

Érdi Bálint

ASZTROMETRIA

Jegyzet a 2007/2008 tanév II. félévi előadáshoz

1. változat

1. fejezet

Csillagászati koordináta-rendszerek

1.1. Földrajzi koordináták

Csillagászati megfigyeléseknél szükség lehet a Föld felszínén elhelyezkedő megfigyelő földrajzi koordinátáira. A földrajzi koordináták meghatározásához ismerni kell a Föld alakját.

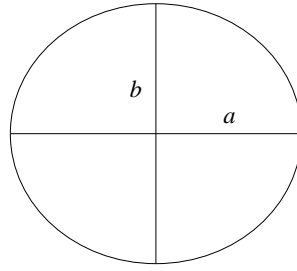
A Föld alakja a *geoid*: ez a nyugalomban lévő, közepes tengerszinthez tartozó gravitációs ekvipotenciális felület. A geoid bármely pontjának érintősíkjára merőleges a gravitációs gyorsulás vektorának irányára.

Műholdas mérésekből a geoidot nagy pontossággal ismerik. A geoid alakját egy referencia-ellipszoidhoz képest adják meg. A referenciául szolgáló forgási ellipszoid méretei (1.1. ábra):

- egyenlítői sugár: $a = 6378,140$ km,
- poláris sugár: $b = 6356,755$ km,
- lapultság:

$$f = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298,253} = 0,00335286.$$

A geoid eltéréseit a referencia-ellipszoidtól *geoidundulációnak* nevezik. Ezek értéke nem haladja meg a 120 m-t. A legnagyobb eltérések: -120 m Indiától DNy-ra, +80 m Új-Guinea környékén.



1.1. ábra. A forgási ellipszoid metszete.

Csillagászati megfigyeléseknél, ha a Föld alakját is figyelembe kell venni, azt általában elegendő gömbbel vagy forgási ellipszoiddal közelíteni.

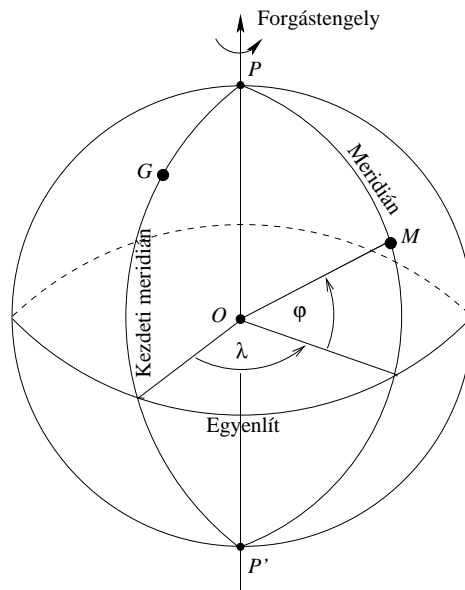
A Föld felszínén egy pont helyzetét két koordinátával, a *földrajzi szélességgel* és a *földrajzi hosszúsággal* lehet megadni (1.2. ábra). A földrajzi koordináták definiálásához szükséges fogalmak:

- *forgástengely*: kijelöli az északi és déli pólust (P és P');
- *egyenlítő*: a Föld O középpontján átmenő, a forgástengelyre merőleges sík az egyenlítő síkja, ez a Föld felszínét az egyenlítőben metszi;
- *szélességi körök*: az egyenlítővel párhuzamos síkok a Föld felszínét a szélességi körökben metszik (nevezetesen az északi és déli *térítőkörök* és a *sarkkörök*);
- *meridián*: a pólusokon és az M megfigyelőn halad át a meridián síkja, ez a Föld felszínét az M -hez tartozó meridiánban metszi (gömb alak esetén a meridián kör, ez az M *hosszúsági köre*, forgásellipszoid alak esetén a meridián ellipszis);
- *kezdeti meridián*: a greenwichi obszervatórium egy meghatározott pontján áthaladó meridián a kezdeti meridián.

Többféle szélesség és hosszúság definiálható.

1.1.1. A szélesség definiálása

A Föld tömegeloszlása nem gömbszimmetrikus, ezért az M megfigyelő helyén a függőön iránya (a geoid normálisa) nem a Föld O középpontján,



1.2. ábra. Földrajzi koordináták.

hanem egy attól különböző O_1 ponton megy át (1.3. ábra). Az ellipszoid normálisa sem az O ponton megy át, hanem egy attól különböző O_2 ponton. Ennek megfelelően többféle szélességről beszélhetünk:

- *csillagászati szélesség*: az O_1 -nél lévő φ szög;
- *geodéziai szélesség*: az O_2 -nél lévő φ' szög;
- *geocentrikus szélesség*: az O -nál lévő φ'' szög.

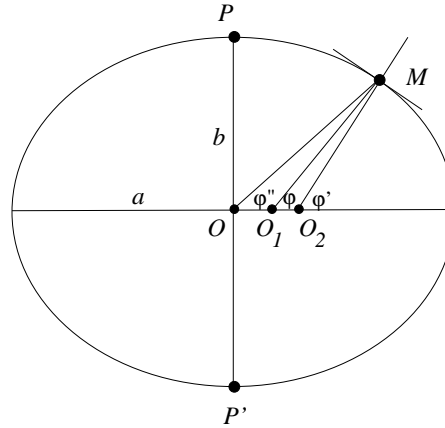
Speciális esetek: az egyenlítőn $\varphi' = 0^\circ$, $\varphi'' = 0^\circ$, de φ kissé eltérhet 0° -tól. A pólusokon $\varphi' = \pm 90^\circ$, $\varphi'' = \pm 90^\circ$, de φ kissé eltérhet $\pm 90^\circ$ -tól.

A csillagászati és a geodéziai szélesség eltérése kisebb $3''$ -nél.

A geodéziai és a geocentrikus szélesség különbsége közelítőleg:

$$\varphi' - \varphi'' \approx 103132,4 (2f - f^2) \sin 2\varphi,$$

ahol f a Föld lapultsága. Az eltérés legnagyobb $\varphi = 45^\circ$ -nál, értéke $11,5$.



1.3. ábra. Földrajzi szélességek.

1.1.2. A hosszúság definiálása

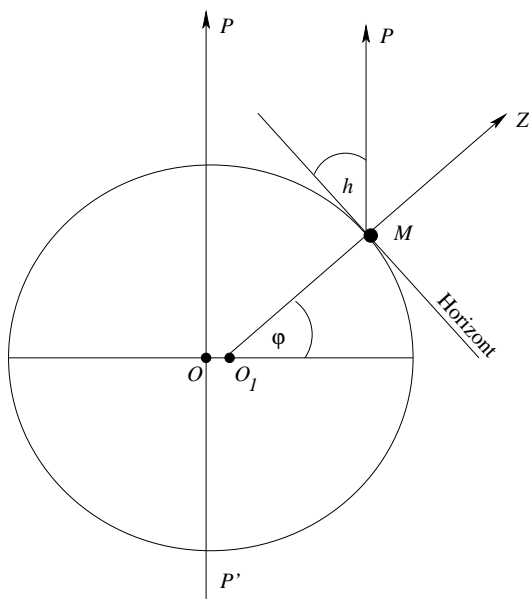
- *csillagászati hosszúság*: az M megfigyelő helyén a függőőn irányának a kezdeti (greenwichi) meridiánnal bezárt λ szöge;
- *geodéziai hosszúság*: az M megfigyelő meridiánsíkjának a kezdeti meridiánsíkkal bezárt λ' szöge.

A hosszúságot a kezdeti meridiántól számítják. Ettől keletre $0^\circ - 180^\circ$ -ig mérik a keleti hosszúságot, nyugatra $0^\circ - 180^\circ$ -ig a nyugati hosszúságot.

A csillagászati műszerek felállításánál a helyi függőleges (mérőőn iránya) és vízszintes irányokat veszik alapul. Így csillagászati műszerekkel a csillagászati földrajzi szélességet és hosszúságot határozzák meg.

1.1.3. A pólus horizont feletti magassága

Az M megfigyelő helyén a függőőn iránya legyen az MO_1 irány (1.4. ábra). Az M -ben erre állított merőleges sík a *horizont* síkje. Az O_1M irány kijelöli a Z zenit irányát. M -ben húzzunk párhuzamost a Föld forgástengelyével. Az M megfigyelő számára ez kijelöli a P égi pólus irányát. Látható, hogy a pólus horizont feletti h magassága megegyezik az M megfigyelő φ csillagászati szélességével (merőleges szárú szögek egyenlők).



1.4. ábra. Az égi pólus horizont feletti magassága.

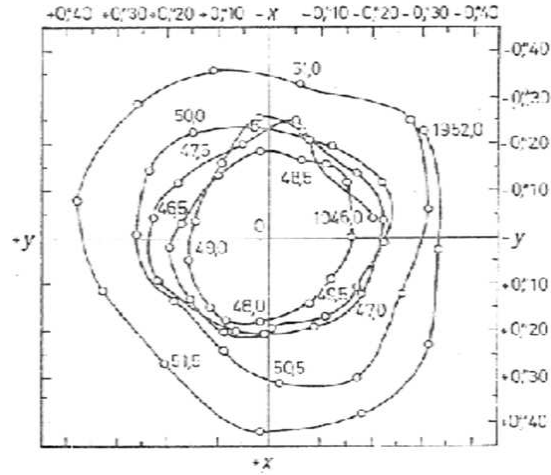
1.1.4. A hosszúság és szélesség változásai

A földrajzi koordináták definiálásában kitüntetett szerepe van a Föld forgástengelyének. A forgástengely iránya azonban a földtesthez képest nem állandó helyzetű, emiatt a földrajzi koordináták is változnak. A forgástengely és a földtest egymáshoz viszonyított helyzetváltoztatásának következménye a *pólusmozgás*. A pólusmozgásnak két összetevője van, egyik a *pólusingadozás*, másik a *pólusvándorlás*.

A *pólusingadozás* oka az, hogy a Föld nem egy fő tehetetlenségi tengely körül forog. A forgástengely és a közelében lévő fő tehetetlenségi tengely $\approx 0,3^\circ$ -es szöveget zár be egymással, emiatt a földtest mintegy "billeg" a forgástengelyen. A Földről nézve a forgástengely közelítőleg egy körkúp palástja mentén járja körbe a fő tehetetlenségi tengelyt. Ennek periódusa ≈ 430 nap (Chandler-periódus). A forgástengelynek a Föld felszínével való (képzelt) metszéspontja egy nem záródó, spirálszerű, enyhén hullámos görbe (1.5. ábra), mely egy 26 m élhosszúságú négyzet belsejében marad ($10 \text{ m} \approx 0,32^\circ$). A görbe szabálytalanságai a Föld rövid időskálájú tömegátrendeződéseinek (légtömegek áthelyeződése, évszakos változások), s a tehetetlenségi nyomaték

ebből eredő változásainak a következményei.

A *pólusvándorlás* a különböző időpontokban meghatározott pólus-helyzetek középértékének szekuláris jellegű eltolódása. Ennek mértéke $\approx 0,15$ m/év. Oka a tehetetlenségi nyomaték változása a Föld tömegének tartós, egyirányú átrendeződése (pl. lemezmozgások) következtében.



1.5. ábra. A pólus mozgása

A pólus mozgása miatt változnak a földrajzi koordináták. A korrekciók kiszámításához helyezzünk az északi középpólusra egy jobbsodrású, derékszögű xy koordinátarendszert úgy, hogy az xy sík érintse a Földet, az x tengely pedig mutasson Greenwich felé. A pillanatnyi pólus koordinátái a középpólushoz képest legyenek x_p , y_p ($< 0, "3$). Adott földrajzi helynek a középpólusra vonatkozó φ_m , λ_m koordinátái a

$$\Delta\varphi = x_p \cos \lambda_m - y_p \sin \lambda_m,$$

$$\Delta\lambda = -(x_p \sin \lambda_m + y_p \cos \lambda_m) \operatorname{tg} \varphi_m$$

korrekciók alkalmazásával számíthatók át a pillanatnyi pólusra vonatkozó koordinátákká.

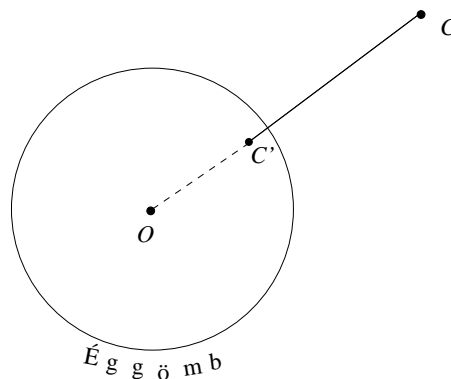
Az x_p , y_p koordinátákat a Nemzetközi Földforgás és Vonatkoztatási Rendszerek Szolgálat (International Earth Rotation and Reference Systems Service, rövidítve IERS, <http://www.iers.org/>) adja. Ez a rendszer definiálja a

középpólus helyzetét is a földtesthez viszonyítva, mint vonatkoztatási alapírányt.

1.2. Az éggömb

Az égitestek égi helyzetének megadásával a *szférikus csillagászat* foglalkozik. Ennek alapfogalma az *éggömb*, melynek felületére az égitesteket leképezzük (1.6. ábra). Mivel a pozíciós csillagászati méréseknél az égitestek távolságára nincs szükség, az éggömb sugara tetszőleges lehet. A középpont megválasztása szerint az éggömb lehet

- *topocentrikus*: a középpont a megfigyelő szemében, vagy a mérőműszerek érzékelőrendszerében van;
- *geocentrikus*: a középpont a Föld geometriai középpontja;
- *heliocentrikus*: a középpont a Nap középpontja;
- *galaktocentrikus*: a középpont a Galaxis középpontja;
- *baricentrikus*: a középpont egy rendszer (pl. a Naprendszer) tömegközéppontja.



1.6. ábra. Az éggömb

Az éggömb O középpontjából egy C csillaghoz félegyenest húzva a félegyenes egy C' pontban metszi az éggömböt (1.6. ábra). Ez a C' pont a csillag

szférikus helye. Egy égitest szférikus helye két szöggel adható meg. A szögek meghatározásához definiálni kell egy az éggömb középpontján átmenő *alapsíkot*, azon egy *kiindulási irányt* és egy *körüljárási irányt*. Ezek megválasztása szerint beszélünk

- *horizontális,*
- *egyenlítői,*
- *ekliptikai,*
- *galaktikai*

koordináta-rendszerekről.

1.3. A horizontális koordináta-rendszer

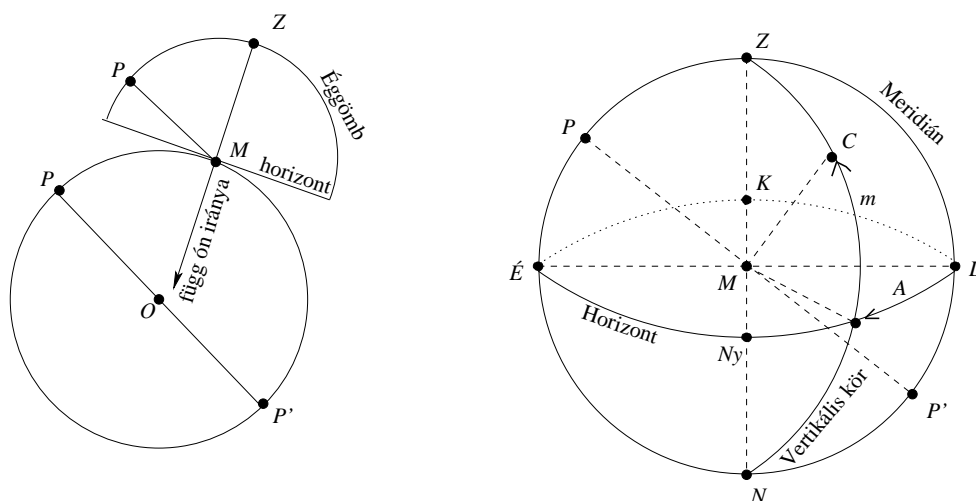
A horizontális koordináta-rendszer lehet topocentrikus és geocentrikus.

A *topocentrikus horizontális* koordináta-rendszerben az éggömb középpontja a Föld felszínén elhelyezkedő M megfigyelő (1.7. ábra). M -en keresztül a függőön irányával párhuzamos egyenest húzva az egyenes két pontban metszi az éggömböt: a megfigyelő feje fölött helyezkedik el a Z *zenit*, átellenes oldalon az N *nadír*. A ZN egyenesre merőleges, M -en áthaladó sík a *horizont síkja*, mely az éggömböt a *horizontban* metszi. M -en keresztül a Föld forgástengelyével párhuzamos egyenest húzva az két pontban metszi az éggömböt: a P északi és P' déli pólusban. A P, Z, P', N pontokon áthaladó főkör az *égi meridián*. A meridián a horizontot a D délpontban és \acute{E} északpontban metszi. (A Föld északi féltékéjén elhelyezkedő M megfigyelő számára a P északi pólus van az égen, s a meridián mentén P -ből Z irányába haladva előbb a D délpontba, majd az \acute{E} északpontba jutunk.)

A horizonttal párhuzamos körök az *almukantarátok*. A zenitet és a nadírt összekötő félkörök a *vertikális körök*. A meridián síkjára merőleges vertikális körök az *első vertikálisok*, a horizontból ezek metszik ki az Ny nyugat- és K keletpontot.

A horizontális koordináta-rendszerben az

- *alapsík:* a horizont síkja;
- *alapidány:* az MD félegyenes iránya;



1.7. ábra. Topocentrikus horizontális koordináta-rendszer

- *körüljárási irány*: Z-ből nézve az óramutató járásával megegyező irány.

A horizontális koordináta-rendszerben egy C égitest koordinátái:

- m *magasság*: a horizonttól mért m szögtávolság (melyet a C -n áthaladó vertikális mentén mérünk a horizonttól a C égitestig). $m = 0^\circ$ a horizonton, $0^\circ < m \leq 90^\circ$ az éggömb északi felén, $0^\circ > m \geq -90^\circ$ a déli éggömbön.
- A *azimut*: a C -n áthaladó vertikális horizonttal való metszéspontjának a D délponttól mért A szögtávolsága (melyet a D délpontból kiindulva a horizont mentén nyugati irányban mérünk). $0^\circ \leq A \leq 360^\circ$.

Néha a magasság helyett a

$$z = 90^\circ - m$$

zenittávolságot használják.

A *geocentrikus horizontális* koordináta-rendszer középpontja a Föld geometriai középpontja, a zenit-nadir irányt pedig az OM egyenes határozza meg. Ez kissé eltérhet ($<11,5$) az M megfigyelő helyén a függőn irányától. Emiatt egy égitest horizontális koordinátái kissé különböznek a topocentrikus és a geocentrikus rendszerben (a geocentrikus rendszerben ugyanúgy a

magasság és az azimut a két koordináta). Egy másik eltérés onnan adódik, hogy közeli (naprendszerbeli) égitesteknél a Föld mérete nem hanyagolható el: az ilyen égitestek kissé más irányban látszanak a Föld középpontjából, mint a Föld felszínéről (pl. az eltérés 8, "8 a Nap, és maximálisan 62' a Hold esetében).

A horizontális koordináta-rendszer használata: olyan műszerek esetén, melyek tengelyei vízszintes és függőleges beállításúak (pl. teodolit, vertikális kör, nagy rádiótávcsövek és optikai teleszkópok).

A horizontális rendszer hátránya: az égitestek koordinátái mind a földrajzi helytől, mind az időtől függően változnak. Ezért horizontális rendszerben végzett mérés esetén mindig meg kell adni a megfigyelés helyét és időpontját.

1.4. Az első egyenlítői koordináta-rendszer

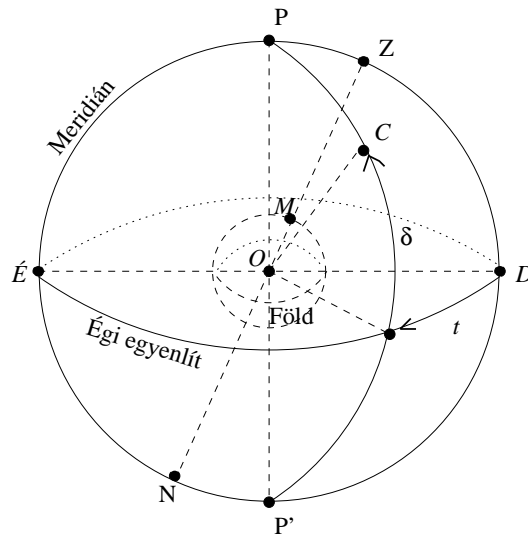
Az első egyenlítői koordináta-rendszer lehet topocentrikus és geocentrikus. Topocentrikus rendszerben az éggömb középpontja a Föld felszínén elhelyezkedő M megfigyelő, a zenit-nadír irányt pedig a függőön jelöli ki. Geocentrikus rendszerben az éggömb középpontja a Föld O középpontja, a zenitet és a nadírt az OM egyenes éggömbbel való metszéspontjai adják (1.8. ábra). Az égi pólusokat a Föld forgástengelye jelöli ki. A P , Z , P' , N pontokon megy át a meridián, ez metszi ki az égi egyenlítőből a D dél- és E északpontot.

A Föld O középpontján átmenő és a forgástengelyre merőleges sík az *égi egyenlítő síkja*, az éggömböt ez az *égi egyenlítőben* metszi. Az első egyenlítői koordináta-rendszerben az

- *alapsík*: az égi egyenlítő síkja;
- *alapirány*: az OD félegyenes iránya;
- *körüljárási irány*: P -ből nézve az óramutató járásával megegyező irány.

Az első egyenlítői koordináta-rendszerben egy C égitest szférikus helye két koordinátával adható meg:

- *deklináció*: az égi egyenlítőtől mért δ szögtávolság ($\delta = 0^\circ$ az egyenlítőn, $0^\circ < \delta \leq 90^\circ$ az éggömb északi felén, $0^\circ > \delta \geq -90^\circ$ a déli éggömbön).



1.8. ábra. Az első egyenlítői koordináta-rendszer

- *óraszög*: a PCP' óraker egyenlítővel való metszéspontjának a D délponttól mért t szögtávolsága (melyet a D délpontból kiindulva az egyenlítő mentén P -ből nézve az óramutató járásával egyező irányban mérünk). Az óraszöget időegységekben fejezik ki, a teljes (360° -os) szögnek 24^h felel meg. $0^h \leq t \leq 24^h$.

Néha a deklináció helyett a

$$p = 90^\circ - \delta$$

pólustávolságot használják.

Az első egyenlítői koordináta-rendszerben egy csillag két koordinátája közül a δ deklináció állandó, a t óraszög azonban a Föld forgása miatt növekszik. (Valójában vannak olyan jelenségek, pl. sajátmozgás, az egyenlítő helyzetének szekuláris változása, melyek miatt egy égitest deklinációja igen lassan változik, de ezeket itt most figyelmen kívül hagyjuk.)

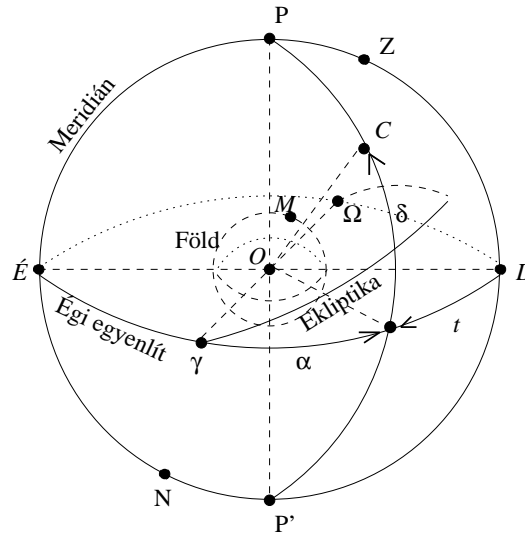
Az első egyenlítői koordináta-rendszer igen előnyösen használható. A csillagászati távcsövek nagy része ugyanis *parallaktikus* szerelésű: egyik tengelyük, az *óratengely* párhuzamos a Föld forgástengelyével, másik tengelyük, a *deklinációs tengely* erre merőleges. A távcsövet a deklinációs tengely körül forgatva be lehet állítani a vizsgált csillag deklinációját, a távcsövet pedig egy óragéppel az óratengely körül forgatva biztosítható, hogy a távcső mindig a

csillag pillanatnyi óraszögére álljon.

1.5. A második egyenlítői koordináta-rendszer

A második egyenlítői koordináta-rendszer is lehet topocentrikus és geocentrikus. Ebben a rendszerben új fogalom az *ekliptika*. Az éggömb közép-pontján átmenő, a Föld napkörüli keringésének síkjával párhuzamos sík az ekliptika síkja. Ez az éggömböt az ekliptikában metszi. Az ekliptika egyúttal a Nap évi járásának nyomvonala az éggömbön.

Az ekliptika az égi egyenlítővel $\varepsilon \approx 23,5^\circ$ -os szöget zár be (ε értéke az idő függvényében lassan változik). Az ekliptika és az égi egyenlítő két pontban metszi egymást: a γ tavaszpontban és az Ω őszi pontban (1.9. ábra). A két metszéspont közül az a tavaszpont, amelyen keresztül a Nap évi látszólagos mozgása során a déli félgömbről az északi félgömbre lép. A második egyenlítői koordináta-rendszerben a tavaszpont egy új koordináta kiindulópontja.



1.9. ábra. A második egyenlítői koordináta-rendszer

A második egyenlítői koordináta-rendszerben az

- *alapsík*: az égi egyenlítő síkja;
- *alapidány*: az éggömb középpontjából nézve a tavaszpont iránya;

- *körüljárasi irány*: P -ből nézve az óramutató járásával ellenkező irány.

A második egyenlítői koordináta-rendszerben egy C égitest szférikus helye két koordinátával adható meg, egyik az előzőleg megismert *deklináció*, másik a tavaszponttól mért *rektaszenció*:

- *deklináció*: az égi egyenlítőhöz mért δ szögtávolság ($\delta = 0^\circ$ az egyenlítőn, $0^\circ < \delta \leq 90^\circ$ az éggömb északi felén, $0^\circ > \delta \geq -90^\circ$ a déli éggömbön).
- *rektaszenció*: a PCP' órákör egyenlítővel való metszéspontjának a tavaszponttól mért α szögtávolsága (melyet a tavaszpontból kiindulva az egyenlítő mentén P -ből nézve az óramutató járásával ellenkező irányban mérünk). A rektaszenciót is időegységekben fejezik ki, a teljes (360° -os) szögnek 24^h felel meg. $0^h \leq \alpha \leq 24^h$.

