

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Богоявленский, Необходимые условия для разделимости систем уравнений в частных производных произвольного порядка, *УМН*, 2005, том 60, выпуск 1(361), 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1394>

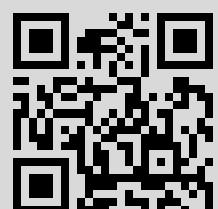
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 207.241.231.108

13 марта 2020 г., 01:17:20



**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ РАЗДЕЛИМОСТИ
СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА**

О. И. БОГОЯВЛЕНСКИЙ

В работе выведены необходимые условия для разделимости общей системы уравнений в частных производных (УрЧП)

$$\frac{\partial^m u^i}{\partial t^m} = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{j=1}^n A_{\alpha j}^i(u) \frac{\partial^K u^j}{\partial x_\alpha} + F^i \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}}, \frac{\partial^{K-1} u}{\partial x_\gamma} \right) \quad (1)$$

на q невзаимодействующих подсистем или на q треугольно-взаимодействующих подсистем. Здесь $u^i = u^i(t, x_1, \dots, x_k)$, $i, j = 1, \dots, n$, и α, β являются мультииндексами, $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$, $|\alpha| = i_1 + \dots + i_k = K$, $|\beta|, |\gamma| \leq K - 1$. Система (1) после преобразований

$$u^i \longrightarrow v^j = v^j(u^1, \dots, u^n) \quad (2)$$

принимает вид

$$\frac{\partial^m v^i}{\partial t^m} = \sum_{|\alpha|=K} \sum_{j=1}^n \bar{A}_{\alpha j}^i(v) \frac{\partial^K v^j}{\partial x_\alpha} + \bar{F}^i \left(v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^{|\beta|} v}{\partial x_\beta}, \dots, \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}, \frac{\partial^{K-1} v}{\partial x_\gamma} \right),$$

где

$$\bar{A}_{\alpha j}^i(v) = \sum_{p,q=1}^n (D^{-1})_p^i A_{\alpha q}^p(u) D_j^q, \quad D_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j}. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула (3) означает, что для любых $m \geq 1$ и $K \geq 1$ и для любого мультииндекса α , $|\alpha| = K$, коэффициенты $A_{\alpha j}^i(u)$ образуют $(1, 1)$ -тензоры по отношению к преобразованиям (2). Это свойство систем (1) УрЧП произвольного порядка обобщает хорошо известное свойство [1] систем первого порядка, для которых $m = K = 1$.

Для каждого $(1, 1)$ -тензора $A_{\alpha j}^i(u)$ мы используем соответствующий $(1, 2)$ -тензор Нийенхейса [2]:

$$N_{\alpha j k}^i = \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial A_{\alpha k}^i}{\partial u^p} A_{\alpha j}^p - \frac{\partial A_{\alpha j}^i}{\partial u^p} A_{\alpha k}^p + \frac{\partial A_{\alpha j}^p}{\partial u^k} A_{\alpha p}^i - \frac{\partial A_{\alpha k}^p}{\partial u^j} A_{\alpha p}^i \right), \quad (4)$$

который определяет кососимметрическое векторное произведение любых двух касательных векторов $V, U \in T_u(\mathbb{R}^n)$: $N_\alpha(V, U) = -N_\alpha(U, V) \in T_u(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любых касательных векторов $V \in T_u(\mathbb{R}^n)$, рассмотрим линейные преобразования $N_\alpha V$ в касательных пространствах: $U \longrightarrow N_\alpha V(U) = N_\alpha(V, U)$, где $U \in T_u(\mathbb{R}^n)$. Определим инвариантные многочлены от компонент вектора V :

$$P_K(V) = \det \|B_{KV} - Q\|, \quad B_{KV} = \sum_{|\alpha|=K} Q_\alpha N_\alpha V, \quad (5)$$

где операторы $Q = Q(A_\delta, \dots, A_\tau)$ и $Q_\alpha = Q_\alpha(A_\delta, \dots, A_\tau)$ являются произвольными многочленами от операторов A_δ, \dots, A_τ , $|\delta| = \dots = |\tau| = K$.

