El Drago: del juego a las funciones

Lluís Mora i Cañellas

1. Introducción

"El hombre nació para jugar, fue el pecado original el que lo condenó a trabajar".

La materia de matemáticas tiene una bien ganada fama de difícil, superarla requiere actualmente trabajo, trabajo y más trabajo. Parece como si el pecado original nos hubiera obligado a enseñar matemáticas en las escuelas. Ya va siendo hora que esta enraizada idea cambie, o más bien, se transforme en una nueva que conjugue el juego con el trabajo. El juego atrae, gusta a todo el mundo, por eso puede ser una experiencia muy formativa introducir conceptos matemáticos a traves de los juegos, así conseguiremos como mínimo, solucionar uno de los problemas fundamentales de la matemática: la motivación de los alumnos.

Este artículo pretende ser un ejemplo de lo expuesto anteriormente, a traves de un juego muy simple, EL DRAGO, introduciremos a los alumnos en el importante tema de las funciones matemáticas, pasando al mismo tiempo por el estudio de las series de números y preparando el terreno para introducir conceptos de teoria de grafos.

EL DRAGO es un juego muy simple, para desarrollarlo solo necesitamos una hoja de papel, un lápiz y mucha imaginación. Dice Martin Gardner en uno de sus libros, "los juegos matemáticos son útiles gracias a que partiendo de elementos muy simples, podemos llegar a obtener grandes resultados matemáticos", y en este sentido el DRAGO se adapta perfectamente a lo que le pedimos a un juego.

2. El juego: mecanismo

El DRAGO es un juego de competición para dos jugadores, el material necesario para jugarlo consiste en un papel y un lápiz.

El juego se inicia decidiendo los dos jugadores un número de puntos, entre 3 y 10, que dibujaran sobre la hoja de papel. Una vez dibujados, corresponde decidir cúal será el orden en que intervendran, esto se puede hacer mediante un sorteo.

Imaginemos que ambos jugadores han decidido empezar la partida con el mínimo de puntos posible, tres. El primer jugador debe unir dos de los puntos con una línea y después dibujar sobre esta línea un nuevo punto (fig1).

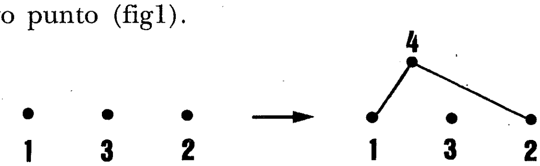

Figura 1

Siguiendo el mismo proceso los jugadores iran alternando sus jugadas hasta que no quede ninguna posiblidad de movimiento.

Las tres únicas reglas que deben cumplir los jugadores son:

1- Si de un punto salen tres lineas, este punto queda inutilizado para el juego.(fig.2)

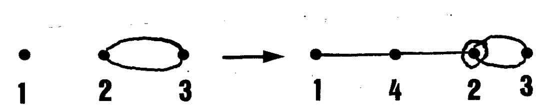

Figura 2

2- Podemos dibujar lineas entre dos puntos útiles o entre un punto y el mismo, si de éste solo sale una línea o ninguna.(fig.3)

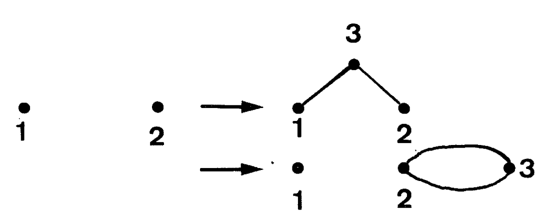

Figura 3

3- Las líneas no pueden cruzarse por ningún motivo.

El objetivo del juego consiste en ser el último jugador capaz de dibujar una línea entre dos puntos.

El desarrollo de una partida, a partir de tres puntos, puede ser el siguiente (fig.4):

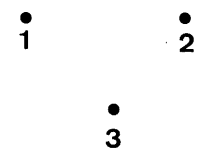

Figura 4

El primer jugador une los puntos (1) y (2) y dibuja un nuevo punto (4).(fig.5)

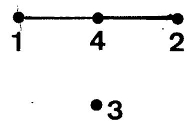

Figura 5

El segundo jugador decide trazar una línea que vaya del punto (3) a sí mismo dibujando el nuevo punto (5).(fig.6)

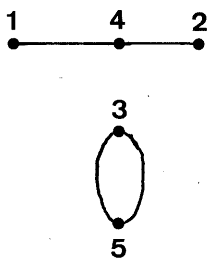

Figura 6

Hasta ahora todos los puntos son útiles, ya que de ellos salen como máximo dos lineas. El primer jugador dibuja ahora una linea de (3) a (5) por el interior, gracias a la regla número 3 el nuevo punto (6) queda bloqueado ya que la única linea que podria trazarse sin cortar a ninguna otra, lo uniría consigo mismo, dando como resultado un punto del que salen cuatro líneas, lo que incumple la regla número tres (fig.7)

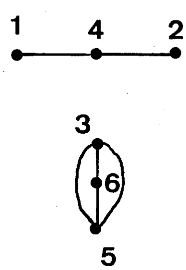

Figura 7

La siguiente jugada consistiría en unir los puntos (1) y (4) dejando el (4) inutilizado (fig.8).