Egy csillag rektaszenciója és deklinációja igen jó közelítéssel állandó. Kis változást a csillag sajátmozgása és a tavaszpont vándorlása (a precesszió és nutáció miatt, lásd 4.4. fejezet) okoz. A csillagok rektaszencióját és deklinációját tartalmazó katalógusok megadják, hogy ezek milyen epochára (a tavaszpont mely időpontra vonatkozó helyzetére) vonatkoznak. A katalógusbeli koordinátákat át kell számítani az aktuális megfigyelések időpontjára.

1.6. Az ekliptikai koordináta-rendszer

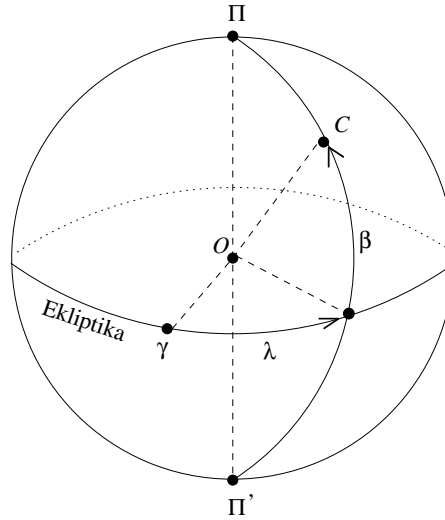
A naprendszerbeli égitestek mozgását olyan koordináta-rendszerben célszerű vizsgálni, melynek alapsíkja az ekliptika. Az ekliptikai koordináta-rendszer lehet topo-, geo- és heliocentrikus.

Az éggömb középpontjában az ekliptika síkjára merőlegesen állított egyenes az éggömböt a Π ekliptikai pólusban és Π' antipólusban metszi (1.10. ábra). (A Π pólus az egyenlítői rendszer északi féltekéjén helyezkedik el.)

Az ekliptikai koordináta-rendszerben az

- *alapsík*: az ekliptika síkja;
- *alapirány*: az éggömb középpontjából nézve a tavaszpont iránya;
- *körüljárasi irány*: Π -ből nézve az óramutató járásával ellenkező irány (a Nap ekliptikán való évi mozgásának iránya).

Az ekliptikai koordináta-rendszerben használt két koordináta az *ekliptikai szélesség* és az *ekliptikai hosszúság*:



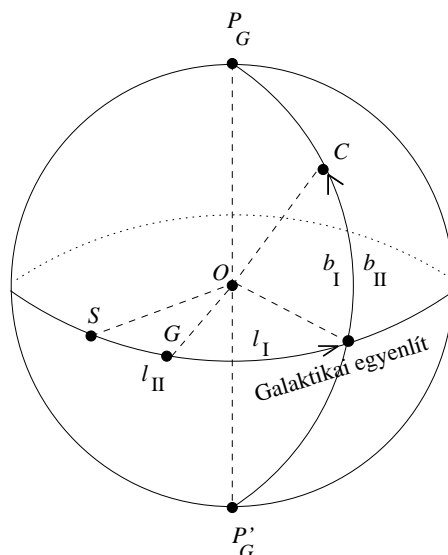
1.10. ábra. Az ekliptikai koordináta-rendszer

- *ekliptikai szélesség*: az ekliptikától mért β szögtávolság ($\beta = 0^\circ$ az ekliptikán, $0^\circ < \beta \leq 90^\circ$ az éggömb északi felén, $0^\circ > \beta \geq -90^\circ$ a déli éggömbön).
- *ekliptikai hosszúság*: a $\Pi C \Pi'$ *ekliptikai hosszúsági kör* ekliptikával való metszéspontjának a tavaszponttól mért λ szögtávolsága (melyet a tavaszpontból kiindulva az ekliptika mentén Π -ből nézve az óramutató járásával ellenkező irányban szövegységben mérünk). $0^\circ \leq \lambda \leq 360^\circ$.

1.7. A galaktikai koordináta-rendszer

A galaktikai koordináta-rendszert a sztellárasztronómiában használják. A galaktikai koordináta-rendszer P_G pólusának definíciója: a második egyenlítői koordináta-rendszerben az $\alpha = 12^{\text{h}}49^{\text{m}}$, $\delta = 27^\circ 24'$ koordinátájú pont. A P_G póluson és az éggömb O középpontján (a Föld középpontján) áthaladó egyenesnek az éggömbbel való másik metszéspontja a P'_G antipólus (1.11. ábra). Az O középponton áthaladó, a $P_G P'_G$ egyenesre merőleges sík az éggömbből a *galaktikai egyenlítőt* metszi ki. A galaktikai egyenlítő közelítőleg párhuzamos a Galaxis szimmetriasíkjával, és az égi egyenlítővel $62^\circ 36'$ -es szöget zár be. A galaktikai egyenlítő és az égi egyenlítő két metszéspontja közül azt, amelyik

a Galaxis centrumának irányától 33° -ra van, a galaktikai egyenlítő felszálló csomójának tekintik. Az 1.11. ábrán ez a G pont.



1.11. ábra. A régi és új galaktikai koordináta-rendszer

Kétféle galaktikai koordináta-rendszer van. A *régi galaktikai koordináta-rendszerben* az

- *alapsík*: a galaktikai egyenlítő síkja;
- *alapirány*: az éggömb O középpontjából nézve a galaktikai egyenlítő G felszálló csomója felé mutató irány;
- *körüljárási irány*: a P_G pólusból nézve az óramutató járásával ellentétes irány.

A régi galaktikai koordináta-rendszerben két koordináta van: a *galaktikai szélesség* és a *galaktikai hosszúság*:

- *galaktikai szélesség*: a galaktikai egyenlítőhöz mért b_I szögtávolság ($b_I = 0^\circ$ a galaktikai egyenlítőn, $0^\circ < b_I \leq 90^\circ$ az éggömb északi felén, $0^\circ > b_I \geq -90^\circ$ a déli éggömbön).

- *galaktikai hosszúság*: a $P_GCP'_G$ galaktikai hosszúsági kör galaktikai egyenlítővel való metszéspontjának a G galaktikai felszálló csomótól mért l_I szögtávolsága (melyet a G pontból kiindulva a galaktikai egyenlítő mentén P_G -ből nézve az óramutató járásával ellenkező irányban szögegységekben mérünk). $0^\circ \leq l_I \leq 360^\circ$.

1971-től használják az új galaktikai koordináta-rendszert. Ez abban különbözik a régitől, hogy az alapirányt a G felszálló csomó helyett a Galaxis S centrumának iránya (1.11. ábra) jelöli ki (a két irány közti különbség 33°). Az új galaktikai koordináta-rendszerben a két koordináta a b_{II} új galaktikai szélesség és az l_{II} új galaktikai hosszúság, melyekre

$$b_{II} = b_I, \quad l_{II} = l_I + 33^\circ.$$

A régi és az új galaktikai szélesség tehát megegyezik.

1.8. A nemzetközi égi vonatkoztatási rendszer

A csillagászati koordináta-rendszerek definiálásakor két alapvető szempontot kell figyelembe venni:

- az égitestek koordinátái egyszerűen legyenek meghatározhatók;
- a koordináta-rendszer minél inkább nyugalomban legyen, hogy megközelítse az inerciális koordináta-rendszert.

A két követelmény egyidejűleg nem elégíthető ki, mert a koordináta-rendszerek alapirányait úgy kell megválasztani, hogy azok könnyen reprodukálhatók legyenek (például a Föld forgástengelye), de ezek ugyanakkor egy inerciarendszerhez képest nincsenek nyugalomban. A Naprendszer egyes tagjaira, vagy a fényes csillagokra alapozott koordináta-rendszerek a Föld mozgásai, illetve a Galaxis forgása miatt nem valósíthatják meg az inerciarendszert. Az inerciarendszert legjobban megközelítő koordináta-rendszer a távoli extragalaxisokra és rádióforásokra alapozott rendszer lehet.

Egy koordináta-rendszert a gyakorlatban úgy valósítanak meg, hogy megadják bizonyos referencia-objektumok koordinátáit. Transzformációs összefüggésekkel ezekből határozzák meg az észlelt égitestek koordinátáit. Elvileg két égitest szférikus koordinátáinak megadása már definiál egy szférikus koordináta-rendszert. A modern asztrometriai katalógusok nagy számú (n)

objektum koordinátáit adják meg, így a koordináta-rendszer erősen túlhatározott. A referencia-rendszer megvalósításának minősége attól függ, hogy az összes lehetséges objektum-pár $(n(n-1)/2)$ koordinátái mekkora pontossággal definiálják ugyanazt az alapsíkot (égi egyenlítőt) és alapírányt (a rektaszcenzió mérésének kezdőpontját).

A korábbi csillagászati referencia-rendszer gyakorlati megvalósítása az 1988-ban publikált FK5 katalógus volt (5th Fundamental Catalogue), mely a 2000. január 1. 12^h epochához tartozó J2000,0 ekvátorra és ekliptikára vonatkozott. Az FK5 katalógus 1535 fényes csillag (7,5 magnitúdóig) és további 3177 halványabb csillag (9,5 magnitúdóig) koordinátáit tartalmazta. Az FK5 katalógus az FK3 és FK4 katalógusok folytatása volt, valamennyit a vizuális tartományban végzett meridiánészlelések alapján állították össze. Az FK5 katalógus pontossága 0,"030 – 0,"040 volt.

A modern asztrometriai mérések pontossága (VLBI-mérések rádióhullámhosszakon, az 1989-ben felbocsátott Hipparcos asztrometriai műhold mérései az optikai tartományban) szükségessé tették az előzőnél pontosabb referencia-rendszer bevezetését. A Nemzetközi Csillagászati Unió (International Astronomical Union, rövidítve IAU) határozata alapján 1998-tól használják a *nemzetközi égi vonatkoztatási rendszert* (International Celestial Reference System, rövidítve ICRS, <http://www.iers.org/iers/earth/icrs/icrs.html>). Ennek origója a Naprendszer (VLBI mérések alapján az általános relativitáselmélet keretében meghatározott) baricentruma, tengelyei pedig a térben fix irányításúak (melyeket nem mérhető sajátmozgású extragalaktikus objektumok egy kiválasztott csoportjának koordinátaival definiálnak).

Az ICRS-t a gyakorlatban a rádiótartományban egy 608 extragalaktikus rádióforrás koordinátáit megadó katalógus valósítja meg. Ezeket VLBI-mérésekkel észlelték, valamennyien erősek ($> 0,1$ Jy) az S és X sávokon (13 és 3,6 cm), többségüknek van gyenge optikai megfelelője (tipikusan $m_V > 18$) és a többségük kvazár. A 608 objektumból 212 a *definiáló rádióforrás*, melyek meghatározzák az ICRS tengelyeit. A definiáló rádióforrások pozícióinak tipikus bizonytalanságai 0,"0005 nagyságrendűek, az ICRS tengelyeinek orientációját a definiáló források kb. 0,"00002 pontossággal határozzák meg. Megjegyezzük, hogy az ICRS tengelyei jól (0,"1-nél nagyobb pontossággal) megegyeznek a J2000,0-es ekvátor és ekliptika rendszerének tengelyeivel.

Az ICRS-t az optikai hullámhosszakon a Hipparcos-katalógus 118218 csillaga valósítja meg, melyek közül a leghalványabbak vizuális magnitúdója $m_V = 12$. A tényleges megvalósításhoz azonban a katalógus csillagainak csak 85%-át használják, melyek sajátmozgását megbízhatóan meg lehetett

határozni (a 9^m-nál fényesebb csillagokra a sajátmozgás meghatározásának pontossága 0,001/év). J2000,0 epochára a Hipparcos-katalógusban szereplő csillagok pozícióinak pontossága 0,005 – 0,010 (a J1991,25=1991. április 2. kezdőepochára a pozíciók pontossága 0,001-nél jobb volt).

A Nemzetközi Földforgás Szolgálat (International Earth Rotation Service, IERS) feladata az ICRS-t definiáló rádióforrások folyamatos megfigyelése. Erre azért van szükség, mert egy bizonyos szinten legtöbb forrásnak változik a fluxusa és a szerkezete. Ha szükséges, a definiáló források listájára új objektumokat kell felvenni, hogy a rendszer tengelyeinek fix orientációja megmaradjon.

1.9. A csillagok látszólagos mozgása az égen

A Föld forgása miatt az égitestek az égi egyenlítő síkjával párhuzamos deklinációs körök mentén mozognak (eltekintve a sajátmozgástól és egyéb kis korrekciós tényezőktől). Napi látszólagos mozgásuk során kétszer haladnak át a meridiánon. A zenithez közelebbi meridián-átmenetet *felső kulminációnak* vagy *delelésnek*, a zenittől távolabbit *alsó kulminációnak* nevezik. Az 1.12. ábra ezt egy meridionális metszeten szemlélteti. M a megfigyelő, P az északi, P' a déli pólus, Z a zenit, N a nadír, h a horizont síkjának, e az égi egyenlítő síkjának a meridián síkjával való metszészvonala. A pólus horizont feletti magassága megegyezik a megfigyelő φ földrajzi szélességével. A deklinációs körök vetületei a meridián síkjára az e -vel párhuzamos szakaszok.

A horizonthoz képest a csillagok napi látszólagos pályája háromféle lehet:

1. Az alsó és a felső kulmináció a horizont felett van: ezek a *cirkumpoláris csillagok* (ilyen az 1.12. ábrán az 1-es jelzésű csillag). Látható, hogy φ földrajzi szélességen a

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi$$

deklinációjú csillagok cirkumpolárisak.

2. Az alsó kulmináció a horizont alatt, a felső kulmináció a horizont felett van: ezek a csillagok a Föld egy fordulata alatt kétszer haladnak át a horizonton, felkelnek (a horizont feletti magasság negatívból pozitívba megy át) és lenyugszanak (a horizont feletti magasság pozitívról negatívra vált) (ilyen az 1.12. ábrán a 2-es jelzésű csillag). φ földrajzi

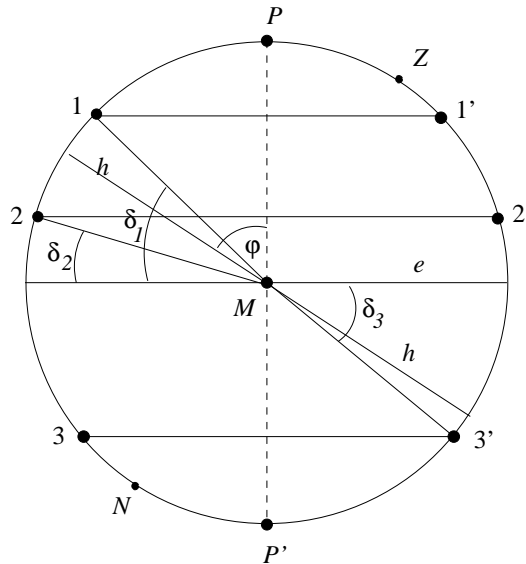
szélességen azok a csillagok kelnek és nyugszanak, melyeknek deklinációjára teljesül, hogy

$$\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi.$$

3. Mind az alsó, mind a felső kulmináció a horizont alatt van: az ilyen csillag a megfigyelő számára nem látható (ilyen az 1.12. ábrán a 3-as jelzésű csillag). φ földrajzi szélességen a

$$\delta \leq \varphi - 90^\circ$$

deklinációjú csillagok nem láthatók.



1.12. ábra. Csillagok láthatósága

Budapest földrajzi szélessége $\varphi = 47^\circ 30'$. Itt a $\delta \geq 42^\circ 30'$ csillagok cirkumpolárisak, a $\delta \leq -42^\circ 30'$ csillagok sosem láthatók.

Az északi sarkon ($\varphi = 90^\circ$) a pozitív deklinációjú csillagok cirkumpolárisak, a negatív deklinációjúak sosem láthatók. Az egyenlítőn ($\varphi = 0^\circ$) minden csillag felkel és lenyugszik.

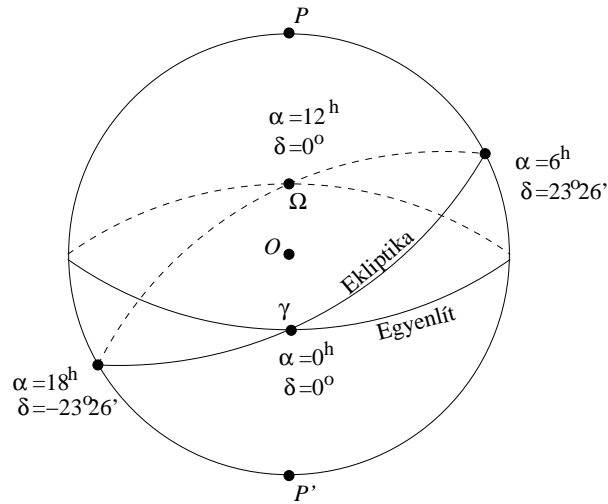
hely	α	δ	elnevezés	közelítő időpont
tavaszpont	0^h	0°	tavaszi napéjegyenlőség (ekvinokcium)	márc. 21.
nyárpont	6^h	$23^\circ 26'$	nyári napforduló (szolsztícium)	jún. 21.
őszpont	12^h	0°	ősz napéjegyenlőség (ekvinokcium)	szept. 23.
télpont	18^h	$-23^\circ 26'$	téli napforduló (szolsztícium)	dec. 21.

1.1. táblázat. A Nap nevezetes helyzetei

1.10. A Nap látszólagos mozgása

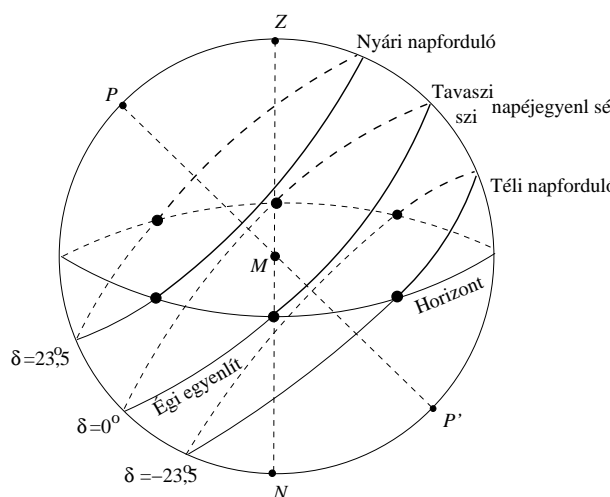
A Nap az év során végighalad az ekliptikán, rektaszenciója és deklinációja eközben folyamatosan változik. A Nap négy nevezetes helyzetét az 1.1. táblázat és az 1.13. ábra mutatja.

A napéjegyenlőségek és napfordulók időpontjait a táblázat csak közelítőleg adja meg, ezek ugyanis a megadott dátumokhoz képest kissé eltolódhatnak amiatt, hogy a tropikus év hossza (amíg a Nap tavaszponttól tavaszpontig halad) nem egész számú naptól áll (365,2422 középnap).



1.13. ábra. A Nap nevezetes helyzetei

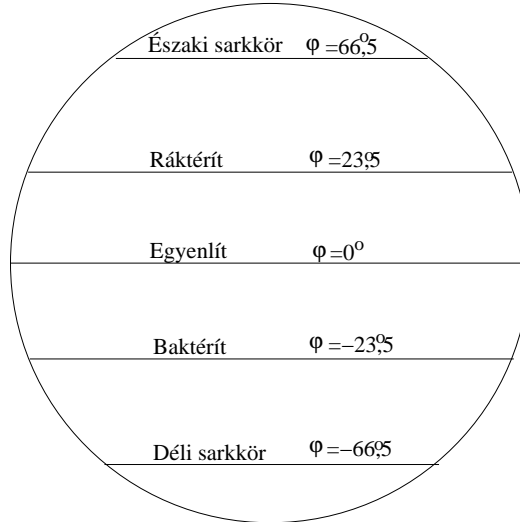
Mint az 1.14. ábráról látható, a Föld északi féltékájén elhelyezkedő megfigyelő számára $\delta > 0^\circ$ esetén a Nap horizont feletti (nappali) íve hosszabb, mint a horizont alatti (éjjeli) ív. $\delta = 0^\circ$ esetén a két ívdarab megegyezik (őszai és tavaszi napéjegyenlőség). $\delta < 0^\circ$ esetén a horizont feletti ív rövidebb a horizont alattinál. Ennek következtében a nappalok nyáron hosszabbak, mint télen. A nappal leghosszabb a nyári napfordulókor ($\delta = 23^\circ 26'$), és legrövidebb a téli napfordulókor ($\delta = -23^\circ 26'$).



1.14. ábra. Napforduló és napéjegyenlőség

A Nap deklinációjának változásával kapcsolatosak a *sarkkörök* és a *téritőkörök* (1.15. ábra). A *sarkkör* az a földrajzi szélességi kör, ahol a Nap évente egyszer cirkumpoláris. Az északi féltéken a cirkumpolaritás feltétele $\delta \geq 90^\circ - \varphi$. A Nap legnagyobb deklinációját, $\delta = 23^\circ 26'$ -et a nyári napfordulókor éri el. Így az a legkisebb földrajzi szélesség, ahol a Nap még cirkumpoláris lehet: $\varphi = 90^\circ - 23^\circ 26' = 66^\circ 24'$. Ez az *északi sarkkör*. Ennél magasabb szélességeken a Nap mindaddig cirkumpoláris, amíg deklinációjára teljesül, hogy $\delta \geq 90^\circ - \varphi$. Speciálisan az Északi sarkon $\delta \geq 0^\circ$ a circumpolaritás feltétele, így itt a Nap fél évig cirkumpoláris. A Nap deklinációjának csökkenésével az északi sarkkörön a Nap naponta felkel és lenyugszik a $\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi$ feltételnek megfelelően. Amikor azonban a téli napfordulókor a Nap deklinációja eléri legkisebb értékét, $\delta = -23^\circ 26'$ -et, a $\delta \leq \varphi - 90^\circ$ feltétel miatt az északi sarkkörön a Nap nem kel fel. Az északi sarkkörnél magasabb szélességeken a téli napforduló környékén a Nap rövidebb-hosszabb ideig nem

látható, mindaddig, amíg $\delta \leq \varphi - 90^\circ$ teljesül. Speciálisan az Északi sarkon a Nap fél évig nem látható, amíg $\delta \leq 0^\circ$.



1.15. ábra. Sarkkörök és térítőkörök

A *déli sarkkör* a $\varphi = -66^\circ 24'$ szélességi kör, itt a Nap évente egyszer, a téli napfordulókor cirkumpoláris. A déli sarkkör alatt a téli napforduló környékén válik a Nap a földrajzi szélességtől függően rövidebb-hosszabb ideig cirkumpoláris, a nyári napforduló környékén pedig nem emelkedik a horizont fölé. Speciálisan a Déli sarkon fél évig nem nyugszik le a Nap ($\delta < 0^\circ$), és fél évig nem kel fel ($\delta > 0^\circ$).

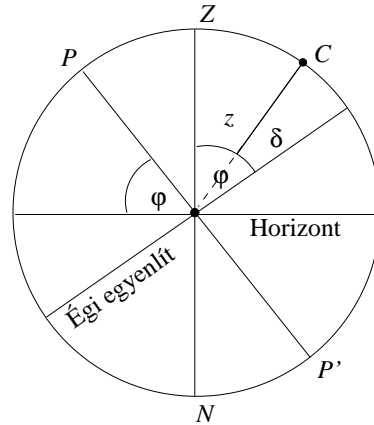
A *térítőkörök* azok a szélességi körök, melyeken a Nap évente egyszer a zenitben delel. Mint az 1.16. ábráról látható, egy φ szélességen elhelyezkedő megfigyelő számára egy égitest delelési zenittávolsága

$$z = \varphi - \delta.$$

Mivel a Nap deklinációja az év során $\delta = 23^\circ 26'$ és $\delta = -23^\circ 26'$ között változik, azért a térítőkörök a $\varphi = 23^\circ 26'$ (Ráktérítő) és $\varphi = -23^\circ 26'$ (Baktérítő) szélességi körök lesznek. A Ráktérítőn a Nap a nyári napfordulókor delel a zenitben, a Baktérítőn a téli napfordulókor. A térítőkörök között minden helyen a Nap delelési zenittávolsága évente kétszer egyenlő nullával.

A Ráktérítő és az északi sarkkör, valamint a Baktérítő és a déli sarkkör

között a Nap sosem válik cirkumpolárissá, és delelési zenittávolsága sosem nulla.



1.16. ábra. A zenittávolság

A sarkkörök és a térítőkörök határozzák meg a Földön az *éghajlati öveget*. Ennek oka az, hogy a szoláris besugárzás tartamát és a felmelegedés mértékét elsősorban a Nap delelési zenittávolsága határozza meg, ez pedig más határok között változik a különböző tartományokban. A sarkköröktől a sarkokig terülnek el a *hideg* égövek, a sarkkörök és a térítőkörök között a *mérsékelt* égövek, míg a két térítőkör a *trópusi* égövet fogja közre.

1.11. Összefoglalás

Csillagászati koordináta-rendszerek koordinátái:

- *Horizontális*: m magasság, A azimut (D délpontból kiindulva a horizont mentén nyugati irányban mérik).
- *Első egyenlítői*: δ deklináció, t óraszög (D délpontból kiindulva az egyenlítő mentén nyugati irányban mérik).
- *Második egyenlítői*: δ deklináció, α rektaszcenzió (tavaszpontból kiindulva az egyenlítő mentén keleti irányban mérik).

- *Ekliptikai*: β ekliptikai szélesség, λ ekliptikai hosszúság (tavaszpontból kiindulva az ekliptika mentén a Nap látszólagos mozgásával megegyező irányban mérik).
- *Galaktikai*: b_{II} galaktikai szélesség, l_{II} galaktikai hosszúság (a Galaxis centrumának irányától kiindulva a galaktikus egyenlítő mentén a galaktikai pólusból nézve az óramutató járásával ellenkező irányban mérik).

Csillagok láthatósági feltételei:

φ földrajzi szélességű helyen

- cirkumpolárisak a

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi,$$

- felkelnek és lenyugszanak a

$$\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi,$$

- nem láthatók a

$$\delta \leq \varphi - 90^\circ$$

deklinációjú csillagok.

2. fejezet

Az idő

2.1. Bevezetés

Az idő mérése alapvető jelentőségű a csillagászatban. A megfigyelések időpontját mindig rögzíteni kell. Az idő mérése többféle rendszerben lehetséges.

