

І. Р. Арсенюк, В. В. Колодний, А. А. Яровий

---

---

# ***ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ***

---

---

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

І. Р. Арсенюк, В. В. Колодний, А. А. Яровий

## **ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальностей “Інтелектуальні системи прийняття рішень” та „Програмне забезпечення автоматизованих систем”. Протокол № 4 від 27 жовтня 2005 р.

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 519  
А 85

*Рецензенти:*

**О. В. Осадчук**, доктор технічних наук, професор  
**А. М. Петух**, доктор технічних наук, професор  
**Л. І. Тимченко**, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Арсенюк І. Р., Колодний В. В., Яровий А. А.**  
А85 **Теорія алгоритмів.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2006. – 150 с.

В посібнику наведені основні підходи щодо уточнення поняття алгоритму та теоретичні основи аналізу ефективності алгоритмів. Розглянуто та проаналізовано ряд алгоритмів сортування, динамічного програмування, а також жадібні алгоритми.

Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни "Теорія алгоритмів".

УДК 519

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
<b>1 ІНТУЇТИВНЕ ПОНЯТТЯ АЛГОРИТМУ ТА ОСНОВНІ ПІДХОДИ ДО ЙОГО УТОЧНЕННЯ .....</b>	<b>7</b>
1.1 Логічна та аналітична теорія алгоритмів.....	7
1.2 Властивості та форми подання алгоритмів .....	9
1.3 Основні підходи до уточнення поняття „алгоритм” .....	15
1.3.1 Рекурсивні функції.....	16
1.3.2 Машина Тьюрінга. Тезис Тьюрінга.....	21
1.3.3 Нормальні алгоритми Маркова .....	25
1.4 Контрольні питання .....	28
<b>2 ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ .....</b>	<b>29</b>
2.1 Критерії оцінювання складності алгоритмів.....	29
2.2 Про корисність швидких алгоритмів .....	29
2.3 Швидкість зростання функцій. Асимптотичні позначення.....	31
2.4 Рекурентні співвідношення.....	34
2.4.1 Метод підстановки .....	35
2.4.2 Метод ітерацій .....	37
2.4.3 Загальний рецепт.....	39
2.5 Контрольні питання .....	46
2.6 Завдання .....	47
<b>3 АЛГОРИТМИ СОРТУВАННЯ ТА ЇХ АНАЛІЗ.....</b>	<b>49</b>
3.1 Внутрішнє та зовнішнє сортування.....	49
3.2 Алгоритми сортування за квадратичний час.....	50
3.2.1 Сортування вставками.....	50
3.2.2 Сортування методом прямого вибирання .....	54
3.2.3 Сортування методом бульбашки.....	56
3.3 Алгоритми сортування за псевдолінійний час.....	59
3.3.1 Сортування методом злиття.....	59

3.3.2	Сортування за допомогою купи.....	62
3.3.3	Швидке сортування.....	69
3.3.4	Ймовірнісні алгоритми швидкого сортування.....	75
3.4	Алгоритми сортування за лінійний час .....	80
3.4.1	Сортування підрахуванням. ....	81
3.4.2	Цифрове сортування .....	83
3.4.3	Сортування вичерпуванням .....	85
3.5	Контрольні питання .....	88
3.6	Завдання .....	89
<b>4</b>	<b>ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....</b>	<b>91</b>
4.1	Задача про пошук добутку кількох матриць .....	92
4.2	Випадки застосування динамічного програмування.....	98
4.3	Найбільша загальна послідовність .....	102
4.4	Контрольні питання .....	107
4.5	Завдання .....	107
<b>5</b>	<b>ЖАДІБНІ АЛГОРИТМИ.....</b>	<b>108</b>
5.1	Задача про вибір заявок .....	108
5.2	Випадки застосування жадібних алгоритмів.....	111
5.3	Контрольні питання .....	113
5.4	Завдання .....	114
<b>6</b>	<b>NP-ПОВНІ АЛГОРИТМИ.....</b>	<b>115</b>
6.1	Поліноміальний час розв'язування .....	116
6.2	перевірка належності класу NP .....	122
6.2	NP-повнота і зведення .....	126
6.3	Приклади NP-повних задач.....	134
6.4	Задача пошуку гамільтонового циклу у графі .....	141
6.5	Контрольні питання .....	147
6.6	Завдання .....	147
	ЛІТЕРАТУРА.....	149

## ВСТУП

Поняття алгоритму є центральним об'єктом спеціального розділу математики – *теорії алгоритмів*. Першим алгоритмом, що дійшов до нас, в його інтуїтивному розумінні, вважається запропонований Евклідом у III столітті до нашої ери алгоритм пошуку найбільшого загального дільника двох чисел. Протягом тривалого часу, аж до початку XX століття слово „алгоритм” вживалося у поєднанні „алгоритм Евкліда”, а для опису покрокового розв'язання інших математичних задач використовувалося слово „метод”.

