Journal de mathématiques pures et appliquées : ou recueil mensuel de mémoires sur les diverses parties des mathématiques [...]

NOTE

Sur la Théorie des Nombres;

Par E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont d, d', d'', ..., et $\varphi(n)$ désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec n, et plus petits que n, on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots = \mathrm{N}. \text{ »}$$

Démonstration (*). Soit $\mathrm{N} = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, a, b, c, ... désignant les facteurs premiers de N. En appelant d un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par $a^i b^k c^l \ldots$, expression dans laquelle les exposants i, k, l, ... peuvent varier respectivement de 0 à α, de 0 à β, de 0 à γ, etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}.\frac{c-1}{c}\ldots = a^{i-1}(a-1)\times b^{k-1}(b-1)\times c^{l-1}(c-1)\times\ldots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est -1; la somme $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots$ sera donc égale au produit des quantités

$$1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a-1),$$
$$1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \ldots + b^{\beta-1}(b-1),$$
$$1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \ldots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.},$$

(*) On en trouve une autre dans la 2me section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \ldots = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = \mathrm{N}. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

II.

En mettant la fonction $(1+t+t^2+\ldots+t^{m-1})^\mu$, sous la forme $(1-t^m)^\mu (1-t)^{-\mu}$, on trouve que le coefficient de t^s, dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum\nolimits_0^q (-1)^i . \mathrm{C}_{\mu,i} . \mathrm{C}_{s-im+\mu-1,\ \mu-1}:$$

dans cette formule, q représente le quotient entier de s par m, et $\mathrm{C}_{n,p}$ désigne généralement le nombre des combinaisons de n lettres, prises p à p.

Prenons $s=(m-1)\mu$: le coefficient k deviendra l'unité; donc

$$\text{(A)} \qquad 1.2.3\ldots(\mu-1) = \sum\nolimits_0^q (-1)^i \mathrm{C}_{\mu,i} . \mathrm{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1},$$

$\mathrm{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1}$ désignant le nombre des arrangements de $m(\mu-i)-1$ lettres, prises $\mu-1$ à $\mu-1$.

Cette équation se simplifie dans le cas de $m>\mu$. En effet, le quotient exact de s par m étant $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$, le quotient entier q se réduit alors à $\mu-1$. Donc

$$\text{(B)} \qquad 1.2.3\ldots(\mu-1) = \sum\nolimits_0^{\mu-1} (-1)^i . \mathrm{C}_{\mu,i} . \mathrm{P}_{m(\mu-i)-1,\ \mu-1}.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables: on a par exemple, en prenant $m=8$ et $\mu=5$,

$$1.2.3.4 = 1.39.38.37.36 - \frac{5}{1}.31.30.29.28 + \frac{5.4}{1.2}.23.22.21.20$$
$$- \frac{5.4}{1.2}.15.14.13.12 + \frac{5}{1}.7.6.5.4.$$