Az idő meghatározására olyan fizikai jelenség használható, mely

- folytonos és mérhető, vagy
- állandó periódussal ismétlődik és megszámlálható, vagy
- mindkét feltételnek eleget tesz.

Lényeges, hogy a jelenség ne tartalmazzon rövid időskálájú irregularitásokat. Ekkor az idő órák segítségével mérhető: extrapolálható és interpolálható.

A csillagászatban három olyan jelenség van, melyhez jól megfigyelhető mozgás kapcsolódik. Mindegyik más időmérő rendszerhez vezet:

- nappalok és éjszakák váltakozása \rightarrow *világidő*,
- a Föld forgása, vagy a csillagok napi látszólagos mozgása \rightarrow *csillagidő*,
- a Föld, a Hold és a bolygók pályamenti mozgása \rightarrow *efemerisz idő*.

A csillagászati előrejelzések céljára a legelőnyösebb idő a mozgásegyenletek független változója lenne, ez az *inerciaidő*. Ezt az definiálja, hogy egy tehetetlenségi mozgást végző test (melyre nem hat erő) egyenlő utakat egyenlő

idők alatt tesz meg. A gyakorlatban azonban tehetetlenségi mozgást környezetünkben nem lehet megvalósítani (nincsenek olyan testek, melyekre semmiféle erő nem hat). Ezért az inerciaidő helyett az efemerisz időt vezették be. Az efemerisz idő a Naprendszer égitestjeinek keringő mozgását leíró egyenletekben szereplő független változó. Mivel a bolygók mozgása jól közelíti a tehetetlenségi mozgást, az efemerisz idő az inerciaidő jelenleg ismert legjobb közelítése.

2.2. A csillagidő

A Föld forgásán alapul a *csillagidő*. Csillagidőben a Föld egyenletesen forog a tengelye körül. Mivel azonban a Föld forgásában vannak évszakos és szabálytalan ingadozások, a csillagidő az inerciaidőhöz képest nem telik egyenletesen.

A Föld forgása miatt egy csillag t óraszöge a csillagidővel egyenes arányban nő. Ha a csillagoknak nem lenne sajátmozgása, bármely csillag alkalmas lenne arra, hogy óraszögével a csillagidő mértékét definiálják. Megállapodás szerint a csillagidő numerikus értékét a tavaszpont óraszöge adja, jele s .

A csillagidő helyi idő, a tavaszpont órszögét a helyi meridiántól számítják. A csillagidő egysége a *csillagnap*, mely a tavaszpont két egymást követő delelése közti időtartam. Egy csillagnap = 24 óra = 1440 perc = 86400 másodperc csillagidő egységekben. A tavaszpont delelésekor $t = 0^h$, így $s = 0^h$. Alsó kulminációban $t = 12^h$, így $s = 12^h$.

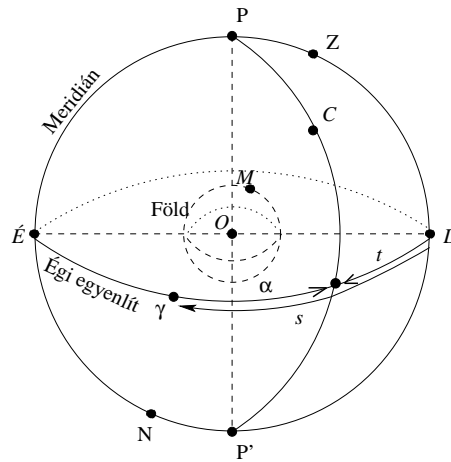
Mivel a tavaszpont helye az égen nincs megjelölve, a gyakorlatban a csillagidőt nem a tavaszpont óraszögének meghatározásával mérik. Tetszőleges csillagra igaz (2.1. ábra), hogy

$$s = \alpha + t,$$

ahol s a tavaszpont óraszöge, α a csillag rektaszcenziója, t a csillag óraszöge. Amikor a csillag delel, $t = 0^h$, $s = \alpha$. Egy adott földrajzi helyen a csillagidő megegyezik az éppen delelő csillagok rektaszcenziójával.

A csillagidő a csillagok meridián-átmenetének mérésével határozható meg. Az erre szolgáló műszerek a *meridiánkör* vagy a *passzázműszer*. A passzázműszer függőleges fonálkeresztje épp a meridián síkjában van. Amikor ezen áthalad az ismert α rektaszcenziójú csillag, akkor lesz a csillagidő α .

Az obszervatóriumokban csillagidőt mutató csillagórákat használnak (kihasználva az extrapoláció és interpoláció lehetőségét). Adott α rektaszcen-



2.1. ábra. A csillagidő

ziójú csillag s csillagidőben történő észleléséhez a $t = s - \alpha$ összefüggésből lehet kiszámítani a távcsőbeállításához a t óraszöget.

A csillagidő meghatározásánál kis problémát okoz, hogy a tavaszpont helyzete nem állandó az égen a csillagokhoz képest. A tavaszpont ugyanis a precesszió és nutáció miatt (4.4. fejezet) kissé eltolódik az egyenlítő mentén. Az évi elmozdulás $50,3''$. Ennek megfelelően kétféle csillagidőt különböztetnek meg.

- *Valódi csillagidő*: a valódi tavaszpont óraszöge, a precesszió és nutáció figyelembevételével. Jele: *AST*, az angol *apparent sidereal time* = látszólagos csillagidő elnevezésből.
- *Közepes csillagidő*: a közepes tavaszpont óraszöge, a precesszió és nutáció periodikus tagjait figyelmen kívül hagyva. Jele: *MST*, az angol *mean sidereal time* = közepes csillagidő elnevezésből.

A valódi és közepes csillagidő $AST - MST$ különbsége a *tavaszpont idő-egyenlítése*, ami általában kisebb $1''$ -nál.

A közepes tavaszpont két egymást követő delelése közti időtartam a *közepes csillagnap*. Mivel a közepes tavaszpont precessziós mozgása $46,3''/év = 0,3126/nap$ (D -tól E -i irányban), a közepes csillagnap $0,008''$ -al rövidebb a Föld tengelyforgási periódusánál (a közepes tavaszpont ennyivel hamarabb ér vissza a meridiánba).

A csillagidőnek a csillagok meridián-átmenetéből való meghatározásakor a delelő csillag rektaszcezióját korrigálni kell a precesszió és nutáció figyelembevételével a valódi rektaszcezióra és a közepes (periodikus tagok nélküli) rektaszcezióra.

A csillagidő használata a mindennapi életben nem célszerű. Ez ugyanis a Nap járásához igazodik, csillagidőben pedig a Nap mindig máskor delel. Ennek oka az, hogy a Nap rektaszceziója az év során folyamatosan változik. Például amikor a Nap a tavaszponton halad át (március 21.), $\alpha_{\odot} = 0^{\text{h}}$, így a Nap delelésekor $s = 0^{\text{h}}$. Fél évvel később, az őszpontban (szeptember 23.) $\alpha_{\odot} = 12^{\text{h}}$, így a csillagidő a Nap delelésekor $s = 12^{\text{h}}$.

A hétköznapi életben a Nap járásához igazodó időt célszerű használni.

2.3. A szoláris idő

A Nap látszólagos mozgásán alapul a *szoláris idő*. A Nap látszólagos mozgása tartalmazza mind a Föld forgását (\rightarrow csillagidő), mind a Föld pályamenti keringését (\rightarrow efemerisz idő).

2.3.1. A valódi szoláris idő

A *valódi szoláris idő* a napkorong középpontjának óraszöge $+ 12^{\text{h}}$:

$$m_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}}.$$

Így delelésekor ($t_{\odot} = 0^{\text{h}}$) a valódi szoláris idő mindig $m_{\odot} = 12^{\text{h}}$.

Helyi idő, mert a napkorong középpontjának óraszögét a helyi meridiántól mérjük.

"Egysége" a *valódi szoláris nap*, mely a napkorong középpontjának két egymást követő delelése közti időtartam. A valódi szoláris nap hossza azonban nem állandó, sőt változása sem egyenletes.

A napkorong középpontjára is igaz, hogy

$$s = t_{\odot} + \alpha_{\odot}.$$

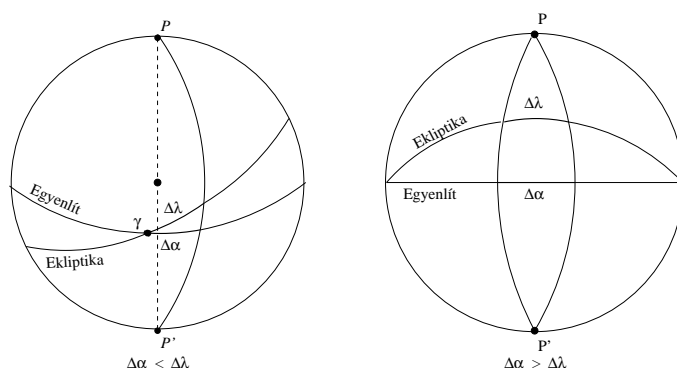
Ezt felhasználva (t_{\odot} -ot kifejezve)

$$m_{\odot} = s - \alpha_{\odot} + 12^{\text{h}}.$$

Mivel α_{\odot} értéke növekszik, amíg az s csillagidőben eltelik 24^h , azalatt az m_{\odot} valódi szoláris időben 24^h -nál kevesebb telik el, a szoláris nap hosszabb a csillagnapnál.

A Nap α_{\odot} rektaszenciójának változása két ok miatt nem egyenletes:

- Kepler második törvénye szerint a Föld pályamenti keringése nem egyenletes, napközben gyorsabban, naptávolban lassabban halad pályáján. Így a Nap látszólagos mozgása során a Nap ekliptikai hosszúsága sem változik egyenletesen.
- A Nap látszólagos ekliptikai mozgását vetíteni kell az égi egyenlítőre a Nap rektaszenciójának kiszámításához. Az ekliptika és az egyenlítő $\approx 23,^{\circ}5$ -os szöget zár be egymással. Azonos ekliptikai ívdaraboknak a tavasz és az őszpont közelében kisebb, a nyári és téli napforduló környékén nagyobb egyenlítői vetületek felelnek meg (2.2 ábra).



2.2. ábra. Ekliptikai ívek egyenlítői vetülete

Mivel α_{\odot} egyenetlen változása miatt az m_{\odot} valódi szoláris idő nem telik egyenletesen, ezért pontos időmérésre nem alkalmas. Célszerű bevezetni a Nap járásához igazodó, egyenletesen folyó szoláris időt. Ez két lépésben, két képzeletbeli égitest bevezetésével valósítható meg.

1. *Fiktív ekliptikai Középnap*: olyan képzeletbeli égitest, mely állandó sebességgel halad az ekliptikán, keringési ideje megegyezik a valódi Nappal, s a valódi Nappal a perihéliumban találkozik (\sim január 2.). (A fiktív ekliptikai Középnap ekliptikai hosszúsága egyenletesen változik, rektaszenciója azonban nem.)

2. *Fiktív egyenlítői Középnap*: olyan képzeletbeli égitest, mely az egyenlítő mentén halad állandó szögsebességgel, keringési ideje megegyezik a valódi Napéval, s a fiktív ekliptikai Középnappal a tavaszpontban találkozik.

A definícióból következik, hogy a fiktív egyenlítői Középnap rektaszcenziója egyenletesen változik, és megegyezik a fiktív ekliptikai Középnap ekliptikai hosszúságával. S. Newcomb égi mechanikai számításai szerint a fiktív egyenlítői Középnap rektaszcenziója:

$$\alpha_K = 24110,^s 54841 + 8640184,^s 812866 T + 0,^s 093104 T^2,$$

ahol T a 2000. január 1. 12^h-tól eltelt idő Julián évszázadban kifejezve (egy Julián évszázad = 36525 középnap, lásd 2.7.1. fejezet).

2.3.2. A közép szoláris idő

A *közép szoláris idő*, vagy röviden *középidő* a fiktív egyenlítői Középnap óraszöge + 12^h:

$$m = t_K + 12^h,$$

ahol m a középidő, t_K a fiktív egyenlítői Középnap óraszöge.

A középidő helyi idő, mert az óraszöget a helyi meridiántól számítják.

A középidő egysége a *középnap*: a fiktív egyenlítői Középnap két egymást követő delelése közti idő. Egy középnap = 24 óra = 1440 perc = 86400 másodperc középidő egységekben.

2.3.3. A világidő

Ahhoz, hogy egy esemény időpontját az egész Földre egységesen meg lehessen adni, bevezették a *világidőt*. A világidő a közép szoláris idő Greenwichben. A világidő jele UT , az angol universal time elnevezésből. A definíció alapján

$$UT = t_{KG} + 12^h,$$

ahol t_{KG} a fiktív egyenlítői Középnap óraszöge a greenwichi meridiánhoz képest.

A világidő kiszámítása:

Mivel a fiktív egyenlítői Középnapi helye nincs megjelölve az égen, óraszögét közvetlenül mérni nem lehet. De a fiktív egyenlítői Középnapi is érvényes az

$$s = \alpha_K + t_K$$

összefüggés. Ezt a greenwichi meridiánra vonatkoztatva

$$s_G = \alpha_K + t_{KG},$$

ahol s_G a csillagidő Greenwichben. Innen a t_{KG} óraszöveget kifejezve, és a világidő összefüggésébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$UT = s_G - \alpha_K + 12^h.$$

Ez az összefüggés mutatja, hogy szoros kapcsolat van a világidő és a csillagidő között: a világidőt a csillagidő mérésével határozzák meg.

A csillagidő meghatározásakor a pontos számításoknál figyelembe kell venni azt, hogy a meridiánt milyen pólusokra vonatkoztatják. Ennek megfelelően a világidő három fajtáját különböztetik meg.

- *UT0 világidő:* az s_G csillagidőt a pillanatnyi pólusokon átmenő greenwichi meridiánhoz képest határozzák meg, az *UT0* világidő tehát a pillanatnyi pólusokon átmenő greenwichi meridiánra vonatkoztatott világidő.
- *UT1 világidő:* a közepes pólusokon átmenő greenwichi meridiánra vonatkozó világidő:

$$UT1 = UT0 + \Delta\lambda,$$

ahol $\Delta\lambda$ a közepes és pillanatnyi pólus közti eltérés.

- *UT2 világidő:* a közepes pólusokon átmenő greenwichi meridiánra vonatkozó világidő, figyelembe véve még a Föld forgásában lévő szezonális ingadozásokat:

$$UT2 = UT1 + \Delta T_s,$$

ahol ΔT_s a szezonális korrekció. Ezt a párizsi Nemzetközi Időhivatal (Bureau International de l'Heure) szolgáltatja.

Megjegyzések:

1. UT_0 , UT_1 , UT_2 különbsége mindig kisebb $0,^s 05$ -nál. Ha nem végzünk ilyen pontos számításokat, elég UT -ről beszélni.
2. A világidőt a csillagidőből számítják, ami a Föld tengelyforgásán alapul. Ennek kis egyenletlenségeit előre nem lehet jelezni. Ennek ellenére a csillagászati eseményeket UT -ben adják meg előre, ez az *extrapolációs világidő*.

2.3.4. A közép szoláris idő mégegyszer

Az eredeti definíció szerint a közép szoláris idő

$$m = t_K + 12^h.$$

Itt t_K a fiktív egyenlítői Középnapi óraszöge az adott hely meridiánjához viszonyítva. Tegyük fel, hogy az adott hely földrajzi hosszúsága λ (Greenwichtől keletre $\lambda > 0$, nyugatra $\lambda < 0$). Ekkor

$$t_K = t_{KG} + \lambda,$$

ahol t_{KG} a fiktív egyenlítői Középnapi óraszöge Greenwichben. Így

$$m = t_{KG} + \lambda + 12^h.$$

A világidő definícióját ($UT = t_{KG} + 12^h$) figyelembe véve pedig

$$m = UT + \lambda.$$

A gyakorlatban a helyi közép szoláris időt ennek az összefüggésnek az alapján, tehát a világidőből lehet és szokás kiszámítani (természetesen a λ földrajzi hosszúságot szövegességek helyett időegységekben kell megadni, $1^\circ = 4^m$).

Figyelembe véve, hogy a világidőnek három változata van, a közép szoláris időnek is ennyi fajtája különböztethető meg.

2.3.5. A középnapi és a csillagnapi hossza egymáshoz viszonyítva

A közép szoláris idő egysége a középnapi (a fiktív egyenlítői Középnapi két egymást követő delelése közti időtartam), a csillagidő egysége a csillagnapi. Mivel a Föld egy fordulata (egy csillagnapi) alatt a fiktív ekvatoriális Középnapi

rektaszcenziója kissé megnő, az égboltnak is egy kicsit tovább kell fordulnia, hogy a fiktív ekvatoriális Középnap ismét a meridiánba érjen. A középnap ezért hosszabb a csillagnapnál.

A fiktív egyenlítői Középnap rektaszcenziója egy év alatt 24^h -t változik. Mivel egy év $365,2422$ napból áll (lásd 2.7. fejezet), a rektaszcenzió egy napra eső növekedése

$$\frac{24^h}{365,2422} = 3^m 56^s.$$

Egy középnap ezért $24^h 3^m 56^s$ csillagidőben. Megfordítva, egy csillagnap $23^h 56^m 4^s$ középideőben.

2.3.6. Az időegyenlítés

A valódi szoláris idő és a közép szoláris idő különbsége az *időegyenlítés*:

$$E = m_{\odot} - m.$$

Az időegyenlítés jó közelítéssel az alábbi képletből számítható ki (pontossága $0,^m 1$):

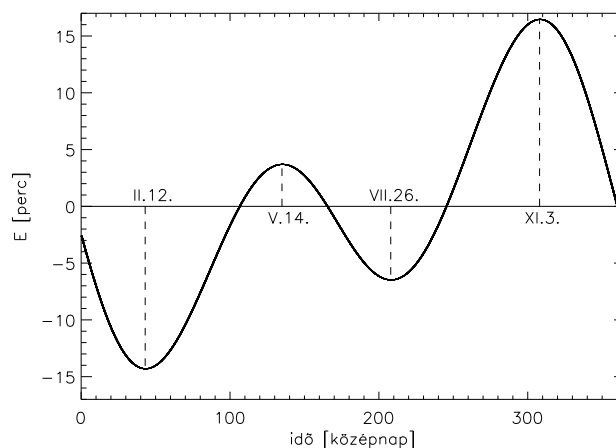
$$E = -7,^m 7 \sin(L + 78^\circ) + 9,^m 5 \sin 2L,$$

ahol L a fiktív ekliptikai Középnap hosszúsága, mely megegyzik a fiktív egyenlítői Középnap α_K rektaszcenziójával. Még nagyobb (3^s -os) pontossággal:

$$E = -105,^s 7 \sin L - 429,^s 1 \cos L + 596,^s 2 \sin 2L - 2,^s 1 \cos 2L + \\ + 4,^s 4 \sin 3L + 19,^s 3 \cos 3L - 12,^s 7 \sin 4L.$$

Az időegyenlítés menetét a 2.3. ábra mutatja. Látható, hogy a valódi és közép szoláris idő négy alkalommal egyezik meg ($E = 0$ közelítőleg április 15-én, június 13-án, szeptember 1-én, december 25-én). A valódi szoláris idő késik a középideőhöz képest december 25. és április 15. között, valamint június 13. és szeptember 1. között. Mivel a hétköznapi életben óráink középideőben járnak, ilyenkor azt látjuk, hogy óránkon már elmúlt dél amikor a Nap delel. A legnagyobb eltérés: $-14^m 5^s$ (közelítőleg február 12-én). A mellékminimum $-6^m 30^s$ (július 26-án). Az év többi szakaszában a helyzet fordított, a valódi szoláris idő siet a középideőhöz képest, óránkhoz képest korábban delel a Nap. A legnagyobb eltérés: $+16^m 33^s$ (közelítőleg november 3-án). A mellékmaximum $+3^m 41^s$ (május 14-én).

Ha napórát nézünk, mely a valódi szoláris időt mutatja, a leolvasott időt korigálni kell az időegyenlítéssel, hogy megkapjuk a szokásosan használt középideőt.



2.3. ábra. Az időegyenlítés

2.4. Az efemerisz idő

Az efemerisz idő a Naprendszer égitestjeinek keringő mozgását leíró egyenletekben szereplő független változó. Egysége az 1900-as *tropikus év*: ez az időtartam, amely alatt a Nap az 1900-as epochára vonatkozó tavaszpontból indulva ismét a tavaszpontba ért.

Az efemerisz idő kisebb egysége az *efemerisz másodperc*: ez az 1900-as tropikus év

$$\frac{1}{31556925,9747} \text{ — ed}$$

része.

Az efemerisz időt 1900. január 0-án 12^h világidőtől kezdve vezették be. Ez az az időpont, amikor a fiktív ekliptikai Középnap ekliptikai hosszúsága

$$\lambda = 279^{\circ}41'48,704$$

volt.

Az efemerisz idő (jele ET az angol ephemeris time elnevezésből) kiszámítására a következő összefüggést használják:

$$ET = UT2 + \Delta T,$$

ahol

$$\Delta T = 24,^s 349 + 72,^s 318 T + 29,^s 950 T^2 + 1,^s 82144 B''.$$

Itt T az 1900. január 0-án 12^h-tól eltelt idő Julián évszázadban, B'' pedig a Hold ekliptikai hosszúságának a Föld egyenetlen tengelyforgása következtében fellépő fluktuációja ívmásodperben kifejezve:

$$B'' = \lambda - [\lambda_B - 10, ''71 \sin(140,^\circ 0 T + 240,^\circ 07) + 4, ''65 + 12, ''96 T + 5, ''22 T^2].$$

A kifejezés jobb oldalán λ a Hold valódi (mért) ekliptikai hosszúsága, λ_B a Hill-Brown-féle Holdelméletből számított ekliptikai hosszúság, a többi tag pedig a Hold szekuláris gyorsulása a megfigyelések alapján.

Az efemerisz idő kiszámítása meglehetősen bonyolultnak tűnik, és ráadásul a Hold pozíciójának méréséhez van kötve. Ennek oka a következő. Korábban, a XX. század elejéig a bolygók és a Hold mozgását leíró összefüggésekben a világidőt használták független változóként. A Hold pontos mozgáselméletének kidolgozásakor azonban kiderült, hogy az elméletnek a megfigyelésekkel való egyezéséhez mind a Hansen-féle elméletben, mind a Hill-Brown-elméletben egy empirikus tag bevezetésére volt szükség. A XX. század elején az is kiderült, hogy nemcsak a Hold, hanem a Merkúr, Vénusz, és a Föld mozgáselméletében is empirikus korrekciókra volt szükség az elmélet és a megfigyelések összhangjához. Az empirikus tagok alkalmazásának szükségessége akkor tisztázódott, amikor kiderült, hogy korreláció van a bolygók és a Hold esetében alkalmazott korrekciók között: ezek aránya megegyezett az átlagos pályamenti szögsebességek arányával. Ez a felismerés fontos felfedezéshez vezetett. Kiderült, hogy a korrekciókra azért volt szükség, mert a világidő nem telik egyenletesen. Ez ugyanis a Föld tengelyforgásán alapul, amiben véletlenszerű kis változások fordulhatnak elő belső tömegátrendeződések következtében. A Hold és a bolygók megfigyelt és világidőben számított mozgása közti eltérés a Föld egyenetlen tengelyforgásának következménye. Ez indokolta a bolygók és a Hold mozgásának leírásához egy a Föld egyenetlen forgásától mentes időskála, az efemerisz idő bevezetését.

Az efemerisz időt a definíció alapján a Hold ekliptikai hosszúságának mérésével lehet meghatározni, és valamely világidő időponthoz utólag lehet hozzárendelni a megfelelő efemerisz idő időpontot. Az efemerisz idő és a világidő

különbségét éves bontásban táblázatokban szokás megadni. A jelenlegi eltérés: $\Delta T = 65^s$.

A Nemzetközi Csillagászati Unió 1952-es határozata alapján a bolygók és a Hold pozíciójának megadására 1960-tól vezették be a világidő helyett az efemerisz időt, melyet a csillagászati évkönyvekben 1983-ig használtak. 1984. január 1-től azonban áttértek a *terresztrikus dinamikai időre* (jele TDT , az angol *terrestrial dynamic time* elnevezéséből). Ez gyakorlatilag megegyezik az efemerisz idővel, de az *atomidőhöz* kapcsolódik, és atomórákkal egyszerűbben mérhető, mint a Hold megfigyeléséből az efemerisz idő.

2.5. Az atomidő

Az atomidő (jele AT az angol *atomic time* elnevezéséből) az az időskála, melyen a mikrofizika törvényei érvényesülnek. A Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatal (Bureau International des Poids et Mesures, rövidítve BIPM) 1967-ben döntött a bevezetéséről. Ezt az tette lehetővé, hogy ekkorra sikerült nagy pontossággal működő atomórákat készíteni. Az atomóra működési elve az, hogy egy kvarcórát atomi rezonátorral kötnek össze, és a kvarckristály rezgésének frekvenciáját úgy szabályozzák, hogy az egyezze meg az atomi rezonátor megfelelően leosztott frekvenciájával. Az atomidő a jelenleg technikailag megvalósítható legegyszerűsebben múló idő, frekvencia-stabilitása $10^{-13}/\text{év}$.

Az atomidő egysége az *atommásodperc*: ez a cézium-133 izotóp (^{133}Cs) két hiperfinom állapota ($^2S: F = 4, M = 0$ és $F = 3, M = 0$) közti elektronátmenetkor keletkező elektromágneses sugárzás egy periódusának 9 192 631 770-szerese.

Az atommásodpercet úgy határozták meg, hogy jól egyezzen az efemerisz másodperccel.

Az atomidő kezdete: 1958. január 0. $0^h UT1$ világidő. Ekkor AT és $UT1$ megegyezett egymással. (Pontosabban, az atomidő az ezen kezdő időponttól eltelt atommásodpercek száma.) Az atomidőt nagy pontosságú atomórák hálózatával mérik. Mintegy 50 nemzeti laboratórium 200 atomórájának időjeleit hasonlítják össze, és ebből állítja elő súlyozott átlagképzéssel a BIPM.

2.5.1. Az atomidő és az efemerisz idő viszonya

Az atomidő és az efemerisz idő között kicsi, állandó eltérés van:

$$ET - AT = 32,^s 184.$$

Az időtől függő, szekuláris eltérést eddig nem tapasztaltak. Elvben a két időskála nem feltétlenül azonos. Ha például a gravitációs állandó időben változna, az efemerisz idő eltolódna az atomidőtől. A két idő egymástól való évi eltérése azonban kisebb mint a meglévő eltérés 10^{-12} -ed része. A két időskála ilyen pontos egyezése lehetővé teszi, hogy a gyakorlatban az efemerisz idő helyett a sokkal könnyebben meghatározható atomidőt használják. Ennek megfelelően 1984. január 1-től bevezették a teresztikus dinamikai időt:

$$TDT = AT + 32,^s 184.$$

A *TDT* gyakorlatilag megegyezik az *ET*-vel, de könnyebb meghatározni.

