

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков,  
А.Р.Зильберман, П.А.Кожевников,  
В.В.Козлов, С.П.Коновалов, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, В.В.Можаев, В.В.Произволов,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко,  
В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров,  
В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

© 2006, Президиум РАН,  
Фонд Осипяна, «Квант»

- 2 Виталию Лазаревичу Гинзбургу – 90 лет  
4 Не надо бояться «детских» вопросов. *В.Захаров*  
10 Возрождение «бесполезных» чисел. *Л.Шибасов*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 14 Урбен Лаверье. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2011–М2020, Ф2018–Ф2027  
17 Решения задач М1991–М1995, Ф2003–Ф2012

К М Ш

- 23 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
2005/06 учебного года  
24 Задачи  
25 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
25 Дополняй и властвуй. *П.Самовол, М.Апельбаум, А.Жуков*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 28 Как Студент думал Землю остановить. *А.Стасенко*  
29 Электрические машины и выбор режима. *Г.Бакунин*  
30 Фокус шара. *Д.Викторов*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Зрительные иллюзии

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 34 На лифте в... заоблачные дали. *П.Беномар, А.Буров*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 36 Закон электромагнитной индукции. *В.Дроздов*  
39 Функциональные уравнения и неравенства. *Г.Фалин, А.Фалин*

ИНФОРМАЦИЯ

- 45 Летние физико-математические школы в Поволжье

ОЛИМПИАДЫ

- 46 XXXII Всероссийская олимпиада школьников по математике  
49 XL Всероссийская олимпиада школьников по физике  
54 XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада школьников  
55 Международный турнир «Компьютерная физика»  
58 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I К 90-летию *В.Л.Гинзбурга*  
II Коллекция головоломок  
III Шахматная страничка  
IV Физики и математики на монетах мира

# Виталию Лазаревичу Гинзбургу – 90 лет

*4 октября 2006 года исполнилось 90 лет выдающемуся российскому ученому, лауреату Нобелевской премии по физике, академику Российской академии наук Виталию Лазаревичу Гинзбургу.*

*Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют Виталия Лазаревича с юбилеем и желают ему здоровья и новых успехов в его любимой физике.*

Виталий Лазаревич Гинзбург – один из немногих физиков-универсалов, работающих в разных областях теоретической физики. Им опубликовано более 450 научных работ и десятки книг. К наиболее существенным результатам его исследований относятся теория частиц со спином  $3/2$ , квантовая теория эффекта Вавилова–Черенкова, работы в областях кристаллооптики, сегнетоэлектричества, теоретической радиофизики, теории волн в плазме, астрофизики, теории сверхпроводимости (теория Гинзбурга–Ландау), космологии. Работы по теории сверхпроводимости в 1966 году были удостоены Ленинской премии, а в 2003 году – Нобелевской премии. В.Л.Гинзбург награжден многими орденами нашей страны, имеет награды академии наук. Среди них премия им. Л.И.Мандельштама, премия им. М.В.Ломоносова, Золотая медаль им. С.И.Вавилова, Большая Золотая медаль им. М.В.Ломоносова РАН. В.Л.Гинзбург избран членом 10 зарубежных академий наук, в том числе Лондонского Королевского общества, Американской национальной академии, Европейской академии, он является лауреатом многих международных научных премий.

Всю свою жизнь Виталий Лазаревич работает в Физическом институте им.П.Н.Лебедева РАН, десятки лет он возглавлял общемосковский семинар по теоретической физике – широко известный «Семинар Гинзбурга». В.Л.Гинзбург – главный редактор одного из самых престижных

научных журналов – журнала «Успехи физических наук». С 1968 года Виталий Лазаревич заведует кафедрой проблем физики и астрофизики в Московском физико-техническом институте. Воспитанию молодых физиков-теоретиков и пропаганде физической науки В.Л.Гинзбург уделяет очень большое внимание. Широко известна, например, его большая статья «Какие проблемы физики и астрофизики представляются особенно важными и интересными в начале 21-го века?» (последний вариант этой статьи содержится в книге В.Л.Гинзбурга «О науке, о себе и о других»). Это, по существу, обзор нынешнего состояния физики и астрофизики и программа исследований на ближайшие годы. Виталий Лазаревич Гинзбург много лет является членом редколлегии «Библиотечки «Квант», неоднократно его статьи публиковались и на страницах нашего журнала. В 2006 году вышли две новые книги В.Л.Гинзбурга. Одна из них – «О сверхпроводимости и сверхтекучести. Автобиография», в этой книге есть и Нобелевская лекция автора. Другая книга – «Сверхпроводимость» – написана совместно с его сотрудником Е.А.Андрюшиным. Это увлекательный рассказ о физике низких температур, сверхпроводимости и сверхтекучести. Ниже мы воспроизводим (с небольшими сокращениями) обращение к читателям этой книги, написанное В.Л.Гинзбургом.

## К читателю

Как бы мне хотелось передать Вам, уважаемый читатель, свой интерес к тому, как устроен мир! Я вообще считаю себя счастливым человеком – всю жизнь занимался тем, что считал важным и интересным – наукой, физикой. Уже несколько раз рассказывал на встречах с молодыми людьми, как это получалось. Слушали меня всегда с интересом.

Мои школьные годы пришлось на самый, видимо, неудачный период советского среднего образования. От старой школы (гимназий и т.п.) остались здания и отдельные преподаватели. А в остальном царил хаос. В 1931 году, когда я кончил семилетку, на ней все и обрывалось, девятилетки были упразднены, дальше полагалось идти в фабрично-заводские училища.

Интерес к физике появился уже тогда, и твердо, хотя я и не знаю почему. Очень мне нравилась научно-популярная книга О.Д.Хвольсона «Физика наших дней».

Устроился на работу сначала препаратором, затем лаборантом в лабораторию одного института. В 1933 году был первый «свободный» (т.е. по конкурсу, а не по путевкам) набор на физфак МГУ. Три месяца усиленно готовился с учителями и только так прошел курс за 8, 9 и 10 классы. Поступил со второго раза, но сразу на второй курс после года заочного. В общем, формально я подготовился, но я убежден, что отсутствие хорошей, нормальной школы самым отрицательным образом сказалось на мне. Если хороший школьник решает 1000 задач по тригонометрии, 1000 задач по логарифмированию, вырабатывает определенный автоматизм, то у меня за плечами было всего 10 или 100 задач, мне это потом мешало. Вспоминаю в этой связи разговор с известным физиком Г.С.Гореликом. Он очень хорошо писал и на мой вопрос: «Почему вы так хорошо пишете?» – ответил вопросом: «Сколько раз в неделю вы писали в школе сочинения?» Я ответил, что раз в две недели, точно не помню. На это Г.С. мне заметил, что он учился в Швейцарии и сочинения писал каждый день.

После окончания физфака в 1938 году меня рекомендовали в аспирантуру, однако раньше аспирантура давала отсрочку от призыва в армию, а тогда уже возникли трудности. В конце концов я оказался одним из последних, кому такую отсрочку дали. А в сентябре 1938 года, когда вопрос о призыве еще висел в воздухе, заниматься рутинной экспериментальной работой, сидеть в темной комнате и гонять насос, естественно, не хотелось и было ни к чему. Вот я и стал пытаться объяснить возможность того эффекта асимметрии, которым занимался (мой диплом был посвящен различию интенсивности излу-

шей работой – исследованиями в области физики. Далеко не всем даже талантливым людям это удалось – кто сгинул в лагерях, кто погиб во время войны, кто просто не вписался в советскую действительность. На фоне истории нашей страны в XX столетии моя собственная история выглядит как весьма удачная. Это везение сыграло немалую роль в том, что я стал физиком-теоретиком, причем довольно известным и преуспевающим. Под последним я имею в виду не то, что я стал членом-корреспондентом (1953), потом академиком (1966), лауреатом (Ленинской и Государственной премий) и т.п. Все это



ния каналовых лучей вдоль луча и в противоположном направлении). И пришла такая мысль. Если разложить поле налетающего иона на плоские волны, то эти волны могли бы, казалось, играть ту же роль, что и световые волны, а значит, вызывать индуцированное испускание. Поэтому в направлении движения налетающего иона возбужденный атом за счет индуцированного излучения должен излучать больше, чем в противоположном направлении. Не буду объяснять подробнее. С этой идеей я подошел к И.Е.Тамму, кажется, 13 сентября – он работал в ФИАНе и читал у нас на физфаке лекции. Мне удалось изложить ему свою идею, и с этого для меня началась новая жизнь. Сама идея оказалась неверной, зато Игорь Евгеньевич поддержал меня, позволил поверить в свои силы.

Считаю, что мне повезло – я потом ушел работать в ФИАН, а не остался на физфаке, где меня считали учеником «реакционных» профессоров. Повезло, что после войны привлекли к работе над атомной бомбой, только потому избежал зачисления в космополиты. Повезло, что всю жизнь занимался интересней-

достаточно условно, иногда даже полные ничтожества добиваются формально многого. А вот научные результаты – другое дело, это нечто объективное. И здесь я считаю, что получил ряд важных и довольно высокого класса результатов: в области сверхпроводимости, сверхтекучести, сегнетоэлектричества, эффекта Вавилова–Черенкова и переходного излучения, радиоастрономии, происхождения космических лучей, рассеяния света. Полагаю, что и Нобелевская премия (2003) это отражает, хотя она присуждена за исследования в области именно сверхпроводимости. Я вообще считаю, что с историей присуждения Нобелевских премий стоит познакомиться всем, кто интересуется историей получения и признания научных результатов (значение этого события не следует, однако, переоценивать).

Я очень рекомендую всем, кто собирается избрать науку сферой своей деятельности, всячески расширять свой кругозор и не замыкаться в узкой специальности.

И остается только пожелать читателям всяческих благ и успехов.

# Не надо бояться «детских» вопросов

**В. ЗАХАРОВ**

*У будущего грустные глаза.  
И нужно замолчать. Но трудно, трудно...<sup>1</sup>*

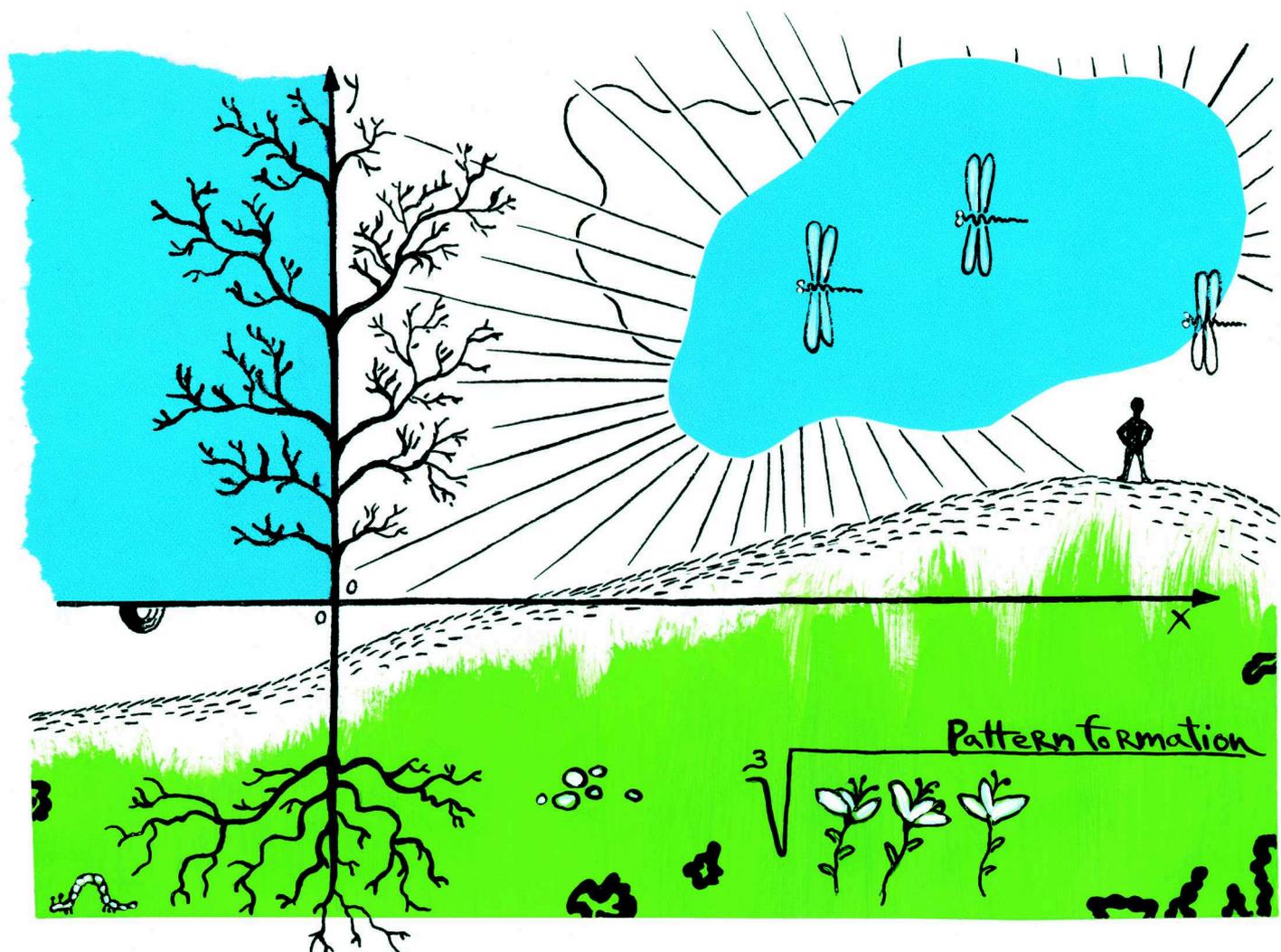
**Г**ЛУБОКО В ПАМЯТИ СПРЯТАНЫ МЛАДЕНЧЕСКИЕ впечатления. Первое мое чувственное ощущение связано с прохладой и свежестью речной воды. Рассказывают, что я немедленно закричал: «Мама, подлей горячей».

Мы жили в Леспромхозе в Татарии. Вокруг тревожащее мое воображение леса. Там можно заблудиться,

там волки. Не пуганные охотниками, в те сороковые они сильно расплодились. Об этом говорили взрослые. Еще много говорили о Сталинградской битве, что теперь война скоро кончится. Отец был на фронте. Его возвращение я встретил спокойно – ведь я его никогда не видел раньше.

В семье – настоящий культ поэзии и науки. Мама, преподаватель биологии, всю жизнь писала стихи. Сочинял поэтические строки и старший брат. Стихи звучали в нашем доме всегда. Я не помню себя, не

<sup>1</sup> Здесь и далее стихи В.Захарова. (Прим. ред.)



знающего блоковской «Незнакомки». Мама напевала эти строки вместо колыбельной. Пушкин, Некрасов, Есенин, символисты... Вот Тютчева моя разночинная семья не знала. К имени же Ахматовой относились с большим уважением.

Писать стихи сам я стал исключительно из зависти к старшему брату. У него же получается – должно выйти и у меня. В восемь лет написал стихи о Сталине, сплошь состоящие из чужих расхожих слов. Я продолжал сочинять, но скоро понял, что победить брата не смогу. Становилось все труднее. Известен эффект: чем больше погружаешься в мир поэзии, тем строже становятся критерии и строже оцениваешь свои строки. Писать всерьез я стал только после двадцати и в свою первую книгу ранние стихи не включил.

В какой-то момент я понял глубокое различие науки и поэзии. В науке все, что делаю я, сможет и другой. Докажу я какую-то теорему, но, возможно, она уже доказана, а если и не доказана, то через некоторое время это все-таки случится. Человеческие же личности настолько различны, что произведения, написанные одним поэтом, не могут быть созданы другим. Это как отпечатки пальцев. Моя поэзия – это тот способ, которым я вижу, это тот глаз, тот мир, который я вижу, это то, что существует только во мне. Если я не передам его, этот мир, он исчезнет. И все. Он никогда не будет существовать. А если выражу его, то он приобретет черты некоего вечного бытия. И я взялся за перо. Писал стихи, эссе, только не прозу. Она, мне кажется, еще сильнее отличается от науки.

Детские опыты бывают у всех, а вот потребность в серьезной работе пришла достаточно поздно. Долгое время я был убежден, что стану химиком. Лет в одиннадцать-двенадцать я уже обустроил большую химическую лабораторию, все свои карманные деньги тратил на нее. Читал учебники по химии, научно-популярные книги. Делал опыты, иногда весьма рискованные. Пытался, например, изготовить глицерин самостоятельно. Мама выписывала журнал «Природа». Я мало что в нем понимал, но химическая терминология завораживала. Проявлял изобретательность. У меня не хватало азотной кислоты, а серную кислоту можно было достать – она продавалась под видом купоросного масла. Черный порошок можно было купить без охотничьего билета, стоил он дешево. Но вид его внушал подозрение – он состоял из каких-то чешуек. Если смесь серы и черного пороха залить серной кислотой и сделать разогрев... Когда я засадил все это в колбу и поставил на спиртовку, то так громынуло... Мамины гардины были испорчены навек.

Влюбленность в химию продолжалась еще долго. Но однажды жизнь моя перевернулась. Я зашел в городскую детскую библиотеку. Мы недавно переехали в Смоленск, мне не было еще четырнадцати. Я взял с полки книгу Сергея Боброва о математике для детей.<sup>2</sup> Я читал ее со страстью, с пылающими от возбуждения

щеками. Вот оно! Я буду математиком! Книга мне показалась бесконечно интересной. Она была написана странно, причудливо. Там были математические задачи, художественные рассказы, стихи – словом, был таинственный момент слияния математики и поэзии. И это сыграло в моей жизни решающую роль.

Книга была роскошно издана. В толстом переплете. С прекрасными иллюстрациями. Много лет спустя, перечитывая Пастернака, я нашел посвящение Сергею Боброву. Он входил вместе с Пастернаком в группу «Центрифуга» – одно из последних литературных объединений футуристов. Несколько лет тому назад в томе, посвященном футуристам, вышла большая подборка стихов Сергея Боброва. Большого впечатления стихи на меня не произвели, но показалась любопытной его биография.

В восьмом классе я пришел на математическую олимпиаду и мгновенно, менее чем за пятнадцать минут, решил задачи для девятых классов. Потребовал, чтобы мне дали задачи для девятого класса. Решил все. Может скорее ради шутки, мне предложили задание для выпускного класса. Справился так же быстро. Я ведь был влюблен в математику. Умел дифференцировать и интегрировать. Научился сам в пятнадцать лет по книжкам по истории математики, где были все цепочки и формулы для решения уравнений. А началось все с книги поэта, мечтавшего стать математиком.

В награду за победу в олимпиаде мне подарили все шесть томов «Советской драматургии». На меня обратили внимание. Доцент педагогического института Ирина Леонидовна Раухваргер решила заниматься со мной высшей математикой, да видно голова моя оказалась перегруженной – начались мигрениобразные боли. Интенсивные занятия прекратились, но к этому времени мне уже самому было неясно, что влечет больше – физика, математика, техника? Кстати, интерес к технике был всеобщим – освоение космоса было уже на подходе.

Школу я окончил без медали. Причина этого не в знаниях. Я был всегда человеком... отвязанным. Есть такое английское выражение «отвязанная пушка» – это пушка, которая, стоит ее освободить от пут, начинает кататься по палубе корабля. Под давлением семьи я поехал в Москву, сдал экзамены, поступил в энергетический институт. Проучился там три года, получал даже повышенную стипендию, но все же ушел оттуда. Оказался в Курчатовском институте<sup>3</sup> в должности лаборанта экспериментального отдела, который как раз собирался переезжать в Новосибирск. Он был зародышем будущего, в настоящий момент абсолютно знаменитого, Института ядерной физики, руководил им Андрей Михайлович Будкер, в то время член-корреспондент, впоследствии известнейший академик.

В отделе была весьма демократичная обстановка. У меня было три курса вуза, но воспринимали меня равноценным научным сотрудником. Там я и получил физическое образование, что называется, из первых

<sup>2</sup> Бобров С.П. «Волшебный двурог» (третье издание этой книги вышло в московском издательстве МЦНМО в 2006 году). (Прим. ред.)

<sup>3</sup> Институт атомной энергии имени И.В.Курчатова. (Прим. ред.)

рук. Должен был сам делать приборы, сам производить все расчеты и так далее. Это был неоценимый элемент образования, очень важный для физика.

Будкер был замечательным человеком. Большинство людей имеет самостоятельное мнение лишь по узкому кругу вещей. Будкер же принадлежал к очень редкому типу тех, которые по любым вопросам имеют свое собственное мнение и любой вопрос обдумывают самостоятельно – вопросы жизни и смерти, судьбы человечества, политики, а также чисто практические вопросы, например прописки. Он был постоянно думающим человеком, талантливым и изобретательным. Ландау его называл релятивистским инженером. Будкер действительно был физиком-теоретиком, который, тем не менее, разбирался в эксперименте. Каждый день он приезжал к десяти часам, вызывал к себе разные бригады и обсуждал с ними детали их экспериментов, причем иногда достаточно тонкие (буквально, где там винтики поставлены). Потом он уезжал домой, отдыхал, возвращался и сидел уже до позднего вечера. Часто он вызывал меня (я тоже сидел по вечерам и работал), предлагал мне посчитать что-то, скажем порог рождения четырех-шести фермионов при столкновении протонов. Это несложно посчитать. Я приходил к нему через полчаса: «Семь-пять надо иметь в каждом пучке». «Спасибо, теперь сядь». И начинал: «Вот что ты думаешь, например, о том, будет ли человеческий интеллект биологическим или кибернетическим?» Я прекрасно понимал – это такая игра. Я никогда не высказывался, просто был слушателем. И он развивал свои теории – например, что было бы, если бы Сталин в 45 году после победы над Германией решил на войну с Америкой. У Будкера была стройная, развитая теория, фантастический роман можно было писать. Однажды я произвел на него большое впечатление своим знанием литературы. Он заметил в разговоре с кем-то: «Как сказал Лермонтов, ты хлопец, может быть, не трус, да глуп, а мы видали виды». Я говорю: «Андрей Михайлович, все хорошо, но только это не Лермонтов, а Пушкин». «Как? Быть не может!» Я отвечаю: «Пушкин, стихотворение «Гусар», во втором томе «Избранных сочинений», приблизительно начало 30-х годов, из этого периода». Он послал свою секретаршу в библиотеку, нашли эти строки, и с тех пор он стал меня очень уважать за знание литературы. И, самое смешное, спросил: «А ты откуда это знаешь?»

После года работы в Курчатовском институте я решил стать физиком-теоретиком, а не экспериментатором. И окончательный выбор сделал в 1961 году, когда меня перевели в Новосибирск. Я тогда пошел к Будкеру: «Андрей Михайлович, я хочу стать теоретиком». Он говорит: «Ну ладно. Такая твоя судьба. Конечно, ты бы был очень хорошим экспериментатором. Но, если уж ты хочешь, пожалуйста, иди. Вот Сагдеев к нам переезжает, тоже из Курчатовского института. Он создает отдел». Я говорю: «Ну, как же, Сагдеев! Он с моим старшим братом в одном классе учился, я его знаю с детства, тем более что он в институте преподавал физику и организовал кружок

по теоретической физике». Все сошлось, и я с удовольствием пошел к нему в отдел.

Поселили меня в Новосибирске в общежитии, и стал я ходить по морозцу в Институт ядерной физики. Сагдеевский отдел располагался на втором этаже. В нашей комнате было четыре стола, и за ними – четыре человека: все четверо позже стали академиками. Это фантастика! Была прекрасная творческая атмосфера. Если у кого-то были вопросы, мы обсуждали их вместе – происходили непрерывные семинары. При этом обстановка была особенной и очень непринужденной. Часто шутили и разыгрывали друг друга. Приходили в столовую к 9 часам утра. Завтракали вместе. Каждый по очереди платил за всех. Завтрак опоздавшего с гиканьем и свистом делили, даже если совсем не хотелось есть.

В Новосибирске я окончил университет с красным дипломом, поступил в аспирантуру, довольно быстро защитил кандидатскую диссертацию, через 2 года после окончания университета, потом – докторскую, тоже очень быстро. Я понял, что есть целая область науки, которая еще только начинает развиваться, – физика нелинейных волн, и она же связана с математикой. Я стал заниматься этой наукой, у меня была докторская диссертация, фактически формулирующая основные принципы этой науки. Я читал в университете свой курс, вел семинары по разным разделам теоретической физики, читал общую физику на физфаке. В 1968 году я прочитал курс по введению в физику нелинейных волн, и мои слушатели – часть из них сбежали довольно быстро, но человек семь остались – стали ядром моей научной школы. Они все сейчас известные в мире люди.

Я начал преподавать еще со студенческих лет. Вначале – физику в физматшколе Академгородка. Вел семинары, потом лекции даже читал. Физматшкола и сейчас еще существует. Завуч – один из моих слушателей этого курса. До сих пор я встречаю по всему миру ученых, которые когда-то слушали мои лекции по физике.

Я вспоминаю сейчас то время, которое невозможно забыть, которое у всех нас осталось в памяти как самое прекрасное время жизни, – время расцвета Академгородка. Это шестидесятые годы, когда там была совершенно особая духовная атмосфера, в которой, как мы потом поняли, у людей вырабатывались глубокие, безусловные ценностные ориентации.

В Академгородке решили создать клуб, который бы объединял культурную и социальную жизнь (а также для того, чтобы соответствующим организациям было удобнее следить за народом, как мы теперь понимаем). Днем – столовая, а вечером – клуб. Надо было придумать название. И вот тут меня осенило – «Под интегралом». И действительно его так называли – всеобщий клуб, всех объединяет. Члены клуба выбирались тайным голосованием, был президент клуба. Я имел высший ранг и равным счетом ничего не делал – просто за то, что название придумал. Был таким крестным отцом этого клуба. Там проводились поэтические турниры, туда приезжали знаменитые барды.

Тогда у нас была либеральная эпоха, потом она начала становиться все более и более жесткой. Однажды ночью я видел, как подъехал кран и снял неоновые буквы «Под интегралом». Клуб уже два года как был закрыт, а вывеска продолжала висеть просто как некоторый памятник прошлому. Семидесятые годы принято считать временем застоя. Было оно, конечно, достаточно душное, но все-таки со сталинским его не сравнить, оно более либеральное. Я не занимался активной общественной деятельностью, но общался с кем хотел и дружил с кем хотел, совершенно ничего не боясь. По отношению ко мне была такая политика: живи, как хочешь, но в «дальний зарубеж» не поедешь. Все было бескризисно, кроме того что был невыездной.

А потом у меня с Будкером отношения чуть-чуть испортились. Безусловно, он очень много в меня вложил, дал мне возможность работать и одновременно учиться, все условия создал. Даже позаботился о том, чтобы меня в тюрьму не посадили. В 1968 году, когда наши войска в Чехословакию вошли, это вполне могло произойти. Мы подписали письмо, так называемое письмо 46-ти. В какой-то момент люди начали приходить и говорить, что боятся, многие уже жалеют о том, что подписали, и поэтому надо все это прекратить. Откат такой пошел. Я начал думать. Очень быстро просчитал, что произойдет дальше. Письмо опубликуют, кто-то заявит, что подписал под давлением, был обманут. И как выходить из положения? Наутро меня вызвали к Будкеру: «Володя, что ты делаешь? Ты делу приносишь большой вред и вообще науке. Как же так!» Я говорю: «Андрей Михайлович, поздно, письмо уже отправлено в Москву». Это была неправдой. Потом я собрал людей и предложил: «Мы сожжем все эти подписи и соберем по новой. Тот человек, который второй раз подпишет, уже не откажется, он уже понимает, что делает свой выбор». Все согласились. Кроме одного, который был, собственно, организатором всего этого дела и автором письма.

На следующий день я пошел к Будкеру, и он мне задал совершенно фантастический вопрос: «Володя, а сколько подписей будет из нашего института?» Я ему говорю: «Восемь или девять подписей». Он спросил: «Это больше, чем в любом другом институте?» Я говорю: «Да». Он говорит: «Молодец». Вот такая фантастическая история.

Были, по-видимому, даны указания каким-то людям, потому что у нас заседал ученый совет каждый день. Один из членов ученого совета сказал, что будет требовать, чтобы меня выгнали из института. Но Будкер сказал – нет, это даже не обсуждается. Спустя много лет я приехал в Америку, в Массачусеттский технологический институт. Один очень известный профессор, физик, которого я знал давно, пригласил меня на ужин и говорит:

– Ты знаешь, почему тебя не посадили в 68-м году?

– Нет.

– Я в то время был президентом «Комитета обеспокоенных ученых». Мы составили список ученых, в случае ареста которых могли бы быть дипломатические

Крутые были времена,  
К ним скверное пристанет имя,  
Но мы-то были молодыми  
В те дорогие времена.

На брата брат была война.  
Но снег скрипел, и губы пели,  
И звезды яркие горели,  
Ведь в жизни молодость – одна!

Теперь, когда она, как страсть,  
Прошла, и быстро время льется,  
Одно из двух нам достается –  
Душа высокая иль власть,  
Одно из двух – душа иль власть...

демарши. На первом месте стоял Сахаров, а ты – на пятом или шестом.

Всё вместе и, конечно, поведение Будкера сыграли свою роль. Меня оставили в покое. Впрочем, от диссидентской деятельности я тогда уже сам отошел. Это было не совсем то, чего мне хотелось.

Так вот, Будкер предложил мне заведовать крупным экспериментальным отделом и делать лазеры на свободных электронах. То, что теоретики стараются возложить это на экспериментаторов, – нормальный факт в этом мире. Потому что считается, что теоретик в любом экспериментальном деле разберется, а вот экспериментатор в теоретическом деле может и не разобратся. Фактически он предложил мне заняться изобретением... У него была идея, как сделать лазер на свободных электронах. Мне предлагалось эту работу возглавить, естественно под его руководством. А я к тому времени уже имел собственную научную школу, у меня было шесть кандидатов наук, и я занимался совершенно другими вопросами. В голове были собственные идеи, все бурлило и так. Он понял, что я не хочу, давить не стал, он был благородный человек, но в отношениях возник холод. Вскоре мне предложили место заведующего сектором физики плазмы в институте Ландау, в Черногоровке.<sup>4</sup> И я уехал...

В ближайшем будущем я буду читать в Аризонском университете курс по общей теории относительности, определявшей развитие физической науки почти что столетие. Но меня не покидает одно предчувствие, и я поделюсь им. Те, кто оставляют студенческую скамью в ближайшие годы, пожалуй, встретят уже принципиально иную картину мира и неизбежно вновь зададутся главным вопросом (в первую очередь, конечно, ученые-физики): действительно ли мы понимаем глубины бытия, т.е. что мы можем вывести из первых принципов? Вообще, происходят такие колебания время от времени. Так, перед открытием квантовой механики, в конце XIX века, всем казалось, что теоретическая

<sup>4</sup> *Институт теоретической физики имени Л.Д.Ландау. (Прим. ред.)*

физика закончена и всем все понятно: есть объективная теория, которая должна все объяснить. Людям не советовали идти делать карьеру в теоретической физике, считая, что это бесперспективно. Но был один непонятный вопрос относительно ультрафиолетовой расходимости: как объяснить спектр? Нельзя применить статистическую механику к фотонам – получается очень нехорошая расходимость. Поиском занялся Планк. Он придумал свой принцип квантования, и с этого началась абсолютно другая эпоха.

