Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

Par E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n, on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \ldots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \ldots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n, assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. *Binet* dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la *fonction génératrice* de P_n, savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \ldots + P_nz^n + \ldots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \ldots + a^nz^n + \ldots. \quad (33)$$

Or, quel que soit a, on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^os de la note citée.

que la série qui forme le second membre soit convergente, et égale à $\frac{1}{1-az}$. Alors nous aurons

$$Z = (1 - az)^{-\frac{1}{2}};$$

ou, en développant

$$Z = 1 + \frac{1}{2}az + \frac{1.3}{2.4}a^2z^2 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.a^nz^n + \ldots \quad (35)$$

Le coefficient de z^n peut facilement se mettre sous la forme,

$$\frac{1.2.3\ldots 2n}{1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots n}\left(\frac{a}{4}\right)^n = \left(\frac{a}{4}\right)^n.C_{2n,n}.$$

On a donc, en comparant les équations (32) et (35):

$$P_n = \left(\frac{a}{4}\right)^n.C_{2n,n}. \quad (36)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

IX.

On a $C_{2n,n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(n+1)}$: l'équation (30) peut par conséquent se mettre sous la forme

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i+1)}{\Gamma(n-i+1).\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+1).\Gamma(i+1)} = 2^{2n}, \quad (37)$$

ou bien

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i).\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i)}{\Gamma(i)\Gamma(i+1)} = 2^{2n-2}.$$

Cette dernière équation se transforme facilement en

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = \pi. \quad (38)$$

On obtient ainsi une propriété des fonctions Γ, analogue à celle exprimée par l'équation (20).

X.

Prenons les deux identités :

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta,$$

$$\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta = \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.$$

En les multipliant membre à membre, donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \ldots n$, et ajoutant, nous obtiendrons

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&+ \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&= \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.
\end{aligned}$$

Le second produit et le troisième deviennent identiques, quand on change i en $n-i$: les sommes de ces produits, prises de $i=0$ à $i=n$ seront donc égales, et nous pourrons écrire en les confondant en une seule que nous doublerons :

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&- 2\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \\
&+ \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \\
&= \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta.
\end{aligned}$$

Or, l'équation (38), ainsi qu'on le voit aisément, équivaut à celle-ci :

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta = \pi^2. \qquad (39)$$

D'un autre côté, l'équation (17) donne

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta;$$

l'équation ci-dessus devient alors

$$\pi^2 + 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta - 2\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \ldots$$

$$\ldots \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{(n+2)-(i+1)-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{(i+1)-\frac{1}{2}}\, d\theta \\
&= \sum_1^{n'-1} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \\
&= \sum_0^{n'} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \\
&\quad - 2\int_0^1 \theta^{n'-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta,
\end{aligned}$$

en posant

$$n + 2 = n', \quad i + 1 = i'.$$

La première partie du nouveau second membre est égale à π^2, en vertu de (39); donc

$$\begin{aligned}
&\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \\
&= \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta + \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta,
\end{aligned}$$

à cause de

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Enfin, en remplaçant

$$\int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta \text{ par } \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta - \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta,$$

il vient

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta = \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta, \quad (40)$$

ou bien,

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+2)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}, \quad (41)$$

ou encore

$$\sum_0^n \frac{1.3.5\ldots(2n-2i-1)}{1.2.3\ldots(n-i+1)} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i} = \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{1.2.3\ldots(n+1)}: \quad (42)$$

la quantité sous le signe Σ doit être réduite à son second ou à son premier facteur, suivant que i égale 0 ou n.

(Novembre 1838.)
