С. Л. БЛЮМИН

РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ

О

«ЧИСЛЕ»

НЕКОТОРЫЕ СОВРЕМЕННЫЕ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ЛИПЕЦК

2005

УДК 512.8
Б 71

Блюмин С.Л. Развитие понятия о «числе». Некоторые современные представления: Брошюра. – Липецк: Блюмин, 2005. – 30 с.

В брошюре собраны научно-методические работы, опубликованные автором в течение нескольких последних лет и направленные на популяризацию некоторых современных представлений о многообразии алгебраических структур, элементы которых часто именуются «числами», возникающих и применяемых при формализации реальных явлений, объектов и процессов.

Материал, представленный в брошюре, позволяет проследить «развитие понятия о числе» от исходных для всей фундаментальной и прикладной математики натуральных чисел до использующихся в современной математике и ее приложениях нечетких и сверхнатуральных чисел.

Брошюра может представить интерес для специалистов в области прикладной математики – работающих, обучающих и обучающихся.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Представленные ниже работы посвящены теме, которая вполне обоснованно может рассматриваться как дальнейшее «развитие понятия о «числе»» в свете некоторых современных представлений. Действительно, возвращая, с одной стороны, к классическому, с исторической и методической точек зрения, процессу расширения множеств (не числовых полей, в связи с чем здесь и далее часто используются кавычки) натуральных и целых «чисел» до множеств (истинных числовых полей) рациональных, действительных и комплексных чисел, эта тема, с другой стороны, трактует указанный процесс расширения алгебраических структур таким образом, что в нее укладываются как давно известные (но отличные от вышеуказанных) множества двойных, дуальных, гиперкомплексных и других «чисел», так и возникшие сравнительно недавно в современной фундаментальной и особенно прикладной математике, - в первую очередь в связи с проблемами математического моделирования, принятия решений и вообще искусственного интеллекта, теории и практики социально-экономических и вообще управляемых систем, - идемпотентные, нечеткие, сверхнатуральные, решеточные и другие «числа»; все они образуют алгебраические структуры, отличные от числовых полей.

Достоинства представленного материала заключаются в том, что, будучи, в соответствии с самим духом темы, вполне элементарным, он доступен восприятию при первом знакомстве; будучи, с точки зрения «традиционной» математики, вполне нетрадиционным, он позволяет, в сравнительном аспекте, глубже понять, казалось бы, хорошо известные факты, обратить внимание на их, подчас неожиданные, аспекты; будучи, с научной точки зрения, новым, он ориентирует в современных путях развития аппарата прикладной математики и стимулирует его использование в актуальных научных исследованиях.

Разнообразные «числовые» системы столь интенсивно «плодятся» в современных исследованиях, что специалисты периодически обращаются к истокам происхождения самого понятия о числе, стремясь критически осмыслить как вновь появляющиеся, так и освященные веками «числа», их адекватность математическому моделированию реальных явлений, объектов и процессов. Укажем лишь на некоторые последние работы такого рода:

Chaitin G. How real are real numbers? http://xxx.lanl.gov arXiv.org e-Print archive math.HO/0411418. 18 Nov 2004. 13 p.

Rosinger E. What scalars should we use? http://xxx.lanl.gov arXiv.org e-Print archive math.HO/0505336. 16 May 2005. 28 p.

Muekenheim W. Physical constraints of numbers. http://xxx.lanl.gov arXiv.org e-Print archive math.HO/0505649. 31 May 2005. 7 p.

Материал, представленный в брошюре, позволяет проследить «развитие понятия о числе» от исходных для всей фундаментальной и прикладной математики натуральных чисел до использующихся в современной математике и ее приложениях нечетких и сверхнатуральных чисел.

«РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ»: НЕКОТОРЫЕ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Развитие понятия о числе (как элементе *числового поля,* удовлетворяющего известному набору аксиом) является важным методическим аспектом преподавания математики (фактически отражающим и соответствующий исторический процесс): последовательно изучают, погружая, вкладывая предыдущую алгебраическую структуру в последующую (расширяя предыдущую до последующей), одномерные *полукольцо* **N** натуральных «чисел», *кольцо* **Z** целых «чисел», *поле* **Q** рациональных чисел (чисто алгебраическая часть цепочки), *поле* **R** действительных чисел (уже с привлечением анализа; эта часть цепочки стандартно изучается в средней школе), двумерное *поле* **C** комплексных чисел (переход от **R** к **C** также носит чисто алгебраический характер; изучается в математических классах средней школы и стандартно в высшей школе). Аксиомы числового поля начинают полностью выполняться в **Q, R, C** (с этим связано использование кавычек) и нарушаются в ряде известных продолжений и ответвлений цепочки. Так, продолжая ее с сохранением аксиомы *обратимости* элементов (кроме нулевого), переходят к гиперкомплексным «числам» [1] (их изучение возможно в математической высшей школе), а именно, четырехмерному *телу* **H** кватернионов, где нарушается аксиома *коммутативности*, и восьмимерной *алгебре Кэли* **Ca** «чисел» Кэли или октав, где нарушается и аксиома *ассоциативности*. В соответствии с известной теоремой Фробениуса продолжение цепочки с сохранением последних аксиом невозможно без нарушения аксиомы обратимости. С другой стороны, уже в низших размерностях известны ответвления цепочки с нарушением аксиомы обратимости: например, двумерные *алгебры* $\mathbf{K}_{\mathbf{pq}}$ квазикомплексных «чисел» [2], характерными представителями которых (в отличие от поля **C**) являются алгебра **U** двойных «чисел» и алгебра **V** дуальных «чисел» [3]; некоторые трехмерные алгебры [4,5], в частности, алгебра **Tr** триплексных «чисел»; некоторые четырехмерные алгебры, в частности [6] (в отличие от тела **H**), алгебра **Qu** квадриплексных «чисел» (бикомплексных «чисел», тесаринов [7]; в [7] указаны и другие примеры).

Нарушение свойства обратимости элементов мотивирует изучение более общего свойства их *обобщенной обратимости* или *регулярности* (по Дж. фон Нейману; см., например, [2,8]). Алгебра **U** регулярна: каждый необратимый ее элемент обобщенно обратим. В сравнении с классической ситуацией регулярная алгебра по отношению к свойству обобщенной обратимости аналогична полю по отношению к свойству (обычной) обратимости. Алгебра же **V** нерегулярна: каждый необратимый ее элемент, кроме нулевого, не является и обобщенно обратимым. Сравнение с классической ситуацией в этом случае могло бы привести к вопросу о возможности погружения алгебры **V** в такую алгебру, в которой каждый необратимый элемент из **V** был бы обратим; однако более корректна постановка вопроса о возможности погружения алгебры **V** в такую алгебру **W**, в которой каждый необратимый элемент из **V** обобщенно обратим. Этот вопрос решен в [8], где построенная алгебра **W** названа *алгеброй внедуальных «чисел»*. Из общеалгебраических соображений [9] классическое «развитие понятия о числе» соответствует процедуре *симметризации* коммутативных ассоциативных внутренних законов композиции; в свете этого построение алгебры **W** может быть охарактеризовано как *обобщенная симметризация*. В недавней работе [10] алгебра **W** независимо построена из несколько иных соображений и использована в связи с проблематикой современной «супер»-физики. Приведем некоторые детали.

Алгебра **V** определяется аналогично полю **C** комплексных чисел: она состоит из элементов $v=a+be$, где a,b – действительные числа, e – «дуальная» единица, удовлетворяющая соотношению $e^2 =0$. Операции сложения элементов, их умножения на действительные числа и между собой, сопряжения и взятия модуля выполняются по правилам:

$v_1+v_2 =(a_1+b_1e)+(a_2+b_2e)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)e, \quad cv=c(a+be)=ca+cbe,$

$v_1v_2 =(a_1+b_1e)(a_2+b_2e)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)e, v^- =a-be, /v/^2 =vv^-=a^2$.

Обратный элемент v^{-1} ищется из условия $vv^{-1}=1$, приводящего к системе линейных алгебраических уравнений с определителем $D=a^2$, существует при условии $a=/=0$ и вычисляется по той же формуле, что и в случае комплексных чисел: $v^{-1} =v^- / /v/^2$. В случае же $a=0$ элемент необратим; его обобщенный обратный $v^\sim$ ищется из условия $vv^\sim v=v$ и существует только для $v=0$; это и означает, что алгебра **V** нерегулярна.

Алгебра **W,** в которой существуют обобщенные обратные ко всем элементам алгебры **V,** строится в [8] следующим образом. Она состоит из элементов $w=a+be+cf+dg+kh$, где a,b,c,d,k – действительные числа, e,f – дуальные единицы, удовлетворяющие соотношениям $e^2=f^2=0$ и связанные между собой условиями регулярности $efe=e, fef=f$, а g,h – идемпотентные единицы, удовлетворяющие соотношениям $g^2=g, h^2=h$ и связанные с e,f соотношениями $g=ef, h=fe$, вследствие чего непосредственно выполняются соотношения ортогональности $eg= gf=he=fh=gh=hg=0$, а благодаря условиям регулярности – соотношения $eh=ge=e, fg=hf=f$. Перечисленные соотношения полностью определяют таблицу умножения базисных единиц алгебры **W,** в соответствии с которой выполняются операции над произвольными элементами. Обратный элемент w^{-1} существует при условии $D=aN^2=/=0$ и вычисляется по формуле

$w^{-1} =N[N-abe-acf+(M-ad)g+(M-ak)h]/D,$

где $N=(a+d)(a+k)-bc, \qquad M=bc-dk.$

В случае же $D=0$ элемент w необратим, но обобщенно обратим; это возможно либо если $a=0$, либо если $N=0$, либо если одновременно $a=N=0$, то есть если $M=0$; в последнем случае, при условии $b=/=0$, множество обобщенных обратных вычисляется по формуле

$w^- =x+ye+b^{-1} [1-(d+k)x-cy-ds-kt]f+sg+th,$ где x,y,s,t – любые действительные числа [8].

В частности, для ненулевых необратимых элементов $v=be$ из **V**

$v^- =(be)^- =x+ye+b^{-1} f+sg+th,$

где x,y,s,t – любые действительные числа [8],
чем и достигнута цель обобщенной симметризации. Отметим, что авторы [10], преследуя иные цели, приводят выражение для w^{-1} (в сопоставлении с обращением в антикоммутативных, но не регулярных *алгебрах Грассмана* **G**, частным случаем которых является **V**), но не указывают в явном виде выражения для w^{-}, v^{-}.