Я тоже помню момент, когда казалось, что всем все понятно. Когда была создана стандартная модель теории элементарных частиц, считалось, что с ее помощью все-все можно объяснить, и космология в нее тоже вся укладывается. Сегодня ситуация совершенно противоположная – опять ничего не понятно, потому что данные астрономии четко показывают, что в пространстве Вселенной есть темная материя, а вот как объяснить до конца, что это такое, что она из себя представляет и какую роль играет эта скрытая масса, невозможно. А еще есть темная энергия, которая описывается так называемым космологическим слагаемым. Его ввел в уравнения гравитации еще Эйнштейн, но многие десятилетия им высокомерно пренебрегали.

Есть физическое ощущение, что вакуум, космическое пространство, наполнено некой материей, которой во много раз больше, чем видимой, так что видимая материя составляет только 4% по современным оценкам. И вот эта материя скрыта, но проявляет себя в гравитационных взаимодействиях. Если, например, имеется группа галактик, то туда втягивается еще и эта темная материя, и в результате общая масса всего этого комка оказывается намного больше, чем масса отдельных галактик. Это можно обнаружить, поскольку если есть далекая галактика и она вращается вокруг общего гравитационного поля, то видно, что она вращается не так, как если бы там были только эти галактики, т.е. там имеется еще что-то. А что? Никто не знает, потому что это могут быть тяжелые частицы, которые не взаимодействуют ни с чем, либо нейтрино (но вряд ли это нейтрино). Это открытый вопрос, и поэтому уверенность, которая была, допустим, еще лет 10 назад, что мы основные законы природы на микроскопическом уровне уже поняли, сейчас является лишь иллюзией. Все понимают, что это не так, потому что есть факты, которых мы не можем объяснить. Как отделить темную материю от темной энергии, которая есть космологическая поправка? Является ли эта космологическая поправка постоянной величиной или она – функция времени? Неизвестно. Теория квантовой гравитации до сих пор ведь не создана. И возможна ли она? И совсем уж безумный, но на самом деле имеющий смысл, вопрос: существуют ли другие миры, с которыми мы не связаны, и возможно ли связаться с ними?<sup>5</sup> Есть ведь и белые дыры, а считается вроде, что действует принцип так называе-

<sup>5</sup> Кроме того, что во Вселенной очень много возможных мест для существования жизни, на сегодняшний день математически доказано, что за пределами физического мира существует еще более сложно организованный волновой мир.

мой космической цензуры, который запрещает такие вещи.

Вопрос о темной массе относится к вопросам космологии, происхождения Вселенной, к вопросам о том, что происходит на очень больших расстояниях и было очень давно. В сущности, он, конечно, крайне волнующий, но не имеющий обыденной ценности. С другой стороны, есть масса вопросов, относящихся к нашему повседневному миру, которые можно изучать точными методами, методами теоретической физики, и которые прежде не ставились. Насколько физика может объяснить различные явления или, допустим, моделировать какие-то живые системы? Ну, например, возьмем форму цветка, форму листьев. Почему возникает именно такая или иная структура? Выясняется, что можно строить довольно простые модели, которые воспроизводят, скажем, процесс образования розы. Кстати, мой близкий друг, профессор Аризонского университета, этим занимается. Недавно он мне подарил свою работу, она называется так: «Теория формообразования растений с математической точки зрения». Чрезвычайно забавно! Как возникает этот удивительной красоты цветок? Это все относится к так называемой теории образования узоров (pattern formation). Образование картин, таких как на поверхности коры дерева или на подушечках пальцев, или, например, структуры, которые возникают в облаках, когда мы их наблюдаем сверху, – все это, оказывается, можно изучать с общей точки зрения. Иными словами, наш обыденный мир тоже может стать предметом для научного изучения.

Есть математические модели явлений мира неодушевленного. Как, скажем, образование формы в ландшафтах. Тут главное задавать вопросы и не бояться их кажущейся глупости. Предположим, вы возьмете произвольную кучу камней и рассортируете их по массе. Спрашивается: по какому закону, произведено это распределение? Оказывается, по степенному закону, и есть довольно универсальная степень. Примерно такое же соотношение получится, если рассмотреть распределение метеоритов или планет по массе или же распределение космических лучей по энергии. Есть определенные закономерности в природе, которые мы еще не очень понимаем. Сейчас активно развивается математическая биология, разрабатываются математические модели сознания. Но изучить бы сначала элементы самые простые, хотя бы, например: как устроено зрение? Человек смотрит и видит трехмерное изображение даже если он поворачивает голову. Значит, там скрыт некий алгоритм вращения трехмерного пространства, позволяющий производить пересчет. Как это устроено?

А этот «компьютерный» software, который заложен в нас для обработки зрительных впечатлений! Например, человек видит стул, изображение которого на сетчатке перевернутое, и может легко представить себе стул, стоящий на месте. Это ведь тоже представляет собой некоторое чудо. И модель того, как это устроено, было бы крайне интересно знать.

Или модели социальных явлений, которые привлекают сегодня необычайно. Необразованность людей в

**Песня**

Горящие ступени дня,  
Печаль земная,  
Они легко ведут меня  
В страну без края.

А там лиловые поля  
И луг медвяный,  
Тележка едет, не пыля,  
Через поляны.

Повязан бубунец простой  
Коню на шею,  
А кто в тележке едет той,  
Сказать не смею.

А быстрокрылая Земля  
Летит в эфире,  
Щебечут с ветром тополя  
О вечном мире.

И Время улыбнулось мне,  
Как сын спросонок,  
Оно не старец в той стране –  
Оно ребенок.

Ему легко вести меня  
Через истому  
По огненным ступеням дня  
К родному дому.

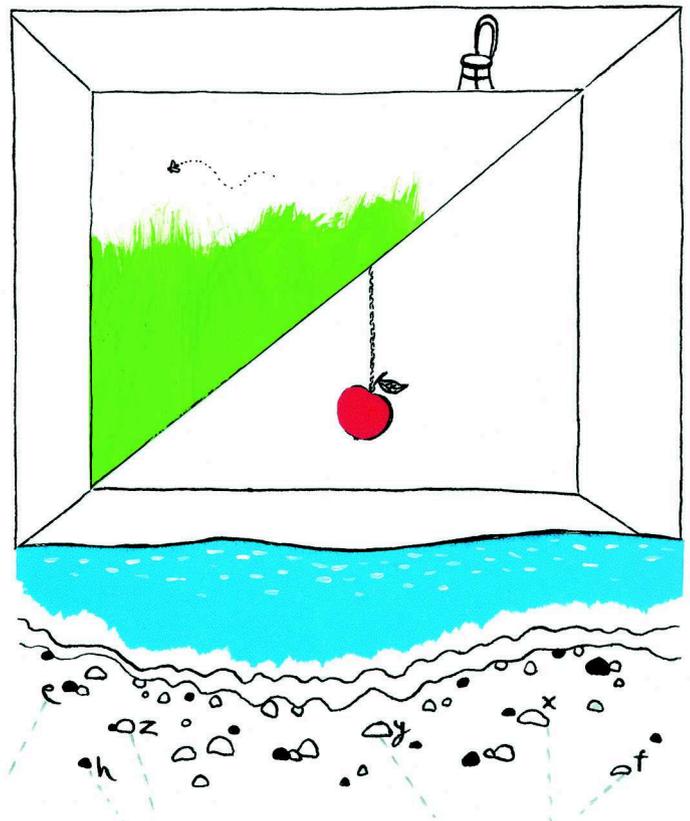
По опереньям облаков  
За облак млечный,  
Снимая тяжесть всех оков  
Ручонкой вечной.

этом вопросе поразительна и очень печальна, почти фатальна. Например, у нас одно время была идея, модная в эпоху начала перестройки, что не будет большой беды, если, скажем, большая страна Советский Союз разобьется на множество мелких государств. Люди не знают работы Ричардсона, который, в частности, занимался моделированием происхождения войн и вывел интересный закон на основании множества статистических данных из истории человечества: вероятность войны прямо пропорциональна общей длине границ. Государство раскалывается на два – возникает вероятность, что там через какое-то время будет возможен конфликт, оттого что они что-то не поделят. Такие общие модели сложных, нелинейных систем сейчас только начинают развиваться.

Безумцам, которые собираются посвятить свою жизнь науке, стоит пожелать две вещи. Прежде всего – никогда не бояться лишнего знания. Чем больше человек знает, тем лучше. Никогда не думать, что это мне не нужно. Человеческий мозг так устроен, что он может вместить совершенно необъятное количество знаний. Есть люди, которые владеют десятками языков. Папа

римский Иоанн Павел II знал, по-моему, 70 языков. К нему пришли однажды два эстонца и стали разговаривать при нем в довольно вольном духе, и он ответил им по-эстонски. Они были абсолютно потрясены. Это первое. Второе – это то, что ничего нельзя сделать без огромного вложения сил и очень большого творческого темперамента. Человек должен заниматься наукой со страстью, он должен работать, работать и работать. И главное – не нужно бояться задавать глупых «детских» вопросов. Я всегда в первую очередь пытаюсь понять, умеет ли человек задавать вопросы или нет. Это мощный показатель того, что он предрасположен к занятиям наукой.

Природа, Вечность всегда неохотно отдают свои тайны. Тайны Творения закрыты на замок. Но я не думаю, что есть абсолютные тайны. Меня всегда поражает не то, что существуют вопросы, а то, что мы можем находить ответы. Вот это поразительно. На самом деле, люди все время приобретают новые знания о предметах, совершенно удаленных во времени и труднодоступных, о том, что происходило, допустим, 14 миллиардов лет назад. Я думаю, человек в принципе способен познать все на свете. С другой стороны, пребывать в иллюзии, что уже все понято, – наивно и самоуверенно. Ньютон, один из величайших гениев, писал: «Не знаю, кем я могу казаться этому миру, но самому себе я кажусь мальчиком, играющим на морском берегу. Время от времени я... нахожу на берегу камешки и ракушки... в то время как великий океан Истины остается для меня полностью неисследованным». И кажется, что человечество всегда будет находиться в той же самой ситуации, чувствуя себя лишь ребенком, который собирает камни, выброшенные на берег океаном.



# Возрождение «бесполезных» чисел

Л. ШИБАСОВ

**В** ШЕСТОМ ВЕКЕ ДО Н.Э. ГРЕЧЕСКИЙ УЧЕНЫЙ Пифагор основал на юге Италии научную школу, которая одновременно стала и философским братством и политическим союзом. Много внимания в этой школе уделялось изучению математики. Пифагорейцы считали, что в основе мироздания лежат натуральные числа, и все явления природы объясняли их соотношениями. Такой подход способствовал глубокому изучению множества натуральных чисел. В школе Пифагора была разработана теория пропорций, найдены свойства различных средних, изучались числа четные и нечетные, простые и составные, дружественные и совершенные, многоугольные и пирамидальные и т.п. Остановимся на одном из этих результатов.

## Четные совершенные числа

Возьмем натуральное число и найдем сумму всех его собственных, т.е. меньших самого числа, натуральных делителей. Эта сумма может оказаться меньше исходного числа, больше его или равна ему. Например, для числа 10 сумма собственных делителей  $1 + 2 + 5 = 8 < 10$ , для 12 имеем  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$ , а для 6 получаем  $1 + 2 + 3 = 6$ . Числа первого типа пифагорейцы называли *недостаточными*, второго типа – *избыточными*, а третьего – *совершенными*. Итак, число 6 совершенное. Это наименьшее из совершенных чисел. Следующее за ним – число  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ , затем – число 496. Эти три совершенных числа знали еще в школе Пифагора.

В I веке уже новой эры греческий математик Никомах нашел четвертое совершенное число 8128 и, сравнив известные совершенные числа, заключил, что: 1) существуют лишь четные совершенные числа; 2) множество таких чисел бесконечно; 3) все они поочередно оканчиваются цифрами 6 и 8.

Первые два предположения Никомаха не доказаны до сих пор; больше повезло третьему, и то наполовину: с чередованием последних цифр он ошибся. Пятое и шестое совершенные числа оканчиваются на 6, но эти числа были найдены в арабском мире лишь в XIII веке, а в Европе – двумя веками позже. Тем не менее, соответствующую закономерность для четных совершенных чисел найти можно, но сначала выясним их структуру.

**Теорема.** Четное число совершенно тогда и только тогда, когда оно имеет вид  $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ , где  $(2^k - 1)$  – простое число.

Достаточность условия теоремы была доказана Евклидом в его знаменитых «Началах» (3 в. до н.э.), а необходимость – Л.Эйлером (XVIII в.).

**Доказательство.** Для доказательства теоремы введем функцию  $\sigma(n)$ , равную сумме всех натуральных делителей числа  $n$ , включая и само  $n$ . Легко убедиться в верности следующих свойств функции  $\sigma(n)$ :

а)  $\sigma(n) \geq n + 1$ , причем равенство имеет место лишь для простого числа  $n$ ;

б) если числа  $m$  и  $n$  взаимно простые, то  $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$ ;

в) для простого  $p$  и натурального  $k$  выполняется равенство  $\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$ ;

г) число  $n$  совершенно тогда и только тогда, когда  $\sigma(n) = 2n$ .

**Необходимость** условия теоремы. Пусть  $n$  – четное совершенное число, тогда  $n = 2^{k-1}m$ , где  $k$  – натуральное число,  $k > 1$ , а  $m$  – нечетное число, тоже большее единицы (при  $m = 1$  число  $n$  недостаточное:  $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1 < 2^k = 2n$ ). Из равенств  $\sigma(n) = (2^k - 1) \cdot \sigma(m)$  и  $\sigma(n) = 2n = 2^k m$  получаем  $(2^k - 1) \cdot \sigma(m) = 2^k m$ , откуда  $\sigma(m) = 2^k s$ , где  $s$  – нечетное число. Итак,  $m = (2^k - 1) \cdot s$ . Если  $s \neq 1$ , то  $\sigma(m) = \sigma((2^k - 1)s) \geq 1 + s + 2^k - 1 + (2^k - 1)s = 2^k s + 2^k = \sigma(m) + 2^k$ ,

чего не может быть. Следовательно,  $s = 1$ ,  $m = 2^k - 1$  и  $\sigma(m) = 2^k = m + 1$ , а значит,  $m$  – простое число.

**Достаточность** условия. Так как  $n = 2^{k-1}(2^k - 1) = 2^{k-1}p$ , то  $\sigma(n) = (2^k - 1)(p + 1) = (2^k - 1)2^k = 2n$ . Таким образом,  $n$  – совершенное число.

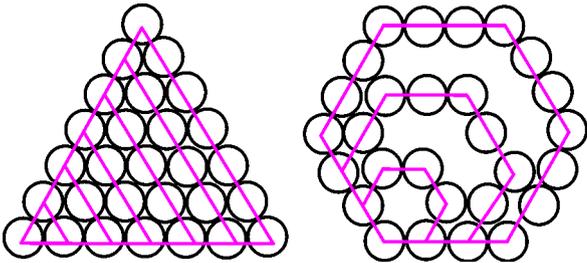
Теорема доказана.

Теперь мы в состоянии выяснить закономерность появления последней цифры в записи четного совершенного числа. Отметим, что показатель  $k$  числа  $2^k - 1$  не может быть составным: при  $k = t \cdot s$ ,  $t > 1$ ,  $s > 1$ , число  $2^{ts} - 1 = (2^t - 1)(2^{(s-1)t} + 2^{(s-2)t} + \dots + 2^t + 1)$  составное. Правда, и в случае простого показателя число  $2^k - 1$  может оказаться составным; например,  $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ . Таким образом, показатель  $k$  пробегает лишь часть множества простых чисел. Если исключить значение  $k = 2$ , то останутся нечетные

показатели, а они имеют вид  $k = 4l \pm 1$ . При  $k = 4l + 1$  первый сомножитель числа  $2^{4l}(2^{4l+1} - 1)$  оканчивается шестеркой, поскольку  $2^{4l} = 16^l$ , а второй сомножитель – единицей:  $2^{4l+1} - 1 = 2 \cdot 16^l - 1$ . В случае  $k = 4l - 1$  имеем  $2^{4l-2}(2^{4l-1} - 1)$ ; здесь  $2^{4l-1}$  оканчивается цифрой 8, а  $2^{4l-2} - 1$  – цифрой 4. Итак, число  $2^{4l}(2^{4l+1} - 1)$  заканчивается цифрой 6, а  $2^{4l-2}(2^{4l-1} - 1)$  – цифрой 8. В исключенном случае ( $k = 2$ ) получается число 6.

Обозначим для удобства числа вида  $2^{k-1}(2^k - 1)$  через  $N_k$ . Как мы убедились, наблюдение Никомаха о чередовании последних цифр подтверждается именно для чисел  $N_k$  с нечетными номерами  $k \geq 3$ , но... не все они являются совершенными. Числа  $N_k$  (а значит, и совершенные) обладают многими интересными свойствами, в частности, они связаны с так называемыми фигурными числами, хорошо известными еще в школе Пифагора.

Число называется *фигурным* или *q-угольным*, если оно является одной из сумм членов арифметической прогрессии с первым членом, равным 1, и разностью  $q - 2$ . Это число выражает количество шаров, из которых можно выложить на плоскости правильный  $q$ -угольник, чем и объясняется название числа. Построим треугольные числа; для этого начнем укладывать шары на плоскости в виде правильных треугольников, растущих из одной вершины. Для построения треугольника, сторона которого содержит  $2^k - 1$  шаров, будет использовано  $1 + 2 + \dots + (2^k - 1) = 2^{k-1}(2^k - 1) = N_k$  шаров. Объединив в этой сумме попарно слагаемые,



начиная со второго, получим  $1 + 5 + 9 + \dots + (2^{k+1} - 3)$  – шестиугольное число. Сторона соответствующего 6-угольника содержит  $2^{k-1}$  шаров. Итак, из  $N_k$  шаров можно выложить правильный треугольник со стороной  $2^k - 1$  и правильный шестиугольник со стороной  $2^{k-1}$ . На рисунке изображен случай  $k = 3$ .

### Упражнения

- Докажите, что при любом  $k > 1$  число  $N_k$ :
  - не является квадратом (4-угольным числом);
  - в двоичной системе счисления имеет запись  $11\dots100\dots0$ , сначала идут  $k$  единиц, а за ними  $(k - 1)$  нулей.
- Докажите, что любое число  $N_k$  с нечетным индексом  $k \geq 3$ :
  - при делении на 9 дает остаток, равный 1;
  - представимо в виде суммы кубов последовательных нечетных натуральных чисел от единицы до  $2^{(k+1)/2} - 1$ .

### Поиск простых чисел Мерсенна

Мы уже видели, что открытие новых четных совершенных чисел связано с поиском простых показателей  $k$ , для которых числа  $M_k = 2^k - 1$  оказываются простыми. Числа  $M_k$  называют *числами Мерсенна* – по имени изучавшего их в XVII веке французского ученого. В «Физико-математических размышлениях» (1644) Мерсенн утверждал, что числа  $2^k - 1$  являются простыми для  $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ . Этот факт произвел сильное впечатление на его современников. Ведь тогда не было вычислительной техники, и проверить утверждение было делом немыслимым: например, число  $M_{31}$  больше двух миллиардов (его простоту доказал через сто лет Эйлер). И хотя, как выяснилось позже, в этом списке два числа  $M_{67}$  и  $M_{257}$  составные, можно лишь поражаться глубине проникновения Мерсенна в структуру таких чисел.

Критерий простоты чисел Мерсенна нашел (1878) французский математик Ф.Люка. Прежде чем формулировать его, введем *последовательность Люка*. Она определяется рекуррентно:  $L_1 = 4$ ,  $L_n = L_{n-1}^2 - 2$ . По этим формулам получаем  $L_2 = 14$ ,  $L_3 = 194$ ,  $L_4 = 37634$  и т.д. **Критерий Люка**, усовершенствованный (1930) американским математиком Д.Лемером, звучит так: *число  $M_k$  при простом нечетном  $k$  тогда и только тогда является простым, когда  $L_{k-1}$  делится на  $M_k$* . Приводить доказательство мы не будем, а обратимся к примерам. При  $k = 3$  имеем  $L_2 = 14$ , оно делится на  $M_3 = 7$ , число 7 и на самом деле простое; при  $k = 5$  число  $L_4 = 37634$  делится на  $M_5 = 31$ , и число 31 простое. Но при больших номерах  $k$  применение критерия затруднительно.

Подойдем к поиску простых чисел Мерсенна с другой стороны: найдем вид делителей числа  $M_k$  при условии их существования. Это позволит сразу отсеять некоторые из  $M_k$ . Рассмотрим первые числа Мерсенна с простыми номерами:  $M_2 = 3$ ,  $M_3 = 2 \cdot 3 + 1$ ,  $M_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ ,  $M_7 = 2 \cdot 7 \cdot 9 + 1$ ,  $M_{11} = 2 \cdot 11 \cdot 93 + 1$ . Если исключить  $M_2$ , то числа  $M_p - 1$  делятся на  $2p$ . Подмеченный факт имеет место для всех чисел Мерсенна с простыми нечетными номерами. Он является следствием **малой теоремы Ферма**: *если  $p$  простое число и  $a$  не делится на  $p$ , то разность  $a^{p-1} - 1$  делится на  $p$* . По этой теореме  $M_p - 1 = 2^p - 2 = 2(2^{p-1} - 1)$  делится на  $2p$ .

Надо сказать, что Ферма и открыл свою малую теорему, занимаясь совершенными числами. Опираясь на нее, он установил, что *не только сами числа  $M_p$  при простом нечетном  $p$ , но и все их делители имеют вид  $2pt + 1$*  (элементарное доказательство имеется, например, в книге Л.П.Шибасова «От единицы до бесконечности» – М.: Дрофа, 2006). Это утверждение Ферма облегчает поиск простых делителей чисел Мерсенна. Например, в случае  $p = 23$  надо испытать делимость  $M_{23} = 8388607$  только на числа  $46 + 1$ ,  $46 \cdot 2 + 1$  и т.д. Уже первая проверка дает результат: число  $M_{23}$  делится на 47. Полученное частное 178481 тоже представимо в аналогичном виде:  $46 \cdot 3880 + 1$ . При  $p = 29$ , перебирая по порядку числа  $58t + 1$ , найдем все

простые делители числа  $M_{29}$ :  $58 \cdot 4 + 1 = 233$ ,  $58 \cdot 19 + 1 = 1103$ ,  $58 \cdot 36 + 1 = 2089$ .

Эйлер установил, что *все простые делители чисел Мерсенна с нечетными номерами имеют вид  $8m \pm 1$* . Ему же принадлежит следующий признак делимости чисел  $M_p$ : *если  $p = 4m + 3$  и  $q = 2p + 1$  оба простые, то  $M_p$  делится на  $q$*  (доказательства этих свойств имеются в упомянутой книге). Приведем примеры применения последнего признака делимости (учитывая лишь простые числа  $p$  и  $q$ ):

- 1)  $m = 0, p = 3, q = 7, M_3 = 7$  делится на 7;
- 2)  $m = 2, p = 11, q = 23, M_{11} = 23 \cdot 89$ ;
- 3)  $m = 5, p = 23, q = 47, M_{23} = 47 \cdot 178481$ ;
- 4)  $m = 20, p = 83, q = 167, M_{83} = 167 \cdot 57912614113275649087721$ .

Следующие простые  $p$  и  $q$  появятся при  $m = 32$ , соответствующее число  $M_{131}$  делится на 263 и содержит 40 цифр, мы его приводить не будем.

Интерес к простым числам Мерсенна объясняется не только их связью с совершенными числами, а еще одним обстоятельством. Человечество всегда интересовалось числами-гигантами, в том числе и наибольшими простыми числами. Доказательство простоты большого числа – трудоемкое занятие даже сейчас, когда в распоряжении математиков имеется современная вычислительная техника. И здесь на выручку приходят различные признаки делимости, а поскольку для  $M_p$  найдено много таких признаков да к тому же имеется критерий простоты, то среди наибольших открытых на данный момент простых чисел часто оказываются числа Мерсенна. Пока таким чемпионом является 43-е по счету простое число  $M_{30402457}$ , содержащее более 9 миллионов цифр. Оно обнаружено в декабре 2005 года после многих суток непрерывной работы мощного компьютера. Возможно, и этот рекорд будет побит к тому времени, когда вы прочтете эту статью. Дело в том, что применение ЭВМ существенно облегчило поиск. Достаточно сказать, что большая часть (31) из всех известных простых чисел Мерсенна найдена именно с их помощью, причем половине из этих открытий нет и 20 лет. А теперь этот процесс пойдет гораздо быстрее: создан международный проект «Поиск больших простых чисел Мерсенна с использованием Интернета», анонимный спонсор основал фонд на сумму более полумиллиона долларов для четырех удачливых, которые первыми найдут простые числа Мерсенна с количеством цифр более 1 миллиона, 10 миллионов, 100 миллионов и одного миллиарда соответственно. Первый из четырех денежных призов уже выплачен за 38-е число Мерсенна, содержащее более двух миллионов цифр.

Созданию фонда, несомненно, способствовало то обстоятельство, что огромные простые числа лежат в основе защиты электронной коммерции и электронной почты – в вопросах, ставших актуальными в последнее время. Дело в том, что для шифра удобно использовать произведение двух простых чисел; чтобы найти ключ к шифру, надо определить эти сомножители. Поскольку со временем все же удастся их найти, то шифровальщики постоянно обновляют арсенал простых чисел. Так

что теперь не только простая любознательность и научный престиж будут стимулировать охотников за большими простыми числами. А ведь еще в 1811 году английский математик П.Барлоу, приведя в своей книге «Теория чисел» восьмое совершенное число, писал: «Оно навсегда останется наибольшим из когда-либо открытых совершенных чисел, поскольку, принимая во внимание их бесполезность, трудно предположить, чтобы кто-нибудь стал затрачивать усилия на получение больших совершенных чисел». Как же он ошибался!

Похоже, большинство ученых верит в бесконечность множества простых чисел Мерсенна. В конце XIX века бельгийский математик Э.Каталан предполагал это вывести из следующего наблюдения: если взять простые числа Мерсенна 3, 7, 31, 127, то  $M_3, M_7, M_{31}, M_{127}$  тоже будут простыми. Но в 1953 году было обнаружено, что хотя число  $M_{31} = 8191$  простое, число  $M_{8191}$  составное.

### О нечетных совершенных числах

Ученые с давних пор пытались отыскать нечетные совершенные числа. Их поиск напоминает охоту за призраком, которого никто никогда не видел. В длительном процессе охоты найдено много свойств, которыми должны обладать эти числа при условии их существования. Например, легко видеть, что количество различных простых делителей нечетного совершенного числа больше двух. В самом деле, число  $n = p^a \cdot q^b$ , где  $p \geq 3, q \geq 5$  – простые числа,  $a$  и  $b$  – натуральные, недостаточное, поскольку

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1} - 1}{q - 1} < \frac{p^{a+1}}{p - 1} \cdot \frac{q^{b+1}}{q - 1} = \\ &= n \cdot \frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} \leq n \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} < 2n. \end{aligned}$$

Установлено, что количество различных простых делителей должно быть не меньше 8. Сложнее определить вид нечетного совершенного числа  $n$ . Обратимся к его разложению на простые (нечетные) множители:

$$n = p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}.$$

Так как  $\sigma(n) = \sigma(p_0^{\alpha_0}) \cdot \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdot \dots \cdot \sigma(p_s^{\alpha_s})$ , то из равенства  $2n = \sigma(n)$  получаем

$$\begin{aligned} 2p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s} &= \\ = (1 + p_0 + \dots + p_0^{\alpha_0}) (1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1}) \dots (1 + p_s + \dots + p_s^{\alpha_s}). \end{aligned} \quad (1)$$

Поскольку сумма  $1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha$  делится на 2 лишь при нечетном  $\alpha$ , то только один из показателей  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s$  нечетен, остальные четные. Будем считать  $\alpha_0 = 2c + 1, \alpha_1 = 2a_1, \dots, \alpha_s = 2a_s$ . Тогда в правой части равенства (1) четный сомножитель возникает за счет первой скобки. Преобразуем ее так:

$$1 + p_0 + \dots + p_0^{2c+1} = (1 + p_0)(1 + p_0^2 + \dots + p_0^{2c}).$$

Нечетное число  $p_0$  имеет вид  $p_0 = 4l - 1$  или  $p_0 = 4l + 1$ . В первом случае правая часть равенства (1) делится на

4; учитывая, что левая часть равенства делится только на 2, остается второй вариант. Аналогично, число  $c$  не может быть нечетным, иначе скобка  $(1 + p_0^2 + \dots + p_0^{2c})$  делилась бы на 2; значит,  $c = 2b$ . Получаем еще один **результат Эйлера**: если нечетное совершенное число существует, то оно имеет вид

$$n = (4l + 1)^{4b+1} \cdot p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdot \dots \cdot p_s^{2a_s},$$

где  $4l + 1$ ,  $p_1, \dots, p_s$  – различные нечетные простые числа.

Отсюда следует, что нечетное совершенное число не может быть квадратом, поскольку первый множитель  $(4l + 1)^{4b+1}$  не является им. Открыто много свойств нечетных совершенных чисел, но в их существование верится с трудом: в промежутке от 1 до  $10^{300}$  их не обнаружено. Можно попытаться доказать отсутствие нечетных совершенных чисел от противного. Предположим, что такое число  $n_0$  существует:  $\sigma(n_0) = 2n_0$ . Рассмотрим число  $n = 2n_0$ , для него  $\sigma(n) = \sigma(2) \cdot \sigma(n_0) = 3 \cdot 2n_0 = 3n$ . Числа, для которых  $\sigma(n) = 3n$ , называют *трехкратными совершенными*. Например, число  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$  является трехкратным совершенным. Остается убедиться, что среди трехкратных совершенных нет чисел вида  $n = 2n_0$ , где  $n_0$  – нечетный множитель. Возможно, именно эти соображения стимулировали интерес ученых XVII столетия к трехкратным совершенным числам.

Сейчас, наряду с трехкратными, изучают *мультисовершенные*, или *r-кратные совершенные числа*. Это числа, для которых  $\sigma(n) = r \cdot n$ .

**Упражнение 3.** Докажите, что сумма обратных величин всех собственных делителей  $r$ -кратного совершенного числа равна  $r - 1$ ; в частности, для совершенных чисел она равна 1.

В настоящее время открыто более 5 тысяч мультисовершенных чисел различной кратности, все они четные, и, что удивительно, только 6 из них трехкратные, причем эти шесть чисел были обнаружены еще в первой половине XVII века. Опишем способ получения четных мультисовершенных чисел, исходя не из их кратности, а из показателя степени числа 2.

