RIMINI 20-21-22 APRILE 2018

- CORSO DI FORMAZIONE

- L' attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX : nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica

Mandrone Mario

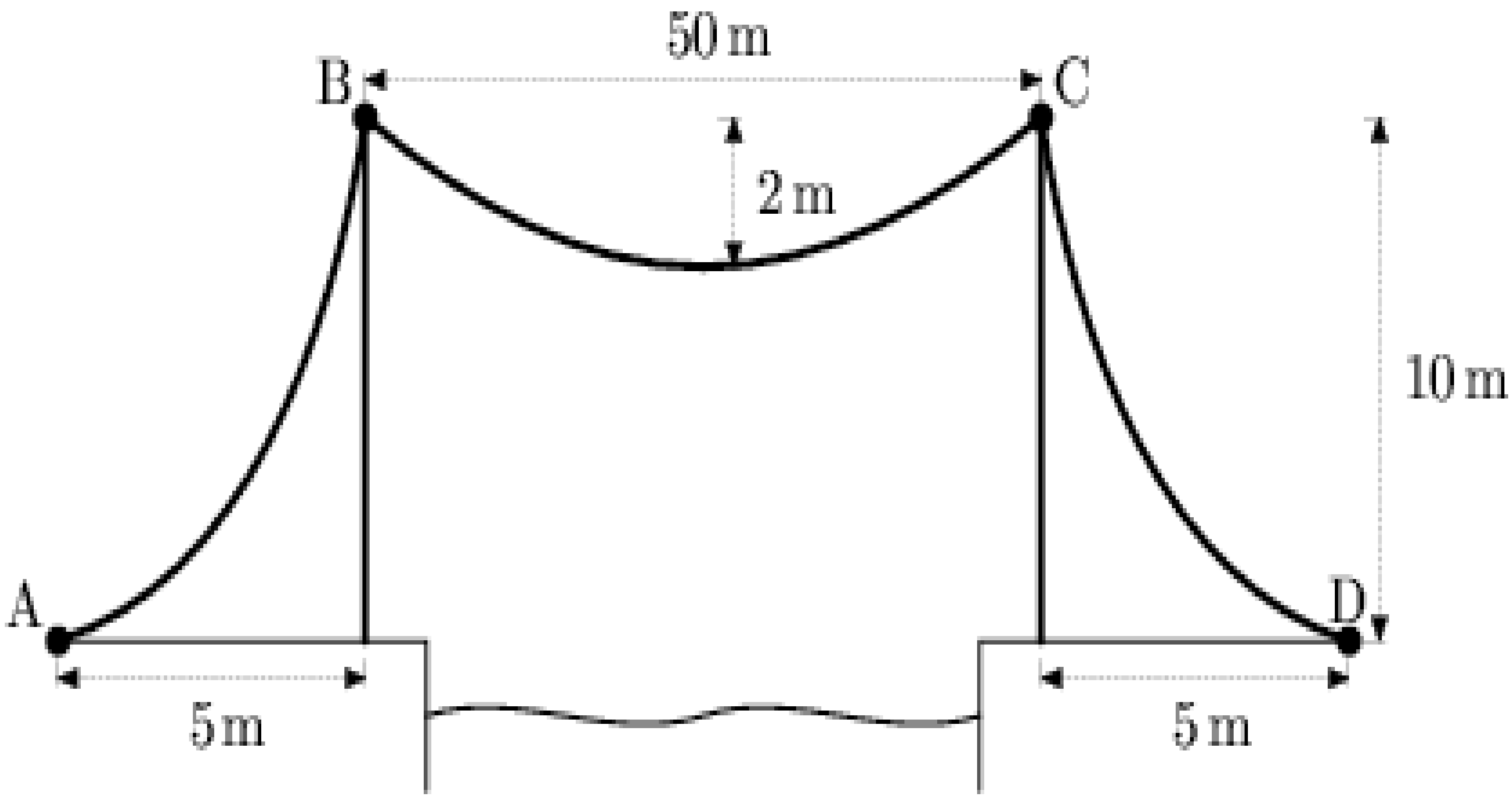
- Dipartimento di Scienze e Tecnologie
- Università degli studi del Sannio
- Benevento

LE CURVE CELEBRI : LA CATENARIA
1)CONSIDERAZIONI SU UNA CURVA MATEMATICA
2)APPLICAZIONI DELL' ARCO CATENARIO IN ARCHITETTURA

MANDRONE MARIO INNOCENZO
DIPARTIMENTO DI SCIENZE E TECNOLOGIE
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL SANNIO
BENEVENTO

MENU' PRINCIPALE

- Le curve nella storia
  - La catenaria: introduzione storica
  - Galileo e la catenaria
  - Jacob Bernoulli
  - Joachim Jungius
- L'esperienza della catenella
  - FISICA: La statica della catenaria
  - Derivazione della catenaria da una conica: catenaria come luogo dei fuochi di una parabola
- La catenaria come funzione cartesiana: equazione differenziale e risoluzione
- Altre vie per arrivare alla catenaria
  - Cerchio osculatore ed evoluta; pseudosfera di Beltrami
  - Clinoide e Velaria
- La catenaria nella vita quotidiana
  - Applicazioni in ARCHITETTURA
  - Gaudì e Alvaro Siza


50 m
B
C
2 m
10 m
A
D
5 m
5 m

- ABSTRACT :
- Prendendo spunto da un problema proposto nella prova scritta di Matematica della sessione ordinaria 2003 dell’Esame di Stato nei Licei Scientifici sperimentali – Piano Nazionale Informatica, si propone una visione didattica interdisciplinare di una curva particolarmente interessante : la catenaria nei suoi risvolti non solo matematici e fisici ma anche in applicazioni in ambito architettonico.

- L’argomento, in realtà, potrebbe essere inserito nella fase di “ fortificazione” e “ sistemazione “ di concetti inerenti lo studio di funzioni, il calcolo di integrali, la risoluzione di equazioni differenziali, la modellizzazione in Fisica e la storia dell’arte contemporanea.

- Il nome “ catenaria” dato alla curva fu attribuito da Charles Huygens nel 1690 derivandola dalla parola latina “ catena”. L’equazione di tale luogo geometrico fu ottenuta dallo stesso Huygens, da Gottfried W. Leibniz e Jean Bernoulli nel 1691 in risposta ad un problema posto da Jacques Bernoulli , fratello di Jean

- LA CATENARIA NELL’ ANTICHITA’

- In matematica e in architettura si impiega il termine “ catenaria” per indicare la curva il cui andamento è quello di una catena o corda di densità uniforme e perfettamente flessibile sorretta per i suoi due estremi , soggetta unicamente all’azione della sua forza peso.

- In realtà non si tratta di una curva ma di una famiglia di curve, ognuna della quali è determinata dalle coordinate dei suoi estremi e dalla sua lunghezza.

- I matematici si sono sempre mostrati affascinati dalla forma che assume una corda o una catena soggetta al proprio peso cercando di individuare l’ equazione della curva che potesse descrivere tale andamento.

- Così , per esempio, già in alcune annotazioni di Leonardo da Vinci possiamo incontrare schemi di catene penzolanti.

- La prova che la risoluzione del problema non era per nulla facile la abbiamo se si pensa che un uomo dello spessore intellettuale di Galileo commise un errore nella soluzione della problematica visto che, nel 1638, nel " Dialoghi sopra due nuove scienze", affermò che una "catena sospesa " assume un andamento parabolico.

- Certo è che, quando Galileo realizzò gli esperimenti che lo condussero a tale risultato, il saggio di Pisa già aveva 74 anni ed era quasi cieco.

Successivamente, quasi contemporaneamente, Huyghens, Leibnitz e i fratelli Bernoulli dimostrarono che tale curva era una curva non algebrica e fu battezzata dallo stesso Huyghens “catenaria”,che deriva da”catena “, in riferimento alla caratterizzazione della curva.

- La curva, detta anche “ funicolare” o “ velaria” fu studiata da Eulero il quale scoprì che la sua rotazione attorno ad un asse genera una superficie minima tra due circonferenze uguali.

- Mentre in Occidente bisogna attendere il secolo XIX per iniziare ad utilizzare la catenaria in Architettura, in Oriente l’impiego di queste strutture era più comune nell’architettura islamica.

- Un esempio di quanto detto è la sorprendente somiglianza che possiamo notare tra la cupola della “ Mezquita de la Roca” (Moschea della Roccia) di Gerusalemme e una perfetta cupola catenaria.

- Tuttavia, anche precedentemente, nell’Africa nord-orientale, per esempio in Sudan, si costruivano ampie abitazioni circolari coperte da una cupola catenaria, aventi una straordinaria resistenza una volta chiusa la cupola.

- Una situazione analoga si verifica a latitudini più settentrionali. Difatti esistono studi in proposito che sembrano mostrare che gli igloo degli eschimesi-canadesi non sono emisferi, come di solito li rappresentiamo, ma la loro morfologia è più vicina a catenoidi di rivoluzione con un rapporto ottimale altezza/diametro.