В [10] указано представление алгебры **W** как *свободного произведения* двух алгебр **V** по модулю условия регулярности: $\mathbf{W} = \mathbf{V_1} \text{ X } \mathbf{V_2} /^{\sim reg}$. Вопрос об использовании свободного произведения алгебр как основы для обобщенной симметризации в [10] не обсуждается.

ЛИТЕРАТУРА

1.Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 87 с.

2.Блюмин С.Л. Двумерные алгебры / Метод. указания.– Липецк: Изд-во ЛГТУ,1995. – 18 с.

3.Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия –М.: Наука,1969. – 303 с.

4.Немец С.Ю. Триплексные числа: обратимость и необратимость элементов, обобщенное обращение, решение уравнений // Регион. молодежн. науч. и инж. выставка «Шаг в будущее – Центр России». Сб. тез. докл. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 1999. – С. 7–8.

5.Немец С.Ю. Обобщенная обратимость в трехмерной алгебре // Студ. науч.-практ. конф. «Наука и молодежь на рубеже столетий».Сб. науч. тр. – Липецк: Изд-во ЛГТУ,2000.-С.10–12.

6.Блюмин С.Л., Кривовяз Е.В., Немец С.Ю. К обратимости элементов *n*-кратных супералгебр // Воронеж. Вес. Матем. шк. «Современные методы в теории краевых задач (Понтрягинские чтения-IX)».Тез.докл. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1998. – С. 221.

7.Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. – М.: Гостехтеориздат, 1955. – 678 с.

8.Блюмин С.Л., Миловидов С.П. Исследование и решение матричных уравнений над ассоциативными кольцами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 2. – С.163 – 174.

9.Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М.: Физматгиз, 1962. – 516 с.

10.Duplij S., Marcinek W. Regular graded algebras and obstructed categories with duality. *Preprint.* // http://xxx.lanl.gov arXiv.org e-Print archive math.QA/0107022. 3 Jul 2001. 13 p.

«РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ»: КЛАССИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ И СОВРЕМЕННЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

С точки зрения современных представлений общей и прикладной алгебры известное каждому школьнику развитие понятия о числе представляет собой последовательное расширение (*симметризацию* по терминологии [1]):

1.1) полукольца N натуральных «чисел» до кольца Z целых «чисел»

или

1.2) полукольца N натуральных «чисел» до полуполя Q_+ положительных рациональных «чисел»;

2.1) кольца Z целых «чисел» до поля Q рациональных чисел

или

2.2) полуполя Q_+ положительных рациональных «чисел» до поля Q рациональных чисел.

Кавычки использованы для того, чтобы подчеркнуть, что, вопреки «обычным» названиям, в алгебраических структурах N, Z, Q_+ выполняются не все аксиомы числового поля: так, в N не существуют противоположные и обратные ко всем элементам, в Z не существуют обратные, а в Q_+ - противоположные ко всем элементам.

Завершает развитие понятия о числе расширение поля Q рациональных чисел до поля R действительных чисел, а его – до поля C = $\{ c = a + b\, i,\ \ a, b$ Î R, $i^2 = -1\}$ комплексных чисел.

С другой стороны, в алгебре известны (см., например, [2]) альтернативные последнему расширения:

3.1) поля R действительных чисел до кольца U = $\{u = a + b\, e,\ \ a, b$ Î R, $e^2 = 1\}$ двойных «чисел» и

3.2) поля R действительных чисел до кольца V = $\{v = a + b\, f,\ \ a, b$ Î R, $f^2 = 0\}$ дуальных «чисел»;

в них не для каждого ненулевого элемента существует обратный.

В данной работе проведен полезный с методической точки зрения сравнительный анализ указанных расширений, указаны сходные и отличительные черты в их построении. Затем приведен, также в сравнительном аспекте, менее традиционный пример, связанный с некоторыми современными приложениями.

Для удобства изложения напомним определения некоторых основных алгебраических структур (см., например, [1-6]).

Полугруппа есть множество с ассоциативной операцией.

Коммутативное полукольцо с нулем и единицей есть

- коммутативная аддитивная полугруппа с 0 относительно сложения +,
- коммутативная мультипликативная полугруппа с 1 относительно умножения *,
- умножение дистрибутивно относительно сложения.

Коммутативное кольцо с единицей есть коммутативное полукольцо с нулем и единицей, в котором коммутативная аддитивная полугруппа с 0 есть коммутативная аддитивная группа с 0.

Полуполе есть коммутативное полукольцо с нулем и единицей, в котором коммутативная мультипликативная полугруппа с 1 есть коммутативная мультипликативная группа с 1 (исключая 0).

Поле есть коммутативное кольцо с единицей, в котором коммутативная мультипликативная полугруппа с 1 есть коммутативная мультипликативная группа с 1 (исключая 0)

или

Поле есть полуполе, в котором коммутативная аддитивная полугруппа с 0 есть коммутативная аддитивная группа с 0.

Описанное расширение алгебраических структур удобно представить в виде схемы:

коммутативное полукольцо с нулем и единицей

/ \

коммутативное кольцо с единицей полуполе

\ /

поле

Стандартным подходом к расширению алгебраических структур служат методы пар.

Метод пар I типа служит для расширения полукольца N натуральных «чисел» до кольца Z целых «чисел»: рассматривается множество пар $(k,l),(m,n)$ натуральных «чисел» с операциями

$(k,l) + (m,n) = (k + m, l + n), \quad (k,l)(m,n) = (k m + l n, k n + l m);$ (1)

с парой (k,l) отождествляются все пары (m,n), удовлетворяющие соотношению $k + n = l + m$, то есть все пары вида $(k + s, l + s)$, где натуральное «число» s произвольно, и трактуются как целое «число» $k - l$; все пары (s,s) трактуются как целое «число» 0; пары $(l + s, k + s)$ трактуются как противоположное $l - k$ к целому «числу», представляемому парами $(k + s, l + s)$; тем самым построено кольцо Z; аксиомы кольца проверяются непосредственно.

Обращает на себя внимание аналогия с методом пар I типа того способа, который служит для расширения поля R действительных чисел до кольца U = $\{u = a + b e, \ \ a, b \in \mathrm{R}, e^2 = 1\}$ двойных «чисел»: трактуя пару (a,b) как двойное «число» $a + b e$, можно непосредственно убедиться в том, что операции выполняются по формулам (1). Это допускает естественное объяснение: целое «число» $k - l$ можно представить как $k + l(-1)$, где $(-1)^2=1$, подобно тому, как $e^2=1$.

Метод пар II типа служит для расширения полукольца N натуральных «чисел» до полуполя Q_+ положительных рациональных «чисел»: рассматривается множество пар $(k,l),(m,n)$ натуральных «чисел» с операциями

$(k,l)(m,n) = (k \ m, l \ n), \quad (k,l) + (m,n) = (k n + l m, \ l n);$ (2)

с парой *(k,l)* отождествляются все пары *(k s, l s)* , где натуральное «число» *s* произвольно, и трактуются как положительное рациональное «число» (положительная дробь) *k / l ;* все пары *(s,s)* трактуются как положительное рациональное «число» 1; пары *(l s, k s)* трактуются как обратное *l / k* к положительному рациональному «числу», представляемому парами *(k s, l s)*; тем самым построено полуполе Q_+; аксиомы полуполя проверяются непосредственно.

Обращает на себя внимание некоторая аналогия с методом пар II типа того способа, который служит для расширения поля R действительных чисел до кольца V = *{v = a + b f, a, b Î* R, $f^{2} = 0$*}* дуальных «чисел», однако эта аналогия является гораздо менее прямой, чем указанная ранее: для сопоставления с формулами (2) удобнее пару *(a,b)* трактовать как дуальное «число» *a f + b* ; тогда сложение дуальных «чисел» выполняется подобно умножению дробей, то есть поэлементно, в то время как умножение дуальных «чисел» выполняется в точности так же, как сложение дробей.

Подробное изложение рассмотренных расширений натуральных «чисел» содержится, например, в [1,3].

Наряду с известными (см., например, [3]) «гауссовыми числами» - рациональными комплексными числами или целыми комплексными «числами» - рассмотренные методы расширения алгебраических структур могут быть применены для построения рациональных, целых и даже натуральных двойных и дуальных «чисел».

Результаты проведенного сравнительного анализа могут найти применения при изучении алгебры и теории чисел [1,3], геометрии и физики [2], а также в некоторых современных приложениях математики [4-6], рассмотренных ниже.

Полуполе R_{max} , известное также как алгебра (max, +), является одной из модельных алгебраических структур нового раздела математики – идемпотентной математики [4], в основе которой лежат полные или частичные замена и/или переименование обычных арифметических операций на новые основные операции, включая идемпотентные операции, такие как максимум и минимум. Такой подход приводит к интересным нетривиальным, нетрадиционным и часто неожиданным, результатам в самой математике и ее приложениях как в современной физике [4], так и в современных проблемах искусственного интеллекта [5], математического моделирования сложных систем, их оптимизации и управления ими [6].