**Предложение:** для любого натурального  $k$  найдется мультисовершенное число  $n = 2^{k-1}m$ , где  $m$  – нечетный множитель.

Поскольку  $\sigma(2^{k-1}) = 2^k - 1$ , то надо по заданному показателю  $k$  найти такие числа  $m$  и  $r$ , для которых выполняется равенство

$$(2^k - 1)\sigma(m) = r \cdot 2^{k-1}m. \quad (2)$$

Ясно, что  $\sigma(m)$  должно быть кратным  $2^{k-1}$ . Подбор числа  $m$  будем вести поэтапно. На первом шаге положим  $m = 2^k - 1$ . Если число  $m$  окажется простым, то цель достигнута:  $\sigma(m) = 2^k$ , и число  $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$  совершенное. Так будет для  $k = 2, 3, 5, 7, 13, 17$ .

При составном  $m = 2^k - 1$  разложим его на простые множители  $p_0^{\alpha_0} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ . Если показатель простого

числа  $p$  нечетен, то  $\sigma(p^\alpha) = 2^b q$ , где нечетное число  $q < p^\alpha$  (на самом деле, при  $p \geq 3$  имеем  $p^{\alpha+1} - 1 < 2p^\alpha(p - 1)$ , откуда  $2^b q < 2p^\alpha$ ). Таким образом, при нечетных показателях число  $\sigma(m) = 2^a q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l$  имеет меньше по сравнению с  $m$  нечетные сомножители. Если  $a < k - 1$ , то увеличим  $m$  до числа  $(2^k - 1)q_1 \cdot \dots \cdot q_l$ , что приведет к увеличению показателя степени 2 у числа  $\sigma(2^{k-1}q_1 \cdot \dots \cdot q_l)$ . В случае четного показателя число  $\sigma(p^\alpha) = r$  нечетно; добавим его в качестве множителя к числу  $m$ ; если при этом  $r$  вновь окажется четной степенью простого нечетного числа (например,  $\sigma(3^4) = 11^2$ ,  $\sigma(11^2) = 7 \cdot 19$ ), то добавим еще сомножитель  $\sigma(r)$ . И так будем поступать до тех пор, пока в левой части равенства (2) не появится множитель  $2^{k-1}$ . Это на самом деле произойдет, поскольку бесконечно убывать нечетные простые сомножители не могут и на некотором шаге появятся такие простые числа  $p$ , для которых  $\sigma(p) = 2^c$ . Но если  $p > 2^d$ , то  $\sigma(p) = 2^c > 2^d$ , а так как  $\sigma(m) > 2^{k-1}$ , то нужный показатель достигим. Предложение доказано. Приведем примеры.

1)  $k = 4$ : из равенств  $\sigma(2^3) = 3 \cdot 5$ ,  $\sigma(3) = 2^2$ ,  $\sigma(5) = 2 \cdot 3$  получаем трехкратное совершенное число  $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ , найденное Мерсенном.

2)  $k = 6$ : так как  $2^6 - 1 = 3^2 \cdot 7$ , то вслед за Ферма приходим к числу  $n = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$ , для которого  $\sigma(2^5 \cdot 3 \cdot 7) = 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 3n$ ; если вместо 3 взять  $3^3$ , то придем к числу  $n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$ , обнаруженному Декартом, для него  $\sigma(n) = (3^2 \cdot 7)(2^3 \cdot 5)(2 \cdot 3)2^3 = 4n$ .

**Упражнение 4.** Для показателей  $k = 9, 10, 14, 15$  найдите трехкратные совершенные числа и убедитесь, что у них нет повторяющихся нечетных сомножителей.

Итак, в разложениях на простые множители всех шести известных на сегодняшний день трехкратных совершенных чисел множитель 2 имеет степень выше первой, а значит, и на этом пути обнаружить нечетное совершенное число не удалось. Может быть, в этом плане повезет кому-либо из читателей.

А теперь приведем примеры мультисовершенных чисел, в разложении которых встречаются кратные нечетные простые сомножители.

При  $k = 8$  имеем  $\sigma(2^7) = 3 \cdot 5 \cdot 17$ ,  $\sigma(2^7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17) = (3 \cdot 5 \cdot 17)2^2(2 \cdot 3)(2 \cdot 3^2)$ , появился множитель  $3^4$ ; поскольку  $\sigma(3^4) = 11^2$ ,  $\sigma(11^2) = 7 \cdot 19$ , приходим к числу  $n = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 19$ , для которого  $\sigma(n) = 5n$ . Его нашел Декарт. Можно было на втором этапе взять число  $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$ ; так как  $\sigma(3^3) = 2^3 \cdot 5$ ,  $\sigma(5^2) = 31$ , то получили бы число  $n = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 31$ , для него  $\sigma(n) = 4n$ .

**Упражнение 5.** Найдите мультисовершенные числа для показателей  $k = 11, 12, 16$ .

# Урбен Леверье

А. ВАСИЛЬЕВ

**И**ЗВЕСТНЫЙ ФРАНЦУЗСКИЙ АСТРОНОМ УРБЕН ЖАН ЖОЗЕФ ЛЕВЕРЬЕ (1811–1877) родился в семье мелкого чиновника в Нормандии. Он получил образование в знаменитой Политехнической школе Парижа, которую окончил в 1833 году. После нескольких лет поисков своего научного пути Леверье нашел призвание в небесной механике. Он был автором многих работ в этой области и завоевал авторитет непревзойденного вычислителя исследованиями вековых изменений в движении больших планет (вековыми изменениями называются монотонно растущие со временем отклонения от кеплеровского движения по орбитам, замеченные у Юпитера и Сатурна, а позднее и у Луны). В 1845 году, по совету директора Парижской обсерватории Араго, Леверье занялся задачей расчета движения Урана – седьмой планеты Солнечной системы.

Еще с конца XVIII века астрономы стали замечать странности в поведении Урана. За 50 лет наблюдений им трижды пришлось уточнять таблицы движения этой планеты, но она упрямо сходила с пути, предусмотренного небесной механикой Ньютона. В 40-е годы XIX века расхождение между вычисленными по таблицам и наблюдаемыми положениями Урана достигало десятков угловых секунд, что почти в 100 раз превышало наименьшую величину, которую могли улавливать с точностью до которой измеряли положение небесных тел астрономы. Среди всевозможных гипотез неоднократно высказывалась догадка о существовании далекой планеты, которая своим притяжением возмущает орбиту Урана, но дальше догадок дело не шло.

Леверье с энтузиазмом взялся за решение предложенной Араго задачи, и 10 сентября 1845 года появилась его первая работа о движении Урана, где было показано, что никакими известными причинами объяснить его «неправильное» поведение нельзя. За ней последовала вторая (1 июня 1846 г.), а вскоре (31 августа 1846 г.) и третья работа. В них сообщались необходимые координаты новой планеты, масса и элементы орбиты. Завершив свои вычисления и учитывая ограниченные возможности французских наблюдателей, Леверье 18 сентября 1846 года направил письмо в Берлин, где регулярно выпускались самые точные карты звезд до десятой величины. Получив письмо, астроном Берлинской обсерватории Галле в тот же вечер направил свой телескоп на отмеченное в письме место неба и обнаружил необычную звездочку восьмой величины с явно заметным диском (истинные звезды даже в крупнейшие современные телескопы представляются точками). Сравнив ее положение с указаниями точных звездных карт, Галле убедился, что письмо

Леверье содержит великое открытие. Так в списке больших планет Солнечной системы прибавилась еще одна, восьмая по счету, названная затем Нептуном и удаленная от Солнца на 4,5 миллиарда километров.

Надо сказать, что загадкой Урана еще в 1841 году заинтересовался студент Кембриджского колледжа Джон Адамс. Закончив колледж, он целиком посвятил себя вычислениям. Решая поставленную задачу методом последовательных приближений, Адамс сначала провел все вычисления по 20 наблюдениям Урана за 1780–1840 годы, а затем, получив результаты наблюдений Гринвичской лаборатории за 1750–1830 годы, повторил их заново. После двух лет напряженного труда Адамс решил задачу. В сентябре 1845 года он сообщил профессору астрономии Чаллису массу и элементы орбиты новой, следующей за Ураном планеты, а также указал ее координаты на небесной сфере на 30 сентября 1845 года. К сожалению, директор Гринвичской обсерватории Дж.Эрн с недоверием отнесся к этим расчетам. В результате в течение 9 месяцев работа лежала без движения, и только после выхода второй работы Леверье Эрн поручил Чаллису поиски новой планеты. К тому времени она уже была открыта Галле.

После горячих споров Англии и Франции о приоритете открытия Нептуна ученый мир оценил заслуги обоих астрономов, признав за Адамсом первенство в математическом решении задачи, а за Леверье – заслугу в деле обнаружения планеты.

В 1846 году Леверье возглавил кафедру небесной механики в Парижском университете, а в 1854 году – еще и Парижскую обсерваторию. Дальнейшая его научная деятельность была посвящена уточнению теории движения больших планет Солнечной системы. В результате почти тридцатилетней работы Леверье осуществил капитальную ревизию теории движения Солнца и планет. Его таблицы, особенно солнечные, до настоящего времени используются в Парижском бюро долгот при составлении астрономических ежегодников.

Изучение движения планет привело Леверье к одному из интереснейших открытий науки XIX века. Исследуя с 1843 года движение Меркурия, Леверье пришел к выводу, что возмущения его орбиты не связаны с влиянием известных тел Солнечной системы. Он попытался объяснить это явление действием некоей гипотетической планеты, находящейся ближе к Солнцу, чем Меркурий. На самом деле объяснение наблюдениям Леверье было найдено лишь в начале XX века: аномалии в движении Меркурия оказались следствием новой, более общей, чем ньютоновская, теории тяготения – общей теории относительности Эйнштейна.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 2006 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2006» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2011» или «Ф2018». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2011–М2013, М2015(б), М2016, М2018 предлагались на IV этапе, задачи М2014, М2017(а), М2019, М2020 – на V этапе XXXII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

## Задачи М2011–М2020, Ф2018–Ф2027

**М2011.** Натуральные числа от 1 до 200 разбили на 50 множеств. Докажите, что в одном из них найдутся три числа, являющиеся длинами сторон некоторого треугольника.

М. Мурашкин

**М2012.** В тетраэдре  $ABCD$  из вершины  $A$  опустили перпендикуляры  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $AD'$  на плоскости, делящие двугранные углы при ребрах  $CD$ ,  $BD$ ,  $BC$  пополам. Докажите, что плоскость  $B'C'D'$  параллельна плоскости  $BCD$ .

А. Бадзян

**М2013.** При каких натуральных  $n$  найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа  $a$  и  $b$ , что оба числа  $a + b$  и  $a^n + b^n$  целые?

В. Сендеров

**М2014.** На дугах  $AB$  и  $BC$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , выбраны точки  $K$  и  $L$  соответственно так, что прямые  $KL$  и  $AC$  параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников  $ABK$  и  $CBK$  равноудалены от середины дуги  $ABC$ .

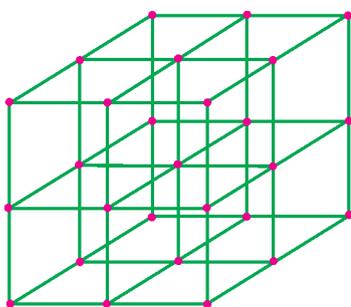


Рис.1

Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников  $ABK$  и  $CBK$  равноудалены от середины дуги  $ABC$ .

С. Берлов

**М2015.** Можно ли спаять проволочный кар-

кас куба  $2 \times 2 \times 2$ , разбитого на кубики  $1 \times 1 \times 1$  (рис.1), из восемнадцати деталей конструктора, в котором каждая деталь имеет вид: а) скобки из трех попарно перпендикулярных спиц длины 1 (рис.2);

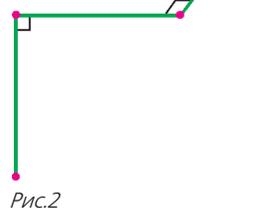


Рис.2

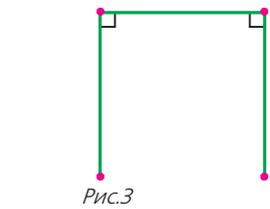


Рис.3

б) скобки из трех спиц длины 1 в виде буквы «П» (рис.3)?

Л. Емельянов

**М2016.** У выпуклого многогранника  $2n$  граней ( $n \geq 3$ ), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно 3 ребра, может быть у такого многогранника?

А. Гарбер

**М2017.** Квадрат  $3000 \times 3000$  произвольным образом разбит на доминошки (т.е. на прямоугольники  $1 \times 2$  клетки).

а) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

б) Докажите, что доминошки можно раскрасить в 4

цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и ни у какой доминошки не было соседей ее цвета.

*А. Пастор*

**M2018.** Докажите, что если натуральное число  $N$  представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.

*П. Козлов*

**M2019.** Окружность  $\omega$  касается равных сторон  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  и пересекает сторону  $BC$  в точках  $K$  и  $L$ . Отрезок  $AK$  пересекает  $\omega$  второй раз в точке  $M$ . Точки  $P$  и  $Q$  симметричны точке  $K$  относительно точек  $B$  и  $C$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $PMQ$  касается окружности  $\omega$ .

*В. Филимонов*

**M2020\***. Известно, что многочлен  $(x+1)^n - 1$  делится на некоторый многочлен  $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$  четной степени  $k$ , у которого все коэффициенты  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  — целые нечетные числа. Докажите, что  $n$  делится на  $k+1$ .

*А. Гарбер*

**Ф2018.** Точка движется вдоль оси  $X$ , скорость точки пропорциональна квадрату ее координаты. Средняя скорость точки на участке (1 м; 2 м) составила 1 м/с. Найдите среднюю скорость на участках (2 м; 4 м) и (1 м; 4 м).

*З. Рафаилов*

**Ф2019.** На тонком и легком жестком стержне длиной  $L$  закреплены два тела — массой  $M$  посередине стержня и массой  $2M$  на одном из его концов. Другой конец стержня закреплен шарнирно. Получившийся маятник раскачивается в вертикальной плоскости, максимальный угол отклонения от вертикали составляет  $1^\circ$ . Найдите период колебаний этого маятника и максимальную разность натяжений половин стержня при движении.

*Р. Простов*

**Ф2020.** Крыло аиста имеет поперечную площадь  $2 \text{ м}^2$ , оно движется вниз с постоянной скоростью  $2 \text{ м/с}$  в течение интервала времени  $0,2 \text{ с}$  и столько же времени — вверх. Может ли аист при собственной массе  $2 \text{ кг}$  лететь на постоянной высоте с грузом массой  $3 \text{ кг}$ ? Для тех, кто не видел аиста: у него ровно два крыла.

*А. Птицын*

**Ф2021.** В глубинах космоса, вдали от всех других тел, летает жидкая планета из ртути — огромный однородный шар. Ускорение свободного падения на поверхности планеты составляет  $1000 \text{ м/с}^2$ . Стальной шарик объемом  $1 \text{ см}^3$  находится на расстоянии трети радиуса планеты от ее центра. Найдите полную силу, которая действует на шарик. Плотность ртути  $13,6 \text{ г/см}^3$ , плотность стали  $7,8 \text{ г/см}^3$ .

*З. Шариков*

**Ф2022.** Порция разреженного гелия находится в сосуде с поршнем. С гелием проводят замкнутый тепловой цикл, который состоит из четырех стадий. На первой стадии газ расширяется вдвое, при этом давление газа все время пропорционально его объему. На второй стадии газ продолжает расширяться — но уже при неизменном давлении, объем газа на этой стадии увеличивается еще в 4 раза. Следующая стадия — давление газа снова пропорционально его объему, газ охлаждается, пока его давление не упадет вдвое. И, наконец, четвертая стадия — охлаждение при неизменном давлении до начального состояния. Найдите термодинамический КПД этого цикла.

*Р. Циклов*

**Ф2023.** На горизонтально расположенном непроводящем стержне закреплены два маленьких тела, заряженных положительно (заряды нам неизвестны). Еще одно положительно заряженное тело — маленькая бусинка — может двигаться без трения вдоль стержня. Бусинка совершает малые колебания около положения равновесия. Во сколько раз изменится период таких колебаний, если расстояние между неподвижными зарядами уменьшится вдвое (разумеется, их для этого придется сделать на некоторое время подвижными)?

*А. Простов*

**Ф2024.** К обычной сети  $220 \text{ В}$ ,  $50 \text{ Гц}$  подключены последовательно соединенные конденсатор емкостью  $1 \text{ мкФ}$  и нагреватель — резистор. Найдите максимальную мощность такого нагревателя. Кстати — зачем там понадобился конденсатор?

*А. Зильберман*

**Ф2025.** К «мостику» из конденсаторов (рис.4) подключили батарейку напряжением  $U_0$ . Затем ее отключили, а между точками  $A$  и  $B$  включили катушку индуктивностью  $L$ . Найдите максимальный ток через катушку. Найдите также полный заряд, протекший через катушку, и выделившееся в ней количество теплоты. Сопротивление соединительных проводов очень мало, сопротивление провода, которым намотана катушка, считать небольшим.

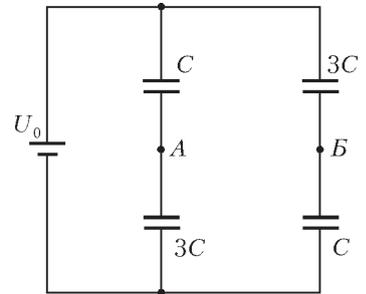


Рис. 4

*Р. Старов*

**Ф2026.** Для задержки во времени звуковых сигналов в прежние годы часто использовали массивную пружину, вдоль которой распространялась упругая волна. Итак, длинная однородная пружина лежит на гладком горизонтальном столе. За один конец пружину начинают растягивать, при этом ее длина увеличивается за  $1 \text{ с}$  на  $5 \text{ см}$ . Через какое время упругая волна добежит до второго конца пружины? Длина всей пружины  $5 \text{ м}$ , полная ее масса  $2 \text{ кг}$ , а жесткость  $100 \text{ Н/м}$ .

*Р. Александров*

**Ф2027.** Дно очень узкого и глубокого колодца квадратного сечения освещают подвешенной на уровне земли маленькой лампочкой, равноудаленной от его стенок. Стенки колодца зеркальные, но покрыты тонким ровным слоем пыли, так что отражается только 98% энергии падающего света. Во сколько раз темнее станет в центре дна колодца, когда пыли со временем станет в 2 раза больше?

Е.Антышев

**Решения задач М1991 – М1995,  
Ф2003 – Ф2012**

**М1991.** Имеется 6 монет, одна из которых фальшивая (она отличается по весу от настоящей, но ее вес, как и вес настоящей монеты, неизвестен). Как за 3 взвешивания с помощью весов, показывающих общий вес взвешиваемых монет, найти фальшивую монету?

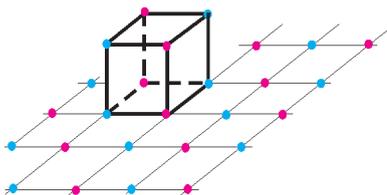
Приведем один из возможных алгоритмов. Обозначим веса монет  $a, b, c, d, e, f$ . Первыми двумя взвешиваниями взвесим  $X = a + b$  и  $Y = c + d$ . Если  $X = Y$ , то фальшивая монета  $e$  или  $f$ . Взвешиваем  $e$ . Если  $e = X/2$ , то  $f$  – фальшивая, иначе – фальшивая  $e$ . Если  $X > Y$ , то  $e$  и  $f$  настоящие. Взвешиваем  $Z = a + c + e$ . Если  $a$  фальшивая, то должно быть  $Z = a + b + c = (a + b) + \frac{c + d}{2} = X + \frac{Y}{2}$ ; если  $b$  фальшивая, то  $Z = 3c = \frac{3Y}{2}$ ; если  $c$  фальшивая, то  $Z = a + c + d = \frac{a + b}{2} + (c + d) = \frac{X}{2} + Y$ ; если  $d$  фальшивая, то  $Z = 3a = \frac{3X}{2}$ . Так как  $\frac{3X}{2} > X + \frac{Y}{2} > \frac{X}{2} + Y > \frac{3Y}{2}$ , то для  $Z$  выполнено ровно одно из равенств  $Z = X + \frac{Y}{2}$ ,  $Z = \frac{3Y}{2}$ ,  $Z = \frac{X}{2} + Y$ ,  $Z = \frac{3X}{2}$ . По этому равенству однозначно находим фальшивую монету. Случай  $X < Y$  аналогичен рассмотренному.

М.Малкин

**М1992.** На плоскости лежал куб. Его перекатали несколько раз через ребра так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на  $90^\circ$  градусов относительно своего начального положения?

**Ответ:** нет.

Раскрасим вершины куба в красный и синий цвета так, чтобы соседние вершины имели разные цвета. Разобьем плоскость на клетки так, чтобы грань куба была одной из клеток. Затем раскрасим все вершины клеток



в шахматном порядке – так, чтобы вершины куба стояли на точках плоскости тех же цветов (см. рисунок). Тогда при любом перекачивании куба вершины его нижней грани

будут совмещаться с точками тех же цветов. Однако если бы верхняя (а значит, и нижняя) грань повернулась на  $90^\circ$ , то красные точки совместились бы с синими – противоречие.

И.Богданов

**М1993.** Пусть  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $ABC$ , а  $X$  – произвольная точка, не лежащая на прямых  $AH, BH, CH$ . Окружность с диаметром  $XH$  вторично пересекает прямые  $AH, BH, CH$  в точках  $A_1, B_1, C_1$ , а прямые  $AX, BX, CX$  – в точках  $A_2, B_2, C_2$  соответственно. Докажите, что прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$  пересекаются в одной точке (или параллельны).

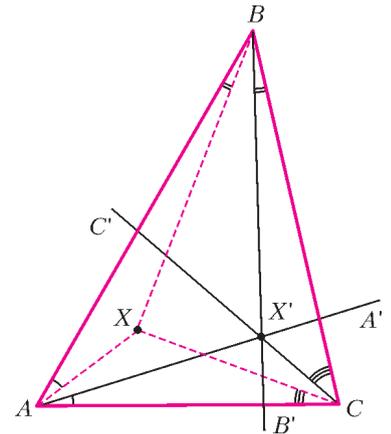


Рис. 1

Воспользуемся следующим фактом: если отразить прямые  $AX, BX, CX$  симметрично относительно биссектрис углов  $A, B, C$  соответственно, то полученные прямые  $AA', BB', CC'$  пересекутся в одной точке  $X'$  или будут параллельны (рис.1). (Это следует, например, из теоремы Чебы, записанной в синусах; точки  $X$  и  $X'$  называются *изогонально сопряженными*.)

Рассмотрим вначале случай, когда точки расположены на окружности в порядке  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  (рис. 2). (Доказательство для любого расположения точек получается, если равенства углов заменить на равенства ориентированных углов, т.е. углов, отсчитываемых от прямой до прямой против часовой стрелки.)

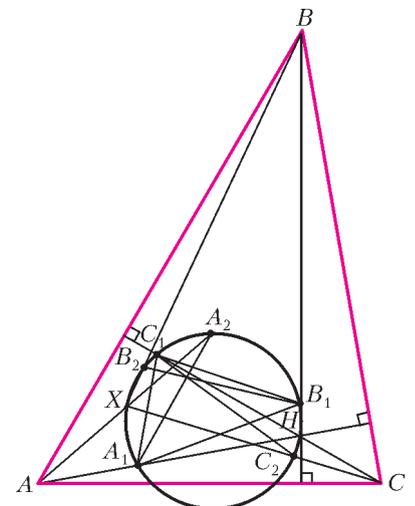


Рис. 2

Из перпендикулярностей  $HA_1 \perp BC$  и  $HC_1 \perp AB$  и свойства вписанных углов вытекает, что  $\angle CBA = \angle A_1HC_1 = \angle A_1B_1C_1$ . Аналогично,  $\angle BAC = \angle C_1A_1B_1$ . Значит, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны (и противоположно ориентированы).

Поскольку  $XH$  – диаметр, то  $HB_2 \perp XB_2$ ; отсюда  $\angle B'VA = \angle CBX = \angle A_1HB_2 = \angle A_1B_1B_2$ . Полученное равенство углов означает, что при преобразовании подобия, переводящем треугольник  $ABC$  в треугольник  $A_1B_1C_1$ , прямая  $BB'$  перейдет в прямую  $B_1B_2$ . Аналогичное утверждение справедливо и для прямых

$A_1A_2$  и  $C_1C_2$ . Так как прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке или параллельны, то прямые  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  также пересекаются в одной точке или параллельны.

А.Заславский, П.Кожевников

**М1994.** а) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше 1,001 г. Докажите, что весь изюм можно разложить на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г.

б) В мешке изюма содержится 2001 изюминка общим весом 1001 г, причем ни одна изюминка не весит больше  $(1 + x)$  г. При каком наибольшем значении  $x$  заведомо можно разложить весь изюм на две чаши весов так, чтобы весы показали разность, не превосходящую 1 г?

Из пункта б) вытекает пункт а), поэтому достаточно решить б).

б) **Ответ:** при  $x = 0,002$  г.

Пусть  $x > 0,002$  г. Обозначим через  $\varepsilon$  меньшее из чисел  $x$  и  $0,002001$ . Пусть в мешке 999 изюминок весом  $(1 + \varepsilon)$  г – назовем эти изюминки *большими*, а оставшийся вес распределен между остальными изюминками произвольным образом (суммарный вес больших изюминок не больше чем  $1,002001 \cdot 999 < 1001$ ). Тогда при любом распределении изюма по чашкам на одной из них будет хотя бы 500 больших изюминок с суммарным весом  $500(1 + \varepsilon)$  г  $> 500 \cdot 1,002$  г = 501 г. Тогда на другой чаше вес будет меньше чем  $1001$  г – 501 г = 500 г, и разность весов будет больше 1 г.

Теперь достаточно доказать, что при  $x = 0,002$  г требуемое распределение весов возможно. Назовем изюминку *весомой*, если она весит больше 1 г. Остальные изюминки назовем *невесомыми*. Возможны два случая. 1) Количество весомых изюминок  $n$  четно:  $n = 2k$ . Тогда  $k \leq 500$ , иначе общий вес был бы не меньше 1002 г. В этом случае разложим их на чашки так, чтобы на каждой чашке лежало по  $k$  весомых изюминок. Тогда вес изюма на каждой чашке будет не меньше  $k$  г и не больше  $1,002k$  г =  $(k + 0,002k)$  г  $\leq (k + 1)$  г. Таким образом, разница весов на чашках на данный момент не больше 1 г.

Будем брать по очереди каждую из остальных изюминок и класть ее на чашку, вес которой не больше веса другой. Так как наша изюминка не тяжелее 1 г, то эта чашка либо не перевесит (и разность весов уменьшится), либо станет тяжелее другой не более чем на 1 г. Таким образом мы разложим все остальные изюминки и получим нужное распределение.

2) Количество весомых изюминок нечетно:  $n = 2k + 1$ . В этом случае  $k \leq 499$ , иначе вес изюма больше 1001 г. Поэтому общий вес весомых изюминок не больше  $1,002(2k + 1)$  г  $\leq 1,002 \cdot 999$  г = 1000,998 г, следовательно, суммарный вес остальных не меньше 0,002 г.

Отложим в сторону одну невесомую изюминку. Если ее вес меньше 0,002 г, то добавим к ней еще одну невесомую. Будем продолжать этот процесс, пока суммарный вес отложенных невесомых изюминок меньше 0,002 г. В результате суммарный вес отложенных будет не

меньше 0,002 г и не больше 1,002 г. Также отложим в сторону одну весомую изюминку. Остальные изюминки по предыдущему пункту разложим на две чаши так, чтобы разность весов на чашках не превосходила 1 г. Теперь рассмотрим две группы изюминок: отложенную группу невесомых и одну отложенную весомую. Разность весов этих групп не больше 1 г. Положим более тяжелую из них на легкую чашку весов, а более легкую – на тяжелую. Тогда разность весов на чашках осталась не больше 1 г.

И.Богданов

**М1995\***. Докажите, что уравнение

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4$$

не имеет решений в натуральных числах.

Вначале докажем **лемму**:

Пусть  $a$  – натуральное число, большее 1, а  $x$  – такое целое неотрицательное число, что  $(a^2 - 1)x^2 + 1$  является квадратом целого числа. Тогда  $x$  является одним из членов последовательности  $\{x_n\}$ , которая задается правилом:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_{k+2} = 2ax_{k+1} - x_k$  при  $k \geq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $(a^2 - 1)x^2 + 1 = y^2$  для натурального  $y$ ,  $x \geq 1$ . Так как  $y^2 = (ax)^2 - x^2 + 1 \leq (ax)^2$ , то можно положить  $y = ax - t$ , где  $t \geq 0$ . После замены получаем

$$x^2 + t^2 - 2axt - 1 = 0. \quad (*)$$

Докажем, что если пара целых неотрицательных чисел  $x$  и  $t$  удовлетворяет (\*), то  $x$  и  $t$  – последовательные члены последовательности  $\{x_n\}$ . Пусть это не так для некоторых  $x = p$ ,  $t = q$ , причем  $p$  и  $q$  среди всех таких пар выберем с минимальной суммой  $p + q$ . Очевидно,  $p \neq q$ . Пусть для определенности  $p > q$ . Если  $q = 0$ , то  $p = 1$ , тогда  $q = x_0$  и  $p = x_1$  – противоречие. Считаем далее, что  $q \geq 1$ .

Положим  $f(x) = x^2 - 2aqx + q^2 - 1$ . Имеем  $f(p) = 0$ ,  $f(q) = 2q^2 - 2aq^2 - 1 < 0$ , поэтому  $f(x)$  имеет второй корень  $p_1$  такой, что  $p_1 < q < p$ . Из теоремы Виета  $p + p_1 = 2aq$ , откуда  $p_1$  – целое и  $pp_1 = q^2 - 1$ , значит,  $p_1$  неотрицательно. Пара  $(p_1, q)$  удовлетворяет (\*), причем  $p_1 + q < q + p$ , и по нашему предположению найдется такой номер  $l$ , что  $p_1 = x_l$  и  $q = x_{l+1}$ . Но тогда  $p = 2aq - p_1 = 2ax_{l+1} - x_l = x_{l+2}$ , т.е.  $p$  и  $q$  – тоже пара последовательных членов последовательности  $\{x_k\}$  – противоречие.

Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи.