2.5.2. Az atomidő és a világidő viszonya

Az atomidő egyetlen hátránya, hogy időegysége kissé különbözik a világidő egységétől (amely a Föld egyenetlen tengelyforgása miatt nem is állandó), így idővel az atomidő egyre jobban eltérhet a világidőtől. Említettük, hogy az atomidő bevezetésekor, 1958. január 0-án $0^h UT1$ világidőkor *AT* és *UT1* megegyezett egymással. 1972-re *AT* és *UT1* különbsége 10^s -ra növekedett.

1972. január 1-től bevezették a *koordinált világidőt* (jele *UTC*, az universal time coordinated elnevezésből). A koordinált világidő egyenletesen folyó, időnként önkényesen eltolt atomidő. Kezdőpontja 1972. január 1. $0^h 0^m 10^s$ atomidő. Amikor a koordinált világidő *UT1*-től $0,7^s$ -nél jobban eltér, *UTC*-ben 1^s -os korrekciót hajtanak végre. A korrekcióra általában december 31. és január 1. között kerül sor (december 31. $23^h 59^m 58^s$ után közvetlenül január 1. $0^h 0^m 0^s$ következik). Ha szükséges, június 30. és július 1. között is végeznek korrekciót.

1972 óta összesen 23 szökőmásodpercet kellett beiktatni, az utolsó korrekció 2005. december 31-én volt. Jelenleg

$$UTC = AT - 33^s.$$

A jelenlegi nemzetközi időrendszer a koordinált világidő. Az időjelzést sugárzó rádióadók a koordinált világidőt adják meg.

A mesterséges holdakkal működő Földi Helymeghatározó Rendszer (*GPS*, a global positioning system elnevezésből) saját időmérő rendszert használ, a *GPS időt* (jele *GPST* a GPS time elnevezésből). Ezt 1980. január 6-tól vezették be, és közvetlenül kapcsolódik az atomidőhöz:

$$GPST = AT - 19^s.$$

Bevezetésekor a *GPS* idő azonos volt az akkori koordinált világidővel. Azóta a *GPST* – *UTC* különbség a világidő 1^s-os ugratásai következtében +14^s-ra növekedett. A különbség aktuális értékét a navigációs üzenet tartalmazza. A mérőkészülék a számításokat *GPST*-ben végzi, de a műszer kijelzője általában az *UTC* időpontokat mutatja. (A rendszer azért nem használja közvetlenül a világidőt, mert a fél-, egyéves időközönkénti időugrások miatt a mesterséges holdakon működő órákat imételten át kellene állítani, és ez nehézségeket okozna.)

2.5.3. Az efemerisz idő és a koordinált világidő viszonya

Mivel

$$ET - AT = 32,^s 184, \quad UTC = AT - 33^s,$$

innen

$$ET - UTC = 65,^s 184.$$

Jelenleg ennyi a különbség az efemerisz idő és a koordinált világidő között. Ez az érték azonban az *UTC*-ben időnként szükségessé váló korrekció miatt a jövőben változhat. Mindenesetre egy *UTC*-ben megadott csillagászati esemény időpontját a különbség ismeretében egyszerű átszámítani *ET*-be, és fordítva.

2.6. A zónaidő

A koordinált világidő alkalmas a csillagászati előrejelzésekre. A mindennapi életben azonban nem használják, mert például a Nap delelése a Föld különböző pontjain *UTC*-ben más-más időpontra esik. Célszerűnek látszik a helyi közép szoláris időt használni. Ez azonban pontról pontra változik. Ezért nagyobb területekre egy átlagidőt, a *zónaidőt* használják.

A Föld felszínét 15° = 1^h szélességű, összesen 24 tartományra osztották. A –7,° 5 és +7,° 5 hosszúsági körök között van a 0. zóna, +7,° 5 és +22,° 5

között az első keleti zóna, $-7,^\circ 5$ és $-22,^\circ 5$ között az első nyugati zóna, és így tovább. Az egyes zónákon belül a Z zónaidőt használják. Definíció szerint

$$Z = UTC \pm k^h,$$

ahol k a zóna sorszámát jelölő egész szám. Az előjel pozitív keleti zónák, negatív nyugati zónák esetén. A zónaidő igen jó közelítéssel megegyezik a zóna középvonalának megfelelő közép szoláris idővel.

Magyarország az első keleti zónában van, így itt a zónaidő

$$Z = UTC + 1^h.$$

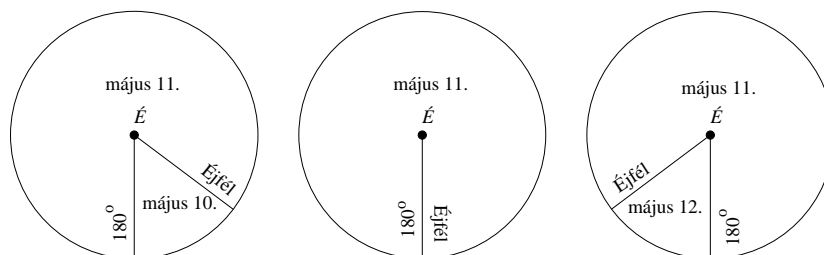
Ez a közép-európai zónaidő.

Megjegyzések:

- A zónahatárok nem pontosan követik a hosszúsági köröket, igazodnak az országhatárokhoz.
- Néha nagy kiterjedésű területeken (pl. Észak-Amerikában) több zónában is ugyanazt a zónaidőt használják. Ez a dekretális idő.
- Az európai országok többségében március végétől október végéig a zónaidőt mutató órákat egy órával előre állítják. Ez a nyári időszámítás.

Egy zóna határán áthaladva óránkat egy órával előre kell állítani, ha nyugatról keletre, illetve egy órával hátra, ha keletről nyugatra lépjük át a zónahatárt. Ily módon nyugatról keletre haladva, és a Földet megkerülve a kiindulási pontra visszaérve utunkat egy nappal hosszabbnak, ellenkező irányban egy nappal rövidebbnek tapasztalnánk a valódi naptári időponthoz képest. Ennek elkerülésére vezették be az *álló dátumválasztó vonalat*, mely a 180° -os hosszúsági kör közelében halad, elkerülve a lakott helyeket. Az álló dátumválasztó vonalat nyugatról keleti irányba átlépve naptárunkat egy nappal hátra, ellenkező irányban haladva egy nappal előre kell állítani.

Egy adott helyen egy új nap éjféلكor kezdődik. Hol kezdődik egy új nap a Földön? Megállapodás szerint akkor, amikor az álló dátumválasztó vonalnál éjféل van. Ezután nyugat felé haladva (mozgó dátumválasztó vonal) az új nap fokozatosan kiterjed az egész Földre (2.4. ábra).



2.4. ábra. Mozgó és álló dátumválasztó vonal

2.7. A naptár

Az időszámítás természetes, megfigyelhető egységei a *nap* (nappalok és éjszakák váltakozása), a *hónap* (holdfázisok) és az *év* (évszakok váltakozása).

A különféle napok problémájával az előzőekben már foglalkoztunk. A hétköznapi életben használt hónap a *szinódikus hónappal* van kapcsolatban: egy szinódikus hónap egyenlő 29,53059 középnapal. Ennyi idő telik el újholdtól újholdig, másképp ennyi a Hold keringési ideje a Föld körül a Naphoz viszonyítva. A naptár alapjául szolgáló év a *tropikus év*: egy tropikus év egyenlő 365,2422 középnapal. Ennyi idő telik el, amíg látszólagos ekliptikai mozgása során a Nap tavaszponttól tavaszpontig halad.

A naptár nem természetes egysége a *hét*. A hét eredete az ókori Babiloniába nyúlik vissza, ahol a hét napjait az akkor ismert hét mozgó égitestről nevezték el, és ezeket az égitesteket a hét különböző napjain imádták. Az égitestek a napok sorrendjében: Nap, Hold, Mars, Merkúr, Jupiter, Vénusz, Szaturnusz. A napoknak az égitestekről való elnevezése több nyelvben jelenleg is felismerhető (angolban pl. Sunday, Saturday, francia nyelvben pl. Lundi, Mardi, Mercredi).

A naptárak többsége a két legfényesebb égitesthez, a Naphoz és a Holdhoz kapcsolódó természetes időtartamokat, az évet és a hónapot igyekezett közös rendszerbe foglalni. Ezek a *luniszoláris naptárak*. A naptárkészítés nehézsége abban áll, hogy sem a hónap, sem az év nem áll egész számú nappal, és az év sem áll egész számú hónapból.

Ókori naptárak:

- Sumérok: tizenkét 30 napos hónap. Így 360 nap az év. Az eltérést időnként korrigálták.

- Babilonia: hat 29 és hat 30 napos hónap, váltakozva. Így az év 354 nap. Ez 11 nappal kevesebb a valódi évnél. Ezért három évenként egy szökőhónap. Még így is kevés. Hammurabi (Kr.e. XVII. sz.) rendeletére időnként szökőnapokat iktattak be.

Luniszoláris naptárt használtak a mayák, kínaiak, hinduk, egyiptomiak, görögök, arabok.

A mai naptár a *római naptárból* alakult ki. A római naptár:

- Kezdetben: 10 hónap, öt 29 és öt 30 napos hónap, váltakozva. Az év így 295 nap. Első hónap a március.
- Pompilius (Kr.e. V. sz.): két új hónap, 11. a január, 12. a február. Az év így 354 nap. Szökőhónap február 23. és 24. között.
- Julius Caesar idején már 90 nap a naptár eltérése a valódi évtől. Kr.e. 46-ban naptárreform, Szoszigenész alexandriai csillagász javaslatára. Egyszeri korrekció egy 445 napos évvel. Ezután *Julián-naptár*: három 365 napos év után egy 366 napos év. Ezek átlaga 365,25 nap, jól közelíti a 365,2422 nap valódi évhosszat. A hónapok: 31 napos: március, május, július, szeptember, november, január, 30 napos: április, június, sextilius, október, december, 29 (szökőévben 30) napos: február.
- Augusztusz császár (I. sz.): a hatodik hónapot, a sextiliust magáról nevezte el, hosszát 31 napra változtatta. A plusz 1 napot a februárból vette el, így az 29 (30) napos lett. Felcserélte az augusztust követő hónapok napjainak számát: 31 napos: október, december, 30 napos: szeptember, november.
- Ez a rendszer maradt fenn. A szökőnap hagyományosan február 23. után következik.

A Julián-naptár évhossza és a valódi év között a különbség 0,0078 nap = 11^m14^s. Ez 128 év alatt 1 nap. Az eltérést már a 325-ben tartott niceai zsinaton észrevették, de csak 1582-ben, XIII. Gergely pápa rendeletével korrigálták. A Gergely-féle naptárreform:

- 11 nap eltolódás volt a valódi évhez képest (a tavasz kezdete március 11-re vándorolt vissza). Ennek kiküszöbölésére 1582. október 4. után közvetlenül október 15-ét írtak a naptárban.

- Módosították a szökőévek számát. Korábban minden 4-el osztható évszámú év szökőév volt. Ezt úgy változtatták meg, hogy a 100-al osztható évszámúak közül csak azok maradtak szökőévek, melyek 400-al is oszthatók. (1600 és 2000 szökőév, de 1700, 1800, 1900, 2100 nem.) Így 400 év alatt 303 év van, mely 365 napos, és 97 szökőév, mely 366 napos. Ezek átlaga

$$\frac{303 \cdot 365 + 97 \cdot 366}{400} = 365,2425 \text{ nap.}$$

Az eltérés a valódi év hosszától $0,0003 \text{ nap} = 25,^s 9$, ami 3300 év alatt tesz ki egy napot. Így elég hosszú időre jó naptárunk van.

A naptárreform részeként a tavaszi napéjegyenlőség időpontja március 21. közelébe esik, mint a 325-ös niceai zsinat idején. Itt határoztak a húsvét időpontjának számításáról: a húsvét a tavaszi napéjegyenlőség utáni első holdtöltét követő első vasárnap. A húsvét így március 22. és április 25. közé esik.

2.7.1. A Julián dátum

A különféle naptárreformok, eltérő hosszúságú hónapok és évek miatt nehéz kiszámítani két naptári időpont közt eltelt napok számát. A csillagászatban ezért külön időszámítást vezettek be, ez a *Julián dátum* (jele *JD*). Használatát J. J. Scaliger javasolta 1582-en, de csak a XX. században terjedt el.

Definíció szerint a Julián dátum a Kr.e. 4713. év január 1-ének greenwichi időben vett delétől eltelt napok száma. A Julián dátumot világidőben mérik. 0^h világidőkor a *JD* értéke egy egész szám $+ 0,5$. A csillagászati évkönyvek minden nap 0^h világidőre megadják a Julián dátumot. Ezt felhasználva lehet kiszámítani közbeeső időpontokra a Julián dátumot.

Számítsuk ki például, hogy Budapesten 2008. február 26-án $14^h 30^m$ -kor mennyi a Julián dátum?

A megadott időpont zónaidő. A világidő ekkor 1 órával kevesebb, $13^h 30^m$. A csillagászati évkönyv szerint 2008. február 26-án 0^h világidőkor a Julián dátum: 2454522,5. Ugyanezen a napon $13^h 30^m$ világidőkor a Julián dátum:

$$JD = 2454522,5 + \frac{13^h 30^m}{24^h} = 2454522,5 + 0,5625 = 2454523,0625.$$

A Julián dátum elég nagy szám. Azért, hogy kisebb számokkal lehessen dolgozni, az 1860 utáni időpontok jelölésére bevezették a *módosított Julián*

dátumot (jele MJD):

$$MJD = JD - 2400000,5.$$

Például 2008. február 26-án 0^h világidőkor $MJD=54522$.

Bizonyos számításokban az időt *Julián évszázadban* mérik. Egy Julián évszázad = 36525 középnap.

2.7.2. Nevezetes periódusok

A Nap mozgásában lévő periódusok

A Nap látszólagos ekliptikai mozgásával kapcsolatban többféle periódus definiálható. A tropikus évről már volt szó, de ezt is most pontosabban megadjuk.

Tropikus év: a Nap tavaszponttól tavaszpontig halad:

$$365,^d 24219879 - 0,^d 00000614 T.$$

Sziderikus év: periódus az állócsillagokhoz képest:

$$365,^d 25636042 + 0,^d 00000011 T.$$

Anomalisztikus év: perigeumtól perigeumig:

$$365,^d 25964134 + 0,^d 000000304 T.$$

Fogyatkozási év (F): a Hold felszálló csomójától ugyanezen felszálló csomóig:

$$346,^d 620031 + 0,^d 000032 T.$$

T a $JD=2415020,0$ -tól (1900. január 1. 12^h -tól) Julián évszázadban mért idő.

A Hold mozgásában lévő periódusok

A Nap perturbáló hatására a Hold pályája nagy perturbációkat szenved. Többek között a holdpálya perigeuma 8,85 év alatt körbefordul a Hold keringésével megegyező irányban, felszálló csomója pedig retrográd irányban

<i>Szinodikus hónap (S):</i>	újholdtól újholdig:	29, ^d 530589.
<i>Tropikus hónap:</i>	tavaszponthoz képest:	27, ^d 321582.
<i>Sziderikus hónap:</i>	az állócsillagokhoz képest:	27, ^d 321662.
<i>Anomalisztikus hónap (A):</i>	perigeumtól perigeumig:	27, ^d 554550.
<i>Drakonikus hónap (D):</i>	felszálló csomótól felszálló csomóig:	27, ^d 212221.

18,6 év alatt tesz meg egy fordulatot. A perigeum és a felszálló csomó szekuláris mozgása miatt viszonylag nagy az eltérés a Hold különböző periódusai között.

A Hold szinodikus (S), anomalisztikus (A) és drakonikus (D) periódusa, valamint a Nap fogyatkozási éve (F) között érdekes kapcsolat van. Kiszámítható, hogy

$$223S = 6585,^d 3213$$

$$239A = 6585,^d 5375$$

$$242D = 6585,^d 3575$$

$$19F = 6585,^d 78$$

$6585^d = 18$ év 10-11 nap, a szökőévek számától függően. Ez az időtartam a *Szárosz-ciklus*, a Nap- és Hold-fogyatkozások periódusa. A Nap-Föld-Hold rendszer konfigurációja jó közelítéssel ezzel a periódussal ismétlődik, a fogyatkozások feltételei is ilyen periódussal állnak elő. A Szárosz-ciklust már az ókorban ismerték, ennek alapján tudták előre jelezni a fogyatkozásokat.

2.8. Összefoglalás

Csillagidő: a tavaszpont óraszöge. Tetszőleges csillagra

$$s = \alpha + t,$$

ahol s a tavaszpont óraszöge, α a csillag rektaszcenziója, t a csillag óraszöge. Delelő csillag rektaszcenziója megegyezik a csillagidővel.

Valódi szoláris idő:

$$m_{\odot} = t_{\odot} + 12^h,$$

ahol t_{\odot} a napkorong középpontjának óraszöge.

Közép szoláris idő:

$$m = t_K + 12^h,$$

ahol t_K a fiktív egyenlítői Középnap óraszöge.

Közép szoláris idő kiszámítása:

$$m = UT + \lambda,$$

ahol λ az adott hely földrajzi hosszúsága, UT a világidő.

Világidő: közép szoláris idő Greenwichben:

$$UT = t_{KG} + 12^h,$$

ahol t_{KG} a fiktív egyenlítői Középnap óraszöge Greenwichben.

Világidő meghatározása:

$$UT = s_G - \alpha_K + 12^h,$$

ahol s_G a csillagidő Greenwichben, α_K a fiktív egyenlítői Középnap rektasz-cenziója.

Efemerisz idő: a Naprendszer égitestjeinek keringő mozgását leíró egyenletekben szereplő független változó.

$$ET = UT2 + \Delta T,$$

ahol $UT2$ a közepes pólusokon átmenő greenwichi meridiánra vonatkozó világidő, figyelembe véve a Föld forgásában lévő szezonális ingadozásokat is, ΔT pedig a Hold ekliptikai hosszúságának a Föld egyenetlen tengelyforgása következtében fellépő fluktuációit tartalmazza. Jelenleg az efemerisz idő és a világidő eltérése: $\Delta = 65^s$.

Atomidő: a mikrofizikai folyamatok időskálája.

Efemerisz idő és atomidő különbsége:

$$ET - AT = 32,^s 184.$$

Terresztrikus dinamikai idő: efemerisz idő helyett használják, azzal gyakorlatilag megegyezik

$$TDT = AT + 32,^s 184.$$

Koordinált világidő: egyenletesen folyó, időnként önkényesen eltolt atomidő, melyet az $UT1$ világidővel hasonlítanak össze és akkor korrigálnak 1^s -mal, ha eltérése az $UT1$ -től meghaladja a $0,^s 7$ -ot. A koordinált világidő és az atomidő eltérése jelenleg:

$$UTC = AT - 33^s.$$

Zónaidő:

$$Z = UTC \pm k^h,$$

ahol k a zóna sorszámát jelölő egész szám. Jó közelítéssel megegyezik a zóna középvonalának megfelelő közép szoláris idővel.

3. fejezet

Koordináták közötti átszámítások

3.1. Horizontális és egyenlítői koordináták

Egy csillag horizontális és egyenlítői koordinátái között a *csillagászati háromszög* teremt kapcsolatot. Ez a 3.1. ábrán a *PZC* gömbháromszög. A gömbháromszögtani szinusz-tételt felírva:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(90^\circ - m)} = \frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin t}.$$

Innen

$$\cos \delta \sin t = \cos m \sin A. \quad (3.1)$$

Az oldalakra vonatkozó gömbháromszögtani koszinusz-tétel alapján:

$$\cos(90^\circ - m) = \cos(90^\circ - \delta) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \delta) \sin(90^\circ - \varphi) \cos t.$$

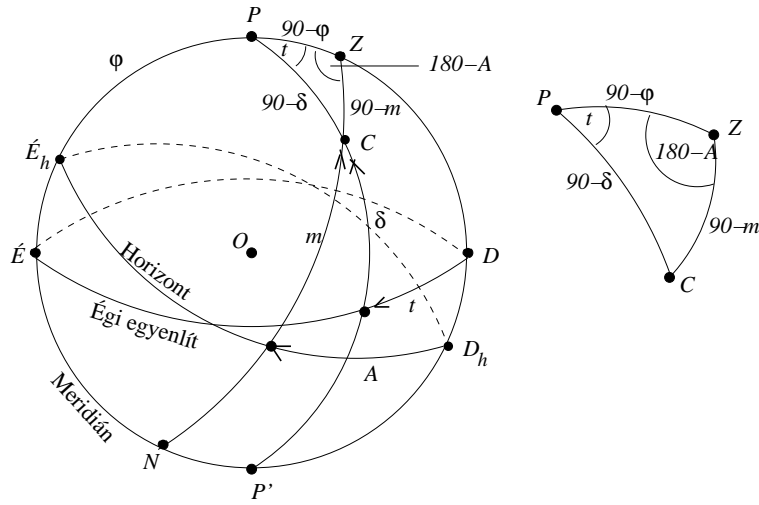
Innen

$$\sin m = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t. \quad (3.2)$$

Hasonlóan

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - m) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - m) \sin(90^\circ - \varphi) \cos(180^\circ - A),$$

$$\sin \delta = \sin m \sin \varphi - \cos m \cos \varphi \cos A. \quad (3.3)$$



3.1. ábra. A csillagászati háromszög

3.1.1. Horizontális koordináták átszámítása egyenlítőibe

Adott egy égitest m magassága és A azimutja. Keressük a δ deklinációt és t óraszöget. Feltesszük, hogy ismerjük a megfigyelő φ földrajzi szélességét.

A (3.3) összefüggés szerint

$$\sin \delta = \sin m \sin \varphi - \cos m \cos \varphi \cos A.$$

Innen δ egyértelműen meghatározható (ha $\sin \delta > 0$ akkor $\delta > 0$, ha $\sin \delta < 0$ akkor $\delta < 0$).

A (3.1) összefüggésből $\sin t$ -t, (3.2)-ből $\cos t$ -t kifejezve

$$\sin t = \frac{\cos m \sin A}{\cos \delta}, \quad \cos t = \frac{\sin m - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}. \quad (3.4)$$

Ezekből az egyenletekből $\sin t$ -t és $\cos t$ -t kiszámítva t egyértelműen meghatározható ($\sin t$ és $\cos t$ előjele dönti el, hogy t melyik síknegyedbe esik).

3.1.2. Egyenlítői koordináták átszámítása horizontálisba

Adott egy égitest δ deklinációja és t óraszöge. Keressük az m magasságot és A azimutot.

A (3.2) összefüggés szerint

$$\sin m = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

Innen m egyértelműen meghatározható.

A (3.1) összefüggésből $\sin A$ -t, (3.3)-ból $\cos A$ -t kifejezve

$$\sin A = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos m}, \quad \cos A = \frac{\sin m \sin \varphi - \sin \delta}{\cos m \cos \varphi}. \quad (3.5)$$

Ezekből az egyenletekből $\sin A$ -t és $\cos A$ -t kiszámítva A egyértelműen meghatározható.

Megjegyzés: Ha második egyenlítői koordináták, α rektaszcenzió és δ deklináció vannak megadva, az előző összefüggések alkalmazásához a t óraszöget a

$$t = s - \alpha$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Ehhez ismerni kell az s csillagidőt.

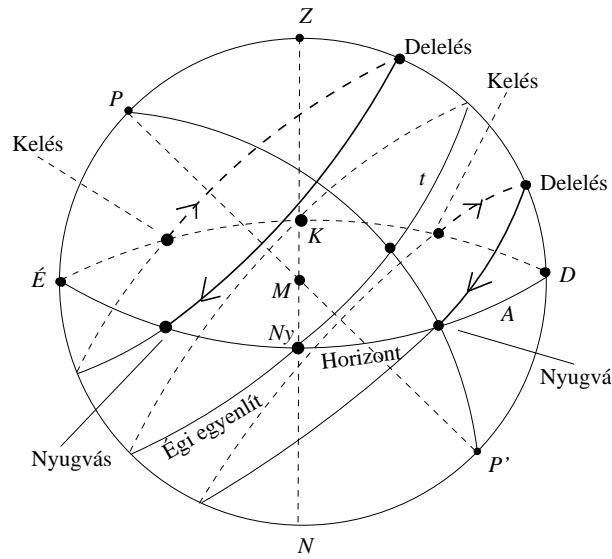
3.2. Égitestek kelése és nyugvása

Egy égitest keléskor és nyugváskor a horizonton halad át, horizont feletti magassága tehát $m = 0^\circ$. (A 4.1. fejezetben látni fogjuk, hogy a refrakció jelensége megemeli az égitest látszó helyzetét, tehát az még a horizont alatt van amikor már felkelni vagy lenyugodni látjuk. A refrakciót, és más kisebb hatásokat, így az égitest szögátmérőjét, parallaxisát, a megfigyelő horizont feletti magasságát korrekcióba kell venni, lásd 3.2.2. pont.)

Adott φ földrajzi szélességű helyen egy δ deklinációjú égitest kelésének és nyugvásának időpontja (óraszöge), helye (azimutja), horizont feletti pályáívének hossza a (3.1), (3.2), (3.3) összefüggésekből számítható ki, ha azokba $m = 0^\circ$ -ot helyettesítünk:

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin t &= \sin A, \\ 0 &= \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t, \\ \sin \delta &= -\cos \varphi \cos A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.6) első összefüggése szerint $\sin t$ és $\sin A$ előjele megegyezik ($\cos \delta > 0$), így t és A ugyanabba a síknegyedbe esik.