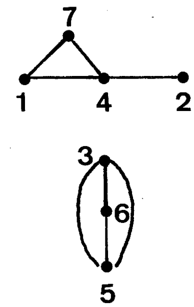

Figura 8

El próximo movimiento puede ser unir el punto (1) con el (2) quedando fuera del juego el punto (1), (fig.9)

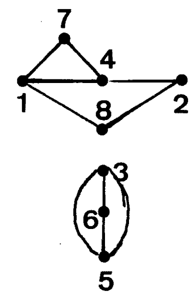

Figura 9

Para continuar jugando quedan tres puntos disponibles (2), (8) y (7). Ahora el segundo jugador tiene dos opciones:

a) unir los puntos (8) y (2) a traves del interior del polígono de vértices (1), (4), (2) y (8). De esta manera conseguiría ganar la pa- tida debido a que los puntos restantes (7) y (9) solo podrían unirse cruzando otras lineas, y

b) unir los puntos (7) y (8) o (2) y (7), jugada que llevaría al próximo jugador a la victoria en el próximo movimientò.

El jugador sigue la jugada a) con lo cual gana la partida. La distribución final del juego corresponde a la (fig.10)

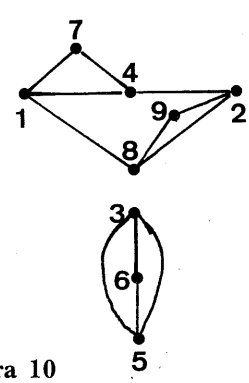

Figura 10

3. Análisis del juego

Una vez que los alumnos han adquirido el mecanismo del juego, se les plantea el análisis matemático del mismo. Este análisis consiste en responder a la siguiente pregunta:

¿Que estrategia debe seguir un jugador para vencer en una partida de DRAGO?

Probablemente esta pregunta despistará a la mayor parte del alumnado. Será necesario que el profesor encamine el procedimiento a seguir, es conveniente que esta "pista" se formule en términos de pregunta:

Dado un número n de puntos, ¿Cuál es el mínimo número de jugadas con los que se puede terminar la partida?, pregunta que irá acompañada de ¿Cuál es el máximo número de jugadas?

La resolución de este problema debe realizarse en dos etapas, primero una particularización, en la cual los alumnos resolveran casos sencillos, un punto de salida, dos, tres... hasta tener suficientes datos para analizar el problema. Una vez se tengan los resultados se procede a su generalización, intentando obtener una fórmula general que resuma el problema y responda a la pregunta formulada.

Estudiando el problema para los casos de 1, 2 y 3 puntos obtenemos los siguientes resultados:

nº de puntos	jugadas mínimas	jugadas máximas
1	2	2
2	4	5
3	6	8

Para obtener estos resultados los alumnos deben darse cuenta que el número de jugadas mínimas se obtiene, cuando se bloquean, se dejan sin completar, tantos puntos como puntos tenemos de salida. El número máximo de jugadas se obtendrá cuando sólo dejemos un punto, el último, sin completar.

Cuando tenemos un sólo punto, estamos delante de un caso trivial, las dos soluciones són iguales. Pero el caso de 2 puntos donde las soluciones son distintas puede ilustrar lo dicho en el párrafo anterior.

A partir de ahora el juego debe dejarse de lado ya que su resolución se hará a partir de la tabla de resultados obtenida con los casos sencillos.

Es fácil ver que las jugadas mínimas responden a la sucesión de los números pares, por tanto el término general de la sucesión será de 2n. Ya tenemos la respuesta a la primera pregunta, ¿cuál es el mínimo de jugadas con que puede terminar una partida si empezamos a jugar a partir de n puntos? 2n

Respondamos ahora al número máximo de jugadas con que puede terminar una partida que empiece con n puntos. Para hallar el término general de la segunda sucesión, 2, 5, 8,..., és fácil ver que la diferéncia entre términos consecutivos és 3, por tanto los siguientes términos de la série seran 11, 14 .... En este punto podemos introducir el concepto de recurréncia para hallar el término general.