Допустим,  $m$  и  $n$  удовлетворяют условию задачи. Имеем

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} m(m+1)^2(m+2)^3(m+3)^4 + 1 &= \\ &= (m(m+2))((m+1)(m+2)(m+3)^2)^2 + 1 = \end{aligned}$$

$$= \left( (m+1)^2 - 1 \right) \left( (m+1)(m+2)(m+3)^2 \right)^2 + 1$$

является точным квадратом. Положив  $a = m + 1$ , из леммы получаем, что число  $(m+1)(m+2)(m+3)^2$  является членом последовательности  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{k+2} = (2m+2)x_{k+1} - x_k$  при  $k \geq 0$ . Легко проверить по индукции, что последовательности остатков чисел  $x_0, x_1, x_2, \dots$  при делении на  $2m+1$  и на  $2m+3$  периодичны с периодами  $(0, 1, 1, 0, -1, -1)$  и  $(0, 1, -1, 0, 1, -1)$  соответственно. Следовательно,  $x_k$  может давать при делении на  $2m+1$  и на  $2m+3$  лишь один из остатков  $0, \pm 1$ . Предположим, что найдется такой номер  $l$ , что  $x_l = (m+1)(m+2)(m+3)^2$ . Тогда

$$\begin{aligned} 16x_l &= (2m+2)(2m+4)(2m+6)^2 = \\ &= ((2m+1)+1)((2m+1)+3)((2m+1)+5)^2 = \\ &= (2m+1)s + 3 \cdot 5^2 = (2m+1)s + 75 \end{aligned}$$

должно давать один из остатков  $0, \pm 16$  при делении на  $2m+1$ . Поэтому одно из чисел  $75, 75 - 16 = 59, 75 + 16 = 91$  должно делиться на  $2m+1$ . Аналогично,

$$\begin{aligned} 16x_l &= (2m+2)(2m+4)(2m+6)^2 = \\ &= ((2m+3)-1)((2m+3)+1)((2m+3)+3)^2 = \\ &= (2m+3)s - 9, \end{aligned}$$

поэтому получаем, что одно из чисел  $9, 9 + 16 = 25, |9 - 16| = 7$  должно делиться на  $2m+3$ . Для  $m$  остаются 3 возможности: 1, 2, 3.

При  $m = 1$  имеем  $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 96$ , а соответствующая последовательность  $\{x_k\}$  имеет вид  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 15, x_4 = 56, x_k > 96$  при  $k \geq 5$ ; при  $m = 2$  имеем  $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 300$ , а соответствующая последовательность  $\{x_k\}$  имеет вид  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 6, x_3 = 35, x_4 = 204, x_k > 300$  при  $k \geq 5$ ; при  $m = 3$  имеем  $(m+1)(m+2)(m+3)^2 = 720$ , а соответствующая последовательность  $\{x_k\}$  имеет вид  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 63, x_4 = 496, x_k > 720$  при  $k \geq 5$ .

*Замечание.* Обратное утверждение леммы тоже верно, т.е. в формулировке леммы описываются все решения уравнения  $x^2(a^2 - 1) + 1 = y^2$ . Другое доказательство леммы можно получить, если рассматривать это уравнение как уравнение Пелля и использовать тот факт, что все его решения  $(x, y)$  являются членами последовательности целых  $(x_k, y_k)$ , задаваемых равенством  $(\sqrt{a^2 - 1} + 1)^k = x_k \sqrt{a^2 - 1} + y_k, k \geq 0$ .

А.Иванов

**Ф2003.** Тонкое велосипедное колесо раскрутили вокруг его оси, удерживая ее неподвижной. При этом пришлось совершить работу  $A$  и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колеса. Колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность тележки такой же массы, которая мо-

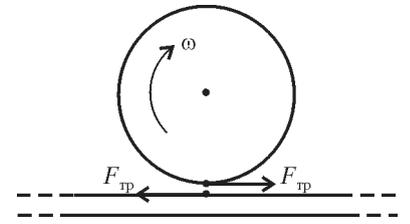
жет свободно двигаться по гладкому горизонтальному столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет тележку? Колесо во время движения остается вертикальным.

Кинетическая энергия колеса после совершения работы  $A$  равна

$$A = \frac{1}{2} M \omega_0^2 R^2,$$

где  $M$  масса,  $\omega_0$  – начальная угловая скорость,  $R$  – радиус колеса. На достаточно длинной тележке колесо через некоторое время будет двигаться без проскальзывания, и с этого момента выделение тепла прекратится. Ясно, что максимальное количество теплоты выделится именно в этом случае. А до момента прекращения проскальзывания на колесо действует сила трения

$$F_{\text{тр}} = \mu Mg,$$



и для вращающегося колеса уравнение движения выглядит так (см. рисунок):

$$F_{\text{тр}} \cdot R = -MR^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \text{ или } \Delta\omega = -\frac{\mu g}{R} \Delta t.$$

Ускорение оси колеса направлено вправо и равно  $a = \mu g$ , откуда получаем

$$\Delta v = a \Delta t = \mu g \Delta t = -\Delta\omega R.$$

Ускорение тележки (при равенстве масс) такое же по величине, но направлено влево. Условие прекращения проскальзывания запишем в виде

$$R\omega_1 = 2v.$$

Тогда получаем

$$R\omega_1 = 2R(\omega_0 - \omega_1), \text{ и } \omega_1 = \frac{2}{3}\omega_0.$$

В этот момент скорости тележки и оси колеса одинаковы и равны  $\frac{1}{3}R\omega_0$ . Запишем теперь баланс энергий:

$$A = \frac{1}{2} M \left( \frac{2}{3} \omega_0 \right)^2 R^2 + 2 \frac{M (R\omega_0/3)^2}{2} + Q,$$

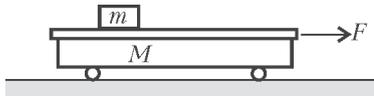
откуда найдем выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{3} A.$$

А.Сложнов

**Ф2004.** На гладком горизонтальном столе находится тележка массой 3 кг, на ее поверхности лежит очень легкий лист бумаги, на нем – груз массой 1 кг. Лист бумаги тянут в горизонтальном направлении силой 10 Н. С каким ускорением движется этот лист, если коэффициент трения между бумагой и каждым из тел составляет 0,7?

На тележку и на груз (см. рисунок) действуют вправо силы трения со стороны листа бумаги. Они были бы



одинаковы в случае, когда лист проскальзывает относительно обоих тел, но в нашем случае это не так. Раз-

беремся с проскальзыванием.

При малой величине  $F$  тела едут вместе, их ускорения одинаковы и равны

$$a = \frac{F}{M + m}.$$

При увеличении силы  $F$  более тяжелая ( $M = 3m$ ) тележка начнет отставать, ее максимальное ускорение под действием силы трения  $F_{\text{тр}} = \mu mg$  составит

$$a_0 = \frac{\mu mg}{M} = \frac{1}{3}\mu g.$$

Это произойдет при величине действующей силы

$$F_0 = (M + m) \cdot \frac{1}{3}\mu g = \frac{28}{3} \text{ Н}.$$

При  $F = 10 \text{ Н} > F_0$  тележка проскальзывает, сила трения между листом и тележкой составляет 7 Н. Но лист легкий, поэтому сумма действующих на него сил должна быть нулевой. Значит, на груз действует сила  $F_1 = 10 \text{ Н} - 7 \text{ Н} = 3 \text{ Н}$ , и его ускорение составляет  $a_1 = 3 \text{ м/с}^2$ . Лист имеет такое же ускорение, т.е.  $3 \text{ м/с}^2$ .

Кстати, если задать в условии  $F > 14 \text{ Н}$ , то нельзя будет считать массу листа нулевой!

А. Старов

**Ф2005.** Через легкий блок, закрепленный на большой высоте над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка. Концы веревки сложены внизу двумя «бухтами», которые не препятствуют движению. С одной стороны блока за веревку ухватился человек массой  $M = 60 \text{ кг}$ , который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удастся. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки  $\rho = 2 \text{ кг/м}$ . Ускорение свободного падения считать равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Трение в блоке отсутствует.

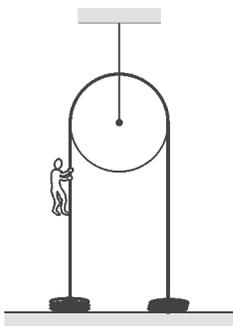
Слева на веревку (см. рисунок) действует дополнительная сила  $F = Mg$ , именно эта сила «вовлекает» в движение все новые куски веревки. При установившемся режиме масса веревки, вовлеченной в движение за время  $\Delta t$ , будет равна  $\Delta m = \rho v_{\text{уст}} \Delta t$ . Изменение импульса за это время составит  $\Delta m v_{\text{уст}}$ . Тогда запишем

$$Mg \Delta t = \Delta m v_{\text{уст}} = \rho v_{\text{уст}}^2 \Delta t,$$

откуда и найдем установившуюся скорость:

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} \approx 17 \text{ м/с}.$$

А. Повторов



**Ф2006.** Теплоизолированный сосуд, содержащий гелий при температуре  $T_0 = 30 \text{ К}$  движется со скоростью  $v = 1000 \text{ м/с}$ . Какой станет температура газа в сосуде через некоторое время после резкой остановки сосуда? Теплообменом газа со стенками сосуда пренебречь. Моль гелия имеет массу  $m = 4 \text{ г}$ .

Проекции скоростей молекул газа на оси координат  $v_x, v_y, v_z$  в системе отсчета, связанной с движущимся сосудом, соответствуют температуре  $T_0$ . После остановки сосуда нужно рассмотреть движение молекул в новой, неподвижной, системе отсчета:

$$v_x^* = v + v_x, \quad v_y^* = v_y, \quad v_z^* = v_z.$$

Энергия одной молекулы составит, в среднем,

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{2} (v_x^{*2} + v_y^{*2} + v_z^{*2}) &= \frac{m_0}{2} \left( (v + v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2 \right) = \\ &= \frac{m_0}{2} v^2 + \frac{m_0}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + m_0 v v_x. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю ( $\bar{v}_x = 0$ ), поэтому средняя кинетическая энергия молекулы составит

$$\bar{\epsilon} = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3}{2} k T_0.$$

После хаотизации движения частиц в сосуде можно будет говорить о температуре  $T_1$  такой, что

$$\frac{3}{2} k T_1 = \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{3}{2} k T_0.$$

Удобно рассмотреть один моль газа, тогда получим

$$T_1 = T_0 + \frac{1}{3} \frac{M v^2}{R} \approx 190 \text{ К},$$

где  $M = 4 \text{ г/моль}$  – молярная масса гелия,  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$  – универсальная газовая постоянная.

А. Старов

**Ф2007.** В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве  $\nu = 2 \text{ моль}$ . Ей сообщают количество теплоты  $Q = 100 \text{ Дж}$ , при этом температура гелия увеличивается на  $\Delta T = 10 \text{ К}$ . Оцените изменение объема газа, считая его теплоемкость в этом процессе постоянной.

В условии задачи сказано про постоянную теплоемкость – это сделано для того, чтобы исключить экзотические процессы, в которых давление и температура при небольших добавках энергии могут очень сильно меняться (вначале в одну сторону, потом в другую). Считая изменение условий (давление, температура) малыми – мы это еще проверим, – получим

$$Q = p \Delta V + \nu C_V \Delta T,$$

где  $p = 10^5 \text{ Па}$  – нормальное атмосферное давление,  $C_V = \frac{3}{2} R$  – молярная теплоемкость гелия при постоян-

ном объеме. Отсюда получаем

$$\Delta V = \frac{Q - \nu C_V \Delta T}{\rho} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Итак, объем *уменьшается* на 1,5 литра.

По сравнению с начальным значением (при нормальных условиях)  $2 \cdot 22,4 \text{ л} \approx 45 \text{ л}$  это изменение и в самом деле невелико.

А.Газов

**Ф2008.** *Закрепленная неподвижно непроводящая тонкостенная сфера массой  $M$  равномерно заряжена по поверхности полным зарядом  $Q$ . Из нее вырезают маленький кусочек, масса которого равна  $1/10000$  массы сферы, сминают его в крошечный комочек, помещают в центр сферы (заряд кусочка при этом сохраняется) и отпускают. Какая скорость у него будет на большом расстоянии от сферы? А какую скорость он приобретет к моменту вылета из сферы? Силы тяжести отсутствуют.*

Комочек можно считать *точечным* зарядом  $q = Q/10000$  с массой  $m = M/10000$ . Если комочек отпустить из центра без начальной скорости, он начнет ускоряться как раз в сторону дырки – поле «испорченной» сферы внутри уже не нулевое.

Проще всего найти скорость на бесконечности. Потенциал поля сферы, обозначим ее радиус  $R$ , в центре равен

$$\varphi = \frac{Q - q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

а потенциал на бесконечности – нулевой. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

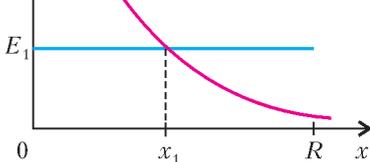
$$\frac{mv_1^2}{2} = q\varphi,$$

откуда находим скорость комочка на бесконечности:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q\varphi}{m}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot 10^{-4} \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 R \cdot M \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 R M}}.$$

Сложнее оценить скорость к моменту вылета из сферы. Вернем назад (мысленно!) вырезанный кусочек поверхности с зарядом  $q$  и одновременно добавим такой же кусочек с зарядом  $-q$ . Ясно, что силы, действующие на интересующий нас комочек, определяются его взаимодействием с добавленным кусочком с зарядом  $-q$ . Вдали этот кусочек напоминает точечный заряд  $-q$ , а при подлете к нему он становится похожим на бесконечную заряженную плоскость, создающую поле

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$



На графике (см. рисунок) показаны поле точечного заряда и поле бесконечной плоскости в зависимо-

сти от расстояния  $x$  до центра дырки. Будем считать взаимодействие на участке от  $R$  до  $x_1$  по первой из зависимостей, т.е. по модели точечного заряда, а на участке от  $x_1$  до нуля – по модели бесконечной плоскости. Вначале найдем «точку пересечения»  $x_1$ :

$$\frac{Q \cdot 10^{-4}}{4\pi\epsilon_0 x_1^2} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2},$$

откуда

$$x_1 = 0,014R.$$

Кинетическая энергия комочка определяется работой электростатических сил:

$$\begin{aligned} \frac{mv_2^2}{2} &= q(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) = \\ &= q\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + E_1 x_1\right) \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x_1} + \frac{qQx_1}{8\pi\epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем скорость комочка на вылете из сферы:

$$v_2 \approx \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 R M} \cdot 7 \cdot 10^{-3}} \approx \frac{v_1}{12}.$$

Видно, что комочек серьезно набирает скорость только после вылета из сферы.

И еще – важно, что сфера непроводящая, иначе пришлось бы учитывать перераспределение зарядов при подлете комочка к поверхности сферы. Впрочем, наличие дырки в этом месте очень способствует уменьшению этого эффекта.

А.Зильберман

**Ф2009.** *К идеальной батарейке с ЭДС  $U_0 = 1,3 \text{ В}$  подключена мостиковая электрическая цепь, собранная из трех одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причем один из миллиамперметров включен в диагональ мостика (рис. 1). Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Определите показания каждого из вольтметров. Сопротивление вольтметра больше, чем у миллиамперметра.*

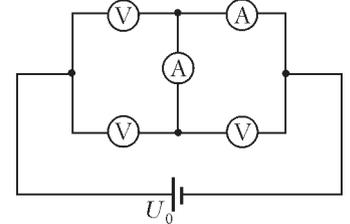


Рис. 1

Если сопротивление вольтметра больше, чем сопротивление амперметра (слово «амперметр» – короче, чем «миллиамперметр»), то ток через верхний амперметр больше. На рисунке 2 эти токи обозначены  $I$  и  $3I$ . Пусть сопротивление амперметра  $r$ , а вольтметра  $R$ . Напряжения вольтметров составляют: верхнего  $U_0 - r \cdot 3I$ , нижнего справа  $r \cdot 3I + r \cdot I = 4rI$ , нижнего слева  $U_0 - 4rI$ . Теперь запи-

Рис. 2

шем соотношения для токов в верхнем и нижнем узлах:

$$\frac{U_0 - 3rI}{R} + I = 3I,$$

$$\frac{U_0 - 4rI}{R} = I + \frac{4rI}{R}.$$

Отсюда легко выразить величину  $rI$ :

$$rI = \frac{U_0}{13} = 0,1 \text{ В}.$$

Тогда показание верхнего вольтметра будет

$$U_1 = U_0 - 3rI = 1 \text{ В},$$

нижнего правого –

$$U_2 = 4rI = 0,4 \text{ В}$$

и нижнего левого –

$$U_3 = U_0 - U_2 = 0,9 \text{ В}.$$

*А.Простов*

**Ф2010.** Две одинаковые легкие пружины прикреплены к маленькому массивному телу. Одна из пружин другим концом приклеена к полу, другая пружина – к потолку. Рассмотрим два варианта малых колебаний тела – в вертикальном и горизонтальном направлениях. Найдите отношение периодов таких колебаний. Пружины в положении равновесия вертикальны. Начальные длины пружин считать малыми.

Силы натяжения пружин в положении равновесия (рис. 1) равны  $T_1 = kl_1$  и  $T_2 = kl_2$ , причем  $T_1 - T_2 = Mg$ . Сместим груз по вертикали вниз на малую величину  $x$ , при этом возникнет возвращающая дополнительная сила

$$F_1 = 2kx.$$

Запомним это значение, а считать пока ничего не будем.

Теперь сместим груз по горизонтали вправо на ту же малую величину  $x$ . Длины пружин при этом изменяются совсем мало, тогда и силы натяжения остаются прежними. Возвращающая сила возникает как сумма проекций сил  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  на горизонтальное направление (рис. 2):

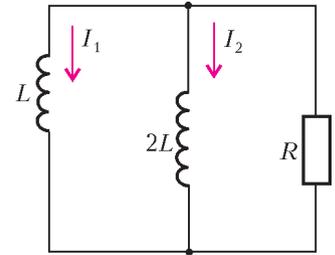
$$F_2 = T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 \approx kl_1 \frac{x}{l_1} + kl_2 \frac{x}{l_2} = 2kx.$$

Видно, что при том же по величине смещении возникают одинаковые возвращающие силы. Значит, и периоды колебаний должны быть одинаковыми.

*Р.Александров*

**Ф2011.** Параллельно включены катушки с индуктивностями  $L$  и  $2L$  и резистор сопротивлением  $R$ . В данный момент токи через катушки одинаковы по величине, текут в одну сторону и составляют  $I_0$  каждый. Какой полный заряд протечет через резис-

тор за большое время, и сколько тепла выделится в резисторе? Указанные элементы цепи считать идеальными, никаких других элементов в цепи нет.



Токи через катушки изменяются со временем так, что ЭДС индукции  $\varepsilon$  в

любой момент одинаковы. Отсюда следует, что изменения токов катушек связаны соотношением  $\Delta I_1 = 2\Delta I_2$ . Через резистор сопротивлением  $R$  протекает ток (см. рисунок)  $I = I_1 + I_2$ . Спустя очень большой интервал времени будет достигнуто условие  $I_1 + I_2 = 0$ . Тогда можно записать

$$(I_0 - I_1) = 2(I_0 - I_2)$$

и при  $I_1 = -I_2$  получим

$$I_1 = -\frac{1}{3}I_0, \quad I_2 = \frac{1}{3}I_0,$$

т.е. ток через катушку индуктивностью  $L$  изменит направление на противоположное.

Заряд, протекающий через резистор за малый интервал времени  $\Delta t_i$ , равен  $\Delta q_i = \frac{\varepsilon_i}{R} \Delta t_i$ . Подставив зна-

чение  $\varepsilon_i = -L \frac{\Delta I_{1i}}{\Delta t_i}$ , получим

$$\Delta q_i = -\frac{L}{R} \Delta I_{1i}.$$

Суммарный заряд, прошедший через резистор, будет

$$Q = \sum \Delta q_i = -\frac{L}{R} \sum \Delta I_{1i} = -\frac{L}{R} \left( -\frac{1}{3}I_0 - I_0 \right) = \frac{4}{3} \frac{LI_0}{R}.$$

Количество теплоты  $W_T$ , выделившееся в резисторе, найдем из баланса начальной и конечной энергий:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} = \frac{L(I_0/3)^2}{2} + \frac{2L(I_0/3)^2}{2} + W_T,$$

откуда

$$W_T = \frac{4}{3} LI_0^2.$$

*З.Рафаилов*

**Ф2012.** Катушку индуктивности и конденсатор соединили параллельно и подключили к сети переменного напряжения 220 В, 50 Гц последовательно с амперметром переменного тока (сопротивление амперметра очень мало). Показания амперметра составили при этом 0,015 А. Теперь катушку и конденсатор соединили последовательно и вновь подключили к сети. Напряжение, измеренное на конденсаторе вольтметром (его сопротивление можно считать очень большим), составило 300 В, а напряжение на зажимах катушки оказалось равным 85 В. Считая показания приборов точными, определите по этим данным емкость конденсатора, индуктивность катушки и сопротивление провода, которым намотана катушка. Конденсатор можно считать идеальным, потери

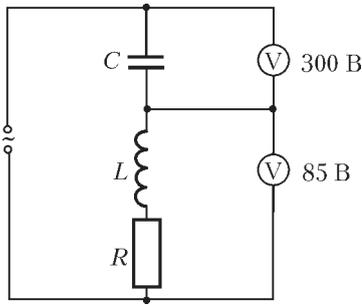


Рис. 1

в сердечнике катушки очень малы – неидеальность катушки определяется сопротивлением провода, которым она намотана.

Начнем со второй схемы – последовательного соединения конденсатора и катушки (рис. 1). Видно, что напряжения 300 В и 85 В

почти противофазны:  $300 \text{ В} - 85 \text{ В} \approx 220 \text{ В}$ . Ясно, что для начала можно пренебречь сопротивлением провода, считая катушку идеальной. Тогда несложно найти индуктивность катушки  $L$  и емкость конденсатора  $C$ , а дальше, опираясь на полученные значения, можно найти и сопротивление провода  $R$ .

Итак, для последовательного включения запишем

$$\frac{\omega L}{1/(\omega C)} = \frac{85}{300}, \text{ или } \omega^2 LC = \frac{85}{300}.$$

Для параллельного включения конденсатора и катушки можно записать

$$\frac{220}{\omega L} - \frac{220}{1/(\omega C)} = 0,015,$$

или

$$\omega L = \frac{(1 - \omega^2 LC) \cdot 220}{0,015}.$$

Подставляя значение

$$\omega^2 LC = \frac{85}{300}, \text{ для } \omega = 314 \text{ с}^{-1} \text{ получаем}$$

$$L = 33,5 \text{ Гн},$$

$$C = 0,09 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,09 \text{ мкФ}.$$

Найдем теперь значение  $R$ . Для этого определим сдвиг фаз между током в цепи (последовательная схема) и напряжением 85 В на неидеальной катушке (рис. 2):

$$\sin \varphi = \cos \alpha = \frac{300^2 + 85^2 - 220^2}{2 \cdot 300 \cdot 85} = 0,957.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} = 3,3, \text{ и } R = 3,5 \text{ кОм}.$$

Погрешность получается небольшой – судя по величине  $\sin \varphi \approx 0,96$ , а упрощение расчетов очень существенное.

А.Длиннов

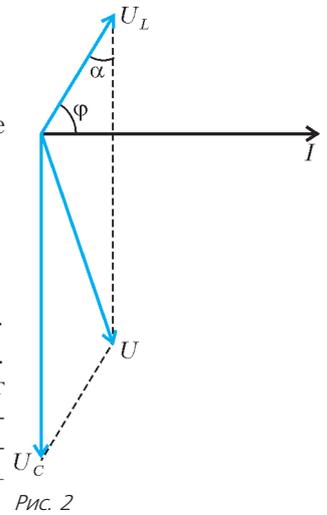


Рис. 2

## Победители конкурса имени А.П. Савина «Математика 6–8» 2005/06 учебного года

### Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Зльденко Олег – Беер-Шева, Израиль, 8 кл.,  
 Левин Дорон – Беер-Шева, Израиль, 8 кл.,  
 Габидулина Надежда – Севастополь, гимназия 1, 7 кл.,  
 Дудкин Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
 Кольцов Иван – Ярославль, 8 кл.,  
 Лысакевич Анастасия – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
 Балкашин Александр – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
 Ибраимова Айжана – Бишкек, ФМШЛ 61, 7 кл.,  
 Гарагатый Игорь – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,  
 Калашник Владислав – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.

### и кружки:

Математического клуба при Университете им. Бен-Гуриона в Негеве, Беер-Шева, Израиль, руководители П.Самовол, Й.Хейфец,  
 гимназии 127, Снежинск, руководитель А.А.Малеев,  
 центра «Олимп», Ярославль, руководитель И.М.Игнатович,  
 «Эврика» при ФМЛ 27, Харьков, руководители Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий,  
 школы индивидуального образования одаренных детей, Магнитогорск, руководитель А.В.Христева,  
 гимназии 1, Самара, руководитель А.А.Гусев,  
 школы 9 им. А.С. Пушкина, Пермь, руководитель О.Н. Вязьмина,

школы 622, Санкт-Петербург, руководитель Н.А.Петровская,  
 «Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководитель Т.М.Сергеева,  
 Малого университета при Харьковском национальном университете им. В.Н.Каразина, руководители С.А.Лифиц, А.С.Щербина,  
 центра дополнительного математического образования, Курган, руководитель О.И.Южаков.

### Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Кравченко Александра – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
 Филимоновой Карины – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
 Жениленко Вячеслава – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,  
 Доричевой Даши – Ярославль, 8 кл.,  
 Хараджиева Олега – Набережные Челны, гимназия 26, 7 кл.,  
 Горельшева Сергея – Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,  
 Лисичкина Владислава – Харьков, гимназия 47, 8 кл.,  
 Бичурина Игоря – Харьков, гимназия 55, 8 кл.,  
 Комориной Галины – Краснодар, школа 42, 7 кл.

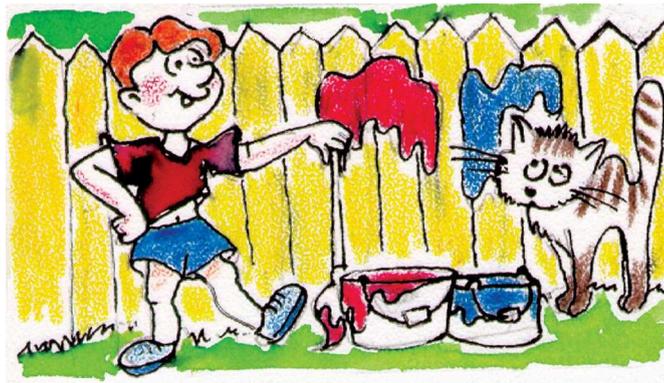
### и кружков:

ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель Л.С.Хохлова,  
 Политехнической гимназии, Нижний Тагил, руководитель Т.В.Сабурова,  
 школы 10, Ангарск, руководитель Л.В.Шварева.

# Задачи

1. Может ли произведение трех последовательных натуральных чисел равняться произведению трех последовательных четных чисел?

*В. Произволов*

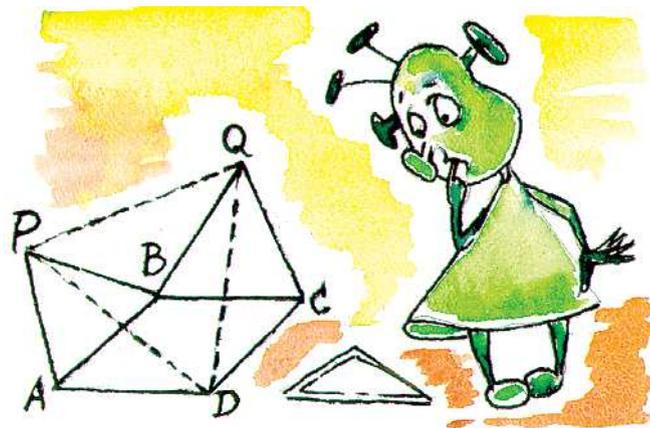
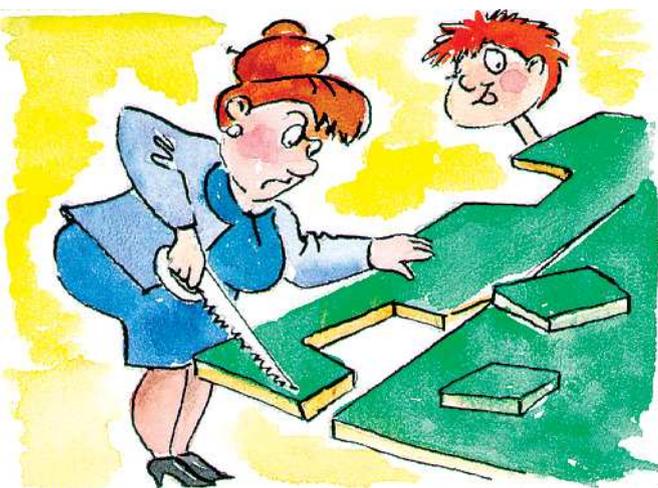


4. На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ , как на основаниях, построены равносторонние треугольники  $ABP$  и  $BCQ$ . Докажите, что треугольник  $PQD$  равносторонний.

*В. Произволов*

2. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске  $8 \times 8$ , чтобы каждая отмеченная клетка имела общую сторону не более чем с одной отмеченной клеткой?

*И. Акулич*



5. Миллионзначное число назовем кошачьим, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько кошачьих чисел может стоять подряд среди чисел натурального ряда?

*В. Сендеров*

3. Натуральные числа окрашены в красный и синий цвета так, что произведение чисел разных цветов — число всегда красного цвета, а их сумма — всегда синего. Какого цвета произведение двух красных чисел?

*Олимпиада «Оранж-2006», Израиль*



# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

**6.** Гирьки набора 1 г, 2 г, ..., 100 г разложили по 50 штук на 2 чашки весов так, что весы показали равновесие. Верно ли, что с каждой чашки можно снять по 2 гирьки так, что равновесие сохранится?

*В. Произволов*

**7.** Укажите две целочисленные арифметические прогрессии такие, чтобы в первой было сколько угодно квадратов целых чисел, но ни одного куба, а во второй – сколько угодно кубов, но ни одного квадрата.

*А. Зайчик*

**8.** Многоугольник имеет 400 углов, каждый из которых равен целому числу градусов. Докажите,

что у многоугольника найдутся 3 параллельные стороны.

*В. Произволов*

**9.** Неотрицательные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x + y + z = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{5}{2}.$$

*В. Шарич, В. Сендеров*

**10.** Какое наибольшее количество шахматных коней можно расставить на доске  $101 \times 101$  клеток так, чтобы они не били друг друга?

*В. Брагин (ученик 8 кл.)*

## Дополняй и властвуй

*П. САМОВОЛ, М. АППЕЛЬБАУМ, А. ЖУКОВ*

**П**РИНЦИП «DIVIDE ET IMPERA», ИЛИ «РАЗДЕЛЯЙ И властвуй», приписывают Александру Македонскому. В науке он тоже находит свое применение. Так, большую проблему бывает полезно разложить на ряд небольших задач. Иногда, однако, помогает и обратное преобразование, т.е. дополнение «части» до «целого». Это довольно часто происходит при решении геометрических задач, когда дополнительные построения помогают справиться с задачей быстро и эффективно. В алгебре прием «дополняй и властвуй» менее популярен. Но не менее эффективен. Вот примеры.