Полуполе R_{max} образовано из поля R действительных чисел присоединением к нему символа *Q = - ¥* , с обычными отношениями равенства и порядка и операциями «сложения» *a Å b = a Ú b = max(a,b)* (выбор большего из двух элементов в смысле обычного отношения порядка) и «умножения» *a Ä b = = a + b* (обычное сложение элементов). Непосредственно проверяется, что обе операции ассоциативны, коммутативны и имеют нейтральные элементы : «нулем» для «сложения» служит символ *Q* , так как *a Å Q = max(a,-¥)= a*, «единицей» для «умножения» служит обычный *0*, так как *a Ä 0 = a + 0 = a* ;

символ *Q* обладает свойством поглощения относительно «умножения», *a Ä Q =a + (-¥) = Q.* Операции связаны обычной дистрибутивностью, *a Ä (b Å c) = (a Ä b) Å (a Ä c).*

Принципиальными отличиями полуполя R_{max} от поля R действительных чисел является идемпотентность операции сложения, а также то, что каждый элемент *a* из R_{max} имеет «обратный» *a* $^{(-1)}$ относительно «умножения» (им служит обычный противоположный *– a, a Ä a* $^{(-1)}$ *= a + (-a) = 0*), но ни один из элементов, кроме символа *Q,* не имеет «противоположного» относительно «сложения» (ни для каких двух элементов *a,b ¹ Q* не может выполняться соотношение *a Å b = max(a,b) = Q = - ¥,* и только для *Q* верно *Q Å Q = Q*). В этом проявляется некоторая аналогия с полукольцом N натуральных «чисел», где ни один из элементов не имеет противоположного в обычном смысле. Эта аналогия подсказывает попытку расширить R_{max} (подобно расширению полукольца N до кольца Z целых «чисел») так, чтобы в построенном расширении появились «противоположные» к элементам из R_{max} . Оказывается, что если даже в этом расширении сохраняются «обратные», уже имеющиеся в R_{max} , оно, тем не менее, не будет полным аналогом числового поля. Полученная алгебраическая структура построена в [6] и названа *симметризацией* S_{max} полуполя R_{max} . Рассмотрим подробнее ее построение.

Метод пар I типа в построении симметризации S_{max} полуполя R_{max} применяется следующим образом: рассматривается множество $R_{max} \times R_{max}$ пар *x=(x’, x’’), y=(y’, y’’)* элементов из R_{max} с операциями

(x’, x’’)Å(y’, y’’)=(x’Å y’, x’’Å y’’),

(x’, x’’)Ä(y’, y’’)=(x’Ä y’Å x’’Ä y’’, x’Ä y’’Å x’’Ä y’),

причем роль *нуля* играет пара *(Q,Q),* роль *единицы* – пара *(0,Q), противоположная* пара определяется как *q x = (x’’, x’), абсолютная величина* пары – как */ x / = x’Å x’’, оператор баланса* – как *x*$^{\cdot\cdot}$ *= x q x = (/x / , / x /).*

В отличие от рассмотренного ранее расширения (когда отождествлялись пары *(x’, x’’), (y’, y’’),* удовлетворявшие соотношению *x’ + y’’ = x’’ + y’),* теперь пары *(x’, x’’), (y’, y’’),* удовлетворяющие соотношению *x’Å y’’=x’’Å y’,* отождествляются лишь при дополнительном условии *x’¹ x’’, y’¹ y’’;* этим определено *отношение эквивалентности » ;* если дополнительное условие не выполнено, то пары, удовлетворяющие указанному соотношению, называются подчиненными *отношению баланса, (x’, x’’) D (y’, y’’),* а отождествляются, лишь если они просто равны. Множество пар с указанным отождествлением и называется *симметризацией* S_{max} полуполя R_{max} .

Такая модификация отождествления связана с тем, что, в отличие от обычного арифметического сложения, когда из *a + b = a + c* следует *b = c* (условие *регулярности* или *«сокращения» по сложению),* теперь из *a Å b = a Å c* или *max (a, b)=max (a, c)* в общем случае, очевидно, *не* следует *b = c ;* как следствие, отношение баланса само по себе не пригодно для отождествление пар, так как не является *отношением эквивалентности,* которое должно обладать стандартными свойствами *рефлексивности, симметричности* и *транзитивности* (нарушение транзитивности иллюстрируется простейшим примером: *(0,1) D (1,1), (1,1)D (1,0),* но *неверно*, что *(0,1) D (1,0) !).* Предложенная же модификация отождествления осуществляется отношением эквивалентности ≈ , очевидно, более сильным, чем отношение баланса.

Хотя это отношение эквивалентности уже описано выше, удобно представить его в следующей форме: пусть *Sol (a) = {x Î* $R_{max} \times R_{max}$ *: x D a};* тогда *a » b Û Sol (a) = Sol (b).* Оно согласовано с операциями в $R_{max} \times R_{max}$, с отношением Δ и операторами θ, / /, ♦. Например, из цепочки соотношений
x Î Sol (aÅ c) Û x D a Å c Û x q c D a Û x q c Î Sol(a)
следует *Sol (a) = Sol (b) Þ Sol (a Å c) = Sol (b Å c)* или *a» b Þ a Å c » bÅ c.*

Различаются три типа классов эквивалентности:
<u>(t, -¥)</u> = {(t, x''): x'' < t} - *«положительные»,*
<u>(-¥, t)</u> = {(x', t) : x' < t } - *«отрицательные»,*
<u>(t, t)</u> ={(t, t)} - *«сбалансированные».*
Сопоставляя классы *<u>(t, -¥)</u>* с элементами *t Î* R_{max} , можем отождествить R_{max} с подмножеством положительных или нулевого классов, обозначаемым $(R_{max})^{\oplus}$. Подмножество отрицательных или нулевого классов (вида *q x* для *x Î* $(R_{max})^{\oplus}$) обозначается $(R_{max})^{\theta}$. Подмножество сбалансированных классов (вида $\ddot{x}$) обозначается $(R_{max})^{\blacklozenge}$. Это приводит к разложению

$$S_{max} = (R_{max})^{\theta} \cup (R_{max})^{\blacklozenge} \cup (R_{max})^{\oplus} ,$$

причем *Q* является единственным элементом, общим для любых двух из этих трех классов; это стоит сравнить с разложением $Z = N^{-} \cup \{0\} \cup N^{+}$.

Простейшие вычисления в S_{max} можно резюмировать так:

a q b = a при *a>b;* *b q a = q b* при *a > b;* *a q a =* $\ddot{a}$.

Это показывает, что, несмотря на отмечавшиеся аналогии, предложенное расширение полуполя R_{max} не приводит к полю, в отличие, например, от расширения полуполя Q_{+} до поля Q .

Некоторые отличные от изложенных выше современные научно-методические аспекты «развития понятия о числе» рассмотрены в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М.: ГИФМЛ, 1962. - 516 с.
2. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969. – 303 с.
3. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 579 с.
4. Литвинов Г.Л., Маслов В.П. Идемпотентная математика // Современный анализ и его приложения: Воронеж. зимн. матем. школа (ВЗМШ-2000). Тез. докл. – Воронеж: ВГУ, 2000. – С. 20-21.
5. Golan J.S. Semirings and their Applications. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – 468 p.
6. Gaubert S., Plus M. Methods and Applications of (max, +) Linear Algebra // INRRIA Res. Rep. № 3088. 1997. – 231 p.
7. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе»: некоторые научно-методические аспекты // Новые технологии в образовании: Междунар. электрон. науч. конф. Сб. науч. тр. – Воронеж: ВГПУ, 2001. – С.52-54.

«РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ» ДО ДЕЛЕНИЯ НА НУЛЬ И ПРОБЛЕМЫ ДИСТРИБУТИВНОСТИ

Как уже было отмечено в [1,2], развитие понятия о числе представляет собой постепенное расширение полукольца N натуральных чисел с целью обеспечения выполнимости операций, обратных к основным и естественным операциям сложения, умножения и возведения в степень, то есть операций вычитания, деления, извлечения корня, логарифмирования и некоторых других. Эта цель достигается в кольце Z целых, полях Q, R, C рациональных, действительных и комплексных чисел, с единственным исключением: даже в числовых полях, как и в более общих или альтернативных им алгебраических структурах (см., например, [1,2]), невыполнима операция деления на нуль.

Как указано в [3], тот факт, что мультипликативное обращение действительных чисел является частичной функцией, раздражает некоторых начинающих изучать математику: «Кто запретил деление на нуль?» Эта проблема не представляется серьезной с профессиональной точки зрения, но ситуация остается неэстетичной. Мы знаем, как расширить полукольцо натуральных чисел, чтобы стали разрешимы уравнения типа $5 + x = 2$, $2x = 3$, $x^2 = 2$, $x^2 = -1$ и т. д., но мы не знаем, как делить на нуль. Имеются и конкретные, прагматические аспекты этой проблемы, особенно в связи с точными вычислениями над действительными числами: так как в общем случае неразрешима проблема, является ли действительное число ненулевым, то невозможно в общем случае сказать, является ли оно обратимым. Обсуждение в чисто алгебраическом контексте идеи присоединения к множеству действительных чисел двух дополнительных «чисел» $\infty = 1/0$, $\perp = 0/0$ для того, чтобы сделать деление всегда выполнимым, привело к предложению внести это присоединение уже в конструкцию рациональных чисел из целых, допуская не только ненулевые, но и произвольные знаменатели дробей. В результате была получена алгебраическая структура, отличная от структуры числового поля. В [4] такие структуры названы «роликами» (wheel – колесо, колесико, ролик [5]) и показано, как модифицировать конструкцию поля дробей из области целостности с тем, чтобы получить ролик дробей вместо поля дробей. В [3] эта конструкция обобщена так, что оказывается применимой не только к областям целостности, но и к произвольным коммутативным полукольцам, и дано аксиоматическое определение роликов. Приведем это определение. Используемые далее стандартные понятия общей алгебры содержится в [6,7].

Пусть W – некоторое множество, 0 и 1 – константы – нульарные операции, / - унарная операция, + и * - бинарные операции, операции более низкой арности имеют более высокий приоритет, операция * имеет приоритет перед операцией +, x / y понимается как $x * (/ y)$, знак операции * обычно опускается.

Ролик определяется как алгебраическая структура $<W, 0, 1, +, *, />$, в которой выполняются следующие аксиомы:

(1) / - инволюция, то есть $/(/x) = x$, $/(x y) = (/y)(/x)$;

(2) $<W,\ 0,\ +\ >$ - коммутативный моноид;
(3) $<W,\ 1,\ *,\ /\ >$ - коммутативный моноид с инволюцией;
(4) $0\ 0 = 0;$
(5) $/\,(x + 0\ y) = /\,x + 0\ y;$
(6) $(x + 0\ y)\ z = x\ z + 0\ y;$
(7) $(x + y)\ z + 0\ z = x\ z + y\ z;$
(8) $x\,/\,y + z + 0\ y = (x + y\ z\ )/\,y;$
(9) $x + 0\,/\,0 = 0\,/\,0.$

Следствиями аксиом являются соотношения:
(10) $/\,1 = 1;$
(11) $0\ x + 0\ y = 0\ x\ y;$
(12) $(0\,/\,0)\ x = 0\,/\,0;$
(13) $x\,/\,x = 1 + 0\ x\,/\,x;$
(14) $x\ z = y\ z \Rightarrow x + 0\ z\,/\,z = y + 0\ z\,/\,z.$

Последнее соотношение демонстрирует одно из преимуществ роликов по сравнению с кольцами, в которых некоторые правила выполняются при дополнительных условиях, тогда как их двойники в роликах верны всегда; так, в кольце $xz=yz$ влечет $x=y$ лишь с той оговоркой, что z не является делителем нуля, тогда как его двойник (14) в ролике верен при любом z.

