

Journal de mathématiques
pures et appliquées : ou
recueil mensuel de mémoires
sur les diverses parties des
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1839.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'œuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisationcommerciale@bnf.fr.

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

PAR E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n , on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \dots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \dots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n , assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. Binet dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la fonction génératrice de P_n , savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \dots + P_nz^n + \dots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \dots + a^nz^n + \dots \quad (33)$$

Or, quel que soit a , on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^{os} de la note citée.

que la série qui forme le second membre soit convergente, et égale à $\frac{1}{1-az}$. Alors nous aurons

$$Z = (1 - az)^{-\frac{1}{2}};$$

ou, en développant

$$Z = 1 + \frac{1}{2}az + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a^2z^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot a^n z^n + \dots \quad (35)$$

Le coefficient de z^n peut facilement se mettre sous la forme,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{a}{4}\right)^n = \left(\frac{a}{4}\right)^n \cdot C_{2n,n}.$$

On a donc, en comparant les équations (32) et (35):

$$P_n = \left(\frac{a}{4}\right)^n \cdot C_{2n,n}. \quad (36)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

IX.

On a $C_{2n,n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1)}$: l'équation (30) peut par conséquent se mettre sous la forme

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i+1)}{\Gamma(n-i+1) \cdot \Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+1) \cdot \Gamma(i+1)} = 2^{2n}, \quad (37)$$

ou bien

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i) \cdot \Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i)}{\Gamma(i) \Gamma(i+1)} = 2^{2n-1}.$$

Cette dernière équation se transforme facilement en

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = \pi. \quad (38)$$

On obtient ainsi une propriété des fonctions Γ , analogue à celle exprimée par l'équation (20).

X.

Prenons les deux identités :

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

$$\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

En les multipliant membre à membre, donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$, et ajoutant, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & + \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Le second produit et le troisième deviennent identiques, quand on change i en $n-i$: les sommes de ces produits, prises de $i=0$ à $i=n$ seront donc égales, et nous pourrons écrire en les confondant en une seule que nous doublerons :

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - 2 \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & + \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Or, l'équation (38), ainsi qu'on le voit aisément, équivaut à celle-ci :

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \pi^n. \quad (39)$$

D'un autre côté, l'équation (17) donne

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

l'équation ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} \pi^n + 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta - 2 \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \dots \\ \dots \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{(n+2)-(i+1)-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{(i+1)-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \sum_1^{n'-1} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \sum_0^{n'} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & \quad - 2 \int_0^1 \theta^{n'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \end{aligned}$$

en posant

$$n + 2 = n', \quad i + 1 = i'.$$

La première partie du nouveau second membre est égale à π^n , en vertu de (39); donc

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta + \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \end{aligned}$$

à cause de

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Enfin, en remplaçant

$$\int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \text{ par } \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

il vient

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \quad (40)$$

ou bien,

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+2)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}, \quad (41)$$

ou encore

$$\sum_0^n \frac{1.3.5\dots(2n-2i-1)}{1.2.3\dots(n-i+1)} \cdot \frac{1.3.5\dots(2i-1)}{1.2.3\dots i} = \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{1.2.3\dots(n+1)}; \quad (42)$$

la quantité sous le signe Σ doit être réduite à son second ou à son premier facteur, suivant que i égale 0 ou n .

(Novembre 1838.)