсси (см. Раздел 3.2.2). Этот алгоритм оптимален в двух смыслах: (1) он находит *наименьший* РСЛОС, выход которого совпадает с \mathbf{a} ; (2) он делает это на основе минимальной информации, т.к. для этого требуется всего $2 \cdot \text{span}(\mathbf{a})$ бит последовательности. Более того, этот алгоритм является адаптивным. Каждый раз, когда определяется новый бит (скажем, при атаке с известным открытым текстом), он сразу же может быть использован для обновления определенного до этого РСЛОС. Таким образом, не обязательно знать заранее количество требуемых бит.

Алгоритм Берлекампа-Мэсси эквивалентен отысканию разложения в цепную дробь в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{Z}/(2)[[X]]$ элемента $A(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in \mathbb{Z}/(2)[[X]]$ (см. Раздел 3.2.3, [86] [385]). Естественное предположение о том, что разложение элемента $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i$ в цепную дробь в поле \mathbb{Q}_2 2-адических чисел могло бы предоставить аналогичные свойства оптимальности, к сожалению неверно. На самом деле, разложение в цепную дробь может не отвечать нужным требованиям сходимости [384].

Клаппер и Горецки представили свой аналог алгоритму Берлекампа-Мэсси, удовлетворяющий свойствам оптимальности: он конструирует минимальный РСОСП, порождающий последовательность \mathbf{a} (Теорема 9); и он делает это при знании ее $2M+2\log(M)$ первых бит, где M - 2-адический размах \mathbf{a} (Теорема 10). Этот алгоритм построен на основе теории p -адической аппроксимации и является адаптивной модификацией процедуры, описанной Де Вегером [384].

Для любой пары целых чисел $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ принимается обозначение $\Phi(f) = \max(|f_1|, |f_2|)$. Если $f = (f_1, f_2)$ - пара целых, а $d \in \mathbb{Z}$ - целое число, то пишут $df = (df_1, df_2)$.

Подразумевается, что имеются в наличии последовательные члены a_0, a_1, a_2, \dots двоичной последовательности \mathbf{a} , являющейся 2-адическим разложением числа α . Ставится задача определения такой пары целых чисел (f_1, f_2) , чтобы $\alpha = f_1/f_2$, а $\Phi(f)$ было минимально среди всех таких пар целых.

Алгоритм рациональной аппроксимации

```

begin
подавать на вход  $a_i$  до появления первого ненулевого  $a_{k-1}$ 
 $\alpha = a_{k-1} \cdot 2^{k-1}$ 
 $f = (0, 2)$ 
 $g = (2^{k-1}, 1)$ 
while имеются еще биты do
    подавать на вход новый бит  $a_k$ 
     $\alpha = \alpha + a_k \cdot 2^k$ 
    if  $\alpha \cdot g_2 - g_1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$  then
         $f = 2f$ 
    else if  $\Phi(f) < \Phi(g)$  then
        Пусть  $d$  нечетно и минимизировать  $\Phi(f + dg)$ 
         $\langle g, f \rangle = \langle f + dg, 2g \rangle$ 
    else
        Пусть  $d$  нечетно и минимизировать  $\Phi(g + df)$ 
         $\langle g, f \rangle = \langle g + df, 2f \rangle$ 
    fi fi
     $k = k + 1$ 
od
return  $g$ 
end

```

Примечания к алгоритму. Конгруэнция $\alpha \cdot g_2 - g_1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$ может проверяться без выполнения полного перемножения на каждом этапе, спасением и обновлением

предыдущих значений $\alpha \cdot g_2 - g_1$ и $\alpha f_2 - f_1$. Внутри цикла, во втором и третьем случаях, число d выбирается так, чтобы минимизировать $\Phi(f + xg)$ (соответственно, $\Phi(g + xf)$) среди всех возможных нечетных целых x . Как отмечается в [384], это можно вычислять с помощью деления. Например, предположим, что алгоритм вышел на второй случай: $\alpha \cdot g_2 - g_1 \neq 0 \pmod{2^{k+1}}$ и $\Phi(g) < \Phi(f)$. Если $g_1 \neq \pm g_2$, тогда d находится среди нечетных целых, непосредственно меньше чем или больше чем $(f_1 - f_2)/(g_1 - g_2)$ и $-(f_1 + f_2)/(g_1 + g_2)$. Таким образом, достаточно рассмотреть значения $\Phi(f + dg)$ для этих четырех значений d . Когда $g_1 = \pm g_2$, то одно или другое из этих частных не рассматривается. Если $\Phi(g) > \Phi(f)$, то роли f и g меняются.

Теорема 9. Пусть $g = (g_1, g_2)$ обозначает выход описанного выше алгоритма в ситуации, когда использовано T бит a_i . Тогда: g_2 - нечетное,

$$\alpha \cdot g_2 - g_1 \equiv 0 \pmod{2^T},$$

и для любой другой пары $g' = (g'_1, g'_2)$, удовлетворяющей этим двум условиям

$$\Phi(g') \geq \Phi(g).$$

Теорема 10. Пусть $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ - в конечном счете периодическая последовательность с соответствующим ей 2-адическим числом $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i = p/q$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, а $\text{НОД}(p, q) = 1$. Если использовано $T \geq \lceil 2\phi_2(\mathbf{a}) \rceil + 1$ бит a_i , то описанный выше алгоритм 2-адической рациональной аппроксимации дает на выходе $g = (p, q)$. (То же самое при $T \geq 2\lambda_2(\mathbf{a}) + 2\lceil \log_2(\lambda_2(\mathbf{a})) \rceil$.)

Две эти теоремы демонстрируют оптимальность построенного алгоритма. Сложность данного алгоритма оценена величиной $4DM + O(T^2)$, где D - количество расходимостей, а M - максимальное время, затрачиваемое на перемножение или деление T -битовых целых. Строго же в терминах T это составляет $O(T^2 \log T \log \log T)$. Однако, если последовательность выбрана так, что количество расходимостей невелико, то сложность будет меньше. Так что при разработке конкретной схемы поточного шифрования следует пытаться выбирать такие последовательности, для которых появляется большое число расходимостей.

7.4.6 2-адический криптоанализ сумматора

В комбинирующем узле сумматора [240] (Раздел 7.2) несколько m -последовательностей $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ комбинируются с помощью "сложения с переносом" для получения шифрующей гаммы. Эти последовательности вызвали повышенный интерес исследователей, поскольку обладают свойствами, противостоящими атакам на основе алгоритма Берлекампа-Мэсси. Если образующие генератор последовательности \mathbf{a}_i имеют взаимно простые периоды T_i , то результирующая последовательность имеет линейный размах, близкий периоду выхода $L = T_1 T_2 \dots T_k$.

Однако, при обобщении Теоремы 7 получается, что 2-адическая сложность скомбинированной последовательности не превышает $T_1 + T_2 + \dots + T_k + \log_2(k)$, так что 2-

адический размах не превышает $\sum T_i + \log_2(k) + \log_2(\sum T_i + \log_2(k))$. Таким образом, если T_i примерно одинаковы по размеру, то 2-адическим размах результирующей последовательности ограничен величиной $kL^{1/k} + \log_2(k) + \log_2(kL^{1/k} + \log_2(k))$ и может быть значительно меньше. Такие результаты вызывают серьезные сомнения в стойкости системы поточного шифрования подобного типа.

Более строгое алгоритмическое представление данной атаки выглядит следующим образом.

- D1.** Определить (возможно, посредством атаки с известным открытым текстом) $2 \cdot T$ последовательных бит последовательности \mathbf{b} , порожденной в сумматоре из последовательностей $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.
- D2.** Применить алгоритм рациональной аппроксимации к этой последовательности бит для отыскания значений q и p .
- D3.** В соответствии с методами, представленными в Разделе 7.4.3, построить РСОСП, дающий на выходе битовую последовательность, соответствующую 2-адическому числу $\alpha = p/q$.

Для построения такого РСОСП требуется самое большее $T = T_1 + T_2 + \dots + T_k + O(\log(\sum_i(T_i))) + O(\log_2(k))$ бит, и он дает на выходе \mathbf{b} . Например, если комбинируются m -последовательности периодов $2^L - 1$ с $L = 7, 11, 13, 15, 16$ и 17 то период и линейный размах результирующей последовательности равны примерно 2^{79} . Однако, ее 2-адический размах меньше 2^{18} , так что меньше 2^{19} бит достаточно для отыскания РСОСП, порождающего данную последовательность. Максимальное количество арифметических операций над словом, выполняемых алгоритмом рациональной аппроксимации на 32-битной машине, составляет около 2^{42} .

7.4.7 Длинные последовательности и их статистические свойства

Желательное свойство криптогенераторов - порождение псевдослучайных последовательностей с большими периодами на основе простой аппаратной реализации. В случае регистров сдвига с линейной обратной связью, последовательности максимального периода получают, используя примитивные полиномы обратной связи. В случае РСОСП, по Следствию 1 максимально возможный период при целом обратной связи q равен $T = q - 1$. Этот период достигается тогда и только тогда, когда q - простое, а 2 - примитивный корень модуля q . В этом случае при любой начальной загрузке регистра выходная последовательность либо вырождается во все 0 или все 1, либо же в конечном счете войдет в большое периодическое состояние. Для подчеркивания аналогии с m -последовательностями введено следующее определение.

Определение. *l -последовательность - это периодическая последовательность (периода $T = q - 1$), полученная от РСОСП с простым целым обратной связи q , для которого 2 - примитивный корень.*

По Теореме 1 и Следствию 1 такие последовательности - это (возможно, сдвинутое) двоичное разложение дроби $1/q$:

$$1/q = b_0 \cdot 2^{-1} + b_1 \cdot 2^{-2} + b_2 \cdot 2^{-3} + \dots$$

Такие последовательности являются сбалансированными (результат Гаусса) и имеют обобщенное свойство Де Брюина: в любом заданном периоде последовательности всякая двоичная подпоследовательность длины $\lfloor \log_2(q) \rfloor$ появляется по крайней мере один раз, а каждая двоичная подпоследовательность длины $\lfloor \log_2(q) \rfloor + 1$ появляется самое большее один раз [228].

Имеется ряд эффективных методик отыскания больших простых q , для которых 2 - примитивный корень и которые уже реализованы в общедоступных математических программных пакетах, типа *Maple* или *Pari*. Например, РСОСП, построенный на простом числе

$$q = 2^{128} + 2^5 + 2^4 + 2^2 - 1$$

требует всего 2 бит памяти и имеет максимальный период $T = q - 1$. Хоули доказал, что если расширение гипотезы Римана на дзета-функцию Дедекинда над определенными полями Галуа справедливо, то количество $N(n)$ простых $q < n$, для которых $\text{ord}_q(2) = q-1$,

$$N(n) = A \cdot \frac{n}{\ln_2(n)} + O\left(\frac{n \ln_2 \ln_2(n)}{\ln_2^2(n)}\right),$$

где $A = 0.3739558136$ (первые десять десятичных разрядов) - постоянная Артина. Другими словами, 37.4% всех простых чисел имеют это свойство. Наконец, длинные псевдослучайные последовательности можно генерировать в РСОСП и с непростым целым обратной связи [196].

Статистические свойства l -последовательностей. Следующие результаты демонстрируют прекрасные статистические свойства последовательностей, основанных на целых обратной связи простых степеней, для которых 2 - примитивный корень.

Теорема 11. Пусть q - степень некоторого простого p , скажем $q = p^e$, и пусть 2 - примитивный корень q .

Пусть \mathbf{a} - любая максимального периода РСОСП-последовательность, порожденная РСОСП с целым обратной связи q . Тогда количество нулей и единиц в одном периоде \mathbf{a} равно.

Пусть s - любое неотрицательное целое, и пусть A и B - некоторые s -битовые подпоследовательности. Пусть \mathbf{a} - любая максимального периода, чисто периодическая РСОСП-последовательность, порожденная РСОСП с целым обратной связи q . Тогда количества появлений A и B в зафиксированном периоде \mathbf{a} отличается самое большее на 2.

7.4.8 PCOSP максимального периода и криптосхемы на их основе

Как отмечает Брюс Шнайер в своей энциклопедии "Прикладная криптография" [346], в открытой литературе пока не предложено криптосхем на основе PCOSP, так как теория слишком нова. Для зачина Шнайер предложил несколько собственных вариантов: схемы, идентичные уже известным на базе РСЛОС, но реализованные с помощью PCOSP; а также схемы, в которых комбинируются регистры того и другого типа. Здесь же приведена таблица целых обратной связи меньше 10 000, для которых 2 является примитивным корнем (то есть обеспечивающих PCOSP максимального периода $q - 1$). Для преобразования одного из этих чисел в последовательность точек съема надо вычислить двоичное разложение $q + 1$. Например, число 9949 соответствует точкам съема с бит 1,2,3,4,6,7,9,10,13, поскольку $9950 = 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$.

| Целые обратной связи для PCOSP максимального периода | | | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2 | 653 | 1549 | 2477 | 3539 | 4397 | 5693 | 6781 | 7717 | 8861 |
| 5 | 659 | 1571 | 2531 | 3547 | 4451 | 5701 | 6803 | 7757 | 8867 |
| 11 | 661 | 1619 | 2539 | 3557 | 4483 | 5717 | 6827 | 7789 | 8923 |
| 13 | 677 | 1621 | 2549 | 3571 | 4493 | 5741 | 6829 | 7829 | 8933 |
| 19 | 701 | 1637 | 2557 | 3581 | 4507 | 5749 | 6869 | 7853 | 8963 |
| 29 | 709 | 1667 | 2579 | 3613 | 4517 | 5779 | 6883 | 7877 | 8971 |
| 37 | 757 | 1669 | 2621 | 3637 | 4547 | 5813 | 6899 | 7883 | 9011 |
| 53 | 773 | 1693 | 2659 | 3643 | 4603 | 5827 | 6907 | 7901 | 9029 |
| 59 | 787 | 1733 | 2677 | 3659 | 4621 | 5843 | 6917 | 7907 | 9059 |
| 61 | 797 | 1741 | 2683 | 3677 | 4637 | 5851 | 6947 | 7933 | 9173 |
| 67 | 821 | 1747 | 2693 | 3691 | 4691 | 5869 | 6949 | 7949 | 9181 |
| 83 | 827 | 1787 | 2699 | 3701 | 4723 | 5923 | 6971 | 8053 | 9203 |
| 101 | 829 | 1861 | 2707 | 3709 | 4787 | 5939 | 7013 | 8069 | 9221 |
| 107 | 853 | 1867 | 2741 | 3733 | 4789 | 5987 | 7019 | 8093 | 9227 |
| 131 | 859 | 1877 | 2789 | 3779 | 4813 | 6011 | 7027 | 8117 | 9283 |
| 139 | 877 | 1901 | 2797 | 3797 | 4877 | 6029 | 7043 | 8123 | 9293 |
| 149 | 883 | 1907 | 2803 | 3803 | 4933 | 6053 | 7069 | 8147 | 9323 |
| 163 | 907 | 1931 | 2819 | 3851 | 4957 | 6067 | 7109 | 8171 | 9341 |
| 173 | 941 | 1949 | 2837 | 3853 | 4973 | 6101 | 7187 | 8179 | 9349 |
| 179 | 947 | 1973 | 2843 | 3877 | 4987 | 6131 | 7211 | 8219 | 9371 |
| 181 | 1019 | 1979 | 2851 | 3907 | 5003 | 6173 | 7219 | 8221 | 9397 |
| 197 | 1061 | 1987 | 2861 | 3917 | 5011 | 6197 | 7229 | 8237 | 9419 |
| 211 | 1091 | 1997 | 2909 | 3923 | 5051 | 6203 | 7237 | 8243 | 9421 |
| 227 | 1109 | 2027 | 2939 | 3931 | 5059 | 6211 | 7243 | 8269 | 9437 |
| 269 | 1117 | 2029 | 2957 | 3947 | 5077 | 6229 | 7253 | 8291 | 9467 |
| 293 | 1123 | 2053 | 2963 | 3989 | 5099 | 6269 | 7283 | 8293 | 9491 |
| 317 | 1171 | 2069 | 3011 | 4003 | 5107 | 6277 | 7307 | 8363 | 9533 |
| 347 | 1187 | 2083 | 3019 | 4013 | 5147 | 6299 | 7331 | 8387 | 9539 |
| 349 | 1213 | 2099 | 3037 | 4019 | 5171 | 6317 | 7349 | 8429 | 9547 |
| 373 | 1229 | 2131 | 3067 | 4021 | 5179 | 6323 | 7411 | 8443 | 9587 |
| 379 | 1237 | 2141 | 3083 | 4091 | 5189 | 6373 | 7451 | 8467 | 9613 |
| 389 | 1259 | 2213 | 3187 | 4093 | 5227 | 6379 | 7459 | 8539 | 9619 |
| 419 | 1277 | 2221 | 3203 | 4099 | 5261 | 6389 | 7477 | 8563 | 9629 |
| 421 | 1283 | 2237 | 3253 | 4133 | 5309 | 6397 | 7499 | 8573 | 9643 |
| 443 | 1291 | 2243 | 3299 | 4139 | 5333 | 6469 | 7507 | 8597 | 9661 |
| 461 | 1301 | 2267 | 3307 | 4157 | 5387 | 6491 | 7517 | 8627 | 9677 |
| 467 | 1307 | 2269 | 3323 | 4219 | 5443 | 6547 | 7523 | 8669 | 9733 |
| 491 | 1373 | 2293 | 3347 | 4229 | 5477 | 6619 | 7541 | 8677 | 9749 |

Глава 7. Схемы с памятью

| | | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 509 | 1381 | 2309 | 3371 | 4243 | 5483 | 6637 | 7547 | 8693 | 9803 |
| 523 | 1427 | 2333 | 3413 | 4253 | 5501 | 6653 | 7549 | 8699 | 9851 |
| 541 | 1451 | 2339 | 3461 | 4259 | 5507 | 6659 | 7573 | 8731 | 9859 |
| 547 | 1453 | 2357 | 3467 | 4261 | 5557 | 6691 | 7589 | 8741 | 9883 |
| 557 | 1483 | 2371 | 3469 | 4283 | 5563 | 6701 | 7603 | 8747 | 9901 |
| 563 | 1493 | 2389 | 3491 | 4349 | 5573 | 6709 | 7621 | 8803 | 9907 |
| 587 | 1499 | 2437 | 3499 | 4357 | 5651 | 6733 | 7643 | 8819 | 9923 |
| 613 | 1523 | 2459 | 3517 | 4363 | 5659 | 6763 | 7669 | 8821 | 9941 |
| 619 | 1531 | 2467 | 3533 | 4373 | 5683 | 6779 | 7691 | 8837 | 9949 |

Во второй таблице перечислены *все* 4-отводные последовательности точек съема, которые приводят к РСОСП максимального периода для регистров длиной в 32 бита, 64 бита, 96 бит и 128 бит. Каждые четыре значения a , b , c и d порождают простое число q , для которого 2 - примитивный корень:

$$q = 2^a + 2^b + 2^c + 2^d.$$

Каждая такая комбинация точек съема может использоваться для создания РСОСП с периодом $q - 1$.

| Точки съема для РСОСП максимальной длины | | | |
|--|--------------|--------------|--------------|
| (32,6,3,2) | (64,24,19,2) | (64,59,28,2) | (96,55,53,2) |
| (32,7,5,2) | (64,25,3,2) | (64,59,38,2) | (96,56,9,2) |
| (32,8,3,2) | (64,25,4,2) | (64,59,44,2) | (96,56,51,2) |
| (32,13,8,2) | (64,25,11,2) | (64,60,49,2) | (96,57,3,2) |
| (32,13,12,2) | (64,25,19,2) | (64,61,51,2) | (96,57,17,2) |
| (32,15,6,2) | (64,27,5,2) | (64,63,8,2) | (96,57,47,2) |
| (32,16,2,1) | (64,27,16,2) | (64,63,13,2) | (96,58,35,2) |
| (32,16,3,2) | (64,27,22,2) | (64,63,61,2) | (96,59,46,2) |
| (32,16,5,2) | (64,28,19,2) | | (96,60,29,2) |
| (32,17,5,2) | (64,28,25,2) | (96,15,5,2) | (96,60,41,2) |
| (32,19,2,1) | (64,29,16,2) | (96,21,17,2) | (96,60,45,2) |
| (32,19,5,2) | (64,29,28,2) | (96,25,19,2) | (96,61,17,2) |
| (32,19,9,2) | (64,31,12,2) | (96,25,20,2) | (96,63,20,2) |
| (32,19,12,2) | (64,32,21,2) | (96,29,15,2) | (96,65,12,2) |
| (32,19,17,2) | (64,35,29,2) | (96,29,17,2) | (96,65,39,2) |
| (32,20,17,2) | (64,36,7,2) | (96,30,3,2) | (96,65,51,2) |
| (32,21,9,2) | (64,37,2,1) | (96,32,21,2) | (96,67,5,2) |
| (32,21,15,2) | (64,37,11,2) | (96,32,27,2) | (96,67,25,2) |
| (32,23,8,2) | (64,39,4,2) | (96,33,5,2) | (96,67,34,2) |
| (32,23,21,2) | (64,39,25,2) | (96,35,17,2) | (96,68,5,2) |
| (32,25,5,2) | (64,41,5,2) | (96,35,33,2) | (96,68,19,2) |
| (32,25,12,2) | (64,41,11,2) | (96,39,21,2) | (96,69,17,2) |
| (32,27,25,2) | (64,41,27,2) | (96,40,25,2) | (96,69,36,2) |
| (32,29,19,2) | (64,43,21,2) | (96,41,12,2) | (96,70,23,2) |
| (32,29,20,2) | (64,43,28,2) | (96,41,27,2) | (96,71,6,2) |
| (32,30,3,2) | (64,45,28,2) | (96,41,35,2) | (96,71,40,2) |
| (32,30,7,2) | (64,45,41,2) | (96,42,35,2) | (96,72,53,2) |
| (32,31,5,2) | (64,47,5,2) | (96,43,14,2) | (96,73,32,2) |
| (32,31,9,2) | (64,47,21,2) | (96,44,23,2) | (96,77,27,2) |
| (32,31,30,2) | (64,47,30,2) | (96,45,41,2) | (96,77,31,2) |
| | (64,49,19,2) | (96,47,36,2) | (96,77,32,2) |

Глава 7. Схемы с памятью

| | | | |
|---------------|---------------|----------------|-----------------|
| (64,3,2,1) | (64,49,20,2) | (96,49,31,2) | (96,77,33,2) |
| (64,14,3,2) | (64,52,29,2) | (96,51,30,2) | (96,77,71,2) |
| (64,15,8,2) | (64,53,8,2) | (96,53,17,2) | (96,78,39,2) |
| (64,17,2,1) | (64,53,43,2) | (96,53,19,2) | (96,79,4,2) |
| (64,17,9,2) | (64,56,39,2) | (96,53,32,2) | (96,81,80,2) |
| (64,17,16,2) | (64,56,45,2) | (96,53,48,2) | (96,83,14,2) |
| (64,19,2,1) | (64,59,5,2) | (96,54,15,2) | (96,83,26,2) |
| (64,19,18,2) | (64,59,8,2) | (96,55,44,2) | (96,83,54,2) |
| (96,83,60,2) | (128,31,25,2) | (128,81,55,2) | (128,105,11,2) |
| (96,83,65,2) | (128,33,21,2) | (128,82,67,2) | (128,105,31,2) |
| (96,83,78,2) | (128,35,22,2) | (128,83,60,2) | (128,105,48,2) |
| (96,84,65,2) | (128,37,8,2) | (128,83,61,2) | (128,107,40,2) |
| (96,85,17,2) | (128,41,12,2) | (128,83,77,2) | (128,107,62,2) |
| (96,85,31,2) | (128,42,35,2) | (128,84,15,2) | (128,107,102,2) |
| (96,85,76,2) | (128,43,25,2) | (128,84,43,2) | (128,108,35,2) |
| (96,85,79,2) | (128,43,42,2) | (128,85,63,2) | (128,108,73,2) |
| (96,86,39,2) | (128,45,17,2) | (128,87,57,2) | (128,108,75,2) |
| (96,86,71,2) | (128,45,27,2) | (128,87,81,2) | (128,108,89,2) |
| (96,87,9,2) | (128,49,9,2) | (128,89,81,2) | (128,109,11,2) |
| (96,87,44,2) | (128,51,9,2) | (128,90,43,2) | (128,109,108,2) |
| (96,87,45,2) | (128,54,51,2) | (128,91,9,2) | (128,110,23,2) |
| (96,88,19,2) | (128,55,45,2) | (128,91,13,2) | (128,111,61,2) |
| (96,88,35,2) | (128,56,15,2) | (128,91,44,2) | (128,113,59,2) |
| (96,88,43,2) | (128,56,19,2) | (128,92,35,2) | (128,114,83,2) |
| (96,88,79,2) | (128,56,55,2) | (128,95,94,2) | (128,115,73,2) |
| (96,89,35,2) | (128,57,21,2) | (128,96,23,2) | (128,117,105,2) |
| (96,89,51,2) | (128,57,37,2) | (128,96,61,2) | (128,119,30,2) |
| (96,89,69,2) | (128,59,29,2) | (128,97,25,2) | (128,119,101,2) |
| (96,89,87,2) | (128,59,49,2) | (128,97,68,2) | (128,120,9,2) |
| (96,92,51,2) | (128,60,57,2) | (128,97,72,2) | (128,120,27,2) |
| (96,92,71,2) | (128,61,9,2) | (128,97,75,2) | (128,120,37,2) |
| (96,93,32,2) | (128,61,23,2) | (128,99,13,2) | (128,120,41,2) |
| (96,93,39,2) | (128,61,52,2) | (128,99,14,2) | (128,120,79,2) |
| (96,94,35,2) | (128,63,40,2) | (128,99,26,2) | (128,120,81,2) |
| (96,95,4,2) | (128,63,62,2) | (128,99,54,2) | (128,121,5,2) |
| (96,95,16,2) | (128,67,41,2) | (128,99,56,2) | (128,121,67,2) |
| (96,95,32,2) | (128,69,33,2) | (128,99,78,2) | (128,121,95,2) |
| (96,95,44,2) | (128,71,53,2) | (128,100,13,2) | (128,121,96,2) |
| (96,95,45,2) | (128,72,15,2) | (128,100,39,2) | (128,123,40,2) |
| | (128,72,41,2) | (128,101,44,2) | (128,123,78,2) |
| (128,5,4,2) | (128,73,5,2) | (128,101,97,2) | (128,124,41,2) |
| (128,15,4,2) | (128,73,65,2) | (128,103,46,2) | (128,124,69,2) |
| (128,21,19,2) | (128,73,67,2) | (128,104,13,2) | (128,124,81,2) |
| (128,25,5,2) | (128,75,13,2) | (128,104,19,2) | (128,125,33,2) |
| (128,26,11,2) | (128,80,39,2) | (128,104,35,2) | (128,125,43,2) |
| (128,27,25,2) | (128,80,53,2) | (128,105,7,2) | (128,127,121,2) |



Глава 8

Конкретные схемы криптогенераторов и самосинхронизирующиеся шифры

8.1 Обзор ранних схем

В данном разделе описан ряд генераторов, предложенных и опубликованных в открытой литературе в 1970-1980-х годах. В основу обзора положены материалы работы Рюппеля [339].

8.1.1 Генератор Геффе

В 1973 году П.Р. Геффе [129] предложил использовать в качестве базового строительного блока шифраторов генератор гаммы из 3 РСЛОС, использующий нелинейную комбинирующую функцию усложнения $f: \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2$, определяемую как

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3.$$

Длины регистров L_j и полиномы обратной связи $C_j(D)$ являются параметрами выбора с тем ограничением, что длины должны быть попарно взаимно просты, а полиномы примитивны.

Генератор Геффе:

Вход: параметры: 3 РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$

ключ: начальные состояния \mathbf{a}_{j_0} трех данных регистров

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Для $j = 1, 2, 3$ выполнить

Сдвинуть РСЛОС $_j$

Взять a_{ji}

2. $z_i = a_{3i} \oplus a_{1i}a_{2i} \oplus a_{2i}a_{3i}$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Теоретико-системный анализ показывает, что полный период $T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$ является максимальным. Линейная сложность имеет значение $\Lambda(\tilde{z}) = L_3 + L_1 L_2 + L_2 L_3$. Несмотря на то, что данный принцип усложнения демонстрирует хорошие статистические результаты и большую линейную сложность, эта конструкция является криптографически слабой. Функция f выдает в гамму информацию о состояниях РСЛОС 1 и 3, поскольку $P(f(X) = X_1) = P(f(X) = X_3) = 3/4$. Позднее было отмечено, что функция $f': \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}_2$, заданная как $f'(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3$ и полученная небольшой модификацией функции f , демонстрирует такие же хорошие свойства распределения, но кроме этого позволяет генерировать последовательности с более высокой линейной сложностью. Обсуждение этой функции см. в Разделе 8.1.4 ниже.

8.1.2 Генератор Плесса

Появление в 1977г. этого генератора [302], вероятно, было вызвано успехами в развитии технологии, то есть конструкцию простимулировала доступность схем на J - K триггерах. В алгебраической нормальной форме J - K триггер реализует функцию

$$y_j = x_j^{(1)} \oplus y_{j-1} (1 \oplus x_j^{(1)} \oplus x_j^{(2)}),$$

где y_j обозначает внутреннее состояние в момент времени j . Плесс обратил внимание, что знание текущего выходного бита J - K триггера дает информацию как об источнике, так и о значении следующего выходного бита. Для того чтобы избавиться от этой слабости, Плесс предложил через один подавлять биты выходной последовательности.

Данный генератор состоит из восьми РСЛОС и четырех J - K триггеров, каждый из которых действует в качестве нелинейного комбинирующего узла для отдельной пары РСЛОС. Эти четыре выходных последовательности триггеров усекаются с шагом 4, а затем прослаиваются для получения результирующей гаммы. Длины L_j и полиномы обратной связи $C_j(D)$ являются параметрами выбора.

Генератор Плесса:

Вход: параметры: 8 РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$

ключ: начальные состояния $\mathbf{a}_0^{(1)}, \dots, \mathbf{a}_0^{(8)}$ восьми данных регистров

Для $i = 0, 1, 2, \dots$ выполнить

Для $k = 1, 2, 3, 4$ выполнить

a. Сдвинуть каждый РСЛОС

b. Вычислить функцию k -ого триггера для соответствующей пары РСЛОС

$$y_{4i}^{(k)} = a_{4i}^{(2k-1)} \oplus y_{4i-1}^{(k)} (1 \oplus a_{4i}^{(2k-1)} \oplus a_{4i}^{(2k)})$$

c. Собрать четыре бита гаммы как $z_{4i+k} = y_{4i}^{(k)}$

Выход: последовательность из z_l , $l = 1, 2, \dots$

Когда периоды восьми РСЛОС подобраны так, чтобы они были попарно взаимно просты, тогда общий период результирующей гаммы равен их произведению. Рубин [329] впоследствии заметил, что можно использовать стратегию "разделяй-и-вскрывай" для атаки на каждый из четырех субгенераторов независимо, и разработал метод вскрытия по известному открытому тексту, для успеха которого достаточно знания всего 15 знаков. Более того, и более фундаментально, J - K триггер как принцип комбинирования является криптографически слабым решением. Теоретико-информационный анализ функции f в предположении, что биты состояния неизвестны и случайны, а биты входа - равномерно распределенные двоичные случайные величины, показывает, что существует ненулевая взаимная информация $I(Z; X_1) = I(Z; X_2) = 0.189$ для каждой из двух входных переменных. Следовательно, данный генератор подвержен корреляционным атакам, описанным в Разделе 4.3.

8.1.3 Генератор-мультиплексор Дженнингса

Появление этого генератора в начале 1980-х годов [181] [182] также было вызвано успехами в развитии технологии, то есть конструкцию простимулировала доступность схем мультиплексоров. Данный генератор состоит из двух РСЛОС и мультиплексора в качестве нелинейного комбинирующего узла f . Мультиплексор, управляемый состоянием регистра РСЛОС₁, выбирает на каждом такте работы один из разрядов РСЛОС₂. Содержимое этого разряда затем формирует текущий член шифрующей последовательности. Количество h входов управления мультиплексора должно удовлетворять соотношениям $1 \leq h \leq L_1$ и $2^h \leq L_2$. Длины L_j , полиномы обратной связи $C_j(D)$ и значение h являются параметрами выбора.

Генератор-мультиплексор:

Вход: параметры: 2 РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$

h и вектор управления $\mathbf{j} = (j_0, j_1, \dots, j_{h-1})$ такой, что

$0 \leq j_0 < j_1 < \dots < j_{h-1} \leq L_1$

ключ: начальные состояния $\mathbf{s}_0^{(1)}, \mathbf{s}_0^{(2)}$ двух РСЛОС

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть РСЛОС₁ и РСЛОС₂

2. Вычислить целое

$$a_i = \sum_{k=0}^{h-1} 2^k \mathbf{s}_i^{(1)}(j_k)$$

3. Взять

$$z_i = \mathbf{s}_i^{(2)}(\theta(a_i))$$

где θ - обратимое отображение из $\{0, 1, \dots, 2^{h-1}\}$ в $\{0, 1, \dots, L_2-1\}$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Полагаем, что два многочлена обратной связи примитивны, и что длины РСЛОС взаимно просты, т.е. $\text{НОД}(L_1, L_2) = 1$. Тогда можно доказать [181], что период принимает максимальное значение $T = (2^{L_1} - 1)(2^{L_2} - 1)$. Линейную сложность можно ограничить сверху неравенством

$$\Lambda(\tilde{z}) \leq L_2 \left(1 + \sum_{i=1}^h \binom{L_1}{i} \right),$$

если $2 \leq h < L_1 - 1$, и равенством в том случае, если все h разрядов расположены с равными интервалами. Если $h = L_1 - 1$, то $\Lambda(\tilde{z}) = L_2(2^{L_1} - 1)$. В [182] также показано, что периодическая автокорреляционная функция $C(\tau) = -1 / (2^{L_2} - 1)$ для большинства внефазовых значений τ , $1 \leq \tau \leq T - 1$.

Хотя данный генератор демонстрирует прекрасные статистические свойства, Брюс Шнайер не рекомендует его использовать [346], поскольку схема плохо противостоит методам атаки "встреча посередине" [7] и методам линейного криптоанализа [399] [93] (см. Главу 9).

8.1.4 Пороговый генератор

Этот генератор был предложен Брюером в 1984 году [47] как простой и эффективный способ получения гаммы с гарантированно большой линейной сложностью при одновременно хороших статистических свойствах. Генератор состоит из набора M регистров сдвига и нелинейного закона их комбинирования f . Количество регистров сдвига M , длины L_j и полиномы обратной связи $C_j(D)$ являются параметрами выбора с тем ограничением, что длины должны быть попарно взаимно просты, а полиномы примитивны.

Пороговый генератор:

Вход: параметры: M РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$

ключ: начальные состояния $\mathbf{a}_{10}, \dots, \mathbf{a}_{M0}$ этих M РСЛОС

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Для $j = 1, \dots, M$ выполнить

Сдвинуть РСЛОС $_j$

Взять a_{ji}

2. Вычислить целочисленную сумму текущих выходных бит и принять решение

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{если } \left(\sum_{j=1}^M a_{ji} \right) > \frac{M}{2} \\ 0 & \text{если } \left(\sum_{j=1}^M a_{ji} \right) \leq \frac{M}{2} \end{cases}$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Выходная последовательность будет сбалансированной только в том случае, если количество регистров сдвига M будет нечетным. Рассмотрим случай $M = 3$, тогда выходное отображение f можно эквивалентно записать в алгебраической нормальной форме:

$$z_i = a_{1i}a_{2i} \oplus a_{1i}a_{3i} \oplus a_{2i}a_{3i},$$

где берется сумма по mod 2 всех произведений второго порядка. Теоретико-системный анализ показывает, что общий период $T = T_1 T_2 T_3$ является максимальным. Линейная сложность имеет значение $\Lambda(\tilde{z}) = L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3$. Хотя такой принцип комбинирования демонстрирует хорошую статистику и большую линейную сложность, криптографически он является слабым. Теоретико-информационный анализ функции f в предположении независимых и равномерно распределенных входов дает ненулевую взаимную информацию $I(Z; X_j) - 0.189$ бит для каждого j . Как следствие, имеется положительная корреляция между результирующей гаммой и каждой входной последовательностью.

8.1.5 Генератор скалярного перемножения

В работе Мэсси и Рюппеля [234] показано, что существуют "совершенные линейные шифрсистемы". Линейное преобразование при таком методе шифрования имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_i &= F_k(x_i, \dots, x_{i-M}) \\ &= x_i + \sum_{j=1}^M c_j(i, k)x_{i-j} \end{aligned}$$

где коэффициенты $c_j(i, k)$ зависят как от тактового импульса i , так и от ключа k . Если на открытый текст наложено ограничение, что он не может содержать M последовательных нулей, то может быть получен совершенный линейный шифр (где открытый текст и шифртекст статистически независимы) при двух цифрах ключа на цифру открытого текста. В данной конструкции используется M -кратное скалярное произведение M последовательных цифр открытого текста на M последовательных цифр ключа, сдвигающихся с удвоенной скоростью.

На основе такой идеи "совершенного линейного шифра" построен генератор, осуществляющий скалярное перемножение состояний двух РСЛОС, работающих с разными скоростями. Длины L_1, L_2 и показатели скорости (число шагов сдвига) d_1, d_2 являются параметрами выбора.

Генератор скалярного перемножения:

Вход: параметры: 2 РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$ и два показателя скорости d_1, d_2
ключ: начальные состояния $\mathbf{a}_0^{(1)}, \mathbf{a}_0^{(2)}$ данных регистров

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть РСЛОС₁ d_1 раз
2. Сдвинуть РСЛОС₂ d_2 раз
3. Вычислить скалярное произведение состояний двух РСЛОС

$$z_i = \sum_{k=1}^{\min\{L_1, L_2\}} \mathbf{a}_{1k} \cdot \mathbf{a}_{2k}$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Теоретико-системный анализ показывает [234], что такая выходная последовательность будет иметь линейную сложность $\Lambda(\tilde{z}) = L_1 L_2$ при условии что $C_1(D)$ и $C_2(D)$ неприводимы, $\text{НОД}(L_1, L_2) = 1$, $\text{НОД}(d_1, T_1) = \text{НОД}(d_2, T_2) = 1$, где T_1, T_2 обозначают периоды исходных регистров сдвига, и эти регистры имеют ненулевое начальное заполнение. Период T последовательности \tilde{z} ограничен снизу неравенством $T_z \geq T_1 T_2 / (q - 1)$. Для анализа общих статистических свойств подразумевается, что $C_1(D)$ и $C_2(D)$ - примитивные многочлены над $GF(2)$ и что $L_1 > L_2$. Тогда можно доказать, что количество нулей в пределах одного периода равно $(2^{L_2} - 1)(2^{L_1 - 1} - 1)$, а разница между количеством нулей и единиц при соотношении с периодом составляет $1 / (2^{L_1} - 1)$. Комбинирование с помощью скалярного перемножения демонстрирует "почти идеальные" свойства распределения в выходной последовательности. Таким образом, такой генератор несет в себе потенциал для синтеза РСЛОС с неприводимыми, но непримитивными характеристическими многочленами, которые обеспечивают цикл состояний с хорошими глобальными статистическими (случайными) свойствами. По мнению Рюппеля, описанный генератор может стать естественной основой для каскадной структуры: комбинировать выходную последовательность \tilde{z} во втором скалярном произведении с третьим РСЛОС длины L_3 ; поскольку \tilde{z} не имеет идентифицируемого показателя скорости, то достаточно выбрать $d_3 > 1$.

Хотя данный генератор имеет высокую линейную сложность и демонстрирует прекрасные статистические свойства, Брюс Шнайер отмечает [346], что данная схема плохо противостоит методам атаки через тест на линейную совместимость [399]. В частности, если L_1 и L_2 - длины регистров, а d - множитель кратности скоростей движения регистров, то внутреннее состояние генератора может быть восстановлено по выходной последовательности длины $L_1 + L_2 + \log_2 d$.

8.1.6 Генератор Вольфрама

На конференции Стурто'85 Стив Вольфрам [390] предложил в качестве генератора последовательностей двоичный одномерный клеточный автомат с нелинейной функцией следующего состояния. Одномерный *клеточный автомат* состоит из (возможно бесконечного) ряда ячеек со значениями $a_i \in \mathbb{Z}_n$. Эти значения обновляются одновременно (синхронно) в дискретные моменты времени в соответствии с фиксированным правилом вида:

$$a'_k = \Phi(a_{k-r}, a_{k-r+1}, \dots, a_{k+r})$$

где r означает размах входных аргументов для Φ . Показано, что данная техника теоретически позволяет генерировать последовательности с большими периодами и хорошими статистическими свойствами.

Всякая практическая реализация клеточного автомата должна содержать конечное число ячеек N . В типичном случае это реализуется в виде циркулярного регистра с условиями периодического ограничения, то есть индексы ячеек у аргументов в законе следующего состояния Φ вычисляются по модулю N . В [390] правило обновления для следующего состояния

$$a'_k = a_{k-1} \oplus (a_k \vee a_{k+1})$$

расценивается как наиболее перспективное среди всех правил Φ от трех аргументов.

Генератор Вольфрама:

Вход: параметры: количество ячеек N

(и, возможно, функция f следующего состояния)

ключ: начальное состояние $\mathbf{a}(0) = (a_0(0), a_1(0), \dots, a_{N-1}(0))$

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Обновить клеточный автомат используя правило

$$a_k(i) = a_{k-1}(i-1) \oplus (a_k(i-1) \vee a_{k+1}(i-1))$$

для $k = 0, 1, \dots, N-1$, где индексы ячеек вычисляются по mod N .

2. Взять цифру гаммы с какой-либо одной ячейки k

$$z_i = a_k(i)$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Хотя отсутствие удобного аппарата для анализа этой конструкции значительно затрудняет криптоанализ, но это же обстоятельство препятствует попыткам установить такие базовые свойства системы, как например ее период. Это именно тот случай, когда теоретически интересную модель из бесконечного количества ячеек приходится заменять описанной выше практической реализацией. Майер и Штаффельбах [258] проанализировали предложенную Вольфрамом конструкцию и показали, что предложенные автором для практической реализации параметры не обеспечивают адекватной стойкости. В диссертации Й. Дэмена [90] предложен еще один шифр, основанный на идее клеточного автомата и противостоящий атаке Майера-Штаффельбаха.

8.1.7 Генератор "1/p"

Так называемый "1/p-генератор" имеет долгую историю, которая может прослежена до работ Диксона [99] и Кнута [197]. В работе [40] дан криптографический анализ этой конструкции, основанной на преобразовании состояний линейного конгруэнтного генератора $F(x) = bx \pmod N$. В этой же статье проанализирован квадратичный конгруэнтный генератор с преобразованием состояний $F(x) = x^2 \pmod N$ и проведено его сравнение с 1/p-генератором.

Пусть $b > 1$ обозначает фиксированное основание. Инициализирующими параметрами для 1/p-генератора являются целое число p , взаимно простое с b , и случайно выбранное число $x_0 \in \mathbb{Z}_p^*$. Суть 1/p-генератора сводится к разложению начального значения x_0/p по основанию b . Другими словами, он генерирует последовательность b -ичных цифр частного, когда x_0 делится на p по основанию b . Напомним, что линейный конгруэнтный генератор, напротив, генерирует последовательность из b -ичных цифр остатка, когда x_0 делится на p по основанию b .

1/p генератор:

Вход: параметры: основание $b > 1$

ключ: целое p с $\text{НОД}(p, b) = 1$, случайное $x_0 \in \mathbb{Z}_p^*$

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Вычислить функцию следующего состояния

$$x_i = F(x_{i-1}) = bx_{i-1} \pmod p$$

2. Вычислить функцию выхода

$$z_i = f(x_{i-1}) = bx_{i-1} \text{ div } p$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Анализ в [40] показывает, что период выходной гаммы достигает своего максимума $T = p - 1$, когда p простое а b - примитивный корень по $\pmod p$. Для этого подкласса генераторов установлены интересные статистические свойства. Можно доказать, что соответствующие результирующие шифрующие последовательности являются обобщенными *последовательностями де Брюина* периода $p - 1$. Обобщенная последовательность де Брюина имеет такое свойство, что каждая b -ичная последовательность из $|p| - 1$ цифр появляется по меньшей мере один раз, а каждая b -ичная последовательность из $|p|$ цифр появляется самое большее один раз в заданном периоде последовательности ($|p|$ означает длину b -ичного разложения p). Такие последовательности напоминают последовательности максимальной длины от регистра сдвига. Поэтому неудивительно, что знание основания b и $k = \lceil \log_b(2p^2) \rceil$ цифр гаммы z_m, \dots, z_{m+k} достаточно для предсказания этого генератора как в прямом, так и в обратном направлениях. Это делается применением алгоритма разложения в непрерывную дробь в отношении дроби $z_m, \dots, z_{m+k} / b^k$. Сходимость к x_m/p гарантирована если $1/b^k \leq 1/2p^2$.

Поскольку $\text{НОД}(p, b) = 1$, то так же легко развернуть последовательность в обратном направлении, вычисляя $x_{i-1} = b^{-1}x_i \bmod p$.

8.1.8 Генератор суммирования

В середине 1980-х годов Рюппелем [333] исследована пригодность целочисленного сложения в качестве комбинирующей функции. Пусть входные последовательности будут двоичными разложениями некоторых целых чисел (возможно бесконечных, если последовательности подразумеваются полубесконечными). Функция суммирования $f : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}$, определяемая соотношением $z = \sum_{i=1}^N x_i$, может вычисляться побитовым способом, начиная с самого младшего бита. Данное исследование было инициировано тем фактом, что целочисленное сложение является функцией высокой степени нелинейности, когда рассматривается над \mathbb{F}_2 , и в то же время обеспечивает максимальный порядок корреляционного иммунитета. Следующий генератор [333] является простой реализацией данной идеи:

Генератор суммирования:

Вход: параметры: N РСЛОС $\langle L_j, C_j(D) \rangle$

ключ: начальные состояния N регистров и значение переноса C_0

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть каждый регистр один раз для выработки $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}$
2. Вычислить целочисленную сумму

$$S_i = \sum_{k=1}^N x_{ki} + C_{i-1}$$

3. Присвоить

$$z_i = S_i \bmod 2$$

$$C_i = \left\lfloor \frac{S_i}{2} \right\rfloor$$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots$

Анализ в [333] показывает, что действительная сумма N периодических последовательностей с r -ичными цифрами является в конечном счете периодической с периодом $T = \prod T_i$, если периоды T_i отдельных последовательностей попарно взаимно просты. Когда две двоичных m -последовательности взаимно простых степеней складываются над действительными числами, то суммарная последовательность имеет линейную сложность, близкую к длине ее периода $\Lambda(\tilde{z}) \leq (2^{L_1} - 1)(2^{L_2} - 1)$. Если входные векторы независимы и распределены равномерно, то шифрпоследовательность также будет состоять из независимых равномерно распределенных случайных переменных. Действительная сумма непосредственно обеспечивает принцип комбинирования с

корреляционным иммунитетом порядка $(N - 1)$, что является максимально возможным значением.

В [256] корреляционный анализ функций без памяти был распространен на комбинирующие узлы с 1 битом памяти (см. Раздел 5.1.3 и Раздел 7.2). В частности, генератор суммирования с двумя входными последовательностями является таким 1-битовым комбинирующим узлом, и было показано, что имеется положительная корреляция с $x_{1,i} \oplus x_{1,i-1} \oplus x_{2,i}$ (что согласуется с результатом, согласно которому генератор суммирования имеет корреляционный иммунитет максимального порядка, когда на его входах последовательности от регистра сдвига). В [368] проанализировано вероятностное распределение значения переноса при сложении случайных целых чисел. Доказано, что перенос сбалансирован при четных N и смещен при нечетных N , и что это смещение сходится к 0 при $N \rightarrow \infty$.

Подробно о криптоаналитических результатах, выявляющих слабости данной схемы см. Разделы 7.1.1, 7.2.4 и 7.4.6.

8.1.9 Ранцевый генератор

В 1985 году Рюппелем и Мэсси [332] исследована пригодность "укладки ранца" в качестве нелинейного преобразования. Другими словами, сделана попытка обосновать стойкость генератора тем, что обычно именуют "сложной" проблемой. Проблема ранца, известная также как проблема суммы подмножеств, является NP -полной проблемой [127]. В основе данной проблемы лежат конечное множество из L положительных целочисленных весов и положительное целое S . Суть же проблемы - решить, имеется ли подмножество весов такое, что в сумме получалось бы точно S . Для заданного набора весов ранец можно рассматривать как функцию, отображающую вектор выбора $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_L$ в целое S , которое является суммой тех весов, что выбраны вектором \mathbf{x} . Сложность решения проблемы ранца мотивировала его применение в качестве нелинейной функции в фильтрующем генераторе [332]. Отметим, что в отличие от NP -полной проблемы (рассматриваемой в криптографии с открытым ключом) в данном случае веса держатся в секрете.

