

LUJUUSOPPI

TF00BN90 5op

Sisältö:

- Peruskäsitteet
- Jännitystila
- Suoran sauvan veto ja puristus
- Puhdas leikkaus
- Poikkileikkaussuureiden laskeminen
- Suoran palkin taivutus
- Vääntö
- Nurjahdus

Kirjallisuus:

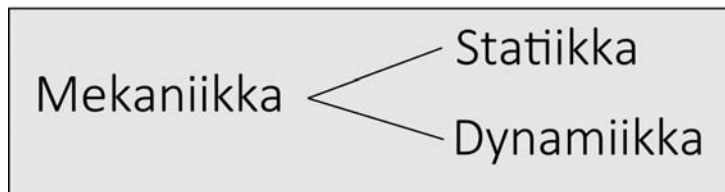
- Salmi Tapio, Pajunen Sami, Lujusopin perusteet, 2010, Pressus Oy
- Salmi Tapio, Teknillisen mekaniikan perusteet, 2006, Pressus Oy

Opintojakson suorittaminen:

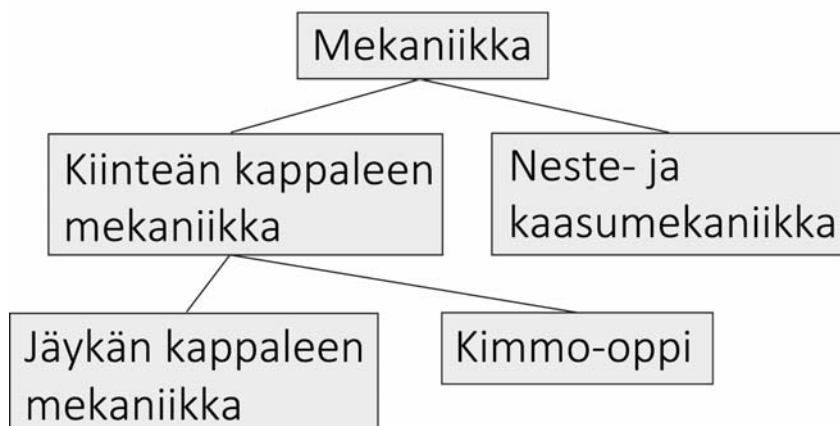
- Oppitunnit ja tarjoamatunnit
- Harjoitustehtävät (materiaalissa)
- Koe (ei välikokeita)

Mekaniikan jaottelu:

Liiketilän mukaan



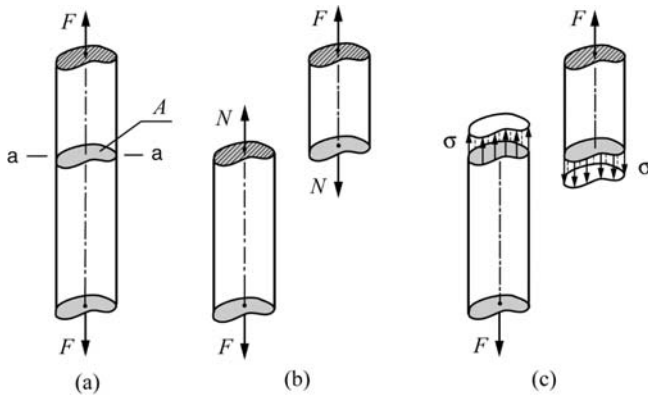
Kappaleen muodostavan aineen mukaan



Peruskäsitteitä

(suoran sauvan veto tai puristus)

Normaalijännitys



- ulkoinen kuormittava voima F
- sisäiset voimat muuttuvat ulkoisiksi (saadaan näkyville) leikkaamalla sauva kahteen osaan
- sauvan poikkileikkausta vastaan kohtisuoran sisäisen voimajakautuman *resultantti* on poikkileikkauspinnan *normaalivoima* N

Mikäli sauvan poikkileikkauksen mitat ovat pieniä sauvan pituuteen verrattuna ja poikkileikkausta ei oteta kovin läheltä sauvan päitä, on poikkileikkauksen sisäinen voima likimain tasan jakautunut poikkileikkauspintaan. Tätä voimajakautuman tiheyttä sanotaan poikkileikkauksen *normaalijännitykseksi* σ (sigma) ja sen lauseke on

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow N = \sigma A$$

missä A on sauvan poikkileikkauksen pinta-ala. Jännityksen yksiköksi saadaan

$$[\sigma] = \frac{[N]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$$

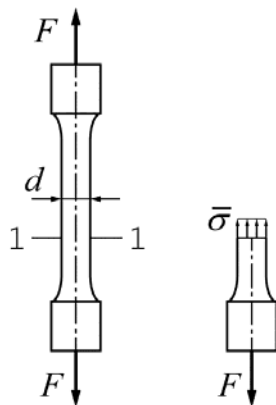
Siis jännityksen perusyksikkö on Pa (pascal).