**Задача 1.** Разложите на множители:

$$1) x^4 + 1; \quad 2) x^8 + x + 1.$$

**Решение.** В первом примере дополним выражение до полного квадрата:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Во втором примере дополнение выстраивается «ле-

сенкой»:

$$\begin{aligned} x^8 + x + 1 &= \\ &= (x^8 + x^7 + x^6) - (x^7 + x^6 + x^5) + (x^5 + x^4 + x^3) - \\ &\quad - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

**Задача 2.** Докажите равенство

$$\frac{1}{5} + \frac{3}{6} + \frac{5}{7} + \frac{7}{8} = \frac{7}{2} - \frac{6}{3} + \frac{5}{4} - \frac{4}{5} + \frac{3}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8}.$$

**Решение.** Конечно, действуя стандартно, можно было бы привести дроби к одному знаменателю, но это делать как-то не хочется... Давайте попробуем прибавить к обеим частям равенства одну и ту же сумму  $\frac{7}{2} + \frac{6}{3} + \frac{5}{4} + \frac{4}{5} + \frac{3}{6} + \frac{2}{7} + \frac{1}{8}$  и посмотрим, что получится.

В левой части:

$$\begin{aligned} \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{5}{7} + \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right) + \frac{5}{4} + \frac{6}{3} + \frac{7}{2} = \\ = 4 + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{3}{3}\right) + \left(1 + \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

В правой части:

$$2\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{4} + \frac{3}{6} + \frac{1}{8}\right) = 7 + \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$$

– но ведь это то же самое, что и в левой части!

**Упражнение 1.** Докажите равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} + \frac{3}{2n+2} + \frac{5}{2n+3} + \dots + \frac{4n-1}{4n} &= \\ &= \frac{4n-1}{2} - \frac{4n-2}{3} + \frac{4n-3}{4} - \dots - \frac{2}{4n-1} + \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

**Задача 3.** Упростите выражение

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

**Решение.** Эта классическая задача допускает множество красивых решений. Наиболее известное из них такое. Заметим, что дробь вида  $\frac{1}{n \cdot (n+1)}$  можно «расщепить» на алгебраическую сумму дробей попроще:  $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ . Если расписать таким образом каждое слагаемое в сумме, то обнаружится, что в новом выражении почти все дроби чудесным образом взаимно уничтожаются:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Расскажем еще об одном, не менее изящном, способе решения этой задачи. Дополним данное выражение дробью  $\frac{-n}{n+1}$  (справа) и начнем складывать дроби «с конца»:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} - \frac{n}{n+1} = \frac{1-n^2}{n \cdot (n+1)} = \frac{1-n}{n} = \frac{-(n-1)}{n}.$$

Как видим, получилась дробь такого же вида, что и прибавка  $\frac{-n}{n+1}$ , но с уменьшенными на единицу числителем и знаменателем. Значит, продолжая складывать полученный результат с предыдущей дробью, мы от шага к шагу будем «сворачивать» всю цепочку и «на финишной прямой» получим

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Итак, исходная сумма равна  $\frac{n}{n+1}$ .

**Задача 4.** Вычислите

$$52 \cdot 50 - 53 \cdot 49 + 54 \cdot 48 - 55 \cdot 47 + \dots + 100 \cdot 2 - 101 \cdot 1.$$

**Решение.** Дополним выражение алгебраическими слагаемыми, в сумме дающими ноль (они подчеркнуты):

$$\begin{aligned} (52 \cdot 50 - \underline{50 \cdot 49}) + (\underline{50 \cdot 49} - 53 \cdot 49) + \\ + (54 \cdot 48 - \underline{48 \cdot 47}) + (\underline{48 \cdot 47} - 55 \cdot 47) + \dots \\ \dots + (100 \cdot 2 - \underline{2 \cdot 1}) + (\underline{2 \cdot 1} - 101 \cdot 1) = \\ = (50 \cdot 3 - 49 \cdot 3) + (48 \cdot 7 - 47 \cdot 7) + \dots \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \dots + (2 \cdot 99 - 1 \cdot 99) &= 3 + 7 + 11 + \dots + 99 = \\ &= \frac{3+99}{2} \cdot 25 = 1275. \end{aligned}$$

**Задача 5.** Докажите, что каждый член последовательности 16, 1156, 111556, ... является квадратом целого числа.

**Решение.** Рассмотрим  $n$ -й член последовательности:

$$a_n = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{55\dots5}_n + 1 = \underbrace{11\dots1}_n \cdot 10^n + 5 \underbrace{11\dots1}_n + 1,$$

$n$  цифр в числе  $\underbrace{11\dots1}_n$  и  $n$ -я степень десятки ( $10^n$ ) наводят на мысль «дополнить» единицы до девяток:

$$\underbrace{11\dots1}_n = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99\dots9}_n = \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1).$$

А дальше – обычная техника:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) \cdot 10^n + \frac{5}{9} \cdot (10^n - 1) + 1 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} - 10^n + 5 \cdot 10^n) - \frac{5}{9} + 1 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4) = \left( \frac{10^n + 2}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

(Подумайте, почему число  $10^n + 2$  делится на 3.)

**Упражнение 2.** а) Докажите, что каждое число последовательности

$$\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}, \dots$$

является кубом целого числа.

б) (по мотивам задачи «Турнира городов», 2006). Докажите, что можно найти бесконечно много пар целых чисел таких, чтобы в десятичной записи каждого числа все цифры были не меньше 7 и произведение чисел каждой пары тоже было числом, все цифры которого не меньше 7.

(Подсказка: докажите, что для любого целого  $k \geq 0$  пара чисел  $m = \underbrace{899\dots987}_k$ ,  $n = \underbrace{877\dots7}_{k+2}$  удовлетворяет условию задачи.)

**Задача 6.** Докажите неравенство

$$\frac{20 \cdot 18}{19 \cdot 17} + \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13} + \dots + \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} > 10$$

(в каждой дроби четное количество множителей в числителе и в знаменателе).

**Решение.** При рассмотрении суммы в левой части неравенства – обозначим ее  $S_1$  – невольно возникает впечатление, что ее можно дополнить промежуточными слагаемыми. Попробуем: давайте добавим к ней сумму

$$S_2 = \frac{20}{19} + \frac{20 \cdot 18 \cdot 16}{19 \cdot 17 \cdot 15} + \dots + \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot \dots \cdot 4}{19 \cdot 17 \cdot 15 \cdot \dots \cdot 3}.$$

Складывая дроби в общей сумме  $S_1 + S_2$  «с конца» (т.е. начиная с наиболее громоздких дробей), мы обнаружим, что вся сумма великолепным образом складывается – как телескопическая антенна. Действительно, сумма двух последних слагаемых равна

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 4}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 3} + \frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1} = 4 \cdot \frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 6}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 5}.$$

Сложим этот результат с предыдущим слагаемым:

$$4 \cdot \frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 6}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 5} + \frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 6}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 5} = 6 \cdot \frac{20 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 8}{19 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 7}.$$

Продолжая подобным образом «поедать» слагаемые и дальше, в итоге придем к началу ряда:

$$\begin{aligned} \frac{20}{19} + \frac{20 \cdot 18}{19 \cdot 17} + \frac{20 \cdot 18 \cdot 16}{19 \cdot 17 \cdot 15} + 14 \cdot \frac{20 \cdot 18 \cdot 16}{19 \cdot 17 \cdot 15} = \\ = \frac{20}{19} + \frac{20 \cdot 18}{19 \cdot 17} + 16 \cdot \frac{20 \cdot 18}{19 \cdot 17} = \frac{20}{19} + 18 \cdot \frac{20}{19} = 20. \end{aligned}$$

Итак,  $S_1 + S_2 = 20$ . Поскольку в суммах  $S_1$  и  $S_2$  равное количество слагаемых, причем каждое слагаемое суммы  $S_1$  больше соответствующего слагаемого суммы  $S_2$ , то  $S_1 > S_2$  и, значит,  $S_1 > 10$ .

**Задача 7** (из вступительного задания на Малый механико-математический факультет МГУ, 1985). Докажите неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \dots \\ \dots + \frac{1}{\sqrt{77} + \sqrt{78}} + \frac{1}{\sqrt{79} + \sqrt{80}} > 4. \end{aligned}$$

**Решение.** Сначала стандартным способом избавимся от всех иррациональностей в знаменателях левой части неравенства. Найдем сумму

$$\begin{aligned} S_1 = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{6} - \\ - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{78} - \sqrt{77} + \sqrt{80} - \sqrt{79}. \end{aligned}$$

Структура этого выражения «подсказывает» добавить к нему число

$$\begin{aligned} S_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{4} + \sqrt{7} - \\ - \sqrt{6} + \dots + \sqrt{79} - \sqrt{78} + \sqrt{81} - \sqrt{80}. \end{aligned}$$

Очевидно, после целого ряда сокращений получим

$$S_1 + S_2 = \sqrt{81} - 1 = 8.$$

Далее замечаем, что для всех натуральных  $k$

$$\begin{aligned} \sqrt{2k} - \sqrt{2k-1} &= \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}} > \\ > \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+1}} &= \sqrt{2k+1} - \sqrt{2k}, \end{aligned}$$

поэтому  $S_1 > S_2$  и, следовательно,  $S_1 > 4$ .

**Упражнение 3** (олимпиада «Оранжевый», 2005–2006, Израиль). а) Найдите 100 первых цифр числа

$$\begin{aligned} N = 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{6}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{7}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15} + \dots \\ \dots + \frac{1002}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2005} + \frac{1003}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2007}. \end{aligned}$$

б) Расположите числа  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в порядке возрастания:

$$\begin{aligned} A = 2, \\ B = \frac{8000}{7999} \cdot \frac{7997}{7996} \cdot \frac{7994}{7993} \cdot \dots \cdot \frac{1004}{1003} \cdot \frac{1001}{1000}, \end{aligned}$$

$$C = \sqrt[3]{\sqrt{576} - \sqrt{575} + \sqrt{573} - \sqrt{572} + \dots + \sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

# Как Студент думал Землю ОСТАНОВИТЬ

А. СТАСЕНКО

*Бывает, что усердие  
превозмогает и рассудок.*

Козьма Прутков

**О**ДНАЖДЫ ПОД УТРО ПОДУМАЛОСЬ СТУДЕНТУ: ЕСТЬ же на Земле такие счастливые места, где ночь длится полгода! И тут пришла ему в голову Идея: остановить вращение Земли – чтобы утро вообще не наступило. Ведь повернута же Луна к нам только одним своим полушарием.

Понятно, что затормозить вращение можно, например, при помощи реактивной силы выбрасываемой массы. Но какую массу для этого придется выбросить в космос? С какой скоростью? И вот, чтобы не утруждать себя деталями, в «тонком полусне» Студент сделал простые численные оценки.

Ясно, что искомую массу  $\Delta m$  нужно выбрасывать симметрично относительно оси вращения – чтобы не изменить

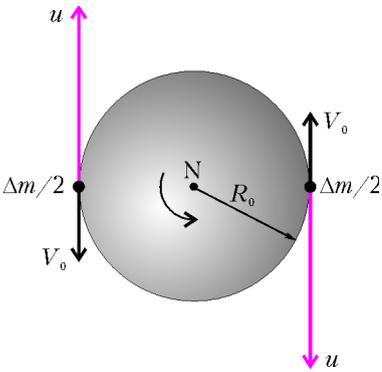


Рис. 1

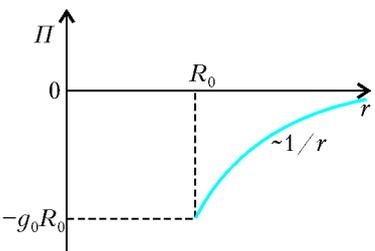
движение центра масс Земли. И, конечно, противоположно направлению ее окружной (линейной) скорости  $V_0$ . Например, так, как изображено на рисунке 1, где N – северный полюс, а  $u$  – искомая скорость выброса относительно Земли. В системе неподвижных звезд скорость выброса будет равна  $u - V_0$ .

Для того чтобы выброшенная масса не возвратилась, ее скорость на бесконечном удалении от Земли должна по крайней мере обратиться в ноль. Значит, там равна нулю ее кинетическая энергия. Но и потенциальная энергия  $\Pi$  там тоже равна нулю – см. рисунок 2, где  $-g_0 R_0$  это потенциальная энергия единицы массы на поверхности Земли. Следовательно, закон сохранения полной механической

энергии единицы массы можно записать в виде  $\frac{(u - V_0)^2}{2} + (-g_0 R_0) = 0 + 0$ .

Отсюда находим  $u = \sqrt{2g_0 R_0} + V_0$ .

«Конечно, это только оценка, – успокоил себя Студент, – ведь в процессе



выброса будет изменяться и масса Земли, и ее радиус, и, следовательно, ускорение тяготения на поверхности». (Поэтому величины  $V$ ,  $g$ ,  $R$  и отмечены индексом «0» – чтобы подчеркнуть, что для оценки берутся их начальные значения.) Но если в результате окажется, что искомая масса  $\Delta m$  много меньше начальной массы Земли  $M_0$  ( $\Delta m \ll M_0$ ), то эта оценка вполне разумна и может быть принята в качестве «первого приближения» – как любят говаривать физики.

Далее, чтобы не утруждать себя такими понятиями, как момент силы и момент инерции, Студент смело принял упрощенную модель Земли. Он представил ее в виде обруча, вдоль которого распределена вся ее масса. Тогда начальный «вращательный» импульс Земли равен  $M_0 V_0 \equiv (M_0 - \Delta m) V_0 + \Delta m V_0$  (в этом выражении уже выделена отбрасываемая масса  $\Delta m$ ). Сразу после выброса вращение оставшейся массы  $M_0 - \Delta m$ , по предположению, прекратилось, а отброшенная масса приобрела скорость  $u - V_0$ . Тогда закон сохранения импульса будет выглядеть так:

$$(M_0 - \Delta m) V_0 + \Delta m V_0 = (M_0 - \Delta m) \cdot 0 + \Delta m (u - V_0),$$

откуда получаем

$$\frac{\Delta m}{M_0} = \frac{V_0}{u - V_0} = \frac{V_0}{\sqrt{2g_0 R_0}}.$$

Осталось найти численные значения. Тут время вспомнить, что радиус Земли  $R_0 = 6,4 \cdot 10^6$  м, ее масса  $M_0 = 6 \cdot 10^{24}$  кг, а период обращения вокруг своей оси  $T_0 = 24$  ч. Тогда окружная скорость на экваторе Земли равна

$$V_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{3600 \frac{\text{с}}{\text{ч}} \cdot 24 \text{ ч}} \approx 465 \text{ м/с}$$

(больше скорости звука в воздухе!). Стоящее в знаменателе предыдущей формулы выражение  $\sqrt{2g_0 R_0}$  – это вторая космическая скорость  $v_{II}$ , равная

$$v_{II} = \sqrt{2g_0 R_0} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 6,4 \cdot 10^6 \text{ м}} \approx 11 \text{ км/с}.$$

В итоге получаем

$$\frac{\Delta m}{M_0} = \frac{0,46}{11} \approx 4\%.$$

«А если учесть, что Земля – это не обруч, а шар, – подумал Студент, – то ее затормозить легче, поскольку не вся ее масса находится на расстоянии  $R_0$  от оси вращения». Действительно, неслучайно есть такое понятие, как момент инерции: для шара он равен  $\frac{2}{5} M_0 R_0^2$ , а для обруча  $M_0 R_0^2$ . (Иными словами, Землю можно было бы представить обручем радиусом  $R = \sqrt{\frac{2}{5}} R_0$ .) Значит, потребуется выбросить массу еще приблизительно в  $\frac{2}{5}$  раз меньшую, т.е.

$$\frac{\Delta m}{M_0} < 2\%.$$

Именно с такой точностью верно принятое нами предположение  $\Delta m \ll M_0$ .

Но много это или мало? Сравним, например, с массой земной коры, плавающей на более тяжелой магме (той самой, которая иногда вытекает из вулканов). Земная кора сложена, в основном, из базальтов и гранитов, покрытых менее плотным слоем осадочных пород. Положим для оценок среднюю толщину коры равной  $h = 20$  км, а плот-

ность – порядка  $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Тогда масса этого шарового слоя будет порядка

$$m_k = \rho h \cdot 4\pi R_0^2 = 3 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 4\pi (6,4 \cdot 10^6)^2 \text{ кг} \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ кг}.$$

А масса океана еще меньше:

$$m_{\text{ок}} \approx 1,4 \cdot 10^{21} \text{ кг}.$$

(Более точные данные можно найти, например, в книге А.В.Бялко «Наша планета – Земля» – М.: Наука, Библиотечка «Квант», вып.29.) В сумме эти массы составляют приблизительно

$$\frac{3 \cdot 10^{22}}{6 \cdot 10^{24}} = 5 \cdot 10^{-3} = 0,5\%$$

от массы Земли. Таким образом, даже если выбросить в космос все океаны и всю земную кору (вплоть до более плотных пород, куда еще никто не добирался), то и этого не хватит, чтобы остановить вращение Земли.

Но пусть даже хватило бы массы. А какую наименьшую энергию надо было бы затратить, чтобы сообщить выбрасываемой массе вторую космическую скорость? Кинетическая энергия этой массы равна

$$\frac{\Delta m v_{II}^2}{2} \approx \frac{0,02 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} \cdot (11 \cdot 10^3 \text{ м/с})^2}{2} \approx 10^{31} \text{ Дж}.$$

Сколько же потребовалось бы, например, керосина, чтобы обеспечить такую потребность в энергии? При сгорании одного килограмма керосина выделяется примерно  $4 \cdot 10^7 \text{ Дж}$  тепла. Если предположить, что все оно идет в «дело» без потерь, то необходимая минимальная масса сгоревшего керосина должна составить

$$m_{\text{кер}} \approx \frac{10^{31} \text{ Дж}}{4 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}} \approx 2 \cdot 10^{23} \text{ кг}.$$

О, да это ведь сотня океанов из чистого керосина!

И Студенту стало жаль и массы, и энергии Земли. «Нет уж, – подумал он, – лучше встать и пойти на лекцию».

# Электрические машины и выбор режима

**Г.БАКУНИН**

**А**НАЛОГИЯ – ОДИН ИЗ ВАЖНЕЙШИХ ИНСТРУМЕНТОВ исследования. Это неоднократно подчеркивалось как известными учеными, так и историками науки. Воспользуемся этим инструментом и обсудим сходство и различие «мощностных» характеристик хорошо известных электрических устройств.

Рассмотрим простейшую электрическую цепь – модель электронагревателя, состоящую из источника, имеющего ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$ , и нагрузки – резистора сопротивлением  $R$  (рис.1). Вычислим полезную мощность такого устройства, опи-

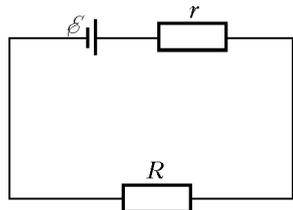


Рис. 1

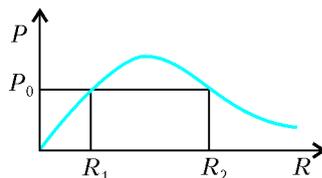


Рис. 2

раясь на закон Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \quad P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R.$$

График зависимости  $P(R)$  приведен на рисунке 2. Несложно заметить, что график обладает максимумом, т.е. имеются две возможности обеспечить полезную мощность  $P_0$  устрой-

ства в зависимости от внешней нагрузки  $R_1$  или  $R_2$ . Большому значению  $R$  при этом соответствует меньшее значение тока в цепи.

Таким образом, даже в простейшей электрической машине – электронагревательном приборе – существует возможность выбора режима работы.

Более сложной оказывается ситуация в случае электрического мотора постоянного тока. Здесь в цепи якоря генерируется индукционная ЭДС  $\mathcal{E}_i$ , и закон Ома записывается в виде

$$U - \mathcal{E}_i = IR,$$

где  $U$  – внешнее напряжение, а  $R$  – сопротивление якоря. Естественно предположить, что индуцированная ЭДС пропорциональна частоте вращения  $\omega$  якоря:

$$\mathcal{E}_i = \Phi_0 \omega,$$

где  $\Phi_0$  – размерный коэффициент, равный максимальному потоку магнитной индукции через рамку якоря. Анализ выражения для полной мощности:

$$UI = \mathcal{E}_i I + I^2 R$$

показывает, что полезная мощность связана с членом  $\mathcal{E}_i I$ , где ток якоря  $I$  зависит линейно от частоты вращения  $\omega$ :

$$I = I(\omega) = \frac{U - \mathcal{E}_i(\omega)}{R} = \frac{U - \Phi_0 \omega}{R}.$$

Таким образом, зависимость полезной мощности электрической машины постоянного тока от частоты вращения якоря имеет вид

$$P(\omega) = \mathcal{E}_i(\omega) I(\omega) = \frac{\Phi_0}{R} (\omega(U - \Phi_0 \omega)).$$

Здесь, как и в предыдущем случае, виден максимум мощности, однако теперь выбор режима зависит от частоты (рис.3).

Заметим, что нагрузка в данной задаче связана с вращательным моментом, который способен создать электромотор:

$$M(\omega) = \frac{P(\omega)}{\omega} = \frac{\Phi_0}{R} (U - \Phi_0 \omega).$$

Стабильная работа мотора обеспечивается балансом этого момента и момента  $M_0$ , создаваемого внешней нагрузкой. Например, если мотор равномерно поднимает на веревке

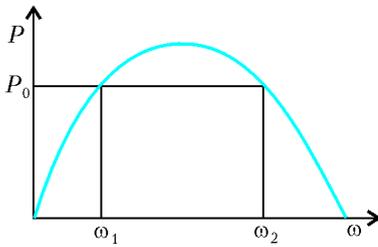


Рис. 3

вращения  $\omega_*$  определяется балансом моментов (рис.4):

$$M(\omega_*) = M_0.$$

Что же получается, электрический мотор сам выбирает понравившуюся ему мощность? Действительно, если момент нагрузки меньше момента, создаваемого мотором, то ротор раскручивается все сильнее и сильнее, пока частота не достигнет значения  $\omega_*$ . В противоположном случае, когда момент нагрузки больше момента, создаваемого мотором, ротор тормозится до тех пор, пока баланс моментов не восстановится. Иными словами, значение  $\omega_*$  соответствует

положению устойчивого равновесия. Следовательно, несмотря на формальную возможность выбора частоты вращения ротора для заданной величины полезной мощности  $P_0$ , ротор раскручивается до тех пор (до такой частоты  $\omega_*$ ), пока не выполнится условие равенства моментов. Мощность в этом случае определяется внешней нагрузкой  $M_0$ :

$$P_* = M_0 \omega(M_0) = M_0 \left( \frac{U}{\Phi_0} - \frac{R M_0}{\Phi_0^2} \right) = \frac{M_0}{\Phi_0} \left( U - \frac{R}{\Phi_0} M_0 \right).$$

Этот простой пример показывает, как непросто навязать свою волю машинам, даже если это всего лишь электрические машины постоянного тока.

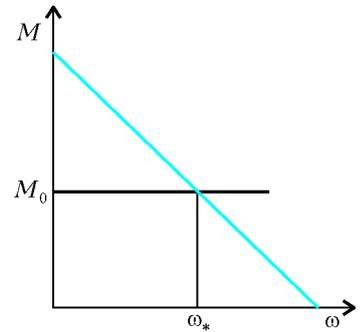


Рис. 4

# Фокус шара

**Д.ВИКТОРОВ**

*И даль свободного романа  
Я сквозь магический кристалл  
Еще не ясно различал.*

А.С.Пушкин

**О**ДНАЖДЫ У МЕНЯ В РУКАХ ОКАЗАЛСЯ ОПТИЧЕСКИЙ раритет – хрустальный шар диаметром 5,5 сантиметров, изготовленный предположительно в Великобритании. Предпоследний владелец использовал этот магический кристалл в конце XIX – начале XX века (точный год изготовления изделия неизвестен). Сквозь толщу лет пробиваются староанглийские слова, переведенные на русский язык:

*«...Наблюдатель должен сесть спиной к свету, держа шар на ладони руки, которая может удобно покоиться на коленях, или шар можно поместить на столе на подставке под ним и поставить сзади экран из черного бархата или темного материала. Последний физически помогает отключить боковой свет и отражение.*

*Постоянное «глядение» в полной тишине абсолютно необходимо, так как в отличие от других оккультных явлений отвлечение внимания или первичного (обычного) сознания очень неблагоприятно.*

*Успех обнаруживается, когда сфера, прекращая отражать, становится молочной. Появляется туманный цвет (обычно красный и его дополнительный – зеленый), превращаясь в темноту, которая откатывается прочь, подобно занавесу, который открывает взгляду наблюдателя картины, сцены, фигуры в движении, интересные сентенции и т.д.*

*Оживление скрытой памяти или воспоминаний о будущем является одной из главных особенностей этого опыта.*

Признаюсь, что у меня не получилось разглядеть в шаре что-либо необычное. Видимо, я отношусь к тем 25% людей, которые «ничего не смогут сделать вообще», как говорится в обращении к читателю (покупателю шара). Из этого,

конечно, не следует, что ни у кого не получится, хотя инструкция, с современной точки зрения, и выглядит весьма фантастично. С другой стороны, магические кристаллы выпускались в XIX веке явно не единичными экземплярами. И если бы в них ничего и никому нельзя было увидеть, то кто бы их стал приобретать? В любом случае, последнее слово за достаточно массовым экспериментом...

В солнечную погоду легко экспериментально убедиться в том, что шар фокусирует солнечные лучи, действуя как собирающая линза. Данный шар собирает лучи на расстоянии 5 мм от его поверхности.

Интересно, что маленькие капельки воды на листьях растений имеют почти сферическую форму (из-за значительного преобладания сил поверхностного натяжения над силой тяжести). Такие капельки, фокусируя солнечные лучи на листьях, точно обжигают их. Вот почему растения не надо поливать в то время, когда они освещены солнцем.

Рассчитаем теперь теоретически фокусное расстояние шара  $F = OC$  (рис.1). Рассмотрим луч, идущий вблизи одной из главных оптических осей шара параллельно ей. Место пересечения вышедшего из шара луча и оси – точка  $C$  – и есть фокус «толстой» линзы, т.е. нашего шара. Параксиальность лучей гарантирует нам, что углы  $\alpha, \beta, \gamma$  будут малыми, т.е. значительно меньшими одного радиана. По закону преломления света в точках  $A$  и  $B$  имеем соответственно

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad n \sin \beta = \sin \gamma,$$

где  $n$  – показатель преломления материала шара. Отсюда получаем  $\gamma = \alpha$ . Применим к треугольнику  $OBC$  теорему синусов:

$$\frac{F}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin(2\alpha - 2\beta)},$$

откуда получим

$$F = \frac{R \sin \alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta)},$$

где  $R$  – радиус шара. Так как синус малого (в радианной мере) угла можно (и нужно) заменить самим углом, то окончательно имеем

$$F = \frac{R\alpha}{2(\alpha - \beta)} = \frac{Rn}{2(n-1)}. \quad (1)$$

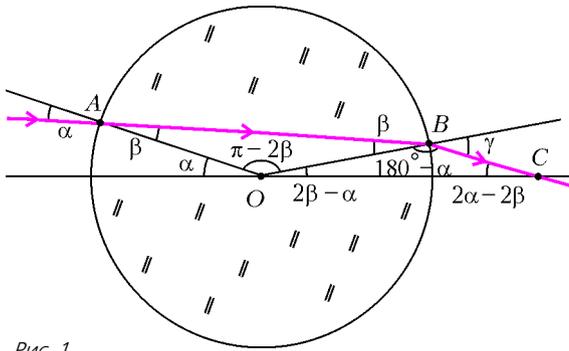


Рис. 1

Факт отсутствия здесь величины  $\beta$  говорит о том, что все параксиальные лучи собираются в одной точке  $C$ , т.е. мы нашли действительно фокус.

Полученная формула дает возможность, используя предыдущие измерения, узнать показатель преломления стекла, из которого изготовлен шар:

$$n = \frac{2F}{2F - R} = \frac{4F}{4F - d} = \frac{4 \cdot 3,25}{4 \cdot 3,25 - 5,5} = 1,73.$$

Видим, что магический кристалл сделан из качественного оптически плотного стекла.

Из формулы (1) для фокусного расстояния легко вывести, что

$$\begin{aligned} \text{при } 1 < n < 2 \quad F > R, \\ \text{при } n = 2 \quad F = R, \\ \text{при } n > 2 \quad F < R. \end{aligned}$$

Ясно, что рисунок 1 и выведенная на его основе формула справедливы при  $1 < n < 2$ . А для  $n > 2$  придется сделать другой рисунок (рис.2) и получить другую формулу фокуса шара. Вычисления весьма похожи на первый случай, поэтому будем кратки: применим теорему синусов к треугольнику  $AOC$  и запишем закон преломления света в точке  $A$ . Синусы малых углов сразу заменим самими углами. Тогда из уравнений

$$\frac{F}{\beta} = \frac{R}{\alpha - \beta} \quad \text{и} \quad \alpha = n\beta$$

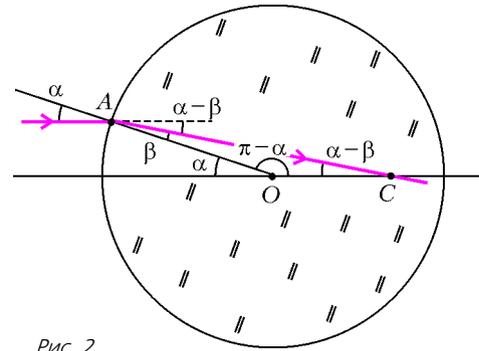


Рис. 2

сразу находим

$$F = \frac{R}{n-1}. \quad (2)$$

Отметим, что для  $n = 2$  подходят обе формулы фокусного расстояния шара – (1) и (2). А бывает ли показатель преломления стекла больше двух? Обычно в задачах встречаются числа, меньшие двух, но в «Справочнике по физике» А.С.Еноховича, например, указан диапазон показателей преломления оптического стекла от 1,47 до 2,04. Можно надеяться, что при неизбежном совершенствовании техники и технологии изготовления оптического стекла удастся получить образцы и с большими показателями преломления.

В заключение сравним «толстую» и «тонкую» линзы. Если для шара мы получили две разные формулы фокусного расстояния: одну для  $n \leq 2$ , другую для  $n \geq 2$ , то для тонкой линзы такая формула, как известно, одна:

$$F = \frac{1}{(n-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы сферических поверхностей, ограничивающих тонкую линзу. В частности, при  $R_1 = R_2 = R$

$$F = \frac{R}{2(n-1)}. \quad (3)$$

Видно, что формула (3) отличается и от формулы (1), и от формулы (2).

## «Непослушные колючки»

(Начало см. на 2-й с. обл.)

Чемпионаты по решению занимательных задач-головоломок проводятся в нашей стране с 1998 года. Организует их московский клуб «Диоген», объединяющий сотни любителей головоломок из многих городов России и зарубежных стран.