Ранцевый генератор:

Вход: параметры: РСЛОС $\langle L, C(D) \rangle$, модуль Q

ключ: L весов ранца w_1, \dots, w_L размером N бит каждый

начальное состояние $\mathbf{x}_0 = x_{10}, x_{20}, \dots, x_{L0}$ регистра сдвига

Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить

1. Сдвинуть регистр для выработки следующего состояния
2. Вычислить ранцевую сумму

$$S_i = \sum_{k=1}^L x_{ki} w_k \bmod Q$$

3. Выделить некоторые биты из S_i для формирования Z_i

Выход: последовательность из Z_i , $i = 1, 2, \dots$

Последовательность ранцевой суммы является периодической с периодом $2^L - 1$, откуда следует, что последовательность j -ого бита \tilde{s}_j также является периодической с периодом $2^L - 1$. Анализ в [334] показывает, что если $Q = 2^N$, то \tilde{s}_j , последовательность j -ого бита последовательности ранцевой суммы \tilde{S} , имеет следующую линейную сложность

$$\Lambda(\tilde{s}_j) \leq \sum_{k=1}^{2^j} \binom{L}{k} \quad j < \lceil \log L \rceil$$

$$\Lambda(\tilde{s}_j) \leq \sum_{k=1}^L \binom{L}{k} = 2^L - 1 \quad j \geq \lceil \log L \rceil$$

Отсюда следует, что $\log L$ самых младших бит ранца модуля 2^L криптографически слабее, нежели биты старшего порядка. Эффективная длина ключа для выходного параметра j составляет по крайней мере $L \log L$ бит для всех $j \geq \lceil \log L \rceil$.

Таким образом, порождаемая ранцевым генератором последовательность имеет хорошие свойства периодичности и линейной сложности. В то же время нет никаких данных о ее применении. Очень похоже, что дурная репутация совсем других криптосистем, также основанных на проблеме укладки ранца и предлагавшихся в первые годы криптографии с открытым ключом [358] [44], отталкивает криптографов от любой схемы, основанной на этой идее. Не опубликовано никаких результатов об успешном криптоанализе данного генератора [322].

8.1.10 Аддитивный генератор [346]

Чрезвычайно эффективная с точки зрения производительности конструкция (иногда именуемая запаздывающим генератором Фибоначчи), в которой вместо случайных бит генерируются случайные слова [197]. Сами по себе криптографически слабые, эти схемы могут использоваться в качестве строительных блоков при создании стойких генераторов.

Начальным состоянием генератора является массив $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ n -битовых слов, длина которых может быть равна 8, 16, 32 бита либо какая-то еще. Это начальное состояние является ключом. На i -ом шаге генератор дает на выходе слово

$$X_i = (X_{i-a} + X_{i-b} + X_{i-c} + \dots + X_{i-m}) \bmod 2^n.$$

Если коэффициенты a, b, c, \dots, m выбраны правильно, то период этого генератора составляет по крайней мере $2^n - 1$. Одно из требований к коэффициентам - чтобы самый младший бит образовывал РСЛОС максимальной длины.

Например, $(55, 24, 0)$ - примитивный многочлен по mod 2 (см. Раздел 2.2). Это значит, что следующий аддитивный генератор имеет максимальный период:

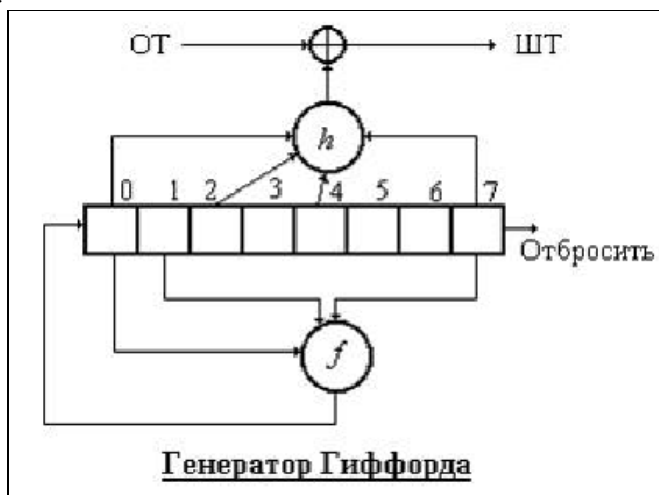
$$X_i = (X_{i-55} + X_{i-24}) \bmod 2^n.$$

Такой подход срабатывает, поскольку данный примитивный многочлен имеет три коэффициента. Если же их больше трех, то для обеспечения максимальной длины необходимо выполнение некоторых дополнительных требований. Детали можно найти в работе [43].

В 1990-е годы на основе аддитивных генераторов предложены криптосхемы FISH (см. Раздел 6.3.2) и PIKE (см. Раздел 8.5.5).

8.1.11 Генератор Гиффорда

Дэвид Гиффорд придумал схему поточного шифра, которая использовалась с 1984 по 1988 год агентством *Associated Press* [130]. Криптосхема Гиффорда представляет собой *фильтр-генератор*: 8-байтовый регистр сдвига с линейной функцией обратной связи f и нелинейной функцией выхода h . Ключом являются 64 бита начального заполнения регистра.



Данный алгоритм считался достаточно стойким в течение своей недолгой жизни, но в 1994 году был вскрыт Кейном и Шерманом [52] [53]. Применяя аппарат линейной алгебры над конечными полями, они воспользовались балансировкой криптоаналитического соотношения "время-память" (чем больше памяти, тем меньше требуется времени на вскрытие и наоборот) для определения сегментов криптоключа, получаемых на основе декомпозиции функции обратной связи.

Представляя функцию обратной связи в виде двоичной матрицы F , Кейн и Шерман разложили векторное пространство состояний регистра в прямую сумму четырех F -инвариантных подпространств, определяемых из основной рациональной канонической формы F . Их атака свелась к вычислению сегментов ключа, соответствующих этим инвариантным подпространствам, имеющим размерность 24, 5, 6 и 29, соответственно. Поскольку подпространство размерности 24 соответствует нильпотентному преобразованию, то в шифре Гиффорда эффективно используются только 40 бит ключа. С помощью новой техники хэширования, авторы атаки сумели отыскивать эти 40 бит всего за 2^{27} шагов. Кроме этого, на основе декомпозиции матрицы F ими вычислено точное вероятностное распределение длин подходов и циклов для всех последовательностей, порождаемых состояниями шифра Гиффорда.

Для атаки Кейна и Шермана потребовалось 2^{27} шагов и 2^{18} бит памяти, что существенно меньше 2^{64} шагов, необходимых при опробовании всех начальных состояний

тотальным перебором. Программа-прототип, реализованная на сети из 8 станций Sparc, отыскивала ключ по шифртексту одного сообщения в среднем за 4 часа [53].

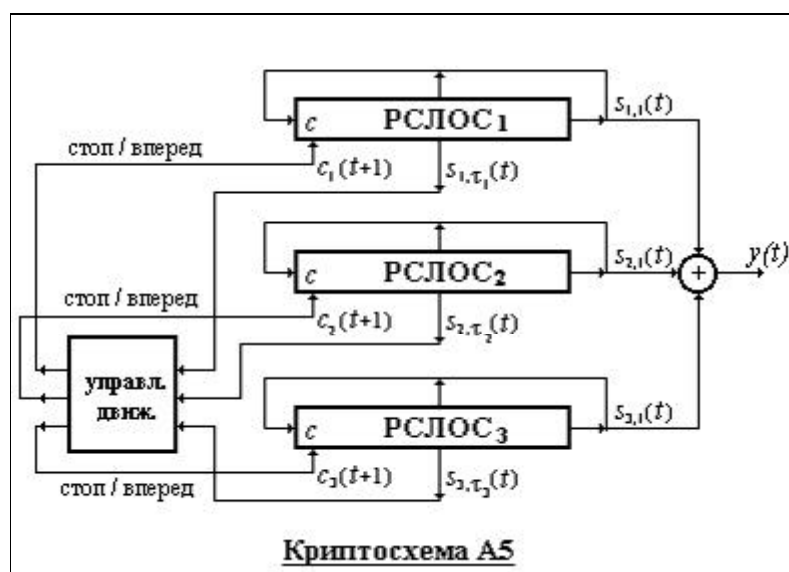
8.2 Алгоритм А5

А5 - это поточный шифр, используемый для шифрования телефонных сеансов в европейской системе мобильной цифровой связи GSM (Group Special Mobile). В открытой печати данная криптосхема официально не публиковалась, по слухам - это французская разработка.

Основные детали алгоритма А5 известны. Британская телефонная компания передала всю техническую документацию Брэдфордскому университету, забыв заключить соглашение о неразглашении информации. Поэтому детали о конструкции А5 понемногу стали просачиваться в печать, и в конце концов кто-то опубликовал схему в INTERNET [346].

8.2.1 Описание криптосхемы

Описание алгоритма дается по работе Йована Голича, представленной на конференции Eurocrypt '97 [152].



Пусть $f_i(z) = \sum_{l=0}^{r_i} f_{i,l}z^l$ обозначает известный примитивный полином обратной связи РСЛОС_{*i*} длины r_i ($i = 1, 2, 3$). Известно, что $r_1 = 19$, $r_2 = 22$, $r_3 = 23$. Известно также, что полиномы обратной связи прорежены (но в описанных криптоаналитических методах вскрытия этот факт не используется).

Пусть $S_i(0) = (x_i(t))_{t=0}^{r_i-1}$ обозначает начальное заполнение РСЛОС_{*i*} и пусть $x_i = (x_i(t))_{t=0}^{\infty}$ обозначает соответствующую последовательность максимальной длины и с периодом $2^{r_i} - 1$, порождаемую в РСЛОС_{*i*} рекуррентой $x_i(t) = \sum_{l=1}^{r_i} f_{i,l}x_i(t-l)$, $t \geq r_i$.

Пусть $S_i(t) = (s_{i,l}(t))_{l=1}^{r_i}$ обозначает состояние РСЛОС_{*i*} в момент $t \geq 0$ в схеме с движением "стоп/вперед", описываемым ниже, и пусть τ_i обозначает средний отвод в регистре РСЛОС_{*i*}, используемый для управления движением. В [346] полагается, что $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 11$, $\tau_3 = 12$. Тогда управляющая движением регистров последовательность $C(t) = (C(t))_{t=1}^{\infty}$ задается как

$$C(t) = g(s_{1,\tau_1}(t-1), s_{2,\tau_2}(t-1), s_{3,\tau_3}(t-1)),$$

где g - это 4-значная мажоритарная функция от трех двоичных переменных, такая что $g(s_1, s_2, s_3) = \{i,j\}$, если $s_i = s_j \neq s_k$ при $i < j$ и $k \neq i,j$; и $g(s_1, s_2, s_3) = \{1,2,3\}$, если $s_1 = s_2 = s_3$. Другими словами, значение управления движением $C(t)$ определяет, какие РСЛОС сдвигаются для генерации выходного бита $y(t)$ как суммы

$$y(t) = s_{1,1}(t) + s_{2,1}(t) + s_{3,1}(t), \quad t \geq 1$$

(в каждом такте сдвигается по меньшей мере два регистра). Пусть $c_i = (c_i(t))_{t=1}^{\infty}$ обозначает двоичную управляющую последовательность для РСЛОС_{*i*} (сдвигающийся, если $c_i(t) = 1$ и стоящий на месте, если $c_i(t) = 0$), которая очевидным образом получается из последовательности управления движением C . Так как последнее уравнение для $y(t)$ формально можно использовать для генерации начального бита $y(0)$ из $S(0)$, то $y = (y(t))_{t=0}^{\infty}$ называют выходной последовательностью. Первые 100 бит выхода $(y(t))_{t=1}^{100}$ отбрасываются, следующие 114 бит используются в качестве гаммы для шифрования одного направления полной дуплексной связи, затем еще 100 бит отбрасываются, а следующие 114 бит используются в качестве гаммы для шифрования сигнала связи обратного направления. Таким образом, зашифрованные сообщения имеют очень короткую длину и часто происходит *ресинхронизация*.

Начальные заполнения РСЛОС определяются в терминах секретного и открытого ключей. Открытый ключ - это известный 22-битовый номер фрейма, генерируемый счетчиком и, следовательно, отличающийся для каждого нового сообщения. Секретный сеансовый ключ длиной 64 бита первым загружается в регистры (начальное заполнение из всех нулей избегается принудительной установкой 1 в выходе последней ячейки), а затем 22-битовый открытый ключ побитно добавляется в последовательности обратной связи каждого регистра в то время, когда они сдвигаются по описанному выше мажоритарному закону. Более строго, если $p = (p(t))_{t=-21}^0$ обозначает открытый ключ, то для каждого t , $-21 \leq t \leq 0$, регистры сначала сдвигаются по заданному закону "стоп/вперед", а затем бит $p(t)$ прибавляется в последнюю ячейку каждого РСЛОС. После 22 таких шагов заполнения РСЛОС образуют секретный ключ сообщения или начальные заполнения регистров при генерации шифрующей гаммы.

Как уже отмечалось, в системах GSM поточный шифр A5 используется для закрытия связи между абонентом и базовой станцией, так что фактически при связи двух абонентов шифрование происходит дважды. Это дает возможность строить криптоаналитическую атаку с известным открытым текстом (если заручиться небольшой поддержкой "помощника" на базовой станции). Кроме того, следует отметить, что 64-битовый секретный сеансовый ключ генерируется с помощью другого алгоритма, исходя из "основного" (master) ключа, специфического для каждого пользователя, и открытого

случайного 128-битового ключа, передаваемого в незащищенной форме с базовой станции на аппарат абонента. Таким образом, успешное вскрытие одного или нескольких сеансовых ключей открывает дверь для криптоаналитических атак на основной ключ пользователя.

8.2.2 Криптоанализ шифра

Лобовое вскрытие. Вскоре после появления криптосхемы А5 в Internet появились и публикации о методах вскрытия этого шифра. В частности, достаточно короткие длины регистров позволяют организовать разновидность лобового вскрытия ключа на основе тотального перебора около 2^{40} возможных вариантов: делается предположение о содержимом первых двух регистров криптосхемы, а затем содержимое третьего регистра восстанавливается по шифрующей гамме и проверяется совместность предположенных заполнений [11] (так называемый метод атаки "*встреча посередине*", см. Раздел 9.1). Строгих оценок для вычислительных затрат этого метода не давалось.

Корреляционный анализ. Известно, что в июне 1994 года д-р Саймон Шеферд из Брэдфордского университета должен был представить на коллоквиуме ИЕЕ в Лондоне свой корреляционный способ вскрытия А5. Однако, в последний момент его выступление было запрещено Штаб-квартирой правительственной связи Великобритании [11]. О корреляционном методе Шеферда известно следующее: (а) для восстановления начальных заполнений используется техника разреженной матрицы (была опубликована в апреле 1993г. в издании "Mobile Europe"); для вскрытия используются приемы из криптоаналитических работ Андерсона [7] и Доусона, Кларка [94].

В 1997 году опубликованы результаты корреляционного анализа А5, проведенного Йованом Голичем [152]. Поставленная им цель - определить начальные заполнения РСЛОС по известному отрезку гаммы, соответствующему одной паре "открытый текст - шифртекст". Установлено, что на самом деле для решения этой задачи требуется всего 64 последовательных бита гаммы. Построен метод, реализующий классическую стратегию "разделяй и вскрывай" и эксплуатирующий специфический для данной схемы закон движения. Средняя вычислительная сложность вскрытия оценивается величиной, примерно равной 2^{40} .

Балансировка "время-память". Голичем [152] построен также метод вскрытия, эксплуатирующий балансировку "время-память" на базе вероятностного "парадокса дней рождений". Метод позволяет вскрывать неизвестное начальное заполнение за известное время для известного отрезка гаммы. Атака приводит к успеху, если $T \cdot M \geq 2^{63.32}$, где T и M - требуемые для вычислений время и память (в 128-битовых словах), соответственно. Время предвычислений оценено величиной $O(M)$, а требуемое количество известных последовательностей гаммы, сгенерированных при разных открытых ключах, составляет около $T / 102$. Например, можно выбрать соотношение параметров $T \approx 2^{27.67}$ и $M \approx 2^{35.65}$.

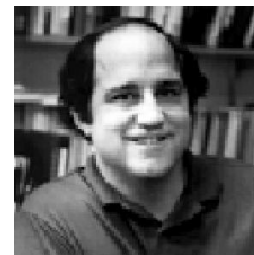
Для получения секретного сеансового ключа по определенному внутреннему состоянию регистров предложена так называемая "*реверсионная атака*", эффективность которой проанализирована с помощью аппарата *критических и субкритических ветвящихся процессов* [16] [171].

Цикловая структура A5. В работе У.Дж. Чамберса [70] приводится любопытный результат относительно цикловой структуры последовательностей, порождаемых всеми возможными начальными состояниями регистров криптосхемы. Оказывается, что свыше 40% ключей алгоритма A5 приводят к циклу, длина которого наименьшая из всех возможных, а именно $(2^{23} - 1) \cdot 4/3$ бит.

8.3 Алгоритм RC4

Существенное повышение производительности микропроцессоров в 1980-е годы вызвало в криптографии усиление интереса к программным методам реализации шифралгоритмов как возможной альтернативе аппаратным схемам на регистрах сдвига. Одним из самых первых подобных криптоалгоритмов, получившим широкое распространение, стал RC4.

Алгоритм RC4 - это поточный шифр с переменной длиной ключа, разработанный в 1987 году Рональдом Райвистом для компании RSA Data Security [346] [319]. Как и его компаньон блочный шифр RC2, RC4 - шифр с переменной длиной ключа, пригодный для быстрого магистрального шифрования. Он очень компактен в терминах размера кода, и особо удобен для процессоров с побайтно-ориентированной обработкой. RC4 может шифровать со скоростью около 1 Мбайт/сек на 33 МГц машине и (аналогично RC2) имеет особый статус, существенно упрощающий получение разрешения на экспорт [115] (схема безболезненно позволяет редуцировать длину ключа). В течение семи лет этот алгоритм был фирменным секретом и детали о его конструкции предоставлялись только после подписания договора о неразглашении.



Рональд Райвист

Но в сентябре 1994 года кто-то анонимно распространил исходный код алгоритма через Internet. Пользователи Сети, имеющие легальные шифрсредства фирмы RSA, реализующие RC4, подтвердили совместимость кода с криптопрограммой. Обеспокоенная компания попыталась затолкать джинна обратно в бутылку, провозгласив, что, несмотря на нелегальную публикацию, алгоритм продолжает оставаться коммерческой тайной, но было уже слишком поздно. Через Internet описание алгоритма широко распространилось по миру, его обсуждают, анализируют и включают в учебные криптографические курсы.

В настоящее время алгоритм RC4 реализован в десятках коммерческих криптопродуктов, включая Lotus Notes, Apple Computer's AOCE, Oracle Secure SQL, а также является частью спецификации стандарта сотовой связи CDPD.

8.3.1 Описание криптосхемы

Приведем два описания криптоалгоритма - "для программиста" и "для криптографа".

Первое описание дается по книге Брюса Шнайера [346]. Криптогенератор функционирует независимо от открытого текста. Генератор имеет подстановочную таблицу (*S*-блок 8 x 8): S_0, S_1, \dots, S_{255} . Входами генератора являются замененные по подстановке числа от 0 до 255, и эта подстановка является функцией от ключа изменяемой длины. Генератор имеет два счетчика i и j , инициализируемых нулевым значением.

Для генерации случайного байта гаммы выполняются следующие операции:

```

i = (i+1) mod 256
j = (j+Si) mod 256
swap Si and Sj
t = (Si+Sj) mod 256
K = St

```

Байт K складывается операцией XOR с открытым текстом для выработки шифртекста, либо XOR'ится с шифртекстом для получения байта открытого текста. Шифрование происходит весьма быстро - примерно в 10 раз быстрее DES-алгоритма.

Инициализация S-блока столь же проста. На первом шаге он заполняется линейно: $S_0 = 0, S_1 = 1, \dots, S_{255} = 255$. Затем еще один 256-байтный массив полностью заполняется ключом, для чего ключ повторяется соответствующее число раз в зависимости от длины: K_0, K_1, \dots, K_{255} . Индекс j выставляется в нуль. Затем:

```

for i=0 to 255
  j = (j+Si+Ki) mod 256
  swap Si and Sj

```

И это все (для программиста). Схема показывает, что RC4 может принимать примерно 2^{1700} ($256! \times 256^2$) возможных состояний, а это очень много. S-блок медленно изменяется в процессе работы: параметр i обеспечивает изменение каждого элемента, а j отвечает за то, чтобы эти элементы изменялись случайным образом.

"Криптографическое" описание дается по работе Йована Голича [151]. Фактически, RC4 представляет собой семейство алгоритмов, задаваемых параметром n , который является положительным целым с рекомендованным типичным значением $n = 8$. Внутреннее состояние генератора RC4 в момент времени t состоит из таблицы $S_t = (S_t(l))_{l=0}^{2^n-1}$, содержащей 2^n n -битных слов и из двух n -битных слов-указателей i_t и j_t . Таким образом, размер внутренней памяти составляет $M = n2^n + 2n$ бит. Пусть выходное n -битное слово генератора в момент t обозначается как Z_t . Пусть начальные значения $i_0 = j_0 = 0$. Тогда функция следующего состояния и функция выхода RC4 для каждого $t \geq 1$ задается следующими соотношениями:

$$i_t = i_{t-1} + 1$$

$$j_t = j_{t-1} + S_{t-1}(i_t)$$

$$S_t(i_t) = S_{t-1}(j_t), \quad S_t(j_t) = S_{t-1}(i_t)$$

$$Z_t = S_t(S_t(i_t) + S_t(j_t)),$$

где все сложения выполняются по модулю 2^n . Подразумевается, что все слова, кроме подвергаемых своппину, остаются теми же самыми. Выходная последовательность n -битных слов обозначается как $Z = (Z_t)_{t=1}^{\infty}$.

Начальная таблица S_0 задается в терминах ключевой последовательности $K = (K_l)_{l=0}^{2^n-1}$ с использованием той же самой функции следующего состояния, начиная от

таблицы единичной подстановки $(J)_{l=0}^{2^n-1}$. Более строго, пусть $j_0 = 0$ и для каждого $1 \leq t \leq 2^n$ вычисляется $j_t = (j_{t-1} + S_{t-1}(t-1) + K_{t-1}) \bmod 2^n$, а затем переставляются местами $S_{t-1}(t-1)$ и $S_{t-1}(j_t)$. На последнем шаге порождается таблица, представляющая S_0 . Ключевая последовательность K составляется из секретного ключа, возможно повторяющегося, и рандомизирующего ключа, передаваемого в открытом виде в целях ресинхронизации.

8.3.2 Криптоанализ

До последнего времени в открытой литературе практически не было публикаций криптоаналитических работ по алгоритму RC4.

Компания RSA Data Security объявила, что шифр обладает иммунитетом к методам линейного и дифференциального криптоанализа, высоко нелинеен и непохоже, чтобы у него были короткие циклы. Обычно цитируется заключение закрытой работы криптографа RSA Labs Мэтта Робшоу [325]: "Не имеется известных слабых ключей и, хотя нет доказательства для нижней границы периодов последовательностей RC4, проведенный теоретический анализ показывает, что период в подавляющем большинстве случаев превышает 10^{100} . Тщательный и всеобъемлющий анализ стойкости RC4 не выявил никаких оснований подвергать сомнению стойкость, обеспечиваемую генератором RC4".

Первой открытой публикацией можно считать работу Йована Голича [151], представленную на конференции Eurocrypt '97. В ней отмечается, что для последовательностей, генерируемых RC4, не подходят методы статистического анализа, применяющиеся к генераторам на базе РСЛОС. Но, с другой стороны, как показано в работах [144][150], для блоков, размер которых превышает M (размер внутренней памяти генератора), всегда существует линейная статистическая слабость или так называемая "линейная модель". Такую модель можно эффективно определять с помощью метода аппроксимации линейной последовательной схемой - АЛПС [141] (см. Раздел 7.3.3). Линейная статистическая слабость - это линейное соотношение между битами гаммы, которое выполняется с вероятностью, отличающейся от $1/2$.

Главная цель работы Голича - с помощью метода АЛПС вывести линейные модели для RC4. Метод АЛПС заключается в нахождении и решении последовательной линейной схемы, которая аппроксимирует генератор гаммы и приводит к линейным моделям с относительно большим корреляционным коэффициентом c , где вероятность соответствующего линейного соотношения между битами гаммы составляет $(1+c)/2$.

При анализе используется техника *двоичных производных*. Пусть $z = (z_t)_{t=1}^{\infty}$ обозначает последовательность самых младших бит слов выхода RC4, и пусть $\dot{z} = (\dot{z}_t = z_t + z_{t+1})_{t=1}^{\infty}$ и $\ddot{z} = (\ddot{z}_t = z_t + z_{t+2})_{t=1}^{\infty}$ обозначают ее первую и вторую двоичные производные, соответственно. Показано, что \dot{z} не коррелирует ни с 1, ни с 0, но \ddot{z} коррелирует с 1 с корреляционным коэффициентом, близким к $15 \cdot 2^{-3n}$ при больших 2^n . Поскольку длина выходной последовательности, требуемая для выявления статистической слабости с корреляционным коэффициентом c , составляет $O(c^{-2})$, то эта длина равна примерно $64^n/225$. Например, если $n = 8$, как рекомендуется в большинстве приложений, то требуемая длина близка к $2^{40} \approx 10^{12}$. Результаты компьютерных экспериментов согласуются с теоретическими предсказаниями. Поскольку результирующий коэффициент корреляции существенно превышает величину $2^{M/2}$, то установленную линейную модель

следует рассматривать как статистическую слабость генератора, по крайней мере в теоретическом аспекте.

С практической точки зрения данная линейная модель может быть использована для выделения по шифртексту генератора RC4 среди других криптосистем, а также для восстановления параметра n .

8.4 Алгоритм SEAL

SEAL - оптимизированный под программную реализацию поточный шифр, который разработали криптографы IBM Фил Рогуэй и Дон Копперсмит (название шифра - аббревиатура от **S**oftware-**o**ptimized **E**ncryption **A**lgorithm) [326]. SEAL описан как увеличивающая длину псевдослучайная функция, что очевидным образом может быть использовано в качестве генератора шифрующей гаммы для поточного шифра. Алгоритм ориентирован на 32-битные процессоры: для работы ему требуются восемь 32-битных регистров и кэш-память в несколько килобайт. С помощью сравнительно медленной операции SEAL на предварительном этапе преобразует ключевую функцию шифрования в набор таблиц. Затем эти таблицы используются для ускоренного зашифрования и расшифрования сообщений, затрачивая около пяти машинных инструкций на байт текста (для сравнения, DES-алгоритму требуется в 10-30 раз больше). На компьютере с 486-процессором шифрование обеспечивается со скоростью 58 мегабит в секунду. Возможно, что сегодня среди серьезных опубликованных алгоритмов это самый быстрый программный шифр [346].



Фил Рогуэй

8.4.1 Семейство псевдослучайных функций

Новизна SEAL в том, что на самом деле это не традиционный поточный шифр: это *семейство псевдослучайных функций*. Получая на входе 160-битный секретный ключ k и 32-битный (открытый ключ) n , SEAL растягивает n в L -битную последовательность $k(n)$. Длина L может принимать любое значение, не превышающее 64 килобайта. В конструкции используется то обстоятельство, что если ключ k выбран случайно, то решение задачи нахождения $k(n)$ по значению L -битной функции от n вычислительно недостижимо.

Практический эффект того, что SEAL является семейством псевдослучайных функций: данный алгоритм оказывается особо полезен в тех приложениях, где традиционные поточные шифры неприменимы. В большинстве поточных шифров битовая последовательность гаммы генерируется в одном направлении: зная ключ и находясь на позиции i , единственный способ определить бит на позиции j - это сгенерировать все биты вплоть до j -го. Но в семействе псевдослучайных функций ситуация иная: легкий доступ возможен к любой желаемой позиции гаммы. Это очень полезное свойство.

Представим ситуацию, когда требуется защитить содержимое жесткого диска. Каким образом эффективно зашифровать каждый 512-байтный сектор? С помощью семейства псевдослучайных функций типа SEAL можно зашифровать содержимое сектора n путем наложения операцией XOR гамм-последовательности $k(n)$. Таким образом получается, что на весь диск как бы наложена длинная псевдослучайная последовательность, каждый фрагмент которой можно без труда вычислить по отдельности.

Семейство псевдослучайных функций может также упростить проблемы синхронизации, возникающие при эксплуатации стандартных поточных шифров. Предположим, что зашифрованные сообщения передаются по каналу, который иногда теряет отдельные пакеты. С помощью описанного семейства функций и ключа k можно шифровать n -ый пакет с помощью $k(n)$. Тогда получателю для успешного расшифрования сообщения не требуется обязательного получения всех пакетов [346].

Последующее описание алгоритма дается по работе авторов [326].

8.4.2 Особенности SEAL

Предвычисление ключа. В типичных приложениях быстрого программного шифрования сеансовый ключ a , отвечающий за защиту данного сеанса связи, задается в предварительной (установочной) стадии сеанса. Поэтому связанные с разворачиванием этого ключа операции не считаются критичными по времени. В шифре SEAL сочтено приемлемым затрачивать некоторое количество миллисекунд на то, чтобы отобразить (короткий) ключ a в (более развернутое) представление криптографического преобразования, специфического для этого ключа.

Псевдослучайная функция, увеличивающая длину. Функция SEAL - это тип криптографического объекта, именуемый "псевдослучайной функцией". Такие объекты впервые были определены в работе Голдрайха, Голдвассера и Микали [134]. Функция SEAL, в отличие от многих других псевдослучайных функций, является увеличивающей длину выхода по сравнению со входом: под управлением 160-битного ключа a функция отображает 32-битную последовательность n в L -битную последовательность $SEAL_a(n)$. Число L может принимать большие или меньшие значения в зависимости от требований конкретного приложения, наиболее приемлемыми для реальных нужд считаются величины от 512 до 4096 байт.

Как псевдослучайная функция, $SEAL_a(\cdot)$ должна "выглядеть как случайная функция", если параметр a случаен и неизвестен. Другими словами, если ключ выбран случайно из $\{0,1\}^{160}$, то противник, как бы он ни был умен, не сможет определить эту функцию.

Псевдослучайную функцию можно использовать в качестве основы для хорошего поточного шифра. В таком поточном шифре шифрование сообщения зависит не только от ключа a и сообщения x , но также и от "позиции" данного сообщения в потоке данных. Например, n может являться физическим адресом фрагмента данных на магнитном носителе. В любом случае шифрование подпоследовательности x начиная с позиции n задается выражением $(n, x \oplus SEAL_a(n))$, где используется $L = |x|$ бит выхода $SEAL_a(n)$.

Табличный шифр. На начальном этапе разработки решался вопрос, сделать ли шифр непосредственно реализующим в процессе шифрования сложные операции (типа хэширования MD5 или SHA), либо же вместо этого реализовать его в виде большого

размера таблицы (как в блочном шифре *Khufu* или программном варианте DES). Выбор был сделан в пользу табличного варианта, поскольку тот обещал больше преимуществ в скорости работы и простоте конструкции. При выборе суммарного размера таблиц оптимальной была сочтена величина 3 килобайта.

8.4.3 Описание алгоритма

Обозначения. Всюду далее 32-битная подпоследовательность именуется "слово", а 8-битная подпоследовательность - "байт". Пустая подпоследовательность обозначается λ . Биты подпоследовательности x длины t обозначаются как $x_0 x_1 \dots x_{t-1}$. Шестнадцатиричные числа пишутся с помощью предшествующего им префикса "0x", символы "a"- "f" представляют числа 10-15, соответственно. Как $y \gg t$ обозначается правый циклический сдвиг слова y на t бит; другими словами, i -ый бит в $y \gg t$ - это $y_{(i-t) \bmod 32}$. Символами \wedge, \vee, \oplus обозначены побитовые операции AND, OR и XOR; как \bar{A} обозначен комплемент A , как $A+B$ - сумма двух целых без знака, игнорирующая перенос (то есть сумма чисел по $\bmod 2^{32}$). Как $\|$ обозначен оператор конкатенации, как $odd(\cdot)$ - предикат, истинный тогда и только тогда, когда его аргумент - четное число.

Длина выхода. Напомним, что SEAL полагается порождающим выход переменной длины. Пусть L - желаемое количество выходных бит. Подразумевается, что L имеет достаточно большую границу, скажем $L \leq 64 \cdot 1024 \cdot 8$. Алгоритм прекращает генерацию бит, как только порождено L' бит, где L' - наименьшее кратное 128, большее или равное L .

Отображение ключа в таблицы. Первая задача - задать таблицы T, R и S , каждая из которых зависит только от ключа a . Единственное предназначение ключа a в алгоритме - задать три этих таблицы.

Таблицы задаются с помощью функции G , построенной непосредственно на основе известного алгоритма хэширования *SHA*, являющегося федеральным стандартом США [276].

Описание функции генерации таблиц

Задается $G_a(i)$ для 160-битовой подпоследовательности a и целого $0 \leq i < 2^{32}$. Параметр i рассматривается как 32-битная подпоследовательность, значение которой - двоичное число без знака i . Описание функции взято целиком из Разделов 5-7 документа [276] и здесь приводится просто для удобства пользователей.

Сначала даются следующие определения. Для $0 \leq t \leq 19$ положим $K_t = 0x5a827999$ и $f_t(B, C, D) = (B \wedge C) \vee (\bar{B} \wedge D)$. Для $20 \leq t \leq 39$ положим $K_t = 0x6ed9eba1$ и $f_t(B, C, D) = B \oplus C \oplus D$. Для $40 \leq t \leq 59$ положим $K_t = 0x8f1bbcdc$ и $f_t(B, C, D) = (B \wedge C) \vee (B \wedge D) \vee (C \wedge D)$. Для $60 \leq t \leq 79$ положим $K_t = 0xca62c1d6$ и $f_t(B, C, D) = B \oplus C \oplus D$.

Исходная 160-битная подпоследовательность a разбивается на пять 32-битных слов, $a = H_0 H_1 H_2 H_3 H_4$, а 512-битная подпоследовательность M_1 полагается равной $i \parallel 0^{480}$. Затем выполняется следующая обработка:

- Разделить M_1 на 16 слов W_0, W_1, \dots, W_{15} , где W_0 - самое левое слово, так что $W_0 = i, W_1 = W_2 = \dots = W_{15}$.
- Для $t = 16$ до 79 пусть $W_t = W_{t-3} \oplus W_{t-8} \oplus W_{t-14} \oplus W_{t-16}$.

с. Пусть $A = H_0, B = H_1, C = H_2, D = H_3, E = H_4$.

d. Для $t = 0$ до 79 выполнить

$$\text{TEMP} = A \ggg 27 + f_t(B, C, D) + E + W_t + K_t$$

$$E = D; D = C; C = B \ggg 2; B = A; A = \text{TEMP}$$

e. $H_0 = H_0 + A; H_1 = H_1 + B; H_2 = H_2 + C; H_3 = H_3 + D; H_4 = H_4 + E;$

После обработки M_1 значение функции $G_a(i)$ - это 160-битная подпоследовательность $H_0H_1H_2H_3H_4$.

Делается переиндексация функции G для построения функции Γ , образами которой являются 32-битные слова вместо 160-битных. Функция Γ задается выражением $\Gamma_a(i) = H_{i \bmod 5}^i$, где $H_0^i H_1^i H_2^i H_3^i H_4^i = G_a(\lfloor i / 5 \rfloor)$. Таким образом, таблица значений Γ - это в точности таблица значений G , считываемая слева направо и сверху вниз.

Теперь определяются

$$T[i] = \Gamma_a(i) \quad \text{для всех } 0 \leq i < 512,$$

$$S[j] = \Gamma_a(0 \times 1000 + j) \quad \text{для всех } 0 \leq j < 256, \text{ и}$$

$$R[k] = \Gamma_a(0 \times 2000 + k) \quad \text{для всех } 0 \leq k < 4 \lceil (L - 1) / 8192 \rceil.$$

Отметим, что вычисление этих таблиц требует вычисления функции компрессии SHA применительно к переменному количеству блоков - 131 раз для получения выхода в 512 байт, 207 раз для выхода максимальной длины в 64 килобайта.

Псевдослучайная функция. Имея число L , таблицы T, R и S , заданные ключом a , и 32-битный индекс n , представленный ниже алгоритм растягивает n в L -битную псевдослучайную последовательность y .

Алгоритм SEAL (отображение 32-битного индекса в L бит)

function SEAL_a(n)

$y = \lambda;$

for $l \leftarrow 0$ **to** ∞ **do**

 Initialize_a($n, l, A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4$);

for $i \leftarrow 1$ **to** 64 **do**

$P \leftarrow A \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad B \leftarrow B + T[P/4]; \quad A \leftarrow A \ggg 9; \quad B \leftarrow B \oplus A;$

$Q \leftarrow B \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad C \leftarrow C \oplus T[Q/4]; \quad B \leftarrow B \ggg 9; \quad C \leftarrow C + B;$

$P \leftarrow (P + C) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad D \leftarrow D + T[P/4]; \quad C \leftarrow C \ggg 9; \quad D \leftarrow D \oplus C;$

$Q \leftarrow (Q + D) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad A \leftarrow A \oplus T[Q/4]; \quad D \leftarrow D \ggg 9; \quad A \leftarrow A + D;$

$P \leftarrow (P + A) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad B \leftarrow B \oplus T[P/4]; \quad A \leftarrow A \ggg 9;$

$Q \leftarrow (Q + B) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad C \leftarrow C + T[Q/4]; \quad B \leftarrow B \ggg 9;$

$P \leftarrow (P + C) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad D \leftarrow D \oplus T[P/4]; \quad C \leftarrow C \ggg 9;$

$Q \leftarrow (Q + D) \& 0 \times 7 \text{fc}; \quad A \leftarrow A + T[Q/4]; \quad D \leftarrow D \ggg 9;$

$y \leftarrow y \parallel B + S[4i - 4] \parallel C \oplus S[4i - 3] \parallel D + S[4i - 2] \parallel A \oplus S[4i - 1];$

if $|y| \geq L$ **then return** ($y_0 y_1 \dots y_{L-1}$);

if odd(i) **then** (A, C) \leftarrow ($A + n_1, C + n_2$)

else (A, C) \leftarrow ($A + n_3, C + n_4$)

(В качестве комментария: все деления на 4 - это на самом деле не деления и даже не сдвиги, просто индексирование таблицы осуществлено в единицах байтов, а не слов. Это более эффективно на некоторых вычислительных платформах.)

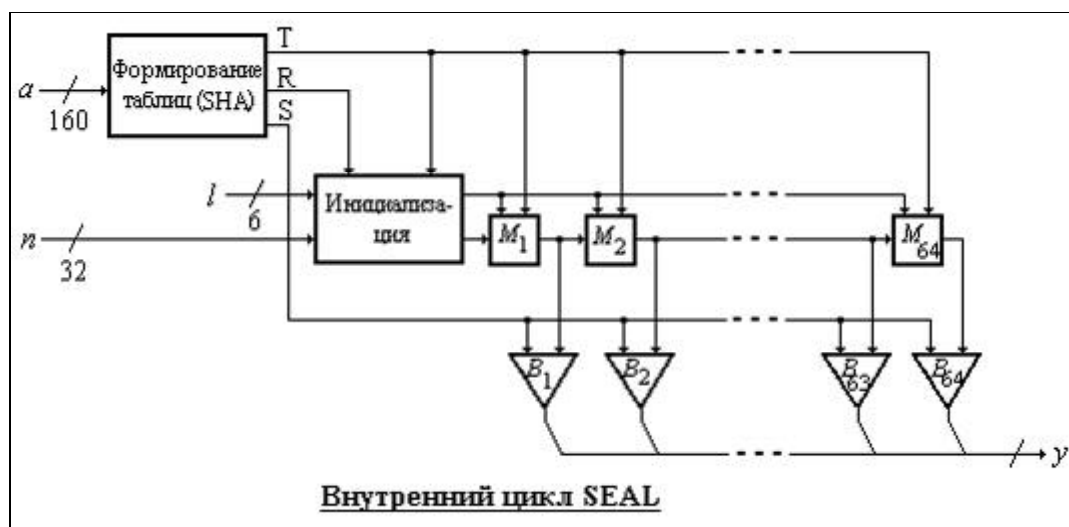
Данный алгоритм использует подпрограмму Initialize для отображения n и l в слова $A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4$. Эта процедура инициализации заключается в следующем:

Процедура инициализации SEAL

```

procedure Initializea( $n, l, A, B, C, D, n_1, n_2, n_3, n_4$ )
 $A \leftarrow n \oplus R[41]$ ;
 $B \leftarrow (n \ggg 8) \oplus R[41+1]$ ;
 $C \leftarrow (n \ggg 16) \oplus R[41+2]$ ;
 $D \leftarrow (n \ggg 24) \oplus R[41+3]$ ;
for  $j \leftarrow 1$  to 2 do
     $P \leftarrow A \& 0x7fc$ ;  $B \leftarrow B + T[P/4]$ ;  $A \leftarrow A \ggg 9$ ;
     $P \leftarrow B \& 0x7fc$ ;  $C \leftarrow C + T[P/4]$ ;  $B \leftarrow B \ggg 9$ ;
     $P \leftarrow C \& 0x7fc$ ;  $D \leftarrow D + T[P/4]$ ;  $C \leftarrow C \ggg 9$ ;
     $P \leftarrow D \& 0x7fc$ ;  $A \leftarrow A + T[P/4]$ ;  $D \leftarrow D \ggg 9$ ;
 $(n_1, n_2, n_3, n_4) \leftarrow (A, B, C, D)$ ;
 $P \leftarrow A \& 0x7fc$ ;  $B \leftarrow B + T[P/4]$ ;  $A \leftarrow A \ggg 9$ ;
 $P \leftarrow B \& 0x7fc$ ;  $C \leftarrow C + T[P/4]$ ;  $B \leftarrow B \ggg 9$ ;
 $P \leftarrow C \& 0x7fc$ ;  $D \leftarrow D + T[P/4]$ ;  $C \leftarrow C \ggg 9$ ;
 $P \leftarrow D \& 0x7fc$ ;  $A \leftarrow A + T[P/4]$ ;  $D \leftarrow D \ggg 9$ ;
    
```

Для пояснения сути функционирования алгоритма воспользуемся комментариями и схемой из энциклопедии Брюса Шнайера [346].



По своей сути, таблица T представляет собой 2-килобайтный S-блок 9×32 . Также SEAL использует четыре 32-битных регистра A, B, C, D , начальные значения которых задаются индексом n и строящимися на основе ключа таблицами R и T . Эти регистры модифицируются через несколько итераций, каждая из которых содержит 8 циклов. В каждом таком цикле 9 бит первого регистра (A, B, C или D) используются для получения

индекса в таблице T . Значение, взятое из T с помощью этого индекса, либо прибавляется, либо XOR'ится к содержимому второго регистра (A, B, C или D). Затем первый регистр циклически сдвигается на девять позиций. В некоторых циклах второй регистр подвергается дальнейшей модификации при помощи сложения или XOR с содержимым (теперь сдвинутого) первого регистра. После 8 циклов такой работы A, B, C и D добавляются к шифрующей гамме, но предварительно на них накладываются (сложением или XOR) маски - определенные слова из S . В целом итерация завершается добавлением к A и C дополнительных значений, зависящих от n_1, n_2, n_3, n_4 ; от каких именно - зависит от номера итерации.

Важными идеями данной конструкции представляются следующие:

1. Использование большого, секретного, получаемого из ключа S -блока (T).
2. Перебегающее использование некоммутирующих арифметических операций (сложение и XOR).
3. Использование для управления шифром внутренних состояний, которые напрямую не проявляются в гамме (значения n_i , модифицирующие A и C в конце каждой итерации)
4. Изменение цикловой функции в соответствии с номером цикла, и изменение итерационной функции в соответствии с номером итерации.

8.4.4 Стойкость SEAL

Алгоритм пока еще достаточно нов, и на сегодняшний день не опубликовано работ, содержащих какие-либо соображения о методах вскрытия или слабостях SEAL. Отмечаются лишь его глубокая продуманность и сильные конструктивные идеи. Кроме того, Дон Копперсмит (помимо прочего, соавтор знаменитого DES) имеет в криптографическом сообществе репутацию одного из наиболее проникательных криптоаналитиков [346].

8.5 Обзор криптосхем 1990-х годов

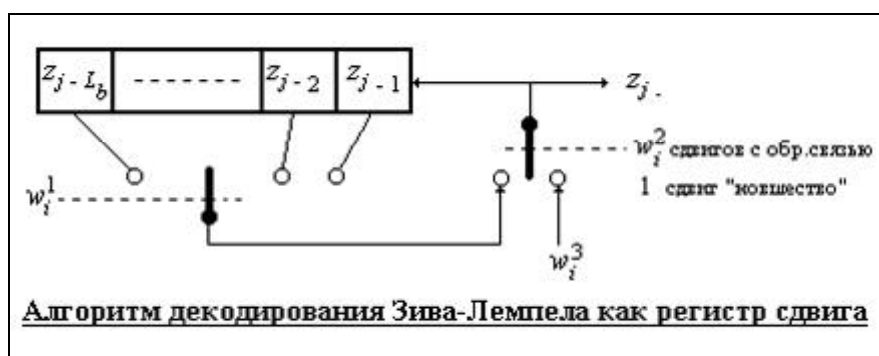
8.5.1 Фильтр-генератор на основе алгоритма сжатия данных Зива-Лемпела

В 1990 году криптограф голландской компании "Philips Crypto" Цеес Янсен и его коллега по Делфтскому университету Дик Бёкке предложили новую схему генератора [178], основанного на *алгоритме компрессии данных Зива-Лемпела*. В частности, предложено к "кодовым словам", порождаемым РСЛОС, применять алгоритм декодирования Зива-Лемпела. Показано, что генерируемые таким образом последовательности имеют высокую линейную сложность и хорошие статистические свойства. Данный генератор можно рассматривать как РСЛОС, выход которого "фильтруется" нелинейной функцией, содержащей память. С точки зрения простоты реализации данная конструкция рассматривается как весьма эффективная.

Алгоритм сжатия данных Зива-Лемпела. Универсальный алгоритм для компрессии последовательных данных представлен в [409]. Этот алгоритм основан на концепции Лемпела и Зива о сложности последовательности, разработанной в [408], и использует принцип копирования фрагментов максимальной длины из буфера, содержащего фиксированное число самых последних знаков выхода. Суть идеи в том, что всякая последовательность может быть "разобрана по частям" на следующие друг за другом компоненты (подпоследовательности). Каждая компонента является копией некоторой подпоследовательности, появлявшейся в последовательности ранее, за исключением последнего знака компоненты, который именуется "новшеством". Таким образом, каждая компонента полностью описывается указателем на начальную позицию подпоследовательности, подлежащей копированию, длиной этой подпоследовательности и знаком-новшеством. В целом это приводит к компрессии данных.

В алгоритме кодирования применяется буфер длины L_b , который содержит последние L_b знаков некоторой последовательности z . На начальном этапе буфер заполняется некоторой фиксированной последовательностью. Следующие друг за другом подпоследовательности в z кодируются путем отыскивания такой самой длинной подпоследовательности в буфере, которую можно скопировать для получения z . Длина подпоследовательности, копируемой из буфера, также ограничена некоторым заранее определенным значением L_s . Таким образом, кодовые слова состоят из указателя на стартовую позицию в буфере ("указателя"), длины копии и знака-новшества.

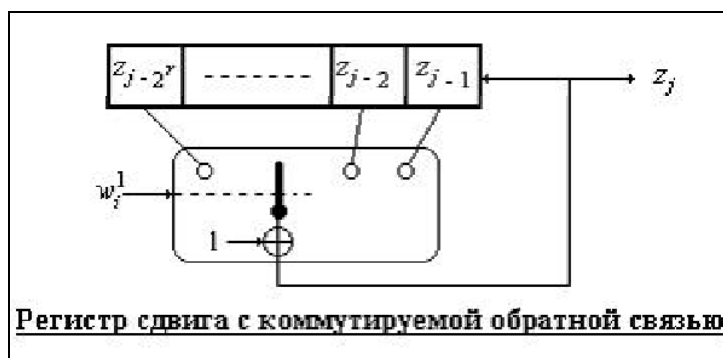
Алгоритм декодирования работает похожим образом. Он также использует буфер длины L_b , который содержит последние L_b знаков последовательности z из которой происходит копирование. Этот алгоритм может быть весьма элегантно реализован с помощью регистра сдвига.



Если $W_i = w_i^1 w_i^2 w_i^3$ обозначает i -ое кодовое слово, то w_i^1 обозначает позицию точки съема в регистре сдвига, сдвигающемся ко входу; w_i^2 обозначает количество сдвигов, выполняемых регистром в этом режиме обратной связи; а w_i^3 обозначает знак-новшество, вдвигаемый в данный регистр без обратной связи.

Генерация последовательностей алгоритмом декодирования Зива-Лемпела. Алгоритм декодирования Зива-Лемпела упрощается, если сократить алфавит знаков до $GF(2)$. В этом случае знак-новшество не нужно кодировать, поскольку он комплементарно дополняет знак, завершающий подпоследовательность, копируемую из регистра. Так что теперь w_i^2 сдвигов выполняются в режиме обратной связи, а за этим следует один сдвиг с комплементарно дополненной обратной связью.

Идея Янсена-Бёкке - использовать двоичный алгоритм декодирования Зива-Лемпела в качестве генератора последовательностей. Для этого кодовые слова, включающие в себя w_i^1 и w_i^2 , генерируются регистрами сдвига с линейной обратной связью. Эксперименты показывают, что полученные таким образом выходные последовательности очень похожи на действительно случайные. В то же время генератор таких последовательностей с большим трудом поддается детальному анализу, поэтому авторы ограничились особым случаем, когда $w_i^2 = 0$ для всех i , как представлено на следующем рисунке.



Данный регистр получил название "регистр сдвига с коммутируемой обратной связью", и относительно его свойств получены следующие результаты.

