Année Scolaire 2019 – 2020

MATHÉMATIQUES MPSI$_3$

DS N°1

Samedi 21/09/2019 (2h)

Les candidats sont invités à composer avec une encre suffisamment visible (en bleu foncé ou en noir par exemple), le bleu pâle est à proscrire. Les candidats sont également invités à porter une attention particulière à la qualité de leurs raisonnements ainsi qu'à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées). La référence des questions doit obligatoirement être mentionnée et les résultats doivent être $\boxed{\textit{encadrés}}$.

La calculatrice, les formulaires et les téléphones sont interdits.

Exercice 1 : calculs élémentaires

Résoudre **soigneusement** dans $\mathbb{R}$:

Q1) $\frac{1}{x+1} \leqslant \sqrt{1-x}$.

Q2) $|1-x| = 2|x| - 1$.

Exercice 2 : quantificateurs

Q1) Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec quantificateurs) et les démontrer :

a) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de maximum.

b) Tout complexe est le carré d'un complexe.

Q2) Traduire les assertions suivantes en langage courant, dire si elles sont vraies ou fausses (à justifier). Dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation avant de la démontrer :

a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]0;+\infty[, \frac{1}{x} \leqslant M$.

b) $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+T)} = e^{i\theta}$.

Exercice 3 : calculs ensemblistes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Soit E un ensemble non vide, et soient A, B, C trois parties de E, on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.

Q1) On suppose **dans cette question uniquement**, qu'il existe $X \subset \overline{A}$ et $Y \subset \overline{B}$ tels que $A \cup Y = B \cup X$. Démontrer que $A = B$.

Q2) Montrer que $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Q3) Exprimer $C \setminus (A \cup B)$ en fonction de $C \setminus A$ et de $C \setminus B$ (justifier votre réponse).

Q4) Montrer que : $[A \setminus B] \cup [B \setminus A] = [A \setminus C] \cup [C \setminus A] \implies B = C$.

Q5) Que pensez-vous de la proposition suivante : $A \setminus B = A \setminus C \implies B = C$? Justifier votre réponse. Si vous pensez que c'est faux, quelle est la bonne déduction à la place de $B = C$?

Exercice 4 : types de raisonnements

Q1) Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Q2) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine (*i.e.* de la forme $x \mapsto ax + b$), et d'une fonction s'annulant en -1 et en 1.

Q3)
a) Rappeler la formule d'addition donnant $\cos(x + y)$ pour x et y réels. Démontrer cette formule à l'aide de l'exponentielle complexe.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\cos(n\frac{\pi}{3})$.

c) Montrer que cette suite est périodique (préciser une période).

Exercice 5 : nombres complexes

On note $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z} + i}$. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Pour tout complexe Z, on notera Re(Z) sa partie réelle et Im(Z) sa partie imaginaire.

Q1)
a) Déterminer la forme algébrique de $f(z)$ pour $z \neq i$.

b) Déterminer z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple.

c) Déterminer z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$. Donner une interprétation géométrique simple.

d) Déterminer z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$. Donner une interprétation géométrique simple.

Q2)
a) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $z = iy$, calculer $f(z)$. Quel est l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ lorsque z parcourt $i\mathbb{R} \setminus \{i\}$?

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $z = x$, calculer $f(z)$. Montrer que l'ensemble des points d'affixe $f(z)$ lorsque z parcourt $\mathbb{R}$ est le cercle de centre $J(-\frac{i}{2})$ de rayon $\frac{1}{2}$ et privé de 0.

c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $|z| = 1 \iff \mathrm{Im}(f(z)) = -\frac{1}{2}$.

Q3)
a) Résoudre l'équation $f(z) = -\overline{z} + \sqrt{3}$. Mettre les solutions sous forme trigonométrique.

b) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

– FIN –