- Paradossalmente, ci sono esempi di catenarie nelle società più povere e in quelle più ricche. Ad esempio, l’enorme resistenza e stabilità delle volte catenarie fa sì che esse vengano attualmente utilizzate per coprire i reattori nelle centrali nucleari.

- Ma, indipendentemente da ciò, esistono prove inconfutabili che nell’antichità si costruivano intuitivamente, nei grandi edifici, archi stabili aventi la curvatura delle catenarie capovolte.

- Probabilmente, il miglior esempio è il Grande Arco di Ctesiphon (Ctesifonte) o Taaq-i Kisra che è l’unico resto visibile della antica città di Ctesiphon nella Persia antica, l’attuale Iraq.

- Questo arco, costruito senza cassero, feceva parte del palazzo imperiale della città che per sette secoli fu la capitale dei Seleucidi, Parthi e Sassanidi, popoli che fecero da baluardo all’espansione dell’impero romano.

- E’ degno di nota che le inondazioni che avvennero in quell’area durante il secolo scorso hanno abbattuto una delle ali della costruzione esistente, ma non l’arco grande che ancora oggi è possibile ammirare.

FISICA: La statica della catenaria

La CATENARIA è detta anche CURVA FUNICOLARE: è la curva secondo cui si dispone una catena o una fune omogenea e ben flessibile, appesa a due punti estremi. La lunghezza della fune, evidentemente maggiore della distanza tra gli estremi stessi, si suppone grandissima rispetto al diametro della fune; quest'ultima si chiama perciò spesso "filo" e la catenaria è la curva di equilibrio di un filo pesante.

La catenaria viene così associata ad un sistema fisico materiale ad una dimensione

<u>Ora, su di un elemento generico del filo, compreso tra i punti di ascisse curvilinee s e s+ds agiscono tre forze:</u>

1. la forza attiva F*ds;
2. la tensione dell'estremo s+ds: T(s+ds);
3. la tensione nell'estremo inferiore s : -T(s);

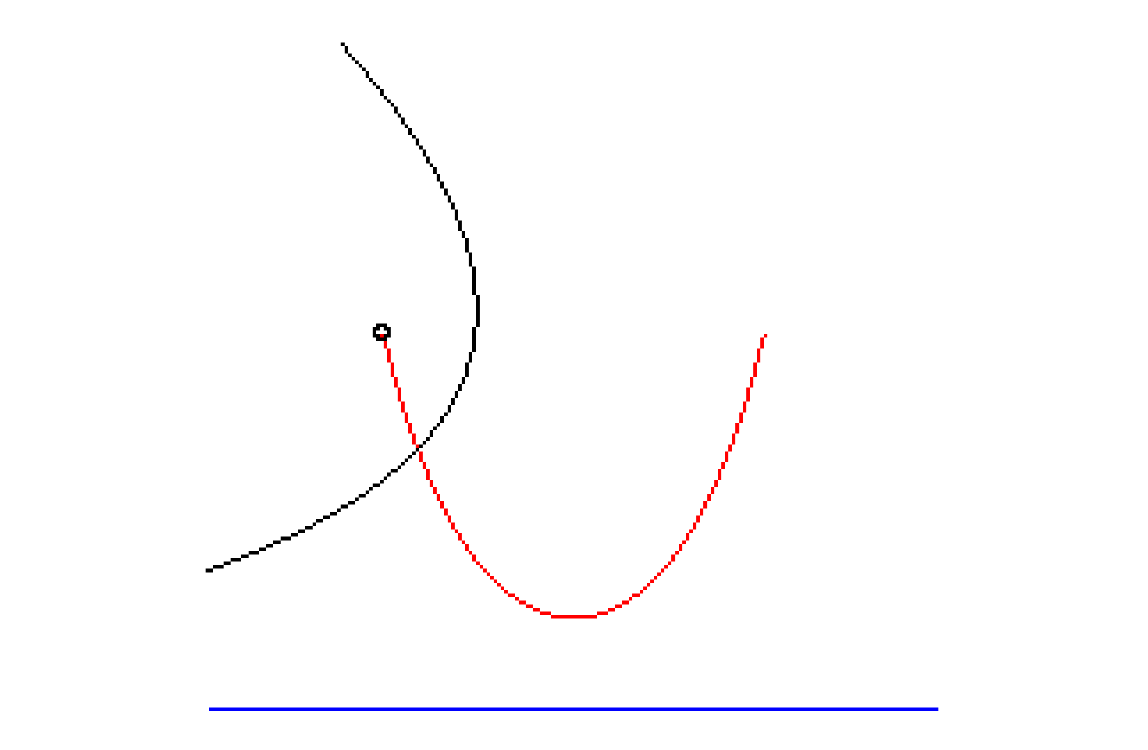
La condizione necessaria e sufficiente per l’equilibrio è espressa dall’annullarsi della risultante di codeste tre forze (la condizione deve essere soddisfatta per ogni elemento dell’arco AB). Questa condizione permette di calcolare la sua equazione.

Derivazione della catenaria da una conica

La catenaria viene considerata come *luogo geometrico dei punti del piano descritto dal fuoco di una parabola che rotola lungo una retta orizzontale.*

Usando il calcolo differenziale possiamo trovare l'equazione del luogo: si tratta di un *coseno iperbolico*.

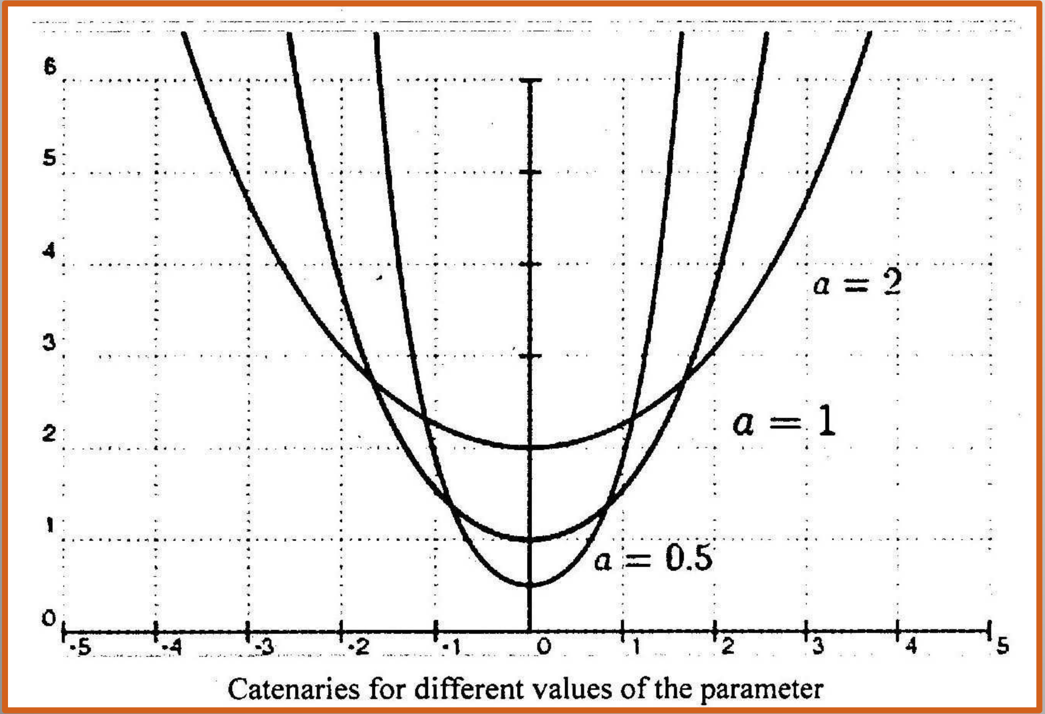
$$\boxed{y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)=c\left(\frac{e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}}{2}\right)}$$



IL FUOCO DI UNA PARABOLA VOLVENTE LUNGO UNA RETTA ORIZZONTALE DESCRIVE UNA CATENARIA

Sono stati tracciati i tre grafici nello stesso piano cartesiano e avviato un confronto tra gli stessi.

L'osservazione porta ad affermare che:



Catenaries for different values of the parameter

diminuendo (o aumentando) i valori del parametro a > 0 diminuisce (o aumenta) l'apertura della curva e diminuisce (o aumenta) l'ordinata del vertice (y_v scorre sull'asse y dall'alto verso il basso o viceversa).

menù

back

- Ma che cosa è la catenaria? Possiamo dire che è la configurazione secondo la quale si distribuisce un filo omogeneo, uniforme, soggetto alla sola forza peso.

- In Matematica, questa curva viene descritta dalla funzione : y = Chx e prende il nome di Coseno Iperbolico di x.