Покажем, что многочлен $P_K(V)$ имеет степень $\deg P_K(V) \leq n - 1$. Действительно, оператор B_{KV} (5) линейно зависит от компонент вектора V . Сумма всех слагаемых наивысшей степени n в многочлене $P_K(V)$ равна $\det \|B_{KV}\|$. Однако $\det \|B_{KV}\| \equiv 0$, потому что $B_{KV}(V) = 0$, поскольку $N_\alpha V(V) = N_\alpha(V, V) = 0$. Поэтому $\deg P_K(V) \leq n - 1$.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие для разделимости). *Если система (1) может быть разделена на $q \geq 2$ невзаимодействующих подсистем, то многочлен $P_K(V)$ (5) имеет степень $\deg P_K(V) \leq n - q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в некоторых координатах v^1, \dots, v^n система (1) разделяется на $q \geq 2$ невзаимодействующих подсистем размерностей m_1, \dots, m_q , где $m_1 + \dots + m_q = n$. Тогда соответствующие $(1, 1)$ -тензоры $A_{\alpha j}^i(v)$ (и операторы Q, Q_α) в координатах v^1, \dots, v^n имеют вид q диагональных блоков $A_{\alpha 1}(v), \dots, A_{\alpha q}(v)$ размеров $m_1 \times m_1, \dots, m_q \times m_q$, которые зависят от различных групп переменных v^i . Соответствующие тензоры Нийенхайса $N_{\alpha j k}^i$ (4) являются прямыми суммами тензоров Нийенхайса $N_{\alpha \ell}$ в подпространствах \mathbb{R}^{m_ℓ} , где $\ell = 1, \dots, q$. Поэтому многочлен $P_K(V)$ имеет вид

$$P_K(V_1 + \dots + V_q) = \det \left\| \sum_{|\alpha|=K} Q_\alpha N_{\alpha V} - Q \right\| = P_{K1}(V_1) \cdots P_{Kq}(V_q).$$

Каждый многочлен $P_{K\ell}(V_\ell)$ имеет степень $\leq m_\ell - 1$. Поэтому степень многочлена $P_K(V)$ удовлетворяет соотношению $\deg P_K(V) \leq n - q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Другое необходимое условие получается путем применения в формуле (5) $(1, 2)$ -тензора Хаантжеса $H_{\alpha j k}^i$ [3] вместо тензора Нийенхайса $N_{\alpha j k}^i$ (4). Необходимое условие для полного разделения системы (1) на n невзаимодействующих уравнений имеет вид: для любого многочлена $Q(A_\delta, \dots, A_\gamma)$ с постоянными коэффициентами соответствующий тензор Нийенхайса $N_{Q j k}^i \equiv 0$.

Система УРЧП (1) имеет q треугольно-взаимодействующих подсистем, если в некоторых координатах v^1, \dots, v^n система (1) имеет замкнутую подсистему в подгруппе переменных v^1, \dots, v^{m_1} , которая содержится в замкнутой подсистеме в переменных $v^1, \dots, v^{m_1}, v^{m_1+1}, \dots, v^{m_1+m_2}$ и т. д., где $m_1 + \dots + m_q = n$.

ТЕОРЕМА 2. *Если система (1) имеет $q \geq 2$ треугольно-взаимодействующих подсистем, то выполняется необходимое условие для многочлена (5): $\deg P_K(V) \leq n - q$. Если система (1) имеет замкнутую собственную подсистему, то $\deg P_K(V) \leq n - 2$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

ПРИМЕР. Система Бенни для 2ℓ функций $u^i(t, x), \eta^i(t, x), i = 1, \dots, \ell$, имеет вид

$$u_t^i = -u^i u_x^i - (\eta_1 + \dots + \eta_\ell)_x, \quad \eta_t^i = -(\eta^i u^i)_x. \quad (6)$$

Соответствующий многочлен $P_K(V)$ (5), где $K = 1, k = 1$ и $Q = Q_\alpha = 1$, определяется формулой

$$P_1(V) = (V^{\ell+1} + \dots + V^{2\ell} - 1)^{2\ell-1}, \quad (7)$$

где $V = V^1 \partial_{u_1} + \dots + V^\ell \partial_{u_\ell} + V^{\ell+1} \partial_{\eta_1} + \dots + V^{2\ell} \partial_{\eta_\ell}$. Многочлен $P_1(V)$ (7) имеет максимальную возможную степень $n - 1$, $n = 2\ell$. Поэтому, применяя теорему 2, мы получаем, что система Бенни (6) не имеет замкнутых собственных подсистем и, следовательно, неразложима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. P. Stone // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18. P. 868–873. [2] A. Nijenhuis // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1951. V. 13. P. 200–212. [3] J. Haantjes // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1955. V. 17. P. 158–162.