3.2. ábra. Égitestek kelése és nyugvása

(3.6) harmadik összefüggéséből δ és φ ismeretében A kiszámítható. Feltehetjük, hogy $\varphi \neq \pm 90^\circ$ (a pólusokon a csillagok vagy cirkumpolárisak, vagy sosem láthatók, így kelésről és nyugvásról nem beszélhetünk), így $\cos \varphi > 0$. Ekkor

- Ha $\delta = 0^\circ$, akkor $\cos A = 0$, $A = -90^\circ$ (kelés) vagy $A = +90^\circ$ (nyugvás). Az égi egyenlítő síkjában lévő égitest pontosan keleten kel és nyugaton nyugszik.
- Ha $\delta > 0^\circ$, akkor $\sin \delta > 0$, $\cos A < 0$, $A < -90^\circ$ (kelés) vagy $A > +90^\circ$ (nyugvás). Az égi egyenlítő síkja feletti égitest észak-keleten kel és észak-nyugaton nyugszik (3.2. ábra).
- Ha $\delta < 0^\circ$, akkor $\sin \delta < 0$, $\cos A > 0$, $A > -90^\circ$ (kelés) vagy $A < +90^\circ$ (nyugvás). Az égi egyenlítő síkja alatti égitest dél-keleten kel és dél-nyugaton nyugszik (3.2. ábra).

A kelés és nyugvás óraszöge (3.6) második összefüggéséből számítható ki. Innen $\cos t$ -t kifejezve:

$$\cos t = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi. \quad (3.7)$$

A (3.7) egyenlet úgy érvényes, ha figyelembe vesszük, hogy φ (északi) szélességen a $\varphi - 90^\circ < \delta < 90^\circ - \varphi$ deklinációjú csillagok kelnek és nyugszanak. (Mielőtt egy csillag kelésének óraszögét ki akarjuk számítani, győződjünk meg róla, hogy a csillag valóban felkel az adott helyen.)

Ha $\varphi = 0^\circ$, akkor (3.7)-ből $\cos t = 0$, és $t = -90^\circ = -6^h$ (kelés óraszöge), vagy $t = +90^\circ = +6^h$ (nyugvás óraszöge). A Föld egyenlítőjén elhelyezkedő megfigyelő számára valamennyi csillag $t = -6^h$ -nál kel és $t = +6^h$ -nál nyugszik, a horizont felett 12^h -t tartózkodnak.

Ha $\operatorname{tg}\varphi > 0$, akkor (3.7) szerint

- Ha $\delta = 0^\circ$, akkor $\cos t = 0$, $t = -90^\circ = -6^h$ (kelés óraszöge), vagy $t = +90^\circ = +6^h$ (nyugvás óraszöge). Az égi egyenlítő síkjában lévő égitest kelése és nyugvása között 12^h telik el.
- Ha $\delta > 0^\circ$, akkor $\cos t < 0$, $t < -90^\circ = -6^h$ (kelés óraszöge), vagy $t > +90^\circ = +6^h$ (nyugvás óraszöge). Az égi egyenlítő síkja feletti égitest kelése és nyugvása között 12^h -nél több idő telik el.
- Ha $\delta < 0^\circ$, akkor $\cos t > 0$, $t > -90^\circ = -6^h$ (kelés óraszöge), vagy $t < +90^\circ = +6^h$ (nyugvás óraszöge). Az égi egyenlítő síkja alatti égitest kelése és nyugvása között 12^h -nél kevesebb idő telik el.

3.2.1. Kelés és nyugvás időpontjának kiszámítása

A kelés és nyugvás időpontját a kelés és nyugvás óraszögéből lehet kiszámítani az

$$s = \alpha + t$$

összefüggés alapján. Ismerni kell az égitest α rektaszcenzióját, ehhez a kelés (nyugvás) óraszögét hozzáadva megkapjuk, hogy csillagidőben mikor van a kelés (nyugvás). Ha zónaidőben szeretnénk tudni a kelési (nyugvási) időpontot, az s csillagidőt át kell számítani zónaidőre. Ennek menete a következő.

1. Legyen a λ keleti hosszúságú helyen (például Budapest esetében $\lambda = 18^\circ 57' 45'' = 1^h 15^m 51^s$) egy adott nap valamely pillanatában a csillagidő s .
2. Ekkor Greenwichben a csillagidő

$$s_G = s - \lambda.$$

3. A csillagászati évkönyvek megadják, és egy évkönyvben megnézzük, hogy a kérdéses napon 0^{h} világidőkor mennyi volt Greenwichben a csillagidő. Legyen ez s_{G0} . Ezt ismerve a következő pontban ismertetett módon kiszámítjuk, hogy Greenwichben s_G csillagidőkor mennyi a világidő.
4. 0^{h} világidőtől eltelt $s_G - s_{G0}$ csillagidő. Világidőben ennél kicsit kevesebb, mert a világidőt középideőben számítják, és ez lassabban múlik: 24^{h} középideő egyenlő $24^{\text{h}}3^{\text{m}}56^{\text{s}}$ csillagidővel. Így az

$$\frac{UT}{24^{\text{h}}} = \frac{s_G - s_{G0}}{24^{\text{h}}3^{\text{m}}56^{\text{s}}}$$

arányból kapjuk az UT világidőt. Gyakorlatilag

$$UT = 0,997276(s_G - s_{G0}).$$

5. A zónaidőt megkapjuk, ha a világidőhöz hozzáadjuk a zóna sorszámának megfelelő órák számát, pl. Budapesten

$$Z = UT + 1^{\text{h}}.$$

3.2.2. Korrekciók

1. A refrakció hatása:

A légkör fénytörő hatása (a refrakció, lásd 4.1. fejezet) miatt egy égitest már akkor a horizontban látszik, amikor valójában $34'$ -el a horizont alatt van. Ezért egy pontszerű és (a parallaxis szempontjából) végtelen távolinak tekinthető égitest (egy csillag) *látszólagos kelésének és nyugvásának* kiszámításához a (3.2) összefüggésbe $m = -34'$ -et kell helyettesíteni. Így az óraszög kiszámítására a következő összefüggést kapjuk:

$$\cos t = \frac{-\sin 34' - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}.$$

2. Az égitest kiterjedése és távolsága:

A Nap, a Hold, és néhány más naprendszerbeli égitest kelésének (nyugvásának) kiszámításakor nem hagyható figyelmen kívül az égitest látszólagos szögátmérője. Keléskor (nyugváskor) az égitest alulról érinti a horizontot, így középpontja $d/2$ -vel van a horizont alatt, ha d az égitest szögátmérője.

Nem hagyható figyelmen kívül az sem, hogy az égitest nincs végtelen távol, ezért horizontális napi parallaxisa (az a szög, amely alatt az égitest középpontjából a Föld sugara látszik, lásd 4.3. fejezet) nem nulla.

Összességében közeli, kiterjedt égitestek kelésének (nyugvásának) kiszámításakor az égitest magasságára az

$$m = -\rho - \frac{d}{2} + p$$

értéket kell venni, ahol ρ a refrakció a horizontban (34'), d az égitest szögátmérője, p a horizontális napi parallaxis szöge.

A Nap esetében: $d = 32'$, $p = 8,8''$ (ez a kelés/nyugvás számítása szempontjából elhanyagolható), így $m = -34' - 16' = -50'$.

A Hold esetében: $d = 32'$, $p = 57'$, így $m = -34' - 16' + 57' = 7'$.

A kelő és nyugvó Nap óraszögét így a következő összefüggés adja:

$$\cos t = \frac{-\sin 50' - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi}{\cos \delta_{\odot} \cos \varphi}.$$

A Hold esetében:

$$\cos t = \frac{\sin 7' - \sin \delta_H \sin \varphi}{\cos \delta_H \cos \varphi}.$$

Itt δ_{\odot} és δ_H a Nap- illetve a Hold-korong középpontjának geocentrikus deklinációja.

3. Az azimut számítása:

Egy égitest kelésének vagy nyugvásának helyét (A azimutját) a refrakció, az égitest szögátmérőjének és horizontális parallaxisának figyelembevételével a (3.1) és (3.3) összefüggésekből $m = -\rho - \frac{d}{2} + p$ -vel adódó

$$\sin A = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos(-\rho - \frac{d}{2} + p)}, \quad \cos A = \frac{\sin(-\rho - \frac{d}{2} + p) \sin \varphi - \sin \delta}{\cos(-\rho - \frac{d}{2} + p) \cos \varphi}$$

összefüggésekből számíthatjuk ki.

A Nap esetében például:

$$\sin A = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos 50'}, \quad \cos A = \frac{-\sin 50' \sin \varphi - \sin \delta}{\cos 50' \cos \varphi}.$$

4. Iterációs eljárás:

A kelés és nyugvás óraszögének és helyének kiszámítására szolgáló összefüggésekben szerepel az égitest deklinációja, a kelés és nyugvás idejének meghatározásához pedig az égitest rektaszenzióját is ismerni kell. Ha α és δ gyorsan változik, pl. a Nap és Hold esetében, a kelési és nyugvási adatok kiszámítására iterációs eljárást kell alkalmazni. A kelés (nyugvás) közelítő időpontjában vesszük α és δ értékét, ezekkel kiszámítjuk a kelés (nyugvás) pontosabb adatait, a pontosabb kelési (nyugvási) időpontra vesszük α és δ értékét, s az eljárást a kívánt pontosság eléréséig ismétljük.

5. Horizontális depresszió:

A horizont síkja felett h méter magasságban elhelyezkedő megfigyelő számára a napkelte és a napnyugta akkor következik be, amikor a Nap magassága közelítőleg

$$m \approx -50' - 2,12\sqrt{h}.$$

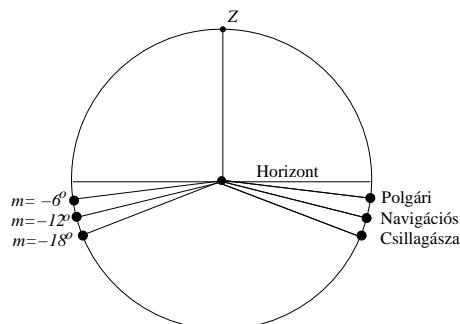
A megfigyelő horizont feletti h magasságából adódó korrekció a *horizontális depresszió*.

3.2.3. A szürkület

Napkelte előtt, illetve napnyugta után közvetlenül nincs teljesen sötét, mert a napsugarak szóródnak a légkörben és megvilágítják a Föld felszínét. A megvilágítás erőssége a Nap zenittávolságától függ, és ennek mértéke szerint több szürkületi időszak különböztethető meg (3.3. ábra):

- *Polgári szürkület:* a napkorong középpontjának zenittávolsága: $90^{\circ}50' < z_{\odot} \leq 96^{\circ}$. Ilyenkor szabad szemmel még jól lehet látni, de a polgári szürkület vége felé már be kell kapcsolni a világítást és feltűnnek a legfényesebb csillagok.
- *Navigációs szürkület:* $96^{\circ} < z_{\odot} \leq 102^{\circ}$. Ilyenkor bizonyos csillagászati mérések, pl. navigáció már elvégezhető.
- *Csillagászati szürkület:* $102^{\circ} < z_{\odot} \leq 108^{\circ}$. Halvány csillagok is feltűnnek már.

Ha a Nap középpontjának zenittávolsága eléri a $z_{\odot} = 108^{\circ}$ értéket, a horizontbeli megvilágítás megegyezik az éjszakai égbolt megvilágításáéval. Ekkor kezdődik a csillagászati éjszaka.



3.3. ábra. Szürkületi zónák

A különféle szürkületek végének időpontját úgy számíthatjuk ki, hogy a (3.2)-ből következő

$$\cos t_{\odot} = \frac{\sin m - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi}{\cos \delta_{\odot} \cos \varphi}$$

összefüggésben polgári szürkület esetén $m = -6^{\circ}$ -ot, navigációs szürkület esetén $m = -12^{\circ}$ -ot, csillagászati szürkület esetén $m = -18^{\circ}$ -ot írunk. Az így adódó t_{\odot} óraszögből $s = \alpha_{\odot} + t_{\odot}$ alapján kiszámítjuk az s csillagidőt, amit az ismert módon (3.2.1. fejezet) átszámítunk zónaidőre.

A polgári szürkülethez kapcsolódik a *fehér éjszaka* fogalma. Fehér éjszakáról beszélünk akkor, ha a Nap alsó kulminációjakor is polgári szürkület van. Mely földrajzi helyen lehet fehér éjszaka? Alsó kulminációban $t_{\odot} = 12^{\text{h}} = 180^{\circ}$. Így $m = -6^{\circ}$ -al a

$$\cos 180^{\circ} = \frac{\sin(-6^{\circ}) - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi}{\cos \delta_{\odot} \cos \varphi}$$

összefüggésnek kell teljesülnie. Innen ($\cos 180^{\circ} = -1$ miatt)

$$\sin 6^{\circ} = \cos \delta_{\odot} \cos \varphi - \sin \delta_{\odot} \sin \varphi = \cos(\delta_{\odot} + \varphi),$$

$$\delta_{\odot} + \varphi = 84^{\circ}.$$

δ_{\odot} értéke $-23,^{\circ}5$ és $23,^{\circ}5$ között változik. Így az északi féltekén az a legalacsonyabb szélesség, melyen fehér éjszaka lehetséges $\varphi = 84^{\circ} - 23,^{\circ}5 = 60,^{\circ}5$, és ez évente egyszer fordul elő. Ennél magasabb szélességeken évente legalább kétszer van fehér éjszaka (illetve a két időpont között a Nap alsó kulminációjakor $m > -6^{\circ}$, tehát ezen időtartam alatt világos van). A déli féltekén a mondottak $\varphi \leq -60,^{\circ}5$ szélességekre teljesülnek.

3.3. Csillagászati földrajzi helymeghatározás

Régebben a földrajzi helymeghatározásban nagy szerepet játszottak a csillagászati módszerek. Itt ennek elemeit ismertetjük.

3.3.1. A szélesség meghatározása

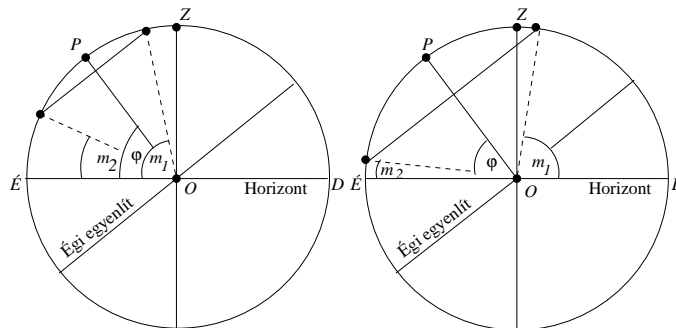
Egy meridiánba beállított műszer segítségével mérjük egy cirkumpoláris csillag felső és alsó kulminációjának magasságát, m_1 -et és m_2 -t.

Ha a felső kulmináció a pólus és a zenit közé esik, a 3.4. ábra bal oldali elrendezése szerint $m_1 - \varphi = \varphi - m_2$. Így

$$\varphi = \frac{m_1 + m_2}{2}.$$

Ha a felső kulmináció a zenittől délre van, a 3.4. ábra jobb oldali elrendezése szerint $180^\circ - m_1 - \varphi = \varphi - m_2$. Így

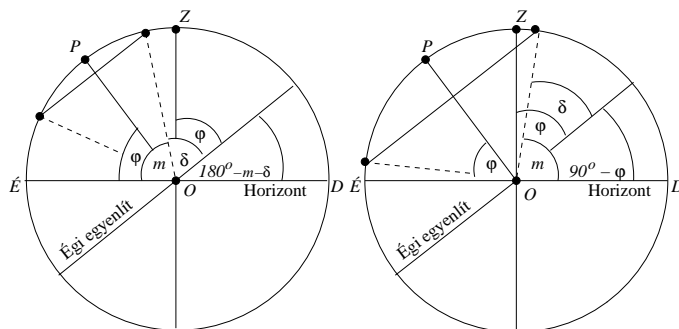
$$\varphi = 90^\circ + \frac{m_2 - m_1}{2}.$$



3.4. ábra. Alsó és felső kulmináció

Ha ismerjük a csillag deklinációját, elég a felső kulmináció magasságát megmérni. Ha ez a pólus és a zenit közé esik (3.5. ábra, bal oldali elrendezés), akkor $180^\circ - m - \delta = 90^\circ - \varphi$. Innen

$$\varphi = m + \delta - 90^\circ.$$



3.5. ábra. Felső kulmináció

Ha a felső kulmináció a zenittől délre van (3.5. ábra, jobb oldali elrendezés), akkor $m - \delta = 90^\circ - \varphi$. Innen

$$\varphi = 90^\circ - m + \delta.$$

Nagyobb pontosság érhető el, ha két csillagot figyelnek meg, melyek a zenithez közel, közelítőleg egy időben delelnek, úgy, hogy az egyik a zenittől északra, a másik a zenittől délre delel. A zenittől északra delelő csillag deklinációja legyen δ_1 , delelési magassága m_1 , zenittávolsága $z_1 = 90^\circ - m_1$, ugyanez a zenittől délre delelő csillag esetében δ_2 , m_2 , $z_2 = 90^\circ - m_2$. A korábbi összefüggések alapján

$$\varphi = m_1 + \delta_1 - 90^\circ = \delta_1 - z_1, \quad \varphi = 90^\circ - m_2 + \delta_2 = z_2 + \delta_2.$$

Innen

$$\varphi = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} + \frac{z_2 - z_1}{2}.$$

Ez a *Horrebow-Talcott-féle eljárás*. A zenittávolságok különbségének mérésére kialakított eszköz a *zenittávcső*, mely egy függőleges tengely körül forgatható, gyakorlatilag függőlegesen álló távcső.

3.3.2. A hosszúság meghatározása

A hosszúság meghatározásában alapvető szerepe van a pontos időmérésnek. Olyan órára van szükség, mely hosszú időn át megbízhatóan mutatja a világidőt. Szükség van továbbá egy olyan csillagászati évkönyvre, mely táblázatos formában megadja a $\lambda = 0^\circ$ földrajzi hosszúságnál (Greenwichben) a

világidő és a csillagidő kapcsolatát (adott világidőhöz milyen csillagidő tartozik). Valamely hely földrajzi hosszúsága úgy határozható meg, hogy az adott helyen ismert rektaszncenziójú égitest delelésének megfigyelésével meghatározzuk a csillagidőt (deleléskor $s = \alpha$), óránkon megnézzük, hogy az égitest delelése milyen világidőpontban történt, az évkönyv alapján pedig kikeressük az ezen világidőnek megfelelő greenwichi csillagidőt. A helyi csillagidő és a greenwichi csillagidő különbsége a földrajzi hosszúság.

A tengeri hajózásban régebben nagy szerepe volt a földrajzi helymeghatározás csillagászati módszereinek. A hosszúság meghatározása jelentette a nagyobb problémát. Itt egyrészt a pontos időmérést (a greenwichi idővel megegyező időt) kellett hosszabb időre biztosítani a hajón. Ez az óraszerkezetek fejlesztésére jelentett komoly kihívást. Másrészt szükség volt jól megfigyelhető, ismert rektaszncenziójú égitestekre. Ebből a szempontból a Holdnak kitüntetett szerepe volt. A nagy hajózó országok admirálisai komoly díjakat tűztek ki a Hold pontos mozgáselméletének kidolgozására. Ismerve ugyanis a Hold delelésének időpontját világidőben, egy adott helyen elegendő megállapítani, hogy ott a Hold delelése ehhez az időponthoz képest mennyivel tér el, és a különbség megadja a földrajzi hosszúságot. Érdeemes megemlíteni, hogy a XVIII. században L. Eulernek a Hold mozgására vonatkozó elmélete (1753) alapján T. Mayer olyan Hold-táblázatokat készített, melyek alapján a földrajzi hosszúságot $0,^\circ 5$ -os pontossággal (≈ 50 km) lehetett meghatározni.

4. fejezet

Csillagászati megfigyelések redukciója

4.1. A refrakció

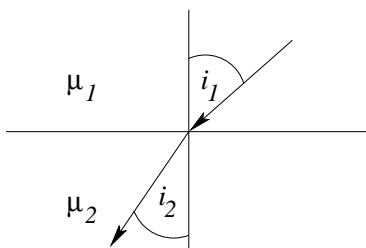
A csillagászati megfigyeléseket több jelenség befolyásolja, melyek hatására kis mértékben megváltoznak az égitestek koordinátái. A valódi koordináták kiszámításához az észleléseket ezekre a módosulásokra korrigálni kell. Ebben a fejezetben ezeket a jelenségeket és korrekciókat tekintjük át. Elsőként a refrakcióval foglalkozunk.

A fénysugarak csak homogén (állandó sűrűségű) közegben terjednek egyenes vonal mentén. Ha a fénysugár olyan felületen halad át, ahol a közeg sűrűsége ugrásszerűen változik, a fénysugár iránya megtörik. Ez a *refrakció* jelensége. Az irányváltozást a Snellius-Descartes-törvény írja le. Legyen μ_1 és μ_2 a két különböző sűrűségű közeg törésmutatója, i_1 és i_2 a fénysugárnak a beesési merőlegessel bezárt szöge a két közegben (4.1. ábra). Ekkor

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Ha a fénysugár ritkább közegből sűrűbbe lép ($\mu_1 < \mu_2$), iránya a beesési merőlegeshez közelebb kerül ($i_2 < i_1$). (Fordított esetben a beesési merőlegetől távolodik.)

A csillagok fénye is megtörik a Föld légkörében. Mivel a Föld felé haladva a csillagok fénye növekvő sűrűségű légrétegeken halad át, a törés miatt a csillagokat valódi helyüknél magasabban látjuk.



4.1. ábra. A fénytörés jelensége

4.1.1. Közelítő tárgyalás

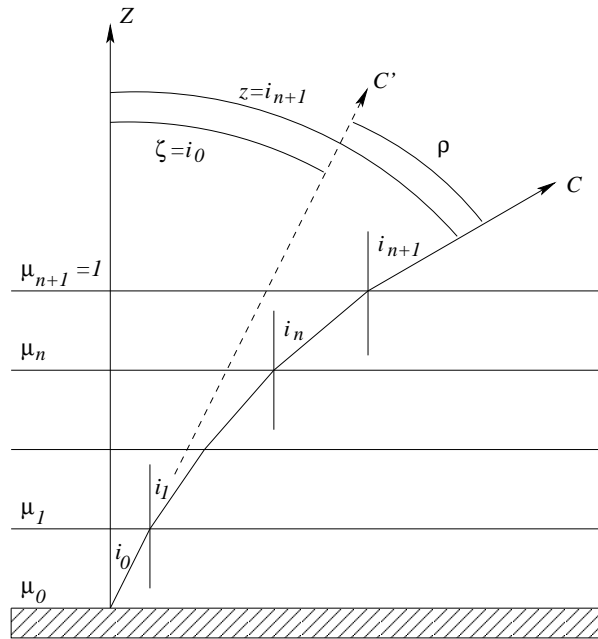
A következőkben a refrakció közelítő elméletével foglalkozunk, mely $z \leq 70^\circ$ -os zenittávolságig ad jó közelítést. Feltesszük, hogy a légkör a horizonttal párhuzamos, állandó sűrűségű légrétegekből áll. A Föld felszínével határos réteg törésmutatója legyen μ_0 , a következő μ_1 , és így tovább, végül az $(n+1)$ -ik, legkülső réteg (az üres tér) törésmutatója $\mu_{n+1} = 1$ (4.2. ábra).

Egy csillag valódi zenittávolsága legyen $z = i_{n+1}$, ez a legkülső rétegben a beesési merőlegessel bezárt szög. A fénysugár a légkörben lefelé haladva minden réteg határán megtörik, a beesési merőlegessel bezárt szögek rendre z_n, z_{n-1} , és így tovább, a földfelszíni rétegben z_0 . A csillagot az utolsó törés irányában látjuk, látszólagos zenittávolsága így $\zeta = i_0$.

A refrakció szöge a látszólagos és valódi zenittávolság különbsége:

$$\rho = \zeta - z.$$

A ρ kiszámításához írjuk fel az egymással szomszédos rétegekre a Snellius-



4.2. ábra. A refrakció

Descartes-törvényt:

$$\frac{\sin i_{n+1}}{\sin i_n} = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}},$$

$$\frac{\sin i_n}{\sin i_{n-1}} = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n},$$

...

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_0} = \frac{\mu_0}{\mu_1}.$$

Az egyenleteket összeszorozva kapjuk, hogy

$$\frac{\sin i_{n+1}}{\sin i_0} = \frac{\mu_0}{\mu_{n+1}}.$$

(Látható, hogy az eredmény független a rétegek számától.) Mivel $i_{n+1} = z$, $i_0 = \zeta$, $\mu_{n+1} = 1$, így

$$\frac{\sin z}{\sin \zeta} = \mu_0.$$

Felhasználva, hogy $z = \rho + \zeta$,

$$\frac{\sin z}{\sin \zeta} = \frac{\sin(\rho + \zeta)}{\sin \zeta} = \frac{\sin \rho \cos \zeta + \cos \rho \sin \zeta}{\sin \zeta} = \mu_0.$$

Mivel ρ kicsi ($\rho < 3'$ ha $z \leq 70^\circ$), jó közelítéssel $\sin \rho = \rho$, $\cos \rho = 1$. Fenti összefüggésből így

$$\rho = (\mu_0 - 1) \operatorname{tg} \zeta. \quad (4.1)$$

A μ_0 törésmutató a

$$\mu_0 = 1 + cn$$

összefüggésből számítható ki, ahol c állandó, $c = 2,264 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1}$, n a levegő sűrűsége:

$$n = A \frac{p}{1013,264 \text{ millibar}} \frac{273^\circ \text{C}}{273^\circ \text{C} + T},$$

ahol p a légköri nyomás millibarban, T a hőmérséklet Celsius-fokban, A a normál állapotú levegő sűrűsége, $A = 1,2928 \text{ kg m}^{-3}$.

Mivel ρ kis szög, célszerű ívmásodpercben kifejezni. (4.1)-ben ρ radiánban van megadva. Felhasználva, hogy $1 \text{ rad} = 206265''$, fenti összefüggéseket is figyelembe véve (4.1)-ből kapjuk, hogy

$$\rho'' = 206265'' \cdot 2,264 \cdot 10^{-4} \cdot 1,2928 \frac{p}{1013,264 \text{ mbar}} \frac{273^\circ \text{C}}{273^\circ \text{C} + T} \operatorname{tg} \zeta.$$

Innen a refrakció szöge ívmásodpercben kifejezve, a felszíni légköri nyomástól és hőmérséklettől függően:

$$\rho'' = 60,3'' \frac{p}{1013,264} \frac{273}{273 + T} \operatorname{tg} \zeta, \quad (4.2)$$

ahol a p nyomást millibárban, a T hőmérsékletet Celsius-fokban kell megadni. (Ha, mint az refrakciós táblázatokban gyakori, a nyomást nem millibarban, hanem higanymilliméterben adják meg, 4.2-ben 1013,264 mbar helyett 760 hgmm-t kell venni.)