Элемент $/\,x$ в ролике называется $/$-обратным к элементу $x;$ между тем, поскольку $<W,\ 1,\ *>$ - моноид, элемент x может иметь обычный обратный x^{-1} ; связь между ними устанавливается соотношениями:
(15) $x^{-1} + 0\,/\,x = /\,x + 0\ x^{-1};$
(16) $x^{-1} = /\,x + 0\ (x^{-1}/\,x^{-1});$
(17) $/\,x = x^{-1} + 0\ (x\,/\,x\ );$
(18) если xy имеет $/$-обратный, то x и y имеют обычные обратные
$x^{-1} = y\,/\,(xy) = /\,x + 0\ y\,/\,y$, $y^{-1} = x\,/\,(xy) = /\,y + 0\ x\,/\,x.$

Следует отметить, что «обычное» правило $0\ x = 0,$ означающее, что «нуль-члены» могут быть «уничтожены», заменяется правилами (5) – (6), означающими, что такие члены могут быть «передвинуты» тем или иным способом в содержащем их выражении.

В то же время элементы, удовлетворяющие условию $0\ x = 0$, играют особую роль во многих вычислениях; так, отличная от стандартной форма (7) аксиомы дистрибутивности принимает стандартный вид, существенный в определении полуколец, для тех z, для которых выполнено условие $0\ z = 0.$ Объяснением этому служит следующее утверждение:
(19) Подмножество $SW = \{\ x \in W\!: 0\ x = 0\ \}$ является полукольцом относительно операций $0\ ,\ 1,\ +\ ,\ *$ данного ролика W.

Кроме того, справедливо утверждение:
(20) Подмножество $GW = \{\ x \in W\!: 0\ x = 0\,/\,x = 0\ \}$ является мультипликативной группой полукольца SW.

К общему определению ролика приводит некоторая модификация [3] метода пар II типа [2] конструкции поля дробей (рациональных чисел) из кольца целых «чисел», выполненная в [3] для произвольного коммутативного кольца R с единицей и приводящая к ролику WR/P дробей этого кольца. Рассматривается

множество RXR пар (m,n), (r,s) – прямое произведение множества R на себя - только с мультипликативной структурой поэлементного умножения. Задается некоторый мультипликативный подмоноид P кольца R и рассматривается следующее отождествление (отношение конгруэнтности) пар:
$(m', n') \sim (m'', n'') \ \hat{U} \ \$ \ p', p'' \ \hat{I} \ P : (p'm', p'n') = (p''m'', p''n'')$;
класс, содержащий пару (m,n), обозначается $[m,n]$; операции над классами вводятся так: $0 = [0,1]$, $1 = [1,1]$, $[m,n]\,[r,s] = [mr,ns]$,
$[m,n] + [r,s] = [ms + nr, ns]$, $/[m,n] = [n,m]$.
Полученная структура и является роликом WR/P дробей кольца R относительно подмоноида P; она удовлетворяет приведенным выше аксиомам ролика. Эта структура не является кольцом, если она нетривиальна, так как в общем случае не выполняется соотношение $0\,x = 0$: при $x = [0,0]$ имеем $0\,x = [0,0]$, что не равно $0 = [0,1]$ (за исключением случая $0 \ \hat{I} \ P$, когда отношение конгруэнтности несобственно и структура тривиальна). Аддитивная и мультипликативная структуры являются коммутативными моноидами; но групповая аддитивная структура нарушена, так как уравнение $[0,0] + x = 0 = [0,1]$ не имеет решений в нетривиальных случаях; вместо этого справедлива формула $x - x = 0\,x^2$, если $x - y$ определено как $x + (-1)y$, где $-1 = [-1,1]$; таким образом, $x - x = 0$ верно только для тех x, которые удовлетворяют условию $0\,x = 0$ и роль которых в роликах уже отмечалась; следует отметить, что во многих роликах существует много таких x. Унарная операция / является инволюцией мультипликативного моноида; для /-обратного к x элемента $/\,x$ в общем случае не верно, что $x/\,x = 1$ (см. выше соотношение (13)).

Отметим, что $WR/R = \{0\}$ дает пример тривиального ролика дробей. Полный ролик дробей определяется как WR/P_0 , где $P_0 = \{p \ \hat{I} \ P{:}pm=pn \ \text{Þ} \ m=n\}$; он содержит хорошо известное кольцо дробей как подмножество $\{x{:}0x=0\}$; более того, для его элементов справедливо соотношение $x\,y = 1 \ \text{Þ} \ y = /\,x$, так что базовая для роликов операция / может быть использована для вычисления обычных обратных к тем элементам, для которых они существуют. Конкретными примерами роликов дробей при R = Z являются:
WZ /(Z\{0}) = Q ∪ {/0, 0/0} ; W(Z/2Z) /{1} = {0, 1, /0, 0/0 };
WZ / {1} - множество дробей целых чисел, в котором не производится никаких отождествлений, так что две дроби считаются равными тогда и только тогда, когда у них равны числители и знаменатели.

Хорошо известно, что, добиваясь выполнения каких-либо свойств алгебраической структуры, часто приходится жертвовать другими ее свойствами; классический пример – потеря коммутативности при переходе от поля комплексных чисел к телу кватернионов, тогда как сохранение коммутативности ведет к потере обратимости всех ненулевых элементов [1]. К примерам подобного рода можно отнести и искажение аксиомы дистрибутивности (7) в роликах. Рассмотрим некоторые проблемы, связанные с выполнимостью и модификациями аксиомы дистрибутивности в алгебраических структурах с двумя бинарными операциями.

Вернемся к методам пар [2] и рассмотрим, для произвольного полукольца $S= <S,+,*>$, в котором сложение и умножение ассоциативны и умножение распределяет сложение, множество SXS пар (m,n), (p,q), (r,s) со следующими операциями:

- поэлементное сложение: $(m,n)A(p,q)=(m+p,n+q)$;
- поэлементное умножение: $(m,n)M(p,q)=(mp,nq)$;
- U-операция, выполняемая как умножение двойных «чисел» и как умножение в методе пар I типа: $(m,n)U(p,q)=(mq+np,mp+nq)$;
- V-операция, выполняемая как умножение дуальных «чисел» и как сложение в методе пар II типа, то есть как сложение дробей: $(m,n)V(p,q)=(mq+np,nq)$.

Рассмотрим некоторые сочетания этих операций, не производя, в отличие от методов пар, каких-либо отождествлений пар элементов множества S.

Рассмотрим структуру $<SXS,A,M>$. Так как обе операции A и M выполняются поэлементно, то для них выполняются те же свойства, что и для исходных операций + и * полукольца S, так что данная структура – полукольцо, а именно – прямое произведение полукольца S на себя.

Рассмотрим структуру $<SXS,A,U>$. Как и выше, операция A ассоциативна как поэлементная; те факты, что операция U ассоциативна и распределяет операцию A, проверяются непосредственно, так что данная структура – полукольцо, прототипом которого является алгебра U двойных «чисел».

Рассмотрим структуру $<SXS,A,V>$. Как и выше, операция A ассоциативна как поэлементная; те факты, что операция V ассоциативна и распределяет операцию A, проверяются непосредственно, так что данная структура – полукольцо, прототипом которого является алгебра V дуальных «чисел».

Рассмотрим теперь структуру $<SXS,M,V>$. Как и выше, операция M ассоциативна как поэлементная; отмечалось и то, что операция V ассоциативна; проверка того, что операция M распределяет операцию V (ожидание этого мотивируется тем, что прототипом данной структуры является поле рациональных чисел), приводит к выражениям
$((m,n)V(p,q))M(r,s)=(mq+np,nq)M(r,s)=(mqr+npr,nqs)$,
$((m,n)M(r,s))V((p,q)M(r,s))=(mr,ns)V(pr,qs)=(mrqs+nspr,nsqs)$,
которые в общем случае не равны: равенство этих выражений в поле рациональных чисел достигается благодаря возможности сокращения дробей; в рассматриваемом здесь общем случае такая возможность не предполагается; при наличии в полукольце S аддитивного поглощающего элемента 0 и коммутативности исходных операций + и * (это соответствует распространенному определению понятия коммутативного полукольца) первое выражение приводится ко второму с использованием дополнительного члена
$(((m,n)V(p,q))M(r,s))V(0,s)=(mqr+npr,nqs)V(0,s)=(mqrs+nprs,nqss)$,
что соответствует формулировке (7) дистрибутивности в роликах. С другой стороны, без этого дополнительного члена имеет место частичная дистрибутивность – например, для множителей-пар (r,s), удовлетворяющих условию $(0,1)M(r,s)=(0,1)$, или для таких, компоненты которых обладают свойствами $ss=s$, $rs=r$, то есть элемент s является идемпотентом, служащим единицей для элемента r. Таким образом, рассмотренная структура не является полукольцом, а является роликом, содержащим некоторые подполукольца.

Рассмотрим теперь структуру <*SXS,M,U*>. Как и выше, операция *M* ассоциативна как поэлементная; отмечалось и то, что операция *U* ассоциативна; проверка того, что операция *M* распределяет операцию *U* (ожидание этого, впрочем, ничем не мотивируется, так как известных прототипов данной структуры пока не встречено), приводит к выражениям

$((m,n)U(p,q))M(r,s)=(mq+np,mp+nq)M(r,s)=(mqr+npr,mps+nqs),$

$((m,n)M(r,s))U((p,q)M(r,s))=(mr,ns)U(pr,qs)=(mrqs+nspr,mrpr+nsqs),$

которые в общем случае не равны; в отличие от предыдущей, данная структура не является роликом; но, как и в предыдущей, в ней имеет место частичная дистрибутивность, например, для таких множителей-пар (r,s), компоненты которых (при тех же предположениях об исходном полукольце) обладают свойствами $ss=rr=s$, $rs=r$, допускающими аналогичную интерпретацию. Таким образом, данная структура не является полукольцом или роликом, но содержит некоторые подполукольца.