- Se si fa traslare e ruotare la parabola lungo una retta, il fuoco della conica, durante questa trasformazione, descrive appunto una curva : la catenaria. È per questo motivo che tale curva viene chiamata anche la "rolletta" della parabola”: una delle rollette delle coniche!

- La catenaria ha una proprietà molto importante dal punto di vista dell'equilibrio: soggetta ad un carico, distribuisce il peso uniformemente lungo la curva stessa (ogni punto è sottoposto allo stesso peso!).

- È ovvio che la stabilità risulta rafforzata se viene utilizzata una curva ottenuta dalla combinazione di una parabola e di una catenaria insieme. E’ quello che accade sovente nella configurazione dei ponti sospesi.

- IL PROBLEMA
- La prima parte del secondo problema dell’Esame di Stato 2003 risultava così formulata : “ Sia

$$f(x) = a * 2^x + b * 2^{-x} + c$$

con a,b, c numeri reali. Si determinino a,b,c in modo che :

1) la funzione sia pari;

2) $f(0) = 2$

3) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2\ln 2}$

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a,b,c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.”

- Dalle condizioni poste dal problema risulta:

$$\begin{cases} a\left(2^{x}-2^{-x}\right)=b\left(2^{x}-2^{-x}\right) \\ a+b+c=2 \\ \dfrac{a}{\ln 2}+\dfrac{b}{2\ln 2}+c=\dfrac{3}{2\ln 2} \end{cases}$$

- E quindi

$$\begin{cases} a=b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

- Pertanto la funzione richiesta è:

$$f(x) = 2^{x} + 2^{-x}$$

- Si osservi , ora, che:

$$y = f(x) = 2^{x} + 2^{-x} = e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2} = 2\cosh\left(x * \ln 2\right)$$

Considerata la dilatazione del piano verso l'asse y data da :

$$\begin{cases} X = (2\ln 2)\, x \\ Y = y \end{cases}$$

la curva del problema può essere riscritta come:

$$Y = 2\cosh\left(\frac{X}{2}\right)$$

che individua un esempio di curva catenaria.

- UNA CATENA SOSPESA

- Una catenaria descrive la forma geometrica assunta da una catena sottile o anche da una corda posta su un piano verticale e sospesa per i due estremi.

- Presentiamo, nelle linee essenziali, una possibile trattazione della problematica da un punto di vista didattico analizzando la situazione fisica che porta alla equazione della catenaria.

- ESPRESSIONE ANALITICA DELA CATENARIA

Indichiamo con y(x) la funzione (che stiamo cercando) definita su un intervallo , $[x_{0,} \; x_1]$ soggetta alle seguenti condizioni iniziali :

$$y(x_0) = y_o \qquad y(x_1) = y_1$$

e la cui lunghezza risulti uguale ad un valore prefissato L, vale a dire :

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \; dx = L$$

Consideriamo, ora, la lunghezza dell'arco di curva s definita da :

$$s : [x_{0,} x_1] \to [0, L]$$

data da :

$$s(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

Tale funzione è crescente, derivabile e con derivata pari a:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} > 0$$

- Pertanto s(x) è dotata di funzione inversa. Considerando la parametrizzazione della lunghezza dell'arco di curva, possiamo definire la funzione inversa nel modo seguente :

$$\varphi : [0, L] \rightarrow R^2$$

data da :

$$\varphi(s) \equiv (x(s); y(s))$$

In questo modo, la lunghezza dell'arco di curva compreso fra:

$$\varphi(s) \;\; e \;\; \varphi(s + \Delta s)$$

è data esattamente da $|\Delta s|$. Inoltre, poiché la corda ha densità lineare costante, la massa di un arco di corda di corda di lunghezza Δs è:

$$m = \rho * \Delta s$$

- Indicando, ora, con $\alpha(s)$ l'angolo che la tangente alla corda in $\varphi(s)$ forma con l'orizzontale e ricordando il significato geometrico della derivata, si ottiene:

$$y'(x) = tg\,[\alpha(s(x))]$$

- Consideriamo un punto qualsiasi della corda, vale a dire un punto $\varphi(s)$ per un determinato valore

s $\in [0, L]$

- La forza di coesione che tiene unita la corda in tale punto (la forza che si annulla se tagliamo la corda) è rappresentata da due vettori di tensione opposta.

- Per la III legge di Newton, le due tensioni hanno la stessa intensità e direzione ma versi opposti. E’ chiaro che la direzione deve essere quella della tangente alla curva.

- Possiamo, perciò decomporre il vettore nelle sue componenti così:

$$\vec{T}(s) \equiv \left(T(s)\cos\alpha(s)\,, T(s)\,sen\;\alpha(s)\right)$$

- Consideriamo l’arco di corda corrispondente all’intervallo di parametri $[s, \quad s+\Delta s]$.

  Detto arco sarà soggetto a tre forze:

  A) La forza peso $\boldsymbol{P} = (0\,, -\rho g \Delta s)$;

  B) Le tensioni ai suoi estremi : $\boldsymbol{T}(s+\Delta s)\;\; e - \;\boldsymbol{T}(s)$

- La condizione di equilibrio impone che la somma delle tre forze agenti sia nulla:

$$\vec{T}(s+\Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{P} = \vec{0}$$

Più esplicitamente: (considerando le proiezioni sugli assi cartesiani) :

1) $T(s+\Delta s)\cos\alpha(s+\Delta s) - T(s)\cos\alpha(s) = 0$

2) $T(s+\Delta s)\,\mathrm{sen}\,\alpha(s+\Delta s) - T(s)\,\mathrm{sen}\,\alpha(s) - \rho g \Delta s = 0$

- Facendo tendere Δs a zero , si ottiene:

$$1)\ \frac{d\,(T\cos\alpha)}{ds} = 0$$

$$2)\ \frac{d\,(T\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{ds} = \rho g$$

per ogni punto s $\in [0, L]$.

La prima condizione equivale a dire che la componente orizzontale della tensione è costante:

$$T(s)\cos\alpha(s) = k > 0$$

da cui :

$$T(s) = \frac{K}{\cos\alpha(s)}$$

- Sostituendo $T(s)$ nella seconda uguaglianza si ottiene:

$$\frac{d\ (K\ tg\alpha(s))}{ds} = \rho g$$

$$\frac{K * d\,(tg\alpha(s))}{ds} = \frac{K * d\,(tg\alpha(s))}{ds} = \rho g$$

$$\frac{d\,(tg\alpha(s))}{ds} = \rho g /_{K} = \mu$$

- Equivalentemente:

$$\frac{d\ (tg\alpha(s(x)))}{dx} * \frac{dx}{ds} = \mu$$

- ovvero :

$$\frac{d\ y'(x)}{dx} * \frac{1}{\sqrt{1+\ [y'(x)]^2}} = \mu$$

- In conclusione siamo arrivati ad una equazione differenziale del tipo:

$$\frac{y''(x)}{\sqrt{1+\ [y'(x)]^2}} = \mu$$

- Integrando ambo i membri:

$$\int \frac{y''(x)}{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}\,dx = \int \mu\,dx$$

- si ottiene: $arcsenh\, y'(x) = \mu x + c_1$

- Quindi: $y'(x) = senh\,(\mu x + c_1)$
- Calcolando l'integrale di quest'ultima espressione si ottiene:

$$y(x) = \frac{\cosh\,(\mu x + c_1)}{\mu} + c_2$$

Questa equazione, dipendente dai tre parametri μ , c_1 e c_2, rappresenta un famiglia di curve dette “ catenaria” ; Essa è quindi l’equazione generale della catenaria. I parametri possono essere determinati dalle condizioni iniziali del problema.

CONSEGUENZE GEOMETRICHE

- Da un punto di vista geometrico osserviamo che l'espressione della catenaria è la funzione:

$$y_\mu(x) = \frac{\cosh \mu x}{\mu}$$

- Difatti se, partendo dall'equazione

$$y(x) = \frac{\cosh(\mu x + c_1)}{\mu} + c_2$$

- Effettuiamo una traslazione orizzontale :

$$x \to \mu x - c_1$$

e una traslazione verticale:

$$y \to y + c_2$$

- si ottiene: $$y(x) + c_2 = \frac{\cosh(\mu x - c_1 + c_1)}{\mu} + c_2$$

- Ovvero:

$$y(x) = \frac{\cosh(\mu x)}{\mu}$$

- Sviluppando la funzione y(x) ottenuta in serie di Taylor di punto iniziale x=0 (serie di Mac-Laurin), si ottiene:

$$y_\mu(x) = \frac{1}{\mu} + \mu x^2 + \mu x^4 + \cdots \dots \dots$$

- dal che si evince che, nell'intorno dello zero, la catenaria differisce da una parabola per un termine di quarto grado (quindi praticamente trascurabile).