Llamando a_1 al primer término, a_2 al segundo y a_3 al tercero, tenemos que:

$$a_2 = a_1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3$$

De donde sera fácil ver que $a_3 = a_1 + 2.3$, y deduciremos que el término general de la serie es:

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

Como sabemos que $a_1=3$ podemos arreglar la fórmula anterior y dejarla como

$$a_n = 3_n - 1$$

Para fortalecer en los alumnos los conceptos de sucesiones estudiados podemos proponer, dentro del juego, el estudio del número de puntos dibujados al final de la partida. Son dos sucesiones de términos generales 3n y 4n-1, que además de reforzar el traba-

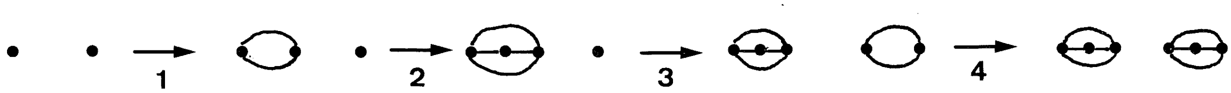

Figura 11

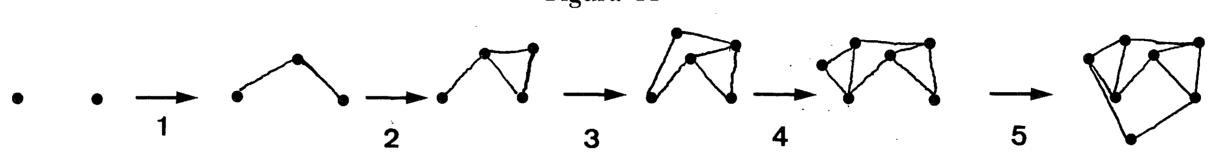

Figura 12

jo sobre sucesiones podrán ser utilizados para el trabajo posterior sobre funciones.

Una posterior ampliación del estudio de las sucesiones puede aparecer si planteamos a los alumnos el cálculo de la suma de los diez primeros términos de cada una de las cuatro sucesiones, con el fin de llegar al resultado

$$S = (a1+a10).10/2$$

Después del análisis matemático, podemos abordar el problema de la estrategia a seguir para vencer en este juego. Habrá que distinguir dos casos,si somos el primer jugador o si somos el segundo.

El segundo jugador tiene más posibilidades de victoria dado que puede enfocar el juego de tres maneras distintas:

1) Buscar el mínimo de jugadas, en este caso no importa el número de puntos con que iniciemos el juego, ya que todos son pares.

2) Buscar el número máximo de jugadas si el número inicial de puntos es impar, dado que en estos casos el número de jugadas es par.

3) Entre 4 y 10 puntos puede buscar un número intermedio de jugadas pár que le llevará a la victoria.

En los casos restantes el jugador ganador será el jugador que inicie el juego.

4. Funciones

En el estudio del juego del DRAGO, intervienen dos variables, el número de puntos que usamos para iniciar la partida y el número de jugadas, máximas o mínimas, con las que finaliza esta. Existe una clara dependéncia entre la segunda y la primera, decimos que el número de jugadas con las que finaliza la partida es función del número de puntos con los que iniciamos la partida.

El concepto de función queda ahora introducido como una dependencia entre dos variables, y la fórmula hallada anteriormente como una manera matemática de expresar esta dependencia.

Una formula es un medio que tenemos para resumir información, no es el único ni el mejor. Uno de los más utilizados en la mayoría de asignaturas es el gráfico. Todos sabrán ya que es un gráfico y como se construye, pero muchas veces su significado pasa desapercibido. Para conseguir subsanar este problema, podemos plantear a los alumnos que construyan un gráfico que refleje la dependencia entre el número de puntos y el número de jugadas, máximas y mínimas.

El principal problema que puede aparecer al hacer el gráfico será, en que eje deben colocar cada una de las dos variables. Situaremos la variable independiente, número de puntos, en el eje de abcisas, y la variable dependiente, número de jugadas, en el eje de ordenadas (figura 13).