Lujuusopin ongelmissa jännitysten suuruusluokka on yleensä sellainen, että on luontevampaa käyttää kerrannaisyksiköitä kPa, MPa ja Gpa. Yleisin näistä on Mpa, jonka muunnosyhtälö on

$$\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Jännitystä kutsutaan *vetojännitykseksi*, jos sen suunta on poispäin leikkauspinnasta ja *puristusjännitykseksi*, jos sen se on leikkauspintaan päin.

Näin määritelty normaalijännitys on poikkileikkauksen *keskimääräinen normaalijännitys*



ESIMERKKI

Kuvan vetosauvan poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija $d = 10 \text{ mm}$. Sauvaa venytetään voimalla $F = 10 \text{ kN}$. Laske sauvan keskimääräinen normaalijännitys poikkileikkauksessa 1.

Ratkaisu:

Leikkauksen 1 normaalivoima ja pinta-ala

$$N = F = 10 \text{ kN} \quad A = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ mm}^2$$

ja keskimääräinen normaalijännitys

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N}}{78,54 \text{ mm}^2} \approx 127 \text{ MPa}$$

ESIMERKKI

Kuvan alumiinitankojen AB ja AC poikkileikkaukset ovat ympyröitä, joiden halkaisijat ovat 10 mm ja 8 mm. Tanko AC on vaakasuorassa ja voima $F = 5 \text{ kN}$.

Laske

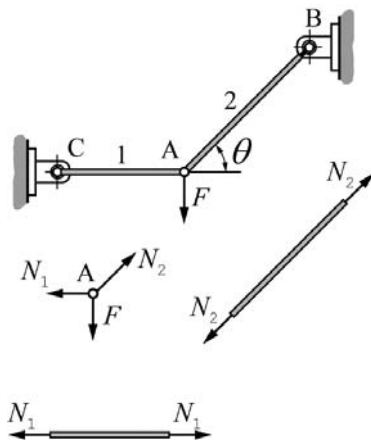
- tankojen poikkileikkauksien normaalijännitykset, kun $\theta = 45^\circ$,
- kulman θ arvo niin, että kummassakin tangossa on sama normaalijännitys.

Ratkaisu:

Käytetään järjestelmää (N,mm).

$$A_1 = \pi \cdot 4^2 \approx 50,27$$

$$A_2 = \pi \cdot 5^2 \approx 78,54$$



Nivelen A vk-kuvasta saadaan

$$+N_2 \sin \theta - F = 0 \quad \Rightarrow N_2 = F / \sin \theta$$

$$-N_1 + N_2 \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow N_1 = F \cot \theta$$

a) Kun kulma $\theta = 45^\circ$, niin

$$N_1 = 5000 / \cot 45^\circ = 5000$$

$$N_2 = 5000 / \sin 45^\circ = 7070$$

Tankojen poikkileikkausten normaalijännityksiksi tulee

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5000}{50,27} \approx 99,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{7070}{78,54} \approx 90,0 \text{ MPa}$$

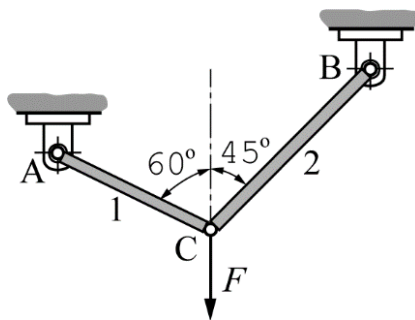
b) Ehdosta, että $\sigma_1 = \sigma_2$ saadaan kulman θ laskemiseksi yhtälö

$$\frac{N_1}{A_1} = \frac{N_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F \cot \theta}{A_1} = \frac{F / \sin \theta}{A_2}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{A_1}{A_2} = \frac{50,27}{78,54} \approx 0,6401 \quad \Rightarrow \theta \approx 50,2^\circ$$

Tällöin kummankin tangon poikkileikkauksen normaalijännitys on

$$\sigma = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5000 \cdot \cot 50,2^\circ}{50,27} \approx 82,9 \text{ MPa}$$



TEHTÄVÄ

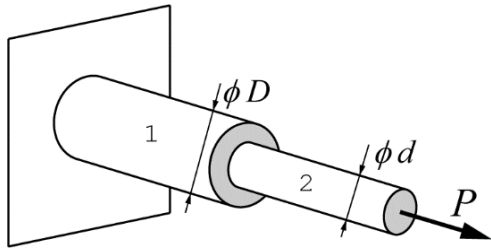
Kuvan sauvarakennetta kuormittaa pystysuora voima $F = 35 \text{ kN}$.

a) Laske sauvojen poikkileikkausten normaalijännitykset.

$$A_1 = 500 \text{ mm}^2, A_2 = 400 \text{ mm}^2$$

a) Jos halutaan, että kummassakin sauvassa on yhtä suuri normaalijännitys 150 MPa , niin mitkä tulee niiden poikkipinta-alojen olla tällöin?