- EQUAZIONE DELLA CATENARIA.
- METODO MECCANICO- ENERGETICO

- Notiamo, infine, che il problema di determinare l’espressione analitica della catenaria può essere affrontato e risolto anche da un punto di vista completamente diverso (meccanico) utilizzando la proprietà che un corda di lunghezza assegnata L, sospesa in due punti e soggetta all’azione della sola forza gravitazionale deve possedere energia potenziale minima.

- In tal caso, l'energia potenziale è data da:

$$E(y) = \int_0^L \rho g \, y(s)ds = \rho g \int_0^L y(s)ds = \rho g \int_0^L y(x) * \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \, dx$$

- Questo metodo conduce all’impiego di tecniche di analisi funzionale, la qual cosa esula dagli scopi del presente lavoro.

- LA PARABOLA E LA CATENARIA

- E’ possibile stabilire un legame tra una parabola e la catenaria, pur esprimendo le due curve situazioni matematiche indubbiamente diverse, studiando il luogo geometrico dei punti del piano descritto dal fuoco di una parabola quando essa rotola su un opportuno asse.

- A tale scopo consideriamo, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la parabola avente asse di simmetria coincidente con l'asse y , vertice V nell'origine e fuoco nel punto F(0, a) con a>0. Come è noto, tale parabola ha equazione :

$$y = \frac{x^2}{4a}$$

- Studiamo il luogo geometrico descritto dal fuoco della parabola. L’equazione parametrica di tale curva è:

$$\begin{cases} x_F = a\, senh^{-1}\left(\dfrac{x_0}{2a}\right) \\ y_F = a\sqrt{1+\dfrac{{x_0}^2}{4a^2}} \end{cases}$$

- Eliminando il parametro, si ottiene l’equazione cartesiana :

$$y_F = a\sqrt{1+senh^2\left(\frac{x_F}{a}\right)} = a\sqrt{cosh^2\left(\frac{x_F}{a}\right)} = a\, cosh\left(\frac{x_F}{a}\right)$$

- Quindi: $$y_F = a \cosh\left(\frac{x_F}{a}\right)$$
- Tale equazione rappresenta un esempio di curva catenaria il cui parametro è individuato proprio dalla distanza vertice-fuoco della parabola. Si noti che quanto detto per a>0 vale anche nel caso in cui a< 0
- Equazione catenaria è. pertanto:

$$y(x) = a * \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2}\right) = a * \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Altre vie per arrivare alla catenaria…

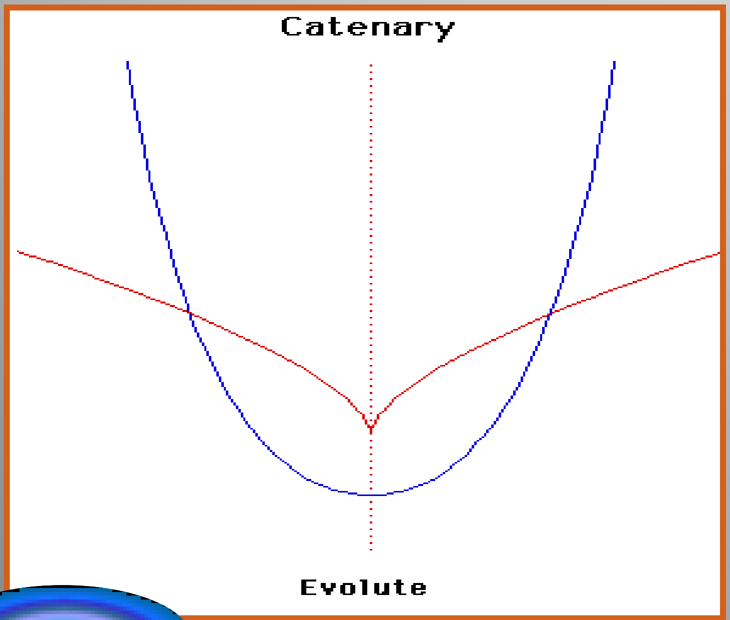
- Cerchio osculatore ed evoluta
- Pseudosfera di Beltrami
- Clinoide
- Velaria

menù

next

Cerchio osculatore ed Evoluta

CERCHIO OSCULATORE dal latino « osculum» (boccuccia) ; OVIDIO (Metamorfosi) dice : « summa delibans oscula» che tradotto vuol dire :» sfiorando l’estremità delle labbra» o « baciando a fior di labbra». Per « traslato», quindi osculum significa bacio, più delicato e peotico del « basium» usato di preferenza dall’incontenibile Catullo per la sua Lesbia.



- Il suo raggio è perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza;
- La curvatura della curva è inversamente proporzionale al raggio del cerchio osculatore; quindi, a curve ampie corrispondono raggi maggiori e a curve più strette corrispondono raggi minori;

Due curve C e C’ si osculano in un punto P , se in P hanno un contatto doppio, cioè se in P hanno in comune P e due punti infinitamente vicini a P.

Due coniche si iper-osculano se hanno in P un contatto triplo, cioè se in P le curve hanno in comune altri tre punti infinitamente vicini a P.

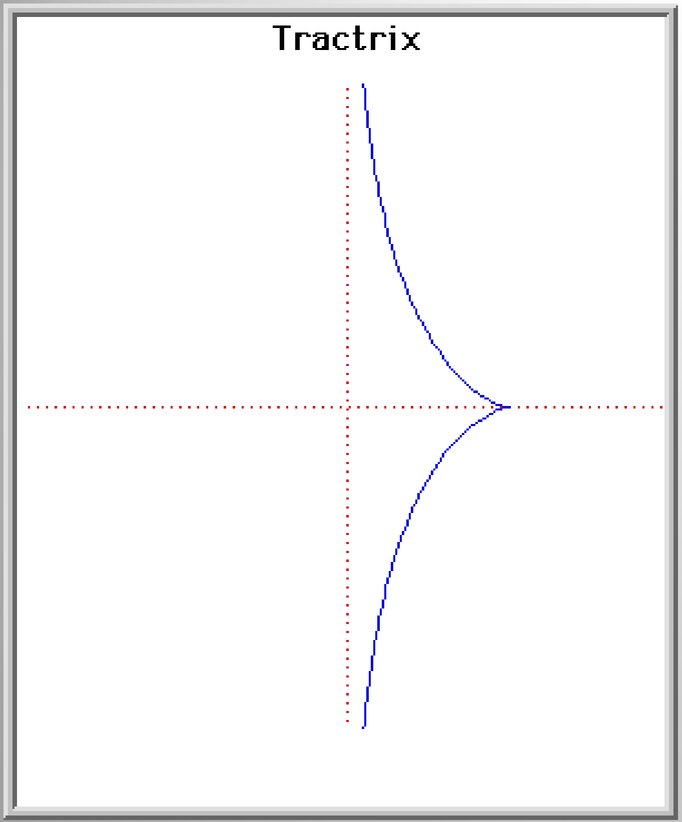
La pseudosfera di Beltrami

Verso la fine degli anni sessanta del XIX secolo, il dibattito sulle geometrie non euclidee è particolarmente acceso.

L'allora giovane matematico italiano Eugenio Beltrami, in seguito alla pubblicazione di una memoria risalente a Gauss nella quale si ipotizzava un nuovo modo di intendere la geometria, pubblica il suo *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea.* Beltrami aveva trovato all'interno della geometria euclidea una superficie di rotazione, la pseudosfera, che poteva essere interpretata come un modello euclideo di geometria non euclidea.

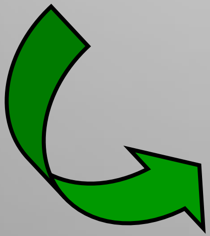
Alla superficie aveva dato il nome di pseudosfera perché ha curvatura costante come una sfera ma di segno negativo. Per capire come avviene questa “traduzione” (ovvero l’interpretazione della pseudosfera come modello di geometria piana non euclidea) occorre introdurre la nozione di geodetica.

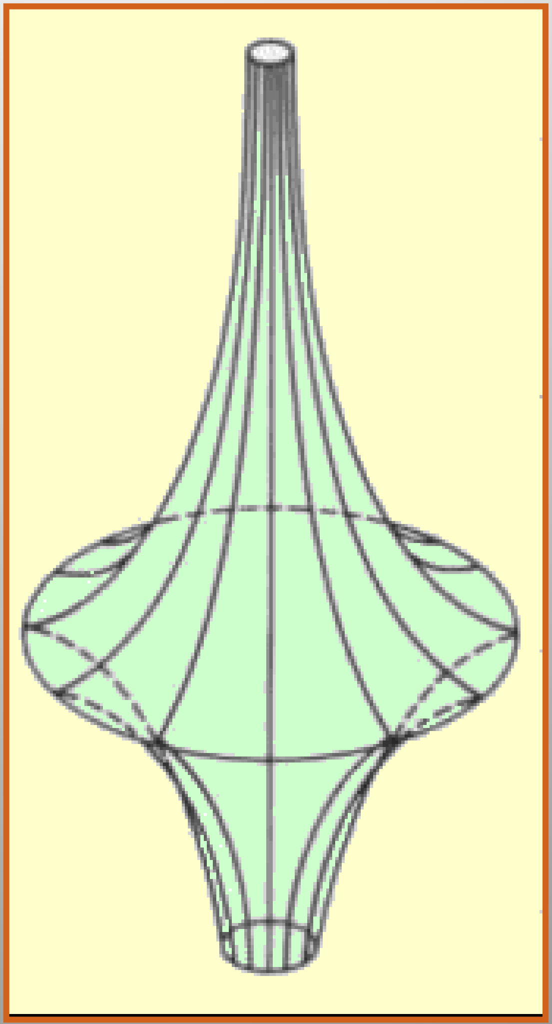
Nel piano il percorso più breve che unisce due punti si trova sulla retta passante per i due punti. Estendendo questo concetto alle superfici, il percorso più breve che unisce i due punti della superficie si trova su di una linea, generalmente curva detta geodetica.