Пусть $\underline{s}_0, \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{r-1}$ обозначают периодические последовательности с периодами p_0, p_1, \dots, p_{r-1} , то есть $\underline{s}_i = (s_{0,i}, s_{1,i}, \dots, s_{p_i-1,i})^\infty$ со всеми $s_{j,i} \in GF(2)$. Пусть также \underline{W}_j обозначает двоичную r -грамму $(s_{j,0}, s_{j,1}, \dots, s_{j,r-1})$, которая управляет позицией точки съема. Последовательность r -грамм \underline{W}_j является периодической с периодом $p = \text{НОК}(p_0, p_1, \dots, p_{r-1})$. Подразумевается, что длина регистра сдвига $L_b = 2^r$. Кроме того, подразумевается, что если $\underline{W}_j = (0, \dots, 0)$, то точка съема на ячейке z_{j-1} ; если $\underline{W}_j = (0, \dots, 1)$, то точка съема на ячейке z_{j-2} ; а если $\underline{W}_j = (1, \dots, 1)$, то точка съема на ячейке z_{j-2^r} .

Выходная последовательность \underline{z} удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} z_j &= z_{j-I(\underline{W}_j)} + 1 \\ &= F(\underline{W}_j, z_{j-1}, \dots, z_{j-2^r}) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{2^r-1} F_i(\underline{W}_j) z_{j-i-1}, \end{aligned}$$

где $I(\underline{W}_j)$ обозначает целочисленное представление r -граммы \underline{W}_j , а коммутирующие функции $F_i, i = 0, 1, \dots, 2^r - 1$, - это отображения из $GF(2)^r$ на $GF(2)$, определенные как

$$F_i(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{если } I(\underline{X}) = i, \\ 0, & \text{если } I(\underline{X}) \neq i. \end{cases}$$

Приведенное рекуррентное соотношение показывает, что данный генератор последовательностей можно рассматривать как регистр сдвига с нелинейной функцией обратной связи, содержащей память.

Период. Порождаемая последовательность \underline{z} в конечном счете становится периодической. Показано, что если коммутирующая последовательность порождается линейным регистром сдвига, или другими словами, если r последовательностей $\underline{s}_0, \underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{r-1}$ снимаются с r различных ячеек РСЛОС с неприводимым полиномом обратной связи и периодом p , и если выполняется условие $\underline{W}_j = \underline{W}_{j-1} = \dots = \underline{W}_{i+2-2^r} = (0, \dots, 0)$, то период p_d последовательности \underline{d} равен p . Последовательность \underline{d} получена из \underline{z} прибавлением ее же версии, задержанной на один такт, то есть $d_j = z_j + z_{j-1}$ для всех j . Из соотношения между \underline{d} и \underline{z} легко видеть, что период p_z последовательности \underline{z} равен p_d , если количество единиц в одном периоде \underline{d} четно. Если же количество единиц нечетно, то $p_z = 2p_d$, и вторая половина \underline{z} - комплементарное дополнение первой половины.

Линейная сложность. Линейная сложность последовательности \underline{d} определялась экспериментально для различных значений r и длин L РСЛОС, управляющего обратной связью. Результаты экспериментов подтвердили, что \underline{d} имеет тот же период, что и управляющие коммутацией последовательности. Приведенные в таблице результаты показывают, что линейная сложность имеет значения, очень близкие соответствующим периодам, что и следует ожидать от периодических случайных последовательностей [330]. В то же время установлено, что для некоторых комбинаций РСЛОС и значений r появляются вырожденные случаи поведения.

| Линейная сложность \underline{d} | | | | |
|------------------------------------|--------|--------------------------|---------|---------|
| Полином управляющего РСЛОС | Период | $\Lambda(\underline{d})$ | | |
| | | $r = 1$ | $r = 2$ | $r = 3$ |
| $x^3 + x + 1$ | 7 | 6 | | |
| $x^4 + x + 1$ | 15 | 12 | 10 | 14 |
| $x^5 + x^2 + 1$ | 31 | 30 | 31 | 31 |
| $x^6 + x + 1$ | 63 | 48 | 56 | 60 |
| $x^7 + x^3 + 1$ | 127 | 126 | 127 | 120 |
| $x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ | 255 | 250 | 255 | 254 |
| $x^9 + x^4 + 1$ | 511 | 510 | 511 | 510 |
| $x^{10} + x^3 + 1$ | 1023 | 1007 | 1013 | 1022 |
| $x^{11} + x^2 + 1$ | 2047 | 2046 | 2047 | 2047 |

8.5.2 Модифицированный линейный конгруэнтный генератор

В 1993 году известный английский криптограф У.Дж. Чамберс предложил две новые схемы поточного шифрования [G144]. Первая схема, построенная на основе регистра сдвига и арифметики по модулю 2^e , является линейным конгруэнтным генератором, модифицированным для повышения криптографической стойкости. Второй генератор - каскад регистров с неравномерным движением, где несколько бит передаются одновременно, претерпевая преобразования в инвертируемых S -блоках (см. Раздел 8.5.3). Обе криптосхемы имеют ряд общих черт: (а) их можно рассматривать как каскады регистров сдвига с примитивной обратной связью; (б) имеется теоретический аппарат для

оценки их периодов (и линейных эквивалентов); (в) они могут иметь многобитный выход; (г) их ключевое пространство может быть очень большим.

Описание схемы. Рассмотрим линейное рекуррентное соотношение вида

$$a_{t+n} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j a_{t+j} \bmod 2^e, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

где a_0, a_1, \dots, a_{n-1} задают начальные условия. Здесь a_t и c_t - e -битные целые, по крайней мере одно из значений a_t четное. Двоичный выход генератора можно получать взятием самых старших бит каждого a_t , а целочисленный выход - взятием k самых старших бит каждого a_t ($k \leq e$). Такой подход особо удобен при реализации генератора на определенных специализированных процессорах для обработки цифровых сигналов (*DSP*), имеющих для этого встроенные возможности. Данный генератор является линейным конгруэнтным генератором, и для повышения его криптографической стойкости предлагается использовать функцию побитового XOR как источник нелинейности внутри рекурсии. Конкретно, предложено преобразование вида

$$a_t = \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j a_{t+j} \bmod 2^e \right) \text{XOR} \left(\sum_{j=0}^{n-1} d_j a_{t+j} \bmod 2^e \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Базовый полином такого генератора $h(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} (c_j + d_j)x^j \bmod 2$ - примитивный двоичный многочлен.

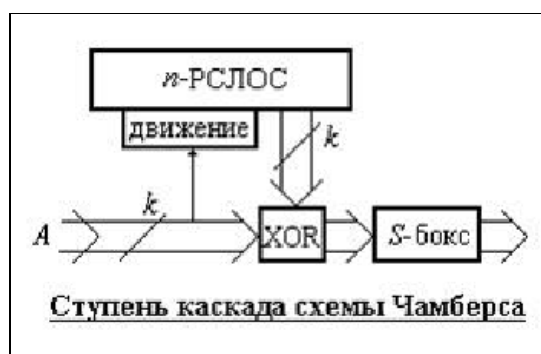
Период линейного генератора. Пусть a_t имеет двоичное разложение $a_t = \sum_{i=0}^{e-1} a_{t,i} 2^i$, $a_{t,i} \in \{0,1\}$. Обозначим последовательность $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ как α , а двоичную последовательность $\{a_{0,i}, a_{1,i}, a_{2,i}, \dots\}$ как α_i . Если базовый полином $h(x)$ - примитивный двоичный многочлен степени n , то возможные периоды α_i равны $2^k(2^n-1)$, где $k = 0, 1, \dots, i$. Помимо этого, для любого i , удовлетворяющего соотношению $1 < i < e$, заданного примитивного многочлена $h(x) = x^n + h(x) \bmod 2$ и ненулевого α_0 , все (кроме доли величиной $2/2^n$) возможные полиномы обратной связи $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ дают α_i максимального периода $2^i(2^n-1)$. С практической точки зрения это означает, что имея n достаточно большим, скажем $n > 40$, пользователь не очень рискует получить последовательность короткого периода.

Период модифицированного генератора. Периоды модифицированной схемы очень сильно зависят от выбора коэффициентов d_j . Если все d_j нечетные, то можно мало что сказать, кроме следующего факта: период является множителем числа $2^{e-1}(2^n-1)$. Значительно больше определенности для случая, когда все d_j четные: появление коротких периодов зависит только от коэффициентов обратной связи, взятых по $\bmod 4$. Быстрое тестирование подобных ситуаций описано в [68]. Вероятность того, что α_k имеет короткий период при $k \geq 3$ равна $4/2^n - 4/4^n$.

Реализация. Для обеспечения значительных периодов генерируемой последовательности требуются сравнительно большие значения n ($n \approx 100$). Для сокращения количества членов в нелинейном рекуррентном соотношении нужно потребовать, чтобы c_i и d_i были ненулевыми лишь для $i \leq l$, где l - целое, существенно меньшее чем n . В частности, базовый полином $h(x)$ должен быть вида $x^n + g(x)$ с $\deg g(x) \leq l$. Случайный или зависящий от ключа выбор полиномов $h(x)$ особого вида следует затем тестировать на примитивность, как это описано, например в [367]. Однако, если n - экспонента Мерсенна, делающая простым число $N = 2^n - 1$, то нужно просто проверить, что $x^{2^n} \equiv x \pmod{(h(x), 2)}$. Это делается с помощью n (линейных в $GF(2)$) операций модульного возведения в квадрат. (Примеры мерсенновских экспонент - 31, 61, 89, 107, 127.) Когда n - экспонента Мерсенна, то вероятность того, что случайно выбранный многочлен степени n примитивен, примерно равна $1/n$, поэтому поиск не будет чересчур изнурителен.

8.5.3 Каскад с неравномерным движением (Чамберса)

Вторая схема поточного шифра, предложенная в 1993 году У.Дж. Чамберсом [69] (см. Раздел 8.5.2). Общая теория каскада ступеней на базе регистров сдвига с неравномерным движением описана в [66], на рисунке представлена ступень конкретной схемы.



Вход A состоит из последовательности k -битных целых чисел. Один или несколько из этих бит используются для управления движением РСЛОС размера n ($n \geq k$), с примитивным полиномом обратной связи и ненулевым начальным заполнением. (Значение n одно и то же для каждой ступени, хотя полиномы обратной связи могут различаться.) Затем вход ступени XOR'ится с k битами от РСЛОС и проходит через обратимый S -блок, который реализует взаимно-однозначное отображение одних k -битных паттернов в другие k -битные паттерны. В начальной ступени каскада движение равномерное. Чамберсом выбрано значение $k = n$. Главными результатами для каскада из K ступеней являются следующие: (а) его период почти максимален (равен $(2^n - 1)^K$); (б) его k -битные выходы распределены настолько равномерно, насколько это возможно в пределах длины одного периода [66].

Выбор РСЛОС. Очевидный выбор для длины n каждого из РСЛОС - 32 бита, так как это длина слова в большинстве современных микропроцессоров. Примитивный многочлен следует выбирать "случайно", то есть под управлением ключа. Поскольку от

многочленов обратной связи не требуется иметь какой-то особый вид, можно выбрать фиксированный примитивный элемент α в $GF(2^n)$, заданный как корень примитивного многочлена, а затем, используя технику типа описанной в [164], отыскивать минимальный многочлен от α^s , где s взаимно просто с $N = 2^n - 1$ [25]. Такое значение s находят "случайно" следующим образом. Пусть p_1, p_2, \dots, p_l обозначают простые множители N . "Случайным образом" выбирают l целых чисел s_i , удовлетворяющих соотношению $1 \leq s_i < p_i$, а затем полагают $s = \sum_i (N / p_i) s_i \bmod N$. В случае $n = 32$ имеется пять простых множителей $2+1, 2^2+1, 2^4+1, 2^8+1$ и $2^{16}+1$, так что s_i можно задавать 31 битом. (При $n = 31$ ситуация упрощается, поскольку тогда $N = 2^n - 1$ - простое число, и минимальный многочлен любого элемента в $GF(2^{31})$, отличающегося от 0 и 1, примитивен.)

Обратимый S-блок. Обратимый 32-битный S-блок можно формировать с помощью техники, предложенной Дэвидом Уилером в [388] (см. Раздел 8.5.4). Пусть t - это 256-элементная таблица 32-битных слов, где младшие 24 бита каждого слова выбраны "случайно", а старшие 8-битные байты образуют "случайную" подстановку чисел от 0 до 255. Тогда можно положить

$$\text{Sbox}(x) = (x \gg 8) \text{ XOR } t[x \text{ AND } 255].$$

Здесь \gg обозначает логический правый сдвиг с заполнением нулями слева. Такой способ дает не только Фейстел-подобное обратимое отображение (часто применяемое в блочных шифрах), но также обеспечивает 8-битный правый циклический сдвиг.

Управление движением. Простейший способ управления движением регистров - брать один бит от входа A для решения о том, на сколько шагов будет сдвиг в данном такте - на 1 или 2 [66]. Однако, уделив этому вопросу чуть больше внимания, можно добиться значительного лучшего эффекта диффузии. При рассмотрении периодичности каскада необходимо убедиться, что количество шагов S , выполняемое сдвигающимся РСЛОС за входной цикл периода N^r (после r ступеней), взаимно просто с N [66]. (Здесь $N = 2^n - 1$.) Предположим, используется 2 бита от A для определения того, каким должно быть количество шагов - a, b, c или d . Эти 4 возможных значения битовой пары будут иметь частоты $(N^r - (-1)^r)/4, (N^r - (-1)^r)/4, (N^r - (-1)^r)/4$ и $(N^r + 3(-1)^r)$ в некотором порядке [66]. (Отметим, что $N^r \equiv (-1)^r \pmod{4}$, и что распределение наиболее равномерное из возможных.) Пусть соответствующее количество шагов будет x, y, z, t . - перестановка a, b, c, d . Тогда находят $4S \bmod N = (-1)^r(3t - x - y - z)$. В том случае, если $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, оказывается, что имеется четыре возможности $\pm 6, \pm 2$. Этот вариант нельзя использовать для $n = 32$, поскольку $N = 2^{32} - 1$ делится на 3 и может не быть взаимно простым с S . Однако выбор $(a, b, c, d) = (1, 2, 4, 5)$ эту проблему решает, и возможные значения для $4S \bmod N$ будут $\pm 8, \pm 4$.

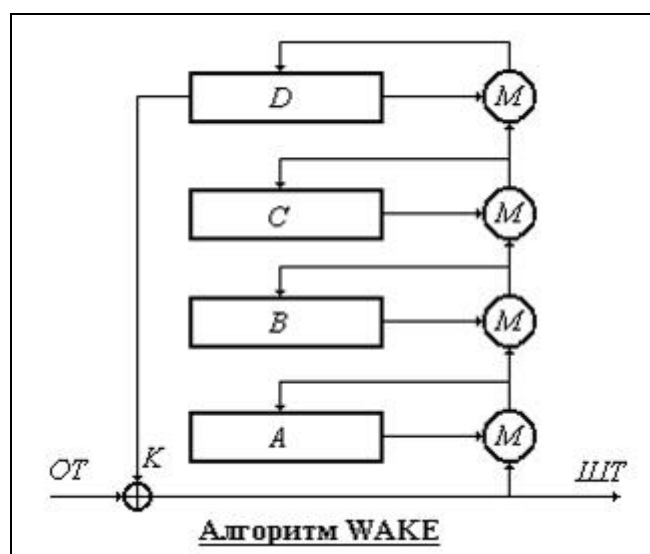
Сдвигание регистров можно ускорить использованием таблицы, описывающей общую обратную связь после многократных шагов. Так, для 5-кратного шага используется таблица с 32 ячейками. 5 младших бит РСЛОС используются для выбора значения из соответствующей ячейки таблицы, которое XOR'ится с РСЛОС после того, как регистр сдвигается на 5 позиций вправо.

Использование циклического счетчика. РСЛОС с n ячейками можно заменить на счетчик, циклически проходящий значения $1, \dots, 2^n - 1$. Управление движением

осуществляют q бит ($q \leq k$), выбирающие значение $J[a]$ по адресу a ($0 \leq a \leq Q$) в некоторой таблице n -битных целых без знака. Здесь $Q = 2^q - 1$. Затем счетчик переходит от своего старого значения u к значению v , получаемому следующим образом: сначала полагается $v = u + J[a] \bmod 2^n$, и если $v < u$, то v увеличивается на 1. За входной цикл периода N^r мы обнаружим, что все кроме одной из 2^q возможностей для a появляются с частотой $(N^r - (-1)^r) / 2^q$; исключительное значение α появляется $(-1)^r + (N^r - (-1)^r) / 2^q$ раз. Таким образом, количество шагов S , выполняемое счетчиком за входной цикл, равно $((N^r - (-1)^r) / 2^q)(\sum_{a=0}^Q J[a]) + (-1)^r J[\alpha]$. Это число должно быть взаимно простым с N , так чтобы $2^q S \bmod N = (-1)^r ((\sum_{a=0}^Q J[a]) - 2^q J[\alpha])$ было взаимно простым с N . Неизвестно, каково особое значение α , так что все значения $J[a]$ выбираются взаимно простыми с N , а также обеспечивается чтобы $\sum_{a=0}^Q J[a] \equiv 0 \bmod N$. Это делается таким же образом, как описано для РСЛОС выше. Для значений a от 0 до $Q - 1$ выбираются "случайные" целые s_{ia} , $1 \leq s_{ia} < p_i$, и полагается $J[a] = \sum_i (N / p_i) s_{ia} \bmod N$. Тогда получается $\sum_{a=0}^{Q-1} J[a] \equiv \sum_i (N / p_i) x_i \bmod N$, где $x_i = \sum_{a=0}^{Q-1} s_{ia} \bmod p_i$. Если всякий из x_i обращается в нуль, то выбирается другое ненулевое значение $s_{i, Q-1}$, меньшее p_i ; наконец, для нахождения $J[Q]$ полагают $s_{iQ} = p_i - x_i$.

8.5.4 Алгоритм WAKE

Криптоалгоритм *WAKE* предложен в 1993 году англичанином Дэвидом Уилером из Компьютерной лаборатории Кембриджского университета [388]. *WAKE* - это аббревиатура словосочетания **W**ord **A**uto **K**ey **E**ncryption (\approx "Шифрование слов саморазворачивающимся ключом"). Криптоалгоритм генерирует гамму 32-битными словами в режиме обратной связи по шифртексту: предыдущее слово зашифрованного текста используется для порождения следующего слова гаммы. Главное достоинство *WAKE* - это быстрый алгоритм.



Криптохема построена на основе четырех 32-битных регистров и одного S -блока из 256 32-битных значений. Этот S -блок имеет особое свойство: самые старшие байты каждого элемента таблицы образуют перестановку всех возможных байт, а остальные три байта в ячейке - случайные.

Сначала на основе секретного ключа генерируются элементы S -блока S_i . Затем с помощью того же (или другого) ключа инициализируются 4 регистра: a_0, b_0, c_0, d_0 . Слово шифрующей гаммы K_i длиной 32-бита получают из состояния регистра D :

$$K_i = d_i .$$

Слово шифртекста T_i получают побитовым сложением XOR ключа K_i и слова открытого текста P_i . Затем состояния четырех регистров обновляются:

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= M(a_i, P_i \text{ XOR } d_i) \\ b_{i+1} &= M(b_i, a_{i+1}) \\ c_{i+1} &= M(c_i, b_{i+1}) \\ d_{i+1} &= M(d_i, c_{i+1}) \end{aligned}$$

Функция M действует на основе S -блока:

$$M(x,y) = (x + y) \gg 8 \oplus S_{(x+y) \wedge i}.$$

Операция \gg - это правый сдвиг, а не циклическое прокручивание. Младшие 8 бит суммы $x + y$ являются входом S -блока. Уилером в общих чертах дана процедура генерации S -блока, но она не совсем завершенная. Считается, что здесь вполне приемлем любой алгоритм для генерации случайных байт и случайных подстановок.

Как уже отмечалось, основное достоинство WAKE - его скорость. С точки же зрения криптографической стойкости он не столь хорош. В частности, алгоритм поддается атакам с подобранным шифртекстом. Что касается практических воплощений WAKE, то он реализован в антивирусном пакете программ Dr. Solomon's Anti-Virus [346].

8.5.5 Алгоритм PIKE

В 1994 году Росс Андерсон опубликовал работу [14], посвященную вскрытию криптосхемы FISH, построенной на основе Фибоначчи-генератора (см. Раздел 6.3.2). Изучение достоинств Фибоначчи-генератора и слабых сторон FISH привело Андерсона к идее новой криптосхемы - PIKE, в конструкции которой используется пороговый механизм управления движением, аналогичный схеме A5 (см. Раздел 8.2).

Основу криптосхемы PIKE составляют три Фибоначчи-генератора (иначе именуемых аддитивными генераторами, см. Раздел 8.1.10):

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-55} + a_{i-24} \pmod{2^{32}} \\ a_i &= a_{i-57} + a_{i-7} \pmod{2^{32}} \\ a_i &= a_{i-58} + a_{i-19} \pmod{2^{32}} \end{aligned}$$

Андерсон заметил, что если бы в алгоритме FISH управляющими битами были не самые младшие биты, а биты переноса, то его криптоаналитическая атака была бы существенно затруднена. Поэтому в своей схеме для функции управления он выбрал биты переноса. Если все три из них одинаковы, то продвигаются все три генератора. Если же нет, то двигаются лишь те два, чьи биты переноса совпадают. В некоторых процессорах удобнее использовать в качестве управляющих биты четности, этот вариант также рассматривается как приемлемый.

Очередным словом шифрующей гаммы является XOR самых младших слов всех трех генераторов. Этот алгоритм работает несколько быстрее, чем FISH, поскольку здесь выполняется в среднем не 3, а 2.75 обновлений состояний генераторов на порождаемое слово гаммы.

Для гарантирования того, что каждый раз используется лишь небольшая доля минимальной длины периода, предложено перезагружать ключ после генерации 2^{32} слов гаммы. Метод генерации ключей не входит в описание криптосхемы, но ясно, что короткий ключ пользователя можно разворачивать с помощью качественной хэш-функции типа SHA (см. Раздел 8.4.3) для того, чтобы получить требуемые 700 байт начального заполнения.

8.5.6 Алгоритм GOAL

В 1994 году Йован Голич, имеющий репутацию одного из наиболее авторитетных криптоаналитиков и специализирующийся на поточных шифрах, обобщил результаты своих исследований и предложил собственную криптосхему - GOAL (очевидно, от Golic's Algorithm) [145]. GOAL представляет собой самоуправляющийся своим движением модифицированный линейный конгруэнтный генератор с нелинейной функцией усложнения с памятью.

Конструкция. На первом шаге алгоритма случайно выбирается примитивный двоичный многочлен f степени $n \geq 100$ и веса $W = w + 1 \geq 5$. Этот полином не должен иметь трехчленных кратных "низкой" степени, что легко проверяется, и может управляться секретным ключом. Данный многочлен задает линейное конгруэнтное соотношение по $\text{mod } 2^{32}$, имеющее w ненулевых двоичных коэффициентов. Начальные условия управляются секретным ключом. 32-битное целое обратной связи циклически сдвигается таким образом, чтобы самые младшие биты становились самыми старшими. Модифицированная обратная связь разбивается на две 16-битных части, которые побитно складываются по $\text{mod } 2$ для формирования 16-битного выхода от модифицированной линейной конгруэнтной схемы.

Каждая из 16 двоичных выходных последовательностей преобразуется комбинирующим узлом с 15 битами памяти, имеющим по одному биту на входе и выходе. Все 16 таких комбинирующих узлов имеют одну и ту же функцию следующего состояния, задаваемую как таблица размером 16×15 бит, а выходная функция - сумма по $\text{mod } 2$ бита входа и одного из бит состояния. Таблица генерируется случайно таким образом, чтобы максимум корня из коэффициента корреляции между входной и выходной линейными функциями был "близок" к 2^{-16} , что несложно обеспечить. Данный критерий и относительно большой размер памяти взяты в соответствии с результатами [149]. Таблица

может размещаться в 1Мбит-чипе и может управляться секретным ключом. 16 15-битных векторов начального состояния могут также управляться ключом. Комбинирующие узлы могут различаться между собой, но это потребует больше места.

Неравномерное ограниченное движение "1-2 шага" задается суммированием по mod 2 всех 16 бит предыдущего выхода от модифицированной линейной конгруэнтной схемы, то есть не использовавшихся в формировании текущей обратной связи. Если бит управления равен 1, то выход игнорируется, и вычисляется еще одна конгруэнция, которая преобразуется комбинирующими узлами с памятью для формирования текущего 16-битного целого числа на выходе. Подобное ограниченное управление движением криптографически слабее неограниченного, но оно быстрее и не вызывает проблем с управлением буфером. В среднем для генерации каждых 32 выходных бит в данной схеме требуется 3 вычисления модифицированных линейных конгруэнций.

Криптоанализ. Оценка стойкости алгоритма проведена пока только самим автором - Й. Голичем. Результаты предварительного анализа следующие.

Алгебраические свойства модифицированной линейной конгруэнтной схемы, такие как период и линейная сложность, а также распределение в пределах периода блоков с размером, не превосходящим n , в принципе могут быть выведены. Для генератора в целом как период так и линейная сложность почти наверняка ограничены снизу величиной 2^{n+5} и очень вероятно, что и величиной 2^{16n} . Более того, вполне возможен и случай, когда они близки к 2^{32n} , см. [135].

Данный генератор противостоит методам линейного криптоанализа (см. Раздел 9.4). В частности, схема противостоит линейному криптоанализу по mod 2 благодаря циклическому сдвигу в операции обратной связи, что приводит к сбалансированным корреляционным коэффициентам в линейной модели с полиномом обратной связи $f(x^{32})$ большой степени, а также благодаря неравномерному движению и функции с памятью, применяемой перед управлением движением. Кроме того, схема обладает иммунитетом к линейному криптоанализу по mod 2^{32} благодаря операции циклического сдвига, нелинейной по mod 2^{32} и благодаря усложнению - побитовому сложению по mod 2, сокращающему 32-битное целое до 16-битного, а также благодаря неравномерному движению и функции с памятью.

Другие атаки типа "разделяй-и-вскрывай" крайне маловероятны, поскольку переменные внутреннего состояния такого автомата хорошо замешиваются как модифицированной конгруэнтной схемой, так и неравномерным движением.

Наконец, стойкостью генератора можно эффективно управлять, изменяя параметры схемы. Так, для примера, вместо псевдослучайной генерации таблицы 16×15 бит можно реализовать постоянную таблицу, которая легко выявляется в программном исполнении алгоритма.

8.5.7 Алгоритм ORYX

Поточный шифр *ORYX* предполагалось использовать для засекречивания данных, передаваемых в американских сетях сотовой мобильной связи. Как и в случае с алгоритмом A5, автор данной криптосхемы неизвестен, а ее описание опубликовано в сети INTERNET анонимным борцом за свободу доступа граждан к информации [378].

Описание схемы. В основе криптоалгоритма лежат четыре компоненты: три 32-битных РСЛОС, обозначаемые как A , B и K ; и один S-блок, содержащий известную подстановку L для значений от 0 до 255 включительно. Ключом является начальное заполнение трех регистров, то есть в общей сложности 96 бит. Имеется довольно сложный алгоритм разворачивания ключа, сокращающий ключевое пространство до размера, легко проверяемого при поиске ключа тотальным перебором. По общему мнению, это сделано умышленно для ослабления криптоалгоритма в экспортном исполнении. Однако, при более качественном варианте алгоритма разворачивания ключа подразумевалось, что 96 равновероятных бит ключа обеспечивают достаточно сильную криптосхему.

ORYX шифрует данные путем генерации псевдослучайной последовательности байт, которые с помощью операции XOR накладываются на байты открытого текста. Каждый байт гаммы генерируется следующим образом.

1. РСЛОС K сдвигается один раз.
2. РСЛОС A сдвигается один раз, задействуя один из двух различных полиномов обратной связи, в зависимости от значения бита регистра K .
3. РСЛОС B сдвигается один или два раза, в зависимости от значения другого бита регистра K .
4. Старшие байты регистров A , B и K комбинируются друг с другом для порождения байта шифрующей гаммы следующим образом:

$$\text{Гамма} = \text{High8}(K) \oplus L[\text{High8}(A)] \oplus L[\text{High8}(B)],$$

где High8 - операция взятия старших 8 бит регистра, а L - применение подстановки S-блока.

Криптоанализ. В мае 1997 года Дэвид Вагнер (аспирант Калифорнийского университета Беркли, уже известный по ряду успешных криптоаналитических работ), Брюс Шнайер (автор "Прикладной криптографии" и президент консалтинговой криптофирмы Counterpane Systems) и Джон Келси (криптоаналитик из Counterpane Systems) опубликовали в INTERNET работу [378], демонстрирующую серьезные слабости криптосхемы ORYX. В частности, ими представлена атака, для успеха которой требуется 24 байта известного открытого текста и 2^{16} времени (опробований начального состояния). Данным методом напрямую вскрывается начальное заполнение независимо от вида алгоритма разворачивания ключа.

В основе атаки лежит техника метода "разделяй-и-вскрывай", где путем предположения относительно небольшой части начального заполнения и проверки правильности предположения генератор вскрывается поэтапно. Предположим, известны старшие 8 бит регистров A , B и K . Тогда можно использовать тот факт, что на каждый байт выхода K и A имеют по одному неизвестному биту, в них сдвигаемому, а B имеет один или два таких неизвестных бита. Данное наблюдение позволяет просто опробовать все возможные значения этих параметров: в общей сложности имеется 24 возможных варианта выхода. Если предположение о 8 старших битах было правильным, то следующий байт гаммы должен быть одним из (примерно) 24 предсказанных. Если предположение было неверным, то примерно в 29/32 случаев это будет обнаружено.

Далее, если предположение было верным, то это дает обычно единственно возможный набор новых значений в K , A и B , расширяя наше знание о соответствующих регистрах.

Не вдаваясь в углубленное описание атаки, можно отметить, что она по форме напоминает доказательство по индукции. Как только получены 8 старших бит всех трех регистров, то восстанавливаются и все остальные биты. Непосредственно можно увидеть, что предположение о старших 8 битах A и B говорит о старших 8 битах регистра K . В целом же данный метод позволяет при наличии примерно 24 байт шифрующей гаммы полностью восстановить начальное заполнение регистров.

Подводя итог своего исследования, Вагнер, Шнайер и Келси отмечают, что криптосхема ORYX - это еще один пример шифра, разработанного, реализованного и предложенного для широкого распространения без надлежащего всестороннего изучения криптографическим сообществом. Результатом такого подхода стал криптоалгоритм, значительно более слабый, чем предполагалось.

8.5.8 Генератор ISAAC

Алгоритм ISAAC можно считать полной противоположностью схеме ORYX, описанной в предыдущем разделе. ISAAC - это ориентированный на криптографические приложения генератор псевдослучайных чисел из семейства генераторов, разработанных в 1993-1996 годах молодым американским программистом Робертом Дженкинзом. Концептуально схема напоминает алгоритм RC4 компании RSA (см. Раздел 8.3), но разработана совершенно независимо и, в отличие от RC4 или ORYX, подробно описана автором и предложена для повсеместного бесплатного использования и изучения. Эксплуатационные характеристики генератора ISAAC, несколько превосходящего по скорости именитый RC4, и хорошие криптографические свойства порождаемых последовательностей (гладкая статистика, средний период 2^{8295} и т.д.) привлекли внимание мэтров криптографического сообщества, в частности Уильяма Чамберса. Как результат - работа Дженкинза "ISAAC" была в 1996 году представлена на авторитетном криптографическом симпозиуме - третьем международном семинаре по быстрому программному шифрованию [179]. Каких-либо криптоаналитических результатов по данной схеме пока не опубликовано.

Генератор IA. Первый в семействе, генератор IA (Indirection, Addition - блуждание, сложение) разрабатывался так, чтобы удовлетворять следующим основным требованиям: стойкий, быстрый и легко запоминаемый. Ниже представлен исходный текст алгоритма на языке Си.

```
typedef unsigned int u4; /*4-байтное целое без знака, 32 бита*/

#define ALPHA          (8)
#define SIZE          (1<lt;ALPHA)
#define ind(x)        (x&(SIZE-1))

static void ia(m,r,bb)

u4 *m; /* Память: массив из SIZE ALPHA-битных членов */
u4 *r; /* Результаты: последовательность той же длины, что m */
u4 *bb; /* предыдущий результат */
```

```

{
  register u4 b,x,y,i;
  b = *bb;
  for (i=0; i<SIZE; ++i)

  {
    x = m[i];
    m[i] = y = m[ind(x)] + b;          /* присвоение m */
    r[i] = b = m[ind(y>gtALPHA)] + x; /* присвоение r */
  }

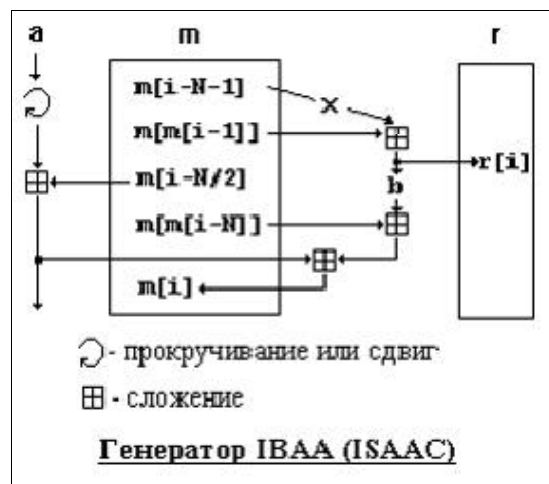
  *bb = b;
}

```

Подобно RC4, генератор IA оперирует секретным массивом m из 256 значений. В отличие от RC4, эти значения в m должны содержать по меньшей мере $2ALPHA$ бит. Подобно RC4, IA использует псевдослучайное блуждание для выдачи значений-результатов. В отличие от RC4, эти результаты, выдаваемые IA - это сумма значений, а не сами значения. Также в отличие от RC4, IA не делает своппинга значений в m , вместо этого он проходит по массиву, прибавляя псевдослучайно выбираемые члены к старым членам.

Генератор ИВАА. Развитием IA стал генератор ИВАА (Indirection, Barrelshift, Add and Accumulate - блуждание, проворачивание, сложение и накопление). Его новые достоинства - отсутствие обнаруживаемых смещений на протяжении всей длины цикла и чрезвычайно маловероятное появление коротких циклов.

На рисунке показано, как ИВАА (и ISAAC) порождает результирующее значение в $r[i]$ и заменяет один член в $m[i]$.



Ниже представлен исходный текст алгоритма ИВАА на языке Си.

```

/*
 ^ значит XOR, & значит побитовое AND, a<lt;b значит сдвиг a на b.
 barrel(a) циклически сдвигает a на 19 бит влево,
 ind(x) это (x AND 255), или (x mod 256)
*/

```

```

typedef unsigned int u4; /* unsigned four bytes, 32 bits */
#define ALPHA (8)
#define SIZE (1<ltALPHA)
#define ind(x) ((x)&(SIZE-1))
#define barrel(a) (((a)<lt19)^(a)>gt13)) /* beta=32, shift=19 */

static void ibaa(m,r,aa,bb)

u4 *m; /* Память: массив из SIZE ALPHA-битных членов */
u4 *r; /* Результаты: последовательность той же длины, что m */
u4 *aa; /* Аккумулятор: отдельное значение */
u4 *bb; /* предыдущий результат */
{
    register u4 a,b,x,y,i;
    a = *aa; b = *bb;
    for (i=0; i<SIZE; ++i)
    {
        x = m[i];
        a = barrel(a) + m[ind(i+(SIZE/2))]; /* set a */
        m[i] = y = m[ind(x)] + a + b; /* set m */
        r[i] = b = m[ind(y>gtALPHA)] + x; /* set r */
    }
    *bb = b; *aa = a;
}

```

Отсутствие смещения в ИВАА достигается благодаря аккумулятору a . Член, прибавляемый к a - это $m[\text{ind}(i+(\text{SIZE}/2))]$. $\text{barrel}(a)$ - это перестановка a , нелинейная при комбинировании со сложением. Подстановки обеспечивают равновероятность, криптографическая же стойкость зависит от блужданий $m[\text{ind}(x)]$ и $m[\text{ind}(y>gtALPHA)]$.

Генератор ISAAC. Криптографическим развитием генератора ИВАА стал ISAAC (Indirection, Shift, Accumulate, Add and Count - блуждание, сдвиг, накопление, сложение и счетчик): более быстрый, чем его предшественник; гарантированно не имеющий плохих начальных заполнений и коротких циклов; быстрее превращающий упорядоченные состояния в беспорядочные. Ценой этого стала потеря легкой запоминаемости алгоритма.

Ниже представлен исходный текст ISAAC на языке Си.

```

/* & это побитовое AND, ^ побитовое XOR, a<ltb сдвигает a на b
 * ind(mm,x) это биты 2..9 в x, или (floor(x/4) mod 256)*4
 * в rngstep barrel(a) заменена на a^(a<lt13)
 */

typedef unsigned int u4; /* unsigned four bytes, 32 bits */
typedef unsigned char u1; /* unsigned one byte, 8 bits */
#define ind(mm,x) (*(u4 *)((u1 *) (mm) + ((x) & (255<lt2))))
#define rngstep(mix,a,b,mm,m,m2,r,x) \
{ \
    x = *m; \
    a = (a^(mix)) + *(m2++); \
    *(m++) = y = ind(mm,x) + a + b; \
    *(r++) = b = ind(mm,y>gt8) + x; \
}

static void isaac(mm,rr,aa,bb,cc)

```

```

u4 *mm; /* Память: массив из SIZE ALPHA-битных членов */
u4 *rr; /* Результаты: последовательность той же длины, что m */
u4 *aa; /* Аккумулятор: отдельное значение */
u4 *bb; /* предыдущий результат */
u4 *cc; /* Счетчик: одно ALPHA-битное значение */
{
    register u4 a,b,x,y,*m,*m2,*r,*mend;
    m=mm; r=rr;
    a = *aa; b = *bb + (++*cc);
    for (m = mm, mend = m2 = m+128; m<mend; )
    {
        rngstep( a<lt13, a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a>gt6 , a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a<lt2 , a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a>gt16, a, b, mm, m, m2, r, x);
    }
    for (m2 = mm; m2<mend; )
    {
        rngstep( a<lt13, a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a>gt6 , a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a<lt2 , a, b, mm, m, m2, r, x);
        rngstep( a>gt16, a, b, mm, m, m2, r, x);
    }
    *bb = b; *aa = a;
}

```

Между IBAA и ISAAC имеются следующие различия.

rngstep(). По сути своей rngstep() - это внутренний цикл IBAA, повторяемый здесь четыре раза.

*m++. Замена m[i] на *m++, r[i] на *r++, а m[i(SIZE/2)] на *m2++ сокращает затраты на выполнение операций просмотра массива.

a^(mix). Прокручивания в IBAA заменены на последовательность 4 функций: a^(a<lt13), a^(a>gt6), a^(a<lt2) и a^(a>gt16).

cc. Счетчик, гарантирующий минимальную длину цикла 2^{40} . Тестирование не выявило столь коротких циклов.

ind(x). Биты блуждания в ISAAC - это 2..9 для x и 10..17 для y (в IBAA 0..7 и 8..15). Это изменение, как и ряд предыдущих, повышают скорость работы генератора.

Результаты тестирования показывают, что в ISAAC требуется около 18.75 инструкций для генерации каждого 32-битного значения.

8.5.9 Chameleon - новое приложение криптографии

В 1997 году Росс Андерсон и Харалампос Манифавас из Компьютерной лаборатории Кембриджского университета предложили концептуально новую конструкцию [15], позволяющую проделать с произвольным поточным шифром две на первый взгляд исключают друг друга вещи - усилить шифр и обеспечить свойство, благодаря которому небольшие изменения в ключе вызывают лишь небольшие изменения в гамме.

Авторы назвали свою конструкцию "Хамелеон" и выразили надежду, что их детище открывает новую область приложения криптографии.

Приложение какого рода имеется в виду? В настоящее время системы поточного шифрования используются для защиты интеллектуальной собственности в платном телевидении и ряде других коммерческих приложений. В этих ситуациях часто бывает удобно, чтобы для множества пользователей можно было транслировать один шифртекст, а у подписчиков имелись бы слегка различающиеся ключи расшифрования, которые давали бы немного отличающиеся открытые тексты. В результате применения такой техники можно отслеживать подписчиков, пытающихся незаконно перепродать материал, лицензированный лишь для индивидуального использования. В настоящее время это достигается применением "одноразовых гамм-блокнотов", либо с помощью сложных иерархических схем управления ключами. Новая конструкция "Хамелеон" позволяет преобразовать любой поточный шифр для использования в описанной структуре.

Проще всего конструкцию описать с помощью конкретного примера. Берется произвольный генератор псевдослучайных чисел как источник гаммы. Начальное заполнение этого генератора именуется ключом A . Затем берется таблица из 2^{16} 64-битных слов - 512 килобайт случайных данных - которые именуется ключом B .

Для того, чтобы зашифровать 64-битное слово открытого текста, берут 64-битное слово от генератора гаммы и используют его для выбора четырех слов из ключа B , которые операцией XOR складываются вместе. Результатом является шифрующая гамма, которая XOR'ится с открытым текстом для получения шифртекста (а при расшифровании XOR'ится с шифртекстом для получения открытого текста).

Эффектом изменения одного бита в ключе B становится изменение около 4 бит на 512 КВ сгенерированной шифрующей гаммы. Эти изменения находятся на тех же самых местах слова, что и в ключе. Таким образом, при шифровании аудиосигналов, оцифрованных в 16-битовые слова, можно сделать так, что знаки копирайта (авторских прав) будут появляться в самых младших битах.

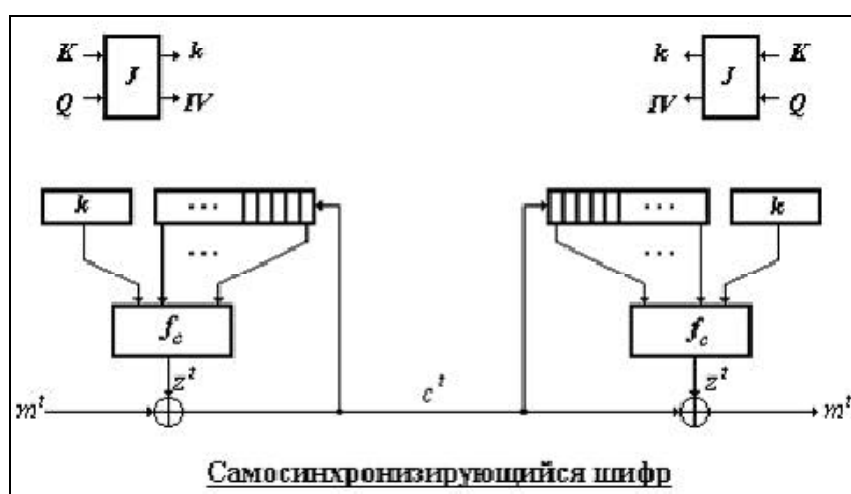
8.6 Самосинхронизирующиеся шифры

Самосинхронизирующиеся шифры (см. Раздел 0.3.2), благодаря обозначенному в их названии добавочному свойству восстанавливать синхронизацию, - это, возможно, наиболее распространенный метод шифрования в дипломатических, военных и промышленных системах связи. В то же время, криптосхемам подобного рода в открытой криптографической литературе не уделено такого внимания, которое имеют блочные шифры и синхронные поточные шифры. Первой ласточкой, возвестившей о существовании интереса к данной области криптографических исследований, стала работа Ули Маурера, представленная на конференции Eurocrypt '91 [248].

В 1992 году на сингапурской конференции ICCS/ISITA '92 коллектив бельгийских криптографов Й. Дэмен, Р. Говэртс и Й. Вандевалле представил работу, посвященную разработке аппаратуры для высокоскоростного самосинхронизирующегося поточного шифрования [87]. Первый из этих авторов - Йоан Дэмен - защитил в 1995 году докторскую диссертацию [90], существенное место в которой занимают вопросы исследования самосинхронизирующихся криптосхем. На материалах этой диссертации и построен данный раздел.

8.6.1 Концептуальная схема

В самосинхронизирующихся поточных криптосхемах шифруемые биты зависят только от последних n_m символов шифртекста (именуемых памятью) и криптоключа k . Эту схему можно смоделировать самосинхронизирующимся поточным шифром, состоящим из регистра сдвига, содержащего последние n_m символов шифртекста и функцию шифрования f_c . Фактически, это лишь концептуальная модель для иллюстрации внешних зависимостей. При конкретной реализации конечная входная память самосинхронизирующегося поточного шифра может быть реализована самыми различными способами. На рисунке представлена общая принципиальная схема такой конструкции.



В общем случае генерация шифрующей гаммы описывается тремя уравнениями:

$$\begin{aligned}(k, IV) &= J(K, Q) \\ c^{-n_m+1} \dots c^0 &= IV \\ z^t &= f_c[k](c^{t-n_m} \dots c^{t-1}).\end{aligned}$$

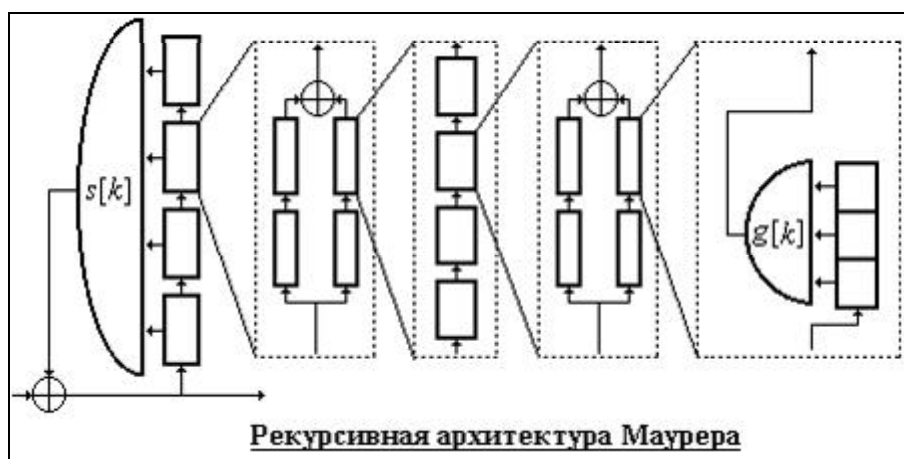
Здесь J - инициализирующее отображение, преобразующее секретный ключ K и открытый рандомизирующий параметр Q в начальное заполнение - внутренний ключ k и вектор инициализации IV . В отличие от рассматривавшихся до этого синхронных поточных шифров, инициализирующее отображение не является неотъемлемым компонентом самосинхронизирующихся криптосхем. Непосредственная загрузка ключа K и начального заполнения IV без взаимного замешивания инициализирующим отображением никак не ограничивает область применения данного шифра.

Расшифрование будет корректным, если последние n_m символов шифртекста приняты правильно. Если шифруемый символ состоит из n_s бит, то отдельная ошибка в канале между шифратором и дешифратором вызовет серию из n_m потенциально неверно расшифрованных символов или $n_m n_s$ неверно расшифрованных бит на приемном конце. Если поведение ошибок при передаче можно смоделировать двоичным каналом без памяти, то самосинхронизирующееся поточное шифрование практически лишь в тех случаях, когда степень битовых ошибок существенно меньше чем $(n_m n_s)^{-1}$.

Самосинхронизирующиеся шифры являются естественным решением для каналов, подверженных помехам и ошибкам. Особое преимущество такого рода криптосхем (в частности, бинарных, то есть с $n_s = 1$) в том, что их можно с минимальными затратами реализовать поверх любой цифровой коммуникационной системы. Именно это делает самосинхронизирующееся поточное шифрование чрезвычайно популярным механизмом засекречивания связи.

8.6.2 Рекурсивная архитектура Маурера

В [248] предложено строить криптосхему на основе параллельной и последовательной композиции шифр-функций. Параллельная композиция обозначает побитовое сложение выходных бит от двух шифр-функций, имеющих один и тот же вход. В последовательной композиции выход одного автомата служит входом другого. На рисунке изображена элегантная рекурсивная конструкция, предложенная Маурером в [248]. В работе Дэмена [90] эта схема обозначена как "архитектура Ψ ".



Самый правый бокс на рисунке изображает базовый компонент схемы: 3-битовый регистр сдвига с управляемой ключом булевой функцией выхода $g[k]$. Четыре таких компонента образуют контур: пара параллельно соединенных цепочек из двух последовательно соединенных регистров. На следующем уровне четыре таких блока собраны в последовательную композицию. На двух следующих уровнях эта конструкция повторяется. Результирующая машина с конечным числом состояний имеет входную память 192 бита и 4 бита-компонента на каждое значение входной памяти. Внутреннее состояние такого автомата служит входом для управляемой ключом выходной функции $s[k]$. Автором схемы не дано конкретного описания того, как следует конструировать булевы функции $g[k]$. Наиболее очевидный способ - разворачивать ключ шифрования k в 256 векторов длиной по 8 бит, которые могут служить таблицами для функций $g[k]$. При более сложном алгоритме разворачивания ключа обычно требуют, чтобы таблицы удовлетворяли определенным критериям, таким как сбалансированность и полнота.

Одна из центральных идей данной концепции - построение шифрующей функции на основе автомата с конечной входной памятью, имеющего криптографически стойкое преобразование внутреннего состояния и криптографически стойкую выходную функцию.

Й. Дэмен, исследовавший данную схему в своей диссертации, показал, что для самосинхронизирующихся шифров бессмысленны попытки сочетать оба эти требования.

Другая основная идея данной конструкции - построение машины с конечным числом состояний, у которой внутреннее состояние превышает входную память, используя последовательное и параллельное комбинирование автоматов меньшего размера. Используя методы дифференциального и линейного криптоанализа (см. Главу 9) Дэмен показал в [90], что непосредственное применение такой стратегии приводит к шифр-функциям с легко выявляемыми и потенциально опасными слабостями.