Ratkaisu: (Vast: $171 \text{ mm}^2, 209 \text{ mm}^2$)

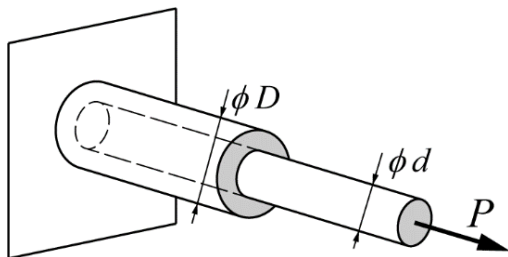


TEHTÄVÄ

Terästangolla (poikkileikkaus kummassakin osassa ympyrä) on kaksi eri halkaisijaa, $D=100\text{mm}$ ja $d=65\text{mm}$. Sauvaa vedetään voimalla $P=425\text{kN}$. Laske tangon poikkileikkauksen normaalijännitykset osissa 1 ja 2.

Ratkaisu:

(Vast: $\sigma_1 \approx 54,1\text{MPa}$)



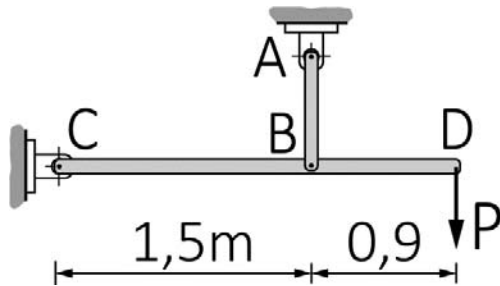
TEHTÄVÄ

Terästanko on liimattu putken sisään. Laske tangon poikkileikkauksen normaalijännitys. Mitoita putken seinämän paksuus siten, että putken poikkileikkauksessa on yhtä suuri normaalijännitys kuin tangossa. Liimaliitos pitää.

$P = 12\text{kN}$, $d = 10\text{mm}$

Ratkaisu:

(Vast: 153MPa , $2,1\text{mm}$)

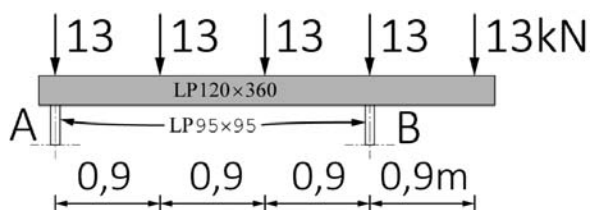


TEHTÄVÄ

Vaaka-asennossa olevaa palkkia CBD kuormitetaan sen päästä D alaspäin voimalla P . Pystysauvan AB pinta-ala on 550 mm^2 . Määritä voiman P suuruus siten, että sauvan AB normaalijännitys on 40 MPa .

Ratkaisu:

(Vast: $13,8 \text{ kN}$)



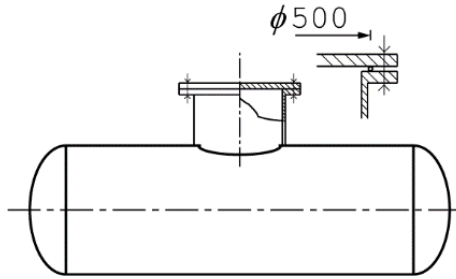
TEHTÄVÄ

Omakotitalon kattoristikoita kannattelee kuistin kohdalla liimapuupalkki (poikkileikkaus 120×360). Kattoristikot ovat $k900$ – jaolla ja kultakin ristikolta palkille tuleva pistekuorma $P=13 \text{ kN}$. Laske liimapuupalkkia kannattelevien puupilarien (LP95x95) normaalijännitykset.

