Leçon 228: Continuité et dérivabilité des fonctions de la variable réelle.
Exemples et contre-exemples

Adrien Fontaine

26 décembre 2012

Table des matières

1 Généralités sur la continuité et la dérivabilité

1.1 Définitions, confrontations des notions

Cadre : I désigne un intervalle d'extrémités $a < b$, avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On dit que :

1. *f est continue en x_0 si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

2. *f est dérivable en x_0 si :*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

   On note alors cette limite $f'(x_0)$.

3. *f est continue sur $A \subset I$ (resp. dérivable sur $A \subset I$) si f est continue (resp. dérivable) en tout point de A.*

Exemple 1

1. *$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$*
2. *$x \mapsto 1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Théorème 1

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $\alpha \in I$, si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\alpha)$.

Démonstration : Rombaldi, théorème 2.2p38 ■

Exemple 2

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.

Démonstration : Rombaldi, exemple 2.4p39 ■

Proposition 1

Si f est dérivable en x_0, f est continue en x_0.

Démonstration : Gourdon, remarque 1p70 ■

Exemple 3

$x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $A \subset I$. La fonction

$$\begin{array}{cccc} f' & : & A & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée dérivée de f. Si f' est continue sur A, on dit que f est de classe C^1 sur A.

Contre-exemple 1

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'y est pas de classe C^1.

Remarque 1

Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$.
Par exemple, si on note Δ la fonction sur $\mathbb{R}$ 1-périodique, dont la restriction à $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$, alors la fonction

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x) \end{array}$$

est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.
On a même le résultat suivant : DÉVELOPPEMENT :

Théorème 2

L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ nulles part dérivable, forment un sous-ensemble dense de $(\mathcal{C}[0, 1], \|.\|_\infty)$.

1.2 Plus de régularité

Définition 3 (*Continuité uniforme*)

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Définition 4

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite K-Lipschitzienne (où $K > 0$) si :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Proposition 2

1. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*
2. *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Exemple 4

1. *$x \mapsto |x|$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*
2. *$x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas Lipschitzienne.*
3. *$x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Rombaldi, p48 ■

Application : Théorème du point fixe de Picard

Théorème 3 (*Heine*)

Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

Démonstration : Gourdon, théorème 2p31 ou Rombaldi, théorème 2.20p51 ■

DÉVELOPPEMENT :

Théorème 4 (*Théorème de Bernstein*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u - v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. Alors :

1. *B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*
2. *Plus précisément, on a $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où C est une constante numérique.*
3. *L'estimation de 2) est optimale : il existe une fonction lipschitzienne f pour laquelle $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où δ est une constante numérique.*

Définition 5

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^{k+1} si f' est de classe C^k. On note alors f'',$f^{(3)}$,...,$f^{(k+1)}$ les dérivées successives de f.

1.3 Stabilité des notions de régularité

Proposition 3

La composition de deux fonctions continues est continue.

Démonstration : Rombaldi, p39-40 ■

Théorème 5

Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.

Démonstration : Gourdon, théorème 2p222 ■

Corollaire 1

Si (f_n) est continue sur X et si (f_n) converge uniformément vers f sur X, alors f est continue sur X.

Exemple 5 (*Limite simple d'une suite de fonctions continues qui est discontinue*)

La suite de fonctions $f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ est continue et converge simplement vers la fonction égale à 0 sur $[0,1[$ et à 1 en 1, qui n'est pas continue.

Démonstration : Hauchecorne, 12.1p231 ■

On a cependant, une réciproque partielle :

Théorème 6 (*Théorèmes de Dini*)

1. *Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est en fait uniforme.*
2. *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est en fait uniforme.*

Démonstration : Gourdon, exercice5p228 ■

Exemple 6

La suite de fonctions (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ est continue sur $[0,1]$, et converge simplement vers e^x sur $[0,1]$ qui est une fonction continue, donc la convergence est en fait uniforme.

Théorème 7 (*Dérivabilité et dérivée de la fonction limite*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- *il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.*
- *la suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.*

Alors, f_n converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe C^1 et vérifiant $f' = g$.