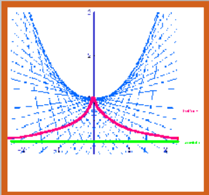


TRATTRICE DI F. MINDING

Ruotando la curva trattrice attorno
al suo asintoto si ottiene la PSEUDOSFERA DI BELTRAMI







LA TRATTRICE

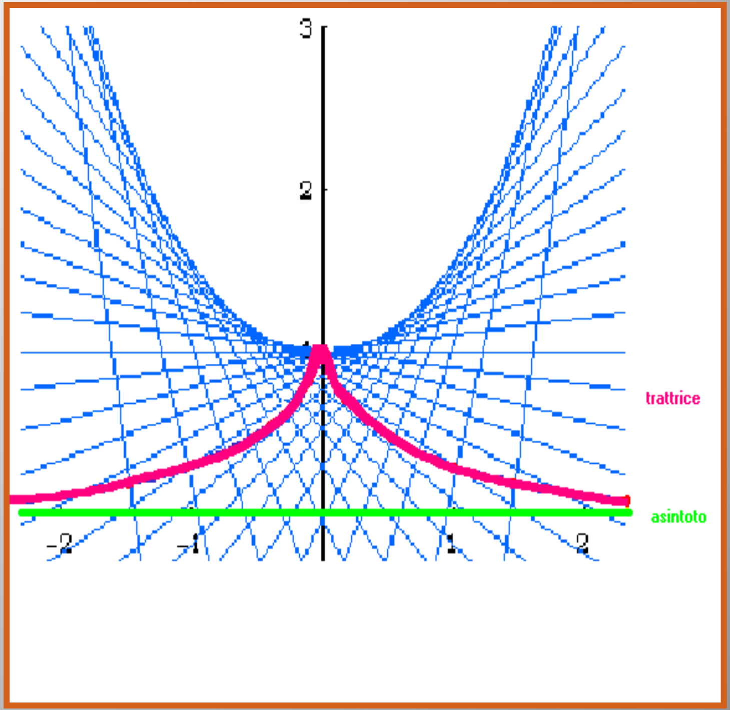
Tuttavia, alcuni matematici hanno perplessità circa il ragionamento di Beltrami. Il punto più debole dell'argomentazione sta nel fatto che il modello ha valore locale e non può rappresentare globalmente la geometria non euclidea.

Infatti, tra le infinite forme che una superficie pseudosferica può assumere si conosce l'espressione analitica solo di qualche caso particolare. In particolare la pseudosfera di Beltrami non è regolare e non può rappresentare interamente il piano non euclideo.

LA TRATTRICE

La curva trattrice fu studiata da Huygens
Si tratta di una curva di origine fisico-matematica che gode della proprietà equitangenziale.

Ciò significa che i segmenti di tangenza compresi tra i punti della curva e le intersezioni di questi segmenti di tangente col suo asintoto hanno lunghezza costante.



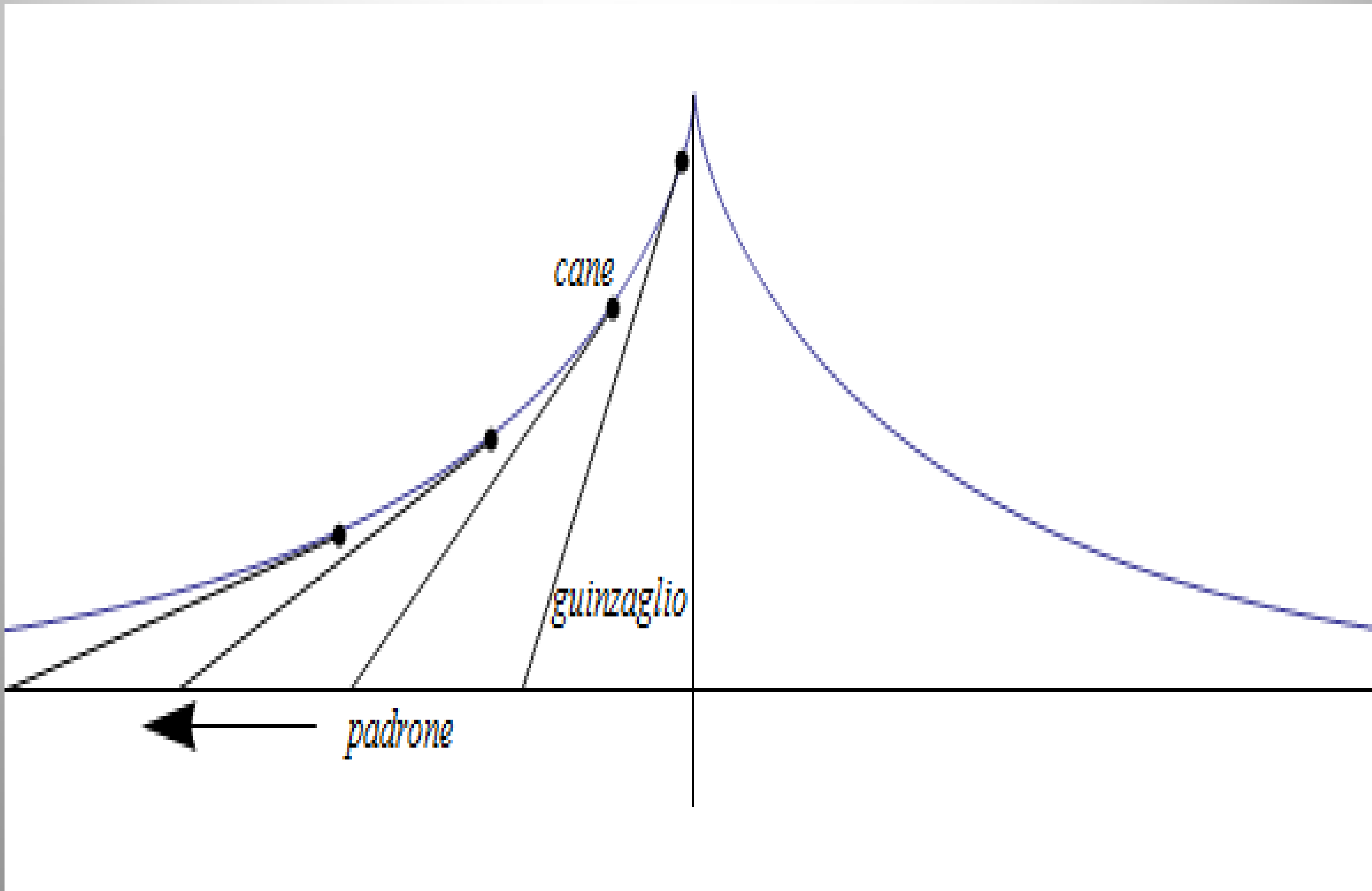
L'EVOLUTA della trattrice è la curva catenaria!!!

Storia

Verso la fine del XVII° secolo il medico francese Claude Perrault, propose ai matematici dell´epoca una sfida, chiedendo quale fosse quella curva descritta in un piano da un punto pesante attaccato all´estremo di un filo teso, di cui l´altro estremo percorre una retta situata sullo stesso piano. Leibentz studiò la curva risultante, ma fu Huygens il primo a definirla completamente battezzandola trattrice (dal latino trahere=trainare) o traiettoria di Huygens, mentre Ribaucour propose il nome di alisoide (a forma di giglio). La curva trovò nuovo interesse tra i matematici del XIX° secolo, in special modo Beltrami e Dini, quando modelli tridimensionali di geometrie non-euclidee iperboliche furono generati proprio grazie alla trattrice.

Descrizione

La trattrice viene solitamente descritta così: essa è il luogo dei punti tali che il segmento della tangente in un punto qualunque, compreso fra il punto di contatto e l´intersezione con una retta fissa, ha lunghezza costante. Un altro modo per descriverla è quella di considerare un cane (punto nero) che viene trascinato dal suo padrone tramite un guinzaglio lungo un percorso rettilineo: il cane percorrerà una trattrice.


cane
guinzaglio
padrone

Equazioni

La trattrice è una curva trascendente e le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x = a\ln(\sec t + \tan t) - a\sin t \\ y = a\cos t \end{cases}$$

a è la lunghezza del "guinzaglio".