A (4.2) összefüggés $z \leq 70^\circ$ zenittávolságig ad jó közelítést. (4.2)-ből kiszámítható, hogy normál légköri viszonyok mellett ($p = 1013,264 \text{ mbar}$, $T = 0^\circ \text{C}$) $\rho \approx 1'$, ha $\zeta = 45^\circ$, és $1' < \rho < 3'$ ha $45^\circ < \zeta < 70^\circ$.

4.1.2. Pontosabb elmélet

A refrakció pontosabb elmélete figyelembe veszi a Föld gömb alakját, és a légkört állandó sűrűségű gömbhéj rétegekre osztja. Az itt nem részletezett számítások szerint a refrakció pontosabban a

$$\rho'' = (60,22 \operatorname{tg} \zeta - 0,07 \operatorname{tg}^3 \zeta) \frac{p}{1013,264} \frac{273}{273 + T} \quad (4.3)$$

összefüggésből számítható ki, mely $z < 80^\circ$ zenittávolságig ad 1"-nél pontosabb eredményt.

4.1.3. Empirikus táblázatok

80° -nál nagyobb zenittávolságok esetén a refrakciót empirikus táblázatok adják meg. A horizont közelében ugyanis a refrakció értékét pontosan kiszámítani nem lehet, mert erősen függ a légkör pillanatnyi állapotától. A 4.1. táblázat $80^\circ - 90^\circ$ zenittávolságra mutatja a refrakció empirikusan meghatározott értékeit ($p = 1013$ mbar nyomás és $T = 0^\circ\text{C}$ hőmérséklet esetén).

z	80°	82°	84°	86°	88°	90°
ρ	5'31"	6'47"	8'47"	12'11"	18'58"	36'42"

4.1. táblázat. Refrakció a horizont közelében

A hőmérséklet növekedésével csökken, a nyomás növekedésével nő a refrakció. Pl. $T = 15^\circ\text{C}$ esetén a horizontban $\rho = 34'$. Ezt az átlagos értéket használják az égitestek kelésének és nyugvásának kiszámításakor (lásd 3.2.2. fejezet). Ez az érték közelítőleg megegyezik a Nap átmérőjével ($32'$). Így amikor napkeltekor vagy napnyugtakor a Napot már teljesen a horizont felett látjuk, akkor valójában még teljes terjedelmével a horizont alatt van. Mivel a refrakció szöge a horizont közelében igen gyorsan nő, napfelkeltekor és napnyugtakor a Napot zsemle alakúnak látjuk, ugyanis a Nap alsó peremére a refrakció szöge nagyobb (és így az jobban megemelkedik), mint a felső peremére.

Megjegyzés: a refrakció függ a fény hullámhosszától. Így különböző szín-szűrőkkel végzett észleléseknél ezt figyelembe kell venni. A 4.2. táblázat megadja egy csillag kék és vörös szűrővel mért koordinátái közti különbséget a zenittávolságtól függően.

z	30°	45°	60°	75°
$\Delta\rho$	0,"35	0,"60	1,"04	2,"24

4.2. táblázat. Differenciális refrakció kék és vörös hullámhosszon

4.1.4. Korrekció a refrakcióra

Egy égitest mért koordinátáit korigáltni kell a refrakcióra. A következő összefüggések $z < 70^\circ$ zenittávolságig adják φ földrajzi szélességen egy égitest α rektaszenciójának és δ deklinációjának a refrakció miatti megváltozását:

$$\alpha' - \alpha = \rho_0 \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos \delta (\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t)},$$

$$\delta' - \delta = \rho_0 \frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos t}{\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t},$$

ahol t az égitest óraszöge és

$$\rho_0 = 60,"3 \frac{p}{1013,264} \frac{273}{273 + T}.$$

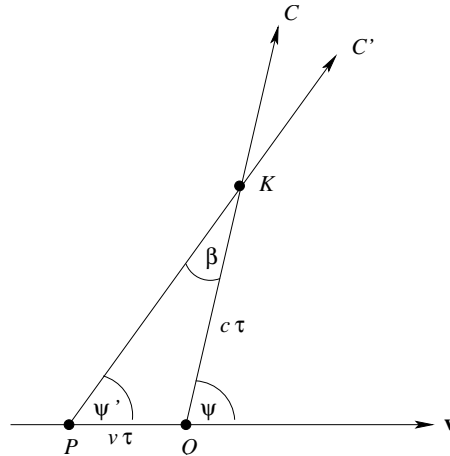
Az észlelés s csillagidejének ismeretében t kiszámítható ($t = s - \alpha$) és az ekvatoriális koordináták a refrakcióra korigálhatók.

4.2. Az aberráció

Az aberrációt J. Bradley fedezte fel 1728-ban, aki az évi parallaxist próbálta kimutatni. Az aberráció jelensége onnan ered, hogy az észlelő mozog a fényforráshoz képest, és amíg a fény fotonjai végighaladnak a távcsövön, azalatt a távcső elmozdul, s a fényforrás képe nem a fonálkereszt középpontjában, hanem attól kissé eltolódva jelenik meg.

Legyen a megfigyelő pillanatnyi sebessége v , a végtelen távolinak feltételezett fényforrás valódi iránya C , a két irány közti szög ψ (4.3.ábra). A távcső objektívjének K középpontján belépő fotonoknak a fény véges c terjedési sebessége miatt egy bizonyos τ időre van szükségük ahhoz, hogy a távcső tubushosszán végighaladjanak. Ezalatt azonban a távcső $v\tau$ távolsággal elmozdul, így a fényforrás képe nem az okulár fonálkeresztjében, hanem attól a megfigyelő mozgásával ellentétes irányban egy kissé eltolódva. Így a fényforrás

látszólagos iránya C' , ennek a megfigyelő haladási irányával bezárt szöge ψ' . Ahhoz, hogy a fényforrás képe a fonálkereszt középpontjában jelenjen meg, a távcsövet $\beta = \psi - \psi'$ szöggel előre kell dönteni. Ez a β szög az *aberráció szöge*.



4.3. ábra. Az aberráció

Az aberráció szöge a 4.3. ábra alapján könnyen kiszámítható. Az ábrán látható háromszögre a szinusztételt felírva

$$\frac{\sin \beta}{\sin \psi'} = \frac{v\tau}{c\tau}.$$

Innen, mivel β kicsi és így használható a $\sin \beta \approx \beta$ közelítés,

$$\beta = \frac{v}{c} \sin \psi'.$$

β -t radián helyett ívmásodpercben kifejezve (1 rad = 206265 ívmásodperc) és a fény sebességét ($c = 299773 \text{ km s}^{-1}$) beírva

$$\beta'' = \frac{206265}{299773} v \sin \psi' = 0,688 v \sin \psi'. \quad (4.4)$$

A megfigyelő v sebessége három összetevőre bontható:

- A Nap mozgása a környező csillagokhoz képest, innen származik az *évszázados aberráció*.
- A Föld keringése a Nap körül, innen származik az *évi aberráció*.
- A Föld tengelykörüli forgása, innen származik a *napi aberráció*.

4.2.1. Évszázados aberráció

A Nap a környező csillagok rendszerének súlypontjáhpz képest $v = 19,5$ km s^{-1} sebességgel mozog a $\lambda = 270,^\circ 5$, $\beta = 34,^\circ 3$ ekliptikai koordinátájú pont (a Hercules csillagkép egy pontja) felé. Így (4.4)-ből

$$\beta'' = 0, ''688 \cdot 19,5 \sin \psi' = 13, ''4 \sin \psi'. \quad (4.5)$$

Mivel a Nap sebességének nagysága és iránya gyakorlatilag állandó, egy adott csillagra β'' is állandó, így az évszázados aberrációt nem kell figyelembe venni, mert a mérések eredményét nem befolyásolja. (ψ' , vagyis egy csillag iránya és a Nap sebességének iránya közti szög különböző csillagoknál más, azonban minden csillagra állandó.)

4.2.2. Évi aberráció

A Föld átlagos keringési sebessége a Nap körül $v = 29,77$ km s^{-1} . Így (4.4)-ből

$$\beta'' = 0, ''688 \cdot 29,77 \sin \psi' = 20, ''48 \sin \psi'. \quad (4.6)$$

Itt $20, ''48$ az *évi aberráció állandója*. Mivel egy adott csillagnál ψ' változik a Föld keringése során, β'' is változik az év folyamán. Figyelembe véve, hogy az aberrációs elmozdulás a Föld napköri keringésének sebességvektorára és a csillagra illeszkedő síkban jön létre, (4.6) alapján a csillagok éves aberrációs mozgása a következő:

- az ekliptika pólusában lévő csillag $20, ''48$ sugarú kört ír le;
- az ekliptika síkjában lévő csillagok $40, ''96$ hosszúságú szakasz mentén mozdulnak el;
- β ekliptikai szélességen elhelyezkedő csillagok olyan ellipszist írnak le a valódi helyzet körül, melynek nagytengelye $40, ''96$, kistengelye $40, ''96 \sin \beta$ (ez a β nem tévesztendő össze az aberráció β szögével).

4.2.3. Napi aberráció

A Földön φ földrajzi szélességű helyen a Föld tengelyforgása miatti kerületi sebesség

$$v = \frac{2\pi R \cos \varphi}{P},$$

ahol R a Föld átlagos sugara, P a Föld tengelyforgási periódusa. Az $R = 6367$ km és $P = 1$ csillagnap = 86164 középido másodperc értékekkel számolva $v = 0,464 \cos \varphi$ km s⁻¹. Így (4.4)-ből

$$\beta'' = 0,688 \cdot 0,464 \cos \varphi \sin \psi' = 0,319 \cos \varphi \sin \psi'. \quad (4.7)$$

Itt 0,319 a *napi aberráció állandója*.

4.2.4. Korrekciós formulák az aberrációra

A napi aberráció miatti változás

A napi aberráció miatt egy égitest ekvatoriális koordinátaiban fellépő változást a következő összefüggésekből lehet kiszámítani:

$$\alpha' - \alpha = k_0 \frac{\cos \varphi \cos t}{\cos \delta},$$

$$\delta' - \delta = k_0 \cos \varphi \sin \delta \sin t,$$

ahol $k_0 = 0,319 = 0,50213$, φ a megfigyelt földrajzi szélessége, t az égitest óraszöge. Látható, hogy 0,5-nél kisebb pontosságú méréseknél a napi aberráció elhanyagolható.

Az évi aberráció miatti változás

A Föld pályáját kör alakúnak véve az évi aberráció miatt egy égitest ekvatoriális koordinátaiban fellépő változást a következő összefüggésekből lehet kiszámítani:

$$\alpha' - \alpha = -k \sec \delta (\sin \alpha \sin \lambda_{\odot} + \cos \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \varepsilon),$$

$$\delta' - \delta = -k \sin \lambda_{\odot} \cos \alpha \sin \delta - k \cos \lambda_{\odot} (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta),$$

ahol $k = 20,48 = 1,537$ az évi aberrációs állandó, $\varepsilon = 23^{\circ}26'$ az ekliptika és az égi egyenlítő hajlásszöge, λ_{\odot} a Nap ekliptikai hosszúsága.

Figyelembe véve a földpálya kis $e = 0,01675$ excentricitását is, a korrek-

ciós formulák:

$$\begin{aligned}\alpha' - \alpha &= -k \sec \delta (\sin \alpha \sin \lambda_{\odot} + \cos \alpha \cos \lambda_{\odot} \cos \varepsilon) + \\ &\quad + ke \sec \delta (\sin \alpha \sin \varpi + \cos \alpha \cos \varpi \cos \varepsilon), \\ \delta' - \delta &= -k \sin \lambda_{\odot} \cos \alpha \sin \delta - k \cos \lambda_{\odot} (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta) + \\ &\quad + ke [\sin \varpi \cos \alpha \sin \delta + \cos \varpi (\sin \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \sin \alpha \sin \delta)],\end{aligned}$$

ahol $\varpi = 103^{\circ}4'$ a földpálya perihélium-hosszúsága. A ke szorzó olyan nagyságrendű, mint a napi aberráció állandója ($ke = 0,34$, $k_0 = 0,319$), így $0,5$ -nél kisebb pontosságú méréseknél a földpálya excentrikussága figyelmen kívül hagyható.

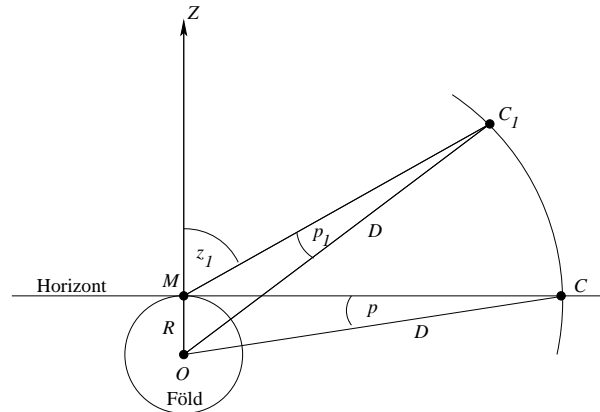
4.3. A parallaxis

Parallaxisnak nevezik azt a jelenséget, hogy egy égitest a tér különböző pontjaiból más-más irányban látszik. A megfigyelő a Földdel együtt mozog, változik térbeli helyzete, így egy adott égitestet mindig kissé más irányban lát. Attól függően, hogy a megfigyelő térbeli helyzetváltozása a Föld mely mozgásából származik, megkülönböztetnek *napi*, *évi* és *szekuláris parallaxist*.

4.3.1. A napi parallaxis

A Föld forgásából származik a *napi parallaxis*, mely közeli, naprendszerbeli égitestek esetében jelentkezik: a Föld forgása miatt változik a közeli égitestek iránya a távoli égitestek háttéréhez képest. Egy megfigyelő egy közeli égitestet más irányban lát a nap különböző időszakaiban, vagy ugyanazt az égitestet azonos időpontban a Föld különböző pontjain álló megfigyelők látnak más irányban. Naprendszerbeli égitestek megfigyelésénél tehát nem hanyagolható el a Föld mérete.

A napi parallaxis szempontjából a Föld gömb alakúnak vehető. Egy D távolságra lévő közeli égitest topocentrikus zenittávolsága valamely időpontban legyen z_1 . Az a p_1 szög, amely alatt ekkor az égitestről a Föld R sugara látszik, a *napi parallaxis szöge* (4.4. ábra). A p_1 szög a nap folyamán a Föld forgása miatt nyilván változik. Azt a p szöget, amely alatt az égitestről a Föld sugara akkor látszik, amikor az égitest a horizontban van, *horizontális napi parallaxisnak* nevezik.



4.4. ábra. A napi parallaxis

A 4.4. ábra háromszögei alapján, figyelembe véve, hogy a horizont merőleges a zenit irányára

$$\frac{\sin p_1}{\sin(180^\circ - z_1)} = \frac{\sin p_1}{\sin z_1} = \frac{R}{D}, \quad \sin p = \frac{R}{D}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy a parallaxis kis szög, jó közelítéssel

$$p_1 = p \sin z_1. \quad (4.8)$$

A parallaxis függ a távolságtól. Így egy égitest parallaxisának mérésével az égitest távolsága meghatározható. A horizontális napi parallaxis ismeretében az égitest távolságát a

$$D = R \sin p \quad (4.9)$$

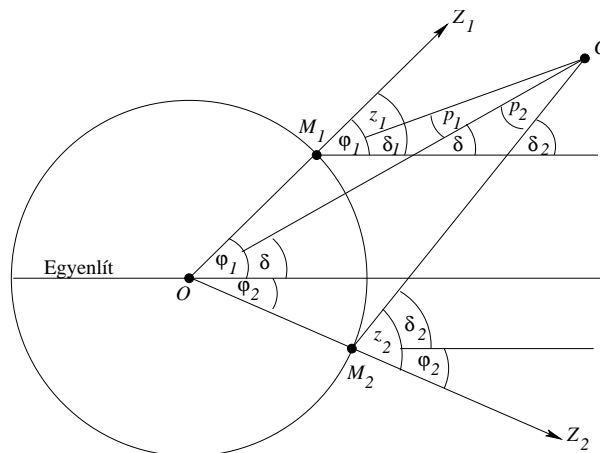
összefüggés adja.

A horizontális napi parallaxis meghatározása

Azonos hosszúsági körön helyezkedjék el két megfigyelő, M_1 és M_2 , egyik az északi, másik a déli féltekén, és mérje az égitest z_1 és z_2 delelési zenittávolságát (4.5. ábra). A megfigyelők földrajzi szélessége legyen φ_1 és φ_2 , az égitest topocentrikus deklinációja δ_1 és δ_2 , geocentrikus deklinációja δ .

(4.8) szerint

$$p_1 = p \sin z_1, \quad p_2 = p \sin z_2.$$



4.5. ábra. A horizontális napi parallaxis meghatározása

A 4.5. ábra alapján

$$p_1 = \delta - \delta_1, \quad p_2 = \delta_2 - \delta.$$

Így

$$\delta - \delta_1 = p \sin z_1, \quad \delta_2 - \delta = p \sin z_2.$$

Innen

$$p = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\sin z_2 + \sin z_1}.$$

Figyelembe véve, hogy

$$z_1 = \varphi_1 - \delta_1, \quad z_2 = \delta_2 - \varphi_2$$

(mert φ_2 negatív), innen

$$z_2 + z_1 = \delta_2 - \delta_1 + \varphi_1 - \varphi_2.$$

Innen $\delta_2 - \delta_1$ -et kifejezve a horizontális napi parallaxis szögére végül kapjuk, hogy

$$p = \frac{z_2 + z_1 + \varphi_2 - \varphi_1}{\sin z_2 + \sin z_1}. \quad (4.10)$$

A földrajzi szélességek ismeretében, a delelési zenittávolságok mérésével a horizontális napi parallaxis meghatározható. Ebből pedig (4.9) alapján az égitest távolsága kiszámítható.

A természetes égitestek közül a legnagyobb horozontális napi parallaxissal a Hold rendelkezik, ez maximálisan $p = 62'$ lehet. A nagybolygók horozontális napi parallaxisa kisebb $30''$ -nél. A Nap horozontális napi parallaxisa $p_{\odot} = 8,794148''$. Az ennek megfelelő távolság $1495978,7$ km (csillagászati egység).

Megjegyezzük, hogy a Nap parallaxisa a fent ismerttetett módszerrel közvetlenül nem mérhető. A Nap sugárzása miatt ugyanis a légkörben nagymértékű sűrűségváltozások lépnek fel, másfelől a műszerek felmelegedése következtében skálájuk erősen megváltozik, így a parallaxis pontos meghatározása nem lehetséges. A Nap parallaxisa közvetett módon határozható meg. Az eljárás lényege, hogy égi mechanikai módszerekkel kiszámítható egy bolygónak a Földtől való távolsága csillagászati egységekben kifejezve, a bolygó parallaxisának mérésével pedig ugyanez a távolság kilométerekben határozható meg. Ebből következik, hogy egy csillagászati egység hány kilométer, innen pedig (4.9) alapján kiszámítható a Nap horozontális napi parallaxisa. A gyakorlatban egy a Földet erősen megközelítő kisbolygót, az Erost használták a Nap parallaxisának meghatározására.

4.3.2. Az évi parallaxis

A Föld napkörüli keringéséből származik az *évi parallaxis*: az év során a földpálya különböző pontjaiból a közeli csillagokat kissé más-más irányban látjuk. Egy csillag évi parallaxisának szöge az a π szög, amely alatt a csillagról a földpálya fél nagytengelye merőleges ránézés esetén látszik (4.6. ábra). Megjegyezzük, hogy a csillagok távolságához képest a földpálya körnek vehető.

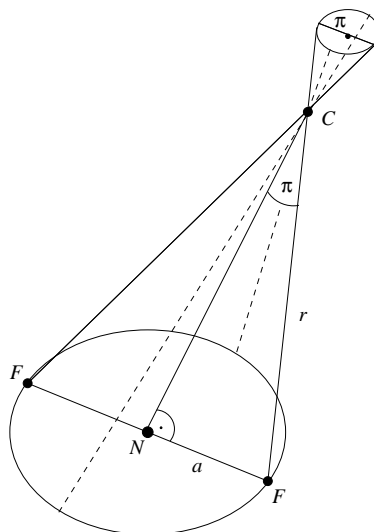
A 4.6. ábra alapján

$$\sin \pi = \frac{a}{r},$$

ahol r a csillag távolsága, a a földpálya fél nagytengelye. Mivel π kicsi, $\sin \pi \approx \pi$, és ha π -t radián helyett ívmásodpercben fejezzük ki ($1 \text{ rad} = 206265''$), valamint hosszúságegységként a csillagászati egységet választjuk ($a = 1$), akkor

$$\pi'' = \frac{206265}{r}. \quad (4.11)$$

A csillagok távolságának mérésére célszerű új hosszúságegységet bevezetni. Ez a *parszek* (jele pc, az angol parsec elnevezésből). Egy parszek az a távolság, ahonnan a földpálya fél nagytengelye merőleges ránézés esetén



4.6. ábra. Az évi parallaxis

1" szög alatt látszik. (4.11)-ből következik, hogy $1 \text{ pc} = 206265$ csillagászati egység. Közelítőleg $1 \text{ pc} \approx 3,26$ fényév ($1 \text{ pc} = 30,84 \cdot 10^{12} \text{ km}$, $1 \text{ fényév} = 9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}$). Egy $r \text{ pc}$ távolságban lévő csillag évi parallaxisa ívmásodpercben

$$\pi'' = \frac{1}{r}. \quad (4.12)$$

A Föld évi mozgása során egy csillag iránya egy kúpfelületet ír le (4.6. ábra). Ennek az éggömbbel való metszése a *parallaktikus ellipszis*, melynek fél nagytengelye megegyezik a csillag π évi parallaxiséval. A parallaktikus ellipszis 90° -kal el van fordulva az évi aberráció ellipsziséhez képest. A parallaktikus elmozdulás ugyanis a Nap-Föld vektorra és a csillagra illeszkedő síkban, míg az aberrációs elmozdulás a Föld sebességvektorára és a csillagra illeszkedő síkban jön létre.

A két ellipszis mérete lényegesen különbözik. Az aberrációs ellipszis fél nagytengelye $\approx 20,5''$. Ezzel szemben a hozzánk legközelebbi csillag, a Proxima Centauri parallaxisa csak $0,76''$. Ez $1,31 \text{ pc} = 4,3$ fényévnek felel meg.

A közeli csillagok évi parallaktikus mozgását a távoli csillagok háttéréhez képest nyomon lehet követni, és a parallaktikus ellipszis fél nagytengelyét meg lehet határozni. π ismeretében (4.12)-ből megkaphatjuk a csillag távolságát. A távolságmeghatározásnak ezt a módját *trigonometriai parallaxisnak*

nevezik. A Földi légkör nyugtalansága miatt 0,01-nél pontosabban nem lehet a parallaxist mérni, így a trigonometrikus parallaxis módszere 100 pc távolságig használható. Megemlítjük, hogy az első parallaxis-meghatározás Bessel nevéhez fűződik (1838).

4.3.3. A szekuláris parallaxis

Egy megfigyelő térbeli helyzete nemcsak a Föld forgása és napközi keringése miatt változik, hanem azért is, mert a Nap a környező csillagok rendszerének súlypontjához képest $v = 19,5 \text{ km s}^{-1}$ sebességgel mozog. Innen származik a *szekuláris parallaxis* jelensége. Ez szintén lehetőséget ad a csillagok távolságának trigonometriai úton történő meghatározására. Alapul a Nap által hosszabb idő, akár több évszázad alatt megtett távolság vehető, így a mérési tartomány kb. 5000 pc-ig terjeszthető ki. Ez a módszer azonban a csillagok sajátmozgása miatt csak statisztikusan alkalmazható.

4.3.4. Korrekciós formulák a parallaxisra

A napi parallaxis miatti változás

A napi parallaxis miatt egy égitest ekvatoriális koordinátáinak változását a következő összefüggésekből lehet kiszámítani:

$$\alpha' - \alpha = p \frac{\cos \varphi \sin t}{\cos \delta},$$

$$\delta' - \delta = p (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos t),$$

ahol p a horizontális napi parallaxis.

Az évi parallaxis miatti változás

Az évi parallaxis miatt egy égitest ekvatoriális koordinátáinak változását a következő összefüggésekből lehet kiszámítani:

$$\alpha' - \alpha = \pi \frac{\cos \delta_{\odot} \sin(\alpha_{\odot} - \alpha)}{\cos \delta},$$

$$\delta' - \delta = \pi [\sin \delta_{\odot} \cos \delta - \cos \delta_{\odot} \sin \delta \cos(\alpha_{\odot} - \alpha)],$$

ahol π az évi parallaxis, α_{\odot} , δ_{\odot} a Nap ekvatoriális koordinátái.

4.4. A precesszió

A precesszió felfedezését Hipparchosznak tulajdonítják (Kr.e. II. sz.), aki észrevette, hogy a csillagok ekliptikai hosszúságai kb. $1,^\circ 5$ -kal nagyobbak Ariszttilosz és Timocharisz 150 évvel korábbi megfigyeléseinél. Hipparchosz ezt úgy értelmelte, hogy az égi pólus és ezzel együtt a tavaszpont vándorol az éggömbön. Ezt a jelenséget *precesszió*nak nevezik. 1747-ben J. Bradley felfedezte, hogy a tavaszpont mozgásában egy 18,6 éves periódusú tag is van, ezt *nutáció*nak nevezték el.

Az égi pólus mozgását a Nap és a Hold együttes hatása okozza annak következtében, hogy a Föld tömegeloszlása nem gömbszimmetrikus, és emiatt a Nap és a Hold forgatónyomatékokat gyakorol a Földre. Ha a Föld tömegeloszlása gömbszimmetrikus volna, nem lenne precesszió.