8.6.3 Схема Дэмена на регистре сдвига с условным дополнением

Результаты криптоанализа рекурсивной схемы Маурера привели Дэмена к идее новой криптографической конструкции - *регистру сдвига с условным дополнением* (РССУД). Эта базовая структура проиллюстрирована в его работе на примере новой криптосхемы - однобитового самосинхронизирующегося поточного шифра "ΥГ", ориентированного на аппаратное исполнение.

РССУД. Основное назначение новой конструкции регистра - ликвидация выявленных в схеме Маурера дефектов распространения разностей путем наложения (частичной) линейности на компоненты преобразования, обновляющего внутреннее состояние автомата. Компоненты такого преобразования приобретают вид

$$q^{(j)^{t+1}} = q^{(j-1)^t} + E[k](q^{(j-2)^t}, \dots, q^{(1)^t}, c^t).$$

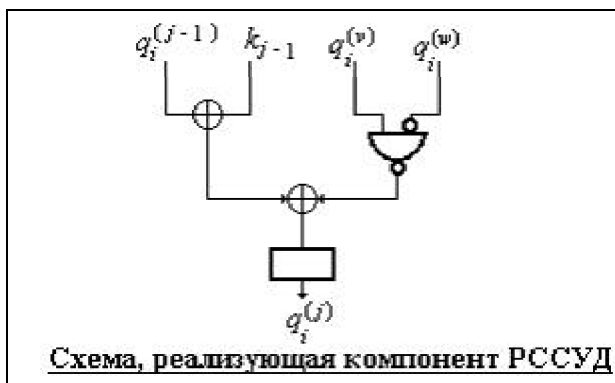
Поскольку новое значение $q^{(j)}$ равно сумме старого значения $q^{(j-1)}$ и некоторой булевой функции, то такой тип машины с конечным числом состояний получил название *регистр сдвига с условным дополнением*. Показано, что отображение R , соответствующее РССУД, является инъективным.

Схема Υ. РССУД имеет нежелательное свойство: разность в c^{-n_m-t} распространяется на $q^{(n_m)^t}$. Этого можно избежать, "расширяя" верхнюю входную память РССУД, то есть беря больше 1 бита состояния на одно значение входной памяти. Эта идея применяется Дэменом в его конструкции, получившей название "схема Υ". Главная цель конструкции - исключить распространение разностей с соотношением более 2^{-15} для отображения R , соответствующего автомату с конечным числом состояний Υ, сохраняя очень небольшой шлюзовую задержку, а описание схемы сделать настолько простым, насколько возможно.

Схема Υ имеет входную память 96 бит. РССУД расширен со стороны верхней области входной памяти: 2-мя битами на входную память начиная с $j = 89$, четырьмя начиная с 93, восемью с 95 и шестнадцатью с 96, что приводит к 128 битам состояния. Ключ шифрования k , соответствующий Υ, состоит из 96 бит: k_0, \dots, k_{95} . Большинство компонент преобразования, обновляющего состояние, реализуется очень простой булевой функции вида

$$G[k]_i^{(j)}(q, c) = q_i^{(j-1)} + k_{j-1} + (q_i^{(v)}) (q_i^{(w)} + 1) + 1,$$

где $0 \leq v, w < j - 1$. Комбинаторная схема, реализующая один компонент такого преобразования, изображена на рисунке.



Можно видеть, что эта схема имеет шлюзовую задержку всего из 2 EXOR вентилей. Последние 15 компонент $G_i^{(96)}$ имеют другой вид, задаваемый соотношением

$$G[k]_i^{(96)}(q, c) = q_i^{(95)} (q_0^{(95-i)} + 1) + (q_i^{(94)})(q_i^{(94-i)} + 1).$$

В схеме Υ , в отличие от Ψ , паттерн входной разности рассеивается немедленно по всему внутреннему состоянию.

Схема Г. В архитектуре Дэмена шифр-функция состоит из РССУД, за которым следует конвейерная схема преобразования Γ , состоящая из 7 этапов. Выход этапа $\langle i \rangle$ помещается в регистр, обозначаемый $a^{\langle i \rangle}$. Регистр $a^{\langle 0 \rangle}$ соответствует q и имеет длину 128. Компоненты регистров с $\langle 1 \rangle$ по $\langle 7 \rangle$ проиндексированы, начиная с 0. Регистры с $a^{\langle 1 \rangle}$ по $a^{\langle 5 \rangle}$ имеют длину 53. Для компонента преобразования, обновляющего состояние, имеем

$$G_{4i \bmod 53}^{\langle 1 \rangle} = a_{128-i}^{\langle 0 \rangle} + a_{i+18}^{\langle 0 \rangle} + a_{113-i}^{\langle 0 \rangle} (a_{i+1}^{\langle 0 \rangle} + 1) + 1,$$

для $0 \leq i < 53$. Этапы с 2 по 5 задаются соотношением

$$G_{4i \bmod 53}^{\langle j-1 \rangle} = a_i^{\langle j-1 \rangle} + a_{i+3}^{\langle j-1 \rangle} + a_{i+1}^{\langle j-1 \rangle} (a_{i+2}^{\langle j-1 \rangle} + 1) + 1,$$

для $0 \leq i < 53$. Если младший индекс в правой половине уравнений становится больше 52, то соответствующий член полагается равным 0. Регистр $a^{\langle 6 \rangle}$ имеет длину 12. Этап 6 задается соотношением

$$G_i^{\langle 6 \rangle} = a_{4i}^{\langle 5 \rangle} + a_{4i+3}^{\langle 5 \rangle} + a_{4i+1}^{\langle 5 \rangle} (a_{4i+2}^{\langle 5 \rangle} + 1) + 1,$$

Регистр $a^{\langle 7 \rangle}$ состоит из 3 бит, причем

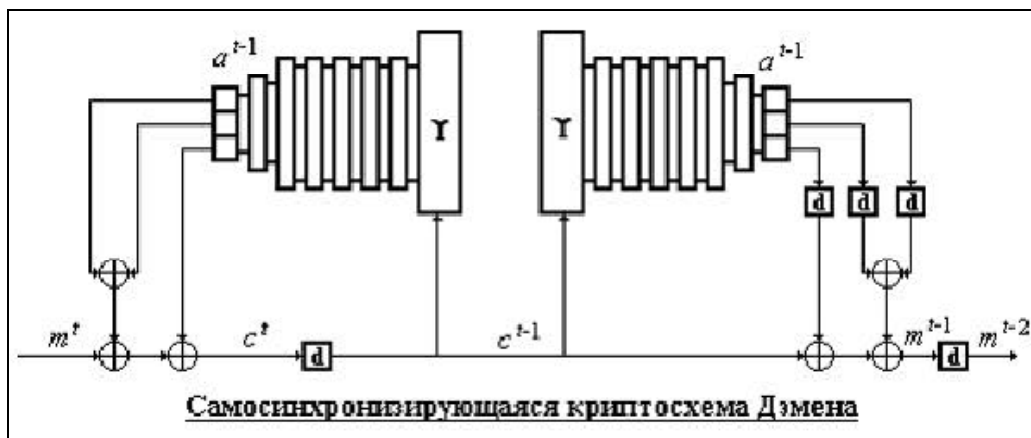
$$G_i^{\langle 7 \rangle} = a_{4i}^{\langle 6 \rangle} + a_{4i+1}^{\langle 6 \rangle} + a_{4i+2}^{\langle 6 \rangle} + a_{4i+3}^{\langle 6 \rangle}.$$

Наконец, бит гаммы задается соотношением

$$z = a_0^{<7>} + a_1^{<7>} + a_2^{<7>}$$

Вход на первый этап состоит из бит состояния РССУД.

Схема УГ. На рисунке изображен самосинхронизирующийся поточный шифр, состоящий из комбинации схем У и Г.



Шлюзовая задержка такой комбинации выходной функции и шифрования (расшифрования) составляет 2 EXOR вентиля, что равно шлюзовой задержке преобразования, обновляющего внутреннее состояние. Это вызывает необходимость введения дополнительных ячеек промежуточного хранения, на рисунке обозначенных как боксы **d**. В шифраторе эта ячейка расположена между зашифрованием и входом узла У. Для правильного расшифрования это делает необходимой дополнительную задержку на 1 такт после последнего этапа узла Г в дешифраторе. На рисунке можно видеть, что операция зашифрования и последующего расшифрования занимают всего два тактовых цикла. Тактовая частота ограничена только шлюзовой задержкой лишь 2 EXOR вентиля, что при нынешних технологиях позволяет достигать скорости обработки величиной около 100 Мбит/сек. ♦

Глава 9

Новые методы криптоанализа

В данной главе представлен ряд новых криптоаналитических методов, опубликованных в открытой литературе в 1990-е годы и используемых для вскрытия поточных шифров.

9.1 Метод "встреча посередине"

В начале 1990-х годов Росс Андерсон представил метод быстрого вскрытия криптогенераторов [7], в основе которого лежит предположение о начальном заполнении одного из регистров и следующая за этим проверка согласованности данного предположения с имеющимся фрагментом гаммы. В случае, когда выбранный регистр имеет длину n бит, сложность атаки составляет $2^{n - O(1)}$. В криптографической литературе данный метод атаки имеет название "*встреча посередине*". В 1993 году Андерсон представил оптимизированный вариант своей атаки [8], позволяющий во многих случаях сократить сложность примерно до $2^{n/2}$.

Оба метода вскрытия иллюстрируются на конкретном примере *генератора-мультиплексора* Дженнинга (см. Раздел 8.1.3). Данная криптосхема была впервые предложена в [180], рекомендована для использования в стандартном учебнике по криптографии [20] и в 1980-е годы реализована в ряде действующих систем, включая европейское платное телевидение (EVB) [111]. В генераторе Дженнинга задействованы два РСЛОС, порождающих последовательности, длины которых максимальны и взаимно просты. Некоторые из бит регистра 1 используются в качестве адресных строк для мультиплексора, который выбирает некоторый бит из регистра 2; этот бит становится очередным битом шифрующей последовательности.

Конкретный вариант такого генератора, действительно использовавшийся в одном программном шифрсредстве, имел регистр 1 длиной 31 бит с точками съема (31,28) и регистр 2 длиной 32 бита с точками съема (32,31,30,10). В таких условиях атака тотальным перебором ключа требовала бы в среднем 2^{62} операций, что предполагается недостижимыми трудозатратами для подавляющего большинства злоумышленников и организаций.

Однако, как оказалось, тотальный перебор ключей в данной ситуации не нужен. В методе, предложенном Андерсоном [7], следует предположить некоторое начальное заполнение регистра 1, а затем проверить, согласуется ли имеющаяся гамма с точками съема регистра 2. Другими словами, для каждого бита гаммы вычисляется адрес

мультиплексора, этот бит помещается в соответствующую позицию регистра 2, и если это порождает противоречие - текущее предположение о заполнении регистра 1 отвергается.

Проведенные впоследствии вычислительные эксперименты [93] подтвердили, что атакой "встреча посередине" описанная выше криптосистема вскрывается за несколько часов на обычной рабочей станции. Фактически, для вскрытия шифра требуется лишь треть от ожидаемых 2^{30} опробований, поскольку имеется возможность отвергать по несколько ключей-кандидатур за одно опробование. Дальнейшие исследования показали, что данная методика вскрытия применима и ко многим другим типам генераторов (сумматору, A5, и т.д.).

Усовершенствованный метод. В большинстве коммерческих шифрсредств до недавнего времени было общепринято при конструировании поточных криптосхем выбирать низковесовые полиномы обратной связи. При аппаратной реализации алгоритма это означает меньшее количество проводов и вентиляей, при программной - более высокое быстродействие продукта. Так, выбор многочлена $x^{31} + x^{28} + 1$ в качестве полинома обратной связи для регистра 1 в описанной выше схеме весьма типичен. Однако, такой подход разработчиков позволил Андерсону существенно оптимизировать свою атаку [8]. Новый метод вскрытия значительно ускоряет перебор вариантов заполнения, поскольку не требуется делать предположение обо всех битах регистра 1, а лишь о чуть более половины из них.

Предположим, сделано предположение о битах с 1-го по 18-й в регистре 1, которые обозначаются как b_1, \dots, b_{18} . Тогда становятся известны биты $b_{32} = b_1 + b_4$, $b_{33} = b_2 + b_5$, и так далее до $b_{46} = b_{15} + b_{18}$. Затем становятся известны также биты $b_{63} = b_{32} + b_{35}$, и так далее. В результате таких соотношений предположение о 18 битах дает нам в общей сложности значения $18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$ или 64 бит, что позволяет вычислить $13 + 10 + 7 + 4 + 1$ или 36 адресов мультиплексора. Аналогично, предположение о 24 битах дает в общей сложности 109 бит и 71 адрес. Проведенные оценки показывают, что понадобится предположить где-то от 18 до 24 бит для того, чтобы проходил тест на согласованность. Таким образом, общая сложность атаки составляет теперь около 2^{21} операций.

Понятно, что данный криптоаналитический метод применим к широкому спектру криптогенераторов, базирующихся на низковесовых полиномах обратной связи. В общем случае можно надеяться, что основной множитель в выражении трудозатрат составляет около $2^{n/2}$, где n - длина исследуемого регистра. Точный же вид выражения, конечно, будет зависеть от конструктивных деталей генератора.

9.2 Криптографические слабости ресинхронизаций

В реальных криптосистемах, на практике реализующих синхронные поточные шифры, обычно всегда учитывается риск потери синхронизации из-за сбоев в канале связи. В таких ситуациях могут быть необходимы частые ресинхронизации либо ресинхронизации по запросу. В 1993 году бельгийские криптографы Й. Дэмен, Р. Говэртс и Й. Вандевалле показали, что подобного рода действия могут приводить к существенному ослаблению криптографической стойкости [89].

9.2.1 Типы ресинхронизаций и их интерпретация

Синхронные поточные шифры имеют то преимущество, что ошибка в знаке шифртекста влияет только на соответствующий знак открытого текста, то есть при расшифровании нет распространения ошибки. Цена, которую приходится платить за это удобство - требование совершенной синхронизации между отправителем и получателем. Если же синхронизация нарушена, то выход дешифратора становится бессмысленным и возникает потребность в восстановлении синхронной работы аппаратуры.

Если открытый текст обладает достаточной избыточностью для контроля правильности расшифрования, то ресинхронизация может выполняться получателем без вмешательства отправителя. Такой процесс заключается в опробовании всех возможных сдвигов в тактах работы аппаратуры отправителя и получателя. Но в тех приложениях, где требуется высокоскоростное линейное расшифрование, автоматическое восстановление синхронизации может быть недостижимо. Риск потери синхронизации (ПС) может быть в некоторой степени сокращен за счет вставки в шифртекст синхронизирующих посылок. С другой стороны, количество последовательных ПС должно быть ограниченным. Это можно реализовать выполнением ресинхронизаций через фиксированные промежутки времени. Частота ресинхронизаций зависит от вероятности ПС и природы приложения. Если же имеется канал от получателя к отправителю, то получатель может сам инициировать запрос на ресинхронизацию при обнаружении ПС.

Цель ресинхронизации - гарантировать, что шифратор и дешифратор имеют одно и то же внутреннее состояние в определенный момент времени. Для предотвращения повторного использования шифрующей гаммы должно выбираться состояние, отличающееся от всех предыдущих состояний ресинхронизации. Для поточных шифров, стойкость которых (частично) зависит от секретности внутреннего состояния, состояние ресинхронизации нельзя передавать в открытую. Поскольку причиной ресинхронизации может быть недоступность поточного шифрования, это новое состояние приходится шифровать дополнительным шифром. Что вносит дополнительную сложность в систему и повышает ее стоимость.

Более элегантное (и дешевое) решение - задавать новое внутреннее состояние в терминах информации, известной только отправителю и получателю. В этом случае отправитель и получатель по известному открытому алгоритму вычисляют новое внутреннее состояние на основе исходного внутреннего состояния (или ключа) и открытого параметра (например, времени в момент ресинхронизации). Во время ресинхронизации не надо передавать никакой конфиденциальной информации, следовательно, не требуется никакой дополнительной шифрсистемы. Но, как показывают исследования, данный способ несет в себе угрозу стойкости применяемых на практике криптосредств.

В синхронных поточных шифрах цифры гаммы z_i вырабатываются генератором псевдослучайных чисел (ПСГ) независимо от потока шифруемых данных. Это машина с конечным числом состояний, управляемая двумя соотношениями

$$\begin{aligned} s^{t+1} &= F_s(s^t, p) \\ z^t &= f_0(s^t, p), \end{aligned}$$

где s^t - внутреннее состояние в момент t , а p - дополнительный параметр, фиксированный в течение генерации псевдослучайной последовательности. Данный автомат инициализируется загрузкой в регистр состояния вектора инициализации v и загрузкой параметра p . Иногда инициализация интегрируется в функцию преобразования состояния

$$s^{t+1} = F_s(s^t, p, e),$$

где e - внешний вход, используемый для загрузки начального состояния по η цифр за раз. Инициализация выполняется перезагрузкой внутреннего состояния в некоторое фиксированное значение и последовательной итерацией автомата определенное количество раз. При таком механизме инициализации вектор v задается как массив η -значных e -входов, поступающих в процессе инициализации. При генерации псевдослучайной последовательности этот e -вход должен оставаться постоянным.

Криптографическая стойкость поточного шифра может целиком базироваться на секретности (части) начального состояния, целиком на секретности параметра p , либо на секретности их обоих. Эта секретная информация обычно именуется ключом K . Зависимость вектора инициализации v и параметра p от ключа K формально можно выразить функцией $F_k()$:

$$(v, p) = F_k(K).$$

Для заданной ресинхронизации вектор инициализации v и параметр p зависят не только от ключа, но также и от открыто известной переменной рандомизации ρ в соответствии с открыто известной функцией рандомизации $F_r()$:

$$(v_i, p_i) = F_r(K, \rho).$$

В большинстве конструкций параметр p не зависит от ρ . Если ресинхронизация выполняется через фиксированное количество тактов, ρ означает порядковый номер ресинхронизации. В случае ресинхронизации по запросу ρ может быть временем по доступным обеим сторонам часам, либо же последовательностью символов, отправляемых получателем вместе с запросом на ресинхронизацию. При использовании ресинхронизации часто выполняют некоторое количество (скажем, μ) "холостых" итераций генератора после загрузки начального состояния. В процессе этих итераций никаких псевдослучайных цифр на выход не поступает. Холостой ход моделируется удалением первых μ цифр шифрующей гаммы: $z = z^\mu z^{\mu+1} z^{\mu+2} \dots$. В итоге механизм ресинхронизации (MP) состоит из функции рандомизации $F_r()$ и константы μ .

В приложениях, реализующих поточное шифрование с "фиксированной синхронизацией", базовыми являются 3 компонента: псевдослучайный генератор, функция рандомизации $F_r()$ и суммарное количество ресинхронизаций, обозначенное l .

Гамма уже не является результатом последовательных итераций ПСГ, работающего с одного начального заполнения. После каждой ресинхронизации начинается выработка "новой" гамм-последовательности. Поскольку эти последовательности происходят от векторов инициализации v_i (и параметров p), которые вычисляются из одного и того же ключа, то они не являются независимыми. Будет удобно описывать данные последовательности (на самом деле появляющиеся последовательно) как выходящие

параллельно из определенного количества конечных автоматов. Вектор инициализации и параметр каждой из этих машин задается механизмом ресинхронизации МР. В частности, для i -ой машины это записывается как

$$(v_i, p_i) = F_r(K, \rho_i) \Rightarrow z_i: z_i^\mu z_i^{\mu+1} z_i^{\mu+2} \dots$$

Такое параллельное представление подчеркивает, что криптоаналитик в каждом такте имеет доступ не к одной, а к l цифрам гаммы. Эту особенность бывает возможно использовать для построения алгоритма восстановления ключа. С другой стороны, возможные корреляции между различными гамм-последовательностями можно использовать для предсказания одних последовательностей по другим.

9.2.2 Общая атака нелинейно фильтруемых систем

В качестве иллюстрации исследован эффект ресинхронизации на класс популярных ПСГ, именуемых "фильтр-генераторы" (см. Раздел 4.1). Для этого класса генераторов характерна линейная над \mathbb{Z}_2 функция преобразования состояния и фиксированная нелинейная функция выхода. Криптографическая стойкость таких систем строится на невозможности восстановления внутреннего состояния по выходу нелинейной выходной функции. Полагается, что используется линейная функция рандомизации. В терминах введенного выше "параллельного представления" работа i -ой системы может быть описана матричными уравнениями:

$$\begin{aligned} s_i^0 &= AK \oplus R_i \\ s_i^{t+1} &= F s_i^t \end{aligned}$$

где A и F - двоичные матрицы. Положим, количество бит состояния равно n . Предполагается, что F - несингулярна (что справедливо для реально используемых схем). R_i - вектор, зафиксированный значением параметров ρ_i .

Криптоаналитическая атака направлена на полное восстановление внутреннего состояния ПСГ s_p^τ в определенный момент времени τ . По этому состоянию может быть вычислено s_p^0 и последовательно все остальные начальные состояния s_i^0 . Этому знанию достаточно для того, чтобы вычислить все гамм-последовательности z_i .

$$\begin{aligned} s_p^0 &= F^{-\tau} s_p^\tau \\ s_i^0 &= s_p^0 \oplus R_i \oplus R_p \end{aligned}$$

Разность по mod 2 двух любых одновременных состояний s_i^t и s_j^t может быть вычислена как

$$s_i^t \oplus s_j^t = F^t (R_i \oplus R_j).$$

Функция выхода вычисляет цифры гамм-последовательности по внутреннему состоянию. В большинстве практических приложений бит гаммы зависит только от некоторого подмножества бит состояния. Предположим, что значения этих бит состояния собраны в двоичный вектор u , содержащий φ компонент. Вектор u является проекцией внутреннего состояния s . Это можно выразить в виде матричного уравнения

$$u_i^t = Gs_i^t.$$

Данные линейные соотношения между внутренними состояниями можно использовать для усиления уже существующих атак и при конструировании новых криптоаналитических методов.

Предположим, что вектор u_p^τ может быть полностью восстановлен для некоторого определенного τ . Это дает криптоаналитику знание φ бит в s_p^τ . Поскольку s_p^τ зависит от s_p^0 через $F^\tau s_p^0 = s_p^\tau$, то это приводит к φ линейным уравнениям для бит s_p^0 . Если может быть восстановлено некоторое количество m векторов u_p^t , то это дает $m\varphi$ (не обязательно линейно независимых) линейных соотношений для бит s_p^0 . Если найдено n независимых линейных соотношений, то s_p^0 может быть установлено полностью. Таким образом, восстановления $\left\lceil \frac{n}{\varphi} \right\rceil$ векторов достаточно, если все соотношения независимы.

Теперь рассмотрим проблему восстановления u_p^t для некоторого t . (Далее индекс t не указывается для упрощения записи.) Предположим, что криптоаналитику известно z_p . Правильное значение u_p должно удовлетворять соотношению $f_0(u_p) = z_p$. Криптоаналитику известно, что для каждого z_i имеется такое равенство. Имеем $f_0(u_i) = z_i$ и $u_i = u_p \oplus G(R_i \oplus R_p)$. Делая замену, получаем

$$f_0(u_p \oplus GF^t(R_i \oplus R_p)) = z_i$$

для каждого z_i , известного криптоаналитику. Это множество нелинейных булевых уравнений с φ переменными. Если количество уравнений превышает φ , то количество решений ожидается сходящимся к 1. Если φ достаточно мало, то решение может быть найдено тотальным перебором в пространстве всех возможных векторов u . Для этого требуется в среднем 2^φ вычислений $f_0()$.

Для того, чтобы данная атака была возможна, количество ресинхронизаций должно быть больше φ . Криптоаналитик должен знать по крайней мере φ бит гаммы для $\left\lceil \frac{n}{\varphi} \right\rceil$ тактов. Ожидаемые трудозатраты составляют $\left\lceil \frac{n}{\varphi} \right\rceil 2^\varphi$ определений $f_0()$ и некоторое дополнительное количество линейно-алгебраических вычислений. Такая атака легко может быть распараллелена на несколько разных процессоров. Можно заметить, что сложность атаки растет линейно с ростом размера внутреннего состояния.

Следует отметить, что этот метод атаки общего вида построен независимо от специфических свойств выходной функции шифра. В следующем разделе будет показано, что эффективность может быть значительно усилена в тех случаях, когда удастся использовать структурные особенности функции $f_0()$.

9.2.3 Атака мультиплексор-генератора

В качестве примера специфической атаки проведен криптоанализ схемы мультиплексор-генератора [180] (см. Раздел 8.1.3): линейного автомата с конечным числом состояний и мультиплексором в качестве выходной функции. Мультиплексор с β адресными входами имеет 2^β входов данных. Если адресный вход обозначить как $a^0 a^1 \dots a^\beta$, вход данных как $d^0 d^1 \dots d^{2^\beta-1}$, а выход как z , то функционирование мультиплексора можно описать соотношением

$$z = d^a, \text{ где } a = \sum a_i 2^i.$$

Здесь a - интерпретация набора $a^{\beta-1} \dots a^1 a^0$ как целого числа. Вектор u_p можно расщепить на a_p и d_p . Поскольку $u_i \oplus u_j$ полностью известны для всех i, j , то таковы и $a_i \oplus a_j$, $d_i \oplus d_j$. Предположим, что известны биты гаммы z_p и z_i , и что $a_p \oplus a_i = 0$. Если $z_p = z_i$, то целое a_p (и эквивалентно a_i) должно выбирать такой бит d , что $d_p^{a_p} \oplus d_i^{a_p} = 0$. Если $z_p \neq z_i$, то применяются точно такие же аргументы. В обоих случаях около половины возможных значений для a_p исключается. Эту процедуру можно повторять для каждого двух бит гаммы z_e , z_f , где $a_e \oplus a_p = 0$. Правильное значение для a_p будет найдено после исследования β пар (или чуть меньше). Когда правильное значение a_p обнаружено, то остальные $2^\beta - \beta$ значений в d_p можно систематическим образом отыскивать, рассматривая все биты гаммы z_{g_i} , где $a_{g_i} = a_p \oplus i$ для всех $0 \leq i < 2^\beta$.

Полный процесс восстановления вектора u занимает около $\beta + 2^\beta$ вычислений функции мультиплексора. Что следует повторить $\left\lceil \frac{n}{\varphi} \right\rceil$ раз, где $\varphi = \beta + 2^\beta$. Сложность этой полной атаки можно аппроксимировать величиной

$$\left\lceil \frac{n}{\varphi} \right\rceil \varphi \approx n$$

вычислений выходной функции плюс некоторое дополнительное количество линейно-алгебраических вычислений. Фактически, линейная алгебра будет вносить основную часть трудозатрат в реальных ситуациях.

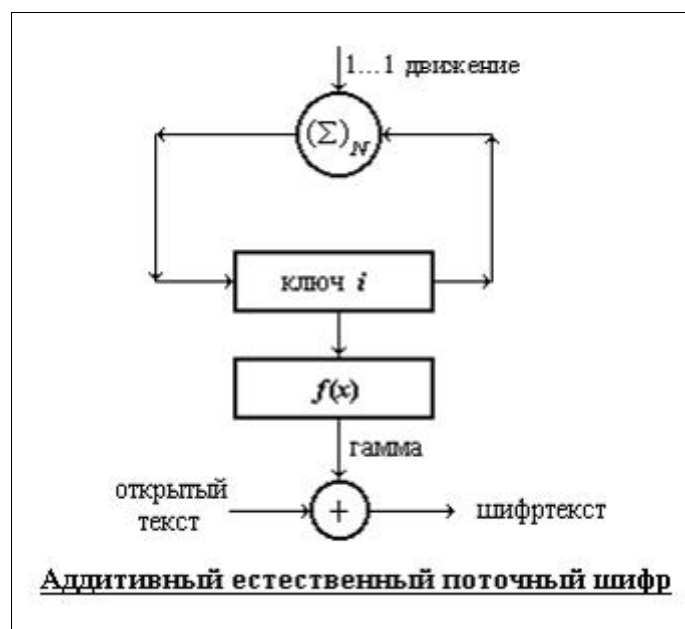
Применимость данной атаки несколько ограничена требованиями определенных структур разностей в a . Однако, проблемы могут возникнуть лишь в случае, если суммарное количество ресинхронизаций существенно меньше 2^β . Разработанный авторами метод вскрытия оказался легко применим к действующей криптосистеме, закрывающей каналы платного телевидения [111]. Эта система выполняет 256 ресинхронизаций и имеет $\beta = 5$. В работе [88] представлено подробное описание атаки только по шифртексту, которая может быть реализована аппаратно для бесключевого дешифрования видеосигнала в реальном масштабе времени.

9.3 Дифференциальный криптоанализ

Техника *дифференциального криптоанализа* была разработана на рубеже 1980-90-х годов израильскими криптографами Эли Бихамом и Ади Шамиром для исследования блочных DES-подобных шифров [30]. В 1993 году работающий в ФРГ китайский криптограф Куншень Динь представил работу, в которой идеи дифференциального криптоанализа развиты на область поточных шифров [107]. В частности, новая техника проиллюстрирована на примере анализа *аддитивных естественных поточных шифров*: шифрсистем, подобных криптосхемам на основе нелинейно фильтруемого регистра сдвига, но в которых регистр заменен простым счетчиком произвольного периода N .

9.3.1 Аддитивный естественный поточный шифр

Схема такой конструкции изображена на рисунке и основана на фильтруемом счетчике периода N или генераторе натуральной последовательности (ГНП).



Здесь $(\Sigma)_N$ обозначает целочисленное сложение по модулю N , "+" - двоичное сложение в абелевой группе $(G,+)$, а $f(x)$ - функция из Z_N в G . Ключом является начальное состояние счетчика.

Пусть некоторый генератор периодической последовательности имеет на выходе последовательность s^∞ периода N . Теперь зададим функцию на кольце вычетов Z_N как

$$f(i) = s_i, i \in Z_N.$$

Понятно, что любой генератор, порождающий периодические последовательности, можно реализовать с помощью представленной на рисунке конструкции. По этой причине криптосхема и получила название *естественной*.

9.3.2 Дифференциальная атака

Для изображенного на рисунке генератора подразумевается, что $f(x)$, N и фрагмент гаммы $h^t = h_0 h_1 \dots h_{t-1}$ известны криптоаналитику, который хочет восстановить ключ в момент времени, когда происходила генерация h_0 .

Пусть $C(f)_i = \{x : x \in Z_N, f(x) = i\}$ для $i = 0, 1$. Тогда процедуру атаки в соответствии с методом дифференциального криптоанализа можно описать следующим образом.

Шаг 1. Найти параметры $(i, j; w)$ с $(i, j) \in G \times G$ и $w \in Z_N$ такие, что

$$d_f(i, j; w) = |C(f)_i \cap (C(f)_j - w)| \quad (1)$$

мало настолько, насколько возможно, и определить соответствующие множества

$$D_f(i, j; w) = C(f)_i \cap (C(f)_j - w). \quad (2)$$

Шаг 2. Исследовать известную последовательность h^t и отыскать паттерны вида $i * \dots * j$ длины $w + 1$ в имеющемся фрагменте гаммы. Если такой паттерн обнаружен и i находится на k' -й позиции, то

$$k \in D_f(i, j; w) - k'.$$

Если $d_f(i, j; w)$ мало, то отыскать k в данном множестве. В противном случае выбрать другой $(i', j'; w')$ и отыскать соответствующее $D_f(i', j'; w') - k''$. Тогда

$$k \in (D_f(i, j; w) - k') \cap (D_f(i', j'; w') - k'').$$

Продолжать процедуру до тех пор, пока число данного множества, содержащего k , не станет достаточно малым.

Почему данный метод можно считать дифференциальной атакой? В шаге 1 параметр $d_f(i, j; w)$ фактически является количеством способов, которыми элемент w из Z_N может быть записан в виде разности элементов из $C(f)_j$ и $C(f)_i$, то есть это количество решений разностного уравнения

$$w = x_j - x_i, \quad x_j \in C(f)_j, \quad x_i \in C(f)_i.$$

Поэтому выражения (1) и (2) именуется параметрами разности. Основная часть данной атаки базируется на анализе этих параметров разности: идея заключается в отыскании таких малых w или больших w , которые можно было бы записывать настолько малой разностью некоторых C_i и C_j , насколько возможно.

9.3.3 Теоретический базис атаки

Теоретически, каждый бит гаммы может давать информацию о начальном состоянии генератора и ключе. Поэтому базовым требованием к поточным шифрам является то, чтобы каждый бит гаммы давал примерно одно и то же количество информации. В рассматриваемом случае из этого следует требование сбалансированности к функции $f(x)$. Такого рода побитовый анализ полезен для всех синхронных поточных шифров. Если $n = \log_2 N$, то можно записать

$$\begin{aligned} I(k; h_0 = 0) &= n - \log_2 |C(f)_0| \text{ бит,} \\ I(k; h_0 = 1) &= n - \log_2 |C(f)_1| \text{ бит.} \end{aligned}$$

Заметив, что $|C(f)_0| + |C(f)_1| = N$, получаем

$$2^{n-I(k;h_0=0)} + 2^{n-I(k;h_0=1)} = N.$$

Этот результат является теоретическим базисом для того, чтобы поддерживать стабильность взаимной информации в гамме настолько плоской, насколько возможно.

Если шифр не разработан достаточно тщательно, то некоторые комбинации бит могут выдавать значительно больше информации о ключе, нежели иные. Такие комбинации бит h_i и h_j (вместе с соответствующей длиной) обозначают $(h_i, h_j, |i - j|)$ и именуют "плохими паттернами". Идея, лежащая в основе дифференциального анализа, - отыскивать подобные плохие паттерны, в частности, такие тройки $(i, j; w)$, которые дают как можно больше информации о ключе.

Может появиться мысль, что шифры следует разрабатывать таким образом, чтобы взаимная информация $I(k; (i, j; w))$ была как можно меньше для всех $(i, j; w) \in Z_2 \times Z_2 \times Z_N$, но на самом деле этого достичь невозможно: один паттерн дает

$$I = n - \log_2 d_f(i, j; w) = n - \log_2 |C(f)_i \cap (C(f)_j - w)|$$

бит информации о ключе.

Можно доказать две теоремы, предоставляющие теоретический базис для исследования взаимной информационной стабильности между двухбитными паттернами и ключом.

Теорема 1. Закон сохранения для разностных параметров:

$$\begin{aligned} \sum_j d_f(i, j; w) &= |C(f)_i|, \quad i \in Z_2, \quad w \in Z_N; \\ \sum_i d_f(i, j; w) &= |C(f)_j|, \quad j \in Z_2, \quad w \in Z_N; \\ \sum_{(i,j) \in Z_2 \times Z_2} d_f(i, j; w) &= N, \quad w \in Z_N. \end{aligned}$$

Теорема 2. Закон сохранения взаимной информации:

$$\begin{aligned} \sum_j 2^{n-I(k;(i,j;w))} &= |C(f)_i|, \quad i \in Z_2, \quad w \in Z_N; \\ \sum_i 2^{n-I(k;(i,j;w))} &= |C(f)_j|, \quad j \in Z_2, \quad w \in Z_N; \\ \sum_{(i,j) \in Z_2 \times Z_2} 2^{n-I(k;(i,j;w))} &= N, \quad w \in Z_N; \\ \sum_{(i,j;w)} 2^{n-I(k;(i,j;w))} &= N^2. \end{aligned}$$

Несложно обобщить эти теоремы на случай произвольной конечной G . В частности, подобные результаты выполняются для трехбитных паттернов. Может быть построена и атака, основанная на анализе таких трехбитных паттернов.

9.4 Линейный криптоанализ

В 1994 году Йован Голич представил большую обобщающую работу, посвященную методу *линейного криптоанализа* поточных шифров [145]. В основе метода лежит обнаруженная Голичем линейная статистическая слабость двоичных генераторов гаммы [144]. Эта общая слабость, зависящая от структуры и не зависящая от начального заполнения генератора, имеет в своей основе локальные свойства блоков последовательных бит гаммы, длина которых превышает размер памяти, и измеряется в терминах соответствующего коэффициента корреляции. В работе [144] представлен эффективный метод для выявления такого рода слабости, основанный на *аппроксимации* конечного автомата *линейной последовательной схемой* (АЛПС) [141] (см. Раздел 7.3). Если структура шифра не зависит от ключа, то соответствующий статистический тест можно использовать для восстановления статистически избыточного открытого текста по известному шифртексту. Если же структура зависит от ключа, то этот же тест можно использовать также для определения соответствующего секретного ключа.

Разработанный криптоаналитический метод применен Голичем для исследования регистров сдвига с неравномерным движением и произвольных генераторов гаммы на основе регистров сдвига. Продемонстрирована применимость линейного криптоанализа к подобным схемам и показано, что генераторы с небольшим количеством регистров поддаются такого рода атаке.

9.4.1 Линейные модели поточных шифров

Двоичная автономная машина с конечным числом состояний или последовательная схема задается следующими соотношениями

$$S_{t+1} = F(S_t), \quad t \geq 0$$

$$y_t = f(S_t), t \geq 0,$$

где $F : GF(2)^M \rightarrow GF(2)^M$ - это векторная булева функция следующего состояния, $f : GF(2)^M \rightarrow GF(2)$ - выходная булева функция, $S_t = (s_{1t}, \dots, s_{Mt})$ - вектор состояния в момент времени t , M - количество бит памяти, y_t - бит выхода в момент времени t , а $S_0 = (s_{1,0}, \dots, s_{M,0})$ - вектор начального состояния. Двоичный генератор гаммы можно задать как двоичный автономный конечный автомат, у которого начальное состояние, функция следующего состояния и функция выхода управляются секретным ключом.

При заданных F и f каждый бит выхода - это булева функция от переменных начального состояния, то есть $y_t = f(F^t(S_0))$, где F^t обозначает t -кратную самокомпозицию функции F , а F^0 - тождественная функция, $t \geq 0$. Если S_0 подразумевается равновероятно распределенной случайной переменной, то выходные биты становятся двоичными случайными переменными. При конструировании криптогенератора базовым критерием к F и f , относящимся к статистике выходной последовательности, является требование того, чтобы каждый бит y_t был сбалансированной функцией от S_0 . Ясно, что это обеспечивается, когда обе функции F и f сбалансированы. Однако, вектор из $M+1$ последовательных выходных бит (y_t, \dots, y_{t-M}) не может быть сбалансированной функцией от S_0 при любом $t \geq M$, поскольку S_0 имеет размерность только M . Таким образом, должна существовать некоторая линейная функция $L(y_t, \dots, y_{t-M})$, то есть несбалансированная функция от S_0 для каждого $t \geq M$. Если функция следующего состояния сбалансирована, то вектор состояния S_t является сбалансированной случайной переменной в любой момент времени $t \geq 0$, при условии сбалансированности S_0 . Тогда вероятностное распределение линейной функции $L(y_t, \dots, y_{t-M})$, рассматриваемой как функция от S_{t-M} , одно и то же для каждого $t \geq M$, и существует такая линейная функция, которая эффективно зависит от y_t . Вероятностное распределение может быть выражено в терминах коэффициента корреляции с константно нулевой функцией. Это означает, что автономный конечный автомат может быть эквивалентно представлен в виде неавтономного регистра с линейной обратной связью, длиной самое большее M и аддитивной входной последовательностью из несбалансированных идентично распределенных двоичных случайных переменных. Другими словами, линейной моделью

$$y_t = \sum_{i=1}^M a_i y_{t-i} + e_t, \quad t \geq M.$$

Для того, чтобы отыскать все несбалансированные линейные функции от самое большее $M+1$ последовательных выходных бит, следует определить корреляционные коэффициенты для 2^M булевых функций от M переменных. Метод тотального перебора имеет вычислительную сложность $O(2^{2M})$, что при больших значениях M на практике невозможно.

Для решения этой задачи Голичем предложен метод аппроксимации линейной последовательной схемой [141], достаточно подробно описанный в Разделе 7.3.3. и позволяющий с высокой вероятностью находить несбалансированные линейные функции со сравнительно большими корреляционными коэффициентами.

9.4.2 Линейный анализ генераторов на основе регистров сдвига

Метод АЛПС применен Гоlichem для общего криптоанализа генераторов на базе РСЛОС: с равномерным и неравномерным движением (см. Раздел 6.4), не имеющим или имеющим память (см. Раздел 7.3). В работе [145] метод АЛПС применен для криптоанализа конкретных схем: генератора-сумматора (см. Раздел 8.1.8), сжимающего генератора (см. Раздел 6.3.1), каскадных генераторов с неравномерным движением (см. Разделы 6.2.1 и 8.5.3), модифицированного линейного конгруэнтного генератора (см. Раздел 8.5.2).

9.5 Методы дискретной оптимизации: симулятор отжига и генетический алгоритм

Изучение методов численной оптимизации и их приложений - весьма перспективная область криптоанализа в современных условиях, когда мощность компьютерных вычислений постоянно возрастает, а распределенные вычислительные системы становятся все более преобладающими. Распараллеленная реализация таких методов может радикально повысить производительность и улучшить общую эффективность при решении широкого ряда задач по вскрытию шифрсистем. В работе 1996 года австралийских криптографов Э. Доусона и Э. Кларка [95] представлено развернутое введение в область автоматизированных криптоаналитических атак с использованием эвристик оптимизации. В качестве примеров главным образом рассматриваются методы вскрытия простейших криптосистем - шифров замены и перестановки, однако принципиальные идеи алгоритмов оптимизации можно развить и на криптоанализ поточных шифрсистем.

Обсуждаются два алгоритма - *генетический алгоритм* (ГА) и *симулятор отжига* (СО). Каждый из этих алгоритмов имеет различные характеристики, то есть в зависимости от конкретного приложения один из них может быть полезнее другого. Данные алгоритмы используются для решения проблем в ситуациях, когда детерминистский подход оказывается непреодолимо сложным и требующим неприемлемых затрат времени. Типы решаемых проблем обычно характеризуют с помощью *целевой функции* (или *функции стоимости*), ставя цель минимизировать такую функцию. Это делают путем поиска лишь в небольшой области пространства решений, пытаясь избегать решений, которые не обладают признаками "хороших". Определение характеристик хороших решений не всегда является простым делом и, возможно, это наиболее важная задача при использовании описанных здесь алгоритмов.

9.5.1 Симулятор отжига и алгоритм Метрополиса

Симулятор отжига - это техника комбинаторной оптимизации, которую впервые предложили в 1983 году Киркпатрик, Гелатт и Векки [186]. Они применили эту технику для решения проблемы оптимального размещения компонент в кристалле интегральной микросхемы. Количество переменных в задаче такого рода может быть огромным, делая

нахождение оптимального решения невозможным. "Симулированный отжиг" исследует небольшую область пространства решений в поисках глобального минимума.

Алгоритм Метрополиса. Симулятор отжига опирается на процедуру, известную под названием *алгоритм Метрополиса* и основанную на уравнениях, описывающих движение частиц в газе или жидкости между различными энергетическими состояниями. Следующее уравнение описывает вероятность того, что частица движется между двумя энергетическими уровнями E_1 и E_2 :

$$P(E) = e^{\frac{-\Delta E}{kT}},$$

где $\Delta E = E_2 - E_1$, k - постоянная Больцмана и T - температура. Алгоритм Метрополиса использует это уравнение при выборе - принять или нет решение о перемещении между разными энергетическими уровнями (см. [264]). В общем виде алгоритм сводится к уравнению

$$P(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta E \geq 0 \\ e^{\frac{-\Delta E}{kT}}, & \text{если } \Delta E < 0. \end{cases}$$

Может ли оценка функции стоимости решения проблемы в эквивалентной форме рассматриваться как энергия в последнем уравнении? Перемещение, понижающее стоимость (повышение энергии) будет приниматься всегда. Однако, алгоритм Метрополиса устроен так, что перемещение к решению с более высокой стоимостью (меньшей энергией) принимается с вероятностью, которая понижается с ростом температуры. Это придает алгоритму способность удаляться от регионов локального минимума. Такое свойство не характерно для так называемых техник "итеративного улучшения", которые движутся только в направлении понижения стоимости. То есть перемещение принимается только тогда, когда $\Delta E > 0$.

Алгоритм симуляции отжига. Как можно понять из названия, алгоритм симуляции отжига имитирует физический процесс отжига. Отжиг - это процесс, при котором металл, первоначально находящийся при высокой температуре, постепенно остывает таким образом, что молекулы металла имеют возможность перемещаться к состояниям наименьшей энергии. Металл в состоянии наименьшей энергии обычно имеет кристаллическую структуру, другими словами, его молекулы в высшей степени упорядочены. Переходя к интересующей комбинаторной проблеме, ее текущее решение можно считать аналогичным структуре молекул в одном из произвольных состояний процесса отжига.

Алгоритм симуляции отжига состоит из нескольких компонент.

- Должна существовать некоторая мера для оценки того, насколько "хороша" конкретная конфигурация (или решение). Эту меру называют *целевой функцией* или *функцией стоимости*.
- Должна быть задана "схема остывания" (подробнее см. ниже). Схема остывания задает начальную температуру, то, как температура понижается при каждой итерации, и когда отжиг должен остановиться. Разработано множество сложных

математических моделей для описания схемы остывания, однако обычно бывает достаточно простой модели.

- Должен иметься также набор правил, описывающих каким образом должно изменяться конкретное решение для поиска более лучшего решения.

Далее представлена схема алгоритма симуляции отжига.

1. Сгенерировать начальное решение задачи (обычно, случайным образом).
2. Вычислить *стоимость* начального решения.
3. Установить начальное значение температуры $T = T^{(0)}$.
4. Для температуры T проделать много раз:
 - Сгенерировать новое решение. Другими словами, здесь текущее решение определенным образом модифицируется.
 - Вычислить стоимость модифицированного решения.
 - Определить разность в стоимости между текущим решением и предложенным.
 - Проконсультироваться с алгоритмом Метрополиса для решения о том, следует ли принимать предложенное решение.
 - Если предложенное решение принято, в текущем решении прodelываются необходимые изменения.
5. Если выполнен критерий остановки, алгоритм завершается на текущем решении, в противном случае температура понижается и алгоритм возвращается к шагу 4.

Схема остывания. Как упоминалось выше, у схемы остывания три главных цели.

1. Она задает начальную температуру. Эта температура выбирается достаточно высокой, чтобы все предложенные переходы принимались алгоритмом Метрополиса.
2. Схема остывания описывает, как понижается температура. Хотя есть и другие способы, здесь представлены два возможных пути.
 - (а) Экспоненциальное понижение температуры

$$T^{(k+1)} = \alpha \times T^{(k)} = \alpha^k \times T^{(0)}, \text{ где } 0 < \alpha < 1.$$

Обычно полагают $\alpha \approx 0.9$, но может быть и до 0.99.

- (б) Линейное понижение: здесь температурный отрезок делится на K интервалов.

$$T^{(k+1)} = \frac{K-k}{K} \times T^{(0)}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, K.$$

3. Наконец, схема остывания сигнализирует, когда процесс отжига должен закончиться. Обычно это именуют *критерием остановки*. В случае линейного понижения алгоритм работает K итераций (при условии, что K не очень велико). В случае экспоненциального понижения, процесс обычно завершается, когда количество принимаемых переходов при конкретной температуре становится очень мало (≈ 0).

9.5.2 Корреляционная атака, модифицированная симулятором отжига

В качестве примеров, иллюстрирующих приложение алгоритмов оптимизации к криптоанализу поточных шифров, рассмотрены 3 подхода, реализующих симулятор отжига в корреляционной атаке Зигенталера [363] (См. Раздел 4.3.1). Эти подходы позволяют повысить эффективность базовой корреляционной атаки.

Прежде всего, необходима функция стоимости. Проведены эксперименты с использованием двух различных мер. В качестве первой функции стоимости выбран уровень ошибок, то есть среднее арифметическое вероятностей в векторе вероятностей ошибок после выполнения дополнений. Благодаря свойству самокомпозиции базового алгоритма, уровень ошибок имеет тенденцию к минимизации, и если алгоритм может исправлять почти все ошибки, то он предоставляет оценку относительного количества ошибок в наблюдаемой гамм-последовательности. Это дает предсказание ошибки, основанное на вероятности того, что бит на каждой позиции правильный. Второй используемой мерой стало просто количество невыполненных проверок четности в наблюдаемой гамм-последовательности, итеративно модифицируемое данным алгоритмом. Как установлено, такой подход тоже дает приемлемую оценку "качества" решения.