Ratkaisu:

(Vast: $-2,4 \text{ MPa}$, $-4,8 \text{ MPa}$)

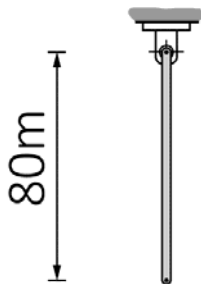
TEHTÄVÄ



Paineastian tarkistusluukku on kiinnitetty 25 kappaleella ruuveja M10 joiden halkaisija kierteen pohjan kohdalla on 8,593 mm. Tiivistysrenkaan halkaisija on 500 mm. Mikä on ruuvien poikkileikkauksen normaalijännitys kun astiassa on ylipaine 1,2 MPa?

Ratkaisu: (Vast: 163MPa)

TEHTÄVÄ



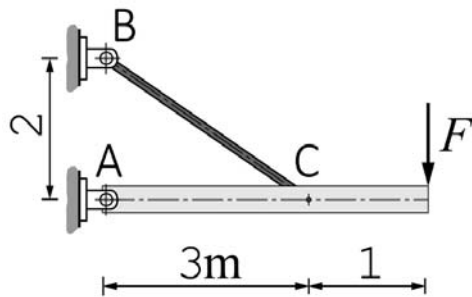
Alumiininen tanko, jonka pituus on 80m, riippuu vapaasti ainoastaan oman painonsa kuormittamana. Määritä tangon suurin normaalijännitys olettaen alumiinin ominaispainoksi $\gamma = 26,6 \text{ kN/m}^3$

Ratkaisu:

(Vast: 2,13MPa)

TEHTÄVÄ

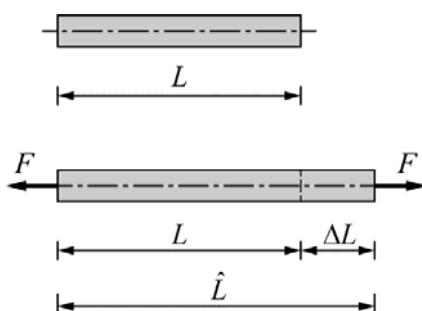
Määritä oheisen konsolipalkin veto-
tangon BC poikkileikkauksen, jonka
halkaisija on 20mm, normaalijännitys.
Palkkia kuormittava voima $F = 25 \text{ kN}$.



Ratkaisu:

(Vast : 191 MPa)

Venymä



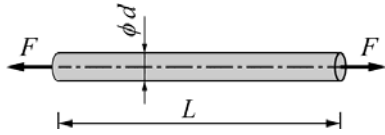
Kun suoraan sauvaan kohdistuu
akiaalinen kuormitus, se aiheuttaa
sauvan *pituuden muutoksen* ΔL , joka
voidaan laskea erotuksesta

$$\Delta L = \hat{L} - L$$

missä L sauvan alkupituus (kuormitta-
maton pituus) ja \hat{L} sauvan lopullinen
pituus.

Sauvan pituuden muutoksen ΔL suhdetta sen alkuperäiseen pituuteen
kutsutaan *suhteelliseksi venymäksi* (tai lyhyesti *venymäksi*) ja sitä
merkitään kirjaimella ε (epsilon). Sen lauseke on

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$



ESIMERKKI

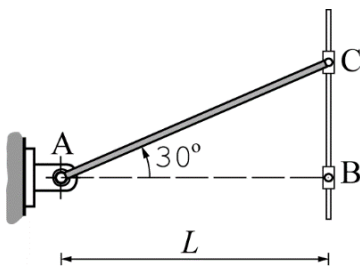
Teräksistä suoraa sauvaa, jonka pituus $L = 1000\text{ mm}$ ja jonka poikkileikkaus on ympyrä, $d = 10\text{ mm}$, venytetään voimalla $F = 16,5\text{ kN}$. Tällöin sen loppupituudeksi tulee $\hat{L} = 1001\text{ mm}$. Laske sauvan venymä ja normaalijännitys.

Ratkaisu: Lasketaan ensin pituuden muutos:

$$\Delta L = \hat{L} - L = 1001\text{ mm} - 1000\text{ mm} = 1\text{ mm}$$

Venymäksi saadaan: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{1\text{ mm}}{1000\text{ mm}} = 0,001 = 1\text{‰} = 1000\mu$

Normaalijännitys: $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{16,5 \cdot 10^3\text{ N}}{\pi \cdot 5^2\text{ mm}^2} \approx 210\text{ MPa}$



ESIMERKKI

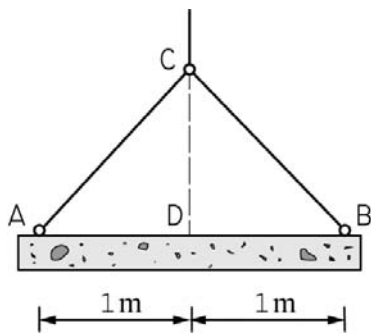
Kuvan hyvin joustavasta materiaalista tehdyssä sauvassa AC ei ole venymää, kun se on vaakasuorassa asennossa. Luisti siirretään kohtaan C. Laske tällöin sauvaan syntyvä venymä.