Разновидностью операций типа *U* и *V* является ассоциативная *E*-операция $(m,n)E(p,q)=(mp+mq+np,nq)$. Структура <*SXS,A,E*> является полукольцом, прототипом которого служит кольцо с единицей, в которое вкладывается некоторое кольцо [6].

С вышеизложенным связаны и некоторые другие операции и их сочетания, не обязательно над парами, известные из общей алгебры. Так, операция присоединенного умножения в кольце [6] $xJy=x+y+xy$ связана со сложением соотношением $(x+y)Jz+z=xJz+yJz$, имеющим некоторое сходство с аксиомой дистрибутивности (7) в роликах. Аксиома (6) роликов имеет сходство с модулярным законом в решетках [7]. Возможны и сочетания некоторой операции с самой собой; так, известны структуры – дистрибутивные квазигруппы [8], в число аксиом которых входят соотношения $x(yz)=(xy)(xz)$, $(xy)z=(xz)(yz)$,трактующие обычную дистрибутивность $x(y+z)=xy+xz$, $(x+y)z=xz+yz$ в необычной ситуации совпадения операций сложения и умножения; известна и трактовка таких структур как «испорченных» групп, в которых ассоциативный закон заменен на тождества дистрибутивности, что подсказано одним из свойств операции среднего арифметического.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе»: некоторые научно-методические аспекты // Новые технологии в образовании: Междунар. электрон. науч. конф. Сб. науч. тр. – Воронеж: ВГПУ, 2001. – С.52-54.
2. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе»: классические аналогии и современные приложения // Образовательные технологии: Межвуз. сб. науч. тр. – Воронеж: ВГПУ, 2002. – С. 112-116.
3. Carlstrom J. Wheels – On Division by Zero // http://www.matematik.su.se/~jesper 2001. – 47 p.
4. Setzer A. Wheels (draft) // http://www-compsci.swan.ac.uk/~csetzer/ 1997. – 9 p.
5. Англо-русский словарь математических терминов. – М.: Мир, 1994. – 416 с.
6. Общая алгебра / Под ред. Л.А. Скорнякова. Т.1.– М.: Наука, 1990.–592 с.
7. Общая алгебра / Под ред. Л.А. Скорнякова. Т.2.– М.: Наука, 1991.–480 с.
8. Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. – М.: Наука, 1967. – 175 с.

«РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ»
ОТ НАТУРАЛЬНЫХ ДО НЕЧЕТКИХ И СВЕРХНАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В работах [1-3] изложены некоторые методические аспекты современных представлений о классической схеме «развития понятия о числе» и возможностях ее дальнейших обобщений, модификаций и применений. Развитие понятия о числе начинается с натуральных «чисел» (по поводу кавычек см. [1,2]; в дальнейшем они опускаются, см. [3]) – «чисел, возникающих при счете», формальное обоснование которых лежит в теории множеств. Это обоснование и связанные с ним некоторые базовые вопросы теории множеств представляют определенный методический интерес.

В настоящее время уже общепризнанно, что понятие множества принадлежит к числу первоначальных математических понятий, а теория множеств является основой современной фундаментальной и прикладной математики. При изучении теории множеств на всех уровнях естественнонаучного, технического, гуманитарного образования основное внимание уделяется оперированию с множествами – алгебре множеств. При решении той или иной задачи предполагается заданным универсальное для нее множество U, а операции выполняются над его частями или *подмножествами* A, включая несобственные – само множество U и *пустое* множество ∅, то есть над элементами его *булеана* B(U) – множества всех его подмножеств. С методической точки зрения представляется целесообразным уже на первых этапах изучения теории множеств подробно рассмотреть эти понятия, имеющие как указанное выше теоретическое, так и прикладное значение, в частности, являющиеся отправными для развития теории и практики нечетких множеств, широко применяющихся при решении многих современных проблем искусственного интеллекта, например, задач принятия решений в условиях неопределенности [4,5].

Следует отметить, что в Книге Первой «Теория множеств» Первой Части «Основные структуры анализа» Трактата Н. Бурбаки «Начала математики» [6], в Главе II «Теория множеств», понятие подмножества вводится в разделе 2 «Включение» (с. 76), а понятие пустого множества – в разделе 7 «Дополнение множества. Пустое множество» (с. 80 – 81) из § 1 «Коллективизирующие соотношения»; понятие множества всех подмножеств – в разделе 1 «Аксиома множества частей» (с. 112 – 113) из § 5 «Произведение семейства множеств»; понятие натурального числа – в разделе 1 «Определение целых чисел» (с. 197 – 198) из § 4 «Натуральные целые числа. Конечные множества» Главы III «Упорядоченные множества. Кардинальные числа. Натуральные числа».

Придерживаясь, наряду с формальным подходом, принятым в [6,7], более распространенной «наивной» точки зрения, пустое множество можно описать как «множество, не содержащее ни одного элемента»; см., например, [8], где, как и в [7], в отличие от [6], используется и термин «булеан». Принято считать, что пустое множество в известном смысле является простейшим из множеств; что существует только одно пустое множество, то есть что все пустые множества равны между собой; что пустое множество является подмножеством любого множества, а потому и входит в любой булеан; что любое подмножество пустого множества является пустым множеством. Последнее соглашение позволяет определить булеан пустого множества как $B(\varnothing)=\{\varnothing\}\neq\varnothing$, то есть как одноэлементное множество, единственным элементом которого является само пустое множество. При этом, в силу приведенных соглашений, выполняется как соотношение $\varnothing \in \{\varnothing\}=B(\varnothing)$, так и соотношение $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}=B(\varnothing)$; следует отметить, что для других множеств подобные соотношения отличаются: так, для $A\subseteq U$ справедливо $A\subseteq A\in\{A\}$, но $A\not\subset\{A\}\neq A$; в частности, для $a\in A$ справедливо $a\in\{a\}$, но $a\not\subset\{a\}\neq a$. В силу соотношений, указанных для булеана пустого множества, его булеан, или второй булеан пустого множества, определяется как $B(B(\varnothing))=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, а его булеан, или третий булеан пустого множества – как $B(B(B(\varnothing)))= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (по поводу продолжения этого процесса см. ниже).

Пустое множество, при всей его простоте, играет базовую роль во многих вопросах математики и ее приложений. Это подтверждается, в частности, последующим изложением. Здесь приведем лишь простейшие примеры.

Одним из основных понятий универсальной алгебры [7] является A_Ω-алгебра, где A – некоторое множество, Ω - область операторов, то есть множество операторов $\omega\in\Omega$ вместе с отображением $a: \Omega\to N$, где $a(\omega)$ называется арностью оператора ω; если $a(\omega)=n$, то ω называется n-арным, так что $\Omega(n)=\{\omega\in\Omega: a(\omega)=n\}$; структурой A_Ω-алгебры называется семейство отображений $\Omega(n)\to A$^$(A$^$n)$, $n\in N$ (обозначение степени символом ^ принято здесь для удобства изложения). В смысле этого понятия само множество можно считать $\varnothing$-алгеброй [7].

Другое основное понятие универсальной алгебры [7] – оператор замыкания на множестве A как отображение C булеана B(A) в себя, обладающее свойствами: для всех $X,Y\in B(A)$ $\{X\subseteq Y \Rightarrow C(X)\subseteq C(Y)\}$, $\{X\subseteq C(X)\}$, $\{C(C(X))=C(X)\}$. Одна из самых неожиданных конкретизаций оператора замыкания, носящая чисто логический характер, была дана в виде операции присоединения следствий и применятся в формальных теориях. А именно, теория определяется как произвольное множество X предложений некоторого языка L. Если X замкнуто относительно операции присоединения следствий, то есть X = C(X), то X называется теорией C. C(X) есть наименьшая теория C, содержащая X. В смысле этих понятий C(□) есть система всех логически доказуемых или общезначимых предложений теории C.

Именно пустое множество лежит и в основе формального определения натуральных чисел [6], множество которых N ={0,1,2, ...}, в отличие от укоренившегося представления, включает число 0; с этого числа, собственно, и начинается определение натуральных чисел. Действительно, говорят, что множества A и B равномощны или эквивалентны, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие; это записывают в виде $|A|=|B|$, где $|A|$ - кардинальное число или мощность множества A. Кардинальное число 0 определяют [6] как $0=|\varnothing|$; кардинальное число 1 – как $1=|\{\varnothing\}|$, то есть как $1=|B(\varnothing)|$; кардинальное число 2 – как $2=|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$, то есть как $2=|B(B(\varnothing))|$; следующим на этом пути было бы определено кардинальное число $4=|\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}|$, то есть $4=|B(B(B(\varnothing)))|$. Другой путь состоит в том [6], что, введя операции – в частности, сложение – над кардинальными числами, говорят, что кардинальное число $|A|$ конечно или является натуральным целым числом, если $|A|\neq|A|+1$; в этом случае говорят, что множество A конечно, а $|A|$ является числом его элементов. Так как $0\neq0+1=1$, $1\neq1+1=2$, $2\neq2+1$, то введенные ранее кардинальные числа 0,1,2 являются натуральными числами. Далее о п р е д е л я ю т натуральные числа 3=2+1, 4=3+1 и, на этом пути, все множество N натуральных чисел или весь натуральный ряд. Равносильный путь, предложенный Дж. фон Нейманом, состоит [7] в последовательном, рекуррентном индексировании множеств, начинающемся снова с пустого множества: $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, ... Этот подход можно описать и следующим образом. Интуитивная модель теории множеств Цермело строится с использованием, в качестве исходных, понятий пустого множества $\varnothing$ и операции порождения булеана B. Как уже отмечалось, $B(\varnothing)=\{\varnothing\}$, $B(\{\varnothing\})=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $B(\{\varnothing, \{\varnothing\})= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ и т.д. Продолжая этот процесс, для каждого конечного числа можно получить множество с большим числом элементов, но никогда нельзя получить бесконечное множество. Поскольку для построения теории множеств необходимо наличие бесконечных множеств, то для завершения построения модели теории множеств Цермело вводится специальное предположение, на котором здесь останавливаться не будем. Однако существует более слабая теория множеств T_1, известная под названием общей теории множеств, отличающаяся от теории множеств Цермело отсутствием аксиомы бесконечности. Интуитивной моделью для T_1 является пространство, содержащее все множества, входящие во все последовательные булеаны пустого множества, то есть содержащее лишь конечные множества. Именно в теории T_1 можно построить теорию натуральных чисел по Дж. фон Нейману указанным выше способом: 0 отождествляется с $\varnothing$, 1 – с $\{\varnothing\}$, 2 – с $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 – с $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ и вообще, если n отождествляется с множеством x, то n+1 отождествляется с классом $x \cup \{x\}$, состоящим из всех элементов множества x и самого множества x. Другими словами, число n просто отождествляется с множеством всех чисел, меньших, чем n. Теперь в T_1 можно определить предикат N(x), означающий, что x есть натуральное число; при помощи этого предиката можно ввести новые переменные, представляющие только натуральные числа.