Початковою точкою відліку сучасної теорії алгоритмів вважають роботу німецького математика К. Геделя (1931 р. – теорема про неповноту символічних логік), в якій було показано, що деякі математичні проблеми не можуть бути розв'язані алгоритмами з певного класу. Ця робота дала поштовх до пошуку і аналізу різних формалізацій алгоритму.

Перші фундаментальні роботи з теорії алгоритмів були опубліковані незалежно в 1936 році А. Тьюрінгом, А. Черчем та Е. Постом. Запропоновані ними машина Тьюрінга, машина Поста і лямбда-числення Черча були еквівалентними формалізаціями алгоритму. Сформульовані ними тези (Поста і Черча-Тьюрінга) постулювали еквівалентність запропонованих ними формальних систем та інтуїтивного поняття алгоритму. Важливим розвитком цих робіт стало формулювання і доведення алгоритмічно нерозв'язуваних проблем.

У 1950-і роки істотний внесок в теорію алгоритмів внесли Н. Колмогоров і А. Марков.

До 1970-х років сформувалися такі три напрями в теорії алгоритмів.

1. *Класична теорія алгоритмів* (формулювання завдань у термінах формальних мов, поняття задачі розв'язності, введення класів складності, формулювання проблеми  $P=NP$ , відкриття класу  $NP$ -повних задач та його дослідження).

2. *Теорія асимптотичного аналізу алгоритмів* (поняття складності і трудомісткості алгоритму, критерії оцінювання алгоритмів, методи отримання асимптотичних оцінок), у розвиток якої зробили істотний внесок Д. Кнут, А. Ахо, Д. Хопкрофт, Д. Ульман.

3. *Теорія практичного аналізу алгоритмів* (отримання явних функцій трудомісткості, інтервальний аналіз функцій, практичні критерії якості алгоритмів, методика вибору раціональних алгоритмів), найголовнішою роботою в цьому напрямку вважають фундаментальну працю Д. Кнута „Искусство программирования для ЭВМ”.

В загальному випадку теорія алгоритмів розглядає такі питання як формалізація поняття „алгоритм” та дослідження формальних алгоритмічних систем; формальне доведення алгоритмічної нерозв’язуваності ряду завдань; класифікація завдань, визначення і дослідження класів складності; асимптотичний аналіз складності алгоритмів; дослідження та аналіз рекурсивних алгоритмів; отримання явних функцій трудомісткості для порівняльного аналізу алгоритмів; розробка критеріїв порівняльного оцінювання якості алгоритмів.

Одержані в теорії алгоритмів теоретичні результати знаходять достатньо широке практичне застосування. При цьому під час дослідження деякого завдання результати теорії алгоритмів дозволяють відповісти на ряд важливіших питань. Чи є це завдання принципово алгоритмічно розв’язним? І якщо так – то чи не належить воно до класу NP-повних завдань, при ствердній відповіді на яке можна говорити про істотні часові затрати для отримання точного розв’язку у випадку значних розмірностей вихідних даних. Крім цього, завдяки методам теорії алгоритмів стає можливим раціональний вибір алгоритму (з відомої множини алгоритмів) розв’язання даної задачі з урахуванням особливостей їх застосування; отримання часових оцінок розв’язання складних задач; отримання вірогідних оцінок неможливості розв’язання деякої задачі за певний час; розробку та вдосконалення ефективних алгоритмів на основі практичного аналізу тощо.

У посібнику розглянуто такі основні питання, як інтуїтивне поняття алгоритму та основні підходи до його уточнення; теоретичні та практичні основи оцінки ефективності алгоритмів; аналіз різних алгоритмів сортування; динамічне програмування; жадібні алгоритми, а також NP-повні алгоритми.

Кожен розділ містить теоретичний матеріал, який ілюструється прикладами розв’язання відповідних задач, контрольні питання і завдання для лабораторних занять. Такий підхід дозволяє досить ґрунтовно опанувати і засвоїти основи теорії алгоритмів та навчитись їх застосовувати під час розв’язання практичних задач. Крім того, в посібнику наведено список літератури, що дозволяє значно глибше вивчити теоретичні основи теорії алгоритмів, та її практичне застосування.