Ratkaisu: Lasketaan ensin lopullinen pituus

$$\hat{L} = L / \cos 30^\circ = 1,1547 \cdot L$$

Pituuden muutos $\Delta L = \hat{L} - L = 1,1547L - L = 0,1547L$

Venymäksi saadaan: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,1547L}{L} = 0,1547 = 15,47\%$



TEHTÄVÄ

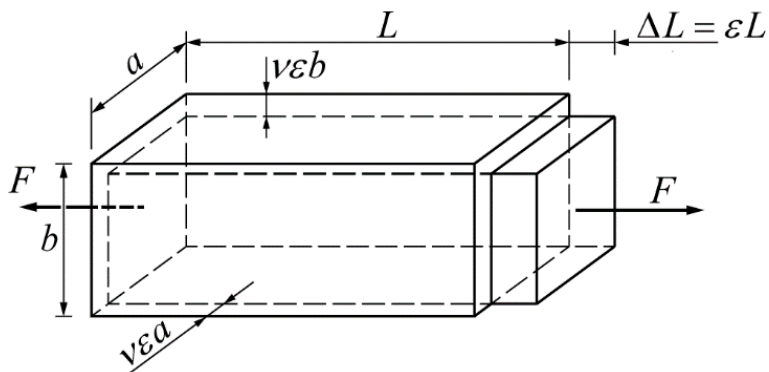
Nostettaessa kuvan betonielementtiä havaitaan teräsvaijerien kiristyttyä, että välimatka CD on 1130 mm. Laske vaijerien AC ja BC venymä, kun niiden kuormittamaton pituus on 1500 mm.

Ratkaisu:

(Vast: 5960μ)

Poissonin luku

Kokeellisesti voidaan todeta, että venytettäessä (puristettaessa) sauvaa tapahtuu pituussuuntaisen venymän lisäksi kutistumista (laajenemista) *poikittaissuunnassa*. Siis venytetyn sauvan poikittaimitat pienenevät ja puristetun kasvavat.



Kokemuksen perustuen siis havaitaan, että kun venymät ovat riittävän pieni, niin *poikittaissuuntaisen venymän* ε_{\perp} suhde *pitkittäiseen venymään* ε on negatiivinen vakio. Sen vastalukua

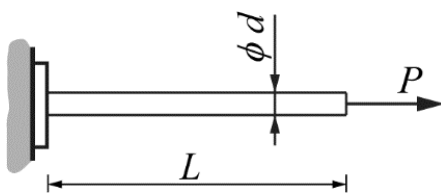
$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}$$

merkitään symbolilla ν (nyy) ja kutsutaan *POISSON* in luvuksi. Myös nimitystä *suppeumaluku* käytetään.

Isotrooppisilla materiaaleilla $0 \leq \nu \leq 1/2$.

Jos $\nu = 1/2$, niin materiaali on *kokoonturistumatonta* eli sen tilavuus ei muutu. (Esimerkiksi kumi ja parafiini.)

Teräksen 0,3, betoni 0, ... ,0,2, korkki 0, .

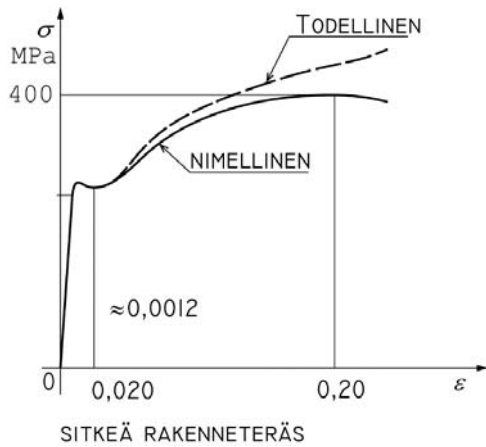


TEHTÄVÄ

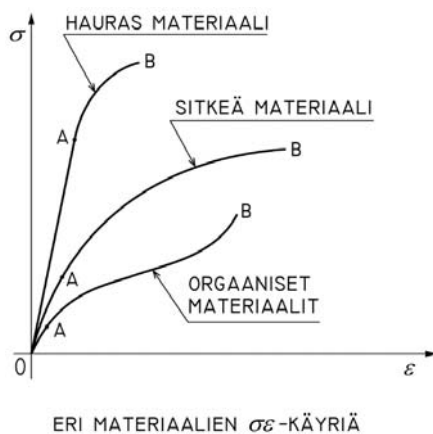
Metallisauvaa vedetään voimalla $P = 3,5\text{kN}$ Sauvan pituus $L = 200\text{ mm}$ ja sen halkaisija $d = 6\text{ mm}$. Havaitaan, että sen pituuden muutos $\Delta L = 0,55\text{ mm}$ ja halkaisijan muutos $\Delta d = -0,0058\text{ mm}$
Laske metallin *Poissonin* vakio ν ja sen kimmomoduuli E .