Как уже отмечалось, простейшим из подмножеств любого множества является пустое множество, которое теперь, после определения числа 0, можно охарактеризовать как 0-элементное. Следующими по простоте являются одноэлементные подмножества. По каждому элементу $u\in U$ может быть построена последовательность кратных одноэлементных множеств

$u=\langle u;0\rangle\in\{u\}=\{\langle u;0\rangle\}=\langle u;1\rangle\in\{\{u\}\}=\{\{\langle u;0\rangle\}\}=\{\langle u;1\rangle\}=\langle u;2\rangle\in\{\{\{u\}\}\}=$
$\{\{\{\langle u;0\rangle\}\}\}=\{\{\langle u;1\rangle\}\}=\{\langle u;2\rangle\}=\langle u;3\rangle\in \dots \in\{\langle u;k-1\rangle\}=\langle u;k\rangle\in \dots,$

причем $|<u;k>|=1$ для любого $k\in N\setminus\{0\}$, тогда как равенство $|<u;0>|=|u|$, в данном контексте, не имеет смысла. По каждому множеству $A\subseteq U$ также может быть построена последовательность кратных одноэлементных множеств
$\{A\}=<A;1>\in\{\{A\}\}=\{<A;1>\}=<A;2>\in\{\{\{A\}\}\}=\{\{<A;1>\}\}=\{<A;2>\}=<A;3>\in$ ... $\in\{<A;k\text{-}1>\}=<A;k>\in$ ..., и для единства обозначений, $A=<A;0>\in<A;1>$,
причем $|A|=|<A;0>|\neq|<A;k>|=1$ для любого $k\in N\setminus\{0\}$. В частности, для пустого множества $|\varnothing|=|<\varnothing;0>|=0\neq1=|<\varnothing;k>|$ при любом $k\in N\setminus\{0\}$. Кратные одноэлементные множества являются простейшими, после пустого множества, элементами кратных булеанов любого множества, определяемых следующим образом.

Как уже отмечалось, булеан B(A) некоторого множества A образован всеми его подмножествами, включая A и $\varnothing$, причем $|B(A)|=2\wedge|A|$; по этой причине булеан множества A часто обозначают через B(A)=2^A. Подобно вышеизложенному могут быть определены кратные булеаны множества A, а именно, с использованием их же обозначений, а также введенных ранее обозначений для кратных одноэлементных множеств, $B(A;0)=A=$ $<A;0>\in B(A;1)=B(A)=\{A,...,\varnothing\}\in B(A;2)=B(B(A;1))=B(B(A))=\{B(A;1),\ ...\ ,<A;1>,$ $...\ ,<\varnothing;1>,<\varnothing;0>\}\in B(A;3)=B(B(A;2))=\{B(A;2),\ ...\ ,<A;2>,\ ...\ ,<\varnothing;2>,<\varnothing;1>,$ $<\varnothing;0>\}\in\ ...\ \in B(A;k)=B(B(A;k\text{-}1))\in\ ...$, или B(A;0)=A, B(A;k)=2^B(A;k-1) для $k\in N\setminus\{0\}$, причем $|B(A;0)|=|A|$, $|B(A;k)|=2\wedge|B(A;k\text{-}1)|$ для $k\in N\setminus\{0\}$. В частности, для пустого множества $B(\varnothing;0)=\varnothing=<\varnothing;0>\ \in\ B(\varnothing;1)=\{\varnothing\}=<\varnothing;1>\in$ $B(\varnothing;2)=\{<\varnothing;1>,<\varnothing;0>\}\in B(\varnothing;3)=\{B(\varnothing;2),<\varnothing;2>,<\varnothing;1>,<\varnothing;0>\}\in B(\varnothing;4)\in\ ...$ $\in B(\varnothing;k)=2\wedge B(\varnothing;k\text{-}1)\ \in\ ...$, причем $|B(\varnothing;0)|=0$, $|B(\varnothing;1)|=2\wedge0=2\wedge(1\text{-}1)=1$, $|B(\varnothing;2)|=2\wedge1=2\wedge(2\text{-}1)=2$ – три первых, определенных выше, натуральных числа, но $|B(\varnothing;3)|=2\wedge2=2\wedge(3\text{-}1)=4$ и далее $|B(\varnothing;4)|=2\wedge4=16$, $|B(\varnothing;5)|=2\wedge16,...$. Обращает на себя внимание «сверхсильный» рост этой последовательности натуральных чисел; следует отметить, что в книге [9] они не нашли отражения.

Для того, чтобы, подобно всем этим числам, записать и число 0 как степень числа 2, можно использовать символ $-\infty$, если положить $2\wedge(-\infty)=0$, то есть $-\infty=\log_2 0$; его присоединение к множеству действительных чисел, в контексте идемпотентной математики [10], приводит к идемпотентному полуполю Rmax (см. также [2]); в рассматриваемом здесь контексте может оказаться полезным идемпотентное подполукольцо Nmax этого полуполя. Можно ввести в рассмотрение множество $B(\varnothing;-1)$, определив его так, чтобы $\varnothing=2\wedge B(\varnothing;-1)$ и $|B(\varnothing;-1)|=\log_2 0=-\infty$; это позволит записать $B(\varnothing;k)=2\wedge B(\varnothing;k\text{-}1)$ и $|B(\varnothing;k)|=2\wedge|B(\varnothing;k\text{-}1)|$ для любого $k\in N$. Для произвольного множества A можно ввести в рассмотрение множество B(A;-1), определив его так, чтобы A=2^B(A;-1) и $|B(A;-1)|=\log_2 n$; это позволит записать B(A;k)=2^B(A;k-1) и $|B(A;k)|=2\wedge|B(A;k\text{-}1)|$ для любого $k\in N$.

Таким образом, как отмечено выше и подтверждено примерами, кратные одноэлементные множества имеют минимальную, после пустого множества, мощность в каждом кратном булеане, тогда как каждый кратный булеан имеет максимальную мощность в следующем кратном булеане.

Прикладное значение кратных булеанов в задачах искусственного интеллекта связано с тем, что если обычное – четкое – множество, то есть подмножество множества U, является, по определению, элементом его первого булеана B(U), то, как показано в [11], нечеткое подмножество при определенных условиях может быть охарактеризовано набором четких множеств – его сечений или множеств уровня, то есть элементом второго булеана B(B(U)); наиболее существенное условие состоит в том, чтобы объединение подмножеств, входящих в набор, давало все множество U; этому условию удовлетворяют, например, сам первый булеан B(U) и вообще любой набор, включающий множество U, а также набор всех одноэлементных подмножеств множества U. Еще одним является условие частной замкнутости множеств набора относительно их пересечений; в [11] показано, как должен быть пополнен набор в случае нарушения этого условия.

Связь второго булеана с нечеткими множествами подсказывает его аксиоматическое описание. Хорошо известно, что первый булеан с операциями дополнения, объединения и пересечения четких множеств удовлетворяет аксиомам булевой алгебры – алгебраической структуры, относящейся к упоминавшимся выше идемпотентным полукольцам, а также к дистрибутивным решеткам с дополнениями. С другой стороны, известна аксиоматика нечеткой алгебры как MV-алгебры (см., например, [4,5,12]), отличающейся от булевой алгебры (и включающей последнюю как частный случай), предложенная за 7 лет до возникновения теории нечетких множеств. MV-алгебра, наряду с указанными выше булевыми операциями, использует специальные операции «сложения» и «умножения» – именно в случае идемпотентности последних MV-алгебра превращается в булеву алгебру. Представляет как теоретический, так и практический интерес интерпретация этих операций во втором булеане.

Представляется перспективным развитие подхода [11] в направлении использования последующих кратных булеанов, что позволит повысить гибкость понятия нечеткого множества подобно тому, как принятое в настоящее время понятие нечеткого множества отличается большей гибкостью по сравнению с понятием четкого множества.

Нечеткое число A определяется (см., например, [5]) как нечеткое подмножество множества R действительных чисел, функция принадлежности которого удовлетворяет следующим специальным условиям:

- нормальность $\max_{x\in A} \mu_A(x)=1$ (часто дополнительно требуется
- унимодальность $\mu_A(x)=1$ только для одного $x\in A$) ;
- выпуклость $\mu_A(y)\geq\min\{\mu_A(x),\mu_A(z)\}$ для $z\geq y\geq x$.

Целый раздел теории нечетких множеств – нечеткая арифметика или мягкие вычисления – основан на введении аналогов арифметических операций над нечеткими числами. Эти операции вводятся через операции либо над функциями принадлежности на основе принципа расширения, либо над наборами сечений на основе интервального принципа. При втором подходе определяется уровень принадлежности как ордината функции принадлежности нечеткого числа; пересечение функции принадлежности с этим уровнем дает пару значений – границ интервала достоверности; иначе говоря, для нечеткого числа, как и для произвольного нечеткого множества, определяется набор сечений, срезов или множеств уровня, то есть представляющий это нечеткое число элемент второго булеана B(B(R)); при этом, с точки зрения данного рассмотрения, существенно то, что операции над нечеткими числами определяются через операции над наборами их сечений, выполняемыми по правилам интервальной арифметики (о последней см., например, [10]). Следует отметить, что условия, предъявляемые к функциям принадлежности нечетких чисел, обеспечивают выполнение сформулированных ранее условий, при которых нечеткое число полностью характеризуется набором своих сечений. Таким образом, для нечеткой арифметики вполне естественным является оперирование с наборами четких множеств как с элементами второго булеана. Это подтверждает целесообразность подхода [11] с позиций именно мягких вычислений.