La trattrice ammette anche la seguente equazione cartesiana:

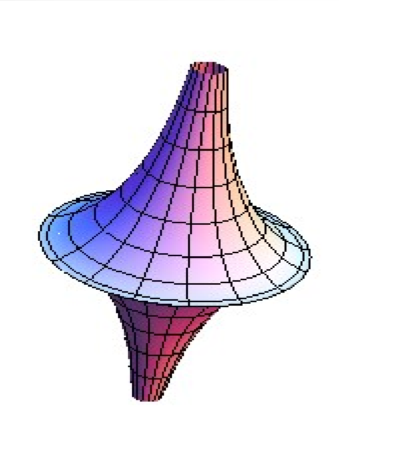
$$x = \pm a\cosh^{-1}\left(\frac{a}{y}\right) \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

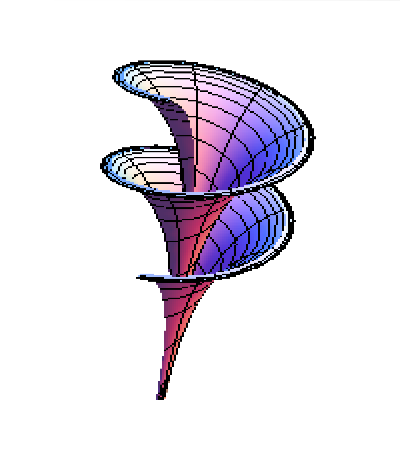
Proprietà

Alcune proprietà metriche della curva:

1) la lunghezza di un arco di uno dei due rami fra i punti x e y vale $a \ln(x/y)$

2) l´area compresa tra la trattrice e il suo asintoto, che è l´asse x : $\pi a^2/2$





La più grande applicazione della trattrice fu lo studio abbinato alle geometrie non-euclidee: più precisamente Beltrami e Dini crearono due modelli tridimensionali di geometria iperbolica. Beltrami ideò la pseudosfera, così chiamata poichè ammette curvatura costante opposta a quella della sfera in ogni suo punto e quindi negativa.

La pseudosfera è generata da una rotazione attorno al proprio asse della trattrice (figura a sinistra). L´altro modello di geometria iperbolica è dato dalla superfice del Dini, ovvero la superficie laterale del solido ottenuto assegnando alla trattrice un moto elicoidale intorno al suo asintoto (figura a destra).

L’area compresa tra la trattrice e il suo asintoto è finita.

Quando la trattrice ruota lungo l’asintoto dà origine ad una pseudo-sfera, una superficie di curvatura negativa, usata da Beltrami nel 1868 nell’ambito delle geometrie non euclidee.

Premesso che l’evoluta di una curva è il luogo geometrico dei centri dei suoi cerchi osculatori, otteniamo come evoluta della trattrice la curva catenaria.

DESCRIZIONE MATEMATICA DELLA TRATTRICE

Consideriamo un punto A dell'asse delle ascisse di coordinate P =(a , 0) ed un punto mobile sull'asse delle ordinate , inizialmente nell'origine.
La lunghezza del segmento AP (che li unisce) è, ovviamente, uguale ad " a".

Successivamente il punto P (detto " trascinatore") inizia a muoversi lungo l'asse y nel verso positivo. Ad ogni istante il segmento AP risulterà tangente alla curva y=f(x) descritta dall'oggetto e la sua traiettoria, pertanto, verrà determinata dal movimento del trascinatore (P).

Matematicamente, il movimento sarà descritto dall' equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

con la condizione iniziale : $y(a) = 0$

le cui soluzioni sono:

$$y(x) = \pm \int_x^a \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx$$

$$y(x) = \pm \left[a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \right]$$

Il segno meno corrisponde al caso in cui il punto si muove nel verso negativo dell'asse y

EQUAZIONI DELLA TRATTRICE

TRIGONOMETRICA (PARAMETRICA)

$$\begin{cases} x = a\,sent \\ y = a\ln\left[tg\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \cos t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

IPERBOLICA:

$$y = \frac{a}{\cosh t}$$

DIFFERENZIALE

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Clinoide

- Dal greco “inclinare”, la CLINOIDE è la curva che registra l’inclinazione di qualche fenomeno
- L’equazione cartesiana della curva è:

$$\boxed{y = b \cdot e^{\frac{x}{a}} + c \cdot e^{-\frac{x}{a}}}$$

- Con b=0 o con c=0 si ha una CURVA ESPONENZIALE
- Con b=c=a/2 si ha una CURVA CATENARIA

La catenaria è un caso particolare di clinoide

La curva Velaria

La velaria è la curva formata di profilo da un drappo rettangolare di vela sottoposta alla pressione del vento, a prescindere dalla gravità.

Fu studiata per prima da **Giacomo Bernoulli**, che riuscì a definirla mediante un'equazione differenziale che riuscì a risolvere, scoprendo infine che

la VELARIA non è altro che una CATENARIA ruotata di 90°

menù

back

La catenaria nella vita quotidiana

Sebbene la maggior parte delle volte non se ne sia consci, la catenaria è presente nella nostra vita quotidiana in numerose forme. Fra queste citiamo brevemente:

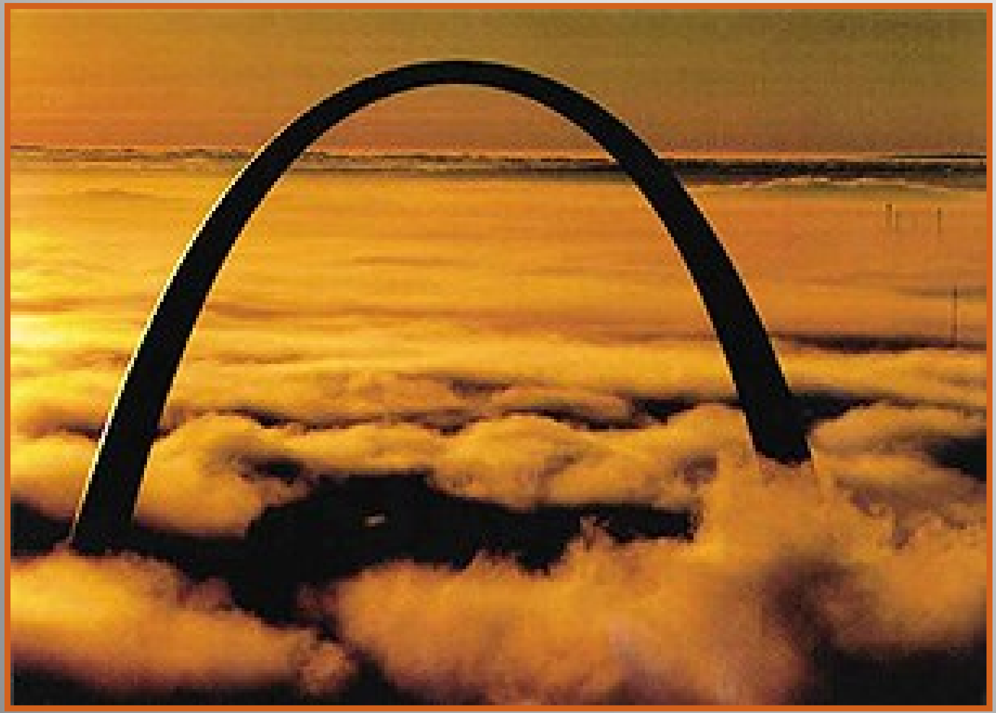
- I cavi tra i piloni dell'elettricità e quelli dei piloni della funivia, se questa si trova ad una delle due estremità.
- I cavi elettrici per la ferrovia.

- Collane senza pendenti al collo delle persone.
- Il profilo di una vela rettangolare, quando è completamente gonfia con il vento perpendicolare.

- PONTI sospesi: prima di venire collegate alla strada le funi assumono la forma di una curva catenaria; una volta realizzati i punti di collegamento esse diventano parabole (come aveva detto Galileo). Esempio: il Golden Gate Bridge in California.

Il GATEWAY ARCH di ST. LOUIS

Il profilo del Gateway Arch di St.Louis è una curva simmetrica della catenaria rispetto ad un asse orizzontale.



Simboleggiante la “porta” aperta dal presidente Jefferson verso ovest, il Gateway Arch di St.Louis, costruito nel 1947 dall’architetto Eero Saarinen, sfrutta una particolare proprietà della catenaria: il peso della struttura viene interamente scaricato sulla tangente alla stessa e dunque sugli estremi, conferendo ulteriore stabilità all’insieme.