Ratkaisu: (Vast: 0,35, 45,0GPa)

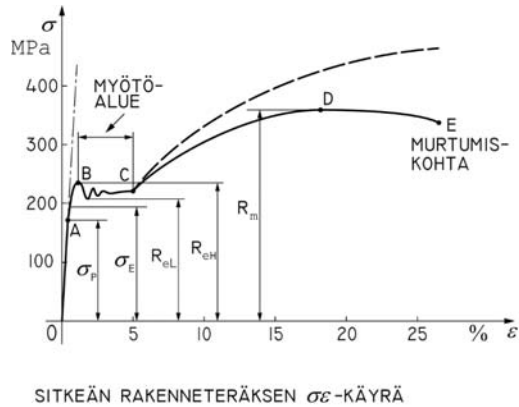
Jännityksen ja venymän välinen yhteys



Aksiaalisesti kuormitetuille sauvoille tehtävistä kokeista saatavat jännitys-venymäkäyrät eli $\sigma\varepsilon$ -käyrät poikkeavat toisistaan huomattavastikin eri materiaaleilla. Kuvassa on esitetty käyrä, joka on luonteenomainen sitkeille rakenneteräksille. Käyrästä voidaan havaita myötöalue venymän 0,020 molemmin puolin. Myötöllä tarkoitetaan kohtaa, jossa venymä kasvaa jännityksen pysyessä likimain samana.



Materiaaleja, joissa sauvan murtumista edeltää voimakas venyminen, kutsutaan *sitkeiksi*. Tällaisia ovat esimerkiksi monet teräkset ja metalliseokset tavallisissa käyttöolosuhteissa. *Hauraita* ovat sellaiset materiaalit, jotka murtuvat jo melko pienillä venymillä. Tällaisia ovat esimerkiksi valurauta, keraamiset materiaalit, betoni, eräät metalliseokset ja lasi.



Aluksi jännitys on suoraan verrannollinen venymään tiettyyn arvoon, *suhteellisuusrajaan* σ_p , asti. Vaikka jännitys kasvaa, on venymä vielä täysin palautuvaa *kimmorajaan* σ_E asti. Venytettäessä sauvaa edelleen saavutetaan ns. *myötöraja* R_e , jolloin venymä kasvaa tarvitsematta lisätä voimaa. Tätä käyrän aluetta kutsutaan myötöalueeksi. Ylempi myötöraja R_{eH} on se jännityksen arvo, jolla myötö alkaa ja alempi myötöraja R_{eL} on pienin myötöalueella esiintyvä jännitys.

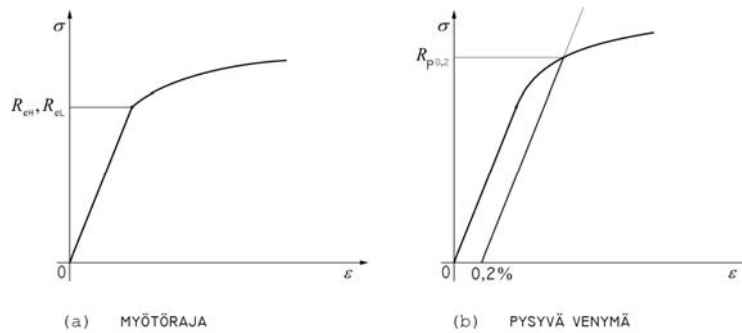
Puristuspuolella myötörajaa sanotaan usein myös *tyssäysrajaksi*.

Vetokokeen jatkuessa myötövaiheen ohi kasvaa tarvittava jännitys jälleen venymän kasvaessa. Tätä vaihetta kutsutaan *myötölujittumiseksi* (väli C-D).

Jännitystä edelleen kasvatettaessa saavutetaan lopulta materiaalin *murtolujuus* R_m (puristuspuolella R_{-m}). Murtolujuus on nimellisjännityksen arvo kokeen aikana. Tämän jälkeen venymän edelleen kasvaessa sauvaan vaikuttava normaalivoima pienenee ja lopulta murtuminen tapahtuu pisteessä E.