Мультимножество или комплект (см., например, [4,12,13]), в отличие от обычного множества, может содержать кратные, повторяющиеся, совпадающие элементы, несколько экземпляров одного и того же элемента. Если обычное множество полностью описывается своей характеристической функцией, заданной на этом множестве и принимающей значения в множестве {0,1}, а нечеткое множество – функцией принадлежности, заданной на этом нечетком множестве и принимающей значения в множестве [0,1], то мультимножество описывается функцией экземплярности, заданной на этом мультимножестве и принимающей значения в множестве N\{0}. Простейшие и общеизвестные примеры мультимножеств таковы: основная теорема арифметики о том, что каждое положительное натуральное число однозначно представимо произведением простых чисел (среди которых могут быть повторяющиеся), устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством N\{0} и множеством F(P) конечных мультимножеств простых чисел, называемых также конечными сверхнатуральными числами [13] (здесь P – множество простых чисел); основная теорема алгебры о том, что каждый нормированный многочлен P(z) степени n над полем C комплексных чисел имеет ровно n корней (вообще говоря, комплексных и кратных), устанавливает взаимно однозначное соответствие между такими многочленами и мультимножествами их корней; в математической статистике мультимножествами являются случайные выборки, что особенно проявляется после их систематизации, при переходе к абсолютным частотам (переход к относительным частотам ближе уже к нечетким множествам). Мультимножества и сверхнатуральные числа находят приложения в теории сетей Петри, теории формальных языков и грамматик и многих других; так [13], терминальные строки нециклической контекстно-свободной грамматики образуют мультимножество, которое становится обычным множеством в том и только том случае, когда грамматика недвусмысленна. Аксиоматика алгебры мультимножеств с подходящими операциями соответствует уже упоминавшейся MV-алгебре [12].

Многие задачи искусственного интеллекта приводятся к решению реляционных уравнений – мультимножественных или нечетких. Некоторые прямые методы решения последних приведены в [5]. Возможен и чисто алгебраический подход, приводящий к задаче исследования и решения матричных уравнений над полукольцами. Получаемые при этом результаты могут быть использованы, в частности, при моделировании информационных систем, содержащих базы данных и знаний с неполной информацией.

Полукольца, примеры которых уже упоминались выше, определяются как алгебраические структуры с двумя ассоциативными дистрибутивно связанными операциями (трактуемыми, например, как «аддитивная» или «сложение» и «мультипликативная» или «умножение»), иначе говоря, как две дистрибутивно связанные полугруппы. Это естественная область для задания матричных уравнений, однако из-за отсутствия, в общем случае, обратных операций в полугруппах возникают определенные проблемы при исследовании и решении таких уравнений. Следует отметить, что совокупность матриц над полукольцом является частичным (с точностью до согласования размеров при выполнении операций) полукольцом; использование понятия регулярного [8] элемента его мультипликативной полугруппы (в предложенной трактовке - *обобщенно обратимой* матрицы) позволяет до конца провести исследование уравнения на совместность и найти *некоторое* решение совместного уравнения; получение *общего* решения хорошо известно в случае, когда аддитивная полугруппа является *группой* (каждый элемент имеет *противоположный*), то есть полукольцо оказывается *кольцом*; в общем же случае с использованием понятия регулярного элемента аддитивной полугруппы (в предложенной трактовке - *обобщенно противоположимой* матрицы) пока не удается получить общее решение. Один из подходов к преодолению этих трудностей представлен в [14].

В некоторых случаях оказывается возможным перейти из полукольца в некоторое ассоциированное с ним кольцо, решить в нем уравнение, используя при этом алгоритм обобщенного обращения матриц над ассоциативными кольцами, и, возвратившись в исходное полукольцо, получить в нем таким образом общее решение уравнения. Примером такого преобразования может служить обобщенная стоуновская двойственность [8] между обобщенными булевыми алгебрами (дистрибутивными решетками с нулем и относительными дополнениями) и обобщенными булевыми кольцами (ассоциативными кольцами, все элементы которых идемпотентны [8]). Обобщенные булевы алгебры образуют подкласс дистрибутивных решеток, которые в свою очередь образуют подкласс полуколец. В этой связи представляет интерес вопрос как о распространении обобщенной стоуновской двойственности на более общие полукольца, чем обобщенные булевы алгебры, так и о сопоставлении результатов из [5] с результатами, получаемыми на основе перехода в возникающие при этом кольца или иные алгебраические структуры, ассоциированные с исходными полукольцами. В работе [12] представлено распространение стоуновской двойственности на мультимножества и локально конечные MV-алгебры.

Материал, представленный в данной работе, позволяет проследить «развитие понятия о числе» от исходных для всей фундаментальной и прикладной математики натуральных чисел до использующихся в современных задачах искусственного интеллекта нечетких и сверхнатуральных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе»: некоторые научно-методические аспекты // Новые технологии в образовании: Междунар. электрон. науч. конф. Сб. науч. тр. – Воронеж: ВГПУ, 2001. – С.52-54.
2. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе»: классические аналогии и современные приложения // Образовательные технологии. Методический аспект: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 8. – Воронеж: ВГПУ, 2002. – С. 112-116.
3. Блюмин С.Л. «Развитие понятия о числе» до деления на нуль и проблемы дистрибутивности // Образовательные технологии: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. – Воронеж: ВГПУ, 2003. – С. 60-64.
4. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. – Липецк: ЛЭГИ, 2001. – 139 с.

5. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А., Сараев П.В., Черпаков И.В. Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. – Липецк: ЛЭГИ, 2002. – 111 с.

6. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
7. Кон П. Универсальная алгебра. – М.: Мир, 1968. – 351 с.
8. Общая алгебра / Под общ. ред. Л.А. Скорнякова. Т.1,2. – М.: Наука, 1990, 1991.–592, 480 с.
9. Литцман В. Великаны и карлики в мире чисел. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 68 с.
10. Литвинов Г.Л., Маслов В.П., Соболевский А.Н. Идемпотентная математика и интервальный анализ. – Препринт. – М.: Междунар. Центр «Софус Ли»,1999. – 28 с.
11. Seselja B., Tepavcevic A. Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: an overview // Fuzzy Sets and Systems. – 2003. – No. 136. – P. 1-19.
12. Cignoli R., Dubuc E., Mundici D. Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-algebras // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2004. – Vol. 189. – No. 1-3. – P. 37-59.
13. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1977. –724 с.
14. Blyumin S., Golan J. One-sided complements and solutions of the equation aXb=c in semirings // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 29. – No. 8. – P. 453-458.

Приложение 1

УРАВНЕНИЯ В ПОЛУКОЛЬЦАХ

Определим *полукольцо* $SR = < A, *, + >$ как две *двусторонне дистрибутивно связанные полугруппы* $<A, *>$, $<A, +>$, так что каждая из операций $*$, $+$ *ассоциативна*. При таком определении полукольцо может быть охарактеризовано, например, как «*ассоциативное кольцо без 1, 0 и вычитания*», которые при исследовании и решении уравнений часто приходится вводить или заменять другими элементами и операциями, делая при этом дополнительные предположения и об основных операциях.

Непосредственно из определения полукольца следует, что в нем может быть записано *двустороннее неоднородное уравнение Сильвестра*

$$S(x) + e = T(x) + f,$$

где $S(x) = a_1 * x * b_1 + \ldots + a_p * x * b_p$, $T(x) = c_1 * x * d_1 + \ldots + c_q * x * d_q$ - *отображения Сильвестра* (в случае одного слагаемого – *элементарные*). Его разновидностями являются, например, *одностороннее* (без b_i , d_i или a_i , c_i), *однородное* (без e, f) , *элементарное* (с одним слагаемым в левой и/или правой части) уравнения, а также еще более специальные, например, $a * x * b = c$ (подробно рассмотренное ниже), $a * x = b$ («обычное линейное»), $a * x = b * x$ («простейшее однородное»), $x = b + a * x$ («дискретное стационарное уравнение Беллмана») и другие. Очевидно, что если $*$ *коммутативна*, а a , b *идемпотентны* ($a * a = a$, $b * b = b$) , то $a * x = b * x$ имеет решение $x = a * b$; если в SR есть 1, $a^0 = 1$, то $x = b + a * x$ имеет решение $x = a^{\$} * b$, где *транзитивное замыкание* $a^{\$} = a^0 + a^1 + \ldots + a^n + \ldots$ (формальная сумма).

Остановимся подробнее на *исследовании* и отыскании *общего решения* уравнения $a * x * b = c$, вводя только непосредственно используемые понятия и предположения и иллюстрируя предлагаемый подход такими «диаметрально противоположными» примерами, как *ассоциативные кольца с единицей* и *булевы алгебры*.

Предварительно напомним, что в *полугруппе* $S = <A, * >$, если коэффициенты a, b уравнения $a * x * b = c$ *регулярны* (*обобщенно обратимы*), то есть существует элемент a^- (*обобщенный обратный к* a) такой, что $a * a^- * a = a$, то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо}\} < =$$
$$= > \{a * a^- c * b^- * b = c,\ x = a^- * c * b^- - \text{ некоторое его решение}\}.$$

Отметим два частных случая:

1) если a - *идемпотент* ($a * a = a$, а значит и $a * a * a = a$, так что можно положить $a^- = a$), то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо}\} < =$$
$$= > \{a * c * b = c,\ x = c - \text{ некоторое его решение}\}.$$

2) если $S = <A, *, 1>$ - *моноид* и a *обратим* (существует a^{-1}, *обратный* к a, такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$), то же для b, то

$$\{a * x * b = c \text{ разрешимо},\ x = a^{-1} * c * b^{-1} - \text{его единственное решение}\}.$$

В общем случае возникает вопрос об описании общего решения уравнения. Ответ на него предполагает наличие дополнительных структур в A и дополнительных свойств элементов.

Напомним, например, что если $R=<A,*,+\ ,0>$ - *ассоциативное кольцо,* то *общее решение* разрешимого уравнения записывается в виде

$$x = a^- * c * b^- + y - a^- * a * y * b * b^-,$$ где y из A произвольно.