Летом 2006 года в Москву приехали 34 претендента на звание чемпиона России. Они завоевали это право по итогам заочных соревнований, которые проводятся круглый год на сайте [www.diogen.h1.ru](http://www.diogen.h1.ru). Итоговое состязание в Москве проходило в несколько туров и длилось более шести часов. В результате четвертый год подряд чемпионом стал Андрей Богданов из города Железнодорожный Московской области.

На подобных соревнованиях, как правило, предлагаются задачи, для решения которых достаточно иметь лист бумаги и карандаш или ручку. Но для некоторых заданий и этого не потребовалось. Участникам раздали предметные (механические) головоломки в разобранном виде. Задача состояла в том, чтобы собрать их, т.е. расположить детали головоломок определенным образом.

Головоломку «Непослушные колючки» вы легко можете сделать самостоятельно. Для этого перенесите контуры пластины и колючки с обложки журнала на лист клетчатой бумаги, а затем вырежьте копию пластины и четыре одинаковые колючки.

Понятно, что первую и вторую колючки уложить внутрь шестиугольника очень легко. При укладке третьей детали вам придется изрядно потрудиться. На чемпионате быстрее всех головоломку решила Наталья Налимова из Екатеринбурга, вторым был Андрей Богданов. Им понадобилось для этого менее пяти минут.

Организаторы считали, за 15 минут головоломку должны решить все, но за это время с ней справились только 12 человек. Поэтому откроем секрет, которого не знали участники чемпионата: укладывать в шестиугольник легче сразу четыре колючки, а не три! Подумайте сами: все детали одинаковы, а шестиугольник симметричен, следовательно, можно заранее предположить, что из колючек надо складывать компактную и симметричную фигуру, состоящую из двух одинаковых половинок. Если до этого догадаться, то решение будет найдено быстро.

А.Калинин

*Посмотри сквозь перила моста, и ты увидишь, как мост плывет по неподвижной воде.*

Китайское изречение

*За Киевом показалось великое чудо! Вдруг стало видно далеко во все концы света. Вдали засинел Лиман, за Лиманом разливалось Черное море. Бывалые люди узнали и Крым...*

Николай Гоголь

*...Познавание явлений природы, воспринимаемых через зрение, выходит за рамки физики как таковой... Совершенно излишне сравнивать зрительные ощущения двух разных людей, смотрящих на один и тот же предмет.*

Ричард Фейнман

## А так ли хорошо знакомы вам зрительные иллюзии?

С самими иллюзиями нам приходится сталкиваться чуть ли не каждый день, но вряд ли мы их вообще замечаем или расцениваем как иллюзии. Действительно, разве мы задумываемся над тем, что изображение на экране в кино либо в телевизоре это ряд сменяющихся кадров, сливающихся в движущуюся картинку только благодаря особенностям наших глаз? Или, глядя в зеркало, вспоминаем, что видим в нем *мнимые* изображения предметов да и самих себя?

Однако если все же задумаемся да еще и прислушаемся к порой скептическим замечаниям об обманах зрения, на которые не скупилась и ученые и писатели с древних времен до наших дней, то можем поставить вопрос: а насколько это касается физики? Возможно, разгадки оптических иллюзий надо искать физиологам и врачам или психологам и искусствоведам? Но, с другой стороны, разве может физика отказать от дальнейших попыток понять, каким образом мы воспринимаем окружающий мир, если в ее арсенале накоплен огромный опыт оптических исследований, в том числе и зрительных иллюзий? Скорее, объединение усилий ученых и практиков самых разных направлений принесет успех — и не только в удовлетворении любопытства при раскрытии тайн зрения, но и для решения медицинских, технических и других задач. Это и лечение глазных болезней, и создание новых визуальных средств коммуникации, и снабжение роботов зрением...

Пока же ограничим себя вопросами, требующими знания лишь в объеме школьной оптики. А об иллюзиях, связанных с устройством глаза или с атмосферными явлениями, мы напомним поговорить позже.

### Вопросы и задачи

1. Почему в ясный солнечный день при сближении двух предметов, например карандашей или пальцев рук, их тени на экране тянутся друг к другу и «слипаются» раньше, чем соприкасаются сами предметы?
2. Расположив спичку между глазом и книжным текстом, закроем ею какую-нибудь строку. Затем сделаем то же самое, держа спичку на расстоянии 1–2

сантиметра от глаза. Теперь текст будет виден «сквозь» спичку. Почему?

3. Наблюдая днем лунный серп, мысленно проведите линию по его оси симметрии. Будет ли эта линия проходить через Солнце?

4. Если отойти от сетчатой ограды, окружающей теннисный корт, то играющих станет видно лучше. Как это объяснить?

5. Со времен Аристотеля считается, что яркие звезды можно увидеть и днем, если смотреть на небо через длинную, например печную, трубу или из глубокого колодца. Так ли это?

6. В плоском зеркале получено мнимое изображение Солнца. Можно ли этим «мнимым солнцем» прожечь бумагу с помощью собирающей линзы?

7. Выпуклые зеркала сильно искажают форму предметов. Почему же рядом с кабинами водителей автомашин устанавливают именно такие зеркала?

8. Можно ли продемонстрировать кому-либо, как свеча горит под водой?

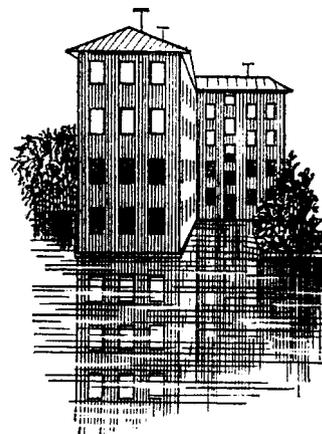
9. В летний солнечный день асфальтовое шоссе кажется блестящим, если смотреть на него вдаль. Почему?

10. В дождливый день дом отражается в мокром асфальте. Отчего в изображении дома, как видно из рисунка, все окна светлые, хотя на самом доме окна нижних этажей темные?

11. Человек стоит по пояс в воде на горизонтальном дне бассейна. Почему ему кажется, что он стоит в углублении?

12. С погруженной подводной лодки определили скорость пролетающего над ней самолета. Во сколько раз кажущаяся скорость самолета отличается от истинной?

13. Стекланный прямоугольный аквариум с непроз-



ранными ребрами просматривается по направлению его диагонали, при этом наблюдается удвоенное изображение рыбки, если она находится вблизи противоположного ребра. Почему?

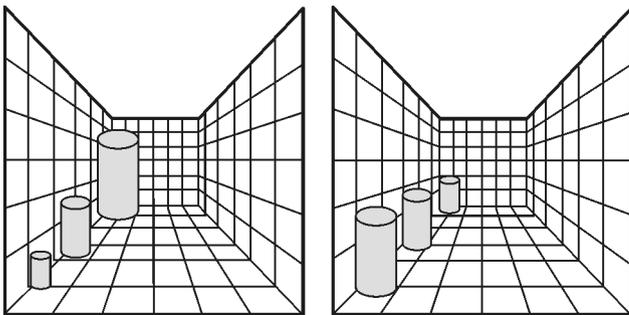
**14.** Если посмотреть на монету, лежащую на дне заполненной водой банки, под определенным углом, то изображение монеты можно увидеть на поверхности воды. Но если приложить с обратной стороны банки мокрую ладонь, то изображение исчезнет. Чем это можно объяснить?

**15.** Почему восходящее или заходящее Солнце часто кажется сплюснутым?

**16.** Солнце или Луна приобретают красный оттенок, если находятся низко над горизонтом. Чем это объяснить?

### Микроопыт

Взгляните на два приведенных рисунка. Попробуйте оценить на глаз, во сколько раз отличаются размеры



ближнего и дальнего цилиндров. Затем проверьте ваши прикидки с помощью линейки.

### Любопытно, что...

...несмотря на то что грекам еще в третьем веке до новой эры были известны некоторые законы геометрической оптики, ее неразрывная связь с особенностями человеческого восприятия не подвергалась сомнению. Это отразилось даже в названии дисциплины, изучавшей свойства света, — «зрительное искусство».

...одно из ранних объяснений действия вогнутых зеркал было дано в XIII веке Роджером Бэконом. Во всяком случае, с помощью таких зеркал ему удавалось создавать «висящие» в воздухе предметы, что давало повод невежественным современникам обвинять его в волшебстве.

...когда в 1818 году Огюст Френель представил в Парижскую академию наук свой «Мемуар о дифракции света», расчеты, проделанные по его теории известными физиками, приводили к парадоксальным результатам. Например, в центре тени от шарика на экране должно было наблюдаться светлое пятно. Ученые не верили своим глазам, обнаружив это пятно в эксперименте, но это была не иллюзия, а факт, подтверждающий волновую природу света.

...атмосферная рефракция солнечных лучей объяс-

няет не только возникновение оптических миражей; благодаря ей на несколько минут удлинится световой день, а в высоких широтах полярная ночь оказывается короче полярного дня.

...демонстрируя увеличение или уменьшение людей и предметов, их молниеносное появление или исчезновение, а также свободное «парение» над землей, знаменитые чародеи и иллюзионисты, например Дэвид Копперфилд, вполне расчетливо опираются на знание физических законов и зачастую применяют самую современную оптическую технику.

...моряки, побывавшие в Исландии, привозили в Европу необычные кристаллы, обладавшие тем забавным свойством, что рассматриваемые сквозь них предметы как бы двоились. Оказалось, что при прохождении через такой кристалл, названный исландским шпатом, луч света расщепляется на два: «обыкновенный» луч соответствует закону преломления, «необыкновенный» же словно нарушает его. Изучение этого аномального преломления сыграло важную роль в открытии поляризации света.

...еще менее полувека назад показ неотличимых от оригинала объемных изображений, полученных с помощью голографии, поражал воображение любой аудитории. Однако уже довольно скоро был создан голографический кинофильм, и не за горами время, когда объемные кино и телевидение станут повседневной реальностью.

...несколько лет назад были получены композитные материалы с необычными оптическими свойствами. Луч света, преломленный на границе воздух — композит, отклонялся в сторону, противоположную отклонению в привычном случае, иными словами, показатель преломления такого вещества — отрицательный!

...одна из самых грандиозных оптических иллюзий, созданных самой природой, это гравитационная линза. Искривление световых лучей тяготением при их прохождении вблизи массивных звезд или галактик приводит к появлению космического миража — умножению числа изображений удаленного светящегося объекта.

### Что читать в «Кванте» о зрительных иллюзиях

(публикации последних лет)

1. «Не верь глазам своим...» — 2002, Приложение № 4, с. 8;
2. «Как узреть свой затылок вдали» — 2002, № 5, с. 34;
3. «Волны на пляже, Солнце в небе и многое другое» — 2004, Приложение № 4, с. 101;
4. «Физический калейдоскоп» — 2004, Приложение № 6, с. 78 — 96;
5. «Угол падения равен...» — 2005, № 1, с. 31;
6. «Ворона — хвостом вперед?» — 2005, № 5, с. 28;
7. «Загадка» тени от прозрачной пластинки» — 2006, № 1, с. 30;
8. «Фотонные кристаллы и другие метаматериалы» — 2006, Приложение №2;
9. «Разглядывая шариковую ручку» — 2006, №3, с. 31;
10. «Деннис Габор» — 2006, №4, с. 15.

Материал подготовил А.Леонovich

# На лифте в... заоблачные дали

П.БЕНОМАР, А.БУРОВ

**ОБ ОДНОМ НАБЛЮДАТЕЛЕ.** ЖИЛ ДА БЫЛ НА ЭКВАТОРЕ один Наблюдатель. И любил он наблюдать за небом, вернее за спутниками, совершающими движение в экваториальной плоскости. Особенно нравились ему те спутники, которые двигались по круговым орбитам по ходу вращения Земли. Из них выделялся один, положение которого не менялось, – он как бы зависал над одной точкой экватора и висел там сутки напролет. Наблюдатель знал, что именно поэтому такой спутник называется суточным – угловая скорость его орбитального движения равняется угловой скорости  $\Omega$  вращения Земли. Из физики наблюдателю было известно, что в таком относительном равновесии, т.е. в равновесии относительно вращающейся Земли, спутник находится потому, что именно на этой орбите радиусом  $R$  уравниваются центробежная сила инерции  $F_{ц} = m\Omega^2 R$ , стремящаяся отбросить спутник подальше от оси вращения

Земли, и сила земного тяготения  $F_T = \frac{GmM}{R^2}$ , ласково притягивающая его к центру Земли (здесь  $G$  – гравитационная постоянная, а  $M$  – масса Земли). Из уравнения

$$m\Omega^2 R - \frac{GmM}{R^2} = 0$$

нашему Наблюдателю удалось найти, что радиус орбиты суточного спутника, иначе называемой геостационарной орбитой, равен

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}}$$

и составляет приблизительно 42000 км. Много это или мало – трудно сказать, но наш Наблюдатель понимал, что с уравнением движения тесно связан третий закон Кеплера

$$\omega^2 r^3 = GM,$$

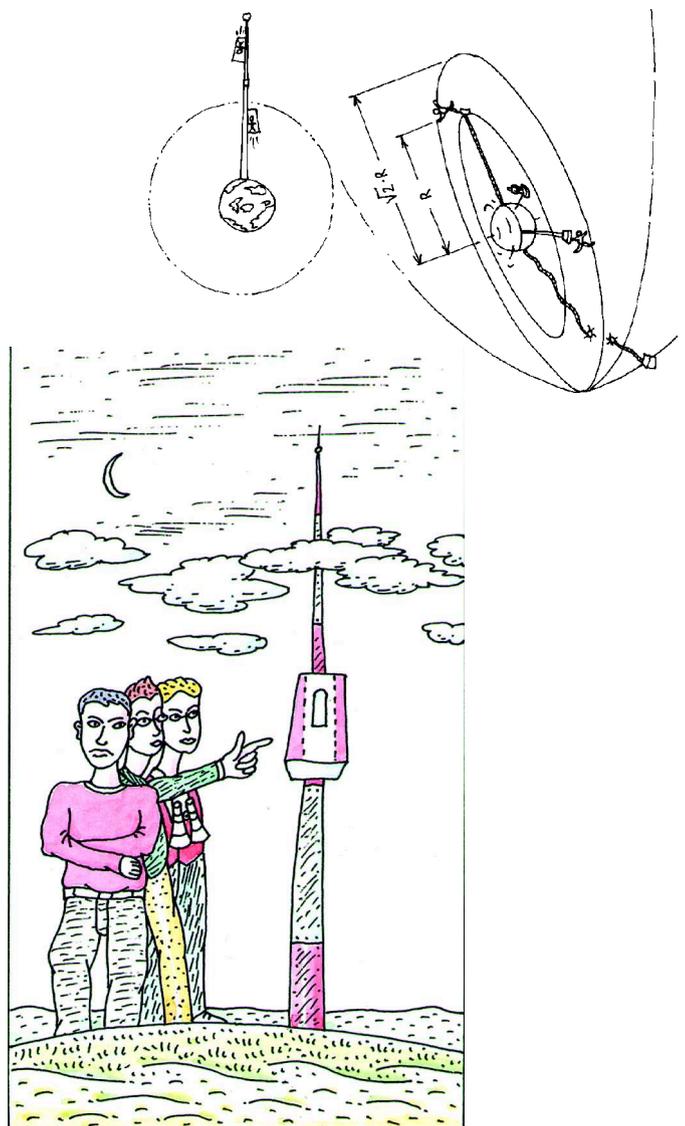
где  $\omega$  и  $r$  – орбитальная угловая скорость и радиус орбиты спутника соответственно. И именно согласно этому закону спутники, «обгонявшие» Землю в ее вращении, летали по орбитам более низким, чем орбита суточного спутника. Спутники же, «отстававшие» от вращения Земли, летали по более высоким, чем геостационарная, орбитам.

**Об одном Мечтателе.** У нашего Наблюдателя был друг, Мечтатель, который был в курсе всех этих наблюдений. «Эх, – говорил он, – как-то зря висит этот самый суточный спутник. Приставить бы к нему лестницу да и доставлять по ней в космос всякие грузы. И никаких тебе ракет не надо». «Что ты! – отвечал ему наблюдатель. – Ты представь себе, сколько эта лестница будет весить». «Ну, так надо сделать ее покороче», – не унимался Мечтатель. «Сам посуди, – отвечал ему Наблюдатель. – Мысленно поместим наш спутник пониже геостационарной орбиты. Тогда при заданной угловой скорости  $\Omega$  центробежная сила инерции уменьшит-

ся, так как она пропорциональна расстоянию до оси вращения, а сила тяготения увеличится, поскольку она обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Земли. Чтобы компенсировать эту разницу, придется приставить подпорку. Да и было уже все это – вспомни Библейскую историю про Вавилонскую башню». «Погоди, погоди! Ну а тогда давай разместим наш спутник за геостационарной орбитой. Ведь там центробежная сила инерции по тем же причинам превосходит силу притяжения Земли, и, чтобы скомпенсировать их разницу, будет нужна не подпорка, а растяжка, которая будет тянуть спутник к Земле. Натянем такой трос или несколько таких тросов, и пусть по ним ползают лифты, таскают грузы туда и обратно. А что касается материалов, то говорят, что специалисты по нанотехнологиям создали из углерода алмазную нить – этакий гибкий бриллиант, удивительно легкий и прочный. Осталось научиться плести из таких ниток веревки, и дело будет сделано!»

И оба умолкли, мысленно созерцая блистающую бриллиантовую дорожку, идущую в заоблачные выси.

**Об одном Скептике.** «Ну вот, размечтались тут!» – раздался голос третьего. Этот третий был хорошо известен и Наблюдателю и Мечтателю своим скептическим взглядом на вещи. «Подумайте сами, вот протянете вы веревку в космос



за геостационарную орбиту, т.е. тысяч на сорок километров, а она, не дай Бог, по каким-нибудь причинам обмотается вокруг земного экватора да нам всем головы и снесет. Ведь длина экватора – как раз сорок тысяч километров. Да и сколько времени потребуется, чтобы поднять ваш груз на орбиту. Пусть даже лифт будет ехать со скоростью 10 метров в секунду. Ну и доберетесь вы до своего космоса за тысячу с лишним часов, т.е., считай, за два месяца. Я уж не говорю о том, что делать, если такой лифт застрянет – вы оба, вероятно, в лифтах никогда не застревали. А так застрянешь на высоте, куда самолеты уже не летают, а спутники еще не летают. И что делать?» «Ладно тебе! – накинулись на него Наблюдатель и Мечтатель. – Думать надо, что делать, а не паниковать заранее». «Думай – не думай, а против физики не попрешь.

Давайте посчитаем, что будет, если наша кабина с грузом сорвется с троса или, не дай Бог, трос порвется и перестанет удерживать конечную станцию. Всюду далее будем считать, что трос невесом. Воспользуемся законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_{\text{отр}}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\text{отр}}},$$

где в правой части значения скорости и радиуса рассматриваются в момент отрыва. Если величина в правой части положительна, то при  $r \rightarrow \infty$  наша кабина или конечная станция сможет удалиться в бесконечность с ненулевой скоростью, т.е. улетит по гиперболической орбите и будет потеряна навсегда. Так как в нашем случае  $v = \Omega r$ , то условие положительности после деления на положительную массу  $m$  запишется в виде

$$\frac{\Omega^2 r^2}{2} - \frac{CM}{r} > 0.$$

Выражая отсюда критическое значение для радиуса, получим

$$R_{\text{крит}} = \sqrt[3]{\frac{2GM}{\Omega^2}} = \sqrt[3]{2}R,$$

а  $\sqrt[3]{2} \approx 1,259921050$  – это не так и много, т.е. протягивать трос почти за 54000 км опасно из-за риска улета в «прекрасное далеко».

При  $r > R_{\text{крит}}$  орбита будет гиперболической, т.е. наша кабина прилетит на бесконечность с ненулевой скоростью. При  $r = R_{\text{крит}}$  орбита будет параболической, т.е. наша кабина прибудет на бесконечность с нулевой скоростью. При  $R < r < R_{\text{крит}}$  орбита окажется эллиптической, причем точка срыва будет ее *перигеем*, т.е. самой ближней к Земле точкой. При  $r < R$  орбита тоже будет эллиптической, но точка срыва будет *апогеем*, т.е. наиболее удаленной от Земли точкой. Именно по такой орбите будет «падать» кабина лифта, сорвавшегося с троса ниже геостационарной орбиты.

И вот еще какое дело. Когда я роняю что-нибудь из рук, то, как правило, это что-то падает мне на ноги, не доставляя больших хлопот окружающим. Спрашивается, что будет с кабиной, если она вдруг отцепится от троса. Понятно, что если высота, на которой она отцепится, будет невелика, то кабина упадет на голову незадачливому разработчику. Для больших высот это будет не так.

Вспомним второй закон Кеплера, согласно которому за равные промежутки времени радиус-вектор летящего тела за равные промежутки времени заметает равные площади, или скорость изменения заметаемой площади не меняется во времени:

$$r^2 \theta' = r_{\text{отр}}^2 \theta'_{\text{отр}},$$

где  $\theta'$  и  $\theta'_{\text{отр}}$  – соответствующие угловые орбитальные скорости. Попробуем с помощью этого закона и закона сохранения энергии понять, как полетит отцепившаяся кабина. А полетит она по эллипсу, отцепившись в его апогее. Для нас было бы хорошо, если бы в перигее этого эллипса она не задела Землю. В точках апогея и перигея вектор скорости кабины перпендикулярен ее радиусу-вектору, отчего в этих точках  $v = r\theta'$ . Тогда если  $\rho$  – радиус Земли, а  $\omega_a$  – орбитальная угловая скорость в апогее, то в силу закона сохранения энергии и второго закона Кеплера для критического случая касания Земли имеем

$$\frac{m\omega_a^2 \rho^2}{2} - \frac{GMm}{\rho} = \frac{m\Omega^2 r^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

$$\rho^2 \omega_a = r^2 \Omega.$$

Выражая из второго соотношения  $\omega_a$  и подставляя в первое, после сокращений получим уравнение относительно  $r$ :

$$\frac{\Omega^2 r^4}{2\rho^2} - \frac{GM}{\rho} = \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \frac{GM}{r}.$$

Это уравнение приводится к виду

$$(r - \rho)(\Omega^2 r^3 (r + \rho) - 2GM\rho) = 0$$

и помимо очевидного решения  $r = \rho$ , соответствующего прохождению через апогей, имеет и другое, составляющее в нашем случае величину порядка 30000 км. Иными словами, лишь удалив кабину от центра Земли на такое расстояние, можно быть спокойным, что она, отцепившись, не упадет на голову какому-нибудь экваториальному жителю, например сингапурцу».

И друзья вновь погрузились в молчание.

**Вместо эпилога.** А пока они молчат, мы вспомним, что восходящая к Циолковскому идея орбитального лифта получила свое продолжение после появившейся на заре космической эпохи статьи ленинградского инженера Ю.Арцутанова «В космос – на электровозе» («Комсомольская правда», 31 июля 1960 г.). В ее популяризации несомненную роль сыграли и «Фонтаны рая» Артура Кларка. Но все это так бы и оставалось несбыточной мечтой, если бы не нанотехнологии, подавшие надежду на создание сверхлегких и сверхпрочных материалов. Поговаривают о том, что за океаном начато финансирование тридцатилетней программы по развешиванию орбитального лифта – см., например, сайт: <http://www.isr.us/spacelevatorconference/>.

Но, как бы то ни было, не стоит забывать печального опыта предков (Бытие, глава 11):

*«1 На всей земле был один язык и одно наречие. 2 Двинувшись с востока, они нашли в земле Сеннаар равнину и поселились там. 3 И сказали друг другу: наделаем кирпичей и обожжем огнем. И стали у них кирпичи вместо камней, а земляная смола вместо извести. 4 И сказали они: построим себе город и башню, высоту до небес, и сделаем себе имя, прежде нежели расеемся по лицу всей земли. 5 И сошел Господь посмотреть город и башню, которые строили сыны человеческие. 6 И сказал Господь: вот, один народ, и один у всех язык; и вот что начали они делать, и не отстанут они от того, что задумали делать; 7 сойдем же и смешаем там язык их, так чтобы один не понимал речи другого. 8 И рассеял их Господь оттуда по всей земле; и они перестали строить город. 9 Посему дано ему имя: Вавилон, ибо там смешал Господь язык всей земли, и оттуда рассеял их Господь по всей земле».*

# Закон электромагнитной индукции

**В. ДРОЗДОВ**

**ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ** говорит о том, что в проводящем контуре наводится электродвижущая сила (ЭДС) индукции, равная скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' \quad (1)$$

Знак «минус» здесь отражает правило Ленца: направление индукционного тока таково, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока. Однако при вычислении модуля ЭДС индукции, что приходится делать чаще всего, этот знак обычно опускается.

Формула (1) часто записывается в несколько ином виде:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (2)$$

Понятно, что формулы (1) и (2) равносильны лишь для равномерного изменения магнитного потока. В общем же случае формула (1) дает мгновенное значение ЭДС индукции, а формула (2) – ее среднее значение. Первую формулу удобно применять, когда магнитный поток легко записать как функцию времени. Второй формулой надо пользоваться для таких быстрых процессов изменения магнитного потока, когда его невозможно выразить функцией времени, в этих случаях средняя ЭДС практически совпадает с мгновенной.

Если магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  в данный момент времени одинаково в любой точке плоского контура площадью  $S$ , то магнитный поток через этот контур равен

$$\Phi = BS \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к контуру. Очевидно, что магнитный поток может меняться при изменении любой из величин  $B$ ,  $S$ ,  $\alpha$ , в реальных же задачах обычно меняется что-то одно из трех.

Переходим к рассмотрению конкретных задач.

**Задача 1** (МГУ, физический факультет, 1972). *Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Длина витка  $l = 120$  см. Петли восьмерки можно считать окружностями с отношением радиусом 1:2. Какой ток потечет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью  $\Delta B/\Delta t = 10^{-2}$  Тл/с? Сопротивление витка  $R = 10$  Ом.*

Геометрически очевидно нахождение радиусов петель восьмерки и их площадей (рис.1):

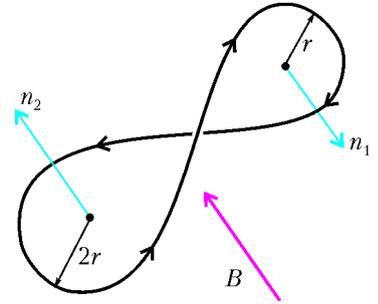
$$r = \frac{l}{6\pi}, \quad S_1 = \pi r^2 = \frac{l^2}{36\pi}, \quad 2r = \frac{l}{3\pi}, \quad S_2 = 4S_1 = \frac{l^2}{9\pi}.$$

Однако в этой, казалось бы простой, задаче есть физическая тонкость – вектор нормали к каждому контуру направлен

так, что если смотреть из его конца, то ток течет по контуру против часовой стрелки. Значит, нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  антипараллельны. Следовательно, магнитный поток через восьмерку равен

$$\Phi = -\Phi_1 + \Phi_2 =$$

$$= -BS_1 + BS_2 = \frac{Bl^2}{12\pi}. \quad \text{Рис. 1}$$



Так как в задаче уже задана скорость изменения магнитного поля  $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ , то применяем формулу (2):

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t} S = -\frac{l^2}{12\pi} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Тогда искомый ток в проводе равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{l^2}{12\pi R} \frac{\Delta B}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

При решении этой и других задач рационально использовать очевидный факт: постоянный множитель можно выносить за знак приращения  $\Delta$  («дельта»).

**Задача 2.** *Проводящая перемычка длиной  $l$  и массой  $m$  скользит в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  по проводящим рельсам, замкнутым на резистор сопротивлением  $R$ . Какую силу  $F$  нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью  $v$ ? Коэффициент трения перемычки о рельсы равен  $\mu$ , сопротивлением перемычки и рельсов можно пренебречь.*

Так как проводник движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , то его ускорение равно нулю:  $\vec{a} = 0$ . Тогда уравнение движения перемычки, т.е. второй закон Ньютона, запишем в виде (рис.2)

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{N} = 0,$$

где  $\vec{F}_{\text{тр}}$ ,  $\vec{F}_A$ ,  $m\vec{g}$ ,  $\vec{N}$  – силы трения, Ампера, тяжести и реакции опоры соответственно. В проекциях на горизонтальное направление имеем

$$F - F_{\text{тр}} - F_A = 0,$$

а на вертикальное –

$$N - mg = 0.$$

Отсюда получаем

$$F = F_{\text{тр}} + F_A = \mu N + IBl = \mu mg + IBl,$$

где  $I$  – сила тока в перемычке. Силу тока определим, используя закон электромагнитной индукции. ЭДС индукции в замкнутом контуре равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -(\Phi_0 + Blvt)' = -Blv,$$

где  $\Phi_0 = B \cdot KC \cdot CD$  – постоянный поток вектора  $\vec{B}$  через контур  $AKCD$ . Сила тока в контуре равна

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

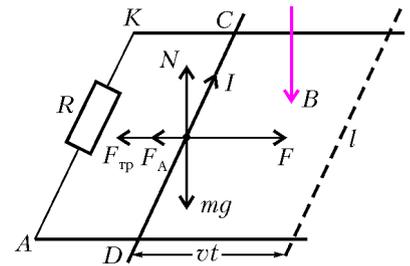


Рис. 2

Следовательно,

$$F = \mu mg + \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

**Задача 3** (МФТИ, 1993). Квадратную проволочную рамку со стороной  $a$  и сопротивлением  $R$  протягивают с постоянной скоростью  $v$  через зазор электромагнита (рис.3).

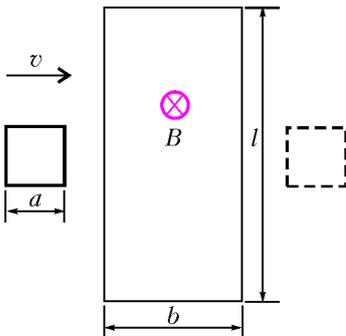


Рис. 3

Магнитное поле в зазоре однородное, его индукция равна  $B$  и перпендикулярна плоскости рамки. Пренебрегая краевыми эффектами, определите, какое количество теплоты выделится в рамке. Сторона рамки меньше и продольного размера зазора  $b$  и его поперечного размера  $l$ .

Очевидно, что тепло в рамке будет выделяться во время возникновения в ней электрического тока. А он будет течь, когда рамка будет частично находиться в магнитном поле. Если такое мгновенное «погружение» равно  $x$  ( $x < a$ ), то рамку пронизывает магнитный поток

$$\Phi = Bax = Bavt.$$

Значит, в рамке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -Bav.$$

Тогда через нее будет течь постоянный ток

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R} = \frac{Bav}{R}.$$

Следовательно, по закону Джоуля – Ленца в рамке выделится количество теплоты

$$Q = 2I^2 RT,$$

где  $T = \frac{a}{v}$  – время частичного нахождения квадрата в поле, а коэффициент «2» вызван тем, что рамка и входит и выходит из магнитного поля. Окончательно имеем

$$Q = 2 \frac{B^2 a^2 v^2}{R^2} R \frac{a}{v} = \frac{2B^2 a^3 v}{R}.$$

**Задача 4.** Два проволочных кольца разных диаметров расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени равномерно возрастает. В каком кольце индуцируется больший ток, если массы колец одинаковы и изготовлены они из одного и того же материала?