Démonstration : Gourdon, théorème 4p223 ■

Corollaire 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (f_n) une suite de fonctions de classe C^p d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que pour tout $k \in \{0,...,p\}$, la suite de fonctions $(f_n)^{(k)}$ converge uniformément vers une fonction g_k sur $[a,b]$. Alors la limite uniforme $f = g_0$ de (f_n) est de classe C^p et vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \{0,...,p\}$.

Exemple 7

IL existe une suite de fonctions (f_n) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ayant pour limite uniforme une fonction dérivable, alors que la suite $f'_n)$ des fonctions dérivée ne converge pas.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démonstration : Hauchecorne, 12.14p240 ■

2 Propriétés fondamentales

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 8

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration : Rombaldi, théorème 2.27p56 ■

La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas vraie, c'est à dire qu'une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue. Par exemple, le théorème de Darboux nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et il existe des fonctions dérivables de dérivée non continue.

Théorème 9 (*de Darboux*)

Si f est une fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur un intervalle I, alors sa fonction f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Démonstration : Rombaldi, théorème 3.16p88 ■

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 10 (*Rolle*)

Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$, non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration : Rombaldi, théorème 5.2p137 ■

Exemple 8

Le cas de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ donne un exemple de situation où f n'est pas dérivable au bord.

Contre-exemple 2

1. *Le théorème n'est plus vraie si f n'est pas continue au bord comme le montre l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$.*
2. *Le théorème n'est plus vraie si f n'est pas dérivable sur $]a, b[$ tout entier comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.*

Application :

Théorème 11

Si P est un polynôme réel de degré $n \geq 2$ scindé sur $\mathbb{R}$, alors il en est de même de son polynôme dérivé.

Démonstration : Rombaldi, théorème 5.7p141 ■

2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 12

Si f est une fonction, à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$, non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration : Rombaldi, théorème 6.1p151 ■

Théorème 13 (*des accroissements finis généralisé*)

Si f, g sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle compact $[a, b]$, non réduit à un point, continues sur cet intervalle, et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Démonstration : Rombaldi, théorème 6.4p153 ■

Application :

Proposition 4

Si f est une fonction à valeurs réelles, dérivable sur un intervalle réel I, alors f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I.

Démonstration : Rombaldi, théorème 6.6p154 ■

2.4 Formules de Taylor

Théorème 14 (*Formule de Taylor Lagrange*)

Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un compact $[a, b]$, non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $n + 1$ fois dérivables sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}$$

Démonstration : Rombaldi, théorème 7.1p181 ■

Remarque 2

Cette formule est une généralisation du théorème des accroissements finis. Il se démontre grâce au théorème de Rolle.

Théorème 15 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs réelles définie et de classe C^{n+1} sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b - t)^n dt$$

Démonstration : Rombaldi, théorème 7.2p182 ■

Théorème 16 (*Formule de Taylor-Young*)

Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et a un point intérieur de I. Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, elle admet alors, au voisinage de a, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration : Rombaldi, théorème 7.5p186 ■

Application :

Théorème 17 (*Kolmogorov*)

Si f est une fonction de classe C^{n+1} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où n est un entier naturel non nul, tel que f et $f^{(n+1)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, alors toutes les dérivées $f^{(k)}$, pour k compris entre 1 et n, sont bornées sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \|f\|_\infty^{1-\frac{k}{n+1}} \|f^{(n+1)}\|_\infty^{\frac{k}{n+1}}$$

Démonstration : Rombaldi, théorème 7.10p193 ■

2.5 Propriétés topologiques

Théorème 18

1. *Une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.*
2. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction dérivée est dense.*

Démonstration : Gourdon, exercice 2p399 ■

Exemple 9

Il existe des fonctions dérivable sur un intervalle ouvert, de fonction dérivée continue en un point si et seulement si, ce point est irrationnel.

Démonstration : Hauchecorne, 9.12p168 ■

3 Autres exemples

3.1 Fonctions convexes

Définition 6

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Proposition 5

Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$ (pas forcément aux bornes de I).