Joillakin materiaaleilla, kuten esimerkiksi monilla korkean lujuusluokan teräslajeilla, ei esiinny selvää myötörajaa. Niillä on kuitenkin jännitysvenymäkäyrässä derivaatan epäjatkuvuuskohta. Tämän kohdan jännityksen arvoa pidetään myötörajana (kuva a seuraavalla sivulla).

Materiaaleilla, joilla ei voida havaita derivaatan epäjatkuvuuskohtaa, käytetään myötörajana pysyvän venymän arvoa 0,2% . Tätä venymää merkitään $R_{p0,2}$ ja se määritetään kuvan b mukaisesti.



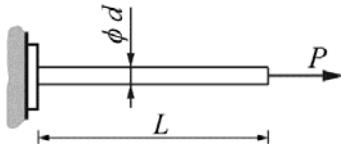
HOOKEEn laki ja kimmomoduli

Useimpien käytössä olevien rakennusmateriaalien käyttäytyminen on $\sigma\epsilon$ -käyrän alkuosalla *lineaarisesti kimmoista* suhteellisuusrajaan σ_p saakka. Useimmissa tapauksessa käytettäessä rakennemateriaaleina metalleja, muoveja, puuta tai betonia, suunnitellaan rakenteet siten, että niiden käyttäytyminen voidaan olettaa lineaarisesti kimmoiseksi. Tällöin jännityksen ja venymän yhteys voidaan esittää yksinkertaisella yhtälöllä

$$\sigma = E\epsilon \quad (\text{HOOKEEn laki})$$

missä E on *kimmomoduli* tai *kimmokerroin*. Sen yksikkö on sama kuin jännityksenkin, koska venymällä ei ole yksikköä. (Yleensä kannattaa käyttää Gpa, esimerkiksi teräksen kimmomoduli $E_s = 210 \text{ GPa}$.)

ESIMERKKI



Kuvan vetosauvan poikkileikkaus on ympyrä, jonka halkaisija $d = 6 \text{ mm}$. Sauvaa venytetään voimalla $P = 3,5 \text{ kN}$. Laske sauvan suhteellinen venymä ja lopullinen pituus, kun $E = 45,0 \text{ GPa}$ ja $L = 200 \text{ mm}$.

Käytetään järj. (N,mm)

Ratkaisu: $N = P = 3500$ $A = \pi \cdot 3^2 = 28,27$

Normaalijännitys $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{3500}{28,27} \approx 123,8 \text{ MPa}$

Lasketaan venymä Hooken laista

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{123,8 \text{ MPa}}{45,0 \cdot 10^3 \text{ MPa}} = 2,751 \cdot 10^{-3}$$

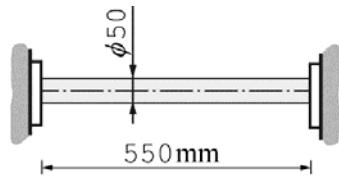
Pituuden muutos saadaan suhteellisen venymän määritelmästä

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \varepsilon L = 2,752 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 0,5502 \text{ mm}$$

Lopulliseksi pituudeksi tulee

$$\hat{L} = L + \Delta L = 200 + 0,5502 \approx 200,55 \text{ mm}$$

ESIMERKKI



Kuvan sauva pakotetaan liikkumattomien tukien väliin. Tukiväli on 1mm liian lyhyt. Laske sauvan poikkileikkauksen normaalijännitys.

$$E = 210\text{GPa}$$

Käytetään järj. (N,mm)

Ratkaisu:

Sauvan pituuden muutos $\Delta L = -1\text{mm}$, joten venymä

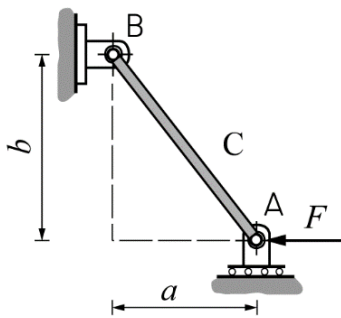
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{-1\text{mm}}{551\text{mm}} = -1815\mu$$

Normaalijännitys (Hooken laista)

$$\sigma = E\varepsilon = 210 \cdot 10^3 \text{MPa} \cdot (-1815 \cdot 10^{-6}) = -381,1 \text{MPa}$$

(puristusjännitys !)