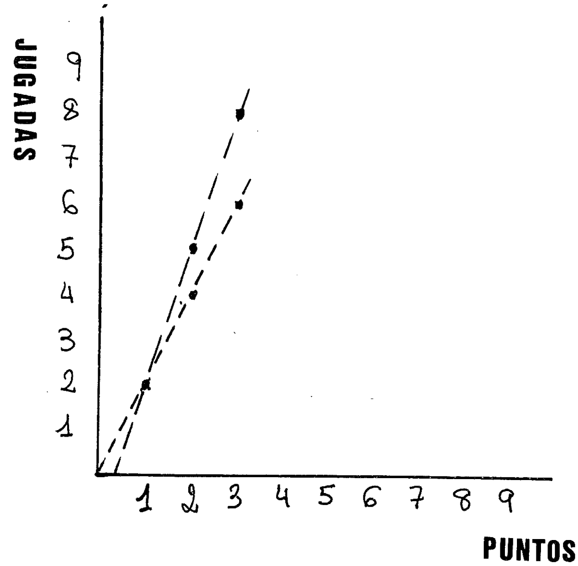

Figura 13

Una vez construido el gráfico y dado que los alumnos suelen unir invariablemente todos los puntos representados, podemos formular la pregunta: ¿Es lícito unir los puntos del gráfico mediante una línea continua?

Dado que las dos variables solo cogen valores en el campo de los naturales, punto en que introduciremos el concepto de dominio y recorrido de una función, unir los puntos del gráfico significa que el número de puntos a partir de lo cuales puede iniciarse la partida, puede ser un número decimal, lo cual es imposible, y lo mismo sucede con el número de jugadas con las que puede finalizar la partida.

Ya tenemos todos asumido que estamos trabajando con una función que relaciona dos variables que cogen valores en el campo de los números naturales, y por eso no podemos unir los puntos del gráfico con una línea contínua. Entonces ¿Cuando podremos unir los puntos?

Se ha estado creando el ambiente para discutir el concepto de número real, es el momento de aprovechar la coyuntura e introducir los distintos conjuntos de números que conocemos, naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) y reales (R). El conjunto de los números imaginarios lo dejariamos para más adelante.

Introducidos los conceptos de teoria de números y de funciones entraríamos ahora en la parte más pesada y menos gratificante, establecer la nomenclatura que vamos a utilizar para referirnos a los distintos tipos de funciones, según el conjunto de números donde cojan valores las dos variables. En el caso de la función estudiada esta nomenclatura seria:

$$\begin{aligned} f\colon N &\longrightarrow N \\ i &\longrightarrow a_i \end{aligned}$$

El conjunto de números de donde cogen valores las dos variables viene representado por N. La primera indica la variable independiente y la segunda la variable dependiente y donde i seria la variable independiente y a_i la variable dependiente.

Como se expresa a_i en función de i, a partir de la fórmula matemática hallada. En el caso del número mínimo de jugadas esta seria: $a_i = 3i-1$.

Generalicemos las funciones obtenidas al caso de los números reales. El conjunto N seria sustituido por R, i por x y a_i por $y=f(x)$.De manera que ahora en el caso del número mínimo de jugadas, la función sería:

$$\begin{aligned} f\colon R &\longrightarrow R \\ x &\longrightarrow y=f(x) \end{aligned}$$

donde la fórmula de la función vendría expresada por $y= 3x-1$.

Dado que ahora podemos unir los puntos con lineas continuas, podremos ver que los gráficos corresponden a líneas rectas e iniciar por tanto, el estudio de la función de primer grado de fórmula general $y = ax + b$.

El estudio de las cuatro funciones trabajadas, jugadas mínimas, jugadas máximas, y número de puntos dibujados al finalizar el juego en los dos casos anteriores nos puede proporcionar información valiosísima sobre el comportamiento de la función de primer grado. Las fórmulas de estas cuatro funciones ampliadas al campo de los números reales son:

$y=2x$ $y=3x-1$ $y=3x$ $y=4x-1$

El gráfico de las mismas viene indicado en la figura 14.