Alta 192 metri, la struttura ha per sezione un triangolo equilatero, di grandezza decrescente verso la sommità della struttura.

menù

back

Applicazioni dell'arco catenarico in ARCHITETTURA

“ In una ragnatela, a causa della loro igroscopia, i fili sono carichi di goccioline, e piegandosi sotto il peso, sono divenute altrettante catenarie. ”

“La vita del ragno” di J.H. Fabre

La catenaria è uno degli elementi architettonici più semplici e naturali utilizzati nell’arte.

Brunelleschi aveva costruito i *modelli a corda blanda* della **Cupola di Santa Maria del Fiore** a **Firenze**, che sono sostanzialmente l’utilizzo della catenaria nella costruzione dei modelli di volte rovesciate.

menù

back

next

Sempre a **Firenze** è piuttosto evidente l'applicazione della catenaria al
Ponte di Santa Trìnita.

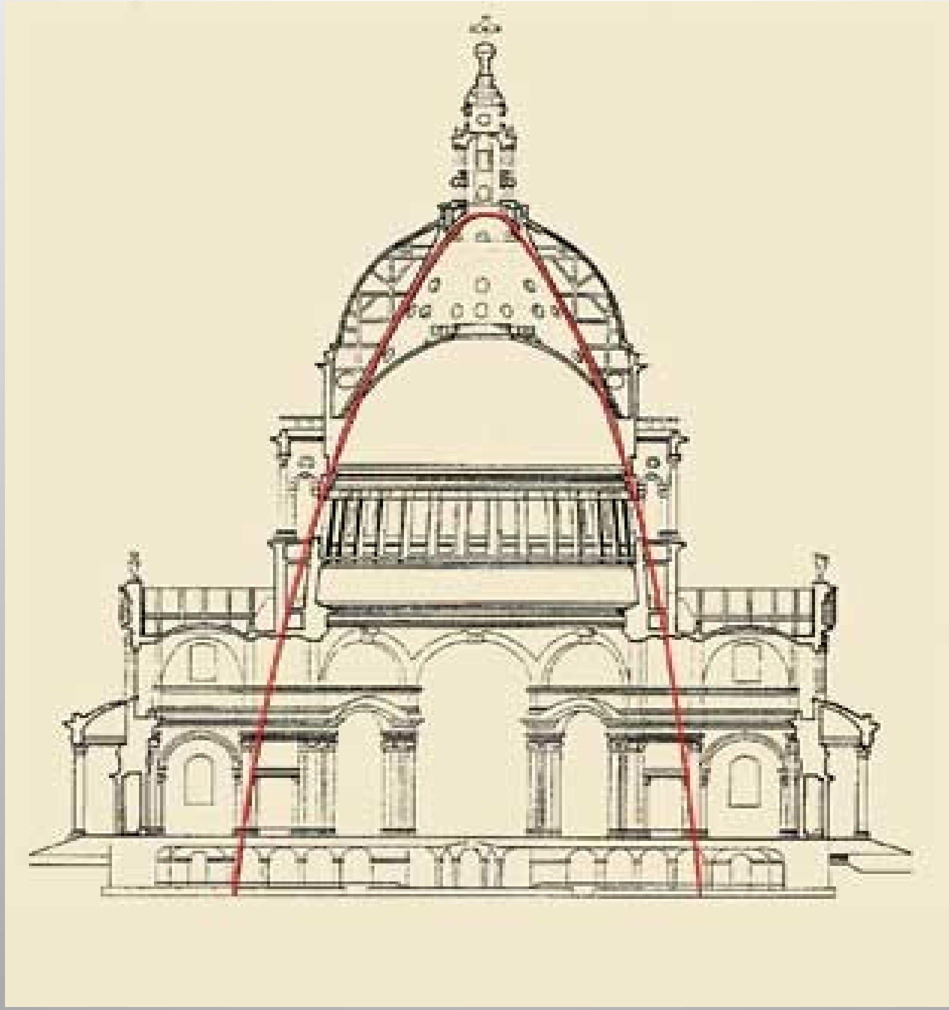
menù

back

next

Un altro esempio di catenaria applicata all'architettura si trova a **Londra** : la **Cattedrale di St. Paul.**

Realizzata nel XVIII sec., la cupola di questa cattedrale è una delle più mastodontiche applicazioni dell'arco di catenaria.



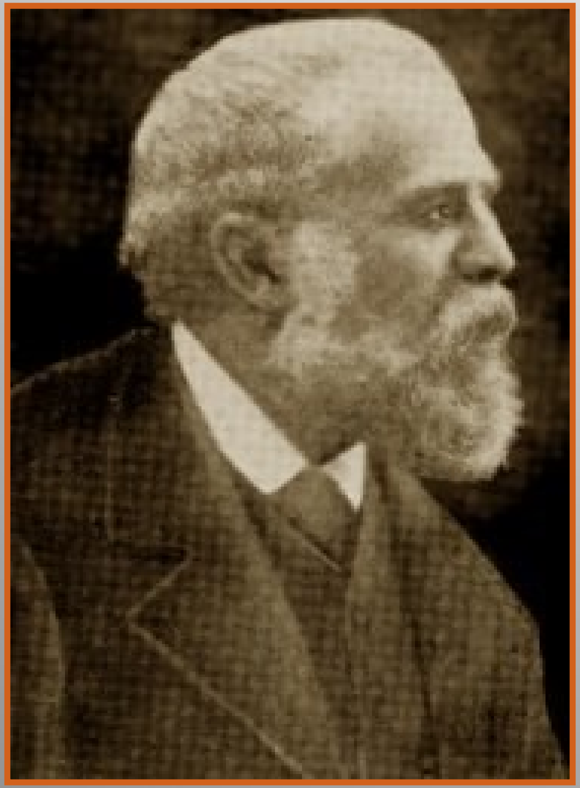
Cattedrale di St. Paul di Christopher Wren a Londra.

menù

back

Gaudì

Nonostante le applicazioni della **catenaria** siano numerose, in Architettura nessuno è mai stato in grado di utilizzarla con così tanta frequenza, abilità e consapevolezza come **Gaudì** .



NOTE BIOGRAFICHE

Gaudì ha sempre lavorato isolato; non appartiene ad alcun movimento, o scuola, o stile, o tempo: ha sempre cercato la sua ispirazione nella Natura, in particolare in quella del Mediterraneo. Inoltre curava di persona ogni dettaglio del progetto che gli veniva assegnato, fino al compimento.

- **Accanto alla grande capacità di osservazione, Gaudì aveva anche la qualità di privilegiare sempre l'assoluta funzionalità delle cose che realizzava. Egli riteneva che la forma più funzionale fosse anche la più bella.**

- Mentre gli architetti hanno sempre utilizzato la geometria euclidea, in quanto “facile” da disegnare, Gaudì, utilizzando la **Geometria della Natura**, fatta di superfici tridimensionali composte (come il paraboloide iperbolico, l’iperboloide, il conoide, l’elicoide e l’arco catenario), diventa senza dubbio un architetto unico nel suo genere.

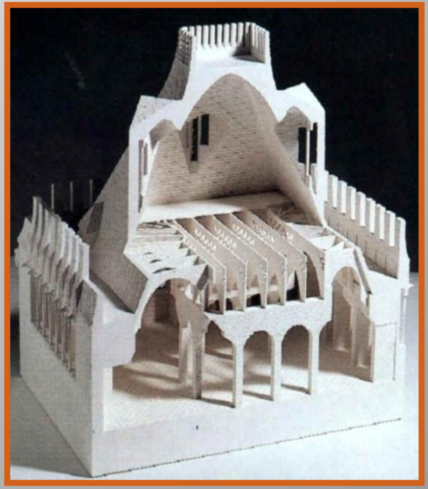
- **Uno degli esempi più frequenti e più semplici dell’applicazione di questa Nuova Geometria ci viene offerto dall’ arco catenario.**

- Gaudì non utilizza l’arco classico, ma l’ **arco catenario**. Questo arco si ottiene rovesciando la catenaria e sostituendo il suo percorso con le pietre e i mattoni.

La caratteristica fondamentale di quest’ arco è che la linea di pressione è uniformemente distribuita su tutta la superficie, e corrisponde esattamente con la linea della catenaria.

Ciò vuol dire che con il minimo materiale si ottiene la massima resistenza. In questo senso l'**arco catenario** è funzionale, ma è anche piacevole, e lo è proprio in virtù della sua funzionalità e spontaneità.

Gaudì utilizza l'arco catenario molto frequentemente, in ogni sua opera, e dedica ad esso anche numerosi studi.