Здесь будет удобно рассмотреть одно кольцо радиусом  $R$ , а не вводить индексы «1» и «2».

По условию задачи,

$$B = B_0 + kt,$$

где  $B_0$  и  $k$  – некоторые константы. Если  $\alpha$  – постоянный угол между нормалью к кольцу и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ , то кольцо пронизывает магнитный поток

$$\Phi = \pi R^2 (B_0 + kt) \cos \alpha.$$

По закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в кольце равна

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\pi R^2 k \cos \alpha.$$

Тогда ток, текущий в кольце, равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{r} = \frac{\pi R^2 k \cos \alpha}{r}.$$

Здесь  $r = \rho \frac{2\pi R}{S_0}$  – сопротивление кольца, где  $\rho$  – удельное сопротивление проволоки,  $S_0 = \frac{m}{2\pi R D}$  – площадь поперечного сечения проволоки,  $D$  и  $m$  – плотность и масса кольца соответственно.

Окончательно,

$$r = \frac{4\pi^2 R^2 D \rho}{m}, \text{ и } I = \frac{km \cos \alpha}{4\pi D \rho}.$$

Видно, что все величины, входящие в последнюю формулу, одинаковы для обоих колец. Следовательно, в них индуцируются равные токи.

**Задача 5** (МГУ, химический факультет). Проволочное кольцо радиусом  $r = 0,1$  м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца  $R = 1$  Ом, вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B_{\perp} = 5 \cdot 10^{-5}$  Тл.

Необходимо учесть, что вместе с кольцом переворачивается и его нормаль  $\vec{n}$  (рис.4), а также то обстоятельство, что детали процесса поворота нам неизвестны. Поэтому будем считать его весьма быстрым и применим формулу (2).

Начальный магнитный поток равен

$$\Phi_1 = BS \cos \alpha = B_{\perp} S,$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь кольца. Конечный магнитный поток составляет

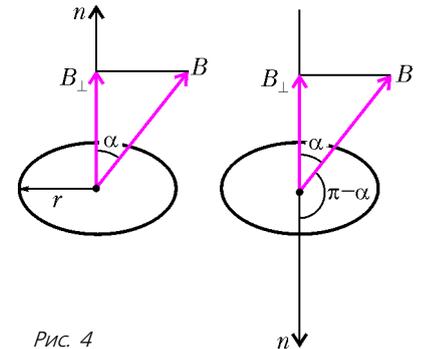


Рис. 4

$$\Phi_2 = BS \cos(\pi - \alpha) = -B_{\perp} S.$$

Значит, в контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\left(-\frac{2B_{\perp} S}{\Delta t}\right) = \frac{2B_{\perp} S}{\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – малое время переворота кольца. Ток в кольце равен

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{2\pi r^2 B_{\perp}}{R \Delta t},$$

а искомый заряд –

$$q = I \Delta t = \frac{2\pi r^2 B_{\perp}}{R} = 3,14 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 3,14 \text{ мкКл}.$$

**Задача 6.** В однородном магнитном поле с индукцией  $B$  вращается катушка, состоящая из  $N$  витков. Ось вращения катушки перпендикулярна ее оси и направлению магнитного поля. Период обращения катушки  $T$ , площадь поперечного сечения  $S$ . Найдите максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке.

Мгновенное значение магнитного потока, пронизывающего  $N$  витков катушки, равно

$$\Phi = NBS \cos \alpha,$$

где  $\alpha = \omega t$  – угол между вектором нормали к виткам катушки и вектором индукции магнитного поля (рис.5). Мгновенную ЭДС индукции определяем по формуле (1),

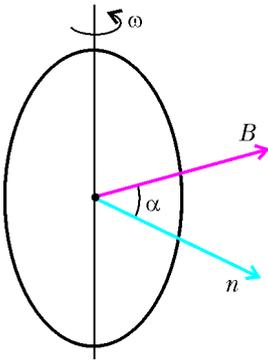


Рис. 5

применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -NBS (\cos \omega t)' = NBS\omega \sin \omega t = \\ &= \frac{2\pi NBS}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \end{aligned}$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – угловая скорость вращения катушки. Ясно, что максимальное значение ЭДС индукции равно

$$\varepsilon_{im} = \frac{2\pi NBS}{T}.$$

**Задача 7** (МГУ, механико-математический факультет, 1985). Гибкий замкнутый проводник сопротивлением  $R = 100$  Ом, образующий квадрат со стороной  $a = 0,1$  м, помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 5$  Тл. Плоскость квадрата перпендикулярна вектору магнитной индукции. Какой заряд протечет по проводнику, если из квадрата сделать равносторонний треугольник, не меняя плоскости его расположения?

В этой задаче магнитный поток через контур меняется за счет изменения его площади. Применяем формулу (2), считая процесс трансформации квадрата в треугольник достаточно быстрым.

Сначала немного геометрии – определим площадь равностороннего треугольника со стороной  $b = \frac{4}{3}a$ :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}b^2 \sin 60^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2.$$

Изменение магнитного потока через контур равно

$$\Delta\Phi = BS_{\Delta} - BS_{\square} = \left(\frac{4\sqrt{3}-9}{9}\right)a^2B.$$

Значит, в проводнике возникает ЭДС индукция

$$\varepsilon_i = \frac{(9-4\sqrt{3})a^2B}{9\Delta t},$$

где  $\Delta t$  – время изменения формы контура. Индукционный ток в контуре равен

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{(9-4\sqrt{3})a^2B}{9R\Delta t},$$

а искомый заряд составляет

$$q = I\Delta t = \frac{(9-4\sqrt{3})a^2B}{9R} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}.$$

**Задача 8** (МФТИ, 1995). На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой  $m$ , вдоль которого равномерно распределен заряд  $Q$ . Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B_0$  и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Внешнее магнитное поле выключают. По какой причине (укажите механизм) кольцо начнет вращаться? Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.

Пусть магнитное поле исчезает до нуля за время  $t_0$  по простейшему линейному закону (рис.6). Очевидна зависимость

$$B(t) = B_0 - \frac{B_0}{t_0}t.$$

Введем радиус кольца  $R$ , помня, что он нам не дан, впрочем как и величина  $t_0$ . Мгновенный магнитный поток, пронизывающий кольцо, равен

$$\Phi = BS = \pi R^2 B_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right).$$

ЭДС индукции, в силу формулы (1), равна

$$\varepsilon_i = \frac{\pi R^2 B_0}{t_0}.$$

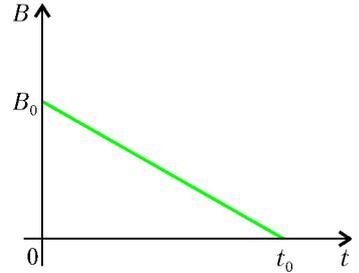


Рис. 6

Физическая причина вращения кольца такова. Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого в каждой точке кольца направлены по касательной к нему. Это поле и действует на заряды кольца.

Найдем модуль напряженности электрического поля  $E$ . Поскольку по соображениям симметрии в любой точке кольца  $E = \text{const}$ , то, мысленно разрезав кольцо, мы вправе применить формулу  $\Delta\phi = Ed$ , где  $\Delta\phi = \varepsilon_i$  – разность потенциалов между точками разреза,  $d = 2\pi R$  – длина кольца. Значит,

$$E = \frac{\varepsilon_i}{2\pi R} = \frac{RB_0}{2t_0}.$$

Разобьем кольцо на достаточно большое число  $n$  точечных зарядов  $\Delta Q = \frac{Q}{n}$  с

массой  $\Delta m = \frac{m}{n}$ . На каждый такой заряд будет действовать сила (рис.7)

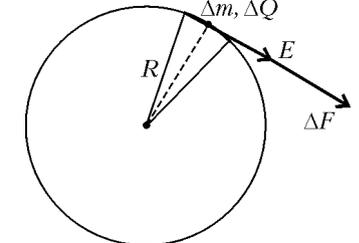


Рис. 7

$$\Delta F = E\Delta Q = \frac{B_0 Q}{2} \frac{R}{t_0 n}.$$

По второму закону Ньютона модуль линейного ускорения любого элемента кольца равен

$$a = \frac{\Delta F}{\Delta m} = \frac{B_0 Q}{2m} \frac{R}{t_0}.$$

Соответствующее угловое ускорение, равное

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{B_0 Q}{2mt_0},$$

постоянно. Следовательно, угловая скорость вращения кольца равна

$$\omega = \varepsilon t_0 = \frac{B_0 Q}{2m}.$$

Как видим, введенные неизвестные величины  $t_0$  и  $R$ , которые нам были необходимы для решения, сократились.

**Упражнения**

**1** (МГУ, мехмат, 1975). Катушка диаметром  $d = 10$  см помещена в магнитное поле с индукцией  $B = 1,256 \cdot 10^{-2}$  Тл так, что ее ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Катушка содержит  $N = 500$  витков и имеет сопротивление  $R = 10$  Ом. Найдите заряд, который пройдет через обмотку катушки, если магнитное поле равномерно упадет до нуля.

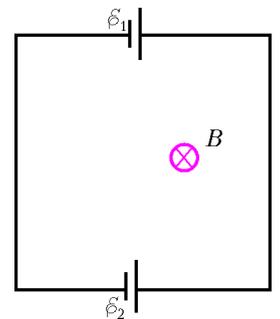


Рис. 8

**2** (МГУ, мехмат, 1983). Из прово-

да длиной  $l = 2$  м, обладающего сопротивлением  $R = 4$  Ом, спаян квадрат. В стороны квадрата включены источники с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 10$  В и  $\mathcal{E}_2 = 8$  В согласно схеме, приведенной на рисунке 8. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата, направленное за чертеж и возрастающее во времени по закону  $B = kt$ , где  $k = 16$  Тл/с. Найдите силу тока в цепи. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

**3** (МГУ, мехмат, 1988). Из куска однородной проволоки длиной  $l$  и сопротивлением  $R$  спаяна фигура в виде кольца с хордой, равной диаметру кольца. Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости кольца, а модуль этого вектора меняется со временем по закону  $B = kt$ . Найдите выделяемую в проволоке мощность.

**4** (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, 1996). В магнитном поле с индукцией, равной  $B = 1$  Тл и направленной вертикально вниз, по горизонтальным рельсам равномерно движется проводящий стержень длиной  $l = 0,4$  м со скоростью  $v = 5$  м/с (рис. 9). Концы рельсов присоединены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E} = 10,1$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,1$  Ом. Какое количество теплоты

выделится в стержне за время  $t = 10$  с, если его сопротивление  $R = 10$  Ом? Сопротивлением рельсов и соединительных проводов пренебречь.

**5** (РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина). По П-образной рамке, наклоненной под углом  $30^\circ$  к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой  $30$  г. Длина перемычки  $10$  см, ее сопротивление  $2$  мОм, индукция поля  $0,1$  Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

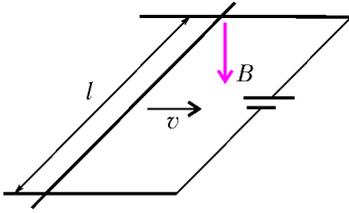


Рис. 9

**6** (МИЭТ). Энергия магнитного поля катушки электромагнита с индуктивностью  $L = 0,2$  Гн равна  $W = 5$  Дж. Определите величину ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке при равномерном уменьшении силы тока за время  $t = 0,1$  с.

**7** (МФТИ, 1996). В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $d$  помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением  $\rho$ , движущейся с постоянной скоростью  $v$  параллельно пластинам (рис.10). Конденсатор находится в магнитном поле с индукцией, равной  $B$ , направленной вдоль пластин и перпендикулярной скорости жидкости. Найдите полезную мощность, выделяющуюся в виде тепла на внешней нагрузке сопротивлением  $R$ .

**8** (МФТИ, 2002). Металлический стержень  $AC$  одним концом (точка  $A$ ) шарнирно закреплен на вертикальном диэлектрическом стержне  $AO$  (рис.11). Другой конец (точка  $C$ ) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити  $OC$  длиной  $l = 1$  м. Стержень  $AC$  вращается вокруг стержня  $AO$  в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна  $B = 10^{-2}$  Тл. Угловая скорость вращения стержня  $\omega = 60$  с $^{-1}$ . Определите разность потенциалов (по модулю) между точками  $A$  и  $C$ .

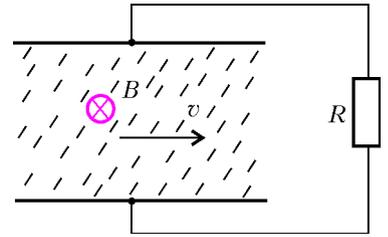


Рис. 10

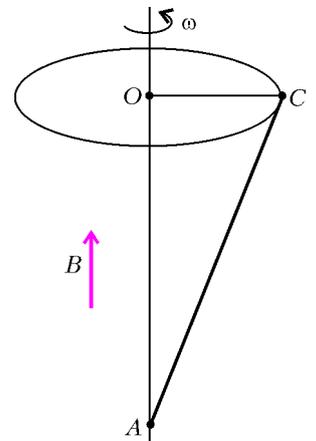


Рис. 11

# Функциональные уравнения и неравенства

Г.ФАЛИН, А.ФАЛИН

## Введение

В последние годы на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М.В.Ломоносова регулярно предлагаются задачи на решение уравнений, неравенств и систем, неизвестными в которых являются не числа, а функции. Задачи эти необычны как по внешней форме, так и по методам решения. Поэтому в настоящей статье мы решили на примерах реальных экзаменационных задач показать основные виды таких уравнений и основные методы их решения.

Некоторые задачи вступительных экзаменов формально

не предполагают решения функциональных уравнений, но «простые» решения, которые публикуются после экзаменов в «официальных» сборниках, часто выглядят искусственно, в то время как более общий взгляд на задачу и использование относительно несложных понятий и методов теории функциональных уравнений позволяют дать очень естественное решение, показать взаимосвязь различных задач, повысить математическую культуру абитуриента.

Задачи на решение функциональных уравнений и неравенств полезно разобрать и при изучении общих свойств функций в классах с углубленным изучением математики.

## Параметризуемые уравнения

Самыми простыми являются функциональные уравнения, в которых неизвестная функция однозначно описывается одним или несколькими числовыми параметрами (простейший и наиболее распространенный пример функции такого рода – это многочлен). В этом случае задача нахождения функции сводится к определению значений этих числовых параметров, т.е. к обычной школьной задаче (как правило, на решение систем уравнений). Рассмотрим в качестве примера следующую задачу, которая предлагалась в 2001 году на устном экзамене по математике на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК).

**Задача 1** (ВМК, устный экзамен, 2001). Существует ли линейная функция  $y = f(x)$ , удовлетворяющая при всех  $x$

соотношению

$$2f(x+2) + f(4-x) = 2x+7? \quad (1)$$

По определению, линейная функция – это функция, которая представима в виде  $f(x) = kx + b$ . Числовые параметры  $k$  и  $b$  однозначно характеризуют линейную функцию, так как равенство  $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$  при всех значениях переменной  $x$  равносильно равенствам  $k_1 = k_2$ ,  $b_1 = b_2$ . Этот факт является частным случаем следующего важного утверждения, которое мы будем неоднократно использовать:

*Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной (в частности, совпадают и степени многочленов).*

Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

*Существуют ли числа  $k$  и  $b$  такие, что при всех  $x$  верно равенство*

$$2(k(x+2) + b) + (k(4-x) + b) = 2x+7? \quad (2)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы приведем уравнение (2) к виду

$$kx + 8k + 3b = 2x + 7 \text{ при всех } x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, преобразуем задачу:

*Существуют ли числа  $k$  и  $b$  такие, что верны равенства*

$$\begin{cases} k = 2, \\ 8k + 3b = 7? \end{cases} \quad (3)$$

В этом виде задача просто сводится к вопросу о совместности системы (3). Легко видеть, что эта система имеет и притом единственное решение  $k = 2$ ,  $b = -3$ . Итак, существует и притом единственная линейная функция  $f(x) = 2x - 3$ , удовлетворяющая исходному функциональному уравнению.

Хотя все проделанные преобразования равносильны и проверка не нужна, мы рекомендуем читателю непосредственной проверкой убедиться, что найденная функция действительно удовлетворяет уравнению (1). Это замечание относится и к последующим задачам.

Как и для обычных уравнений, когда неизвестная величина является числом, возможны случаи, когда функциональное уравнение вообще не имеет решений или имеет бесконечное множество решений. Проиллюстрируем эти ситуации на двух примерах.

**Задача 2** (ВМК, устный экзамен, 1997/2001/2005). *Существует ли линейная функция  $y = f(x)$ , удовлетворяющая для всех действительных  $x$  соотношению*

$$f(x+3) - f(2-x) = 3x+1? \quad (4)$$

Как и при решении задачи 1, исходную задачу можно переформулировать следующим образом:

*Существуют ли числа  $k$  и  $b$  такие, что верны равенства*

$$\begin{cases} 2k = 3, \\ k = 1? \end{cases}$$

Эта система, очевидно, несовместна. Соответственно, исходное функциональное уравнение не имеет решений в классе линейных функций.

**Задача 3** (ВМК, устный экзамен, 1997). *Найдите квадратичную функцию  $y = f(x)$ , удовлетворяющую при всех  $x$  уравнению*

$$f(1-x) - f(2-x) = -2x+7. \quad (5)$$

По определению, квадратичная функция – это функция, которая представима в виде  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .

Поэтому нашу задачу можно переформулировать следующим образом:

*Найдите числа  $a \neq 0$ ,  $b$  и  $c$  такие, что при всех  $x$  верно равенство*

$$\begin{aligned} (a(1-x)^2 + b(1-x) + c) - (a(2-x)^2 + b(2-x) + c) &= -2x+7 \\ \Downarrow \\ 2ax - (3a+b) &= -2x+7. \end{aligned}$$

Поскольку два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной, задача примет такой вид:

$$\begin{cases} 2a = -2, \\ -3a - b = 7. \end{cases} \quad (6)$$

Иначе говоря, нужно решить систему (6).

Если эту систему рассматривать как систему с двумя неизвестными  $a$  и  $b$ , то она имеет единственное решение  $a = -1$ ,  $b = -4$ . Однако эта система неявно включает еще одну неизвестную –  $c$ . Поскольку никаких ограничений на  $c$  не накладывается, эта неизвестная может принимать произвольное действительное значение. Таким образом, система (6) имеет бесконечно много решений вида  $(a; b; c) = (-1; -4; c)$ , где  $c \in \mathbf{R}$  – произвольно. Соответственно, исходное функциональное уравнение имеет бесконечно много решений в классе квадратичных функций. Все эти решения могут быть описаны равенством  $f(x) = -x^2 - 4x + c$ , где  $c$  – произвольная константа.

В следующей задаче также требуется решить функциональное уравнение в определенном классе функций (многочленов степени  $n$ ), но само уравнение гораздо сложнее тех, которые обсуждались раньше.

**Задача 4** (ВМК, устный экзамен, 2002/олимпиада Румынии, 1980). *Найдите все многочлены*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

*степени  $n$ , т.е. с коэффициентом  $a_n \neq 0$ , удовлетворяющие тождеству*

$$P(x^2) \equiv (P(x))^2, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (7)$$

Чтобы решить эту задачу, представим  $P(x)$  в виде  $Q(x) + a_n x^n$ , где

$$Q(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Степень многочлена  $Q(x)$  нам не известна, так как нельзя исключить, что некоторые (или даже все) из его коэффициентов равны 0. Но совершенно точно можно утверждать, что степень многочлена  $Q(x)$  не превосходит  $n-1$ . Обозначим эту степень через  $k$ ; при этом предположим, что хотя бы один из коэффициентов многочлена  $Q(x)$  не равен 0. Тогда тождество (7) примет вид

$$\begin{aligned} Q(x^2) + a_n x^{2n} &= (Q(x))^2 + 2a_n x^n Q(x) + a_n^2 x^{2n}, \\ x &\in (-\infty; +\infty). \end{aligned} \quad (8)$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях переменной (в частности, совпадают и степени многочленов).

Степень многочлена  $Q(x^2)$  равна  $2k$ , степень многочлена  $(Q(x))^2$  равна  $2k$ , степень многочлена  $2a_n x^n Q(x)$  равна  $n+k$ . Следовательно, членами степени  $2n$  в уравнении (8) будут только  $a_n x^{2n}$  (в левой части) и  $a_n^2 x^{2n}$  (в правой части), и поэтому  $a_n = a_n^2$ . Поскольку  $a_n \neq 0$ , отсюда следует, что

$a_n = 1$ . Это позволяет представить тождество (8) так:

$$Q(x^2) = (Q(x))^2 + 2x^n Q(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Как мы уже отмечали, степень многочлена  $Q(x^2)$  равна  $2k$ , степень многочлена  $(Q(x))^2$  равна  $2k$ , степень многочлена  $2a_n x^n Q(x)$  равна  $n + k$ . Поскольку  $k < n$ , степень многочлена в правой части больше степени многочлена в левой части и равенство невозможно.

Но эти рассуждения базировались на предположении, что хотя бы один из коэффициентов многочлена  $Q(x)$  не равен 0. Если же все коэффициенты многочлена  $Q(x)$  равны 0, то  $Q(x) \equiv 0$ . Тогда тождество (8) примет вид

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

что равносильно равенству  $a_n = 1$ .

Итак, единственное решение функционального уравнения (7) в классе многочленов степени  $n$  — это  $P(x) = x^n$ .

### Общие функциональные уравнения

По поводу задачи 1, решенной в предыдущем разделе, возникает естественный вопрос, существуют ли другие функции  $f(x)$  (не обязательно линейные), удовлетворяющие исходному функциональному уравнению (1) в общем виде. Для ответа на этот вопрос решим функциональное уравнение (1) в общем виде.

Для этого прежде всего заменим  $x$  на  $x - 2$  (с тем, чтобы в уравнении фигурировало выражение  $f(x)$ ). Тогда уравнение (1) примет вид

$$2f(x) + f(6 - x) = 2x + 3 \quad \text{при всех } x. \quad (9)$$

Это равенство можно рассматривать как обычное уравнение относительно двух неизвестных  $A = f(x)$  и  $B = f(6 - x)$ , переменная  $x$  в этом случае будет играть роль параметра:

$$2A + B = 2x + 3.$$

Поскольку у нас две неизвестные величины, хотелось бы получить еще одно уравнение относительно  $A$  и  $B$ . С этой целью заменим в равенстве (9)  $x$  на  $6 - x$  (ведь оно верно при всех значениях  $x$ , поэтому вместо  $x$  можно ставить любое число или выражение):

$$2f(6 - x) + f(x) = -2x + 15 \quad \text{при всех } x.$$

В терминах переменных  $A = f(x)$  и  $B = f(6 - x)$  это равенство означает, что

$$2B + A = -2x + 15.$$

Итак, справедлива система

$$\begin{cases} 2A + B = 2x + 3, \\ 2B + A = -2x + 15. \end{cases}$$

Исключая из этих равенств  $B = f(6 - x)$ , получим

$$A \equiv f(x) = 2x - 3.$$

Изложенный метод решения функционального уравнения (9) имеет более глубокие корни — он связан с тем, что набор из двух функций  $\varphi_0(x) = x$ ,  $\varphi_1(x) = 6 - x$  замкнут относительно операции композиции функций, т.е. композиция любых двух функций из этого набора дает функцию из этого набора. Действительно, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \varphi_0(\varphi_0(x)) &= \varphi_0(x), \\ \varphi_0(\varphi_1(x)) &= \varphi_1(x), \\ \varphi_1(\varphi_0(x)) &= \varphi_1(x), \end{aligned}$$

$$\varphi_1(\varphi_1(x)) = \varphi_0(x).$$

Используя язык современной алгебры, можно сказать, что функции  $\varphi_0(x) = x$  и  $\varphi_1(x) = 6 - x$  образуют группу. Понятие группы является одним из важнейших в современной математике и широко используется в самых разнообразных приложениях.

Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение (4) вообще не имеет решений в классе функций, определенных на всей числовой прямой. Более того, эти рассуждения можно модифицировать, чтобы получить более сильный результат:

*Ни одна функция  $f(x)$  не может удовлетворять уравнению (4) одновременно для двух различных чисел  $x_1$  и  $x_2$ , симметричных относительно точки  $-\frac{1}{2}$ .*

Действительно, это утверждение означает несовместность системы

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(x_2 + 3) - f(2 - x_2) = 3x_2 + 1. \end{cases}$$

Поскольку симметричность  $x_1$  и  $x_2$  относительно точки  $-\frac{1}{2}$  означает, что  $x_1 + x_2 = -1$ , эта система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} f(x_1 + 3) - f(2 - x_1) = 3x_1 + 1, \\ f(2 - x_1) - f(x_1 + 3) = -3x_1 - 2. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, мы получим, что  $0 = -1$ .

Более сложной и интересной является задача решения уравнения (5) без условия, что  $f(x)$  — квадратичная функция. Ее решение использует новые идеи, полезные при решении и других функциональных уравнений, и поэтому мы подробно изложим его. Как и при решении функционального уравнения (1) в общем виде, прежде всего заменим  $1 - x$  на  $x$  (с тем чтобы в уравнении фигурировало выражение  $f(x)$ ). Тогда уравнение (5) примет вид

$$f(x) - f(x + 1) = 2x + 5 \quad \text{при всех } x \in \mathbf{R}. \quad (10)$$

Функциональное уравнение (10) является неоднородным («лишним» является член  $2x + 5$  в правой части). В соответствии с общей идеологией решения уравнений превратим его в однородное. Для этого найдем частное решение уравнения. Фактически это уже сделано, так как мы решили уравнение в классе квадратичных функций, так что, например,  $f_0(x) = -x^2 - 4x$  является решением.

Теперь введем новую неизвестную функцию  $g(x) = f(x) - f_0(x)$  и запишем для нее функциональное уравнение (10):

$$g(x) = g(x + 1) \quad \text{при всех } x \in \mathbf{R}.$$

Это соотношение совпадает с определением периодической функции, определенной на всей числовой прямой, с периодом  $T = 1$ . Поэтому ему удовлетворяют все такие функции и только они. Соответственно, общее решение уравнения (5) дается формулой  $f(x) = -x^2 - 4x + g(x)$ , где  $g(x)$  — произвольная периодическая функция с периодом  $T = 1$ , определенная на всей числовой прямой.

Более общий вариант задачи 4 (решить функциональное уравнение (7) без требования, что  $P(x)$  — многочлен) вообще не имеет ответа в сколько-нибудь простых терминах: этому уравнению удовлетворяют такие разнородные функции, как  $|x|$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $y = f(x)$  — знак числа (напомним, что  $f(x) = 1, 0$  или  $-1$  в зависимости от того,  $x$  больше 0, равен 0 или меньше 0), и много других.

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, применя-

ются при решении функциональных уравнений, когда нет никакой информации о виде неизвестной функции. Хотя общая методика рассуждений не меняется, появляются важные специфические особенности. Мы рассмотрим их на примере такой задачи.

**Задача 5** (экономический факультет, 2000, июль). Про функцию  $f(x)$  известно, что она определена на отрезке  $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$  и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решите неравенство  $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$ .

Для решения задачи прежде всего немного упростим уравнение системы. Для этого понизим степень выражения  $\cos^2 f(x)$  за счет удвоения аргумента:

$$\frac{1}{\cos(2f(x))} - 6 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{5}{x}, \quad x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]. \quad (11)$$

Если  $x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]$ , то  $\frac{1}{x}$  также меняется на этом отрезке.

Поэтому в уравнении (11) можно заменить  $x$  на  $\frac{1}{x}$ :

$$\frac{1}{\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)} - 6 \cos(2f(x)) = 5x, \quad x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]. \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя числовыми неизвестными

$A = \cos(2f(x))$  и  $B = \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ , переменная  $x$  в этом случае играет роль параметра:

$$\begin{cases} \frac{1}{A} - 6B = \frac{5}{x}, \\ \frac{1}{B} - 6A = 5x. \end{cases}$$

Эта система легко решается методом исключения (с учетом условия  $x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]$  все нижеследующие преобразования равносильны):

$$\begin{cases} B = \frac{x-5A}{6Ax}, \\ \frac{1}{B} - 6A = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{x-5A}{6Ax}, \\ \frac{6Ax}{x-5A} - 6A = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{x-5A}{6Ax}, \\ 6A^2 - 5Ax - x^2 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы можно переписать в виде  $(A+x)(6A-x) = 0$ . Следовательно, при каждом фик-

сированном  $x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]$  переменная  $A = A(x)$  может принимать только одно из двух значений:  $-x$  или  $\frac{x}{6}$ . В силу условия  $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$  можно гарантировать, что  $A = \cos(2f(x)) \geq 0$ . Поэтому при  $x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]$  выражение  $A + x$  положительно и, следовательно,  $A = A(x) = \frac{x}{6}$ . Соответствующее значение  $B = B(x)$  равно  $\frac{1}{6x}$ .

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \cos(2f(x)) = \frac{x}{6} \text{ при всех } x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right], \\ 0 \leq 2f(x) \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

При  $x \in \left[\frac{1}{6}; 6\right]$  величина  $\frac{x}{6}$  принимает значения из отрезка  $\left[\frac{1}{36}; 1\right]$ , который является подмножеством отрезка  $[-1; 1]$ . Используя определение  $\arccos a$ , мы получим, что

$$f(x) = \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{6}.$$

Теперь исходная задача сводится к решению обычного неравенства с обратной тригонометрической функцией:

$$\arccos \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{4}$$

на множестве  $\frac{1}{6} \leq x \leq 6$ . Это неравенство без труда решается, что дает окончательный ответ задачи:  $3\sqrt{2} \leq x \leq 6$ .

Разобранная задача интересна еще и потому, что в ней требовалось решить «обычную» задачу (неравенство), в которой фигурирует функция, про которую известно лишь то, что она является решением некоторого функционального уравнения. В относительно простых случаях с помощью изложенных методов можно решить это функциональное уравнение и определить функцию в явном виде. После этого основная задача сводится к обычной задаче на решение уравнения (неравенства, системы).

Следующая задача также относится к этому типу, но решение соответствующего функционального уравнения будет немного сложнее, чем раньше.

**Задача 6** (химический факультет, 2000, заочный тур). Найдите значения  $x$ , при которых функция  $f(x)$ , удовлетворяющая при всех  $x \neq 0; 1$  уравнению

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \quad (13)$$

имеет экстремумы. Найдите эту функцию.