TEHTÄVÄ



Kuvan terässauvaa kuormittaa vaakasuora voima $F = 20\text{kN}$. Sauvan poikkileikkauksen ala on $A = 2500\text{mm}^2$. Laske sauvan pituuden muutos, kun $a = 3\text{m}$ ja $b = 4\text{m}$ sekä

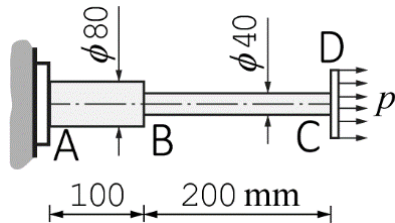
$$E = 210\text{GPa}$$

Ratkaisu:

$$(Vast: -0,314\text{mm})$$

Ratkaisu:

TEHTÄVÄ



Kuvan jäykkään ympyrän muotoiseen levyyn D, jonka halkaisija on 100 mm, vaikuttaa pintakuormitus $p = 20 \text{ N/mm}^2$. Laske normaalijännitykset ja venymät osissa AB ja BC sekä laske levyn D siirtymä. Sauvan paksumpi osa on terästä, jonka kimmomoduuli on 210 GPa ja ohuempi osa alumiinia, jonka $E_{\text{Al}} = 70 \text{ GPa}$.

(Vast: 31,25 MPa, 125,0 MPa, 0,3720 mm)

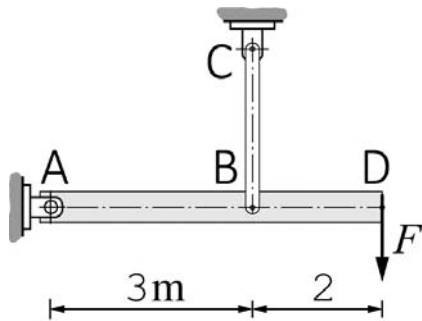
TEHTÄVIÄ

Poikkileikkaukseltaan pyöreää terästankoa (halkaisija 16 mm) vedetään sellaisella voimalla, että tanko venyy 0,05 % alkuperäisestä pituudestaan. Kuinka suurina ovat jännitys ja kuormitus? (105 MPa, 21 kN)

Teräksinen vetotanko muodostuu kahdesta osasta:

- 1,2 metriä pitkää tangosta, jonka halkaisija on 6 mm
- 1,6 metriä pitkää putkesta, jonka sisä- ja ulkohalkaisijat ovat 6 ja 7 mm.

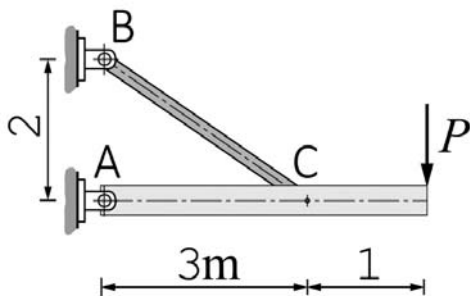
Kuinka paljon tämä 2,8 metriä pitkä yhdistetty tanko saa vedettäessä venyä, kun jännitys ei saa ylittää arvoa 250 N/mm^2 ? (2,4 mm)



TEHTÄVÄ

Laske tangon CB pituuden muutos, kun sen pinta-ala on 300mm^2 . Sauvan materiaalin kimmomoduuli on $45,0\text{ Gpa}$. Kuinka paljon voiman vaikutuspiste siirtyy? Voima on suuruudeltaan 20 kN ja sauvan CB pituus kuormittamattomana on 2m .

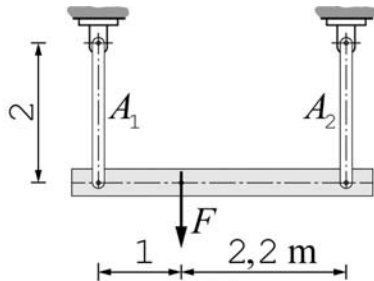
Vast. $\Delta L \approx 4,94\text{mm}$, $v_F \approx 8,23\text{mm}$



TEHTÄVÄ

Hyvin jäykkä palkki on tuettu alumiinisauvalla, jonka materiaalin AlMgSi (SFS 2591) kimmomoduuli on 70 Gpa . Sauvan poikkileikkausala on 600 mm^2 . Kuinka pitkä pitää sauvan alun perin olla, kun halutaan, että palkki on aivan vaakasuora, kun sen päähän vaikuttaa voima $P = 35\text{ kN}$.

(Vast : 3598,3mm)



TEHTÄVÄ

Kuvan jäykkää vaakasuoraa palkkia kuormittaa voima $F = 160$ kN.

Pystytangot ovat terästä S355J0 (EN10025), jonka kimmomoduuli on 210 Gpa ja myötöraja 355 Mpa. Laske, kuinka paljon voiman F vaikutuspiste siirtyy alaspäin, kun $A_1 = 400\text{mm}^2$, $A_2 = 200\text{mm}^2$

(Vast: X mm)