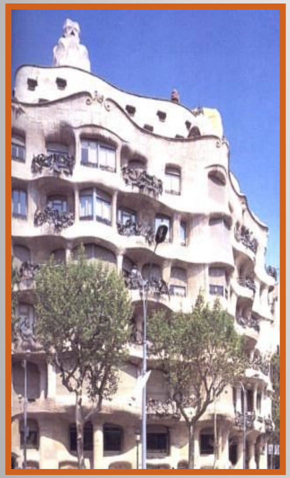


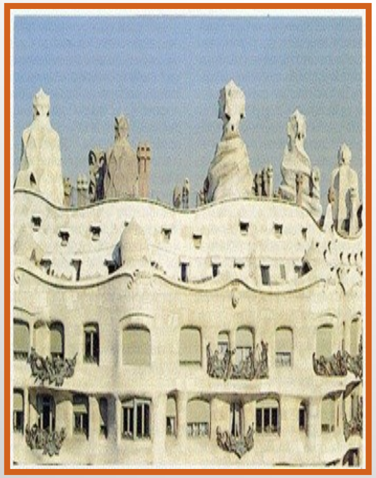
Per la realizzazione della ***Sagrada Famiglia****, Gaudì fa ampio uso dell'****arco catenario****, per la cui realizzazione allestisce un atelier, all'interno del cantiere stesso, il quale contiene i modelli di studio per le colonne e le volte.*

menù

back

next





Casa Milà

Casa Battilò

Gaudì utilizza l'arco catenario, non solo per gli esterni, ma anche per gli interni, assieme a tutti gli altri elementi della sua geometria della natura.

Alvaro Vieira Siza

- Architetto portoghese, nacque a Matosinhos (Porto) nel 1933. Studiò alla “Escola de Belas Artes” (scuola superiore di Belle Arti) a Porto e fu allievo e collaboratore di Fernando Tavora; oggi è direttore della ricostruzione del Chiado a Lisbona.
- Ha vinto numerosi premi internazionali tra cui il premio Pritzker nel 1992 e il Premio Nazionale di Architettura dall’associazione degli Architetti Portoghesi nel 1993.

menù

next

IL PADIGLIONE DEL PORTOGALLO ALL'EXPO '98 A LISBONA

- La Piazza Cerimoniale di fronte al padiglione è un ampio spazio coperto delimitato da due grandi portici che sostengono la copertura di cemento armato; Siza cerca di risolvere le difficoltà tecniche dovute al peso della visiera lasciando che per la forza di gravità essa assuma la forma di una **catenaria**.

IL CAPANNONE VITRA A WEIL AM RHEIN (GERMANIA) 1991-1994

- Per collegare la palazzina del Campus Vitra con i fabbricati del M.I.T. (di Mies van der Rohe) Álvaro Siza realizza una pensilina, la quale, grazie ad una copertura mobile, riesce ad adattarsi alle condizioni atmosferiche. Questa copertura conserva la curvatura impressa dalla capriata che la sostiene. L'armonia dello sbalzo deriva proprio dalla congiunzione formale tra la catenaria degli sforzi, la capriata e la curva della pensilina.

menù

back

L'arco di Torino

ARCO E PONTE SOSPESO VERSO IL LINGOTTO INGRESSO AL VILLAGGIO OLIMPICO, TORINO

Dati tecnici:

- h assoluta dell’arco: 85 m
- h dell’arco in posizione inclinata: 65 m
- larghezza ai piedi dell’arco: 55 m

menù

Vale la pena ripercorrere brevemente le forme matematiche dei ponti, almeno per lo stupore e l’ammirazione di queste ingegnose opere dell’uomo.

Quali forme matematiche nell’architettura dei ponti?

Tralasciando i più antichi ponti ad arco, andiamo a esplorare le forme dei ponti moderni, realizzati a partire dalla fine dell'Ottocento con i nuovi materiali, come il cemento armato e l'acciaio.

Sulla forma matematica di questi ponti il dibattito è spesso accesso e i siti in rete spesso danno informazioni contradditorie, dividendosi tra chi assimila tali strutture principalmente alla forma di una parabola e chi invece alla catenaria, la curva che si ottiene fissando a due estremi una catena (o una fune omogenea), soggetta alla sola forza di gravità.

La catenaria è stata usata in architettura perché, se collocata “rovesciata” verso il basso, genera una figura autoreggente, come emblematicamente rappresentato dal Gateway Arch a St Louis nel Missouri, costruito nel 1965.

Il Gateway Arch di St. Louis (immagine: Bev Sykes from Davis, CA, USA da Flickr)

La catenaria è stata inoltre resa celebre dai laboratori di Gaudì, che

in fase di progettazione delle realizzazioni usava appendere catene

e fili al soffitto per aiutarsi a immaginare le sue architetture

seppure capovolte

Modello di catenaria di
Antoni Gaudì, Casa Milà,
Barcellona
(immagine: Etan J. Tal)

In genere la catenaria è la forma assunta dai tradizionali ponte sospesi di liane o di tronchi, come avviene, seppur in versione moderna, per questo impressionante nuovo ponte a Kusma, in Nepal, inaugurato nel 2010 e diventato una grande attrazione turistica con i suoi 135 m di altezza a strapiombo sopra il fiume Kaligandaki.

Il Kusma-Gyadi Bridge in Nepal
(immagine: Basu Dahal)

(immagine: Emanuele, 2007 su Flickr)

Catenarie o parabole?

Semplificando decisamente l’argomento, possiamo affermare che la catenaria “rovesciata” sia utilizzata a supporto della struttura portante dei ponti sorretti per compressione dal basso, mentre la parabola compare nei ponti sospesi la cui struttura è retta invece dall’alto, attraverso tiranti sostenuti da alte torri verticali. Sono esempi di ponti la cui forma è assimilabile a quella di una catenaria il ponte ferroviario Garabit (1881-1884), progettato da Gustave Eiffel, e il Millenium Bridge (2000) di Newcastle, la cui inclinazione angolare rispetto a terreno è compensata dai cavi che la sorreggono.

Quali sono le forme dei ponti strallati più moderni?

Nei moderni ponti strallati dove i tiranti non vengono più disposti a sorreggere verticalmente l'impalcato, ma sono collocati ad arpa o a ventaglio sui piloni, le forme si modificano e appaiono rettilinee. In questi casi gli effetti di luce ed estetici sono davvero notevoli come si può osservare nel caso del viadotto di Millau in Francia (2004).

Millau Bridge, Francia
(immagine: millauviaduct.wika.com)

E i ponti del futuro?

In attesa di scoprire le nuove forme avveniristiche dei ponti futuri, segnaliamo il ponte più recente, costruito in Cina (ottobre 2015) a Yuntaishan con la base interamente in vetro, adatto per essere attraversato solo dai più temerari, come è facile rendersi conto passando in rassegna questa galleria fotografica.

In esso sembra concretizzarsi quanto scrive l’architetto Giulio Pizzetti sul ponte come simbolo di mediazione tra terra e cielo (da cui il termine Pontifex, “costruttore di ponti”, attribuito al pontefice): «Balzo verso l’infinito e l’inconoscibile, tentativo di ricongiungimento con il soprannaturale e l’ultraterreno».

Forse per questo i ponti ci colpiscono molto, ma la vera sfida è riuscire a percorrerli senza paura.

Concludo queste brevi note ricordando quanto ancora oggi spesso accade.
Molte persone, del resto intelligenti e colte, dichiarano apertamente, a volte senza rammarico e addirittura con una specie di vanto di « …… non aver mai capito la matematica>.

Non considerano come una lacuna nelle proprie conoscenze l’aver cacciato nell’oblio più profondo il concetto di logaritmo, anche se, per esempio, parlano quotidianamente di tassi, di percentuali, di elasticità dei prezzi e così via.

L’impresa di cercare le possibili cause è da ricercarsi, in parte, nella tradizione idealistica della nostra cultura che adotta volentieri lo schema crociano, secondo il quale le scienze particolari sono dei coacervi di « pseudoconcetti».

A questo proposito vorrei ricordare che un illustre collega, G. Melzi, in un suo acuto libretto: « Perché la matematica» dice che «la matematica alberga nel cuore dell’uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere.

In questo ordine di idee si potrebbe dire che spesso chi dichiara di non sapere nulla di matematica spesso « fa « della matematica molto meglio di quanto egli stesso non creda.

Quante volte, per esempio, accade di leggere dei ragionamenti giuridici che sono tipicamente matematici, perché seguono tutte le regole del ragionamento matematico: schematizzazione, formulazione astratta, deduzione rigorosa in base a regole fisse.

Al riguardo ritengo opportuno riportare quanto scritto dal matematico italiano Alessandro Padoa (1868- 1937) : « Nessun altro studio richiede meditazioni più pacate; nessun altro meglio induce ad essere cauti nell’affermare, semplici ed ordinati nell’ argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato al di sopra della maggioranza degli uomini. Perciò io esorto a studiare matematica pur chi si accinge a diventare avvocato o economista, filosofo o letterato, perché io credo e spero che non gli sarà inutile saper ben ragionare e chiaramente esporre. ‘

Anche io credo (anzi spero) di non aver abusato troppo della vostra pazienza.

GRAZIE A TUTTI PER L’ ATTENZIONE