A jelenség megértéséhez az egyszerűség kedvéért bontsuk a Földet egy gömbszimmetrikus részre, és egy az egyenlítő menti kidudorodásra (4.7. ábra). Vizsgáljuk először a Nap hatását, és tegyük fel, hogy éppen nyári szolstícium van (a Nap iránya ekkor $\approx 23,^\circ 5$ -os szöveget zár be az egyenlítővel). Legyen a kidudorodás Naphoz közelebbi részének tömegközéppontja A , a távolabbi részé B . A kidudorodás Naphoz közelebbi részét a Nap nagyobb erővel vonzza, mint a távolabbit, az A pontban ható \mathbf{F}_A erő így nagyobb, mint a B -ben ható \mathbf{F}_B erő. (A Nap nagy távolsága miatt a két erő párhuzamosnak vehető.) A gömbszimmetrikus tömegeloszlású részre ható gravitációs erőket a Föld O tömegközéppontjában egyesíthetjük. Legyen

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B}{2}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_A - \mathbf{F}_B}{2}.$$

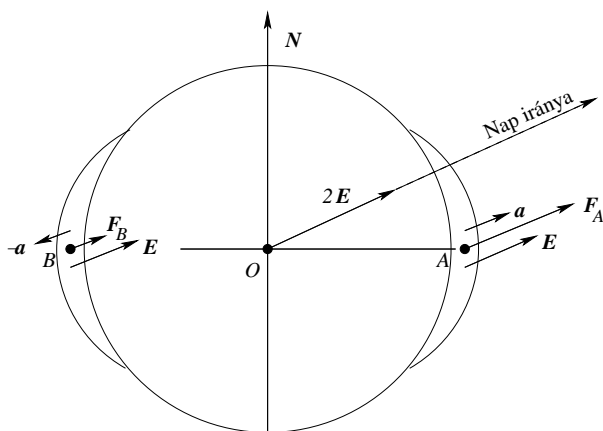
Ekkor

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{E} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{F}_B = \mathbf{E} - \mathbf{a}.$$

Az A és B pontban ható \mathbf{E} erőket a Föld O tömegközéppontjában egyesíthetjük, hiszen egyenlő nagyságú és párhuzamos erőkről van szó. Az \mathbf{a} , $-\mathbf{a}$ vektorok viszont egy erőpárt alkotnak, mely az ábra szerinti elrendezés esetén a lap síkjából kifelé mutató \mathbf{M}_\odot forgatónyomatékokat hoz létre.

Az év során az \mathbf{M}_\odot forgatónyomaték iránya és nagysága változik. Legnagyobb a nyári és téli napfordulókor, legkisebb (0) a tavaszi és őszi napéjegyenlőségkor. Az éves átlagérték pozitív, de a forgatónyomaték változásának van egy kis amplitúdójú fél éves periódusú összetevője is.

A Naphoz hasonló hatást fejt ki a Hold is a Földre. A Hold \mathbf{M}_H forgatónyomatékának havi átlagértéke pozitív és a forgatónyomaték változásának



4.7. ábra. A precessziót létrehozó erőpár

van egy fél hónapos periódusú összetevője.

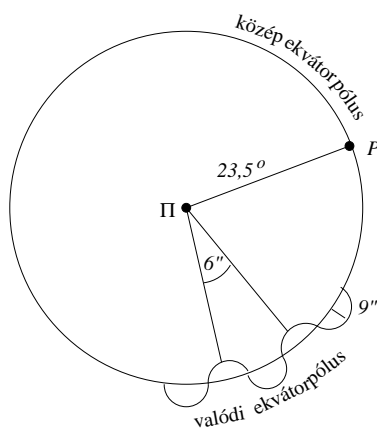
A Nap és a Hold forgatónyomatékának együttes hatására változik a Föld forgástengelyének iránya. Az impulzusmomentum tétele szerint a Föld \mathbf{N} forgási impulzusmomentumának megváltozása:

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{M},$$

ahol $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\odot} + \mathbf{M}_H$. Ennek következtében a Föld forgástengelye az ekliptika pólusának iránya körül precesszál. A forgástengelynek a forgatónyomatékok átlagának hatására létrejövő mozgása a *luniszoláris precesszió*. Ennek során a forgástengely az ekliptika pólusának iránya körül egy kúpfelület mentén mozog. Mivel az ekliptika pólusa és az égi pólus iránya $23,5$ -ös szöget zár be, az égi pólus az ekliptika pólusa körül egy $23,5$ sugarú kört ír le, a körbefordulás periódusa 25729 év. A luniszoláris precesszió következménye, hogy az égi egyenlítő mozgása miatt a tavaszpont évente $50,3$ -et hátrál (a Nap járásához képest) az ekliptika mentén.

A Hold pályasíkja $5^{\circ}9'$ -es szöget zár be az ekliptikával, és a Nap perturbáló hatására 18,6 éves periódussal retrográd irányban forog. Emiatt a Hold forgatónyomatékának van egy 18,6 éves periódusú összetevője is. A Föld forgástengelyének precessziós mozgásában a periodikus változásokat *nutációnak* nevezik. Említettük a fél éves, fél hónapos és 18,6 éves periódusú összetevőket, de vannak egyéb periódusok is. A legnagyobb, $9''$ -es amplitúdója a 18,6 éves periódusú változásnak van (először ezt a tagot nevezték nutációnak, ma már azonban a periodikus tagok összességét értik ez alatt).

Az égi pólus mozgását az ekliptika pólusa körül a 4.8. ábra szemlélteti. Ha a nutáció hatásától eltekintünk, és az égi pólusnak csak a luniszoláris precesszió következtében történő mozgását vizsgáljuk, akkor *közép-ekvátorpólusról*, ha a nutációt is figyelembe vesszük, akkor *valódi ekvátorpólusról* beszélünk. A közép-ekvátorpólus az ekliptika pólusa körül kört, a valódi ekvátorpólus pedig (ha a nutációnak csak a legnagyobb amplitúdójú tagját tekintjük) az ábrán látható hullámvonalat írja le.

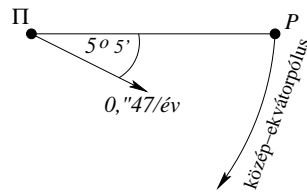


4.8. ábra. A valódi és a közép-ekvátorpólus

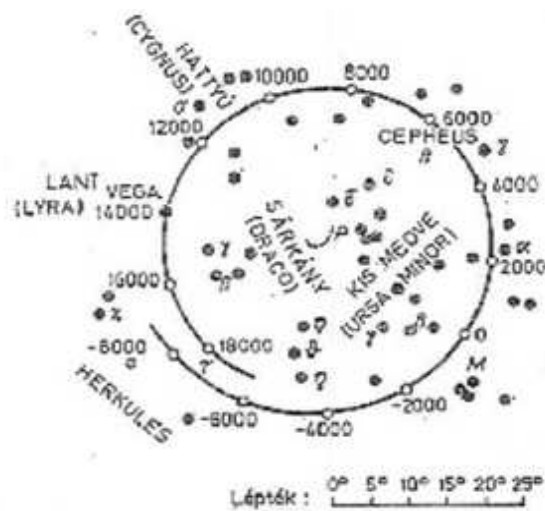
Eddig csak a Nap és a Hold hatásáról volt szó. Emellett azonban figyelembe kell venni a bolygók perturbáló hatását is, aminek következtében elfordul a Föld pályasíkja, az ekliptika. Ez a *planetáris precesszió*. A planetáris precesszió következtében az ekliptika pólusa évente $0,^{\circ}47$ -et mozdul el az ekliptika és az egyenlítő pólusát összekötő főkörrel néhány fokban szöget bezáró irányban (4.9. ábra). A planetáris precesszió hatására a tavaszpont az égi egyenlítő mentén évente $0,^{\circ}11$ -el változtatja helyzetét.

A planetáris precesszió miatt a közép-ekvátorpólus az ekliptika pólusa körül nem kört, hanem egy rozettához hasonlító görbe vonalat ír le. A közép-ekvátorpólusnak -8000 -tól $+18000$ -ig az állócsillagokhoz viszonyított mozgását a 4.10. ábra mutatja. Látható, hogy 12000 év múlva az égi pólus az α Lyrae (Vega) közelében lesz, a Sarkcsillag pedig kb. 47° -ra az akkori égi pólustól.

Egy égitest ekvatoriális koordinátáinak a precesszió miatti változását a



4.9. ábra. A planetáris precesszió



4.10. ábra. A közép-ekvátorpólus mozgása

következő összefüggésekből lehet kiszámítani:

$$\alpha = \alpha_0 + M + N \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m,$$

$$\delta = \delta_0 + N \cos \alpha_m,$$

ahol α_0 , δ_0 a J2000,0 epochára ($T = 0$) vonatkozó koordináták, α , δ a $T = t$ időpontbeli keresett koordináták, α_m , δ_m az időintervallum felénél, $T = t/2$ -kor érvényes koordináták:

$$\alpha_m = \alpha_0 + \frac{1}{2}(M + N \sin \alpha_0 \operatorname{tg} \delta_0),$$

$$\delta_m = \delta_0 + \frac{1}{2}N \cos \alpha_0.$$

Az M , N precessziós együtthatókat ($T = t$ -re illetve $T = t/2$ -re) az

$$M = 1,^{\circ} 2812323 T + 0,^{\circ} 0003879 T^2 + 0,^{\circ} 0000101 T^3,$$

$$N = 0,^{\circ} 5567530 T - 0,^{\circ} 0001185 T^2 - 0,^{\circ} 0000116 T^3$$

összefüggések adják, ahol T a J2000,0-tól Julián évszázadban eltelt idő.

A nutációra való korrekciót a képletek bonyolultsága miatt nem ismertetjük. Ezek nagyobb csillagászati évkönyvekben (pl. *Astronomical Almanac*) találhatóak meg.

5. fejezet

A kéttest-probléma

Az égi mechanika alapproblémája az *n*-test probléma: határozzuk meg *n* számú pontszerű test mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak! Mivel a Nap és a bolygók méreteikhez képest egymástól igen távol vannak, ezért jó közelítéssel pontszerűnek tekinthetők. Így az *n*-test probléma jó közelítő modell a bolygók mozgásának meghatározására. A bolygók nem pontszerű voltát, tömegeloszlásuknak a gömbszimmetrikustól való eltérését a bolygókhoz közel keringő holdak, mesterséges holdak mozgásának vizsgálatakor kell csak figyelembe venni.

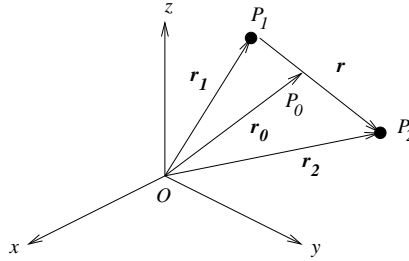
Az *n*-test probléma nevezetes esetei a két- és háromtest-probléma. A *kéttest-probléma* a legegyszerűbb modell a bolygók napkörüli mozgásának meghatározására. Ennek megoldása, a megoldás formalizmusa szolgáltatja az égi mechanika alapösszefüggéseit. A háromtest-problémának a Naprendszerre való alkalmazásakor egy speciális eset, a *korlátozott háromtest-probléma* bizonyult hatékonynak: ebben az egyik test tömege igen kicsi a másik kettőéhez képest. E modell keretében tárgyalható első közelítésben a kis égitestek (pl. aszteroidák) mozgása a nagyobb égitestek (Nap és Jupiter) gravitációs terében.

A bolygók mozgását a Nap körül első közelítésben a kéttest-probléma megoldása alapján írhatjuk le, mivel az egyes bolygók mozgását elsősorban a Nap gravitációs vonzása határozza meg. A mozgások pontos kiszámításához azonban figyelembe kell venni a bolygók egymásra gyakorolt gravitációs hatását is. Ez a *perturbációszámítás* módszereivel végezhető el.

A következőkben a kéttest-probléma megoldásával foglalkozunk.

5.1. Mozgásegyenletek és első integrálok

Vizsgáljuk két pontszerű test, P_1 és P_2 mozgását, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hat! Legyen a testek tömege m_1 és m_2 , helyvektoruk egy $Oxyz$ inerciarendszerben \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 , P_2 relatív helyvektora P_1 -hez képest \mathbf{r} (5.1. ábra)! Nyilván $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.



5.1. ábra.

Írjuk fel a Newton-féle mozgásegyenleteket!

P_1 mozgásegyenlete:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (5.1)$$

P_2 mozgásegyenlete:

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (5.2)$$

ahol a pont a t idő szerinti differenciálást jelenti, k a Gauss-féle gravitációs állandó és $r = |\mathbf{r}|$. Az egyenletek felírásánál felhasználtuk, hogy P_1 -re \mathbf{r} irányú, P_2 -re $-\mathbf{r}$ irányú erő hat.

Az égi mechanikában a vizsgált égitestek nagy távolságai és tömegei miatt célszerű speciális *égi mechanikai mértékegységeket* használni: a hosszúság egysége a csillagászati egység (A), a tömeg egysége a Nap tömege (M_\odot), az idő egysége a középnap (T). Ezekkel az egységekkel

$$k = 0,01720209895 \ A^{3/2} M_\odot^{-1/2} T^{-1}. \quad (5.3)$$

A Nemzetközi Csillagászati Unió határozata szerint a Gauss-állandó abszolút konstans, értéke nem változtatható, ez az érték megegyezik a Gauss (1809) által számítottal. Ebből származtatják a csillagászati egységet: ez egy olyan

körpálya sugara, melyen egy elhanyagolhatóan kis tömegű, pontszerű test egyedül a Nap gravitációs vonzóerejének hatására $2\pi/k$ középnap periódussal kering a Nap körül. Az átlagos Nap–Föld távolság közelítőleg 1 csillagászati egység.

Határozzuk meg az (5.1) és (5.2) egyenlet megoldását! Ehhez írjuk fel először a mozgásegyenletek első integráljait!

(5.1)-et és (5.2)-t összeadva, majd a kapott egyenletet idő szerint kétszer integrálva kapjuk, hogy

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{a}, \quad m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad (5.4)$$

ahol \mathbf{a} és \mathbf{b} konstans vektorok, \mathbf{a} az összimpulzus. A rendszer P_0 tömegközéppontjának helyvektora:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.5)$$

Ezzel az (5.4) egyenletek így írhatók:

$$(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{a}, \quad (m_1 + m_2)\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (5.6)$$

Az (5.6) összefüggések a *tömegközéppont-integrálok*. Ezek azt fejezik ki, hogy a tömegközéppont a kezdőfeltételektől függően nyugalomban van ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$), vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$).

A tömegközéppont-integrálok felhasználásával a kéttest-probléma visszavezethető az *egycentrum-problémára*. Mivel a tömegközéppont vagy nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a Galilei-féle relativitási elv értelmében a P_0 tömegközéppont egy inerciarendszer kezdőpontjának tekinthető. Koordináta-rendszerünk kezdőpontját ide helyezve a mozgásegyenletek továbbra is (5.1), (5.2) alakúak lesznek. A P_0xyz rendszerben azonban

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \quad (5.7)$$

Ezt (5.1)-be és (5.2)-be helyettesítve mindkét egyenlet az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (5.8)$$

egyenletre vezet, ahol

$$\mu = k^2(m_1 + m_2). \quad (5.9)$$

Ugyanerre az egyenletre jutunk, ha P_2 -nek a P_1 -hez viszonyított mozgását vizsgáljuk. (5.2)-ből (5.1)-et kivonva (5.8)-at kapjuk. A relatív és az abszolút mozgások tehát ugyanabból az egyenletből határozhatók meg, e mozgások ezért egymáshoz hasonlóak.

(5.8) az *egycentrum-probléma* mozgásegyenlete. Az egycentrum-problémában rögzített, pontszerű, M tömegű test gravitációs terében mozog egy másik pontszerű, m tömegű test, melyre más erő nem hat. A mi esetünkben $M = m_1 + m_2$, $m = 1$. Ennek megfelelően (5.8)-at olyan egycentrum-problémának tekintjük, melyben P_1 -ben van koncentrálna az $m_1 + m_2$ össztömeg, P_2 pedig egységnyi tömegű. A kéttest-probléma tehát a tömegközéppont-integrálok felhasználásával visszavezethető az egycentrum-problémára, a két probléma egymással ekvivalens.

A továbbiakban elég (5.8) megoldását vizsgálni. Először levezetjük (5.8) első integráljait.

(5.8)-at \mathbf{r} -rel balról vektoriálisan megszorozva kapjuk, hogy $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$. Ezt integrálva

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}, \quad (5.10)$$

ahol \mathbf{c} állandó. (5.10) az *impulzusmomentum-integrál*, \mathbf{c} az egységnyi tömegű test impulzusmomentuma. Komponensekben kiírva (\mathbf{c} derékszögű komponenseit c_x, c_y, c_z -vel jelölve):

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_x, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_y, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_z. \quad (5.11)$$

(5.8)-at $\dot{\mathbf{r}}$ -al skalárisan megszorozva, majd integrálva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = h, \quad (5.12)$$

ahol h állandó. (5.12) az *energiaintegrál*, h a rendszer mechanikai összenergiája.

A tömegközéppont-, az impulzusmomentum-, és az energiaiintegrál adja a kéttest-probléma 10 klasszikus első integrálját. Megjegyezzük, hogy a két test \mathbf{C} összipulzusmomentuma és H összenergiája a tömegegységre vonatkozó \mathbf{c} , h értékekkel a

$$\mathbf{C} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{c}, \quad H = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} h \quad (5.13)$$

összefüggésben van, mint az egyszerűen kiszámítható.

(5.8)-nak egy további (az előzőektől nem független) első integrálja is ismeretes. (5.8)-at jobbról vektoriálisan \mathbf{c} -vel megszorozva, és az $\mathbf{r} \times \mathbf{c}$ vektor-szorzatot (5.10) felhasználásával kifejtve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} &= -\frac{\mu}{r^3}[\mathbf{r} \times \mathbf{c}] = -\frac{\mu}{r^3}[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] = \\ &= -\frac{\mu}{r^3}[(\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}] = \left(\frac{\mu}{r}\right)\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} + \frac{\mu}{r}\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\mu}{r}\dot{\mathbf{r}}\right) \times \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Ezt integrálva átrendezés után kapjuk, hogy

$$-\frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = \boldsymbol{\lambda}, \quad (5.14)$$

ahol $\boldsymbol{\lambda}$ állandó. (5.14) a *Laplace-integrál*, $\boldsymbol{\lambda}$ a *Laplace-vektor*.

A Laplace-integrál komponensekben kiírva 3 első integrált jelent. (5.10), (5.12), (5.14) így összesen 7 első integrált ad a hatodrendű (5.8) egyenletre. A 7 első integrál azonban nem független, közöttük 2 összefüggés írható fel. (5.8)-nak így 5 független első integrálja létezik.

Az első összefüggés levezetéséhez (5.14)-et szorozzuk meg skalárisan \mathbf{c} -vel! Mivel \mathbf{c} merőleges \mathbf{r} -re és $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c}$ -re, következik, hogy

$$\boldsymbol{\lambda} \mathbf{c} = 0, \quad (5.15)$$

vagyis $\boldsymbol{\lambda}$ és \mathbf{c} merőleges egymásra.

A második összefüggés levezetéséhez az

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} = \dot{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r} - (\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} \quad (5.16)$$

összefüggés felhasználásával írjuk (5.14)-et a

$$\boldsymbol{\lambda} = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r} - (\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}$$

alakba! Mindkét oldalt négyzetre emelve:

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \mu^2 + \dot{\mathbf{r}}^4 \mathbf{r}^2 + (\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})^2 \dot{\mathbf{r}}^2 - 2\frac{\mu}{r}\dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}^2 + 2\frac{\mu}{r}(\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})^2 - 2\dot{\mathbf{r}}^2(\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})^2 = \\ &= \mu^2 + \left(\dot{\mathbf{r}}^2 - 2\frac{\mu}{r}\right) [\dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}^2 - (\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}})^2].\end{aligned}$$

(5.12) és (5.16) figyelembevételével

$$\lambda^2 = \mu^2 + 2h(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})\mathbf{r}.$$

Innen (5.10) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\lambda^2 = \mu^2 + 2hc^2. \quad (5.17)$$

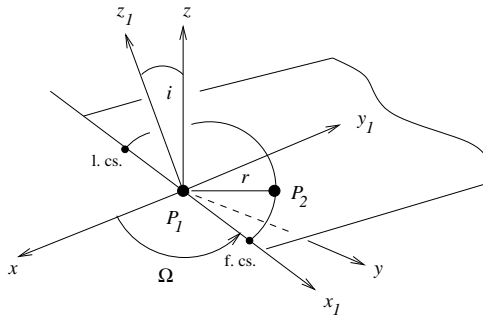
5.2. A mozgás pályájának meghatározása

(5.10) mindkét oldalát \mathbf{r} -rel skalárisan megszorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{r}\mathbf{c} = 0. \quad (5.18)$$

Az \mathbf{r} és \mathbf{c} vektorok tehát egymásra merőlegesek, ha $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Mivel \mathbf{c} állandó, \mathbf{r} mindig a \mathbf{c} -re merőleges síkban van, a mozgás *síkmozgás*. (5.18) a pályasík egyenlete. A $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ esetben (5.10) szerint \mathbf{r} és $\dot{\mathbf{r}}$ azonos, vagy ellentétes irányú, a mozgás *egyenes vonalú*. A továbbiakban csak a $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ esettel foglalkozunk.

Mivel a mozgás egy síkban játszódik le, célszerű a mozgásegyenletek megoldását olyan koordináta-rendszerben vizsgálni, melynek egyik koordináta-síkja a pályasík. A pályasík helyzetét a P_1xyz koordináta-rendszerben a \mathbf{c} vektor egyértelműen meghatározza. Szokás azonban a pályasík helyzetének két szöggel való megadása is. Az egyik szög a *pályahajlás*, jele i , a másik szög a *felszálló csomó hossza*, jele Ω (5.2. ábra). A pályahajlás a pályasíknak a P_1xy síkkal bezárt kisebbik szöge. Ez megegyezik a P_1z tengely és a \mathbf{c} vektor közti kisebbik szöggel. $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$. A felszálló csomó az a pont, melyben P_2 a $z < 0$ tartományból a $z > 0$ tartomány felé haladva metszi a P_1xy síkot. A felszálló csomó hossza a felszálló csomó szögtávolsága a P_1x tengelytől, a P_1z tengely irányából nézve az óramutató járásával ellenkező irányban mérve. $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$. A felszálló csomóval ellentétes értelmű a *leszálló csomó*. A csomópontokon átmenő egyenes a *csomóvonal*. Ez átmegy a P_1 ponton is. A pályasík a P_1xy síkot a csomóvonalban metszi.



5.2. ábra.

Vezessünk be egy olyan $P_1x_1y_1z_1$ koordináta-rendszert, melynek $P_1x_1y_1$ koordináta-síkja a pályasík, P_1x_1 tengelye rajta van a csomóvonalon és P_1 -

ből a felszálló csomó felé mutat, P_1z_1 tengelye a \mathbf{c} -vel megegyező irányú! P_1xyz -ből $P_1x_1y_1z_1$ -et két egymást követő elforgatással kaphatjuk meg: először P_1xyz -t a P_1z tengely körül elforgatjuk Ω szöggel, hogy a P_1x tengely P_1x_1 -be kerüljön, majd tovább forgatjuk a rendszert P_1x_1 körül i szöggel, hogy P_1z átmenjen a P_1z_1 -be. A P_1xyz és $P_1x_1y_1z_1$ koordináta-rendszer közti transzformációs összefüggés a két forgatásnak megfelelően:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Innen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos i \sin \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos i \cos \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

(5.19) első alkalmazásaként határozzuk meg a \mathbf{c} vektor és az i , Ω szögek kapcsolatát! Mivel P_1xyz -ben $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, $P_1x_1y_1z_1$ -ben $\mathbf{c} = (0, 0, c)$, ahol $c = |\mathbf{c}|$, így (5.19)-ből

$$c_x = c \sin i \sin \Omega, \quad c_y = -c \sin i \cos \Omega, \quad c_z = c \cos i. \quad (5.20)$$

Az inverz összefüggések:

$$i = \arctg \frac{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}{c_z}, \quad \Omega = \arctg \left(-\frac{c_x}{c_y} \right). \quad (5.21)$$

Látható, hogy \mathbf{c} egyértelműen meghatározza i -t és Ω -t. Ez utóbbiakból azonban csak a \mathbf{c} irányú egységvektor határozható meg.

A $P_1x_1y_1z_1$ koordináta-rendszerben az (5.8) mozgásegyenlet komponensekben felírva két skaláregyenletre redukálódik, mivel a z_1 komponens azonosan nulla:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\mu}{r^3}x_1, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{\mu}{r^3}y_1. \quad (5.22)$$

(5.10) első két komponense is azonosan nulla, míg a harmadik:

$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = c. \quad (5.23)$$

(5.12) így alakul:

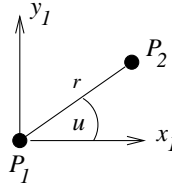
$$\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - \frac{\mu}{r} = h. \quad (5.24)$$

Az (5.22) differenciálegyenlet-rendszer negyedrendű. (5.23) és (5.24) ennek két első integrálja. Mivel ez a két egyenlet egy másodrendű differenciálegyenlet-rendszert alkot, amelyben már két integrációs állandó (c és h) szerepel, a továbbiakban elég ennek a rendszernek az integrálásával foglalkozni, hogy (5.22) négy integrációs állandót tartalmazó általános megoldását megkapjuk.

Az (5.23), (5.24) egyenletek integrálásához célszerű polárkoordinátákat bevezetni. Legyen

$$x_1 = r \cos u, \quad y_1 = r \sin u. \quad (5.25)$$

Az r, u polárkoordináták jelentését az 5.3. ábra mutatja.



5.3. ábra.

Az u szög elnevezése: *szélességi argumentum*. (5.23)-at és (5.24)-et polárkoordinátákra átírva

$$r^2 \dot{u} = c, \quad (5.26)$$

illetve

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2) - \frac{\mu}{r} = h. \quad (5.27)$$

Az (5.26), (5.27) rendszert megoldva, r és u ismeretében P_2 derékszögű x, y, z koordinátáit (5.19) és (5.25) alapján az

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned} \quad (5.28)$$

összefüggések adják.