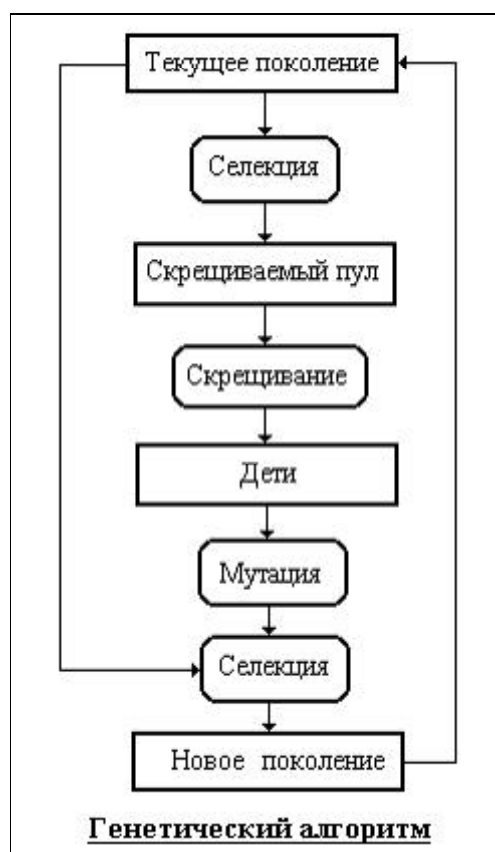
1. **Случайный отбор подмножеств.** Базовый алгоритм корреляционной атаки на каждой итерации обновляет каждый элемент вектора вероятностей. При высоком уровне шума алгоритм попадает в область локального минимума, из которой не может выбраться. Для преодоления этого неудобства первый из примененных методов обновляет только определенные элементы в векторе вероятностей ошибки. При каждой температуре случайным образом берется фиксированное количество элементов. Для каждого такого элемента обновляется вероятность и вычисляется новая стоимость. Если критерий Метрополиса удовлетворяется, то изменение для каждого элемента в обновленном векторе принимается. Отметим, что когда функция стоимости - количество невыполненных проверок четности, то стоимость будет меняться лишь тогда, когда обновленный элемент в векторе вероятностей превышает 0.5, вызывая комплементарное дополнение соответствующего бита.
2. **Случайное дополнение подмножеств.** Второй метод строится на выборе небольшого количества случайных позиций в имеющейся гамм-последовательности и комплементарном дополнении соответствующих бит без преобразования вероятности $p_i \rightarrow 1 - p_i$ с тем, чтобы эти дополнения были эффективны. После этого заново пересчитываются проверки четности и обновляется вектор вероятностей. Как правило, количество инвертируемых бит невелико (меньше 10 из 10 000).
3. **Комбинирование случайного дополнения подмножеств с детерминированным отбором.** При данном подходе обновляются наиболее важные элементы вектора вероятностей, а некоторое количество бит гаммы комплементарно дополняется случайным образом. Вероятность, с которой биты подвергаются дополнению, зависит от температуры отжига и понижается со временем. Это делается с целью сокращения количества неправильных дополнений бит по мере приближения алгоритма к оптимальному решению.

Как показали вычислительные эксперименты, оптимизация быстрых корреляционных атак с помощью симулятора отжига позволяет заметно сократить процент неверно определенных бит.

9.5.2 Генетические алгоритмы

Генетический алгоритм использует такие концепции, как селекция, скрещивание и мутация, позаимствованные из дарвиновской теории эволюции. Первоначально генетический алгоритм разрабатывался для решения проблем, имеющих решение в виде двоичного вектора. Показано, что подобная стратегия может использоваться и в задачах, где решение представляется в виде вектора из целых чисел. Проблемы, в которых решение представляется не в двоичном формате, иногда именуют *эволюционными программами*, но название "генетический алгоритм" традиционно применяется в самом общем контексте.

В отличие от симулятора отжига, использующего функцию стоимости, генетический алгоритм обычно связан с *функцией соответствия*. Как правило, функция соответствия принимает некоторое значение в пределах от нуля до единицы (в идеальном случае оптимальное решение будет иметь высочайший уровень соответствия, если возможно, равный единице). Хорошая функция соответствия будет давать точное свидетельство о том, насколько "близко" достижимое решение к оптимальному.



Генетический алгоритм работает с некоторым множеством решений, которое часто именуют "пул генов" (каждый "набор генов" в пуле - это одно из возможных решений задачи). Этот пул решений итеративно обновляется по некоторой "эволюционной" схеме.

Из текущего пула выбираются пары родителей для скрещивания. В процессе скрещивания каждая пара родителей порождает пару детей. Затем эти дети претерпевают некоторый мутационный процесс, после которого проводится селекция, определяющая, какие гены передаются в следующее поколение. Графически генетический алгоритм представлен на рисунке.

Начальный пул генов - это обычно случайно генерируемый набор возможных решений с соответствующими им значениями функции соответствия. Иногда начинают с "известного хорошего решения", что более предпочтительно, но не всегда возможно. Из этого генетического массива выбирается некоторое количество родителей для скрещивания. Выбор родителей осуществляется псевдослучайным образом. Другими словами, родители подбираются случайно, но со сдвигом в сторону более соответствующих генов. Это означает, что наиболее подходящие гены с большей вероятностью участвуют в создании нового генетического пула. Когда родители отобраны, они группируются по парам и их компоненты комбинируются некоторым образом для порождения детей. Затем дети подвергаются мутации для внесения в новое поколение "генетического разнообразия". Для эволюционных программ, работающих не с битовыми наборами, операции скрещивания и мутации обычно имеют особый вид, специфический для характера решаемой проблемы и для того, каким образом представляется возможное решение.

Генетический алгоритм хорошо ложится на параллельную реализацию, что делает его чрезвычайно эффективным методом для решения соответствующих проблем, допускающих подобное распараллеливание.

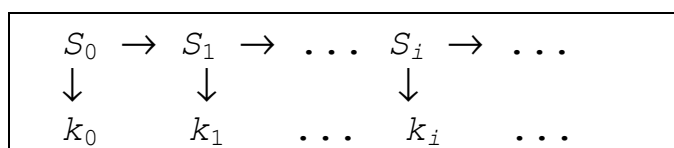
Параллельные генетические алгоритмы. Существует несколько различных стратегий для построения параллельного генетического алгоритма. Один из подходов, не зависящий от характера решаемой проблемы, - распараллелить задачи в рамках текущей итерации генетического алгоритма. Другими словами, распараллелить функции селекции, скрещивания и мутации.

Другой возможный подход - выполнять несколько последовательных генетических алгоритмов, работающих над одной и той же проблемой в параллели. Еще лучше, когда каждый генетический алгоритм работает над своей частью одной и той же проблемы. Конечно, наличие такой возможности зависит от того, можно ли проблему разбить на несколько задач меньшего размера.

9.6 Оптимизация тотального перебора ключей

В 1996 году криптограф Стив Бэббидж из английской компании Vodafone (а ранее работавший в известной криптофирме Racal Comsec Ltd.) представил новую технику тотального перебора ключей при вскрытии поточных шифров [17] (если под "ключом" понимать начальное состояние криптогенератора). Методика проста и позволяет существенно повысить скорость перебора за счет повышения требований к количеству известной гаммы и объему памяти компьютера.

Описание модели. Модель двоичного генератора шифрующей гаммы представлена на рисунке.



Стрелка направленная вправо обозначает функцию перехода, стрелка вниз - функцию выхода, вычисляющую i -й бит гаммы на основе i -го состояния генератора. Ключ задает начальное состояние S_0 .

Пусть S - множество всех возможных состояний генератора гаммы, и пусть $n = \log_2(|S|)$, так что количество таких состояний равно 2^n .

Тотальный перебор ключей. Стандартная атака тотальным перебором подразумевает знание по крайней мере n бит гаммы и заключается в опробовании всех возможных состояний криптогенератора, для чего требуются временные затраты порядка по меньшей мере 2^n . Компьютерной памяти при этом требуется совсем немного.

Идея усовершенствованной атаки. Предположим, имеется некоторое количество известных последовательных бит гаммы. Пусть количество этих бит равно $2^m + n - 1$, так что можно выделить $M = 2^m$ накладывающихся друг на друга n -битных подпоследовательностей.

Теперь предположим, что нами сгенерировано $R = 2^r$ независимых случайных состояний генератора, и для каждого такого состояния выработана соответствующая n -битная гамм-подпоследовательность.

Теперь имеется список из 2^m n -битных подпоследовательностей известной гаммы и список из 2^r n -битных подпоследовательностей, выработанных на основе известных состояний генератора. Если подпоследовательность из первого списка совпадает с подпоследовательностью из второго, то с высокой вероятностью известное состояние, породившее подпоследовательность из второго списка является тем же самым, что и состояние генератора в момент порождения известной гаммы. Для того, чтобы такое совпадение было вероятным требуется выполнение условия $m + r \approx n$.

Суть новой атаки в том, что данный процесс поиска соответствия между двумя списками может требовать намного меньше затрат, чем 2^n операций. Мы узнаем состояние криптогенератора в некоторой точке порождения известной гаммы; это наверняка позволяет нам сгенерировать всю последующую гамму, и в большинстве реальных шифрсистем позволит также добраться и назад, к начальному состоянию криптогенератора.

Первая формулировка атаки. Предположим, нам известны биты шифрующей гаммы $k_{s+1} \dots k_{s+M+n-1}$. Составляется список из $M = 2^m$ накладывающихся n -битных подпоследовательностей:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} k_{s+1} & \dots & k_{s+n} \\ k_{s+2} & \dots & k_{s+n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s+M} & \dots & k_{s+M+n-1} \end{array} \right.$$

Затем этот список подпоследовательностей сортируется (например, в лексикографическом порядке); для этого требуется массив памяти порядка $(n + m)2^m$ и время порядка $(n + m^2)2^m$.

Теперь несколько раз случайно выбирается состояние S криптогенератора, вырабатывается n -битная последовательность гаммы с начального состояния S , и на точное совпадение проверяется имеющийся список. Появление единственного набора символов в отсортированном списке проверяется очень просто, для этого требуется время порядка m^2 . Ожидается, что по грубым оценкам понадобится около 2^{n-m} опробований до того, как будет обнаружено совпадение.

Выбирая $m = n/2$, получим, что вся атака потребует количество известных бит гаммы порядка $2^{n/2} = \sqrt{|S|}$, время порядка $n^2 2^{n/2} \approx \sqrt{|S|}$ и память порядка $n 2^{n/2} \approx \sqrt{|S|}$.

Вторая формулировка атаки. Вторым методом включает фазу предварительных вычислений - сортировку, результаты которой можно использовать для атаки на несколько разных случаев использования криптогенератора. В фазе предвычислений случайно выбираются $R = 2^r$ состояний генератора $S_1 \dots S_R$ и для каждого такого состояния вырабатывается соответствующая n -битная гамм-последовательность:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1: k_{1,1} \quad \dots \quad k_{1,n} \\ S_2: k_{2,1} \quad \dots \quad k_{2,n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ S_R: k_{R,1} \quad \dots \quad k_{R,n} \end{array} \right.$$

Затем этот список подпоследовательностей сортируется (например, в лексикографическом порядке); для этого требуется массив памяти порядка $(n + r)2^r$ и время порядка $(n + r^2)2^r$.

При каждой конкретной атаке мы проходим через последовательность имеющихся бит гаммы, каждый раз выделяя очередную n -битную подпоследовательность и проверяя хранящийся в памяти список на точное совпадение. Каждое опробование потребует времени порядка r^2 , и ожидается, что понадобится примерно 2^{n-r} опробований до того, как будет обнаружено совпадение.

Выбирая $r = n/2$, получим, что вся атака потребует количество известных бит гаммы порядка $2^{n/2} = \sqrt{|S|}$, время порядка $n^2 2^{n/2} \approx \sqrt{|S|}$ и память порядка $n 2^{n/2} \approx \sqrt{|S|}$. Выбирая $r > n/2$, то есть выполняя больше работы на этапе предвычислений, для атаки потребуются памяти порядка $> n2^{n/2}$ и времени предвычислений порядка $> n^2 2^{n/2}$, но при этом количество известных бит гаммы порядка $< 2^{n/2}$ и время реальной атаки порядка $< n^2 2^{n/2}$, то есть в принципе время реальной атаки можно сделать очень небольшим.

Непоследовательные биты гаммы. Легко увидеть, что данную атаку можно обобщить и для работы с регулярно прореженной гаммой, а не только обязательно с последовательными битами (например, беря каждый восьмой бит гаммы). А также для регулярно прореженных линейных комбинаций бит гаммы (например, XOR от 8 бит каждого байта гаммы). Это может сделать такую атаку особо привлекательной в некоторых частных случаях.

Сравнение с полученными ранее результатами. В работе М. Додда [109] продемонстрирована атака с очень близкими показателями, но для особого случая, когда преобразование состояния генератора линейно, а выходная функция зависит от $\leq n/2$ бит состояния. Представленная здесь атака имеет значительно более широкое применение, чем атака Додда, но последняя может быть более мощной в определенных обстоятельствах: она может использовать любые биты гаммы (а не только регулярно прореженные), что бывает в ситуациях, когда некоторые биты "известны" лишь вероятно (хотя при этом требуется больше гаммы и времени); а также в случаях, когда выходная функция зависит от менее половины бит состояния (при этом может потребоваться намного меньше бит гаммы).

Заключение. Необходимо подчеркнуть, что представленная здесь атака может улучшить время поиска среди всех возможных состояний генератора, что, строго говоря, не эквивалентно всем возможным секретным ключам. Если количество возможных состояний конкретного генератора значительно превышает количество возможных секретных ключей, то данная атака никакого выигрыша не дает.

С этой точки зрения можно предложить следующий принцип конструирования поточных шифров, гарантирующий стойкость к подобного рода атакам: при ключе размером в i бит желательно иметь размер состояния генератора не менее $2i$ бит.

9.7 О существовании стойких регистров сдвига

В 1996 году американский криптограф Эндрю Клаппер представил сугубо теоретическую работу [194], в которой сделана попытка с наиболее широких, насколько это возможно, позиций рассмотреть задачу криптоанализа поточных шифров. Полученные результаты позволили автору показать, что существуют семейства генераторов гаммы, стойких ко всем возможным атакам очень общего типа, именуемого "алгоритмом синтеза криптогенератора".

9.7.1 Концептуальная модель

Исторически сложилось так, что разработка поточных шифров - это в основном отыскивание всевозможных методов для противостояния существующим криптоаналитическим атакам. Имея в фундаменте теорию информации Шеннона, разработчики часто ощущают, что поиск действительно стойкого поточного шифра - дело безнадежное, и максимум что можно сделать - построить систему, противостоящую всем известным атакам. Цель настоящей работы - исследовать вероятность того, что существуют семейства поточных шифров, которые противостоят криптоанализу очень широкого класса атак. В качестве базиса для идеи "стойкости" вместо теории Шеннона используется асимптотическая сложность. Семейство поточных шифров является стойким ко всем атакам определенного общего типа, если все такие атаки требуют асимптотически большого количества бит шифрующей гаммы. Сразу следует отметить, что построенный Клаппером подход к конструированию таких семейств поточного шифрования, хотя и

рекурсивный по своей природе, не дает практического решения для создания такого рода семейств.

Класс атак, которому посвящена работа, сводится к использованию небольшого количества известных бит гаммы для синтеза быстрого генератора, порождающего эту шифрпоследовательность. Наиболее известной атакой такого рода, возможно, является алгоритм Берлекампа-Мэсси (см. Раздел 3.2.2), восстанавливающий РСЛОС длины n по $2n$ битам порожденной им последовательности. Для противостояния этому алгоритму было разработано несколько конструкций (см., например, [74] [166] [184] [334] [335]), однако последующие исследования позволили построить криптоаналитические методы для вскрытия и таких последовательностей (в частности, геометрических последовательностей [189] и порожденных сумматором [193]). Поставив в настоящей работе вопрос "а существуют ли вообще эффективно генерируемые последовательности, способные противостоять таким атакам?", Клаппер получил в целом утвердительный ответ.

Подобные вопросы уже изучались ранее в работах Яо [394] и М.Блюма-С.Микали [39] (см. Главу 10). Но их модели и результаты во многом отличны от данной работы. Прежде всего, в этих моделях генераторы последовательностей - это генераторы с временем вычисления, полиномиально зависящим от размера начального состояния. В модели Клаппера используется значительно более жесткая модель, основанная на использовании для генерации бит гаммы быстрых регистров сдвига. Во-вторых, указанные авторы исходили из доступности противнику всех ранее сгенерированных бит для предсказания очередного бита гаммы (с помощью так называемого "теста следующего бита"). Для атаки, рассматриваемой здесь, требуется лишь небольшое количество бит (полиномиальное от размера результирующего генератора) позволяющее выработать все остальные биты. В-третьих, атаки Яо, Блюма и Микали являются вероятностными, а рассматриваемые здесь - детерминированные. Наконец, полученные предыдущими авторами результаты базируются на недоказанных предположениях теории сложности, таких как неразрешимость проблемы дискретного логарифмирования. Результаты Клаппера не зависят от подобного рода предположений.

9.7.2 Определения

В данном разделе дано описание базовых объектов изучения - регистров сдвига с обратной связью (РСОС), и идей стойкости для семейств таких регистров.

Регистр сдвига длины n задается функцией $F: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$, именуемой *функцией обратной связи*. *Состоянием* регистра называют n -битный вектор $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$. *Выходом* от состояния \mathbf{x} является x_0 , а *следующим состоянием* - $F(\mathbf{x})$.

Таким образом, исходя из заданного состояния \mathbf{x} РСОС дает на выходе бесконечную в конечном счете периодическую двоичную последовательность путем итерации операций выхода и следующего состояния. *Размером* регистра F называют минимальное количество вентилей в схеме, вычисляющей функцию F .

Такие регистры в действительности являются разновидностью машины с конечным числом состояний *без входа*. Можно рассматривать и более общую модель, в которой выход вычисляется как функция от всего состояния, а не от самого правого бита в векторе состояния. Однако, любую такую машину можно легко преобразовать в эквивалентную (то есть порождающую тот же выход) к типу, изучаемому здесь, увеличив длину на 1. Этот новый бит обновляется с помощью композиции начального выхода и функций

изменения состояния. Другими словами полученные в данном исследовании результаты можно применять и к более общей модели, но с более простой моделью легче работать.

Семейство РСОС F - это бесконечное множество РСОС таких, что всякая в конечном счете периодическая двоичная последовательность может быть порождена по крайней мере одним регистром из F . Пусть F_n обозначает множество РСОС из F длины n . Если B - бесконечная, в конечном счете периодическая двоичная последовательность, то F -размах B , обозначаемый как $\lambda_F(B)$, - это наименьшее целое n такое, что B может быть сгенерирована регистром из F_n .

В рамках данного исследования представляют интерес регистры, у которых функции обратной связи можно вычислить быстро. Пусть $\delta(n)$ - максимум среди всех F в F . Говорят, что F - быстрое, если $\delta(n) \in O(\log(n))$. Из этого следует, что размеры (количества вентилей) регистров из F - полиномы от длин регистров. На практике размеры регистров из быстрых семейств, как правило, зависят от длин регистров линейно.

Главная задача исследования - определить, можно ли, имея небольшое количество бит последовательности B , эффективно синтезировать наименьший регистр из F , порождающий на своем выходе B .

Алгоритм T является F -синтезирующим алгоритмом, если при заданном входе b_0, \dots, b_{k-1} ,

1. T описывает схему, которая вычисляет функцию обратной связи $F \in F$;
2. если n - длина F , T также дает на выходе n -битный вектор \mathbf{a} такой, что первые k бит выхода F с начальным состоянием \mathbf{a} - это подпоследовательность b_0, \dots, b_{k-1} .

Для данного алгоритма период последовательности B может подразумеваться известным, а может и нет. Алгоритм T является *эффективным*, если:

1. Он работает полиномиальное время;
2. Имеется полином $p(n)$ такой, что если $n = \lambda_F(B)$, то по входу b_0, \dots, b_{k-1} с $k \geq p(n)$, T дает на выходе $F \in F$ длины n , которая порождает B .

Семейство регистров F является *синтетическим*, если имеется эффективный F -синтезирующий алгоритм. Известно, что определенные семейства регистров, играющие важную роль в криптографии, являются синтетическими. В частности, таковыми являются семейство РСЛОС (см. Раздел 3.2) и семейство РСОСП (см. Раздел 7.4).

Говорят, что семейство последовательностей является стойким относительно семейства регистров, если (а) либо не существует способа синтезировать наилучший регистр в семействе для данной последовательности; (б) либо длина наилучшего регистра быстро растет с увеличением периода последовательности.

Пусть $B = B^1, B^2, \dots$ - последовательность из последовательностей с возрастающими периодами, и пусть $p_B(n)$ - период последовательности B^n . Пусть $\Lambda_{F,B}(n) = \lambda_F(B^n)$. Тогда B является F -стойкой, если выполнено одно из условий

1. F - не синтетическое; либо
2. Для каждого $k > 0$ имеем

$$\Lambda_{F,B}(n) = \Omega(\log(p_B(n))^k).$$

В каждом из случаев при достаточно больших n невозможно эффективно найти короткий регистр в F , порождающий B^n . Цель данного исследования - показать, что существует последовательность B из периодических двоичных последовательностей такая, что

1. B является F -стойкой для каждого семейства регистров с обратной связью;
2. Существует семейство F быстрых регистров, содержащее генераторы для последовательностей из B , длины которых логарифмически зависят от периодов данных последовательностей.

При описании скорости роста функций используется следующая терминология. Пусть $f(n)$ - некоторая функция. Говорят, что $f(n)$ - *субэкспоненциальна*, если для каждого $d > 0$, $f(n) \in O(2^{n/d})$. Говорят, что $f(n)$ - *суперполиномиальна*, если для каждого $d > 0$, $f(n) \in \Omega(n^d)$.

Таким образом, в рамках данных определений, некоторое семейство является стойким, если оно достигает суперполиномиальной стойкости. Фактически будет показано, что можно отыскивать семейства, достигающие произвольной субэкспоненциальной стойкости, а не просто суперполиномиальной стойкости. Хорошо известно, что существуют субэкспоненциальные суперполиномиальные функции.

9.7.3 Существование стойких РСОС

В этом разделе даны теоремы о существовании регистров сдвига с обратной связью и последовательностей, противостоящих всем атакам синтеза в том смысле, что любая такая атака приводит к синтезу неэффективных генераторов.

Теорема 1. Пусть $h(n)$ - произвольная субэкспоненциальная функция. Существует семейство F быстрых регистров такое, что для каждого синтетического семейства F' имеется бесконечно много регистров F из F с выходной последовательностью S , удовлетворяющей соотношению

$$\lambda_{F'}(S) \geq h(\lambda_F(S)).$$

Доказательство. Для каждого алгоритма синтеза T пусть F_T будет семейством регистров, порождаемых на выходе T . Пусть F^1, F^2, \dots - перечисление синтетических семейств регистров, так что каждое F_T появляется бесконечно часто. Пусть соответствующими алгоритмами синтеза будут T^1, T^2, \dots .

Семейство F будет конструироваться поэтапно, по "диагональному" принципу. В конце этапа $i - 1$ будет сконструировано F для регистров длиной до k_{i-1} , так что теорема будет выполнена для F^1, \dots, F^{i-1} . Покажем теперь, как развить конструкцию на этап i .

Пусть $p(n)$ - полином такой, что для каждой последовательности B , алгоритм T^i дает на выходе регистр, который порождает B при наличии по крайней мере $p(\lambda_{F^i}(B))$ бит B . Можно полагать $p(n) = n^d$. Пусть r будет больше, чем период любой последовательности, порожденной любым регистром, уже имеющимся в F , и достаточно большим, чтобы для каждого $k \geq r$ выполнялось

$$2^{k/d} > h(k+3).$$

Пусть n удовлетворяет условию $2^r < p(n)$. Пусть k удовлетворяет условию $2^k \leq p(n) < 2^{k+1}$. Будет сконструирована пара регистров F и G длины самое большее $k+3$, чьи выходы согласованы в первых $2^{k+1} - 1$ членах, но не в 2^{k+1} -ом члене.

Для F выбирается РСЛОС длины $k+1$, дающий на выходе m -последовательность (периода $2^{k+1} - 1$). Функция обратной связи в таком регистре - просто сдвиг на k бит и XOR от самое большее $k+1$ бит.

Для G выбирается регистр длины $k+3$ с битами, помеченными от x_{k+2} до x_0 слева направо. Самые левые $k+1$ бит обновляются точно так же, как $k+1$ бит в F . Бит x_1 изменяется только тогда, когда самые левые $k+1$ бит все равны 1. Бит x_0 (выходной бит) всегда равен $x_1 \oplus x_2$. Положим x_1 изначально равен 0, самые левые $k+1$ бит G в начале идентичны $k+1$ битам F , и изначально $x_0 = x_1 \oplus x_2$. Тогда выход от G строго периодичен с периодом $2(2^{k+1} - 1)$. Первая половина периода равна периоду выхода от F , а вторая половина равна комплементу периода выхода от F .

В качестве начального значения для F берется вектор $0,1,1,\dots,1$, а для G - вектор $0,1,1,\dots,1,0,1$. Это дает желаемое поведение. Пусть B^1 и B^2 - результирующие выходные последовательности. Поскольку $p(n) < 2^{k+1}$, то T^i не может различить эти последовательности лишь по имеющимся $p(n)$ битам. Таким образом, по крайней мере одна из последовательностей, скажем, B^m имеет

$$\lambda_{F_i}(B^m) > n \geq 2^{k/d} > h(k+3).$$

Соответствующий регистр помещается в F и пусть k_i будет длиной этого регистра. Тогда

$$\lambda_{F_i}(B^m) > h(k+3) \geq h(k_i) = h(\lambda_{F_i}(B^m)),$$

как и хотелось. Этим завершается этап i .

Для того, чтобы сделать F семейством регистров (т.е. способным порождать каждую последовательность), в F добавляется каждый РСЛОС с лишь единственной точкой съема в его функции обратной связи. Ч.т.д

В частности, для последовательности регистров B , сконструированной в доказательстве, нет такого i , чтобы $\Lambda_{F_i,B}(m)$ было в $O(h(\Lambda_{F_i,B}(m)))$, и $h(n)$ можно взять суперполиномиальной функцией.

Следствие. *Существуют (в несчетно больших количествах) быстрые несинтетические семейства регистров.*

Однако, хотелось бы получить утверждение более сильное, чем данное в Теореме 1. Все, что известно - верхняя граница выполняется для бесконечно большого количества последовательностей из B . Хотелось бы, чтобы это выполнялось для всех последовательностей B достаточно большого периода. Т.е., чтобы $\Lambda_{F_i,B}(m) \in \Omega(h(\Lambda_{F_i,B}(m)))$. Для достижения этой цели можно модифицировать описанную выше конструкцию следующим образом.

Теорема 2. Пусть $h(n)$ - произвольная субэкспоненциальная функция. Существует последовательность двоичных периодических последовательностей $V = V^1, V^2, \dots$ такая, что

- а) V может быть сгенерирована таким быстрым семейством регистров F , что длина регистра, порождающего V^m , самое большее в два раза превышает \log от периода V^m ;
- б) Для каждого синтетического семейства F' , если t достаточно велико, то выполняется соотношение

$$\Lambda_{F',B}(m) \geq h(\log(\text{period}(V^m))).$$

В частности, если позволить h быть суперполиномиальной, то V удовлетворяет требованиям, сформулированным в конце раздела 9.7.2.

Для доказательства Теоремы 2 строится конструкция, аналогичная предыдущей из доказательства Теоремы 1. Эти конструкции можно сделать рекурсивными. То есть имеется эффективная процедура, которая при заданном i дает на выходе список регистров из F_i в первом случае, либо же B^i (или генератор B^i) во втором случае. Однако, такая процедура скорее всего окажется непрактично медленной.

Для усиления результата Теоремы 2 доказано, что функция h не может быть заменена экспоненциальной функцией, то есть экспоненциальные границы невозможны.

Теорема 3. Пусть $h(n) = 2^{n/d}$ - экспоненциальная функция, и пусть $V = V^1, V^2, \dots$ - любая последовательность периодических двоичных последовательностей. Существует быстрое синтетическое семейство последовательностей F такое, что для каждого i

$$\lambda_F(B^i) \leq h(\log(\text{period}(B^i))).$$

Подразумевается, что для алгоритма синтеза период последовательности известен.

На самом деле данная теорема справедлива и без знания периода, но полиномиальные границы для доступного количества бит придется возвести в квадрат.

9.7.4 Атаки линейного синтеза

В данном разделе обсуждается эффект полученных результатов на ограничение мощности алгоритмов синтеза.

Как было определено, алгоритмы синтеза зависят от полиномиальных границ. Алгоритм синтеза для семейства регистров F должен работать правильно, если количество доступных бит - по крайней мере фиксированный полином от F -размаха, а время работы должно быть ограничено полиномом от количества имеющихся бит. Однако, если степень полинома велика, то практическая применимость атаки (то есть ее

"мощь") оказывается под большим вопросом. Для контрастного сравнения можно отметить, что алгоритм Берлекампа-Мэсси и алгоритм 2-адической рациональной аппроксимации работают корректно, если доступно по меньшей мере линейное количество бит. Первый из этих алгоритмов имеет квадратичное время работы, второй - квази-квадратичное. Говорят, что алгоритм является *алгоритмом линейного синтеза* для семейства F , если он требует только линейного количества бит из $\lambda_r(B)$ для синтеза регистра из F , порождающего на выходе B . В этом случае говорят, что F *линейно синтетическое*. Формулировки теорем 1 и 2 можно улучшить, если ограничиться лишь линейным синтезом.

В заключение своей работы Клаппер отмечает, что описанные атаки - очень общего типа. Построенная теоретическая модель позволила доказать утверждения о существовании семейств генераторов последовательностей, противостоящим всем таким атакам. К сожалению, доказательство не дает практической конструкции таких генераторов. Своей работой автор надеется вдохновить исследователей на поиск этих генераторов в терминах более естественных описаний. Открытым остался и вопрос о том, можно ли отыскать подобные практичные конструкции в принципе. ♦

Глава 10

Альтернативные конструкции

10.0 Взгляды на теорию стойкости

Мечта любого криптографа - иметь действительно строгое доказательство стойкости построенной им криптосистемы, или другими словами, доказательство непредсказуемости эффективными средствами генерируемой шифрпоследовательности [82]. К сожалению, такое доказательство неизвестно для любого из эффективных и реально применимых на практике псевдослучайных генераторов. Более того, для подобного доказательства необходим прорыв в теории сложности. В то же время нельзя не отметить, что уже имеется математически глубоко обоснованный подход к решению проблемы гарантирования криптографической стойкости, позволивший построить привлекательную теорию и создать соответствующие криптосхемы... Но все эти схемы пока еще слишком непрактичны для использования в реальных условиях.

Значительный толчок исследовательским работам в области построения теории криптографической стойкости был дан исследованием Яо [394]. Э. Яо удалось соединить вместе две важнейшие концепции, которые рассматриваются как необходимые в генераторе шифрующей гаммы: идеи предсказуемости и случайного появления. Если формулировать в двух словах и довольно нестрого, Яо показал, что псевдослучайный генератор можно "эффективно" предсказывать тогда и только тогда, когда генератор можно "эффективно" отличить от совершенно случайного источника.

Опираясь на работу Яо, криптографы воспользовались техникой из области теории сложности вычислений для доказательства результатов, которые связали проблему предсказания следующего бита в псевдо-случайной последовательности со сложностью решения "трудной" задачи [40] [39] [357]. Результаты работ в этой области представлены в Разделе 10.1.

Выражение степени стойкости криптосистемы к методам тотального перебора в терминах длины ключа может привести к ошибочным выводам, если ключи не выбираются равномерно. В таком случае противник может искать решение среди ключей, появление которые более вероятно, и иметь повышенные шансы для нахождения верного ключа. Имеется специальная криптографическая техника, именуемая *универсальный статистический тест* [249] и оценивающая энтропию на выходной бит генератора. Таким образом, когда генератор используется для выработки ключей в криптографических приложениях, этот тест выражает криптографическую силу системы (см. Раздел 3.1.2.6). Данный тест был разработан Ули Маурером по заказу криптографической фирмы Omnisec AG с конкретным интересом в сфере применения

псевдослучайного генератора бит для выработки ключей, используемых в симметричных шифрсистемах.

Возвращаясь к вопросам сложности, следует отметить, что одна из самых ранних попыток оценить сложность последовательности была сделана Колмогоровым [201], который попытался определить сложность последовательности в терминах размера наименьшей *машины Тьюринга* которая могла бы быть использована для генерации этой последовательности. Машина Тьюринга - это простое, но мощное концептуальное вычислительное устройство, которое часто используется в теории вычислений. Хотя рассмотрение свойств машин Тьюринга для воспроизведения последовательностей приводит к теоретически интересной мере, именуемой *сложностью Тьюринга-Колмогорова*, она имеет небольшую практическую ценность, поскольку не существует способа для ее вычисления [322]. Изощренно озаглавленная статья: "О сложности псевдо-случайных последовательностей или Если вы можете описать последовательность - она не может быть случайной" [27] дает взаимосвязь между сложностью Тьюринга-Колмогорова и линейной сложностью. Дополнительную информацию о сложности Тьюринга-Колмогорова можно найти в работах [62] [63] [230].



Алан Тьюринг

Примерно 50 лет назад Клод Шеннон сказал, что когда имеешь дело с практической стойкостью шифров, "сложно сделать так, чтобы подходящие идеи об оценке полученных результатов достаточно строго укладывались в форму математических теорем" [360]. Эти слова вполне справедливы и сегодня, когда по-прежнему остается открытым вопрос, а возможно ли вообще вычисление истинной рабочей характеристики шифра $W(n)$ или ее асимптотического значения $W(\infty)$ (см. Главу 1).

Для решения этой задачи с середины 80-х годов предпринимаются шаги в области так называемых "*рандомизированных шифров*", которым посвящен Раздел 10.2 данной главы. Одна из первых конструкций такого рода - абсолютно непрактичный шифр, который предложили в 1985 году Дж. Мэсси и И. Ингемарссон [235]. Этот шифр - рандомизированный поточный шифр с секретным ключом из K бит. "Трюк" состоит в том, что законный получатель должен ждать (в это время он не выполняет никаких проверок или другой вычислительной работы) пока около 2^K бит не появятся перед тем, как начнется расшифрование. Конструкция позволяет легко гарантировать, что вражескому криптоаналитику понадобится тысячи лет для вскрытия шифра, если кто-то согласится ждать миллионы лет для того чтобы прочесть открытый текст Такой шифр, возможно, стал бы подходящим лишь для Рипа ван Винкля, ленивого лежебоки из известного произведения Вашингтона Ирвинга, в честь которого и названа данная криптосхема.

Концепция рандомизатора, позволившего вычислить $W(\infty)$ для непрактичного шифра "Рип ван Винкль", оказалась полезной при разработке других, более реалистичных конструкций "доказуемо стойкого шифра". В частности, на Eurocrypt '90 Маурер [247] представил новый шифр, использующий очень большой открытый рандомизатор R , то есть сконструировал доказуемо стойкий шифр, по крайней мере приближающийся к тому, чтобы быть практичным [241].

В последних двух разделах Главы 10 представлен противоположный конец широкого спектра криптосистем поточного шифрования, который условно и с долей иронии можно назвать "альтернативой без теории". В Разделе 10.3 дан краткий обзор ситуации с так называемыми "хаотическими шифрами", конструируемыми на основе уравнений нелинейных динамических систем. Вследствие ряда известных причин математики-криптографы пока не разрабатывают эту область, и сегодня здесь работают энтузиасты других профессий: физики, экономисты, журналисты и т.д.

Завершает главу Раздел 10.4, посвященный несостоявшейся революции в криптографии - появившейся в 1995 году шифрсистеме *POTP (Power One Time Pad)*. Изобретателю этого нового поточного шифра показалось, что он изобрел метод настоящего одноразового гаммирования, не требующий рассылки гаммы.

10.1 Подход с позиций теории сложности

Данный раздел представляет собой изложение соответствующего материала из обзорной работы Рюппеля [339].

В основе теоретико-сложностного подхода лежит идея о вычислительно достижимой информации. Если две случайных величины статистически независимы, то не существует способа вычислить информацию о второй величине, наблюдая первую. Но даже если существует полная статистическая зависимость (как для пар шифртекст/открытый текст в некоторых шифрсистемах с открытым ключом) она может не быть вычислительно достижима.

В теоретико-сложностной модели все вычисления параметризуются параметром стойкости, обычно это длина ключа, и проводится асимптотический анализ. Вычислительно достижимыми считаются только те алгоритмы, чье время работы можно выразить многочленом от размера входа. Подразумевается, что возможности противника ограничены атаками полиномиального времени. Криптоанализ - это процесс либо (1) предсказания отдельной цифры шифрующей гаммы, либо (2) отличия шифрующей последовательности от истинно случайной последовательности. Генератор гаммы по определению является *совершенным*, если он либо (1) непредсказуем, либо (2) неотличим при использовании всех статистических тестов полиномиального времени. Но такой совершенный генератор является гипотетическим устройством, и неизвестно, существует ли он вообще. Все предложенные генераторы основаны на подразумеваемой сложности некоторых "известных" проблем, типа вычисления дискретного логарифма [39], квадратичной вычетности [40], или инвертирования алгоритма шифрования Райвиста-Шамира-Адлемана (RSA) [5] [265]. Доказательство совершенства этих генераторов потребовало бы суперполиномиальные нижние границы для сложности соответствующих проблем. Поскольку это невозможно, исследователи прибегли к эвристическим аргументам, именуемым "*гипотезами неразрешимости*", чтобы доказать, что генератор "совершенен". Мы зарезервируем термин *совершенный* (без кавычек) для идеального устройства, о самом существовании которого неизвестно, и будем использовать термин "совершенный" (в кавычках) всякий раз, когда генератор "совершенен" в рамках некоторой гипотезы неразрешимости. Остается также и более широкий вопрос относительно того, насколько можно опираться на результаты асимптотического анализа, поскольку все реализации криптосистем с необходимостью имеют конечный размер.

10.1.1 Базовые идеи и концепции

Битовый генератор G - это последовательность $\{G_n: n \geq 1\}$ алгоритмов полиномиального времени G_n . Каждый $G_n: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^l$ разворачивает некоторый случайный ключ x^n длины n в псевдослучайную последовательность z^l длины $l(n)$, где l - полиномиальная функция от n . Пусть $z^l = G_n(x^n)$ обозначает шифрпоследовательность, выработанную алгоритмом G_n от входа x^n .

Пусть $\mu_{R,l}$ обозначает равномерное вероятностное распределение на множестве l -битных последовательностей, то есть $\mu_{R,l}(s^l) = 2^{-l}$. Соответственно, пусть $\mu_{G,l(n)}$ означает вероятностное распределение последовательностей гаммы z^l , генерируемых G_n при случайно выбираемых ключах (то есть при ключах, выбираемых в соответствии с $\mu_{R,n}$). Тогда вероятность отдельной псевдослучайной последовательности z^l

$$\mu_{G,l}(z^l) = 2^{-n} \cdot \#\{x^n: G_n(x^n) = z^l\}.$$

Пусть μ_G - последовательность вероятностных распределений $\{\mu_{G,l(n)}: n \geq 1\}$ генерируемых G ; говорят, что G индуцирует μ_G .

Практическое требование к стойкости генератора гаммы - это его непредсказуемость. При наличии фрагмента z^i из i бит должно быть невозможно развить эту последовательность за пределы i . В противном случае добытый фрагмент гаммы позволил бы успешно дешифровать некоторую часть шифртекста без знания ключа. Концепция непредсказуемости может быть формализована с помощью идеи "теста следующего бита" (или "предсказателя") [39] [394].

Предсказатель (тест следующего бита) $C = \{C_n: n \geq 1\}$ - это последовательность вероятностных полиномиального размера схем C_n с $i_n < l(n)$ входами и одним двоичным выходом. Грубо говоря, предсказатель C способен предсказать псевдослучайный генератор G , если доля тех случаев, когда выходной бит C_n согласуется с z_{i+1} , "существенно" отличается от $\frac{1}{2}$. Более строго, говорят, что C предсказывает псевдослучайный генератор G (или " G не проходит тест следующего бита C "), если существует многочлен $P(n)$ такой, что для бесконечно большого числа n вероятность предсказания

$$Pr(C_n(z^i) = z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{P(n)}$$

где z^i появляются согласно $\mu_{G,l(n)}$.

Напротив, говорят что G проходит C , если для всех, кроме конечного числа, n и для всех многочленов $P(n)$ выполняется неравенство

$$Pr(C_n(z^i) = z_{i+1}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{P(n)}.$$

Аналогично, говорят, что G непредсказуем, если для всех тестов следующего бита C , для всех, кроме конечного числа, n , для всех многочленов $P(n)$ и для всех $i < l(n)$

$$Pr(C_n(z^j) = z_{i+1}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{P(n)}.$$

Генератор гаммы пытается эффективно имитировать случайность. Если бы псевдослучайные последовательности, которые он генерирует, были эффективно отличимы от чисто случайных последовательностей, то нельзя было бы провозглашать что данный генератор - симулятор случайности. С другой стороны, выход генератора всегда может быть отличён от чисто случайных последовательностей простым перебором всех ключей и сравнением получающихся последовательностей с той последовательностью, что попала в руки аналитика. Но такой метод требует экспоненциального времени и считается реально недостижимым. Способность отличения псевдослучайной последовательности от случайной последовательности представляется наиболее фундаментальным шагом, предшествующим любому другому шагу при анализе псевдослучайных последовательностей. Концепция неотличимости может быть формализована с помощью идеи статистического теста [394].

Статистический тест $T = \{T_n: n \geq 1\}$ для битового генератора - это последовательность вероятностных полиномиального размера схем T_n с $l(n)$ входами и одним двоичным выходом. Грубо говоря, тест T способен отличить псевдослучайный генератор G , если доля тех случаев, когда он дает на выходе 1 при несовпадении с последовательностями r^j , берущимися равновероятно из $\mu_{R,l}$, "существенно" отличается от доли тех случаев, когда он дает на выходе 1 при несовпадении с последовательностями z^j , берущимися в соответствии с распределением выхода генератора $\mu_{G,l(n)}$. Более строго, говорят, что тест T отличает G , если существует многочлен $P(n)$ такой, что для бесконечно большого числа n

$$|p_n^{T,G} - p_n^{T,R}| \geq \frac{1}{P(n)},$$

где $p_n^{T,G}, p_n^{T,R}$ обозначают вероятности того, что T выдает 1 при подаче на вход последовательностей, берущихся согласно $\mu_{G,l(n)}$ и $\mu_{R,l}$.

Напротив, говорят что G проходит статистический тест T , если для всех многочленов $P(n)$ и для всех, кроме конечного числа, n выполняется неравенство

$$|p_n^{T,G} - p_n^{T,R}| < \frac{1}{P(n)}.$$

В своей этапной работе [394] Э. Яо удалось связать вместе идеи предсказателя и статистического теста, доказав их эквивалентность.

Теорема: *Битовый генератор G проходит все тесты следующего бита S тогда и только тогда, когда он проходит все статистические тесты T .*

Тогда можно дать определение: Битовый генератор G является *совершенным*, если он проходит все статистические тесты T полиномиального размера.

Основываясь на результате Яо, возможно (по крайней мере в принципе) вывести, что генератор является совершенным, доказав что нет предсказателя полиномиального

размера для результирующих псевдослучайных последовательностей. Но, к сожалению, ни для одного из предложенных генераторов не удалось доказать, что он совершенный. На самом деле, неизвестно существует ли такие совершенные генераторы вообще.

Оперевшись на результат Яо, Блюм и Микали [39] разработали общую схему для конструирования битовых генераторов. Пусть $f = \{f_n : X_n \rightarrow X_n\}$ - однонаправленная подстановка, используемая в качестве функции следующего состояния генератора. Пусть $B = \{B_n : X_n \rightarrow \{0,1\}\}$ - двоичный предикат с областью определения X_n , используемый в качестве выходной функции. Случайно выбираем элемент $x \in X_n$ в качестве зерна (начального значения), итерируем f_n от x , и берем на выходе $z_i = B_n(f_n^i(x))$ для $1 \leq i \leq l(n)$. Если B - непредсказуемый предикат для f , то шифрпоследовательность z' непредсказуема (тестами следующего бита) влево, и, согласно результату Яо, она неотличима любым статистическим тестом T (в частности, она также непредсказуема вправо). Конкретными приложениями этой схемы являются:

1. Генератор Блюма-Микали [39]

$$f_n : Z_p^* \ni x \mapsto y = \alpha^x \bmod p \in Z_p^*$$

$$B_n : Z_p^* \ni y \mapsto \text{half}_p(x) \in \{0,1\}.$$

2. Генератор квадратичных вычетов [40]

$$f_n : QR_N \ni x \mapsto y = x^2 \bmod N \in QR_N$$

$$B_n : QR_N \ni y \mapsto \text{lsb}(x) \in \{0,1\}.$$

3. Генератор RSA [5]

$$f_n : Z_N^* \ni x \mapsto y = x^e \bmod N \in Z_N^*$$

$$B_n : Z_N^* \ni y \mapsto \text{lsb}(x) \in \{0,1\}.$$

Все эти предложения основаны на подразумеваемой сложности некоторых "известных" проблем, таких как нахождение дискретных логарифмов, квадратичных вычетов и инвертирование RSA. Для того, чтобы доказать "совершенство" каждого из этих генераторов, необходимо ввести эвристическую гипотезу о сложности разрешимости каждой из упомянутых проблем. Далее эти генераторы обсуждаются подробнее.

10.1.2 Генераторы

10.1.2.1 Псевдослучайный генератор Шамира

Первое предложение использовать RSA в генераторе псевдослучайных чисел исходило от Ади Шамира [357]. Его интересовало, может ли для заданного шифртекста Y дополнительное знание произвольного количества расшифрований по $\bmod N$ при различных секретных экспонентах $d_i = 1/e_i \bmod \Phi(N)$ помочь в



Ади Шамир

дешифровании по mod N при особой секретной экспоненте $d = 1/e \bmod \Phi(N)$. Пусть e_1, e_2, \dots, e_l - фиксированная последовательность экспонент открытого ключа такая, что все e_i попарно взаимно-просты. Выберем RSA-модуль $N = pq$ размера n такой, что все e_i взаимно-просты с $\Phi(N)$ и выберем открытое зерно S из Z_N . Секретный ключ генератора состоит только из факторизации $\{p, q\}$ модуля N .

Генератор Шамира:

Вход: параметры: модуль N ,
 (открытое) зерно S , случайно берущееся из Z_N
 последовательность e_1, e_2, \dots, e_l
 ключ: факторизация p, q

Для $i = 1, 2, \dots, l$ расшифровать S при секретных экспонентах $d_i = 1/e_i \bmod \Phi(N)$

$$Z_i = S^{1/e_i} \bmod N$$

Выход: последовательность из $Z_i, i = 1, 2, \dots, l$

Обратим внимание, что этот генератор дает на выходе целые n -битные числа, а не просто биты. В [357] доказан следующий результат:

Теорема: Существует фиксированный многочлен $P(n)$ такой, что любая схема C_n (способная, если заданы в качестве входа модуль N размера n и зерно $S \in Z_N$, предсказать Z_1 по некоторому числу известных корней Z_2, \dots, Z_l для по крайней мере части $\delta(n)$ случаев) может быть трансформирована в другую схему A_n размера самое большее $|C_n| + P(n)$, которая инвертирует RSA по входу N, S для по крайней мере доли $\delta(n)$ случаев.

Доказательство этой теоремы демонстрирует следующую схему A_n и показывает, что она восстановит $X = Y^{1/e_1} \bmod N$ с помощью C_n .

Схема A_n : симулирует $D_N(Y) \bmod N$

Вход: Y, N

1. Определить $S = Y^{e_2 \dots e_l} \bmod N$ и $E = \prod e_i$; вычислить для $i = 2, \dots, l$

$$Z_i = S^{1/e_i} = Y^{\left(\frac{E}{e_i e_i}\right)} \bmod N$$

путем последовательных экспоненцирований.

2. Вызвать процедуру C_n с входом N, S, Z_2, \dots, Z_l и получить Z_1 .

3. Использовать расширенный НОД-алгоритм Евклида для вычисления

$$\text{НОД}\left(\frac{E}{e_1}, \dots, \frac{E}{e_l}\right) = a_1 \frac{E}{e_1} + \dots + a_l \frac{E}{e_l} = 1$$

4. Поскольку $Z_i = X^{E/e_i} \bmod N$ перемножить

$$Z_1^{a_1} Z_2^{a_2} \dots Z_l^{a_l} = (X^{E/e_1})^{a_1} (X^{E/e_2})^{a_2} \dots (X^{E/e_l})^{a_l} = X$$

Выход: $X = Y^{1/e_1} \bmod N$

Если C_n успешно срабатывает для доли случаев $\delta(n)$ размера n , то должна быть схема A_n , поскольку преобразование $S = Y^{E/e_1} \bmod N$ - это подстановка. Таким образом, предсказание генератора псевдослучайных чисел Шамира доказуемо эквивалентно обращению алгоритма RSA. Если RSA-функция почти повсюду стойкая, то и генератор случайных чисел должен быть стойким почти всюду. Но на самом деле, когда RSA используется для зашифрования открытых сообщений, распределение зашифрованных текстов не будет равновероятным, и соответственно степень успеха может быть весьма различной. В [39] было указано, что числа генератора Шамира в целом могли бы быть непредсказуемы, но они могут иметь особый вид. Например, отдельные биты могут быть сильно смещенными или предсказуемыми с высокой вероятностью. В качестве иллюстрации, пусть N имеет вид $2^n + k$, тогда для равновероятных Z_i самый старший бит будет 1 с вероятностью k/N и 0 с вероятностью $2^n/N$.

10.1.2.2 Генератор Блюма-Микали

Пусть p будет нечетным простым числом и пусть α будет порождающим элементом для Z_p^* - кольца единиц $\bmod p$. Дискретный логарифм некоторого элемента $y \in Z_p^*$, с учетом α обозначаемый $\text{index}_{p,\alpha}(y)$, определяется как уникальное целое число $0 \leq x \leq p - 2$ такое, что $y = \alpha^x \bmod p$. Проблема дискретного логарифма со входами p, α, y состоит в нахождении $\text{index}_{p,\alpha}(y)$. В общем случае неизвестно никакого эффективного алгоритма, способного решать проблему дискретного логарифма. Если $y \in QR_p$, то есть если y - квадратичный вычет по модулю p , тогда $\text{index}_{p,\alpha}(y) = 2t$ для некоторого целого $t < (p - 1)/2$. Тогда два квадратных корня из $y \in QR_p$ - это $\alpha^t \bmod p$, который называют главным квадратным корнем, и $\alpha^{t + (p-1)/2} \bmod p$, который называют неглавным квадратным корнем. Для любых p и α элемент $x \in Z_p^*$ является главным квадратным корнем тогда и только тогда, когда $\text{index}_{p,\alpha}(x) < (p - 1)/2$. Блум и Микали [39] показали, что из существования эффективного алгоритма для решения вопроса о том, является ли заданный элемент главным квадратным корнем относительно p и α , следует и существование эффективного алгоритма для вычисления дискретного логарифма. Определим двоичный предикат

$$\text{half}_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x < \frac{p-1}{2} \\ 0 & \text{если } x \geq \frac{p-1}{2} \end{cases} .$$

Генератор Блума-Микали [39]:

Вход: параметры: (p, α)

ключ: случайно выбираемое зерно $x_1 \in Z_p^*$

Для $i = 1, 2, \dots, l$ выполнить

a. $z_i = \text{half}_p(x_i)$

b. $x_{i+1} \leftarrow \alpha^{x_i} \bmod p$

Выход: последовательность из z_i

Стойкость такого "генератора показателей" основана на сложности вычисления дискретного логарифма по $\bmod p$. В [39] получен следующий результат.