Démonstration : Gourdon, proposition 2p95 ■

Théorème 19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est convexe.*
2. *f' est croissante.*
3. *La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.*

Démonstration : Gourdon, théorème 1p95 ■

Corollaire 3

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration : Gourdon, corollaire 1p95 ■

Application :

1. *Inégalité de Hölder*
   Soient deux nombres réels $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tous nombres réels positifs $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

   Démonstration : Gourdon, théorème 3p95 ■

2. *Inégalité de Minkowski*
   Soient $p \geq 1$ un nombre réel et $x_1, ...x_n, y_1, ...y_n$ des nombres réels positifs. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^p\right)^{1/p}$$

   Démonstration : Gourdon, théorème 4p96 ■

3.2 Intégrales

Théorème 20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Si la fonction f est continue sur I, alors pour tout point $a \in I$, l'application de I dans $\mathbb{R}$:

$$F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est définie et dérivable sur I, et pour tout point $x \in I$, $F_a'(x) = f(x)$.

Démonstration : Hauchecorne, théorème 11.2p219 ■

Théorème 21

Si g est une fonction définie et de classe C^1 sur I, alors pour tout point $a \in I$, on a pour tout $x \in I$,

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$$

Démonstration : Hauchecorne, théorème 11.3p219 ■

Remarque 3

Ce théorème est un cas particulier de la formule de Taylor avec reste intégral, pour $n = 1$.

Contre-exemple 3

Soit g une fonction définie et continue sur le segment $[-1, 1]$. On définit l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [-1,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 + g(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Alors F est bien définie, dérivable sur $[-1, 1]$ et $F'(x) = g(x)$ pour tout point $x \in [-1, 1]$. En particulier, $F'(0) = g(0) \neq f(0)$.

Démonstration : Hauchecorne, 11.17p220 ■

Théorème 22

Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Supposons que

1. *Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I.*
3. *Pour tout compact K de I, il existe $g \in L^1$ positive indépendante de t telle que*

$$|f(t, x)| \leq g(x) \ \forall t \in K, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

Alors, la fonction $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x)dx$ est continue sur I.

Démonstration : Zuily-Queffelec, corollaire I.2p307 ■

Exemple 10

Pour $x > 0$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

Cette fonction est bien définie et est continue sur $]0, +\infty[$.

Contre-exemple 4

La fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & [0,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) = te^{-xt} \end{array}$$

est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ *mais*

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx$$

n'est pas continue en 0.

Démonstration : Hauchecorne, 11.22p224 ■

Théorème 23

On suppose cette fois que :

1. *Pour tout* $t \in I$, *la fonction* $x \mapsto f(t,x) \in L^1$
2. *Pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $t \mapsto f(t,x)$ *est dérivable sur* I.
3. *Pour tout compact* K *de* I, *il existe une fonction* $g \in L^1$ *positive, indépendante de* t, *telle que*

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| \leq g(x), \forall t \in K, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}$$

Alors,

1. *Pour tout* $t \in I$, *la fonction* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ *est dans* $L^1(\mathbb{R})$
2. *La fonction* F *est dérivable sur* I *et*

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)d\mu(x)$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème I.3p308 ■

Exemple 11

1. *La fonction* Γ *définie précédemment est en fait de classe* C^∞ *sur* $]0,+\infty[$.
2. *Calcul de*

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1 + a\cos(x))}{cos(x)}dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{(argch(a))^2}{2}$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, p313 et Gourdon, Problème 4p174 ■

Contre-exemple 5

La fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto & f(t,x) = t^2e^{-x|t|} \end{array}$$

est de classe C^1 *mais* $F(t)$ *n'est pas dérivable.*

Démonstration : Hauchecorne, 11.24p226 ■

3.3 Espaces de fonctions continues sur un compact

Théorème 24 (*d'Ascoli*)

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$. Alors on a équivalence entre :

1. *A est équicontinue et bornée.*
2. *A est relativement compact.*

où l'on dit qu'une famille de fonctions A est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in [a,b], \forall f \in A, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y| \leq \varepsilon$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème III.3p153 ■

Application : Théorème d'Arzéla-Péano

Théorème 25

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe une solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Démonstration : Zuily-Queffelec, théorème II.4p360 ■