Az (5.26), (5.27) egyenleteket két lépésben oldjuk meg. Először meghatározzuk a mozgás pályáját, majd vizsgáljuk a mozgás időbeli lefolyását a pálya

mentén. A pálya alakjának meghatározásához (5.27)-ben független változó-
nak vezessük be t helyett u -t! (5.26)-ból

$$\dot{u} = \frac{c}{r^2},$$

így

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \dot{u} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{du} = -\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} \right).$$

Ezt (5.27)-be írva

$$\left[-\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} \right) \right]^2 + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2\mu}{r} + 2h.$$

Innen kis átalakítással (figyelembe véve, hogy $c \neq 0$)

$$-\frac{d}{du} \left(\frac{c}{r} \right) = \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c} \right)^2}.$$

Bevezetve az

$$R = \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}, \quad K = \sqrt{2h + \frac{\mu^2}{c^2}}$$

jelöléseket, innen (felhasználva, hogy μ/c állandó)

$$-\frac{dR}{du} = \sqrt{K^2 - R^2}.$$

Ez az egyenlet a változók szétválasztásával integrálható:

$$-\int \frac{dR}{K \sqrt{1 - \left(\frac{R}{K} \right)^2}} = \int du,$$

$$\arccos \frac{R}{K} = u - \omega,$$

ahol ω integrációs állandó. R és K jelentését felhasználva innen r kifejezhető
 u függvényeként:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (5.29)$$

ahol

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad (5.30)$$

$$e = \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}}, \quad (5.31)$$

$$v = u - \omega. \quad (5.32)$$

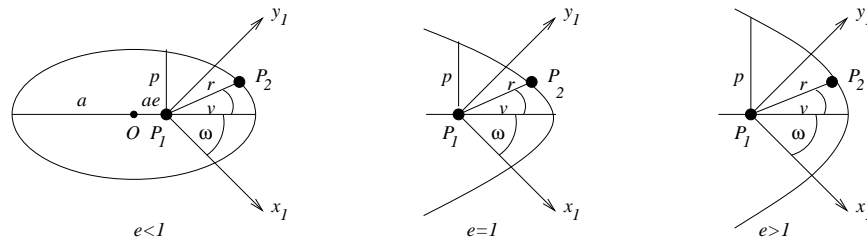
(5.29) egy p paraméterű, e excentricitású kúpszelet fokális egyenlete. A pálya jellegét a h energia határozza meg (5.4. ábra):

ha $h < 0$, akkor $e < 1$, a pálya ellipszis,

ha $h = 0$, akkor $e = 1$, a pálya parabola,

ha $h > 0$, akkor $e > 1$, a pálya hiperbola.

Adott c impulzusmomentum esetén h legkisebb értéke $h = -\mu^2/2c^2$ lehet. Ekkor $e = 0$, a pálya pedig kör.



5.4. ábra.

A v szög elnevezése: *valódi anomália*. $v = 0^\circ$ -nál van a pálya *pericentruma*, $v = 180^\circ$ -nál a pálya *apocentruma*. Előbbihez minimális, utóbbihoz maximális távolság (r_p , illetve r_a) tartozik:

$$r_p = \frac{p}{1 + e}, \quad r_a = \frac{p}{1 - e}. \quad (5.33)$$

Ellipszispálya esetén

$$p = a(1 - e^2), \quad (5.34)$$

ahol a a *fél nagytengely*. (Az összefüggés könnyen levezethető a p paraméter geometriai jelentésének felhasználásával: p a fókuszban a nagytengelyre

merőlegesen állított, és az ellipszisig terjedő szakasz hossza.) Ellipszispálya esetén így

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \quad (5.35)$$

$$r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e). \quad (5.36)$$

Az ω elnevezése: a *pericentrum argumentuma*. (5.32) szerint a pericentrumban $u = \omega$. Mivel u a P_1x_1 tengelytől (a csomóvonaltól) való szögtávolságot jelenti, így ω megadja a pericentrum szögtávolságát, és egyúttal a pálya nagytengelyének irányát a felszálló csomóhoz képest.

5.3. A mozgás időbeli lefolyása

A mozgó test pályamenti helyzetének meghatározásához a v valódi anomáliát kell ismerni az idő függvényében. Ez az (5.26) egyenletből határozható meg. (5.26)-ból (5.32) figyelembevételével

$$r^2 \dot{v} = c. \quad (5.37)$$

Ide r (5.29) alatti kifejezését behelyettesítve, és az egyenletet a változók szerint szétválasztva kapjuk, hogy

$$\int \frac{p^2}{(1 + e \cos v)^2} dv = \int c dt. \quad (5.38)$$

A bal oldal kiintegrálásához v helyett új változót kell bevezetni. Az új változó függ attól, hogy a pálya ellipszis, parabola vagy hiperbola. A következőkben csak az ellipszispálya esetét tárgyaljuk.

Elliptikus mozgás esetén v helyett vezessük be az E *excentrikus anomáliát*. Jelentését az 5.5. ábra mutatja. Ezen megrajzoltuk az ellipszis a sugarú főkörét. A főkörön Q az a pont, melyből merőleges vetítéssel P_2 származtatható. A Q pontot az ellipszis O középpontjával összekötve az O -nál keletkező szög az E excentrikus anomália. Fejezzük ki E -vel az r távolságot és a v valódi anomáliát!

Az 5.5. ábra háromszögei alapján

$$r \cos v = a(\cos E - e), \quad r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \quad (5.39)$$

ahol felhasználtuk, hogy az O középpont és a P_1 fókusz távolsága ae , a merőleges vetítés aránya pedig $\sqrt{1 - e^2}$. E két egyenlet négyzetösszegét képezve, majd gyököt vonva kapjuk, hogy

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (5.40)$$

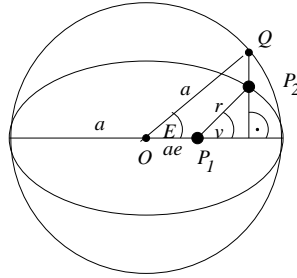
(5.39) és (5.40) alapján képezzük a következő kifejezéseket:

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E),$$

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E).$$

A két egyenlet hányadosát véve, és a félszögek szögfüggvényeire vonatkozó ismert trigonometriai összefüggéseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (5.41)$$



5.5. ábra.

(5.39) első összefüggéséből (5.40) figyelembevételével $\cos v$ -t kifejezve

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}.$$

Ezt E szerint differenciálva, majd $\sin v$ -t szintén (5.39), (5.40)-ból E függvényeként kifejezve kapjuk, hogy

$$\frac{dv}{dE} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}. \quad (5.42)$$

Elliptikus mozgás esetén (5.30) és (5.34) szerint

$$c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \quad (5.43)$$

(5.40), (5.42) és (5.43) figyelembevételével (5.37)-ből kapjuk, hogy

$$\int (1 - e \cos E) dE = \int \mu^{1/2} a^{-3/2} dt.$$

Innen

$$E - e \sin E = n(t - \tau), \quad (5.44)$$

ahol

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}, \quad (5.45)$$

τ pedig integrációs állandó. (5.44) a *Kepler-egyenlet*. Az elliptikus mozgás időfüggése a Kepler-egyenlet segítségével határozható meg.

Ha $t = \tau$, (5.44) szerint $E = 0$. (5.41) szerint ez $v = 0$ -nak, azaz a pericentrumnak felel meg, τ ezért a *pericentrum-átmenet időpontja*.

Legyen T a pályamenti keringési idő! Ennyi idő alatt E értéke 2π -vel növekszik. (5.44)-et $t + T$ -re felírva, és az így kapott egyenletet (5.44)-gyel összevetve következik, hogy

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (5.46)$$

Így n az átlagos pályamenti szögsebességként értelmezhető, elnevezése: *középmozgás*.

Az

$$M = n(t - \tau) \quad (5.47)$$

jelölés bevezetésével, ahol M a *középanómália*, a Kepler-egyenlet az

$$E - e \sin E = M \quad (5.48)$$

alakban írható. A Kepler-egyenlet megoldásakor a feladat az, hogy adott M -hez keressük E -t. A Kepler-egyenlet azonban transzcendens, így E -t az M függvényeként véges formában megadni nem lehet. Ennek következménye az, hogy a *kéttest-probléma elliptikus esetének az idő függvényeként zárt alakú megoldása nem létezik*. Ez sok nehézséget okoz, különösen a perturbációs számításban. Megadható azonban a Kepler-egyenlet megoldása az M többszörösei szerint haladó Fourier-sor formájában (a levezetést itt nem részletezzük):

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM, \quad (5.49)$$

ahol $J_k(ke)$ az elsőfajú, k -adrendű, ke argumentumú *Bessel-függvény*.

A gyakorlatban a Kepler-egyenletet iterációval oldják meg. Mivel

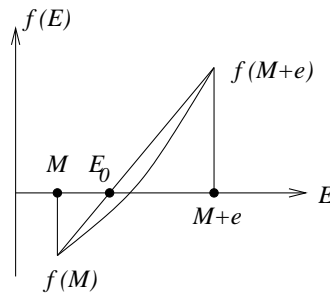
$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E > 0$$

ha $e < 1$, így M az E -nek szigorúan monoton növekvő függvénye. Ez fordítva is igaz, így minden M -hez egy és csak egy E érték tartozik, a megoldás egyértelmű. Kis e esetén az iteráció kezdőértékének $E_0 = M$ vagy $E_0 = M + e$ vehető. Minden $e < 1$ -re és $0 \leq M \leq \pi$ -re jó kezdőértéket ad a *Smith-formula*:

$$E_0 = M + e \frac{\sin M}{1 - \sin(M + e) + \sin M}. \quad (5.50)$$

Ennek levezetése azon alapul, hogy a szigorúan monoton növekvő $f(E) = E - e \sin E - M$ függvényre $f(M) < 0$, $f(M + e) > 0$, így $f(E)$ zéróhelye M és $M + e$ közé esik, amit jól közelít a függvény e két pontját összekötő húrnak az E tengellyel való metszéspontja (5.6. ábra). Ebből a kezdőértékből kiindulva a Kepler-egyenlet megoldását például a Newton-féle iterációs módszerrel kaphatjuk meg:

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E_i - M}{1 - e \cos E_i}, \quad i \geq 0. \quad (5.51)$$



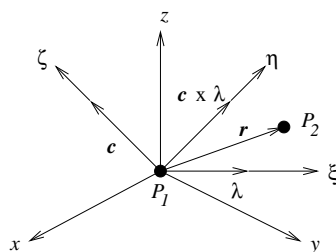
5.6. ábra.

A Kepler-egyenletet megoldva, E ismeretében v az (5.41) összefüggésből számítható ki.

5.4. A hely- és sebességkoordináták kiszámítása

Ismerve v -t, (5.35)-ből r , (5.32)-ből u , majd (5.28)-ból az x, y, z koordináták kiszámíthatók. Az (5.28) összefüggéseket új, pályasíkbeli ξ, η derékszögű koordináták bevezetésével a számítások elvégzésére előnyösebb alakban lehet írni.

Vezessünk be egy $P_1\xi\eta\zeta$ (jobb sodrású, derékszögű) koordináta-rendszert, melynek $P_1\xi$ tengelye $\boldsymbol{\lambda}$ -val, $P_1\zeta$ tengelye \boldsymbol{c} -vel megegyező irányú (5.7. ábra)! A $P_1\xi\eta$ sík megegyezik a pályasíkkal, a $P_1\eta$ tengely $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\lambda}$ -val egyirányú.



5.7. ábra.

A P_1xyz és $P_1\xi\eta\zeta$ koordináta-rendszerek közti transzformációs összefüggések:

$$\xi = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} \boldsymbol{r}, \quad \eta = \frac{\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\lambda}}{c\lambda} \boldsymbol{r}, \quad \zeta = \frac{\boldsymbol{c}}{c} \boldsymbol{r}. \quad (5.52)$$

A pályasíkbeli $P_1\xi, P_1\eta$ tengelyek elhelyezkedését a pályához képest (5.52) első összefüggése, valamint a Laplace-integrál alapján állapíthatjuk meg. (5.14)-et \boldsymbol{r} -rel skalárisan megszorozva, (5.10) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$-\mu r + c^2 = \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{r}.$$

(5.52) első összefüggését felhasználva

$$\mu r + \lambda \xi = c^2.$$

Innen átrendezéssel

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda \xi}{\mu r}}. \quad (5.53)$$

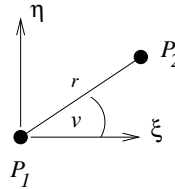
Itt (5.30) szerint $c^2/\mu = p$, (5.17) és (5.31) szerint pedig

$$\frac{\lambda}{\mu} = e. \quad (5.54)$$

(5.53)-at (5.29)-cel összevetve így következik, hogy $\xi/r = \cos v$. A valódi anomália jelentését figyelembe véve így megállapítható, hogy a $P_1\xi$ tengely a pálya nagytengegyébe esik, iránya pedig a pericentrum felé mutat. Mivel $P_1\xi$ a λ -val megegyező irányú, (5.54)-et is figyelembe véve a Laplace-vektorról két fontos megállapítás tehető: a Laplace-vektor a pericentrum felé mutat, hossza pedig az excentricitással arányos.

Mivel $P_1\eta$ merőleges $P_1\xi$ -re, így $\eta = r \sin v$. Összefoglalva, a pályasíkbeli ξ, η derékszögű koordináták (5.8. ábra):

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v. \quad (5.55)$$



5.8. ábra.

Az (5.28) egyenletek (5.32) és (5.55) felhasználásával egyszerű átalakítások révén átírhatók a következő alakba:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\
 P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\
 P_z &= \sin \omega \sin i, \\
 Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\
 Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\
 Q_z &= \cos \omega \sin i.
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Mivel az (5.57) kifejezések értéke a mozgás során nem változik, elég ezeket egyszer kiszámítani, így (5.56) alkalmazásakor már csak ξ és η értékét kell a vizsgált időpontokban meghatározni.

(5.56)-ot az idő szerint differenciálva a sebességkomponensek kiszámítására kapunk egyszerű összefüggéseket:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}. \tag{5.58}$$

A $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ sebességeket (5.55) differenciálásával, és az (5.29), (5.30), (5.37) összefüggések figyelembevételével kaphatjuk meg:

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos v). \tag{5.59}$$

Az (5.52) és az (5.56) összefüggések nyilvánvalóan kapcsolatban vannak egymással. E kapcsolat megvilágításához vezessük be a $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$, $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$ vektorokat! Könnyen igazolható, hogy $|\mathbf{P}|^2 = 1$, $|\mathbf{Q}|^2 = 1$, $\mathbf{P}\mathbf{Q} = 0$. (5.56)-ból ezért

$$\begin{aligned}
 \xi &= xP_x + yP_y + zP_z = \mathbf{r}\mathbf{P}, \\
 \eta &= xQ_x + yQ_y + zQ_z = \mathbf{r}\mathbf{Q}.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Ezeket az egyenleteket (5.52)-vel összevetve kapjuk, hogy

$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\mathbf{c} \times \boldsymbol{\lambda}}{c\lambda}. \tag{5.61}$$

Az (5.61) összefüggések lehetővé teszik $\boldsymbol{\lambda}$ és \mathbf{c} ismeretében a pericentrum argumentumának kiszámítását. (5.57) első két egyenletéből és (5.61) első összefüggéséből levezethető, hogy

$$\sin \omega = \frac{-\lambda_x \sin \Omega + \lambda_y \cos \Omega}{\lambda \cos i}, \quad \cos \omega = \frac{\lambda_x \cos \Omega + \lambda_y \sin \Omega}{\lambda}. \quad (5.62)$$

(5.20) alapján itt

$$\sin \Omega = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \quad \cos \Omega = -\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \quad \cos i = \frac{c_z}{c}. \quad (5.63)$$

5.5. A pályaelemek

A hely- és sebességkoordinátákat megadó (5.56), (5.58) összefüggések alkalmazásához ismerni kell bizonyos, a pályára jellemző adatokat, a *pályaelemeket*. A pályaelemek a következők:

- a = fél nagytengely,
- e = excentricitás,
- i = pályahajlás,
- ω = a pericentrum argumentuma,
- Ω = a felszálló csomó hossza,
- τ = a pericentrum-átmenet időpontja.

A pályaelemek száma hat, mert az egycentrum-probléma differenciálegyenlet-rendszere hatodrendű. Ennek általános megoldásában hat tetszőleges állandónak kell szerepelnie. A pályaelemek az integrációs állandókat helyettesítik, a pályaelemekkel a megoldás egyszerűbben fejezhető ki. A pályaelemek az integrációs állandókkal kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban vannak, illetve a pályaelemek közül ω és τ maga is integrációs állandó. Az integrációs állandókhöz hasonlóan a pályaelemek is állandók a kéttest-problémában. A pályaelemek közül az első öt geometriai adat, a pálya méretét (a), alakját (e) és térbeli helyzetét (i , ω , Ω) jellemzik. A hatodik pályaelem időadat (τ), a mozgás dinamikájával van kapcsolatban.

A pályaelemek az integrációs állandókból kiszámíthatók. Az e , i , Ω , ω esetében a megfelelő összefüggéseket – (5.31), (5.21), (5.62) – már levezettük. A következőkben a és τ kiszámítását tárgyaljuk.

Az (5.31) összefüggésből c^2 -et (5.30) felhasználásával kiküszöbölve, és az így adódó egyenletből p -t kifejezve kapjuk, hogy

$$p = -\frac{\mu}{2h}(1 - e^2). \quad (5.64)$$

Elliptikus mozgás esetén p -t (5.34) adja. Ezt (5.64)-be helyettesítve az

$$a = -\frac{\mu}{2h} \quad (5.65)$$

összefüggéshez jutunk. A fél nagytengelyt tehát az energia egyedül meghatározza. Megjegyezzük, hogy hiperbolikus mozgás esetén

$$p = a(e^2 - 1). \quad (5.66)$$

(5.64)-ből a fél nagytengely ekkor

$$a = \frac{\mu}{2h}. \quad (5.67)$$

Az egycentrum-probléma 7 első integrálja $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}, h)$ közül 5 független. Ez az 5 állandó meghatározza az 5 geometriai pályaelemet. A hatodik pályaelem, τ , a mozgás kezdőfeltételeiből számítható ki. Ehhez levezetünk egy hasznos összefüggést, ellipszispálya esetére. (5.55) és (5.59) felhasználásával

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = re\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v.$$

De (5.29)-ből és (5.37)-ből

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v.$$

Így

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}. \quad (5.68)$$

Másfelől (5.40) és (5.44) felhasználásával

$$\dot{r} = ae \sin E \dot{E} = ae \sin E \frac{n}{1 - e \cos E} = \frac{na^2 e \sin E}{r}.$$

Innen

$$r\dot{r} = na^2 e \sin E. \quad (5.69)$$

(5.68)-ből és (5.69)-ből

$$\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = na^2 e \sin E. \quad (5.70)$$

(5.40)-ből és (5.70)-ből

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}, \quad \sin E = \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{na^2 e}. \quad (5.71)$$

A kezdő hely- és sebességvektor ismeretében az (5.71) összefüggésekből a kezdeti időponthoz tartozó E egyértelműen kiszámítható, ezután τ a Kepler-egyenletből meghatározható.

Megemlítjük, hogy az eddigieken túl szokás néhány más pályaelem használata is. Kis pályahajlás esetén ω helyett

$$\varpi = \omega + \Omega \quad (5.72)$$

használata célszerű. ϖ a *pericentrum-hosszúság* (a gyakorlatban például perihélium-hosszúság). ϖ előnye, hogy $i \rightarrow 0$ esetén ϖ véges határértékhez tart, míg az $i = 0$ határesetben ω , Ω értelmét veszti.

Kis excentricitás esetén τ helyett a középanomália egy adott kezdeti időponthoz tartozó értékét használják. Legyen

$$M = n(t - t_0) + M_0. \quad (5.73)$$

M_0 a t_0 epochához tartozó középanomália. M_0 előnye, hogy a t_0 időpont tetszőleges lehet, és így nincs kötve a perihéliumhoz, ami $i = 0$ esetén értelmét veszti.

5.6. A Kepler-törvények

A bolygómozgások törvényeit J. Kepler fogalmazta meg (1609, 1619). Összefüggéseit tapasztalati úton állította fel. Nézzük meg, hogy a kétttest-probléma megoldásából hogyan következnek a Kepler-törvények!

Kepler 1. törvénye szerint a bolygók a Nap körül ellipszispályákon keringenek, melyek egyik fókuszában a Nap található.

A kétttest-probléma megoldása ennél általánosabb: a mozgás pályája az energiától függően valamilyen kúpszelet alakú pálya lehet. A bolygók esetében h negatív, így a bolygók pályája ellipszis. Az üstökösök azonban parabola és hiperbola alakú pályákon is mozoghatnak.

Kepler 2. törvénye szerint a vezérsugár (a bolygókat a Nappal összekötő szakasz) az idővel arányos területet sűrol.

Másképp megfogalmazva, a felületi sebesség állandó. Az (5.37) összefüggés éppen ezt mondja ki, hiszen $r \cdot r\dot{\nu}/2$ a felületi sebesség. (A c állandót a tömegegységre vonatkozó impulzusmomentum abszolút értékeként definiáltuk, számértékét tekintve azonban c megegyezik a felületi sebesség kétszeresével.)

Kepler 3. törvénye szerint a bolygók Naptól számított távolságainak harmadik hatványai úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.

Az (5.45), (5.46) és (5.9) összefüggésekből következik, hogy

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k^2(m_1 + m_2)}{4\pi^2}. \quad (5.74)$$

Ez az összefüggés többet mond, mint a 3. Kepler-törvény. Egyrészt kiderül belőle, hogy mi az a konstans, amivel a fél nagytengely köbének és a keringési idő négyzetének a hányadosa egyenlő, másrészt látható, hogy ez a konstans a bolygók tömegétől függően bolygónként kis mértékben különböző (m_1 a Nap, m_2 a bolygó tömege). A 3. Kepler-törvény tehát a Kepler által megfogalmazott formában szigorúan nem érvényes, csak közelítő jellegű. Az égi mechanikában a 3. Kepler-törvényen mindig a pontos (5.74) összefüggést értik. Szokás ezt az alábbi formában is felírni:

$$n^2 a^3 = \mu. \quad (5.75)$$

A 3. Kepler-törvény lehetőséget ad kísérővel rendelkező égitestek tömegének meghatározására. (5.74)-et például egy Nap–bolygó, bolygó–hold rendszerre páronként alkalmazva, és a felírt összefüggések hányadosát képezve kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^3 \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{m + m'}{m_0 + m} \approx \frac{\frac{m}{m_0}}{1 + \frac{m}{m_0}}, \quad (5.76)$$

ahol a vesszőtlen mennyiségek a bolygó, a vesszős mennyiségek a bolygó holdjának adatai, m_0 a Nap tömege. A keringési idők és a fél nagytengelyek mérésével az m/m_0 tömegarány (5.76)-ból meghatározható.

5.7. Efemerisz-számítás

Összefoglaljuk az eddig megismert összefüggéseket, melyeken az égitestek efemerisz-számítása alapul.

Adott két test, P_1 és P_2 , tömegük m_1 és m_2 . Legyen P_2 hely- és sebességvektora a P_1xyz koordináta-rendszerben a t_0 időpontban \mathbf{r}_0 és $\dot{\mathbf{r}}_0$! Határozzuk meg P_2 -nek az \mathbf{r} hely- és $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektorát egy másik t időpillanatban!

A megoldás során először kiszámítjuk μ -t:

$$\mu = k^2(m_1 + m_2),$$

ahol k a Gauss-féle gravitációs állandó.

Ezután kiszámítjuk az integrációs állandókat:

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0, \\ h &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_0^2 - \frac{\mu}{r_0}, \\ \boldsymbol{\lambda} &= -\frac{\mu}{r_0} \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \times \mathbf{c}.\end{aligned}$$

Az integrációs állandókból kiszámítjuk a pályaelemeket:

$$\begin{aligned}a &= -\frac{\mu}{2h}, \\ e &= \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}}, \\ \cos i &= \frac{c_z}{c}, \\ \sin \Omega &= \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \quad \cos \Omega = -\frac{c_y}{\sqrt{c_x^2 + c_y^2}}, \\ \sin \omega &= \frac{-\lambda_x \sin \Omega + \lambda_y \cos \Omega}{\lambda \cos i}, \quad \cos \omega = \frac{\lambda_x \cos \Omega + \lambda_y \sin \Omega}{\lambda}.\end{aligned}$$

(Mivel $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$, a $\cos i = c_z/c$ összefüggésből i egyértelműen megállapítható. Ω és ω azonban 0° és 360° közé esik, így értékük csak $\sin \Omega$, $\cos \Omega$, illetve $\sin \omega$, $\cos \omega$ ismeretében határozható meg.)

A hatodik pályaelem, τ kiszámításához szükség van a középmozgásra:

$$n = \mu^{1/2} a^{-3/2}.$$

Ezután

$$\begin{aligned}\sin E_0 &= \frac{\mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{r}}_0}{na^2e}, \quad \cos E_0 = \frac{a - r_0}{ae}, \\ \tau &= t_0 - \frac{1}{n}(E_0 - e \sin E_0).\end{aligned}$$

Következik a \mathbf{P} , \mathbf{Q} mennyiségek kiszámítása:

$$P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$P_y = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i,$$

$$P_z = \sin \omega \sin i,$$

$$Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i,$$

$$Q_y = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i,$$

$$Q_z = \cos \omega \sin i.$$

Szükség van a p paraméterre is:

$$p = a(1 - e^2).$$

Ezután az adott t időpontra az \mathbf{r} , $\dot{\mathbf{r}}$ vektorokat a következő összefüggések adják:

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v,$$

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos v),$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}.$$

A számítások során a Kepler-egyenlet megoldására iterációs eljárást kell alkalmazni (vagy valamilyen végtelen sor alakú megoldást kell használni).

Tartalomjegyzék

1. fejezet. Csillagászati koordináta-rendszerek	3
1.1. Földrajzi koordináták	3
1.2. Az éggömb	9
1.3. A horizontális koordináta-rendszer	10
1.4. Az első egyenlítői koordináta-rendszer	12
1.5. A második egyenlítői koordináta-rendszer	14
1.6. Az ekliptikai koordináta-rendszer	15
1.7. A galaktikai koordináta-rendszer	16
1.8. A nemzetközi égi vonatkoztatási rendszer	18
1.9. A csillagok látszólagos mozgása az égen	20
1.10. A Nap látszólagos mozgása	21
1.11. Összefoglalás	25
2. fejezet. Az idő	27
2.1. Bevezetés	27
2.2. A csillagidő	28
2.3. A szoláris idő	30
2.4. Az efemerisz idő	36
2.5. Az atomidő	38
2.6. A zónaidő	40
2.7. A naptár	42
2.8. Összefoglalás	46
3. fejezet. Koordináták közötti átszámítások	49
3.1. Horizontális és egyenlítői koordináták	49
3.2. Égitestek kelése és nyugvása	51
3.3. Csillagászati földrajzi helymeghatározás	58
4. fejezet. Csillagászati megfigyelések redukciója	61
4.1. A refrakció	61
4.2. Az aberráció	66
4.3. A parallaxis	70
4.4. A precesszió	76
5. fejezet. A kéttest-probléma	81
5.1. Mozgásegyenletek és első integrálok	82
5.2. A mozgás pályájának meghatározása	86

5.3. A mozgás időbeli lefolyása	91
5.4. A hely- és sebességkoordináták kiszámítása	95
5.5. A pályaelemek	98
5.6. A Kepler-törvények	100
5.7. Efemerisz-számítás	101