Теорема: *Если имеется вероятностная полиномиального размера схема такая, что по входу p, α и $y = \alpha^x$ угадывает $\text{half}_p(x)$ для по крайней мере доли $1/P'(n)$ простых чисел p размера n с преимуществом $\geq 1/2 + 1/P(n)$, тогда, для любого многочлена $Q(n)$, имеется еще одна схема такая, что по входу p, α и y вычисляет $\text{index}_{p,\alpha}(y)$ для по крайней мере доли $1/P'(n)$ простых чисел p размера n с преимуществом $\geq 1 - 1/Q(n)$.*

Если имеется предсказатель, который имея на входе гамму z_1, \dots, z_l может угадать z_0 с вероятностью $\geq 1 - 1/\varepsilon(n)$, тогда возможно определить предикат $\text{half}_p(x)$ по p, α и $y = \alpha^x$ с той же самой вероятностью успеха. Используем y в качестве зерна для генератора показателей и вырабатываем последовательность z_1, \dots, z_l ; вызываем процедуру предсказателя для получения z_0 , который равен $\text{half}_p(x)$ с вероятностью $\geq 1 - 1/\varepsilon(n)$. Согласно приведенной теореме, из существования такого предсказателя с преимуществом $\geq 1/2 + 1/P(n)$ следует, что проблема дискретного логарифма может быть решена вероятностной схемой полиномиального времени. Для того, чтобы доказать "совершенство" своего генератора показателей, Блум и Микали ввели следующую гипотезу о трудности задачи [39] [203]:

Предположение о дискретном логарифме: Для любых многочленов P и P' , для любой полиномиального размера схемы C , и всех (кроме конечного числа) $n \geq 1$, доля простых чисел p размера n , для которых C способна решить проблему дискретного логарифма с вероятностью $\geq 1 - 1/P(n)$, ограничена сверху величиной $1/P'(n)$.

Данная гипотеза истинна тогда и только тогда, когда генератор показателей непредсказуем (влево). Как последний шаг, применяем теорему Яо [394] для заключения, что генератор показателей неотличим вероятностными полиномиального времени статистическими тестами, и, таким образом, "совершенен".

Данный генератор показателей - это единственная конкретная реализация общей схемы, также предложенной в [39]. Впоследствии было показано [183] [222], что функция дискретного экспоненцирования имеет $\log \log p$ одновременно стойких бит. Этот результат повлек за собой появление модифицированного генератора показателей, выдающего $\log \log p$ бит при каждой итерации дискретного экспоненцирования.

10.1.2.3 Генераторы RSA

Базовый RSA-генератор [5] - это еще одна реализация общей схемы, предложенной в [39], где $f(x) = x^e \bmod N$ выступает в качестве однонаправленной подстановки, а $B(x) = \text{lsb}(x)$ (то есть взятие самого младшего бита x) - в качестве непредсказуемого предиката для f . Пусть e будет целым числом ≥ 3 . Пусть N - целое размера $|n|$, являющееся произведением двух простых чисел p и q таких, что $\text{НОД}(e, \Phi(N)) = 1$. Генератор RSA получает на своем входе тройку чисел (N, e, x) .

Генератор RSA:

Вход: параметры: (N, e) .

ключ: случайно выбираемое зерно $x \in Z_N^*$

1. $x_0 \leftarrow x$
2. Для $i = 1, 2, \dots, l$ выполнить
 - a. вычислить $x_i \leftarrow x_{i-1}^e \bmod N$
 - b. выделить $z_i \leftarrow \text{lsb}(x_i)$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots, l$

Стойкость этого генератора основана на сложности инвертирования RSA. В [5] доказана следующая теорема.

Теорема: *Всякий вероятностный алгоритм, который, имея на входе $y = x^e \bmod N$, e и N , способен угадать самый младший бит числа x за ожидаемое время $T_B(n)$ с вероятностью, по крайней мере равной $\frac{1}{2} + \varepsilon(n)$, может быть преобразован в алгоритм, который инвертирует RSA-шифртекст за ожидаемое время $T(n)$ за $O(\varepsilon^{-8}(n) n^3 T_B(n))$.*

Если $T_B(n)$ - полиномиальная функция от n , то такова же и $T(n)$, и RSA-шифртекст может быть инвертирован за полиномиальное время. Способность предсказания z_0 по последовательности гаммы z_1, \dots, z_l влечет за собой способность нахождения $\text{lsb}_N(x)$ по $y = x^e \bmod N$. Чтобы увидеть это, сгенерируем на первом шаге z_1, \dots, z_l используя RSA-генератор с y как x_1 . На втором шаге вызовем предсказатель с z_1, \dots, z_l на входе и получим на выходе бит b , который равен z_0 с вероятностью $\frac{1}{2} + \varepsilon(n)$. Поскольку z_0 равен $\text{lsb}_N(x_0)$, то вероятность того, что b равен $\text{lsb}_N(x)$ также равна $\frac{1}{2} + \varepsilon(n)$. Существование предсказателя с преимуществом $\varepsilon(n) = 1/P(N)$ влекло бы за собой алгоритм полиномиального времени, инвертирующий RSA. В условиях предполагаемой трудности разрешения задачи инвертирования RSA не может быть вероятностного алгоритма с полиномиальным временем, который угадывал бы самый младший бит открытого текста x с преимуществом $1/P(N)$. Отсюда следует, что не может быть статистического теста T с полиномиальным временем, который мог бы выделять RSA-генератор. Таким образом получаем, что генератор RSA является "совершенным".

Всякий вероятностный алгоритм, который, имея на входе $x^e \bmod N$, e и N , способен угадать самый младший бит числа x с вероятностью по крайней мере $\frac{1}{2} + \varepsilon(n)$ эквивалентен статистическому тесту T , который способен различать следующие распределения:

1. Равновероятное распределение на $[1, N]$;
2. Распределение $x^e \bmod N$ для случайного, четного $x \in [1, N]$,

с преимуществом $\varepsilon(n)$. Вместо предположения, что не существует алгоритма полиномиального времени, способного инвертировать RSA, можно сразу начать с той гипотезы, что два приведенных выше распределения, при случайно выбираемом RSA-модуле размера n , неразличимы статистическими тестами полиномиального времени. Общий результат относительно конструкции псевдослучайных функций, представленный в [134], позволяет заключить, что итерационное применение $x^e \bmod N$ в генераторе RSA приводит к шифрпоследовательности z^j , которая также неотличима от равновероятной статистическими тестами полиномиального времени, и следовательно RSA-генератор является "совершенным". В [5] было показано, что эти же аргументы можно распространить на $\log n$ самых младших бит числа x . Эти биты неотличимы от равновероятных, если RSA полагать стойким. Таким образом, без потери "совершенства" можно выделять $\log n$ бит при каждом модульном экспоненцировании RSA-генератора.

Генерация всего лишь одного бита (или $\log n$ бит) гаммы на одно модульное экспоненцирование - это слишком медленно для большинства приложений. Чтобы преодолеть этот недостаток, Микали и Шнорр ввели следующую, намного более сильную гипотезу.

RSA-гипотеза [265]: Пусть $e \geq 3$ - нечетное целое число. Для случайных модулей N размера n (которые являются произведениями двух простых чисел, размер каждого из которых $n/2$), таких что $\text{НОД}(e, \Phi(N)) = 1$, и всех M , пропорциональных $N^{2/e}$, следующие распределения на $[1, M]$ неотличимы статистическими тестами полиномиального времени:

1. Равновероятное распределение на $[1, M]$;
2. Распределение $x^e \bmod N$ для случайного $x \in [1, M]$.

Как и раньше, общий результат относительно конструкции псевдослучайных функций представленный в [134], теперь позволяет заключить, что итерационное применение $x^e \bmod N$ в генераторе RSA приводит к шифрпоследовательности z^j , которая также неотличима от равновероятной статистическими тестами полиномиального времени, и следовательно модифицированный RSA-генератор является "совершенным". Но теперь при каждом экспоненцировании может браться доля $(e - 2)/e$ бит, и только доля $2/e$ нужна для следующей итерации. Такое повышение эффективности является простым следствием изменения гипотезы.

10.1.2.4 Генератор квадратичных вычетов

Пусть N будет произведением двух различных нечетных простых чисел p и q . Элемент $y \in Z_N^*$ называется квадратичным вычетом по модулю N , если $y = x^2 \bmod N$ для

некоторого $x \in Z_N^*$. Обозначим множество квадратичных вычетов по модулю N как QR_N . Каждый элемент $y \in QR_N$ имеет ровно четыре квадратных корня. Если $p = q = 3 \pmod N$, то в точности один из этих четырех квадратных корней принадлежит QR_N . Как следствие, отображение

$$QR_N \ni x \mapsto x^2 \pmod N \in QR_N$$

является отображением "на" и "один в один"; и имеет соответствующее обратное отображение

$$QR_N \ni y \mapsto \sqrt{y} \pmod N \in QR_N.$$

М. Рабин показал, что факторизация N и вычисление квадратных корней являются эквивалентными проблемами в том смысле, что эффективный алгоритм для разрешения одной из этих проблем имеет своим следствием эффективный алгоритм для решения другой проблемы.

Генератор квадратичных вычетов [40]:

Вход: параметры: модуль N размера n
 ключ: случайно выбираемое $x_1 \in QR_N$.

Для $i = 1, 2, \dots, l$ выполнить

1. $z_i = \text{lsb}(x_i)$
2. $x_{i+1} = x_i^2 \pmod N$

Выход: последовательность из z_i , $i = 1, 2, \dots, l$

Если $p = q = 3 \pmod 4$, то в точности половина элементов Z_N^* имеет символ Якоби $+1$, а другая половина имеет символ Якоби -1 . Обозначим соответствующие множества как $Z_N^*(+1)$ и $Z_N^*(-1)$. Ни один из элементов в $Z_N^*(-1)$ и ровно половина элементов в $Z_N^*(+1)$ являются квадратичными вычетами по модулю N . Проблема квадратичной вычетности при входе N и $x \in Z_N^*(+1)$ заключается в решении вопроса о том, является ли x квадратичным вычетом по модулю N . Нахождение эффективной процедуры, решающей проблему квадратичной вычетности, - это открытый вопрос в математике. Стойкость генератора квадратичных вычетов основана на сложности решения проблемы квадратичной вычетности. В [40] показано, что разрешение квадратичной вычетности может быть эффективно сокращено до определения самого младшего бита в $x = \sqrt{y} \pmod N$ по входу N и $y \in Z_N^*(+1)$. При комбинировании этого результата с результатом Голдвассера и Микали [133] получается следующая теорема [40].

Теорема: *Если имеется вероятностная полиномиальная размера схема такая, что по входу N и $y \in QR_N$ определяет самый младший бит в $x = \sqrt{y} \pmod N$ для по крайней мере доли $1/P(n)$ модулей N размера n с преимуществом $\geq 1/2 + 1/P(n)$, тогда, для любого многочлена $Q(n)$, имеется еще одна схема такая, что по*

входу N и $x \in Z_N^* (+1)$ определяет квадратичную вычетность для по крайней мере доли $1/P'(n)$ модулей N размера n с преимуществом $\geq 1 - 1/Q(n)$.

Если имеется предсказатель, который имея на входе гамму z_1, \dots, z_l может угадать z_0 с вероятностью $\geq \frac{1}{2} + \varepsilon(n)$, тогда возможно определить самый младший бит в $x = \sqrt{y} \bmod N$ с той же самой вероятностью успеха. Используем y в качестве зерна для генерации последовательности z_1, \dots, z_l ; вызываем процедуру предсказателя для получения z_0 , который равен $\text{lsb}(x)$ с вероятностью $\geq \frac{1}{2} + \varepsilon(n)$. Согласно приведенной теореме, из существования такого предсказателя с преимуществом $\geq 1/2 + 1/P(n)$ следует, что проблема квадратичной вычетности могла бы быть решена вероятностной схемой полиномиального времени. Для того, чтобы доказать "совершенство" генератора квадратичных вычетов, Блюм, Блюм и Шуб ввели следующую гипотезу о трудности задачи [40] [203].

Предположение о квадратичной вычетности: Для любых многочленов P и P' , для любой схемы C , и всех (кроме конечного числа) $n \geq 1$, доля модулей N размера n , для которых C способна определить квадратичную вычетность с вероятностью $\geq 1 - 1/P(n)$, ограничена сверху величиной $1/P'(n)$.

Данная гипотеза истинна тогда и только тогда, когда генератор квадратичных вычетов непредсказуем (влево). Как последний шаг, применяем теорему Яо [394] для заключения, что генератор квадратичных вычетов неотличим вероятностными полиномиального времени статистическими тестами, и, таким образом, "совершенен".

10.2 Рандомизированные шифры

Вообще говоря, обычно бывает сложно доказать нижние границы для вычислительных затрат, необходимых при решении всех (или почти всех) случаев некоторой конкретной проблемы. Как было показано в Разделе 10.1, посвященном теоретико-сложностному подходу, криптографам обычно приходится прибегать к эвристическим аргументам о вычислительной сложности некоторой проблемы (именуемым гипотезы трудности). Возможен и другой подход - сфокусироваться на размере криптоаналитической проблемы, а не на трудозатратах. Цель такого подхода - увеличить количество бит, которое необходимо проверять криптоаналитику противника, сохраняя при этом небольшой размер секретного ключа. Этого можно достичь, используя очень большую и общедоступную случайную последовательность (*рандомизатор*) для процессов зашифрования и расшифрования. Ключ здесь задает, какие части большого рандомизатора следует использовать, в то время как противнику, не знающему секретного ключа, придется искать во всем случайном массиве данных.

Уровень стойкости рандомизированных поточных шифрсистем может быть выражен средним количеством бит, которое криптоаналитик должен проверить до того, как его шансы определить ключ или открытый текст превысят чисто случайное угадывание. Задача разработчика - получить доказуемую нижнюю границу для ожидаемого количества

битовых тестов, которые криптоаналитик должен выполнить для того, чтобы получить не пренебрежимо малую вероятность успеха. Возможны различные интерпретации такого результата. Ожидаемое количество битовых тестов - это нижняя граница для количества шагов, которые должен выполнить любой алгоритм вскрытия шифрсистемы, что приводит нас к известной идее вычислительной стойкости. Но ожидаемое количество битовых тестов - это также и нижняя граница для количества бит, которое противник должен просмотреть до того, как его апостериорные вероятности различных ключей или сообщений улучшатся, а это приводит к идее теоретико-информационной стойкости. Таким образом, данное направление криптографических исследований можно интерпретировать с достаточно разных позиций, поэтому рандомизированные поточные шифры целесообразно рассматривать в самостоятельном разделе.

10.2.1 Шифр Диффи

Данная концепция вероятностного шифра была предложена Уитфилдом Диффи [102] в неопубликованной работе (см. также [239]):

Рандомизированный поточный шифр Диффи:

Вход: сообщение $x = x_1, x_2, \dots$

ключ k : случайная n -битная последовательность

1. Набрать 2^n случайных последовательностей r_1, r_2, \dots, r_{2^n} .
2. Использовать k -ую случайную последовательность r_k в качестве одноразовой гаммы для зашифрования x .

Выход: послать $y = x \oplus r_k$ и r_1, r_2, \dots, r_{2^n} по $2^n + 1$ телефонным линиям.

В данном рандомизированном поточном шифре открытый текст шифруется с помощью одноразовой гаммы. Соответствующая одноразовая гамма для расшифрования отправляется открыто по телефонной линии, но замаскированная огромным количеством не относящихся к делу случайных последовательностей, также передающихся в открытую. У криптоаналитика противника нет другого выбора, кроме как исследовать эти случайные последовательности по одной за раз до тех пор, пока не будет обнаружена истинная гамма шифрования. Таким образом, любая атака должна исследовать ожидаемое количество бит, которое равно $O(2^n)$.

Впоследствии Райнер Рюппель заметил [339], что сравнимый уровень стойкости достижим и в том случае, если вместо 2^n случайных последовательностей посылать только n , а ключ использовать для задания некоторой линейной комбинации из этих случайных последовательностей.

10.2.2 Шифр "Рип ван Винкль"

Мэсси и Ингемарссон [235] предложили другой рандомизированный поточный шифр, который они назвали "шифр Рип ван Винкль" (причина такого названия поясняется в Разделе 10.0).

Шифр "Рип ван Винкль":

Вход: последовательность открытого текста $\tilde{x} = x_1, x_2, \dots$
 ключ: случайное n -битное число $0 \leq k < 2^n$.

1. Набрать случайную k -битную преамбулу r_1, r_2, \dots, r_k
2. Набрать случайную шифрующую гамму $\tilde{z} = z_1, z_2, \dots$
3. Для $i = 1, 2, \dots$ выполнить
 - а. Зашифровать открытый текст случайной гаммой в последовательность шифртекста $\tilde{y}^{(1)}$:

$$\tilde{y}^{(1)} = x_i \oplus z_i$$

- б. Сформировать вторую последовательность $\tilde{y}^{(2)}$ путем конкатенации случайной преамбулы с последовательностью гаммы:

$$y_i^{(2)} = \begin{cases} r_i & 1 \leq i \leq k \\ z_{k-i} & k < i \end{cases}$$

4. Посылать попеременно биты $\tilde{y}^{(1)}$ и $\tilde{y}^{(2)}$.

Выход: последовательность пар бит $(y_i^{(1)}, y_i^{(2)})$, $i = 1, 2, \dots$

Последовательность $y_i^{(1)}$ содержит зашифрованное сообщение, а $y_i^{(2)}$ содержит шифрующую гамму, только замаскированную случайной преамбулой r_1, r_2, \dots, r_k неизвестной длины k . Для того, чтобы расшифровать сообщение, получатель просто должен подождать k единиц времени до тех пор, пока не пройдет случайная преамбула.

Для шифра "Рип ван Винкль" может быть доказана теорема [235] о нижней границе ожидаемого количества битовых тестов любой атаки:

Теорема: *Любой алгоритм, предназначенный для определения ключа k в атаке с известным открытым текстом (при вероятности успеха по крайней мере $\delta \geq 2^{-n}$) удовлетворяет неравенству*

$$E(B) \geq 2^{n/2} \sqrt{1 - 2^{-n} \lfloor \delta^{-1} \rfloor} (1 + 2^{-n} (\lfloor \delta^{-1} \rfloor - 1)),$$

где B обозначает количество битовых тестов.

Таким образом, рандомизируя шифртекст возможно гарантировать, что любому противнику придется затратить усилия, экспоненциально зависящие от размера ключа: около $2^{n/2}$ битовых тестов необходимо до того момента, как противник сможет улучшить вероятностное распределение возможных значений ключа. К сожалению, существует обратная зависимость и для получателя: ему также придется ждать до тех пор, пока экспоненциальное количество бит (в среднем около 2^n бит) шифртекста должны появиться до того, как он сможет начать расшифрование. Как сказал Джеймс Мэсси: "Можно легко гарантировать, что вражескому криптоаналитику потребуются тысячи лет на вскрытие шифра, если только при этом кто-то согласится ждать миллион лет для того, чтобы прочесть открытый текст". Так что шифр Рип ван Винкль совершенно непрактичен.

10.2.3 Шифр Маурера

Взяв на вооружение идеи, содержащиеся в шифре "Рип ван Викль", Ули Маурер [247] разработал рандомизированный поточный шифр, для которого можно доказать, что противник не получит об открытом тексте никакой информации (в шенноновском смысле) с вероятностью близкой к 1 до тех пор, пока не получит доступа к недостижимому количеству бит (не выполнит недостижимого количества вычислений). Эта концепция демонстрирует теоретико-информационный подход к идее стойкости в условиях вычислительных ограничений на противника (в то время как в типичной ситуации теоретико-информационная стойкость подразумевает бесконечную вычислительную мощь).

Рандомизированный поточный шифр Маурера:

Вход: открытый текст $x^N = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{F}_2^N$
 открытый рандомизатор $R[s,t]$, $1 \leq s \leq S$, $0 \leq t \leq T - 1$
 ключ $k^S = (k_1, \dots, k_S) \in \mathbb{Z}_T^S$

1. Вычислить гамму

$$z_i = \sum_{s=1}^S R[s, (k_s + i - 1) \bmod T] \bmod 2 \quad 1 \leq i \leq N$$

2. Зашифровать

$$y^N = x^N \oplus z^N$$

Выход: шифртекст y^N .

Противник, атакующий данную систему, может иметь информацию о статистике открытого текста, а также некоторую другую априорную информацию об открытом тексте. Эта ситуация моделируется введением дополнительной случайной величины V , совместно распределенной с открытым текстом в соответствии с $P(X^N, V)$, где собирается вся априорная информация об открытом тексте. Противнику позволено использовать произвольную (возможно вероятностную) последовательную стратегию для выбора адресов $A_i = (B_i, C_i)$ бит рандомизатора для проверки. Пусть $O_i = R[B_i, C_i]$ - наблюдаемое значение бита рандомизатора по адресу A_i на i -ом шаге. Общая информация, доступная

противнику перед выполнением i -ого шага атаки, - это криптограмма Y^N , значения O^{i-1} всех проверенных до этого бит рандомизатора вместе с соответствующими адресами A^{i-1} , а также априорная информация V . Таким образом, стратегия противника полностью определяется последовательностью условных вероятностных распределений $P(A_i | Y^N V A^{i-1} O^{i-1})$, $i \geq 1$. Для описанной модели Маурером доказана в [247] теорема:

Теорема: *Существует событие E такое, что для всех совместных вероятностных распределений $P(X^N, V)$ и для всех стратегий проверки бит O^M по адресам A^M в рандомизаторе R*

$$I(X^N; Y^N A^M O^M | V, E) = 0 \text{ и } P(E) \geq 1 - N\delta^S$$

где $\delta = M/ST$ - доля проверенных бит рандомизатора.

Данная теорема утверждает, что если событие E произошло, то общее наблюдение противника (Y^N, A^M, O^M) не дает никакой дополнительной информации об открытом тексте X^N помимо того, что он уже знал перед тем, как начал атаку. Шанс того, что противник сможет узнать что-то новое об открытом тексте, задается вероятностью того, что событие E не произойдет. Эта вероятность ограничена сверху значением $P(E) < N\delta^S$. Следовательно, для того чтобы появился ощутимый шанс получить новую информацию об открытом тексте, противнику придется проверить значительную долю бит рандомизатора.

По мнению Джеймса Мэсси [241], наиболее интересным аспектом работы Маурера стало введение нового теоретико-информационного подхода к криптографии, позволяющего преодолеть "бутылочное горлышко" неравенства Шеннона для совершенного засекречивания ("неопределенность секретного ключа должна быть по крайней мере не меньше неопределенности открытого текста, подлежащего шифрованию"). Выводом из работы Маурера является тот (очевидный) факт, что ограничение Шеннона управляет нужной длиной ключа лишь тогда, когда требуется, чтобы шифр обеспечивал совершенное засекречивание с вероятностью 1.

10.3 Хаотические шифры

Одной из наиболее интригующих новых областей в математике стало исследование нелинейных динамических систем или "хаоса". Среди наиболее известных работ, посвященных данной теме, можно отметить научно-популярную книгу Глейка "Хаос: создание новой науки" [132] и ориентированные на компьютерные исследования книги Ритмана [317] и Бекера и Дорфлера [21]; серьезное научное введение дает книга Николиса и Пригожина [279]; математическим аспектам теории хаоса посвящена книга Расбанда [312]; формированию паттернов и хаоса в сетях - работа Пиковера [300].

Уже достаточно широко известно, что уравнения хаотических систем успешно применяются в генерации сложных и интересных графических образов (методы фрактальной геометрии). Но особо волнующим открытием в области хаоса стало то, что

невероятно сложные системы задаются очень простыми, иногда даже тривиальными уравнениями, как например следующее:

$$x_{n+1} = A x_n(1 - x_n), \quad \text{где } 0 < x_n < 1.$$

На первый взгляд, столь элементарное итерационное соотношение не может содержать в себе никакой глубины. Однако, на самом деле последовательное итерирование данного соотношения при определенных значениях параметра A порождает сложную последовательность с непредсказуемым, хаотическим поведением.

Естественно, такого рода свойства стимулировали попытки интегрировать хаотические системы в конструкции криптогенераторов. Так, Роберт Мэтьюз [225] модифицировал упомянутое уравнение с позиций повышения криптостойкости, получив следующее соотношение:

$$g(x) = ((B + 1)(1 + \frac{1}{B})^B)(x(1 - x)^B), \quad \text{где } 1 \leq B \leq 4, \quad 0 < x < 1.$$

В качестве случайного элемента шифрующей последовательности берется только фрагмент каждого результата итераций: Мэтьюз использовал две последние десятичные цифры.

Одна из самых серьезных проблем в криптографическом приложении хаотических систем заключается в следующем. Нелинейные динамические уравнения по своей природе оперируют непрерывными действительными значениями, однако, при реализации на компьютере такие уравнения оказываются лишь еще одной дискретной системой с конечным пространством состояний. Очевидно, что такие системы должны иметь некий цикл максимальной длины, а также могут иметь множество независимых коротких циклов. В настоящее время не известно каких-либо теоретических работ относительно длин последовательностей, задаваемых уравнениями хаоса.

Для исследования цикловой структуры "хаотического" шифра Мэтьюза, Дэниэл Уилер провел серию суперкомпьютерных вычислительных экспериментов [386] [387]. Результаты оказались малоутешительными: структура распадается на большое количество циклов малого периода. Для улучшения схемы Дуглас Митчелл предложил использовать в конструкции однонаправленные функции, что по его мнению должно обеспечивать более длинные циклы [273].

Существует и еще несколько серьезных проблем. Уравнения хаоса как правило требуют вычислений с плавающей точкой, а отсюда следует, что генерируемые последовательности скорее всего будут различаться в случае применения процессоров разного типа. Кроме того, время вычисления итераций представляется весьма значительным, во всяком случае, существенно уступающим соответствующим показателям применяемых сегодня криптогенераторов [318]. Таким образом, можно сделать вывод, что о реальном применении "хаотических" поточных шифров говорить пока еще рано.

10.4 Система гаммирования ROTP

Шифрсистема с достаточно претенциозным названием *Power One Time Pad*, что можно перевести как "Мощное одноразовое гаммирование", появилась на рынке защиты компьютерных коммуникаций осенью 1995 года.

Автор запатентованной криптосистемы - израильтянин Эли Яновски [393], владелец патента - израильская фирма ELEMENTRIX TECHNOLOGIES LTD., специально созданная для продвижения новой криптотехнологии. Весь проект изначально строился с расчетом на большой коммерческий успех, сопровождался достаточно заметной рекламной шумихой, но детали криптосхемы не раскрывались, патент держался закрытым.

Поскольку шифрсистема ROTP реализует поточное шифрование в сочетании с некоторой новой концепцией, то из соображений полноты картины целесообразно дать здесь ее общее описание, хотя и без важных, возможно, подробностей о конструкции. Описание дается по материалам Internet: Web-странице фирмы Elementrix (<http://www.elementrix.co.il>) и электронной почте в криптографическую телеконференцию Sci.crypt [252].

Как говорится в кратком описании к патенту, ROTP - это "аппарат и метод для передачи зашифрованных сообщений между двумя устройствами путем начальной инициализации этих устройств относительно друг друга; впоследствии передаваемые сообщения шифруются с помощью динамических случайных ключей, которые синхронно изменяются в двух связывающихся устройствах, что позволяет, таким образом, отказаться от необходимости рассылки ключей" [393].

Приглашенные для закрытой экспертизы специалисты (среди которых почему-то не оказалось ни одного криптографа) дали самые восторженные отзывы о новой криптотехнологии [308]. "В Elementrix нашли логический способ для генерации неалгоритмических, динамически изменяющихся двух одинаковых ключей в двух различных местах без каких-либо передач их в линию и без использования параллельных каналов," - сказал историк криптографии Дэвид Кан. "Elementrix имеет полное право называть свою технологию МОЩНОЕ ОДНОРАЗОВОЕ ГАММИРОВАНИЕ. Я не вижу никаких путей для восстановления ключа шифрования," - заявил он на пресс-конференции, посвященной презентации нового продукта. Другой авторитетный "эксперт с мировым именем", журналист и автор нескольких фантастических и публицистических книг по информационной войне Уинн Швартау сделал еще более глобальный вывод: "ROTP представляет собой новую ступень в развитии криптографии. Эта фундаментальная технология совершенно отличается от любых, уже существующих криптосхем. Я впервые увидел систему, которая может обеспечить полную безопасность в Internet для неспециалистов".

По иронии судьбы, последние слова о "безопасности для неспециалистов" оказались пророческими. Несмотря на призывы заинтересованных пользователей, подробности криптосхемы так и не были открыто опубликованы для тщательного изучения профессионалами. Та схема, которую удалось восстановить въедливым хэкерам-криптографам на основе скупой информации фирмы Elementrix, выглядит следующим образом [252].

ROTP - поточный шифр с гаммой, зависящей от ранее сгенерированного шифртекста и от основного ключа большого размера, который также вычисляется на основе бит

шифртекста. Устанавливаемый при самой первой взаимной синхронизации устройств, исходный основной ключ K_0 (начальное значение псевдослучайного генератора) имеет длину 1024 бита, каждый участок шифрующей гаммы S_i и соответствующий "блок" шифртекста C_i имеют длину по 832 бита. В i -ом такте происходят следующие вычисления:

$$\begin{aligned}K_i &= f(K_{i-1}, C_{i-1}) \\S_i &= H(K_{i-1}) \\C_i &= P_i \text{ XOR } S_i,\end{aligned}$$

где K_i - внутреннее состояние генератора в такте i , S_i - i -й участок гаммы, C_i и P_i - блоки шифрованного и открытого текста (длиной по 832 бита), соответственно. Функции f и H точно не известны, сказано лишь, что H - это хэш-функция, преобразующая 1024 бита в 832 бита, а f - хэш-функция, преобразующая 1856 бит в 1024 бита.

Еще одно свойство криптосистемы - автоматическая ресинхронизация. Наряду с "обычным состоянием" генератора, имеется также "запасное состояние". Это состояние имеет все те же самые характеристики, что и обычное: инициализируется при самом первом создании канала и динамически изменяется на основе текущего запасного состояния и случайных бит из шифртекста. Единственное различие - частота обновления состояний. Обычное состояние изменяется для каждого нового блока текста (много раз за сеанс), а запасное состояние изменяется после каждых 24 успешных сеансов. Запасное состояние используется в том случае, когда происходит сбой в канале и требуется восстановление синхронизации...

Этих данных уже хватило, чтобы построить несколько моделей криптоаналитических атак со стороны активного злоумышленника, способного создавать помехи в канале и вызывать принудительные ресинхронизации устройств. В частности, достаточно тривиальным способом, подсчитывая число успешных сеансов, можно вынудить генератор повторно возвращаться в одно и то же состояние для выдачи различных шифртекстов, зашифрованных одной и той же гаммой.

В течение какого-то времени компания Elementrix пыталась делать вид, что не замечает критических публикаций, обещая пользователям "в ближайшие месяцы" представить подробный отчет об исследовании схемы РОТР экспертами-криптографами. Наконец, в октябре 1997 года этот отчет появился на WWW-сайте Elementrix, правда в закрытой его части, доступной только по идентификатору и паролю. На открытой же части Web-страницы не осталось ни одного упоминания о шифрсистеме РОТР... Компания Elementrix Technologies Ltd торгует сегодня совсем другой продукцией. ♦

Глава последняя

Заключение

В современном обществе постоянно возрастает интерес к криптографии. Причина этого интереса очевидна. От электронной почты до сотовой телефонии, от защищенной работы в World Wide Web до электронных денег - криптография стала неотъемлемой частью сегодняшних информационных систем. С повсеместным распространением персональных компьютеров и рабочих станций каждому стали доступны вычислительные мощности, вполне достаточные для реализации эффективной криптографии. Но, когда речь идет о надежной защите информации, мощный процессор - это еще далеко не все.

I. Современная ситуация в открытой криптографии

До сегодняшнего дня общепризнанным остается утверждение, что разработка решений, которые одновременно были бы быстрыми и криптографически стойкими - это весьма сложная проблема. Хотя в настоящее время и разработаны мощные методы криптографического анализа, такие как корреляционный анализ поточных шифров, линейный и дифференциальный анализ блочных, все же признается, что криптография все еще очень далека от общей теории того, как делать шифры [306].

Нынешняя ситуация с поточными шифрами в открытой криптографии характеризуется как "весьма специфическая", поскольку за обозримый период было предложено достаточно много схем, но практически все они не являются стандартизованными алгоритмами. Наиболее заметным исключением является SEAL, представленный IBM. Эта ситуация объясняется тем фактом, что поточные шифры реализуются главным образом аппаратно и, как правило, на основе собственных криптоалгоритмов фирм, производящих шифраппаратуру и упорно не желающих раскрывать свои секреты. (Для иллюстрации этой в общем-то нездоровой ситуации можно упомянуть достаточно скандализированные истории с "принудительным рассекречиванием" алгоритмов A5 и ORYX.)

Сложившееся в настоящее время положение можно охарактеризовать следующим образом: для блочных шифров имеется сравнительно немного теории, но много алгоритмов, в то время как для поточных шифров разработана большая теория, но известно очень мало полностью описанных и реально применяемых алгоритмов. (Здесь же следует отметить, что открытие в 1990-х годах методов дифференциального и линейного криптоанализа дало мощный импульс в развитии теории блочного шифрования, но это уже совсем другая тема).

На сегодня общепризнано, что в обществе испытывается насущная потребность в существовании хороших алгоритмов поточного шифрования. Более конкретно, требуются конкретные примеры конструкций поточных шифров, которые были бы основаны на

имеющихся или новых теоретических работах в данной области и которые были бы привязаны к авторитетным именам, подобно тому, что имеется в области блочных шифров. Если бы эти алгоритмы находились в области, доступной общественности, то они могли бы стать не только примерами хорошего дизайна, но также и целью для разработки новых эффективных криптоаналитических атак. Это в свою очередь привело бы к созданию поддающихся теоретическому обоснованию принципов конструирования поточных шифров [306]. На сегодняшний день перечисленным требованиям отвечает совсем немного алгоритмов: уже упомянутый SEAL Рогуэя и Копперсмита, RC4 Райвиста и, пожалуй отчасти, GOAL Голича (описанный лишь концептуально в самых общих выражениях).

II. Критерии для сравнения алгоритмов

Сегодня имеется совершенно определенная потребность в новых быстрых криптоалгоритмах. Старые алгоритмы в большинстве своем ориентированы на побитовые операции, поэтому их непосредственная программная реализация слишком замедлена на компьютерах общего назначения. Но как эффективно сравнивать различные алгоритмы? Измерение производительности и вообще сравнение криптосредств - задача довольно проблематичная, и пока еще нет всеобщего соглашения относительно того, как это делать. В настоящее время имеются самые разнообразные предложения относительно того, с помощью каких мер сравнивать шифры: построением хэш-функций из блочных шифров, быстрой генерацией нелинейных таблиц, применением криптографических техник в других областях типа статистических симуляций и т.д. При этом отмечается, что криптографические алгоритмы до настоящего времени полностью отсутствуют во всех тестах для компьютеров и компиляторов.

В этой связи можно напомнить, что в мире компьютерных систем разработка эффективных критериев производительности привела к революционным открытиям, наиболее заметным из которых стала RISC-архитектура. Поэтому имеются причины полагать, что аналогичное может произойти и в области шифрования [10].

III. Программные и аппаратные шифры

Быстрое поточное шифрование по традиции подразумевает сугубо аппаратную реализацию. Но, с другой стороны, производительность компьютерных сетей продолжает нарастать, и такие приложения как мультимедия полноценно задействуют это возрастание пропускной способности. И весьма маловероятно, что большинство пользователей будет тратить значительные денежные средства на аппаратные решения для защиты своих приложений [306].

Сегодня все более определенно начинают констатировать доминирование программных криптоприложений, а это делает возможными некоторые решения, которые были весьма дорогостоящими в аппаратных конструкциях, например, большие просмотрные таблицы и длинные размеры блоков [10].

Разработчики программных алгоритмов нацеливаются на эксплуатацию параллелизма, предлагаемого ориентированными на байты/слова операции, поскольку операции сдвига/прокручивания и целочисленного сложения/хог эффективно выполняются большинством современных компьютеров. При разработке поточных

шифров из этого следует развитие теории РСЛОС до общего случая операций над байтами/словами.

Общепризнано, что полезным строительным блоком являются просмотрные таблицы, но для достижения высоких скоростей эти таблицы должны помещаться в кэш-память компьютера. На середину 90-х годов наиболее популярным размером таких таблиц стал размер в 8 Кбайт.

IV. Развитие теории

Последние аналитические успехи привели к соответствующим улучшениям и в криптографической теории, где наиболее заметным явлением, по-видимому, стал рост интереса к высоко нелинейным функциям. Однако, пока еще имеется немного практических работ в области того, как реальные поточные криптосхемы могли бы использовать такие функции [306].

Не останавливаются и попытки в разработке теории доказуемой стойкости. Идеальная цель исследований - получить в криптографии эквивалент известной теоремы кодирования Шеннона. Это позволило бы гарантировать существование доказуемо стойких криптографических систем и обеспечило бы исследователей подтверждением того, что цель достижима. Возможно, что такое продвижение дало бы и свежий взгляд на теорию сложности. С криптографической точки зрения важно различать P/NP - сложность и булеву сложность, которая выражается, например, в терминах подсчета вентилей схемы [306].

V. Жизнь в реальном мире

История свидетельствует, что большинство криптоаналитических успехов были вызваны человеческими ошибками и плохими административными процедурами, особенно в области управления ключами. Кроме того, в некоторых работах убедительно продемонстрировано, что стойкая конструкция шифра не обязательно влечет за собой стойкую реализацию [98].

Достаточно очевидно, что при практической реализации шифрсистемы необходимо не только проверять насколько алгоритм соответствует в работе своей конструктивной схеме, но также и то, насколько удовлетворяются предположения о таких особенностях конструкции, как например физическая безопасность ключей. Очень важно проверять и то, что никакие добавочные функции реализации не компрометируют стойкость системы [339].

Анализируя сегодняшнюю ситуацию с реальными криптопродуктами, эксперты-криптографы отмечают, что общедоступная криптография, представленная на коммерческом рынке, не предоставляет того уровня безопасности, который обещает реклама [347]. Как пишет Брюс Шнайер, большинство систем разработано и реализовано не криптографами, а инженерами, полагающими, что криптография - это одна из многих компьютерных технологий. Но в действительности это не так. Систему нельзя сделать безопасной, встраивая криптографию на последнем этапе. Для обеспечения надежной защиты необходимо четко знать, что следует делать на каждом шаге - от начальной концепции до завершающей инсталляции.

Сегодня в компьютерную безопасность вкладываются миллиарды долларов, и большинство этих денег тратится на нестойкие продукты. В конце концов, слабый

криптопродукт выглядит на полке точно так же, как и сильный. Разницу между ними может выявить лишь опытный криптограф. И опытный злоумышленник.

Люди, которые занимаются вскрытием криптографических систем, не следуют каким-либо правилам. Они жульничают. Они могут атаковать систему с помощью методов, о которых разработчик не мог и помыслить. Похитители произведений искусства грабили дома, разрезая стены цепной пилой. Системы охраны, неважно насколько дорогие и сложные, не имеют никаких шансов противостоять подобным методам. Компьютерные воры тоже проходят сквозь стены. Они крадут техническую документацию, подкупают сотрудников, модифицируют программное обеспечение, вступают в сговор. Все эти трюки благоприятствуют атакующему: тот, кто защищается, должен закрыть каждое слабое место, но атакующему достаточно найти всего одну брешь в обороне, чтобы скомпрометировать всю систему.

Сегодняшняя компьютерная безопасность - это картонный домик: в данный момент он может и выстоит, но долго продолжаться это не может. Многие криптопродукты пока не взломаны лишь потому, что до них никому нет дела. Но когда такой продукт становится широко распространенным, он быстро становится очередной жертвой злоумышленников.

Хорошая криптографическая система - это система, удерживающая равновесие между тем, что возможно и тем, что приемлемо. Сильная криптография может противостоять целенаправленным атакам до некоторой точки - точки, в которой становится легче получить нужную информацию каким-то другим способом. Никакая криптопрограмма или шифратор не могут помешать злоумышленнику копаться в чьем-то мусоре. Но криптопродукт может полностью лишить атакующего информации о том, чей это мусор.

Хорошая новость о криптографии - сегодня уже есть алгоритмы и протоколы для надежной защиты информации. Плохая же новость в том, что это было самым простым, практическая же реализация данных протоколов требует значительно больших усилий и опыта. Те области обеспечения безопасности, в которых участвуют люди - управление ключами, интерфейс человек/компьютер, контроль доступа - часто не поддаются анализу. И такие дисциплины, как инфраструктура открытых ключей, защита программного обеспечения, компьютерная и сетевая безопасность, защита аппаратуры от проникновения - пока еще очень плохо понимаются [347].

Но данные проблемы - тема уже совсем других книг. Не этой ...



Библиография

1. C. M. Adams and S.E. Tavares, "Generating and Counting Binary Bent Sequences", in *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol 36, no 5, 1990
2. C. M. Adams and S.E. Tavares, "The use of bent sequences to achieve higher-order strict avalanche criterion", Technical Report, TR 90-013, Department of Electrical Engineering, Queen's University, 1990
3. A.V. Aho, J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1974
4. S.V.B. Aiyer, M. Niranjana, F. Fallside. A theoretical investigation into the performance of the Hopfield model, *IEEE Trans. On Neural Networks*, 1(2): 204-215, 1990
5. W. Alexi, B. Chor, O. Goldreich, and C. P. Schnorr, "RSA and Rabin functions: Certain parts are as hard as the whole," *SIAM J. Comput.*, vol. 17, pp. 194-209, April 1988.
6. N. Alon, O. Goldreich, J. Hastad and R. Peralta. Simple constructions of almost k-wise independent random variables. In *31st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, St.Louis, Missouri*, pp 544-553, 1990.
7. R. Anderson. "Solving a class of stream ciphers", *Cryptologia*, 14(3):285-288,1990
8. R. Anderson. "Faster attack on certain stream ciphers", *Electr. Lett.*, 29(15):1322-1323, July 1993
9. R. Anderson. "Derived Sequence Attacks on Stream Ciphers", presented at the rump session of Crypto 93
10. R. Anderson. Preface to "Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop", pages V-VI, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
11. R. Anderson, post to Newsgroups: sci.crypt (from rja14@cl.cam.ac.uk), 17 Jun 1994, Subject: A5
12. R. Anderson. "Why Cryptosystems Fail", in *Communications of the ACM* , v 37 no 11 (November 1994) pp 32-40
13. R. Anderson. "Searching for the optimum correlation attack". Fast Software Encryption - Second International Workshop, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 137-143

14. R. Anderson. "On Fibonacci Keystream Generators". Fast Software Encryption - Second International Workshop, Leuven, Dec. 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 346-352
15. R. Anderson and C. Manifavas, "Chameleon - A New Kind of Stream Cipher", in Fast Software Encryption - Fourth International Workshop, Haifa, Israel, Jan. 1997, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
16. K.B. Athreya and P.E.Ney, *Branching Process*. Berlin, Springer-Verlag, 1972
17. S. Babbage. "A Space/Time Trade-Off in Exhaustive Search Attacks Stream Ciphers", 9 April 1996, presented at the rump session of Eurocrypt 96
18. A.D. Barnard, J.R. Silvester, W.G. Chambers, "Guaranteeing the period of linear recurring sequences (mod 2^e)", IEE Proceedings-E, 140, 243-245, (Sept 1993).
19. U. Baum and S. Blackburn. Clock-controlled pseudorandom generators on finite groups. Fast Software Encryption - Second International Workshop, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995
20. H. Beker and F. Piper, *Cipher Systems: the Protection of Communications*, London: Northwood Books, 1982.
21. K. Beker and M. Dorfler. *Dynamic systems and fractals*. Cambridge University Press, New York, 1989.
22. B. Benjauthrit and I. S. Reed, "Galois switching functions and their applications," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-25, pp. 78-86, Jan. 1976.
23. C.H. Bennett, G. Brassard and J.M. Robert, "Privacy amplification by public discussion", *SIAM J. Computing*, vol. 17, pp. 210-229, 1988
24. M. Ben-Or, Probabilistic algorithms in finite fields, *Proceedings of the 22nd IEEE Foundations of Computer Science Symposium*. 1981. Pp. 394-398
25. E. R. Berlekamp, *Algebraic Coding Theory*, New York: McGraw-Hill, 1968.
26. J. Bernasconi and C. G. Günther, "Analysis of a nonlinear feedforward logic for binary sequence generators," *BBC Tech. Rep.*, 1985.
27. T. Beth and Zong-duo Dai. "On the complexity of pseudo-random sequences - or: If you can describe a sequence it can't be random". In J.J. Quisquater and J. Vandewalle, editors, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '89*, pages 533-543, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

28. T. Beth and F. Piper, "The stop-and-go generator," in *Lecture Notes in Computer Science 209; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '84*, T. Beth, N. Cot, and I. Ingemarsson, Eds., Paris, France, April 9-11, 1984, pp. 88-92. Berlin: Springer-Verlag. 1985.
29. J. Bierbrauer, K. Gopalakrishnan and D.R. Stinson. "Bounds on resilient functions and orthogonal arrays," in *Advances in Cryptology: Proc. Crypto '94*, 1994 vol 839, LNCS, pp 247-256, Springer-Verlag, Berlin
30. E. Biham and A. Shamir. *Differential Cryptanalysis of the Data Encryption Standard*. Springer-Verlag, New York, 1993.
31. E. Biham and P. Kocher. A known plaintext attack on the PKZIP encryption. *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995
32. S.R. Blackburn. A generalisation of the discrete Fourier transform: an algorithm to determine the minimum polynomial of a periodic sequence. September 1993. Preprint.
33. R. E. Blahut, "Transform techniques for error-control codes," *IBM J. Res. Develop.* vol. 23, pp. 299-315, 1979.
34. R.E. Blahut. *Theory and Practice of Error Control Codes*. Addison-Wesley, 1983.
35. R.E. Blahut. *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*. Addison-Wesley, 1985.
36. A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction*, MIT Press, Cambridge Mass., 1987
37. W. Blaser and P. Heinzmann, "New cryptographic device with high security using public key distribution," *Proc. IEEE Student Paper Contest 1979-80*, pp.145-153,1982.
38. U. Blöcher and M. Dichtl. Fish: A Fast Software Stream Cipher. In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 41-44, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
39. M. Blum and S. Micali. How to generate cryptographically strong sequences of pseudo-random bits. *SIAM Journal on Computing*, 13(4):850-863, 1984.
40. L. Blum, M. Blum, and M. Shub, "A simple unpredictable pseudo-random number generator," *SIAM J. Comput.*, vol. 15, pp. 364-383, 1986.
41. J. Boyar (Plumstead). Inferring sequences produced by a linear congruential generator missing low-order bits. *Journal of Cryptology*, 1(3):177-184, 1989.