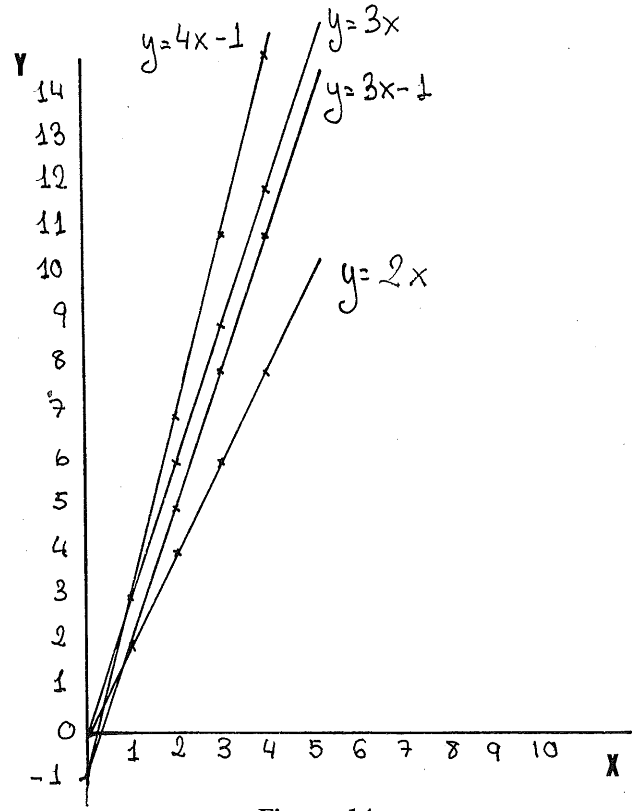

Figura 14

A partir de las cuatro rectas dibujadas podemos observar el significado de "a", número que multiplica a la x, y el de "b", número que suma o resta al término con x.

Diferentes valores "a" hacen que varie la inclinación de la recta, si el valor de "a" argumenta el valor de la inclinación tambien lo hace. Por tanto hay una dependencia directa entre ambos factores, "a" e inclinación. Tambien vemos que dos rectas que tengan el mismo valor de "a" pero diferente valor de "b" seran rectas paralelas, igual inclinación. Un valor de "b" negativo, hace que la recta no pase por el origen de coordenadas, sino que se desplace hacia la derecha un número de unidades indicado por el valor absoluto de "b". Si el valor de "b" es positivo la recta se desplazará hacia la izquierda del origen de coordenadas. Tambien podemos ver que el valor de"b" es la ordenada del punto por el cual la recta corta el eje de ordenadas.

A la vista de estas consideraciones lo lógico es llamar a "a", pendiente de la recta y a "b", ordenada en el origen.

Una vez terminado el análisis de la función de primer grado, es necesario que los alumnos realicen ejercicios de recapitulación para cimentar los conceptos adquiridos; ejercicios que podran conducir a trabajar equaciones de primer grado con una o dos incógnitas, según el criterio del profesor.

Una tarea muy interesante que se puede realizar una vez finalizados los ejercicios de recapitulación, consiste en proponer la realización de un trabajo de ampliación a realizar en grupo. Este trabajo de ampliación versará sobre un tema donde intervengan principalmente las funciones de primer grado. Unos posibles temas para realizar el estudio pueden ser:

- Estudio de la facturación eléctrica.
- Estudio de la presión atmosférica.
- Estudio de los recibos del agua y del gas
- Estudio del IRPF.
- Introducción a la teoria de grafos.

5. Resumen

Hemos visto como a partir de un juego podemos introducir conceptos de sucesiones y de funciones. Tambien nos ha preparado el terreno para realizar un estudio de diversos temas que pueden resultar provechosos para los alumnos según sus intereses.

No termina aqui el interés de las matemáticas en los juegos, podemos encontrar juegos que nos introduzcan en las funciones de segundo grado, en combinatoria, en probabilidad, que mezclen geometría con teoria de números y sucesiones, solo es cuestión de buscar y escoger aquello que nos ira mejor para desarrollar la asignatura de matemáticas de una manera motivadora y divertida.

No hemos de cometer el error de creer que nuestros alumnos solo pueden aprender matemáticas a partir de unos conceptos muy abstractos y perfectamente ordenados. La matemática no es un libro cerrado donde todo este calculado, medido y pesado, sino que tiene muchas puertas abiertas para ser utilizadas, y los juegos pueden ser una de estas puertas, aprovechemosla.

Para terminar, decir que este método se experimentó en la Escuela Pia Santa Anna de Mataró, escuela que participa en el proyecto de reforma de las enseñanzas medias en Catalunya. El grupo de 30 alumnos con los que realice la experiéncia formaba parte de un crédito variable del área de matemáticas. Dado que en la asignatura de matemáticas el nivel de motivación y de trabajo de los alumnos no suele ser muy elevado, podemos decir que los resultados de ésta experiencia han sido buenos, ya que como mínimo hemos solucionado este problema.

A nivel académico pienso que los alumnos han superado concreces las espectativas planteadas, dado que un porcentaje de los alumnos situado entre el 80% y el 90% han cogido el concepto de función y el de sucesión de números, así como un grado operativo y de tratamiento de problemas elevado.

No puedo, por tanto, dejar de considerar la experiéncia realizada como algo muy positivo.

5. Bibliografía

— MARTIN GARDNER, "*Carnaval Matemático*" Alianza Editorial.

— MARTIN GARDNER, "*Comunicación extraterrestre*" Editorial Cátedra.

—BRIAN BOLT, " *Divertimentos Matemáticos*" Editorial Labor.