Рассмотрим уравнение $a * x * b = c$ в полукольце $SR=<A, *, 1,+\ ,0>$, так что $<A,*\ ,1>$, $<A,+\ ,0>$ - *моноиды*, $0=/=1$ и $0*c=c*0=0$ для всех c из A.

Определение. Регулярные элементы a, b *регулярно дополняемы*, если существуют элементы $a\sim$, $b\wedge$ (*регулярные дополнения* для a, b), такие, что

$$a * a\sim = 0,\ a^- * a + a\sim = 1,\ b\wedge * b = 0,\ b * b^- + b\wedge = 1.$$

Предложение. Общее решение разрешимого уравнения записывается в виде

$$x = a^- * c * b^- + a^- * a * y * b\wedge + a\sim * y,$$ где y из A произвольно.

Доказательство.

(i) x - решение:

$$a * x * b = a * a^- * c * b^- * b + a * a^- * a * y * b\wedge * b + a * a\sim * y * b =$$
$$= c + a * y * (b\wedge * b) + (a * a\sim) * y * b = c + a * y * 0 + 0 * y * b = c;$$

(ii) любое решение x_0 , $a * x_0 * b = c$, может быть выделено из x выбором, например, $y = x_0$:

$$x = a^- * c * b^- + a^- * a * x_0 * b\wedge + a\sim * x_0 = (a^- * a * x_0 * b * b^- + a^- * a * x_0 * b\wedge) +$$
$$+ a\sim * x_0 = a^- * a * x_0 * (b * b^- + b\wedge) + a\sim * x_0 = a^- * a * x_0 * 1 + a\sim * x_0 =$$
$$= (a^- * a * + a\sim) * x_0 = 1 * x_0 = x_0 .$$

Таким образом, исследование и решение данного уравнения в данном полукольце выполнено полностью. Отметим, что для уравнения $a * x = c$, когда $b = \ = 1 = b^-$ и в качестве $b\wedge$ может быть взят 0, общее решение записывается в виде $x = a^- * c + a\sim * y$.

Пример 1. Если $R=<A,*\ ,1,+\ ,0>$ - *ассоциативное кольцо с единицей,* то регулярными дополнениями являются $a\sim = 1 - a^- * a$, $b\wedge = 1 - b * b^-$; условия на них выполнены по их определению; общее решение записывается в виде

$$x = a^- * c * b^- + a^- * a * y * (1 - b * b^-) + (1 - a^- * a) * y =$$
$$= a^- * c * b^- + y - a^- * a * y * b * b^-,$$

что совпадает с указанным выше.

Пример 2. Если $BA=<A,*\ ,1,+\ ,0,\ '>$ - булева алгебра, то есть операции коммутативны, элементы идемпотентны и потому регулярны, так что можно положить $a^- = a$, $b^- = b$, то можно положить, в свою очередь, $a\sim = a'$, $b\wedge = b'$; нужные условия на такие элементы выполняются по определению булевой алгебры: $a * a' = 0$, $a + a' = 1$, то же для b; общее решение записывается в виде

$$x = c + a * y * b' + a' * y = c + (a' + a * b') * y = c + (a * b)' * y$$

и интерпретируется как *относительное дополнение* к $a * b$ в интервале $[c, y]$.

Основы теории и приложений полуколец представлены в [1]. Некоторые использованные выше понятия заимствованы из [2 – 4]. Предпосылки предложенного подхода содержатся в [5 – 6], а его дальнейшее развитие – в [7 – 10].

ЛИТЕРАТУРА

1.Golan J. Semirings and their Applications/J.Golan.–Dordrecht:Kluwer,1999.-285p.

2.Konstantinov M. On Properties of Sylvester and Lyapunov Operators/M. Konstantinov, V.Mehrmann, P.Petkov//Lin.Alg.Appl.–2000.–No.312.–P.35–71.

3.Nutt W. Unification in Monoidal Theories is Solving Linear Equations over Semirings: RR-92-01/W.Nutt.–Hamburg:DFKI,1992.–57p.

4.Литвинов Г.Л. Идемпотентная математика/Г.Л.Литвинов, В.П.Маслов// Воронеж. зимн. матем. школа «Современный анализ и его приложения».Тез.докл.– Воронеж:ВГУ,2000.–С.20–22.

5.Блюмин С.Л. Регулярная (по Дж. фон Нейману) математика/С.Л.Блюмин// Воронеж. зимн. матем. школа «Современный анализ и его приложения».Тез. докл.–Воронеж:ВГУ,2000.–С.48–49.

6.Блюмин С.Л. «Линейные» соотношения над «бедными» алгебраическими структурами/С.Л.Блюмин//Междунар. науч. конф. «Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения».Тез.докл.–Воронеж:ВГУ,2000.–С.59–61.

7.Блюмин С.Л. Исследование и решение матричных уравнений над полукольцами/С.Л.Блюмин//Воронеж. зимн. матем. школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы».Тез.докл.–Воронеж:ВГУ,2001.–С.44–46.

8.Блюмин С.Л. Формулы Клайна обобщенного обращения и регулярного дополнения блочных матриц над полукольцами/С.Л.Блюмин//Воронеж. весен. матем. школа «Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения-XII».Тез.докл.–Воронеж:ВГУ,2001.–С.27–28.

9.Blyumin S. On Some Operator Equations over Semirings/S.Blyumin//Int. Conf. on Functional Analysis in Ukr. Math. Congress-2001.Abstracts.–Kyiv:IMNANU,2001.-P.14.

10.Blyumin S. One-sided Complements and Solutions of the Equation aXb=c in Semirings/S.Blyumin, J.Golan//International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2002. – Vol. 29. – No. 8. – P. 453-458.

Приложение 2

УРАВНЕНИЯ В БИГРУППОИДАХ

Свойства операций в алгебраических структурах можно подразделить на глобальные (например: в полугруппе ассоциативность выполняется для любых наборов элементов), локальные (например: регулярность (обобщенная обратимость) – существование для a такого g, что $aga=a$ – может иметь место для отдельных – но не всех – элементов полугруппы) и локально-глобальные (например: если a регулярен, то $agax=ax$ для любого x). Если в алгебраической структуре с одной операцией не выполняются никакие глобальные свойства, то она известна как группоид; структуру с двумя операциями в подобной ситуации назовем бигруппоидом (например: биполугруппа не является полукольцом, если две ассоциативных операции не связаны дистрибутивно). Локальные же и локально-глобальные свойства выполняться в бигруппоидах могут, как и могут служить для решения некоторых задач.

В качестве примера рассмотрим исследование и решение в некотором бигруппоиде BG уравнения типа, рассмотренного в Приложении 1. Ввиду отсутствия (глобальной) ассоциативности ограничимся, например, уравнением

$a * (x * b) = c$

(уравнение $(a * x) * b = c$ может быть рассмотрено аналогично).

Пусть уравнение разрешимо, то есть существует x_0 Î BG такой, что $a * (x_0 * b) = c$; это значит, что $x_0 = x_0 * b$ является решением уравнения $a * x = c$, то есть $a * x_0 = c$.

Потребуем для a выполнения следующего локально-глобального свойства: существует g такой, что для любого k выполняется соотношение

$a * (g * (a * k)) = a * k$.

Тогда

$c = a * x_0 = a * (g * (a * x_0)) = a * (g * c)$;

тем самым получено условие на параметры a и c уравнения $a * x = c$, необходимое для разрешимости этого уравнения. Условие является и достаточным: если оно выполняется, то $x_1 = g * c$, очевидно, является некоторым решением этого уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение $x * b = g * c$. Пусть оно разрешимо, то есть существует x_1 Î BG такой, что $x_1 * b = g * c$.

Потребуем для b выполнения следующего локально-глобального свойства: существует h такой, что для любого k выполняется соотношение

$((k * b) h * b = k * b$.

Тогда

$g * c = x_1 * b = ((x_1 * b) h * b = ((g * c) * h) * b$;

в сочетании с полученным выше условием $c = a * (g * c)$ получаем условие

$c = a * (((g * c) * h) * b)$

на параметры a, b,c уравнения $a * (x * b) = c$, как необходимое, так и достаточное для его разрешимости: при выполнении этого условия $x_2 = (g * c) * h$, очевидно, является некоторым решением этого уравнения.

Для записи общего решения потребуем дополнительно выполнения следующих локально-глобальных свойств:

- для a – существует z такой, что для любого k выполняется соотношение

$g * (a * k) + z * k = k$;

- для b – существует h такой, что для любых k, l, m выполняется соотношение

$(m * (l * (k * b))) * h + m * (l * (k * h)) = m * (l * k)$;

- для a и b – для любого k и любого l такого, что $a * (((g * l) * h) * b) = l$, выполняется соотношение

$a * (((g * l) * h + g * (a * (k * h)) + z * k) * b) = l$.

Тогда общее решение уравнения $a * (x * b) = c$ может быть записано в виде

$x = (g * c) * h + g * (a * (y * h)) + z * y$, где y Î BG произвольно.

Это поверяется непосредственно с использованием сформулированных требований.

В ситуации Приложения 1, где бигруппоид является полукольцом, то есть операции ассоциативны и дистрибутивно связаны (глобальные свойства), а элементы a и b регулярны и регулярно дополняемы (локальные свойства), представленные здесь критерий разрешимости и общее решение уравнения $a * (x * b) = c$ сводятся к указанным там критерию разрешимости и общему решению уравнения $a * x * b = c$ при $g = a^-$, $h = b^-$, $z = a^{\sim}$, $h = b^{\wedge}$.

Сформулированные выше требования могут выполняться и в более общих алгебраических структурах, чем полукольца, например, в неассоциативных полукольцах (дистрибутивных бигруппоидах). Они тесно связаны с такими глобальными свойствами неассоциативных структур, как альтернативность, эластичность, моноассоциативность, выполнимость тождеств Якоби, Йордана, Мальцева, Муфанг, Бола и др. (см., например, ссылки [6-8] на с. 17 выше).

УДК 512.8

Б 71

Блюмин С.Л. Развитие понятия о «числе». Некоторые современные представления: Брошюра. – Липецк: Блюмин, 2005. – 30 с.

Авторская редакция

Авторская компьютерная верстка