42. J. Boyar (Plumstead). "Inferring sequences produced by pseudo-random number generators", *Jour. Of ACM*, Vol.36, No.1, 1989, pp. 262-280.
43. R.P. Brent, "On the periods of generalised Fibonacci sequences", in *Mathematics of Computation* v 63 no 207 (July 1994) pp 389-401
44. E.F. Brickell. Breaking iterated knapsacks. In G.R. Blakley and D.Chaum, editors, *Advances in Cryptology - Crypto '84*, pages 342-358, Springer-Verlag, New York, 1985.
45. E.F. Brickell and A.M. Odlyzko , "Cryptanalysis. A Survey of Recent Results", in G.J. Simmons, editor. *Contemporary Cryptology, The Science of Information Integrity*; pp 501-540. IEEE Press, New York, 1992.
46. J. O. Brüer, "On nonlinear combinations of linear shift register sequences," in *Proc. IEEE ISIT*, les Arcs, France, June 21-25 1982
47. J. O. Brüer, "On pseudo random sequences as crypto generators," in *Proc. Int. Zurich Seminar on Digital Communication*, Switzerland, 1984.
48. N.G. de Bruijn. A combinatorial problem. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, 49:758-764, 1946.
49. L. Brynielsson, "On the linear complexity of combined shift register sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 219; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '85*, F. Pichler, Ed., Linz, Austria, April 1985, pp. 156-166. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
50. L. Brynielsson, "Wie man den richtigen Schlüssel in einem Heuhaufen findet," *Kryptologie Aufbauseminar J.*, Kepler Universität, Linz, Austria, 1987.
51. L. Brynielsson, "Below the unicity distance," *Workshop on Stream Ciphers*, Karlsruhe, Germany 1989.
52. TR Cain, AT Sherman, "How to Break Gifford's Cipher", in *Proceedings of the 2nd ACM Conference on Computer and Communications Security* (ACM, Nov 94) pp 198-209
53. T.R. Cain and A.T. Sherman , "How to break Gifford's Cipher", *CRYPTOLOGIA*, vol XXI, 1997, n 3, pp 237-286
54. P. Camion and A. Canteaut "Construction of t-Resilient Functions over a Finite Alphabet", in *Lecture Notes in Computer Science; Advances in Cryptology: Eurocrypt '96 Proc.*, Springer-Verlag 1996, pp. 283-293

55. P. Camion, C. Carlet, P. Charpin and N. Sendrier, "On correlation-immune functions," in *Lecture Notes in Computer Science vol.576; Advances in Cryptology: Crypto '91 Proc.*, pp 87-100. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
56. C. Carlet, "Partially-bent functions", *Advances in Cryptology - Crypto '92*, pages 280-291, Springer-Verlag, New York, 1993.
57. C. Carlet, "Two New Classes of Bent Functions", in *Lecture Notes in Computer Science vol. 765; Advances in Cryptology: Eurocrypt '93 Proc.*, Springer-Verlag 1994, pp. 77-101
58. C. Carlet, J. Seberry and X.-M. Zhang "Comments on 'Generating and Counting Binary Bent Sequences'", in *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol 40, no 2, page 600, 1994.
59. C. Carlet, "Hyper-bent functions", in *Proceedings of the 1st Int. Conference on the theory and Applications of Cryptology, Pragocrypt '96*, CTU Publishing House, 1996, pp 145-155
60. C. Carlet, "More Correlation-Immune and Resilient Functions over Galois Fields and Galois Rings ", in *LNCS 1233; Proc. Eurocrypt '97*, Berlin: Springer-Verlag, 1997.
61. J. Carrol and L. Robins, Computer Cryptanalysis, *Technical Report No.223*, 1988, Department of Computer Science, The University of Western Ontario, London, Ontario.
62. G.J. Chaitin. Information, Randomness and Incompleteness. World Scientific Publishing, Singapore, 1987.
63. G.J. Chaitin. On the length of programs for computing finite binary sequences. *J. ACM*, 13(4):547-569, October 1966.
64. C.M. Campbell, "Design and specification of cryptographic capabilities," *IEEE Commun. Soc. Mag.*, vol. 16, pp. 15-19, 1978.
65. W.G. Chambers and S. M. Jennings, "Linear equivalence of certain BRM shift-register sequences," *Electron. Lett.*, vol. 20, Nov. 1984.
66. W.G. Chambers, "Clock-controlled shift registres in binary sequence generators," *IEE Proc. E.*, vol. 135, pp. 17-24, 1988.
67. W.G. Chambers and D. Gollmann, "Generators for sequences with nearmaximal linear equivalence," *IEE Proc. E.*, vol. 135, pp. 67-69, 1988.
68. W.G. Chambers and Z-D. Dai, "On binary sequences from recursion modulo 2^e made non-linear by the bit-by-bit XOR-fuction", *Lecture Notes in Computer Science vol 547 Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'91*, Springer-Verlag,, pp 200-204, 1992

69. W.G. Chambers, "Two Stream Ciphers", In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 51-55, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
70. W.G. Chambers, "On Random Mappings and Random Permutations", *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 22-28
71. A.H. Chan. On quadratic m-sequences. In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 166-173, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
72. A. H. Chan and R. A. Games, "On the linear span of binary sequences obtained from finite geometries," in *Lecture Notes in Computer Science 263; Advances in Cryptology: Proc. Crypto '86*, A. M. Odlyzko, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 11-15, 1986, pp. 405-417. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
73. A.H. Chan and R.A. Games. On the quadratic spans of periodic sequences. In G. Brassard, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '89*, pages 82-89, Springer-Verlag, New York, 1990.
74. A.H. Chan and R.A. Games. "On the linear span of binary sequences from finite geometries, q odd". *IEEE Transactions on Information Theory* 36, 548-552 (1990)
75. A. H. Chan, M. Goresky, and A. Klapper, "Correlation functions of geometric sequences," *Proc. Eurocrypt 90*, I. Damgard, Ed., Springer Verlag .
76. D. Chaum and J. H. Evertse, "Cryptanalysis of DES with a reduced number of rounds," in *Lecture Notes in Computer Science 218; Advances in Cryptology: Proc. Crypto '85*, H. C. Williams, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 18-22, 1985, pp. 192-211. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
77. U. Cheng. Properties of Sequences. PhD thesis, University of Southern California, 1981.
78. V. Chepyzhov and B. Smeets. On a fast correlation attack on certain stream ciphers. In D.W. Davies, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '91*, pages 176-185, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
79. B. Chor, O. Goldreich, J. Hastad, J. Friedman, S. Rudich and R. Smolensky. "The bit extraction problem or t -resilient functions," *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, vol. 26, pp. 396-407, 1985.
80. G.C. Clark and J.B. Cain. *Error-Correcting Coding for Digital Communications*. New York: Plenum Press, 1982

81. A. Clark, J. Golić, E. Dawson. "A Comparison of Fast Correlation Attacks". In *Fast Software Encryption - Third International Workshop, Cambridge, February 1996*, pp. 145-157, Springer-Verlag, Berlin, 1996
82. D. Coppersmith, H. Krawczyk, and Y. Mansour. The shrinking generator. In D.R. Stinson, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '93*, pages 22-39, Springer-Verlag, New York, 1994.
83. C. Coveyou and R.D. MacPherson, "Fourier Analysis of Uniform Random Number Generators," *Journal of the ACM*, v. 14, n. 1, 1967, pp. 100-119.
84. Zong-duo Dai. Binary sequences derived from ML-sequences over rings. 1986. Preprint.
85. Zong-duo Dai, "Proof of Rueppel's linear complexity conjecture," *IEEE Trans. inform. Theory*, vol. 32, pp. 440-443, May 1986.
86. Zong-duo Dai and Kencheng Zeng, "Continued Fractions and the Berlekamp-Massey Algorithm," In *J. Seberry and J. Pieprzyk, editors, Advances in Cryptology - Auscrypt '90*, pages 24-31, Springer Verlag, Berlin, 1990.
87. J. Daemen, R. Govaerts, and J. Vandewalle. On the Design of High Speed Self-Synchronizing Stream Ciphers. In *Singapore ICSS/ISITA '92 Conference Proceedings*, IEEE 1992, pages 279-283.
88. J. Daemen, R. Govaerts, and J. Vandewalle. Cryptanalysis of MUX-LFSR based scramblers. In *State and Progress in the Research of Cryptography*, 1993, pages 55-61, 1993.
89. J. Daemen, R. Govaerts, and J. Vandewalle. "Resynchronization weakness in synchronous stream ciphers". *Advances in Cryptology - Eurocrypt '93, LNCS vol 765*, pages 159-167, Springer-Verlag, 1994.
90. J. Daemen. Cipher and Hash Function Design. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 1995.
91. D.W. Davies and W.L. Price. *Security for Computer Networks: An Introduction to Data Security in Teleprocessing and Electronic Funds Transfer*. John Wiley & Sons, New York, 1984.
92. E. Dawson and B.Goldburg, "Universal logic sequences", In *J. Seberry and J. Pieprzyk, editors, Advances in Cryptology - Auscrypt '90*, pages 426-432, Springer Verlag, Berlin, 1990.
93. E. Dawson and A.Clark, "Cryptanalysis of Universal Logic Sequences", *Advances in Cryptology - Eurocrypt '93*, Springer Verlag, Berlin.

94. E. Dawson and A.Clark, "Divide and conquer attacks on certain classes of stream ciphers", *Cryptologia* XVIII, N 1, 1994 pp 25-40.
95. E. Dawson and A.Clark, "Discrete Optimisation: A Powerful Tool for Cryptanalysis?", in *Proceedings of the 1st Int. Conference on the theory and Applications of Cryptology, Pragocrypt '96*, CTU Publishing House, 1996, pp 425-450
96. D. E. Denning, *Cryptography and Data Security*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1983.
97. Y. Desmedt, J. J. Quisquater, and M. Davio, "Dependence of output on input of DES: Small avalanche characteristics," in *Lecture Notes in Computer Science 196; Advances in Cryptology: Proc. Crypto '84*, G. R. Blakley and D. Chaum, Eds., Santa Barbara, CA, Aug. 19-22, 1984, pp. 359-376. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
98. Y. G. Desmedt, "Cryptanalysis of conventional and public key cryptosystems," *Proc. SPRCI'89*, Rome, Nov. 23-24, 1989.
99. L. Dickson. *History of the Theory of Numbers*. Chelsea Pub. Co., London, 1919.
100. W. Diffie and M. Hellman, "New directions in cryptography," *IEEE Trans. Informat. Theory*, vol. IT-22, pp. 644-654, Nov. 1976.
101. W. Diffie and M. Hellman, "Privacy and authentication: An introduction to cryptography," *Proc. IEEE*, vol. 67, pp. 397-427, 1979.
102. W. Diffie, Private communication with R.Rueppel, July 1984.; (in "Contemporary Cryptology", G.Simmons, Ed. , IEEE Press, New York, p. 124, 1992)
103. J. F. Dillon, "A survey of bent functions", *The NSA Technical Journal* (1972), pp 191-215 (unclassified)
104. J. F. Dillon, "Elementary Hadamard difference sets", *Ph..D. Thesis*, University of Maryland, 1974
105. J. F. Dillon, "Elementary Hadamard difference sets," *Proc. 6th Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, Boca Raton, FL, pp. 237- 249, 1975; in *Congressus Numerantium* No. XIV, Utilitas Math., Winnipeg, Manitoba, 1975.
106. C Ding, G Xiao, W Shan, "*The Stability Theory of Stream Ciphers*" , Springer LNCS v 561 (1991)
107. C. Ding, "The Differential Cryptanalysis and Design of Natural Stream Ciphers". In *Fast Software Encryption*, Cambridge Security Workshop, December 1993, pages 101-115, Springer-Verlag, Berlin, 1994

108. H. Dobbertin, "Construction of Bent Functions and Balanced Boolean Functions with High Nonlinearity", *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 61-74
109. M.W. Dodd, "Simultaneous Correlation to Many Linear Functionals: a New Cryptanalytic Technique which Can Almost Halve the Effective Key Size of Certain Stream Ciphers", *Proc. 4th IMA Conference on Cryptography and Coding*, Cirencester, 1993, (published by the IMA, ed. P.G.Farrell, 1995).
110. R. Durbin and D. Willshaw, An analogue approach to the travelling salesman problem using an elastic net method, *Nature* 326: 689-91 (1987)
111. Specification of the Systems of the MAC/Packet Family. EBU Technical Document 3258-E, October 1986.
112. H.D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics vol. 123, Springer Verlag, N.Y., 1990.
113. E.D. Erdmann. Empirical Tests of Binary Keystreams. Master's thesis, University of London, 1992.
114. J. H. Evertse, "Linear structures in block cyphers," in *Lecture Notes in Computer Science 304; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '87*, D. Chaum and W. L. Price, Eds., Amsterdam, The Netherlands, April 13-15, 1987, pp. 249-266. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
115. P. Fahn. Answers to Frequently Asked Questions About Today's Cryptography. RSA Laboratories, September 1993. Version 2.0.
116. L. J. Folks, Combination of Independent Tests, *Handbook of Statistics*, 4, Elsevier, 1984, 113-121.
117. R.P.Feynman. *Statistical Mechanics*, W.A.Benjamin, Inc. (1972)
118. R. Forré, "The strict avalanche criterion: Spectral properties of boolean functions and an extended definition," in *Lecture Notes in Computer Science 403; Advances in Cryptology: Proc. Crypto '88*, pp. 450-468. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
119. R. Forré, "A fast correlation attack on nonlinearly feedforward filtered shift-register sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt '89*, J.-J. Quisquater and J. Vandewalle, Eds., Houthalen, Belgium, April 10-23, 1989, pp. 586-595. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
120. A.M. Frieze, J. Hastad, R. Kannan, J.C. Lagarias, and A. Shamir. Reconstructing truncated integer variables satisfying linear congruences. *SIAM Journal on Computing*, 17(2):262-280, April 1988.

121. A.M. Frieze, R. Kannan, and J.C. Lagarias. Linear congruential generators do not produce random sequences. *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 480-484, 1984.
122. J. Gait, "A new nonlinear pseudorandom number generator," *IEEE Trans. Software Eng.*, vols. S E3, no. 5, pp. 359-363, Sept. 1977.
123. R. G. Gallager, "Low-density parity-check codes," Cambridge, MA: MIT Press 1963.
124. R.A. Games. There are no de Bruijn sequences of span n with complexity 2^n . *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 34:248-251, 1983.
125. R.A. Games and A.H. Chan. A fast algorithm for determining the complexity of a binary sequence with period 2^n . *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-29:144-146, 1983.
126. R.A. Games, A.H. Chan, and E.L. Key. On the complexities of de Bruijn sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 33:233-246, 1982.
127. M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability*, New York: W. H. Freeman, 1979.
128. A.H. Gee and R.W. Prager. Polyhedral combinatorics and neural networks, *Neural Computation* 6: 161-180, (1994)
129. P. R. Geffe, "How to protect data with ciphers that are really hard to break," *Electronics*, Jan. 4, 1973, pp 99-101
130. D.K. Gifford, J.M. Lucassen and S.T. Berlin, "The Application of Digital Broadcast Communication to Large Scale Information Systems", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v 3, n 3, May 1985, pp. 457-467.
131. A. Gill, *Linear Sequential Circuits*, McGraw-Hill, New York, 1966
132. J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*. Viking Penguin: New York, 1987.
133. S. Goldwasser and S. Micali, "Probabilistic encryption and how to play mental poker keeping secret all partial information," *J. Comput. Sys. Sci.*, vol. 28, no. 2, Apr. 1984.
134. O. Goldreich, S. Goldwasser, and S. Micali, "How to construct random functions," *J. ACM*, vol. 33, no. 4, pp. 792-807, 1986.
135. J. Golić and M. V. Zivković, "On the linear complexity of nonuniformly decimated p -sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol 34, pp. 1077-1079, Sept. 1988.
136. J. D. Golić, "On the linear complexity of functions of periodic $GF(q)$ -sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-35, pp. 69-75, Jan. 1989.

137. J. D. Golić and M.J. Mihaljević, "A noisy clock-controlled shift register cryptanalytic concept based on sequence comparison approach," *Advances in Cryptology - Eurocrypt '90, Lecture Notes in Computer Science vol. 473*; I. Damgård, Ed., pp. 487-491, Springer-Verlag, 1990.
138. J. D. Golić and M.J. Mihaljević, "A generalized correlation attack on a class of stream ciphers based on the Levenshtein distance," *Journal of Cryptology* , 3(3):201-212, 1991
139. J. Golić and S.V. Petrović, "A generalized correlation attack with a probabilistic constrained edit distance," In R.A. Rueppel, ed, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '92, Lecture Notes in Computer Science vol. 658*; pages 472-476, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
140. J. Golić and S.V. Petrović, "Constrained edit distance for a memoryless function of strings," invited introductory paper, *Proceedings of the Second Spanish Conf. Cryptology*, Madrid, pp. 1-23, Oct. 1992.
141. J. Golić, Correlation via linear sequential circuit approximation of combiners with memory. In R.A. Rueppel, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '92*, pages 113-123, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
142. J. Golić, "On the security of shift register based keystream generators". In *Fast Software Encryption*, Cambridge Security Workshop, December 1993, pages 90-100, Springer-Verlag, Berlin, 1994
143. J. D. Golić and L. O'Connor. Embedding and probabilistic correlation attacks on clock-controlled shift registers. In *Advances in Cryptology - Eurocrypt '94*, pages 230-343, Springer-Verlag, Berlin.
144. J. Golić, Intrinsic statistical weakness of keystream generators. In J. Pieprzyk and R. Safavi-Naini, editors, *Advances in Cryptology - Asiacrypt '94*, pages 91-103, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
145. J. Golić, Linear cryptanalysis of stream ciphers. In *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995
146. J. D. Golić, Towards fast correlation attacks on irregularly clocked shift registers. In L.C. Guillou and J.J. Quisquater, editors, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '95*, pages 248-262, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
147. J. Golić, M. Salmasizadeh, A. Clark, A. Khodkar and E. Dawson, "Discrete Optimisation and Fast Correlation Attacks", *Cryptographic Policy and Algorithms - Brisbane '95, Lecture Notes in Computer Science 1029*; E. Dawson and J. Golić, Eds., pp. 188-202, Springer-Verlag, 1996.

-
148. J. Golić, "On the Security of Nonlinear Filter Generators". In Fast Software Encryption - Third International Workshop, Cambridge, February 1996, pp. 173-188, Springer-Verlag, Berlin, 1996
149. J. Golić, "Correlation Properties of a General Binary Combiner with Memory", *J.Cryptology* (1996) 9: 111-126
150. J. Golić, "Linear models for keystream generators", *IEEE Trans. Computers*, vol. C-45, pp. 41-49, Jan. 1996.
151. J. D. Golić, "Linear Statistical Weakness of Alleged RC4 Keystream generator", in *Lecture Notes in Computer Science 1233; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '97*, W. Fumy, Ed., May 1997, pp. 226-238, Berlin: Springer-Verlag, 1997
152. J. D. Golić, "Cryptanalysis of Alleged A5 Stream Cipher", in *Lecture Notes in Computer Science 1233; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '97*, W. Fumy, Ed., May 1997, pp. 239-255, Berlin: Springer-Verlag, 1997
153. J. Golić, A. Clark and E. Dawson, "Generalized inversion attack on nonlinear filter generators", submitted
154. D. Gollman, "Pseudo random properties of cascade connections of clock controlled shift registers," in *Lecture Notes in Computer Science 209; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '84*, T. Beth, N. Cot, and I. Ingemarsson, Eds., Paris, France, April 9-11, 1984, pp. 93-98. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
155. D. Gollmann. *Linear Recursions of Cascaded Sequences*. Contributions to General Algebra 3, Hoelder-Pichler-Tempsky, Wien, Teubner, Stuttgart, 1985
156. D. Gollmann. Correlation analysis of cascaded sequences. December 1986. Talk presented at 1st IMA Conference on Cryptography and Coding.
157. D. Gollman and W. G. Chambers, "Lock-in effect in cascades of clock-controlled shift-registers," in *Lecture Notes in Computer Science 330; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '88*, C. G. Günther, Ed., Davos, Switzerland, May 25-27, 1988, pp. 331-343. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
158. D. Gollmann and W. G. Chambers, "Clock-controlled shift registers: A review," *IEEE J. Selected Areas Commun.*, vol. 7, pp. 525-533, May 1989.
159. D. Gollmann and W. G. Chambers, "A cryptanalysis of step_{k,m}-cascades.," *Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt '89, LNCS vol 434*, J.-J. Quisquater, J. Vandevallée Eds., Springer-Verlag, pages 680-687, 1990.
160. D. Gollmann, "Automata Theory and Cryptography", *Proc. Cryptography and Coding 1989*, C.J. Mitchell (ed.), Oxford University Press, pp. 67-74, 1992

161. D. Gollmann, "Cryptanalysis of Clock Controlled Shift Registers", *In R. Anderson, editor, Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 121-126, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
162. S. W. Golomb, "Deep space range measurements," Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA Research Summary, No. 36-1, 1960.
163. S. W. Golomb, *Shift Register Sequences*, San Francisco: Holden Day, 1967. (and also reprint: Aegan Park Press, 1982)
164. J.A. Gordon, "Very Simple Method to Find the Minimal Polynomial of an Arbitrary Non-Zero Element of a Finite Field," *Electronic Letters*, v. 12, n. 25, 9 Dec 1976, pp. 663-664.
165. R. Gottfert and H. Niederreiter. A general lower bound for the linear complexity of the product of shift-register sequences. In *Advances in Cryptology - Eurocrypt '94*, Springer-Verlag, Berlin.
166. E. J. Groth, "Generation of binary sequences with controllable complexity," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-17, no. 3, May 1971.
167. C. G. Günther, "On some properties of the sum of two pseudorandom sequences," paper presented at Eurocrypt'86, Linköping, Sweden, May 20-22, 1986.
168. C. G. Günther, "Alternating step generators controlled by de Bruijn sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 304; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt' 87*, D. Chaum and W. L. Price, Eds., Amsterdam, The Netherlands, April 13-15, 1987, pp. 5-14. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
169. C. G. Günther, "A universal algorithm for homophonic coding," in *Lecture Notes in Computer Science 330; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'88*, C. G. Günther, Ed., Davos, Switzerland, May 25-27, 1988, pp. 405-414. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
170. H.M.Gustafson, E.P.Dawson and J.Dj.Golić, "Randomness Measures Related to subset occurrence", in *Lecture Notes in Computer Science 1029; Advances in Cryptology: Proc. Cryptography: Policy and Algorithms*, Ed Dawson, J.Golic (Eds.), Brisbane, Queensland, Australia, July 1995, pp. 132-143. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
171. T.H.Harris, *The Theory of Branching Processes*. Berlin, Springer-Verlag, 1963
172. J. Hastad and A. Shamir. The cryptographic security of truncated linearly related variables. In *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 356-362, 1985.

173. J. Hastad, B. Just, J. Lagarias and C.P. Schnorr. "Polynomial time algorithms for finding integer relations among real numbers", *SIAM J. Comput.*, vol. 18, pp. 859-881, 1989.
174. T. Herlestam, "On the complexity of functions of linear shift register sequences," *Int. Symp. Inform. Theory*, Les Arc, France, 1982.
175. T. Herlestam, "On functions of linear shift register sequences," in *LNCS 219; Advances in Cryptology: Eurocrypt'85*, pp. 119-129. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
176. J.J. Hopfield and D.W. Tank. Neural computation of decisions in optimization problems, *Biological Cybernetics* 52: 1-25, (1985)
177. C. J. Jansen, "Investigations on nonlinear stream cipher systems: Construction and evaluation methods", Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1989.
178. C. J. Jansen and D.E. Boekke, "A Binary Sequence Generator Based on Ziv-Lempel Source Coding". In J. Seberry and J. Pieprzyk, eds., *Advances in Cryptology - Auscrypt '90*, pages 156-164, Springer Verlag, Berlin, 1990.
179. R.J. Jenkins, "ISAAC", In *Fast Software Encryption - Third International Workshop*, Cambridge, February 1996, pp. 41-49, Springer-Verlag, Berlin, 1996
180. S.M. Jennings. A Special Class of Binary Sequences. PhD thesis, University of London, 1980.
181. S. M. Jennings, "Multiplexed sequences: Some properties of the minimum polynomial," in *Lecture Notes in Computer Science 149; Cryptography: Proc. Workshop Cryptography*, T. Beth, Ed., Burg Feuerstein, Germany, March 29-April 2, 1982, pp. 189-206. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
182. S. M. Jennings, "Autocorrelation function of the multiplexed sequence," *IEE Proc.*, vol. 131, no. 2, pp. 169-172, Apr. 1984.
183. B. Kaliski, A pseudo random bit generator based on elliptic logarithms, M. Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1987.
184. E. L. Key, "An analysis of the structure and complexity of nonlinear binary sequence generators," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-22, no. 6, pp. 732-763, Nov. 1976.
185. L.H. Khachaturian. The lower bound of the quadratic spans of de Bruijn sequences. *Designs, Codes and Cryptography*, 3:29-32, 1993.
186. S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt and M.P. Vecchi, "Optimization by simulated annealing", *Science*, 220 (4598):671-680, 1983.

187. K. Kjeldsen and E. Andresen, "Some randomness properties of cascaded sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-26, pp. 227-232, March 1980.
188. A. Klapper. The vulnerability of geometric sequences based on fields of odd characteristic. *Journal of Cryptology*, 7(1):33-52, 1994.
189. A. Klapper and M. Goresky. 2-adic shift registers. In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 174-178, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
190. A. Klapper. Feedback with carry shift registers over finite fields. *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995
191. A. Klapper and M. Goresky. Feedback registers based on ramified extensions of the 2-adic numbers, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '94 (LNCS vol 950)*, pages 215-222, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
192. A. Klapper and M. Goresky. Large period nearly de Bruijn FCSR sequences. In L.C. Guillou and J.J. Quisquater, editors, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '95*, pages 248-262, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
193. A. Klapper and M. Goresky. Cryptanalysis based on 2-adic rational approximation. *Advances in Cryptology - Crypto '95 (LNCS vol 963)*, pages 262-273, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
194. A. Klapper. On the Existence of Secure Feedback Registers, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '96 (LNCS vol 1070)*, pages 256-267, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
195. A. Klapper and M. Goresky. Arithmetic cross-correlation of FCSR sequences. University of Kentucky technical report no. 262-96, 1996
196. A. Klapper and M. Goresky. Feedback Shift Registers, 2-Adic Span, and Combiners with Memory, *Journal of Cryptology* (1997) 10: 111-147
197. D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 2*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 2nd edition, 1981.
198. D.E. Knuth. Deciphering a Linear Congruential Encryption. Technical Report 024800, Stanford University, 1980.
199. N. Koblitz. *p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta Functions*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 58, Springer-Verlag, New York, 1984
200. N. Koblitz. *A Course in Number Theory and Cryptography*. Springer-Verlag, New York, 1987.

201. А. Н. Колмогоров. Три подхода к определению "количества информации", *Проблемы передачи информации*, 1:3-11, 1965.
202. A.G. Konheim, *Cryptography: A Primer*, John Wiley and Sons, New York, 1981
203. E. Kranakis, *Primality and Cryptography*, Stuttgart: Teubner, Wiley, 1986.
204. H. Krawczyk. How to predict congruential generators. In G. Brassard, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '89*, pages 138-153, Springer-Verlag, New York, 1990.
205. H. Krawczyk. "How to predict congruential generators," *Journal of Algorithms*, v.13, n. 4, Dec 1992, pp. 527-545
206. H. Krawczyk. "The Shrinking Generator: Some Practical Considerations", *Fast Software Encryption, Cambridge Security Workshop Proceedings*, Springer-Verlag, 1994, pp. 45-46
207. P. V. Kumar and R. A. Scholtz, "Bounds on the linear span of bent sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-29, pp. 854-862, Nov. 1983.
208. P. V. Kumar, R. A. Scholtz, and L. R. Welch, "Generalized bent functions and their properties," *J. Combinatorial Theory*, Ser. A 40, pp. 90-107, 1985.
209. E. Kushilevitz and Y. Mansour. Learning decision trees using the Fourier spectrum. In *Proceedings of the 23rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp 455-464, May 1991.
210. GJ Kühn, "Algorithms for Self-Synchronising Ciphers", in *Proc COMSIG 88*
211. G Kühn, F Bruwer, W Smit, "Vinnige Veeldoelige Enkripsievlokkie", supplementary paper to *Proceedings of Infosec 1990*
212. J.C. Lagarias and J.A. Reeds. Unique extrapolation of polynomial recurrences. *SIAM Journal on Computing*, 17(2):342-362, April 1988.
213. P. L'Ecuyer, "Efficient and Portable Combined Random Number Generators", *Communications of the ACM*. v. 31 , n. 6, Jun 1988, pp. 742-749,774.
214. P. L'Ecuyer, Random numbers for simulation. *Communications of the ACM*. 1990, 33(10): 86-97.
215. A. Lempel and M. Cohn, "Maximal families of bent sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-28, pp. 865-868, Nov. 1982.
216. A. Levenshtein, Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Sov. Phy. Dokl.*, Volume 10, (1966) 707-710

217. R. Lidl and H. Niederreiter, "Finite Fields," in *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 20*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1983.
218. R. Lidl and H. Niederreiter, *Introduction to Finite Fields and Their Applications*, London, Cambridge University Press, 1986.
219. S. Lin and D.J.Jr. Costello, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983
220. S. Lloyd, "Counting functions satisfying a higher order strict avalanche criterion," in *LNCS 434: Advances in Cryptology; Eurocrypt'89*, pp.63-74. Springer-Verlag, 1990.
221. S. Lloyd. Counting binary functions with certain cryptographic properties. *Journal of Cryptology*, 5(2):107-131, 1992.
222. D. L. Long and A. Wigderson, "How discrete is the discrete log?" in *Proc. 15th ACM Symposium on Theory of Computation*, Apr. 1983.
223. R. Lorentzen and R. Nilsen, "Application of linear programming to the optimal difference triangle set problem," *IEEE Trans. Inform.Theory*, vol. IT-37, pp 1486-1488, Sep 1991
224. M. Luby and C. Rackoff, "How to construct pseudorandom permutations from pseudorandom functions," *SIAM J. Comput.* vol. 17, pp. 373-386, 1988.
225. R. Matthews, On the Derivation of a "Chaotic" Encryption Algorithm. *Cryptologia*. 1989. 13: 29-42.
226. DJC MacKay, "A Free Energy Minimization Framework for Inference Problem in Modulo 2 Arithmetic". Fast Software Encryption - Second International Workshop, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 179-195
227. F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, "The theory of error correcting codes," Amsterdam: North-Holland, 1977.
228. D. Mandelbaum, Arithmetic codes with large distance. *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. IT-13, 1967 pp.237-242
229. G. Marsaglia. Random numbers fall mainly in the planes. *Proc. N.A.S.*, 61:25-28, 1968.
230. P. Martin-Löf. The definition of random sequences. *Inform. Contr.*, 9:602-619, 1966.
231. J. L. Massey, *Threshold Decoding*. Cambridge, MA: MIT Press, 1963

232. J. L. Massey, "Shift-register synthesis and BCH decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-15, pp. 122-127, Jan. 1969.
233. J. L. Massey, A. Gubser, A. Fischer, P. Hochstrasser, B. Huber, and R. Sutler, "A self-synchronizing digital scrambler for cryptographic protection of data," in *Proceedings of International Zurich Seminar*, March, 1984.
234. J. L. Massey and R. A. Rueppel, "Linear ciphers and random sequence generators with multiple clocks," in *Lecture Notes in Computer Science 209; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'84*, T. Beth, N. Cot, and I. Ingemarsson, Eds., Paris, France, April 9-11, 1984, pp. 74-87. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
235. J. L. Massey and I. Ingemarsson, "The Rip van Winkle cipher - a simple and provably computationally secure cipher with a finite key," in *Abstracts of Papers. IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, Brighton, England, June 24-28, 1985.
236. J. L. Massey, "Delayed-decimation/square sequences," *Proc. 2nd Joint Swedish-Soviet Workshop on Information Theory*, Granna, Sweden, Apr. 14-19, 1985.
237. J. L. Massey and M. Z. Wong, "The characterization of all binary sequences with perfect linear complexity profiles," in *Abstracts of Papers, Eurocrypt'86*, Linkoping, Sweden, May 20-22, 1986, pp. 3-4A-3-4B.
238. J. L. Massey, "Cryptography and System Theory," *Proc. 24th Allerton Conf. Commun., Control, Comput.*, Oct. 1-3, 1986.
239. J. L. Massey, "Probabilistic encipherment," *Elektrotechnik und Maschinenbau*, vol. 104, no. 12, Dec. 1986.
240. J. L. Massey and R. A. Rueppel, "Method of, and apparatus for, transforming a digital sequence into an encoded form", U.S. Patent No. 4,797,922, 1989.
241. J. L. Massey, "Contemporary Cryptology: An Introduction", in G.J. Simmons, editor. *Contemporary Cryptology, The Science of Information Integrity*; pp 1-40. IEEE Press, New York, 1992.
242. J.L. Massey and S. Serconek. A Fourier transform approach to the linear complexity of nonlinearly filtered sequences. In Y. Desmedt, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '94*, pages 332-340, Springer-Verlag, New York, 1994.
243. J.L. Massey and S. Serconek. "Linear Complexity of Periodic Sequences: A General Theory". *Advances in Cryptology - Crypto '96*, pages 358-371, Springer-Verlag, New York, 1996.
244. J. L. Massey, "Applied digital information theory," Lecture Notes, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.

245. M. Matsui. Linear cryptanalysis method for DES cipher. In T. Helleseeth, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '93*, pages 386-397, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
246. U. Maurer and J. L. Massey, "Perfect local randomness in pseudo-random sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 435; Advances in Cryptology: Proc. Crypto'89*, G. Brassard, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 20-24. 1981 110-112. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
247. U. Maurer, "A provable-secure strongly-randomized cipher," in *Lecture Notes in Computer Science 473; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'90*, I. Damgard, Ed., Aarhus, Denmark, May 21-24. 1990, pp. 361-373. Berlin: Springer-Verlag.
248. U.M. Maurer. New approaches to the design of self-synchronizing stream ciphers. In D.W. Davies, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '91*, pages 458-471, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
249. U.M. Maurer. "A universal statistical test for random bit generators, " *J. Cryptol.*, vol. 5, no. 2, pp. 89-105, 1992.
250. G Mayhew, R Frazee, M Bianco, "The Kinetic Protection Device", in *Proceedings of the 15th National Computer Security Conference* (NIST, 1992) pp 310-318
251. G Mayhew, "A Low Cost, High Speed Encryption System and Method", in *Proc 1994 IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy* (IEEE, 1994) pp 147-154
252. L. McCarthy , post to Newsgroups: sci.crypt (from lmccarth@cs.umass.edu), 27 Aug 1996, Subject: Elementrix and POTP encryption
253. R. L. McFarland, "A family of difference sets in non-cyclic groups," *J. Combinatorial Theory*, Ser. A, 15, pp. 1-10, 1973.
254. W. Meier and O. Staffelbach, "Fast correlation attacks on certain stream ciphers," *Journal of Cryptology*, vol. I, no. 3, pp. 159-176, 1989.
255. W. Meier and O. Staffelbach, "Nonlinearity criteria for cryptographic functions," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'89*, J.-J. Quisquater and J. Vandewalle, Eds., Houthalen, Belgium, April 10-23, 1989, pp. 549-562. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
256. W. Meier and O. Staffelbach, "Correlation properties of combiners with memory in stream ciphers," in *Lecture Notes in Computer Science 473; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'90*, I. Damgard, Ed., Aarhus, Denmark, May 21-24. 1990, pp. 204-213. Berlin: Springer-Verlag.

257. W. Meier and O. Staffelbach. Correlation properties of combiners with memory in stream ciphers. *Journal of Cryptology*, 5(1):67-86, 1992.
258. W. Meier and O. Staffelbach. Analysis of pseudo random sequences generated by cellular automata. In D.W. Davies, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '91*, pages 186-199, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
259. W. Meier and O. Staffelbach. The self-shrinking generator. In *Advances in Cryptology - Eurocrypt '94*, Springer-Verlag, pp. 205-214
260. R. Menicocci. Cryptanalysis of a two-stage Gollmann cascade generator. In *Proceedings of SPRC '93*, W.Wolfowicz (ed.), pp. 62-69, 1993
261. R. Menicocci. Short Gollmann cascade generators may be insecure. In *Proceedings of the 4th IMA Conference on Cryptography and Coding*, Cirencester, 1993
262. R. Menicocci. "A systematic attack on clock controlled cascades." In *Advances in Cryptology - Eurocrypt '94*, pages 450-455, Springer-Verlag, Berlin.
263. R.C. Merkle, "Secure communication over insecure channels," *Comm. ACM*, vol. 21, pp. 294-299, Apr. 1978.
264. N. Metropolis, A.W. and M.N. Rosenbluth, A.H. and E. Teller. "Equations of state calculations by fast computing machines". *Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087-1092, 1953.
265. S. Micali and C. P. Schnorr, "Efficient, perfect random number generators," preprint, Massachusetts Institute of Technology, University of Frankfurt, 1988
266. M.J. Mihaljević and J. Golić. A fast iterative algorithm for a shift register initial state reconstruction given the noisy output sequence. In J. Seberry and J. Pieprzyk, editors, *Advances in Cryptology - Auscrypt '90*, pages 165-175, Springer Verlag, Berlin, 1990.
267. M.J. Mihaljević and J. Golić. "A comparison of cryptanalytic principles based on iterative error correction ", In D.V. Davies, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '91*, pages 527-531, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
268. M.J. Mihaljević and J. Golić. "Convergence of a Bayesian iterative error-correction procedure on a noisy shift register sequence", In R.A. Rueppel, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '92*, pages 124-137, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
269. M.J. Mihaljević. "An approach to the initial state reconstruction of a clock-controlled shift register based on a novel distance measure", *Advances in Cryptology - Auscrypt '92*, pages 349-356, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

270. M.J. Mihaljević and J. Golić. "A parity-check weight distribution for maximum-length sequences", *Abstracts of the Second International Conference on Finite Fields*, University of Nevada, Las Vegas, p. 35, 1993.
271. M.J. Mihaljević. A correlation attack on the binary sequence generators with time-varying output function. In J. Pieprzyk and R. Safavi-Naini, editors, *Advances in Cryptology - Asiacrypt '94*, pages 67-79, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
272. L. M. Milne-Thomson, "The calculus of finite differences," London: Macmillan and Co., 1951.
273. D. Mitchell, Nonlinear Key Generators. *Cryptologia*. 1990. 14: 350-354.
274. S. Mund. Ziv-Lempel complexity for periodic sequences and its cryptographic application. In D.W. Davies, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '91*, pages 114-126, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
275. J. Naor and M. Naor. Small bias probability spaces: efficient construction and applications. In *Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Baltimore, Maryland*, pp 213-223, May 1990.
276. National Institute of Standards and Technology (NIST). FIPS Publication 180: Secure Hash Standard (SHS). May 11, 1993.
277. National Institute of Standards and Technology (NIST). FIPS Publication 46-2: Data Encryption Standard. December 30, 1993.
278. National Institute of Standards and Technology (NIST). FIPS Publication 81: DES Modes of Operation. December 2, 1980. Originally issued by National Bureau of Standards.
279. G. Nicolis and I. Prigogine. *Exploring Complexity*. W. H. Freeman and Company: New York, 1989.
280. H. Niederreiter, "Continued fractions for formal power series, pseudorandom numbers, and linear complexity of sequences," contributions to General Algebra 5, Proc. Conf. Salzburg, Teubner, Stuttgart, 1986.
281. H. Niederreiter, "Sequences with almost perfect linear complexity profile," in *Lecture Notes in Computer Science 304; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'87*, D. Chaum and W. L. Price, Eds., Amsterdam, The Netherlands, April 13-15, 1987, pp. 37-51. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
282. H. Niederreiter, "Probabilistic theory of linear complexity," in *Lecture Notes in Computer Science 330; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'88*, C. G. Günther, Ed., Davos, Switzerland, May 25-27, 1988, pp. 191-209. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

283. H. Niederreiter, "Keystream sequences with a good linear complexity profile for every starting point," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'89*, J.-J. Quisquater and J. Vandewalle, Eds., Houthalen, Belgium, April 10-23, 1989, pp. 523-532. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
284. H. Niederreiter. The linear complexity profile and the jump complexity of keystream sequences. In I.B. Damgard, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '90*, pages 174-188, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
285. K. Nyberg, "Construction of bent functions and difference sets," in *Lecture Notes in Computer Science 473; Advances in Cryptology:Proc. Eurocrypt'90*, I. Damgard, Ed., Aarhus, Denmark, May 21-24. 1990, pp. 151-160. Berlin: Springer-Verlag.
286. K. Nyberg, "Perfect Nonlinear S-boxes" in *Lecture Notes in Computer Science 547; Advances in Cryptology:Proc. Eurocrypt'91*, Springer-Verlag, 1992
287. K. Nyberg, "New Bent Mappings Suitable for Fast Implementation", In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 179-184, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
288. P. Nyffeler, *Binare Automaton und ihre linearen Rekursionen*, Ph.D. thesis, University of Berne, 1975.
289. L. O'Connor and T. Snider. Suffix trees and string complexity. In R.A.Rueppel, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '92*, pages 138-152, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
290. Y. Ohnishi, *A study on data security*. Master thesis (in Japanese), Tohoku University, Japan, 1988.
291. J.D. Olsen, R.A. Scholtz and L.R.Welch. "Bent functions sequences", *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-28 No 6, 858-864
292. B.J. Oommen, Recognition of noisy subsequences using constrained edit distance. *IEEE Trans Pattern Analysis Mach. Intell.*, Volume PAMI-9, September (1987) 636-685
293. B.J. Oommen, Correction to recognition of noisy subsequences using constrained edit distance. *IEEE Trans Pattern Analysis Mach. Intell.*, Volume PAMI-10, November (1988) 983-984
294. S.-J. Park, S.-J. Lee and S.-Ch. Goh. On the Security of the Gollmann Cascades. *Advances in Cryptology - Crypto '95 (LNCS vol 963)*, pages 148-156, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

-
295. W. T. Penzhorn and G. J. Kühn, "Computation of Low-Weight Parity Checks for Correlation Attacks on Stream Ciphers". *Proc. 5th IMA Conference Cryptography and Coding*, Cirencester, England, Dec. 1995, pages 74-83, Springer-Verlag, 1995.
296. W. T. Penzhorn, "Correlation Attacks on Stream Ciphers: Computing Low-Weight Parity Checks Based on Error-Correcting Codes". In *Fast Software Encryption - Third International Workshop*, Cambridge, February 1996, pp. 159-172, Springer-Verlag, Berlin, 1996
297. C. Peterson and B. Soderberg. A new method for mapping optimization problems onto neural networks, *Int. Journal Neural Systems*, (1989)
298. S.V. Petrović and J. Golić, "String editing under a combination of constraints," *Information Sciences*,74:151-163, 1993.
299. S.V. Petrović and J. Golić, "A divide and conquer attack on clock-controlled shift registers combined by a function with memory", submitted, 1993
300. C. Pickover, *Pattern Formation and Chaos in Networks. Communications of the ACM*, 1988, 31: 136-151..
301. F. Piper, "Stream ciphers," *Elektrotechnik und Maschinenbau*, vol. 104, no. 12, pp. 564-568, 1987.
302. V. S. Pless, "Encryption schemes for computer confidentiality," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-26, pp. 1133-1136, Nov. 1977.
303. J. Plumstead (Boyar). Inferring a sequence generated by a linear congruence. In *Proceedings of 23rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 153-159, 1982.
304. B. Preneel, W. Van Leekwijck, L. Van Linden, R. Govaerts, and J. Vandewalle, "Propagation characteristics of boolean functions," in *Lecture Notes in Computer Science 473; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'90*, 1. Damgard, Ed., Aarhus, Denmark, May 21-24. 1990, pp. 161-173. Berlin: Springer-Verlag.
305. B. Preneel, R. Govaerts, and J. Vandewalle, "Boolean functions satisfying higher order propagation criteria" in *Lecture Notes in Computer Science 547; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'91*, 1991, pp. 141-152. Berlin: Springer-Verlag.
306. B. Preneel, "Introduction". *Fast Software Encryption - Second International Workshop*, Leuven, December 1994, Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp 1-5
307. W.H.Press, B.P.Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988.

308. *Pr Newswire*, "Elementrix announces revolutionary encryption for Internet and all digital communication", September 29, 1995
309. N. Proctor. A self-synchronizing cascaded cipher system with dynamic control of error-propagation. In G.R. Blakley and D. Chaum, editors, *Advances in Cryptology - Crypto '84*, pages 174-190, Springer-Verlag, New York, 1985.
310. M. O. Rabin, "Probabilistic Algorithm for Testing Primality," *SIAM Journal on Computing*, v. 9, n. 2, May 1980, pp. 273-280
311. M. O. Rabin, "Fingerprinting by Random Polynomials," Technical Report TR-15-81, Center for Research in Computing Technology, Harvard University, 1981.
312. S. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*. John Wiley & Sons: New York, 1990.
313. J.A. Reeds. "Cracking a random number generator." *Cryptologia*, 1, January 1977.
314. J.A. Reeds. "Cracking a Multiplicative Congruential Encryption Algorithm", in *Information Linkage Between Applied Mathematics and Industry*, P.C.C Wang, ed., Academic Press, 1979, pp.467-472.
315. J.A. Reeds, "Solution of Challenge Cipher," *Cryptologia*, v. 3, n. 2, Apr 1979, pp. 83-95.
316. J.A. Reeds and N.J.A. Sloane. Shift register synthesis (modulo m). *SIAM Journal on Computing*, 14(3):505-513, 1985.
317. E. Rietman, *Exploring the Geometry of Nature*. Windcrest Books, Blue Ridge Summit, PA., 1989.
318. T. Ritter. The Efficient Generation of cryptographic Confusion Sequences. *Cryptologia*, 1991, 15(2): 81-139
319. R.L. Rivest. The RC4 Encryption Algorithm. RSA Data Security, Inc., March 12, 1992.
320. R.L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 21(2):120-126, February 1978.
321. M.J.B. Robshaw. Block Ciphers. Technical Report TR - 601, RSA Laboratories, revised July 1995.
322. M.J.B. Robshaw. Stream Ciphers. Technical Report TR - 401, RSA Laboratories, revised July 1995.

323. M.J.B. Robshaw. On Binary Sequences with Certain Properties. PhD thesis, University of London, 1992.
324. M.J.B. Robshaw. On evaluating the linear complexity of a sequence of least period 2^n Designs, Codes and Cryptography, 4:263-269, 1994.
325. M.J.B. Robshaw. Security of RC4. Technical Report TR - 401, RSA Laboratories.
326. P. Rogaway and D. Coppersmith. A software-optimized encryption algorithm. In R. Anderson, editor, Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop, pages 56-63, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
327. C.A. Ronce. Feedback Shift Registers. Volume 169 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
328. O. S. Rothaus, "On bent functions," *J. Combinatorial Theory*, vol. 20, pp. 300-305, 1976.
329. F. Rubin "Decrypting a stream cipher based on J - K flip-flops," *IEEE Trans Comput.*, vol. C-28, no. 7, pp. 483-487, July 1979.
330. R.A. Rueppel. New Approaches to Stream Ciphers. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1984.
331. R. A. Rueppel, "Linear complexity and random sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 219; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'85*, F. Pilcher, Ed., Linz, Austria, April 1985, pp. 167-188. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
332. R. A. Rueppel and J. L. Massey, "The knapsack as a nonlinear function," *IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, Brighton, UK, May 1985.
333. R. A. Rueppel, "Correlation immunity and the summation combiner," in *Lecture Notes in Computer Science 218; Advances in Cryptology: Proc. Crypto'85*, H. C. Williams Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 18-22, 1985, pp. 260-272. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
334. R. A. Rueppel, *Analysis and Design of Stream Ciphers*, Berlin: Springer-Verlag, 1986.
335. R. A. Rueppel and O. Staffelbach, "Products of sequences with maximum linear complexity," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-33, no. 1, pp. 124-131, Jan. 1987.
336. R. A. Rueppel, "When shift registers clock themselves," in *Lecture Notes in Computer Science 304; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'87*, D. Chaum and W. L. Price, Eds., Amsterdam, The Netherlands, April 13-15, 1987, pp. 53-64. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

-
337. R. A. Rueppel, "On the security of Schnorr's pseudo random sequence generator," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'89*, J.-J. Quisquater and J. Vandewalle, Eds., Houthalen, Belgium, April 10-23, 1989, pp. 423-428. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
338. R. A. Rueppel, "Security models and notions for stream ciphers," *Proc. 2nd IMA Conf. Cryptography and Coding*, Cirencester, England, Dec. 1989.
339. R. A. Rueppel, "Stream ciphers," in G.J. Simmons, editor. *Contemporary Cryptology, The Science of Information Integrity*; pp 65-134. IEEE Press, New York, 1992.
340. A. Fuster-Sabater and P. Caballero-Gil. On the linear complexity of nonlinearly filtered PN-sequences. In J. Pieprzyk and R. Safavi-Naini, editors, *Advances in Cryptology - Asiacrypt '94*, pages 80-90, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
341. A. Fuster-Sabater and P. Caballero-Gil. "Linear Span of a Set of Periodic Sequence Generators". *Proc. 5th IMA Conference Cryptography and Coding*, Cirencester, England, Dec. 1995, pages 22-33, Springer-Verlag, 1995.
342. M. Salmasizadeh, J. Golic, E. Dawson and L. Simpson. "A Systematic Procedure for Applying Fast Correlation Attacks to Combiners with Memory", *Proc. of Fourth Annual Workshop on Selected Areas in Cryptography - SAC '97*, Ottawa, August 1997, preprint.
343. D. Sankoff and J.B. Kruskal, *Time Warps, String Edits and Macro Molecules: The Theory and Practice of Sequence Comparison*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1983
344. J. E. Savage, Some simple self-synchronizing digital data scramblers. *Bell Sys.Tech. J.*, vol. 46, no. 2, pp. 449-487, Feb. 1967.
345. T. Schaub, A linear complexity approach to cyclic codes, Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1988.
346. B. Schneier, *Applied Cryptography*, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York, 1996
347. B. Schneier "Cryptography, Security and the Future", *Communications of the ACM*, v. 40, n. 1, Jan 1997.
348. C. P. Schnorr, "On the construction of random number generators and random function generators," in *Lecture Notes in Computer Science 330; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'88*, C. G. Gunther, Ed., Davos, Switzerland, May 25-27, 1988, pp. 225-232. Berlin: Springer-Verlag, 1988.
349. J. Seberry and M. Yamada. "Hadamard Matrices, Sequences and Block Designs". In J.H.Dinitz and D.R. Stinson, editors, *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*, chapter 11, pages 431-559, John Wiley and Sons, Inc, 1992.

