

Journal de mathématiques  
pures et appliquées : ou  
recueil mensuel de mémoires  
sur les diverses parties des  
mathématiques [...]

Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques / publié par Joseph Liouville. 1839.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [reutilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:reutilisationcommerciale@bnf.fr).

NOTE

*Sur la Théorie des Nombres ;*

PAR E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont  $d, d', d'', \dots$ , et  $\varphi(n)$  désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec  $n$ , et plus petits que  $n$ , on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = N. »$$

*Démonstration* (\*). Soit  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ ,  $a, b, c, \dots$  désignant les facteurs premiers de N. En appelant  $d$  un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par  $a^i b^k c^l \dots$ , expression dans laquelle les exposants  $i, k, l, \dots$  peuvent varier respectivement de 0 à  $\alpha$ , de 0 à  $\beta$ , de 0 à  $\gamma$ , etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \dots = a^{i-1}(a-1) \times b^{k-1}(b-1) \times c^{l-1}(c-1) \times \dots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est  $-1$ ; la somme  $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots$  sera donc égale au produit des quantités

$$\begin{aligned} & 1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \dots + a^{\alpha-1}(a-1), \\ & 1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \dots + b^{\beta-1}(b-1), \\ & 1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \dots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.}, \end{aligned}$$

(\*) On en trouve une autre dans la 2<sup>me</sup> section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots = N. \quad C. Q. F. D.$$

## II.

En mettant la fonction  $(1+t+t^2+\dots+t^{m-1})^\mu$ , sous la forme  $(1-t^m)^\mu (1-t)^{-\mu}$ , on trouve que le coefficient de  $t^s$ , dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum_0^q (-1)^i \cdot C_{\mu,i} \cdot C_{s-im+\mu-1, \mu-1} :$$

dans cette formule,  $q$  représente le quotient entier de  $s$  par  $m$ , et  $C_{n,p}$  désigne généralement le nombre des combinaisons de  $n$  lettres, prises  $p$  à  $p$ .

Prenons  $s = (m-1)\mu$  : le coefficient  $k$  deviendra l'unité; donc

$$(A) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) = \sum_0^q (-1)^i C_{\mu,i} \cdot P_{m(\mu-i)-1, \mu-1},$$

$P_{m(\mu-i)-1, \mu-1}$  désignant le nombre des arrangements de  $m(\mu-i)-1$  lettres, prises  $\mu-1$  à  $\mu-1$ .

Cette équation se simplifie dans le cas de  $m > \mu$ . En effet, le quotient exact de  $s$  par  $m$  étant  $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$ , le quotient entier  $q$  se réduit alors à  $\mu-1$ . Donc

$$(B) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) = \sum_0^{\mu-1} (-1)^i \cdot C_{\mu,i} \cdot P_{m(\mu-i)-1, \mu-1}.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables: on a par exemple, en prenant  $m=8$  et  $\mu=5$ ,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 1 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 - \frac{5}{1} \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \\ &\quad - \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 + \frac{5}{1} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4. \end{aligned}$$