350. J. Seberry and X.M. Zhang. "Highly Nonlinear 0-1 balanced functions satisfying strict avalanche criterion". Presented at AUSCRYPT '92, 1992.
351. J. Seberry, X.M. Zhang, and Y. Zheng. "Nonlinearly balanced Boolean functions and their propagation characteristics". In D.R. Stinson, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '93*, pages 49-60, Springer-Verlag, New York, 1994.
352. J. Seberry, X.M. Zhang and Y. Zheng, "On Constructions and Nonlinearity of Correlation Immune Functions" In T. Helleseht, editor, *Advances in Cryptology - Eurocrypt '93*, pages 181-199, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
353. J. Seberry, X.-M. Zhang and Y. Zheng, "Nonlinearity and Propagation Characteristics of Balanced Boolean Functions", *Information and Computation*, Vol. 119, No 1, pp 1-13, 1995
354. E. S. Selmer, *Linear recurrence relations over finite fields*. Lecture Notes, University of Bergen, Bergen, Norway, 1966.
355. J. A. Serret, "Cours d'algebre superieure," Tome II, p. 154, Gauthier-Villars, Paris, 1886.
356. E.H. Sibley, "Random Number Generators: Good Ones Are Hard to Find", *Communications of the ACM*, v.31, n.10, Oct 1988, pp. 1192-1201
357. A. Shamir, "On the generation of cryptographically strong pseudo-random sequences, " *8th Int. Colloquium of Automata, Languages, and Programming, Lecture Notes in Computer Science 62*, Springer-Verlag, 1981.
358. A. Shamir. A polynomial time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-30(5):699-704, Sept. 1984.
359. C. E. Shannon , "A mathematical theory of communication," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.27, pp. 379-423, 623-656, July and October 1948
360. C. E. Shannon, "Communication theory of secrecy systems," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.28, pp. 656-715, Oct. 1949
361. T. Siegenthaler, "Correlation-immunity of nonlinear combining functions for cryptographic applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-30, pp. 776-780, Oct. 1984.
362. T. Siegenthaler, "Cryptanalyst's representation of nonlinearly filtered ml-sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 219; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'85*, F. Pilcher, Ed., Linz, Austria, April 1985, pp. 103-110. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

-
363. T. Siegenthaler, "Decrypting a class of stream ciphers using ciphertext only," *IEEE Trans. Comput.*, vol. C-34, pp. 81-85, Jan. 1985.
364. G.J. Simmons, editor. Contemporary Cryptology, The Science of Information Integrity. IEEE, New York, 1992.
365. B. Smeets, "A note on sequences generated by clock-controlled shift registers," in *Lecture Notes in Computer Science 219; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'85*, F. Pilcher, Ed., Linz, Austria, April 1985, pp. 40-42. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
366. B. Smeets, "The linear complexity profile and experimental results on a randomness test of sequences over the field F_q ," *IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, Kobe, Japan, June 19-24, 1988.
367. B. Smeets and W.G. Chambers, "Windmill pn-sequences generators", *IEE Proceedings-E*, vol 136, pp 401-404 (Sept 1989).
368. O. Staffelbach and W. Meier, "Cryptographic significance of the carry for ciphers based on integer addition," In A.J. Menezes and S.A. Vanstone, editors, *Advances in Cryptology - Crypto '90*, pages 601-615, Springer-Verlag, New York, 1990.
369. J. Stern, "Secret Linear Congruential Generators Are Not Cryptographically Secure", *Proceedings of the 28th Symposium on Foundations of Computer Science*, 1987, pp.421-426.
370. M. A. Stephens and R.B.D. D'Agostino, Tests Based on EDF Statistics, Goodness of Fit Techniques, *Statistics, Textbooks and Monographs*, 68, Marcell Dekker Inc., 1986, 97-193.
371. D.R. Stinson, "Resilient functions and large sets of orthogonal arrays," *Congressus numerantium*, vol. 92, pp. 105-110, 1993
372. D.R. Stinson and J.L. Massey, "An infinite class of counterexamples to a conjecture concerning nonlinear resilient functions", *Journal of Cryptology*, vol.8(3), pp. 167-173, 1995
373. R. C. Tittsworth, "Optimal ranging codes," *IEEE Trans. Space Electron. Telemetry*, pp. 19-30, March 1964.
374. S. A. Tretter, "Properties of PN^2 sequences," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-20, pp. 295-297, March 1974.
375. PC van Oorschot, MJ Wiener, "Parallel Collision Search with Application to Hash Functions and Discrete Logarithms", in *Proceedings of the 2nd ACM Conference on Computer and Communications Security* (ACM, Nov 94) pp 210-218

376. G. S. Vernam, "Cipher printing telegraph systems for secret wire and radio telegraphic communications," *J. Amer. Inst. Elec. Eng.*, vol. 45, pp. 109-115, 1926.
377. R. Vogel, "On the linear complexity of cascaded sequences," in *Lecture Notes in Computer Science 209; Advances in Cryptology: Proc. Eurocrypt'84*, T. Beth, N. Cot, and I. Ingemarsson, Eds., Paris, France, April 9-11, 1984, pp. 99-109. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
378. D. Wagner, B. Schneier and J. Kelsey, "Cryptanalysis of ORYX", *Preprint*, May 4, 1997
379. M. Z. Wang and J. L. Massey, "The characteristics of all binary sequences with perfect linear complexity profiles," paper presented at Eurocrypt'86, Linkoping, Sweden, May 20-22, 1986.
380. M. Wang, "Linear complexity profiles and continued fractions," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'89*, J.-J. Quisquater and J. Vandewalle, Eds., Houthalen, Belgium, April 10-23, 1989, pp. 571-585. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
381. M.Z. Wang, "Algorithm for recursively generating irreducible polynomials", *Electronic Letters*, v 32 no 20 (26/9/96) p 1875
382. M. Ward. The arithmetical theory of linear recurring series. Transactions of the American Mathematical Society, 35:600-628, (July 1933).
383. A. F. Webster and S. E. Tavares, "On the design of S-boxes," in *Lecture Notes in Computer Science 218; Advances in Cryptology: Proc. Crypto'85*, H. C. Williams, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 18-22, 1985, pp. 523-534. Springer-Verlag, 1986.
384. B.M.M. de Weger, Approximation lattices of p-adic numbers, *J. Num. Th.* Vol. 24, 1986, pp. 281-292.
385. L.R. Welch and R.A. Scholtz, Continued fractions and Berlekamp's algorithm. *IEEE Trans. Info. Theory* vol. 25, 1979 pp. 19-27.
386. D.D. Wheeler, Problems with Chaotic Cryptosystems. *Cryptologia*. 1989. 13(3): 243-250.
387. D.D. Wheeler and R. Matthews, Supercomputer Investigations of a Chaotic Encryption Algorithm. *Cryptologia*. 1989. 15(2): 140-152.
388. D.J. Wheeler, "A Bulk Data Encryption Algorithm", In R. Anderson, editor, *Fast Software Encryption - Cambridge Security Workshop*, pages 125-134, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

-
389. B.A. Wichman and I.D. Hill, "An Efficient and Portable Pseudo-Random Number Generator", *Applied Statistics*, v. 31, 1982, pp. 188-190.
390. S. Wolfram, "Cryptography with cellular automata," in *Lecture Notes in Computer Science 218; Advances in Cryptology: Proc. Crypto'85*, H. C. Williams, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 18-22, 1985, pp. 429-432. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
391. C.-K. Wu, "Boolean functions in cryptology," Ph.D. thesis, Xidian University, China, 1993
392. G. Z. Xiao and J. L. Massey, "A spectral characterization of correlation-immune functions," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 34, no. 3, pp. 569-571, May 1988.
393. E. Yanovsky, "Protected communication method and system". European Patent No EP 667691, 1995.
394. A. C. Yao, "Theory and applications of trapdoor functions," *Proc. 25th IEEE Symp. Foundations Comput. Sci.*, New York, 1982.
395. R. Yarlagadda and J.E.Hershey, "Analysis and synthesis of bent sequences," *Proc. IEE*, vol. 136, pt. E., pp. 112-123, March 1989.
396. L. E. Zegers, Common bandwidth transmission of data signals and wide-band pseudonoise synchronization waveforms," *Philips Res. Reports Suppl.*, no. 4, 1972
397. K. Zeng and M. Huang, "On the linear syndrome method in cryptanalysis," in *LNCS 403; Advances in Cryptology: Crypto'88*, S. Goldwasser, Ed., Santa Barbara, CA, Aug. 21-25, 1987, pp. 469-478. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
398. K. Zeng, C.H. Yang, and T.R.N. Rao. An improved linear syndrome algorithm in cryptanalysis with applications. In A.J. Menezes and S.A. Vanstone, editors, *Advances in Cryptology - Crypto '90*, pages 34-47, Springer-Verlag, New York, 1990.
399. K. Zeng, C.H. Yang, and T.R.N. Rao. On the linear consistency test in cryptanalysis with applications. In G. Brassard, editor, *Advances in Cryptology - Crypto '89*, pages 167-174, Springer-Verlag, New York, 1990.
400. K. Zeng, C.H. Yang, D.Y. Wei, and T.R.N. Rao. Pseudorandom bit generators in stream-cipher cryptography. *Computer* n 24, pp 8-17, February 1991.
401. X.-M. Zhang and Y.Zheng, "On nonlinear resilient functions," *Advances in Cryptology - Eurocrypt '95, Lecture Notes in Computer Science*, vol.921, L.C. Guillou ed., Springer-Verlag, pp. 274-288, 1995
402. X.-M. Zhang and Y.Zheng, "Cryptographically resilient functions," *IEEE Transactions on Information Theory*, September 1997

403. Y. Zheng, T. Matsumoto, and H. Imai, "Impossibility and optimality results on constructing pseudorandom permutations," in *Lecture Notes in Computer Science 434; Advances in Cryptology; Proc. Eurocrypt'89*, 1989, pp. 412-422. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
404. N. Zierler, "Linear recurring sequences," *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 7, no.1, pp. 31-48, March 1959.
405. N. Zierler, "Primitive Trinomials Whose Degree Is a Mersenne Exponent," *Information and Control*, vol. 15, pp. 67-69, 1969.
406. N. Zierler and J. Brillhart, "On Primitive Trinomials (mod 2)," *Information and Control*, vol. 13, no. 6, pp. 541-544, Dec. 1968.
407. N. Zierler and W. H. Mills, "Products of linear recurring sequences," *J. Algebra*, vol. 27, no. 1, pp. 147-157, Oct. 1973.
408. J. Ziv and A. Lempel. On the complexity of finite sequences. *IEEE Trans. Information Theory*, 22:75-81, 1976.
409. J. Ziv and A. Lempel. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Trans. Information Theory*, 23(3):337-343, 1977.
410. M.V.Živković, "On two probabilistic decoding algorithms for binary linear codes", *IEEE Trans. Information Theory*, 37:1707-1716, Nov. 1991.
411. M.V.Živković, "An algorithm for the initial state reconstruction of the clock-controlled shift register", *IEEE Trans. Information Theory*, 37:1488-1490, Sep. 1991.

Англо-русский предметный указатель

| термин на английском языке | термин на русском языке | страница |
|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------|
| 1/p generator | генератор "1/p" | 252 |
| 2-adic complexity | 2-адическая сложность | 236 |
| 2-adic numbers | 2-адические числа | 210 |
| 2-adic span | 2-адический размах | 65,211,236 |
| 2-adic value (of a register) | 2-адическое значение (регистра) | 210,232 |
| A5 (algorithm) | криптоалгоритм А5 | 257 |
| adaptive algorithm | адаптивный алгоритм | 211,237 |
| additive generator | аддитивный генератор | 180,255 |
| additive natural stream cipher | аддитивный естественный поточный шифр | 297 |
| affine function | аффинная функция | 122,143 |
| algebraic degree (of a function) | алгебраическая степень функции | 122,142 |
| algebraic normal form (ANF) | алгебраическая нормальная форма (АНФ) | 54,142 |
| algorithm resetting | перезагрузка алгоритма | 96 |
| almost bent function | почти бент-функция | 109 |
| alternating step generator | генератор с перемежающимся шагом | 158 |
| ANF transformation | преобразование АНФ | 55,123 |
| asymmetric cipher | асимметричный шифр | 2 |
| asynchronous cipher | асинхронный шифр | 8 |
| augmented function | пополненная функция | 108 |
| autocorrelation function | функция автокорреляции | 36 |
| autocorrelation test | тест автокорреляции | 39 |
| balanced function | сбалансированная функция | 122,143 |
| balanced sequence | сбалансированная последовательность | 27,143 |
| base polynomial | базовый многочлен | 272 |
| Ben-Or algorithm | алгоритм Бен-Ора | 28 |
| bent mapping | бент-отображение | 133 |
| bent function | бент-функция | 109,120,129, 132,144 |
| bent sequence | бент-последовательность | 144 |
| bent triple | бент-тройка (Доббертина) | 137 |
| Berlekamp-Massey algorithm | алгоритм Берлекампа-Мэсси | 26,44 |
| binary derivative | двоичная производная | 262 |
| binary symmetric channel (BSC) | двоичный симметричный канал (ДСК) | 84,94 |
| birthday paradox | парадокс "дней рождений" | 259 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---|--|-------------|
| block cipher | блочный шифр | 2,141 |
| Blum-Micali generator | генератор Блюма-Микали | 324 |
| BRM-generator (Binary Rate Multiplier) | генератор BRM (перемножения двоичных степеней) | 156 |
| carry (operation) | перенос (операция) | 211 |
| cascade generator | каскадный генератор | 154,159,163 |
| CDPD | стандарт телефонной сотовой связи CDPD | 260 |
| cellular automaton | клеточный автомат | 250 |
| Chameleon | "Хамелеон" (криптоконструкция) | 283 |
| chaotic cipher | хаотический шифр | 319,334 |
| chosen-ciphertext attack | атака с подобранным шифртекстом | 1 |
| chosen-plaintext attack | атака с подобранным открытым текстом | 1 |
| cipher feedback mode | режим обратной связи от шифртекста | 8 |
| ciphertext | шифртекст | 1 |
| ciphertext-only attack | атака только по шифртексту | 1 |
| cleartext | открытый текст | 1 |
| clock-controlled shift register | регистр сдвига с неравномерным движением | 154 |
| combination generator, combiner | комбинирующий генератор, -- узел | 69,77 |
| conditional complementing shift register (CCSR) | регистр сдвига с условным дополнением (РССУД) | 287 |
| congruential generator | конгруэнтный генератор | 20 |
| connection polynomial | полином обратной связи | 25 |
| constrained edit distance (CED) | расстояние ограниченного редактирования (POP) | 212 |
| constrained embedding attack | атака ограниченным встраиванием | 191 |
| constrained Levenshtein distance | ограниченное расстояние Левенштейна | 190 |
| correlation attack | корреляционная атака | 80,84 |
| correlation coefficient | коэффициент корреляции | 127 |
| correlation immune function | корреляционно-иммунная функция | 119,122 |
| cost function | функция стоимости | 302 |
| Counterpane Systems | консалтинговая криптофирма Counterpane Systems | 279 |
| critical branching process | критический ветвящийся процесс | 259 |
| critical noise probability | критическая вероятность шума | 103 |
| cross-correlation function | функция кросс-корреляции | 84,127 |
| Crypto AG | Крипто АГ, криптофирма | 2,4,50 |
| cryptoanalysis | криптоанализ | 1 |
| cryptogram | криптограмма | 1 |
| cryptography | криптография | 1 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---------------------------------|--|------------|
| cryptology | криптология | 1 |
| cyclic code | циклический код | 90 |
| De Bruijn function | функция Де Брюина | 110 |
| De Bruijn property | свойство Де Брюина | 27 |
| De Bruijn sequence | последовательность Де Брюина | 27,50,252 |
| degenerate initial loading | вырожденное начальное заполнение | 234 |
| deletion rate | степень удалений | 197,201 |
| dense polynomial | плотный полином | 33 |
| [d,k]-self-decimation generator | генератор [d,k]-самоусечения | 161 |
| decimation of sequence | усечение последовательности | 154,190 |
| DES (Data Encryption Standard) | алгоритм блочного шифрования DES | 2,173 |
| difference decimation sequence | последовательность разностей усечения | 157 |
| difference set | множество разностей | 132 |
| differential cryptanalysis | дифференциальный криптоанализ | 297 |
| Diffie's randomized cipher | рандомизированный шифр Диффи | 330 |
| digital signal processor (DSP) | специализированный процессор DSP | 272 |
| directed acyclic word graph | направленный ациклический граф слов | 64 |
| direct matching algorithm | алгоритм непосредственного соответствия | 197 |
| discrepancy | расхождение | 65 |
| distance between functions | расстояние между функциями | 129 |
| divide-and-conquer attack | атака "разделяй-и-вскрывай" | 80,85 |
| D-transform | D-преобразование | 225 |
| ϵ -bias distribution | ϵ -смещенное распределение | 176 |
| Elementrix Technologies | Элементрикс Текнолоджиз, фирма | 334 |
| embedding attack | атака встраиванием | 196 |
| equidistant set | эквилидистантное множество | 114 |
| error-free information set | свободное от ошибок информационное мн-во | 103 |
| evolution program | эволюционная программа | 306 |
| exhaustive search | тотальный перебор | 81,162,178 |
| fast correlation attack | быстрая корреляционная атака | 81,86 |
| fast resetting | быстрая перезагрузка | 97 |
| feedback clock control | самоуправление движением от обратной связи | 154 |
| feedback integer | целое число обратной связи | 210,231 |
| feedback polynomial | полином обратной связи | 26 |
| feedback shift-register | регистр сдвига с обратной связью | 25 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|---|------------------|
| feedback shift-register with carry operation, FCSR | регистр сдвига с обратной связью с операцией переноса , PCOCP | 209 |
| Fibonacci register | регистр Фибоначчи | 29 |
| Fibonacci sequence | последовательность Фибоначчи | 181 |
| filter generator | фильтрующий генератор | 69-77 |
| finite state machine | машина с конечным числом состояний | 57 |
| Fish (algorithm) | алгоритм шифрования Fish | 180 |
| fitness function | функция соответствия | 306 |
| forward clock control | управление движением (битами другого регистра) | 154 |
| free energy minimisation | минимизация свободной энергии | 97 |
| frequency test | частотный тест | 38 |
| Fourier transform | преобразование Фурье | 51,175 |
| full adder | полный сумматор, сумматор с 3 входами | 231 |
| full positive difference set | полное множество положительных разностей | 114 |
| Galois register | регистр Галуа | 29,32 |
| GCHQ (Government Communications Head-Quarter) | ШКПС (Штаб-квартира правительственной связи Великобритании) | 259 |
| Geffe generator | генератор Геффе | 81,245 |
| generating function | производящая функция | 225 |
| generator matrix | порождающая матрица | 89 |
| generator polynomial | порождающий многочлен | 90 |
| genetic algorithm | генетический алгоритм | 302,306 |
| geometric sequence | геометрическая последовательность | 50,79 |
| Gifford generator | генератор Гиффорда | 256 |
| GOAL (algorithm) | криптоалгоритм GOAL | 277 |
| Golomb postulates | постулаты Голомба | 36 |
| Gretag AG | Гретаг АГ, криптофирма | 2,86 |
| GSM (Group Special Mobile) | система мобильной связи GSM | 257 |
| Hadamard matrix | адамарова матрица | 54,143 |
| Hadamard product | адамарово произведение | 60 |
| Hamming code | код Хэмминга | 91 |
| Hamming distance | расстояние Хэмминга | 86,89,120,143 |
| Hamming weight | вес Хэмминга | 52,79,89,123,143 |
| historical work characteristic (of cipher) | историческая рабочая характеристика (шифра) | 15 |
| IA (generator) | генератор IA | 280 |
| IBAA (generator) | генератор IBAA | 281 |
| ideally secure cryptosystem | идеально стойкая шифрсистема | 5,12,15 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|---|-----------------|
| IBM | Ай-Би-Эм, фирма | 160,263 |
| information set | информационное множество | 103 |
| information vector | информационный вектор | 91 |
| initialization vector | вектор инициализации | 293 |
| inner product generator | генератор скалярного перемножения | 249 |
| interlacing | переплетение (последовательностей) | 154,160 |
| interleaving | прослаивание (последовательностей) | 154,160 |
| interleaved sequence | прослоенная последовательность | 185 |
| intersection coefficient | коэффициент пересечения | 114 |
| intractability hypothesis | гипотеза о неразрешимости | 319 |
| inverse attack | инверсионная атака | 113 |
| iterative probabilistic decoding | итерационно-вероятностное декодирование | 94 |
| ISAAC (generator) | генератор ISAAC | 280 |
| Jennings generator | генератор Дженнинга | 247 |
| Kerckhoffs' assumption | допущение Керкхоффа | 1 |
| keystream | шифрующая последовательность | 3 |
| keystream generator | генератор гаммы | 3 |
| Khufu | криптоалгоритм Khufu (блочный) | 264 |
| knapsack generator | ранцевый генератор | 254 |
| Kronecker product | кронекеровское произведение | 143 |
| known-ciphertext attack | атака с известным шифртекстом | 1 |
| known-plaintext attack | атака с известным открытым текстом | 1 |
| lagged Fibonacci generator | запаздывающий генератор Фибоначчи | 180 |
| Lempel-Ziv complexity | сложность Лемпела-Зива | 64 |
| Levenshtein distance | расстояние Левенштейна | 193 |
| LFSR-sequence | РСЛОС-последовательность | 27 |
| linear complexity | линейная сложность (последовательности) | 26,43 |
| linear complexity profile | профиль линейной сложности | 56 |
| linear complexity profile test | тест на профиль линейной сложности | 57 |
| linear congruential generator (LCG) | линейный конгруэнтный генератор (ЛКГ) | 4,16,20 |
| linear feedback shift register (LFSR) | регистр сдвига с линейной обратной связью (РСЛОС) | 4,24-34, |
| linear function | линейная функция | 122,143 |
| linear cryptanalysis | линейный криптоанализ | 300 |
| linear recurrence sequence | линейная рекуррентная последовательность | 25 |
| linear sequential circuit approximation (LSCA) | аппроксимация линейной последовательной схемой (АЛПС) | 192,201,224,300 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--------------------------------|---|-------------|
| linear span | линейный размах | 26,43 |
| linear structure function | функция линейной структурой | 131 |
| local randomization | локальная рандомизация | 13 |
| lock-in effect | эффект запирания | 160,163 |
| look-up table | просмотровая таблица | 339 |
| <i>l</i> -sequence | <i>l</i> -последовательность | 211,240 |
| Maple | математический программный пакет Maple | 241 |
| Maurer's randomized cipher | рандомизированный шифр Маурера | 332 |
| maximal period generator | генератор максимального периода | 16 |
| maximum order complexity | сложность максимального порядка | 64 |
| MD5 (hash-algorithm) | алгоритм хэширования MD5 | 264 |
| meet-in-the-middle attack | атака "встреча посередине" | 104,259,290 |
| Mersenne exponent | экспонента Мерсенна | 273 |
| Metropolis algorithm | алгоритм Метрополиса | 303 |
| <i>m</i> -sequence | <i>m</i> -последовательность | 27,70 |
| <i>m</i> -sequence cascade | каскад <i>m</i> -последовательностей | 159 |
| multiplexer generator | мультиплексор-генератор | 247,290,296 |
| National Security Agency (NSA) | Агентство национальной безопасности США | 34,132 |
| next bit test (predictor) | тест следующего бита (предсказатель) | 320 |
| nonlinearity | нелинейность | 143 |
| non-uniform decimation | неравномерное усечение | 155 |
| objective function | целевая функция | 302 |
| Omnisec AG | Омнисек АГ, криптофирма | 2,39,317 |
| one-time pad | одноразовый гамм-блокнот | 3,13 |
| on-line algorithm | "он-лайнный" алгоритм | 65 |
| orthogonal code | ортогональный код | 90 |
| ORYX (algorithm) | криптоалгоритм ORYX | 278 |
| Pari | математический программный пакет Pari | 241 |
| parity check | проверка четности | 82 |
| parity-check matrix | матрица проверки четности | 90 |
| parity-check polynomial | многочлен проверки четности | 90 |
| Parseval equation | уравнение Парсеваля | 120 |
| partial joint probability | частичная совместная вероятность | 199 |
| perfect generator | совершенный генератор | 319,321 |
| perfectly secure cryptosystem | совершенно стойкая шифрсистема | 3,4,12 |
| perfect nonlinear function | совершенная нелинейная функция | 120,131 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|--|-----------|
| period of register | период регистра | 25 |
| period of sequence | период последовательности | 25,57 |
| Philips Crypto | Филипс Крипто, криптофирма | 55,64,268 |
| PIKE (algorithm) | криптоалгоритм PIKE | 276 |
| plaintext | открытый текст | 1 |
| Pless generator | генератор Плесса | 81,246 |
| pn-sequence, (pseudo-noise ...) | ПШП-последовательность, (псевдо-шумовая ...) | 36 |
| positive difference set | множество положительных разностей | 115 |
| POTP (Power One Time Pad) | "Мощное одноразовое гаммирование" | 319,334 |
| practical security | практическая стойкость | 15 |
| predictor (next bit test) | предсказатель (тест следующего бита) | 320 |
| primitive polynomial | примитивный многочлен | 27 |
| probabilistic constrained edit distance (PCED) | вероятностное расстояние ограниченного редактирования (ВРОР) | 191 |
| propagation criterion of degree k | критерий распространения степени k | 121,142 |
| pseudo-random function family | семейство псевдослучайных функций | 263 |
| pseudo-random sequence | псевдослучайная последовательность | 3 |
| pseudo-random sequence generator | генератор псевдослучайной последовательности | 3 |
| public key cryptosystem | шифрсистема с открытым ключом | 2 |
| quadratic residue generator | генератор квадратичных вычетов | 327 |
| quadratic span | квадратичный размах | 64 |
| R ³ Security Engineering | консалтинговая криптофирма R ³ Security Engineering | 4 |
| Racal Comsec | Рэйкл Комсек, криптофирма | 307 |
| randomized cipher | рандомизированный шифр | 318 |
| randomizer | рандомизатор | 6,318,329 |
| RC2 (algorithm) | криптоалгоритм RC2 (блочный) | 260 |
| RC4 (algorithm) | криптоалгоритм RC4 | 260 |
| regular clocking and no memory | схема без памяти с равномерным движением | 69 |
| regular decimation | равномерное усечение (последовательности) | 155 |
| repetition test | тест на повторения | 41 |
| resilient function | эластичная функция | 121,150 |
| resynchronization | ресинхронизация | 258,292 |
| reversion attack | реверсионная атака | 259 |
| ripple adder | сумматор со сквозным переносом | 231 |
| Rip van Winkle cipher | шифр "Рип ван Винкль" | 331 |
| root presence test | тест на присутствие корня | 73 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---------------------------------|--|-------------|
| RSA (algorithm) | алгоритм RSA | 322 |
| RSA generator | генератор RSA | 326 |
| running key generator | генератор гаммы | 3 |
| run test | тест серий | 39 |
| sampled sequence | сэмплированная (выборочная) последовательность | 190 |
| S-box | таблица замены (S-бокс) | 260,267,274 |
| Schnorr generator | генератор Шнора | 13 |
| scrambler | скрэмблер | 9 |
| SEAL (algorithm) | криптоалгоритм SEAL | 263 |
| secret key | секретный ключ | 1 |
| secret key cryptosystem | шифрсистема с секретным ключом | 2 |
| Secure Hash Algorithm (SHA) | алгоритм хэширования SHA | 265,277 |
| self-shrinking generator | самосжимающийся генератор | 162,184 |
| self-synchronizing cipher | самосинхронизирующийся шифр | 7,8,284 |
| semi-infinite sequence | полубесконечная последовательность | 42 |
| serial test | последовательный тест | 38 |
| sequence of function | последовательность функции | 122,143 |
| Shamir's generator | генератор Шамира | 322 |
| shrinking generator | сжимающий генератор | 154,160,173 |
| shrunk polynomial | сжатый полином | 201 |
| Siemens AG | Сименс АГ, фирма | 180 |
| simulated annealing | симулятор отжига (алгоритм) | 302 |
| singular device | сингулярное устройство | 161 |
| sliding window | скользящее окно | 103 |
| span | размах (последовательности) | 43 |
| sparse polynomial | прореженный полином | 33 |
| spectral radius | спектральный радиус | 139 |
| stage | ячейка регистра, ступень каскада | 32 |
| state | состояние (автомата) | 57,231 |
| statistical test | статистический тест | 321 |
| "step _{k,m} "-cascade | "шаг _{k,m} "-каскадов | 164 |
| step-once-twice generator | генератор один-два-шага | 156 |
| stop-and-go generator | генератор стоп-вперед | 156 |
| stream cipher | поточный шифр | 2 |
| strict avalanche criterion, SAC | строгий лавинный критерий, СЛК | 121,141 |
| substitution probability | вероятность замены | 199 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---|--|----------------|
| suffix tree | дерево суффиксов | 64,66 |
| summation combiner | суммирующий комбинирующий узел, сумматор | 65,128,213,253 |
| switch controlled feedback shift register | регистр сдвига с коммутируемой обратной связью | 270 |
| Sylvester-Hadamard matrix | матрица Сильвестра-Адамара | 143 |
| symmetric cipher | симметричный шифр | 2 |
| synchronization loss | потеря синхронизации | 292 |
| synchronous cipher | синхронный шифр | 7 |
| taps | точки съема, отводы | 25,174 |
| template | шаблон | 177 |
| theoretical security | теоретическая стойкость | 14 |
| threshold generator | пороговый генератор | 248 |
| total correlation | суммарная корреляция | 126,127 |
| truncated congruential generator | усеченный конгруэнтный генератор | 20 |
| truth table of function | таблица истинности функции | 122,143 |
| Turing-Kolmogorov complexity | сложность Тьюринга-Колмогорова | 318 |
| Turing machine | машина Тьюринга | 318 |
| unconditionally secure cryptosystem | безусловно стойкая шифрсистема | 12 |
| unicity distance | расстояние единственности | 12 |
| uniform decimation | равномерное усечение | 155 |
| uniformity test | тест равновероятности | 38 |
| universal test | универсальный тест | 39 |
| variable connections | переменные точки съема (регистра) | 174 |
| Vernam cipher | шифр Вернама | 3,10,13 |
| WAKE (algorithm) | криптоалгоритм WAKE | 275 |
| Walsh-Hadamard matrix | матрица Уолша-Адамара | 143 |
| Walsh transformation | преобразование Уолша | 53,120,123,215 |
| Wolfram generator | генератор Вольфрама | 250 |
| work characteristic (of cipher) | рабочая характеристика (шифра) | 15,318 |
| Ziv-Lempel compression algorithm | Алгоритм сжатия данных Зива-Лемпела | 268 |

Русско-английский предметный указатель

| термин на русском языке | термин на английском языке | страница |
|---|--|-----------------|
| 2-адическая сложность | 2-adic complexity | 236 |
| 2-адические числа | 2-adic numbers | 210 |
| 2-адический размах | 2-adic span | 65,211,236 |
| 2-адическое значение (регистра) | 2-adic value (of a register) | 210,232 |
| Агентство национальной безопасности США | National Security Agency (NSA) | 34,132 |
| адамарова матрица | Hadamard matrix | 54,143 |
| адамарово произведение | Hadamard product | 60 |
| адаптивный алгоритм | adaptive algorithm | 211,237 |
| аддитивный генератор | additive generator | 180,255 |
| аддитивный естественный поточный шифр | additive natural stream cipher | 297 |
| Ай-Би-Эм, фирма | IBM | 160,263 |
| алгебраическая нормальная форма (АНФ) | algebraic normal form (ANF) | 54,142 |
| алгебраическая степень функции | algebraic degree (of a function) | 122,142 |
| алгоритм RSA | RSA (algorithm) | 322 |
| алгоритм Бен-Ора | Ben-Or algorithm | 28 |
| алгоритм Берлекампа-Мэсси | Berlekamp-Massey algorithm | 26,44 |
| алгоритм блочного шифрования DES | DES (Data Encryption Standard) | 2,173 |
| алгоритм Метрополиса | Metropolis algorithm | 303 |
| алгоритм непосредственного соответствия | direct matching algorithm | 197 |
| Алгоритм сжатия данных Зива-Лемпела | Ziv-Lempel compression algorithm | 268 |
| алгоритм хэширования MD5 | MD5 (hash-algorithm) | 264 |
| алгоритм хэширования SHA | Secure Hash Algorithm (SHA) | 265,277 |
| алгоритм шифрования Fish | Fish (algorithm) | 180 |
| аппроксимация линейной последовательной схемой (АЛПС) | linear sequential circuit approximation (LSCA) | 192,201,224,300 |
| асимметричный шифр | asymmetric cipher | 2 |
| асинхронный шифр | asynchronous cipher | 8 |
| атака "встреча посередине" | meet-in-the-middle attack | 104,259,290 |
| атака "разделяй-и-вскрывай" | divide-and-conquer attack | 80,85 |
| атака встраиванием | embedding attack | 196 |
| атака ограниченным встраиванием | constrained embedding attack | 191 |
| атака с известным открытым текстом | known-plaintext attack | 1 |
| атака с известным шифртекстом | known-ciphertext attack | 1 |
| атака с подобранным открытым текстом | chosen-plaintext attack | 1 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|--|----------------------|
| атака с подобранным шифртекстом | chosen-ciphertext attack | 1 |
| атака только по шифртексту | ciphertext-only attack | 1 |
| аффинная функция | affine function | 122,143 |
| базовый многочлен | base polynomial | 272 |
| безусловно стойкая шифрсистема | unconditionally secure cryptosystem | 12 |
| бент-отображение | bent mapping | 133 |
| бент-последовательность | bent sequence | 144 |
| бент-тройка (Доббертина) | bent triple | 137 |
| бент-функция | bent function | 109,120,129, 132,144 |
| блочный шифр | block cipher | 2,141 |
| быстрая корреляционная атака | fast correlation attack | 81,86 |
| быстрая перезагрузка | fast resetting | 97 |
| вектор инициализации | initialization vector | 293 |
| вероятностное расстояние ограниченного редактирования (ВРОР) | probabilistic constrained edit distance (PCED) | 191 |
| вероятность замены | substitution probability | 199 |
| вес Хэмминга | Hamming weight | 52,79,89,123,143 |
| вырожденное начальное заполнение | degenerate initial loading | 234 |
| генератор "1/p" | 1/p generator | 252 |
| генератор [d,k]-самоусечения | [d,k]-self-decimation generator | 161 |
| генератор BRM (перемножения двоичных степеней) | BRM-generator (Binary Rate Multiplier) | 156 |
| генератор IA | IA (generator) | 280 |
| генератор IBAA | IBAA (generator) | 281 |
| генератор ISAAC | ISAAC (generator) | 280 |
| генератор RSA | RSA generator | 326 |
| генератор Блюма-Микали | Blum-Micali generator | 324 |
| генератор Вольфрама | Wolfram generator | 250 |
| генератор гаммы | keystream generator | 3 |
| генератор гаммы | running key generator | 3 |
| генератор Геффе | Geffe generator | 81,245 |
| генератор Гиффорда | Gifford generator | 256 |
| генератор Дженнингса | Jennings generator | 247 |
| генератор квадратичных вычетов | quadratic residue generator | 327 |
| генератор максимального периода | maximal period generator | 16 |
| генератор один-два-шага | step-once-twice generator | 156 |
| генератор Плесса | Pless generator | 81,246 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|--|-------------|
| генератор псевдослучайной последовательности | pseudo-random sequence generator | 3 |
| генератор с перемежающимся шагом | alternating step generator | 158 |
| генератор скалярного перемножения | inner product generator | 249 |
| генератор стоп-вперед | stop-and-go generator | 156 |
| генератор Шамира | Shamir's generator | 322 |
| генератор Шнора | Schnorr generator | 13 |
| генетический алгоритм | genetic algorithm | 302,306 |
| геометрическая последовательность | geometric sequence | 50,79 |
| гипотеза о неразрешимости | intractability hypothesis | 319 |
| Гретэг АГ, криптофирма | Gretag AG | 2,86 |
| двоичная производная | binary derivative | 262 |
| двоичный симметричный канал (ДСК) | binary symmetric channel (BSC) | 84,94 |
| дерево суффиксов | suffix tree | 64,66 |
| дифференциальный криптоанализ | differential cryptanalysis | 297 |
| допущение Керкхоффа | Kerckhoffs' assumption | 1 |
| D-преобразование | D-transform | 225 |
| запаздывающий генератор Фибоначчи | lagged Fibonacci generator | 180 |
| идеально стойкая шифрсистема | ideally secure cryptosystem | 5,12,15 |
| инверсионная атака | inverse attack | 113 |
| информационное множество | information set | 103 |
| информационный вектор | information vector | 91 |
| историческая рабочая характеристика (шифра) | historical work characteristic (of cipher) | 15 |
| итерационно-вероятностное декодирование | iterative probabilistic decoding | 94 |
| каскад m-последовательностей | m-sequence cascade | 159 |
| каскадный генератор | cascade generator | 154,159,163 |
| квадратичный размах | quadratic span | 64 |
| клеточный автомат | cellular automaton | 250 |
| код Хэмминга | Hamming code | 91 |
| комбинирующий генератор, -- узел | combination generator, combiner | 69,77 |
| конгруэнтный генератор | congruential generator | 20 |
| консалтинговая криптофирма R ³ Security Engineering | R ³ Security Engineering | 4 |
| консалтинговая криптофирма Counterpane Systems | Counterpane Systems | 279 |
| корреляционная атака | correlation attack | 80,84 |
| корреляционно-иммунная функция | correlation immune function | 119,122 |
| коэффициент корреляции | correlation coefficient | 127 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|-------------------------------------|---------|
| коэффициент пересечения | intersection coefficient | 114 |
| Крипто АГ, криптофирма | Crypto AG | 2,4,50 |
| криптоалгоритм GOAL | GOAL (algorithm) | 277 |
| криптоалгоритм Khufu (блочный) | Khufu | 264 |
| криптоалгоритм ORYX | ORYX (algorithm) | 278 |
| криптоалгоритм PIKE | PIKE (algorithm) | 276 |
| криптоалгоритм RC2 (блочный) | RC2 (algorithm) | 260 |
| криптоалгоритм RC4 | RC4 (algorithm) | 260 |
| криптоалгоритм SEAL | SEAL (algorithm) | 263 |
| криптоалгоритм WAKE | WAKE (algorithm) | 275 |
| криптоалгоритм A5 | A5 (algorithm) | 257 |
| криптоанализ | cryptoanalysis | 1 |
| криптограмма | cryptogram | 1 |
| криптография | cryptography | 1 |
| криптология | cryptology | 1 |
| критерий распространения степени k | propagation criterion of degree k | 121,142 |
| критическая вероятность шума | critical noise probability | 103 |
| критический ветвящийся процесс | critical branching process | 259 |
| кронекеровское произведение | Kronecker product | 143 |
| линейная рекуррентная последовательность | linear recurrence sequence | 25 |
| линейная сложность (последовательности) | linear complexity | 26,43 |
| линейная функция | linear function | 122,143 |
| линейный конгруэнтный генератор (ЛКГ) | linear congruential generator (LCG) | 4,16,20 |
| линейный криптоанализ | linear cryptanalysis | 300 |
| линейный размах | linear span | 26,43 |
| локальная рандомизация | local randomization | 13 |
| математический программный пакет Maple | Maple | 241 |
| математический программный пакет Pari | Pari | 241 |
| матрица проверки четности | parity-check matrix | 90 |
| матрица Сильвестра-Адамара | Sylvester-Hadamard matrix | 143 |
| матрица Уолша-Адамара | Walsh-Hadamard matrix | 143 |
| машина с конечным числом состояний | finite state machine | 57 |
| машина Тьюринга | Turing machine | 318 |
| минимизация свободной энергии | free energy minimisation | 97 |
| многочлен проверки четности | parity-check polynomial | 90 |
| множество положительных разностей | positive difference set | 115 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|----------------------------------|-------------|
| множество разностей | difference set | 132 |
| "Мощное одноразовое гаммирование" | POTP (Power One Time Pad) | 319,334 |
| мультиплексор-генератор | multiplexer generator | 247,290,296 |
| направленный ациклический граф слов | directed acyclic word graph | 64 |
| нелинейность | nonlinearity | 143 |
| неравномерное усечение | non-uniform decimation | 155 |
| ограниченное расстояние Левенштейна | constrained Levenshtein distance | 190 |
| одноразовый гамм-блокнот | one-time pad | 3,13 |
| Омнисек АГ, криптофирма | Omnisec AG | 2,39,317 |
| "он-лайнный" алгоритм | on-line algorithm | 65 |
| ортогональный код | orthogonal code | 90 |
| открытый текст | cleartext | 1 |
| открытый текст | plaintext | 1 |
| парадокс "дней рождений" | birthday paradox | 259 |
| перезагрузка алгоритма | algorithm resetting | 96 |
| переменные точки съема (регистра) | variable connections | 174 |
| перенос (операция) | carry (operation) | 211 |
| переплетение (последовательностей) | interlacing | 154,160 |
| период последовательности | period of sequence | 25,57 |
| период регистра | period of register | 25 |
| плотный полином | dense polynomial | 33 |
| полином обратной связи | connection polynomial | 25 |
| полином обратной связи | feedback polynom | 26 |
| полное множество положительных разностей | full positive difference set | 114 |
| полный сумматор, сумматор с 3 входами | full adder | 231 |
| полубесконечная последовательность | semi-infinite sequence | 42 |
| пополненная функция | augmented function | 108 |
| пороговый генератор | threshold generator | 248 |
| порождающая матрица | generator matrix | 89 |
| порождающий многочлен | generator polynomial | 90 |
| последовательность Де Брюина | De Bruijn sequence | 27,50,252 |
| последовательность разностей усечения | difference decimation sequence | 157 |
| последовательность Фибоначчи | Fibonacci sequence | 181 |
| последовательность функции | sequence of function | 122,143 |
| последовательный тест | serial test | 38 |
| постулаты Голomba | Golomb postulates | 36 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|---|----------------|
| потеря синхронизации | synchronization loss | 292 |
| поточный шифр | stream cipher | 2 |
| почти бент-функция | almost bent function | 109 |
| практическая стойкость | practical security | 15 |
| предсказатель (тест следующего бита) | predictor (next bit test) | 320 |
| преобразование АНФ | ANF transformation | 55,123 |
| преобразование Уолша | Walsh transformation | 53,120,123,215 |
| преобразование Фурье | Fourier transform | 51,175 |
| примитивный многочлен | primitive polynom | 27 |
| проверка четности | parity check | 82 |
| производящая функция | generating function | 225 |
| прореженный полином | sparse polynomial | 33 |
| прослаивание (последовательностей) | interleaving | 154,160 |
| прослоенная последовательность | interleaved sequence | 185 |
| просмотровая таблица | look-up table | 339 |
| профиль линейной сложности | linear complexity profile | 56 |
| псевдослучайная последовательность | pseudo-random sequence | 3 |
| ППШ-последовательность, (псевдо-шумовая ...) | pn-sequence, (pseudo-noise ...) | 36 |
| рабочая характеристика (шифра) | work characteristic (of cipher) | 15,318 |
| равномерное усечение | uniform decimation | 155 |
| равномерное усечение (последовательности) | regular decimation | 155 |
| размах (последовательности) | span | 43 |
| рандомизатор | randomizer | 6,318,329 |
| рандомизированный шифр | randomized cipher | 318 |
| рандомизированный шифр Диффи | Diffie's randomized cipher | 330 |
| рандомизированный шифр Маурера | Maurer's randomized cipher | 332 |
| ранцевый генератор | knapsack generator | 254 |
| расстояние единственности | unicity distance | 12 |
| расстояние Левенштейна | Levenshtein distance | 193 |
| расстояние между функциями | distance between functions | 129 |
| расстояние ограниченного редактирования (POP) | constrained edit distance (CED) | 212 |
| расстояние Хэмминга | Hamming distance | 86,89,120,143 |
| расхождение | discrepancy | 65 |
| реверсионная атака | reversion attack | 259 |
| регистр Галуа | Galois register | 29,32 |
| регистр сдвига с коммутируемой обратной связью | switch controlled feedback shift register | 270 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---|--|-------------|
| регистр сдвига с линейной обратной связью (РСЛОС) | linear feedback shift register (LFSR) | 4,24-34, |
| регистр сдвига с неравномерным движением | clock-controlled shift register | 154 |
| регистр сдвига с обратной связью | feedback shift-register | 25 |
| регистр сдвига с обратной связью с операцией переноса , PCОСП | feedback shift-register with carry operation, FCSR | 209 |
| регистр сдвига с условным дополнением (РССУД) | conditional complementing shift register (CCSR) | 287 |
| регистр Фибоначчи | Fibonacci register | 29 |
| режим обратной связи от шифртекста | cipher feedback mode | 8 |
| ресинхронизация | resynchronization | 258,292 |
| РСЛОС-последовательность | LFSR-sequence | 27 |
| Рэйкл Комсек, криптофирма | Racal Comsec | 307 |
| самосжимающийся генератор | self-shrinking generator | 162,184 |
| самосинхронизирующийся шифр | self-synchronizing cipher | 7,8,284 |
| самоуправление движением от обратной связи | feedback clock control | 154 |
| сбалансированная последовательность | balanced sequence | 27,143 |
| сбалансированная функция | balanced function | 122,143 |
| свободное от ошибок информационное мн-во | error-free information set | 103 |
| свойство Де Брюина | De Bruijn property | 27 |
| секретный ключ | secret key | 1 |
| семейство псевдослучайных функций | pseudo-random function family | 263 |
| сжатый полином | shrunk polynomial | 201 |
| сжимающий генератор | shrinking generator | 154,160,173 |
| Сименс АГ, фирма | Siemens AG | 180 |
| симметричный шифр | symmetric cipher | 2 |
| симулятор отжига (алгоритм) | simulated annealing | 302 |
| сингулярное устройство | singular device | 161 |
| синхронный шифр | synchronous cipher | 7 |
| система мобильной связи GSM | GSM (Group Special Mobile) | 257 |
| скользящее окно | sliding window | 103 |
| скрэмблер | scrambler | 9 |
| сложность Лемпела-Зива | Lempel-Ziv complexity | 64 |
| сложность максимального порядка | maximum order complexity | 64 |
| сложность Тьюринга-Колмогорова | Turing-Kolmogorov complexity | 318 |
| совершенная нелинейная функция | perfect nonlinear function | 120,131 |
| совершенно стойкая шифрсистема | perfectly secure cryptosystem | 3,4,12 |
| совершенный генератор | perfect generator | 319,321 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|--|----------------------------------|----------------|
| состояние (автомата) | state | 57,231 |
| спектральный радиус | spectral radius | 139 |
| специализированный процессор DSP | digital signal processor (DSP) | 272 |
| стандарт телефонной сотовой связи CDPD | CDPD | 260 |
| статистический тест | statistical test | 321 |
| степень удалений | deletion rate | 197,201 |
| строгий лавинный критерий, СЛК | strict avalanche criterion, SAC | 121,141 |
| суммарная корреляция | total correlation | 126,127 |
| сумматор со сквозным переносом | ripple adder | 231 |
| суммирующий комбинирующий узел, сумматор | summation combiner | 65,128,213,253 |
| схема без памяти с равномерным движением | regular clocking and no memory | 69 |
| сэмплированная (выборочная) последовательность | sampled sequence | 190 |
| таблица замены (S-бокс) | S-box | 260,267,274 |
| таблица истинности функции | truth table of function | 122,143 |
| теоретическая стойкость | theoretical security | 14 |
| тест автокорреляции | autocorrelation test | 39 |
| тест на повторения | repetition test | 41 |
| тест на присутствие корня | root presence test | 73 |
| тест на профиль линейной сложности | linear complexity profile test | 57 |
| тест равномерности | uniformity test | 38 |
| тест серий | run test | 39 |
| тест следующего бита (предсказатель) | next bit test (predictor) | 320 |
| тотальный перебор | exhaustive search | 81,162,178 |
| точки съема, отводы | taps | 25,174 |
| универсальный тест | universal test | 39 |
| управление движением (битами другого регистра) | forward clock control | 154 |
| эластичная функция | resilient function | 121,150 |
| уравнение Парсеваля | Parseval equation | 120 |
| усечение последовательности | decimation of sequence | 154,190 |
| усеченный конгруэнтный генератор | truncated congruential generator | 20 |
| Филипс Крипто, криптофирма | Philips Crypto | 55,64,268 |
| фильтрующий генератор | filter generator | 69-77 |
| функция автокорреляции | autocorrelation function | 36 |
| функция Де Брюина | De Bruijn function | 110 |
| функция кросс-корреляции | cross-correlation function | 84,127 |
| функция линейной структурой | linear structure function | 131 |

Библиография и индекс терминов

| | | |
|---|--|---------|
| функция соответствия | fitness function | 306 |
| функция стоимости | cost function | 302 |
| "Хамелеон" (криптоконструкция) | Chameleon | 283 |
| хаотический шифр | chaotic cipher | 319,334 |
| целевая функция | objective function | 302 |
| целое число обратной связи | feedback integer | 210,231 |
| циклический код | cyclic code | 90 |
| частичная совместная вероятность | partial joint probability | 199 |
| частотный тест | frequency test | 38 |
| шаблон | template | 177 |
| "шаг _{k,m} "-каскад | "step _{k,m} "-cascade | 164 |
| шифр "Рип ван Винкль" | Rip van Winkle cipher | 331 |
| шифр Вернама | Vernam cipher | 3,10,13 |
| шифрсистема с открытым ключом | public key cryptosystem | 2 |
| шифрсистема с секретным ключом | secret key cryptosystem | 2 |
| шифртекст | ciphertext | 1 |
| шифрующая последовательность | keystream | 3 |
| ШКПС (Штаб-квартира правительственной связи Великобритании) | GCHQ (Government Communications Head-Quarters) | 259 |
| эволюционная программа | evolution program | 306 |
| эквилистантное множество | equidistant set | 114 |
| экспонента Мерсенна | Mersenne exponent | 273 |
| Элементрикс Текнолоджиз, фирма | Elementrix Technologies | 334 |
| <i>l</i> -последовательность | <i>l</i> -sequence | 211,240 |
| <i>m</i> -последовательность | <i>m</i> -sequence | 27,70 |
| ϵ -смещенное распределение | ϵ -bias distribution | 176 |
| эффект запираания | lock-in effect | 160,163 |
| ячейка регистра, ступень каскада | stage | 32,159 |