Как и раньше, будем рассматривать функциональное уравнение (13) как обычное уравнение с двумя числовыми неизвестными  $A = f(x)$  и  $B = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ , переменная  $x$  в этом случае играет роль параметра:

$$A + B = x.$$

Чтобы получить еще одно уравнение, заменим в (13)  $x$  на  $\frac{1}{1-x}$ :

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow B + C = \frac{1}{1-x},$$

где  $C = f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ . Поскольку наряду с переменными  $A$  и  $B$  появилась третья величина,  $C$ , нужно иметь еще одно уравнение. С этой целью заменим в (13)  $x$  на  $\frac{x-1}{x}$ :

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow C + A = \frac{x-1}{x}.$$

На этом шаге наш процесс замкнулся, и мы имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} A + B = x, \\ B + C = \frac{1}{1-x}, \\ C + A = \frac{x-1}{x}. \end{cases}$$

Она легко решается. Поскольку нас интересует только  $A = f(x)$ , сложим все три уравнения, разделим сумму на 2 и вычтем из нее второе уравнение:

$$A \equiv f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}, \quad x \neq 0; 1. \quad (14)$$

Относительно функций  $x$ ,  $\frac{1}{1-x}$  и  $\frac{x-1}{x}$  уместен тот же комментарий, который мы дали к решению уравнения (9): эти функции образуют группу третьего порядка относительно операции суперпозиции функций.

Теперь можно заняться поиском точек экстремума функции (14). Ее производная дается формулой

$$f'(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1}{2x^2(x-1)^2}.$$

Многочлен в числителе является возвратным. Поэтому его можно разложить на множители с помощью новой переменной  $t = x + \frac{1}{x}$ :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1) \cdot (x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1)}{2x^2(x-1)^2}.$$

Квадратный трехчлен  $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1$  имеет два действительных корня  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (0; 1)$  и  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (1; +\infty)$ . Дискриминант трехчлена  $x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1$  отрицателен, так что этот трехчлен положителен при всех  $x$  и не влияет на знак производной. Теперь методом интервалов мы можем определить знаки производной и, соответственно, поведение функции  $f(x)$ :

- на промежутке  $(-\infty; 0]$  функция возрастает;
- на промежутке  $[0; x_1]$  функция возрастает;
- на промежутке  $[x_1; 1]$  функция убывает;
- на промежутке  $[1; x_2]$  функция убывает;
- на промежутке  $[x_2; +\infty)$  функция возрастает.

Таким образом, функция  $f(x)$  имеет две точки экстремума:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (0; 1)$$

(в ней достигается локальный максимум) и

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \in (1; +\infty)$$

(в ней достигается локальный минимум).

### Использование более сложных понятий и результатов математического анализа

**Задача 7** (мехмат, 2001, олимпиада, 10 класс). Числовая функция  $f(x)$  при каждом действительном  $x$  удовлетворяет равенству

$$x + f(x) = f(f(x)). \quad (15)$$

Решите уравнение  $f(f(x)) = 0$ .

Для решения этой задачи введем понятие *инъективной функции*:

**Определение:** функция  $f(x)$  называется инъективной, если для любых двух чисел  $x_1, x_2$  из ее области определения равенство  $f(x_1) = f(x_2)$  влечет, что  $x_1 = x_2$ .

Нетрудно видеть, что если функция строго возрастает (убывает) на всей области определения, то она инъективна. Более того, во многих задачах (например, при решении уравнений), где используется монотонность той или иной функции, часто на самом деле нужна именно инъективность.

Аналогичное определение можно дать для произвольного отображения; в этом случае говорят об *инъективном отображении*.

Наряду с термином *инъективная функция* используются термины *инъекция* и (несколько старомодный) *взаимно однозначное соответствие*.

Соотношение

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

равносильно соотношению

$$x_1 \neq x_2 \quad (x_1, x_2 \text{ входят в область определения функции}) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Поэтому инъекцию можно было бы определить как отображение, которое «не склеивает» элементы.

Вернемся теперь к нашей задаче и докажем, что функция, о которой идет речь в задаче, является инъекцией. Действительно, если  $f(x_1) = f(x_2)$ , то, переписывая уравнение для  $f(x)$  в виде  $x = f(f(x)) - f(x)$ , мы имеем

$$x_1 = f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) = x_2.$$

Займемся теперь уравнением  $f(f(x)) = 0$ . Прежде всего выясним, сколько оно может иметь корней. Если  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $f(f(x)) = 0$ , то  $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ , а тогда из доказанной инъективности функции  $f(x)$  следует, что  $f(x_1) = f(x_2)$ . Применяя свойство инъективности еще раз, мы получим  $x_1 = x_2$ . Таким образом, уравнение  $f(f(x)) = 0$  не может иметь больше одного корня.

Теперь подставим в исходное функциональное уравнение вместо  $x$  число 0. Это даст следующее равенство:  $f(0) = f(f(0))$ . В силу доказанной инъективности функции  $f(x)$  отсюда следует, что  $0 = f(0)$ , а тогда  $f(f(0)) = f(0) = 0$ , т.е. число 0 является корнем уравнения  $f(f(x)) = 0$ .

*Ответ:*  $x = 0$ .

Хотя из текста задачи 7 следует, что существуют функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (15), было

бы интересно найти хотя бы одну такую функцию. В общем виде решить это уравнение не удастся, но, используя методы, описанные выше, можно, например, доказать, что в классе многочленов уравнение (15) имеет ровно два решения:

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x.$$

Действительно, если  $f(x)$  – многочлен степени  $n \geq 1$ , то в левой части уравнения (15) стоит многочлен степени  $n$ , а в правой – степени  $n^2$ . Это возможно лишь в случае  $n = 1$ . Поэтому можно ограничиться рассмотрением линейных функций:  $f(x) = kx + b$ . Для них уравнение (15) примет вид

$$x + (kx + b) = k(kx + b) + b \quad \text{при всех } x,$$

или, что то же самое,

$$(k+1)x + b = k^2x + (kb + b) \quad \text{при всех } x.$$

Это соотношение равносильно системе

$$\begin{cases} k+1 = k^2, \\ b = kb + b, \end{cases}$$

которая имеет два решения:  $(k; b) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ ,  $(k; b) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ . Им соответствуют следующие две линейные функции, удовлетворяющие функциональному уравнению (15):

$$f_1(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x. \quad (16)$$

Этими двумя функциями не исчерпывается множество решений уравнения (15). Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, & \text{если } x = a + b\sqrt{5} \\ \text{для некоторых рациональных } a, b, \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}x & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (17)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

Разобранная задача интересна тем, что хотя решить функциональное уравнение и тем самым определить явный вид функции  $f(x)$  нельзя, основная задача (решение уравнения  $f(f(x)) = 0$ ) вполне может быть решена.

На понятии инъективной функции базируется и решение следующей задачи, которая предлагалась в 2005 году на олимпиаде «Покори Воробьевы горы», проводимой МГУ совместно с газетой «Московский комсомолец».

**Задача 8** (МК-МГУ, 2005, I тур). *Существуют ли функции  $f$  и  $g$ , определенные на всей числовой прямой и при каждом  $x$  удовлетворяющие равенствам*

$$f(g(x)) = x^2, \quad g(f(x)) = x^3? \quad (18)$$

Предположим, что такие функции существуют. Как и при решении задачи 7, прежде всего докажем, что функция  $f(x)$  – инъекция.

Допустим, что для некоторых чисел  $x_1$  и  $x_2$  верно равенство  $f(x_1) = f(x_2)$ . Поскольку любая функция однозначна, отсюда следует, что  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ . В силу второго из уравнений (18) это означает, что  $x_1^3 = x_2^3$ . Извлекаем корень кубический из обеих частей этого равенства, мы получим, что  $x_1 = x_2$  (на самом деле здесь мы пользуемся инъективностью функции  $y = x^3$ ).

Рассмотрим теперь выражение  $f(g(f(x)))$ . Поскольку  $g(f(x)) = x^3$ , оно равно  $f(x^3)$ . С другой стороны, его можно рассматривать как  $f(g(t))$ , где  $t = f(x)$ . Поэтому в силу первого из уравнений (18) оно равно  $(f(x))^2$ . Итак, можно гарантировать справедливость равенства

$$f(x^3) = (f(x))^2 \quad \text{при всех } x \in \mathbf{R}.$$

Заменяя здесь переменную  $x$  числами 0, 1, -1, мы получим, что для чисел  $a = f(0)$ ,  $b = f(1)$ ,  $c = f(-1)$  справедливы равенства  $a = a^2$ ,  $b = b^2$ ,  $c = c^2$ . Иначе говоря, эти числа удовлетворяют квадратному уравнению  $t^2 = t$ , т.е. являются его корнями.

Поскольку  $f$  – инъекция, числа  $a = f(0)$ ,  $b = f(1)$ ,  $c = f(-1)$  различны, т.е. квадратное уравнение  $t^2 = t$  имеет три корня, чего быть не может. Значит, исходное допущение, что существуют функции  $f$  и  $g$ , определенные на всей числовой прямой и при каждом  $x$  удовлетворяющие равенствам (18), неверно. Следовательно, функции  $f$  и  $g$ , определенные на всей числовой прямой и при каждом  $x$  удовлетворяющие равенствам (18), не существуют.

При решении функциональных уравнений полезны и другие общие понятия и результаты математического анализа, изучаемые в курсе средней школы, например понятия предела и производной.

**Задача 9** (мехмат, 2003, заочный тест). *Найдите все функции  $f(x)$ , определенные на всей числовой прямой, для которых неравенство*

$$f(y) \cdot \cos(x-y) \leq f(x) \quad (19)$$

выполнено при любых  $x$  и  $y$ .

Начнем решение с того, что подставим в (19) вместо  $y$  выражение  $x - \frac{\pi}{2}$ :

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

Теперь подставим в (19) вместо  $y$  выражение  $x + t$ :

$$f(x+t) \cdot \cos t \leq f(x).$$

Поскольку  $\cos t \geq 1 - \frac{t^2}{2}$  (конечно, это надо доказать!), а функция  $f$  неотрицательна, тем более верно неравенство

$$f(x+t) \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \leq f(x). \quad (20)$$

Ограничим возможные значения переменной  $t$  интервалом  $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ . Тогда  $1 - \frac{t^2}{2} > 0$ , и неравенство (20) можно почленно разделить на  $1 - \frac{t^2}{2}$ :

$$f(x+t) \leq \frac{f(x)}{1 - \frac{t^2}{2}}. \quad (21)$$

По аналогии с предыдущим шагом, подставим в (20) вместо  $x$  выражение  $x - t$ , а затем вместо  $t$  выражение  $-t$ :

$$f(x) \cdot \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) \leq f(x+t). \quad (22)$$

Вычитая из обеих частей неравенств (21) и (22) выражение  $f(x)$ , мы получим, что

$$-\frac{t^2}{2}f(x) \leq f(x+t) - f(x) \leq f(x)\frac{t^2}{2-t^2}, \quad t \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

Тем более верно неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq f(x)\frac{t^2}{2-t^2}, \quad t \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

Если дополнительно предположить, что  $t \neq 0$ , то это неравенство влечет, что

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq f(x)\frac{|t|}{2-t^2}, \quad t \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), t \neq 0. \quad (23)$$

Теперь зафиксируем  $x$  и устремим переменную  $t$  к нулю. Поскольку предел при  $t \rightarrow 0$  функции в правой части неравенства (23) равен нулю, в силу теоремы о зажатой

переменной можно утверждать, что существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

и он равен 0. Но, по определению производной, этот предел – это  $f'(x)$ . Итак, мы доказали, что производная искомой функции  $f(x)$  равна 0 при всех  $x$ . Известно, что тогда  $f(x)$  является константой, причем, как следует из неравенства  $f(x) \geq 0$ , доказанного в самом начале нашего решения, эта константа должна быть неотрицательной:

$$f(x) \equiv c, \quad c \geq 0. \quad (24)$$

Для завершения решения необходимо проверить, что функция вида (24) действительно удовлетворяет соотношению (19). Для этого нужно просто умножить неравенство  $\cos(x-y) \leq 1$  на (неотрицательное) число  $c$ .

*(Продолжение следует)*

## ИНФОРМАЦИЯ

### Летние физико-математические школы в Поволжье

Вот уже 19 лет Институт прикладной физики (ИПФ) Российской академии наук (РАН) ежегодно – в августе, а с 2001 года и в июне – проводит

Летние физико-математические школы (ЛФМШ) для одаренных детей Поволжья. Эти школы являются важной составляющей многоуровневой системы непрерывной подготовки научных кадров (от лицея до аспирантуры), для координации которой в составе ИПФ создан Научно-образовательный центр (НОЦ). В августе дети съезжаются в детский лагерь им. Талалушкина недалеко от Нижнего Новгорода, а в июне – на базу санатория-профилактория ИПФ «Варнавино» на берегу реки Ветлуги.

В этом году ЛФМШ «Варнавино» проводилась с 18 июня по 4 июля. Из числа участников – около 60 человек – было сформировано 2 отряда, один из которых представлял сборную Поволжья (Варнавино–Дзержинск–Автомобильный завод–Саратов), а второй состоял из школьников лицея 40 Нижнего Новгорода. За последние 10 лет этот лицей был неоднократно отмечен: признан «школой года» России, награжден грантами Сороса и президента РФ за работу с одаренными детьми, а его лицеисты завоевали 9 золотых, 3 серебряных и 4 бронзовых медалей на международных олимпиадах и награждались стипендиями президента РФ. Занятия в физических классах лицея проводятся по специальным программам НОЦ, среди педагогов – доктора и кандидаты наук, учителя высшей категории.

Во время летних школ преподаватели получают бесценный опыт использования такой формы учебной работы, как самостоятельные исследовательские работы, которые развивают творческие способности подростка и дают уверенность в собственных силах. Эти работы выполняются за две недели лагерной смены, без использования «домашних заготовок», в группах по 2–3 человека.

Вот некоторые из тем Научно-исследовательского института изучения всего (НИИИВсего) 2006 года: кинематика баскетбольного броска (под каким углом следует бросать

мяч, чтобы обеспечить максимальную точность броска); исследование дыхания растений, окружающих лагерь; среднестатистический портрет слушателя ЛФМШ; параметрические колебания (почему и как следует вести себя на качелях, чтобы раскататься без посторонней помощи); распределение скорости течения в реке Ветлуге; двухракурсная оптическая голография; цифровая голография; исследование и сравнение характеристик полупроводникового лазера и светодиода; исследование скорости реакции в зависимости от состояния человека.

Кроме того, учебные мероприятия в ЛФМШ включают в себя лекции по физике и математике, читаемые как приезжающими лекторами, так и постоянно присутствующими в лагере преподавателями; олимпиады по физике, математике, информатике, астрономии (и даже по филологии!); занятия в компьютерном классе; семинары, проводимые школьниками с целью развития умения выступать перед аудиторией, слушать докладчика, формулировать свои мысли, задавать вопросы, отвечать на них и вести дискуссию.

Перечислим некоторые темы семинаров ЛФМШ 2006 года: российские Нобелевские лауреаты в области физики; Мишель де Нострадам; первая Государственная дума; тайна Тунгусского метеорита; бронза, художественное литье, патина; Биттлз и их роль в развитии молодежной музыкальной культуры; Спилберг; квазары; дружба (социальная психология); жиромер; полярные сияния; экологические проблемы, связанные с переработкой нефти; осадные машины Средневековья; математика в экономике; обряд жертвоприношения древних славян; загадки и парадоксы в нашей жизни; криптография; бестселлер всех времен и народов, или кому была выгодна Библия; массаж.

В течение всей смены проводится экономическая игра, суть которой заключается в том, что каждый школьник имеет счет в игровой валюте в банке ЛФМШ. Этот счет можно пополнять и расходовать. При этом все общественно-полезное оплачивается, все общественно-вредное штрафуются.

Хочется пожелать преподавателям ЛФМШ, его директору А.О.Перминову и завучу А.М.Рейману, а также сотрудникам НОЦ ИПФ удачи в их поисках и воспитании талантливых детей. Все вы блестящие учителя, и у вас прекрасные ученики!

*К.Богданов*



# XXXII Всероссийская олимпиада школьников по математике

С 24 по 28 марта 2006 года в семи городах России прошел IV (федеральный окружной) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике.

В этом году олимпиаду принимали города Санкт-Петербург (Северо-Западный), Ярославль (Центральный), Элиста (Южный), Челябинск (Уральский), Пермь (Приволжский), Новосибирск (Сибирский) и Якутск (Дальневосточный федеральный округ).

Заключительный, V этап олимпиады прошел с 21 по 26 апреля в Пскове на базе Центра образования «Псковский педагогический комплекс». В олимпиаде приняли участие 199 российских школьников — дипломанты IV этапа, а также победители Московской и Санкт-Петербургской олимпиад. Традиционно, гостями олимпиады стали команды Болгарии и Китая. С этими странами на протяжении последних лет ведется обмен делегациями и плодотворная совместная работа в области математических соревнований.

Наиболее трудной на заключительном этапе олимпиады оказалась задача 7 в 11 классе — ее смогли решить лишь три участника. А самыми красивыми, по мнению участников олимпиады, были признаны задача 1 в 9 классе, задача 8 в 10 классе и задача 3 в 11 классе.

Ниже приведены условия задач IV и V этапов и список призеров V (заключительного) этапа олимпиады.

## ОКРУЖНОЙ ЭТАП

### 8 класс

1. Найдите какое-нибудь девятизначное число  $N$ , состоящее из различных цифр, такое, что среди всех чисел, получающихся из  $N$  вычеркиванием семи цифр, было бы не более одного простого. Докажите, что найденное число подходит. (Если полученное вычеркиванием цифр число начинается на ноль, то ноль тоже вычеркивается.)

*О.Подлипский*

2. Двое играют в такую игру. В начале по кругу стоят числа 1, 2, 3, 4. Каждым своим ходом первый прибавляет к двум соседним числам по 1, а второй меняет любые два соседних числа местами. Первый выигрывает, если все числа станут равными. Может ли второй ему помешать?

*П.Мартынов*

3. В круговых автогонках участвовали четыре гонщика. Их машины стартовали одновременно из одной точки и двигались с постоянными скоростями. Известно, что после начала гонок для любых трех машин нашелся момент, когда они встретились. Докажите, что после начала гонок найдется момент, когда встретятся все 4 машины. (Гонки считаем бесконечно долгими по времени.)

*И.Богданов, П.Кожевников, О.Подлипский, Г.Челноков*

4. См. задачу M2015,6 «Задачника Кванта».

5. На доске записано произведение  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{100}$ , где  $a_1, \dots, a_{100}$  — натуральные числа. Рассмотрим 99 выражений, каждое из которых получается заменой одного из знаков умножения на знак сложения. Известно, что значения равно

32 из этих выражений четные. Какое наибольшее количество четных чисел среди  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  могло быть?

*Р.Женодаров*

6. В клетчатом квадрате  $101 \times 101$  каждая клетка внутреннего квадрата  $99 \times 99$  покрашена в один из десяти цветов (клетки, примыкающие к границе квадрата, не покрашены). Может ли оказаться, что в каждом квадрате  $3 \times 3$  в цвет центральной клетки покрашена еще ровно одна клетка?

*Н.Агаханов*

7. Медиану  $AA_0$  треугольника  $ABC$  отложили от точки  $A_0$  перпендикулярно стороне  $BC$  во внешнюю сторону треугольника. Обозначим второй конец построенного отрезка через  $A_1$ . Аналогично строятся точки  $B_1$  и  $C_1$ . Найдите углы треугольника  $A_1B_1C_1$ , если углы треугольника  $ABC$  равны  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $120^\circ$ .

*Л.Емельянов*

8. При изготовлении партии из  $N \geq 5$  монет работник по ошибке изготовил две монеты из другого материала (все монеты выглядят одинаково). Начальник знает, что таких монет ровно две, что они весят одинаково, но отличаются по весу от остальных. Работник знает, какие это монеты и что они легче остальных. Ему нужно, проведя два взвешивания на чашечных весах без гирь, убедить начальника в том, что фальшивые монеты легче настоящих, и в том, какие именно монеты фальшивые. Может ли он это сделать?

*К.Кноп, Л.Емельянов*

### 9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. В каждую клетку бесконечной клетчатой плоскости записано одно из чисел 1, 2, 3, 4 так, что каждое число встречается хотя бы один раз. Назовем клетку *правильной*, если количество различных чисел, записанных в четыре соседние (по стороне) с ней клетки, равно числу, записанному в эту клетку. Могут ли все клетки плоскости оказаться правильными?

*Н.Агаханов*

3. Известно, что  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 6$  и  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 0$ . Докажите, что  $x_1 x_2 \dots x_6 \leq \frac{1}{2}$ .

*А.Храбров*

4. Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекают описанную окружность этого треугольника в точках  $A_0$  и  $C_0$  соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  параллельно стороне  $AC$ , пересекается с прямой  $A_0C_0$  в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $PB$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$ .

*Л.Емельянов*

5. См. задачу 5 для 8 класса.

6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $AD$  и высота  $BE$ . Докажите, что угол  $CED$  больше  $45^\circ$ .

*А.Мурашкин*

7. См. задачу 8 для 8 класса.

8. Число  $N$ , не делящееся на 81, представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, делящихся на 3. Докажите, что оно также представимо в виде суммы квадратов трех целых чисел, не делящихся на 3.

*П. Козлов*

### 10 класс

1. См. задачу M2011 «Задачника «Кванта».

2. Назовем раскраску доски  $8 \times 8$  в три цвета хорошей, если в любом уголке из пяти клеток присутствуют клетки всех трех цветов. (Уголок из пяти клеток – это фигура, получающаяся из квадрата  $3 \times 3$  вырезанием квадрата  $2 \times 2$ .) Докажите, что количество хороших раскрасок не меньше чем  $6^8$ .

*О. Подлипский*

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. См. задачу M2009 «Задачника «Кванта».

5. Докажите, что для каждого  $x$  такого, что  $\sin x \neq 0$ , найдется такое натуральное  $n$ , что  $|\sin nx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

*И. Богданов, А. Храбров*

6. Через точку пересечения высот остроугольного треугольника  $ABC$  проходят три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в основании высоты. Докажите, что вторые точки пересечения окружностей являются вершинами треугольника, подобного исходному.

*Л. Емельянов*

7. См. задачу M2013 «Задачника «Кванта».

8. См. задачу M2016 «Задачника «Кванта».

### 11 класс

1. См. задачу M2011 «Задачника «Кванта».

2. Произведение квадратных трехчленов  $x^2 + a_1x + b_1$ ,  $x^2 + a_2x + b_2$ , ...,  $x^2 + a_nx + b_n$  равно многочлену  $P(x) = x^{2n} + c_1x^{2n-1} + c_2x^{2n-2} + \dots + c_{2n-1}x + c_{2n}$ , где коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$  положительны. Докажите, что для некоторого  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  положительны.

*В. Сендеров*

3. В гоночном турнире 12 этапов и  $n$  участников. После каждого этапа все участники в зависимости от занятого места  $k$  получают баллы  $a_k$  (числа  $a_k$  натуральны и  $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ ). При каком наименьшем  $n$  организатор турнира может выбрать числа  $a_1, \dots, a_n$  так, что после предпоследнего этапа при любом возможном распределении мест хотя бы двое участников имели шансы занять первое место?

*М. Мурашкин*

4. Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  пересекают его стороны в точках  $A_1$  и  $C_1$ , а описанную окружность этого треугольника – в точках  $A_0$  и  $C_0$  соответственно. Прямые  $A_1C_1$  и  $A_0C_0$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что отрезок, соединяющий  $P$  с центром вписанной окружности треугольника  $ABC$ , параллелен  $AC$ .

*Л. Емельянов*

5. См. задачу 5 для 10 класса.

6. См. задачу M2012 «Задачника Кванта».

7. См. задачу M2018 «Задачника «Кванта».

8. Какое минимальное количество клеток можно закрасить черным в белом квадрате  $300 \times 300$ , чтобы никакие три

черные клетки не образовывали уголок, а после закрашивания любой белой клетки это условие нарушалось?

*И. Богданов, О. Подлипский*

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

### 9 класс

1. Дана шахматная доска  $15 \times 15$ . Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

*С. Берлов, И. Богданов*

2. Докажите, что найдутся 4 таких целых числа  $a, b, c, d$ , по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

*С. Берлов*

3. Петя раскрашивает 2006 точек, расположенных на окружности, в 17 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля?

*С. Берлов*

4. Дан треугольник  $ABC$ . Окружность  $\omega$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $A$ , пересекает сторону  $AB$  в точке  $K$ , а также пересекает сторону  $BC$ . Касательная  $CL$  к окружности  $\omega$  такова, что отрезок  $KL$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $T$ . Докажите, что отрезок  $BT$  равен по длине касательной из точки  $B$  к  $\omega$ .

*Д. Скробот*

5. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  – натуральные числа,  $a_1 < a_2 < \dots < a_{10}$ . Пусть  $b_k$  – наибольший делитель  $a_k$  такой, что  $b_k < a_k$ . Оказалось, что  $b_1 > b_2 > \dots > b_{10}$ . Докажите, что  $a_{10} > 500$ .

*М. Мурашкин*

6. На сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P, Q, R$  соответственно таким образом, что  $AP = CQ$  и четырехугольник  $RPBQ$  вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $C$  пересекают прямые  $RP$  и  $RQ$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что  $RX = RY$ .

*С. Берлов*

7. Клетчатый квадрат  $100 \times 100$  разрезан на доминошки: прямоугольники  $1 \times 2$ . Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседние по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т.е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его соперник?

*И. Богданов*

8. Дан квадратный трехчлен  $f(x) = x^2 + ax + b$ . Уравнение  $f(f(x)) = 0$  имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна  $-1$ . Докажите, что  $b \leq -\frac{1}{4}$ .

*С. Берлов*

**10 класс**

1. См. задачу 1 для 9 класса.
2. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4.

*В. Сендеров*

3. См. задачу 3 для 9 класса.
4. См. задачу M2019 «Задачника «Кванта».
5. См. задачу 5 для 9 класса.
6. См. задачу M2014 «Задачника «Кванта».
7. См. задачу 8 для 9 класса.
8. См. задачу M2017,а «Задачника «Кванта».

**11 класс**

1. Докажите, что  $\sin \sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
- В. Сендеров*
2. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей – чисто периодические дроби с периодом  $T$ . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше  $T$ .
- А. Голованов*
3. У клетчатого прямоугольника  $49 \times 69$  отмечены все  $50 \cdot 70$  вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

ваает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

*О. Подлипский*

4. Биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . Прямая  $B_1C_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что радиус описанной окружности треугольника  $MIN$  вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника  $ABC$ .

*Л. Емельянов*

5. Последовательности положительных чисел  $(x_n)$  и  $(y_n)$  удовлетворяют условиям  $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2$ ,  $y_{n+2} = y_n + y_{n+1}^2$  при всех натуральных  $n$ . Докажите, что если все числа  $x_1, x_2, y_1, y_2$  больше 1, то  $x_n > y_n$  при каком-нибудь натуральном  $n$ .

*А. Голованов*

6. Окружность с центром  $I$ , вписанная в грань  $ABC$  треугольной пирамиды  $SABC$ , касается отрезков  $AB, BC, CA$  в точках  $D, E, F$  соответственно. На отрезках  $SA, SB, SC$  отмечены точки  $A', B', C'$  соответственно так, что  $AA' = AD$ ,  $BB' = BE$ ,  $CC' = CF$ ;  $S'$  – точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке  $S$ . Известно, что  $SI$  является высотой пирамиды. Докажите, что точка  $S'$  равноудалена от точек  $A', B', C'$ .

*Ф. Бахарев*

7. См. задачу M2020 «Задачника «Кванта».

8. В лагерь приехали несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов.

*Д. Карпов***Призеры олимпиады***Дипломы I степени***по 9 классам получили**

*Кевер Михаил* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Кудык Никита* – Омск, школа 117,  
*Волков Владислав* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Бойкий Роман* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

**по 10 классам –**

*Илюхина Мария* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Митрофанов Иван* – Коломна, гимназия 2,  
*Арутюнов Владимир* – Москва, гимназия 1543,  
*Сафин Станислав* – Краснодар, лицей «ИСТЭК»,  
*Матвеев Константин* – Омск, лицей 66,  
*Шмаров Владимир* – Саров, лицей 15;

**по 11 классам –**

*Магазинов Александр* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,  
*Затицкий Павел* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Глазман Александр* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Девятов Ростислав* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Образцов Тимофей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

*Дипломы II степени***по 9 классам получили**

*Ардинарцев Никита* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Бажов Иван* – Екатеринбург, гимназия 9,  
*Пешнин Александр* – Киров, ФМЛ,  
*Горинов Евгений* – Киров, ФМЛ,

*Архипов Дмитрий* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,  
*Харитонов Михаил* – Московская обл., п. Удельная, Удельнинская гимназия,  
*Поглазов Павел* – Киров, ФМЛ,  
*Салихов Камиль* – Казань, гимназия 102,  
*Воробьев Илья* – Сыктывкар, республиканский физико-математический лицей-интернат,  
*Ерпылев Алексей* – Московская обл., п. Белоозерский, школа 23,  
*Мазурик Александр* – Анапа, школа 7,  
*Шарахов Сергей* – Ижевск, ЭМЛ 29,  
*Сластенин Александр* – Санкт-Петербург, школа 627,  
*Ненашев Глеб* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Хасанов Тимур* – Казань, ФМЛ 131;

**по 10 классам –**

*Воробьев Сергей* – Киров, ФМЛ,  
*Михайловский Никита* – Челябинск, лицей 31,  
*Лишанский Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Ярушин Дмитрий* – Челябинск, лицей 31,  
*Лысов Михаил* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Омельяненко Виктор* – Белгород, лицей 38, 7 кл.,  
*Дроздов Сергей* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Чувашинов Сергей* – Киров, ФМЛ,  
*Хабибрахманов Искандер* – Казань, лицей-интернат 2;

**по 11 классам –**

*Красильников Александр* – Ульяновск, гимназия 79,  
*Катышев Алексей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Баранов Дмитрий* – Жуковский, гимназия 1,

Есин Алексей – Краснодарский кр, ст. Старонижестеблиевская, школа 55,

Гусаров Евгений – Ярославль, гимназия 3,

Христофоров Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Дружинин Андрей – Иркутск, лицей 2,

Еремин Алексей – Краснодар, школа 47.

*Дипломы III степени*

#### по 9 классам получили

Филькин Евгений – Майкоп, гимназия 22,

Янушевич Леонид – Москва, школа 1321 «Ковчег»,

Корб Дмитрий – Омск, школа 117,

Распопов Алексей – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,

Селищев Виталий – Барнаул, школа 107 (лицей «Грани»),

Соколов Вячеслав – Санкт-Петербург, гимназия 261,

Титов Иван – Екатеринбург, гимназия 9,

Григорьев Сергей – Санкт-Петербург, лицей 533,

Царьков Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,

Кусков Дмитрий – Владимир, лингвистическая гимназия 23 им. А.Г.Столетова;

#### по 10 классам –

Пономаренко Екатерина – Майкоп, гимназия 22,

Шапцев Алексей – Пермь, гимназия 17,

Борискин Павел – Саров, лицей 3,

Махлин Игорь – Москва, гимназия 1543,

Шульцева Ольга – Курган, гимназия 27,

Сидоров Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,

Пасынков Павел – Киров, ФМЛ,

Сеплярская Анна – Черноголовка, школа 82,

Локтев Сергей – Краснодар, лицей 90,

Баранов Эдуард – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Остроумова Людмила – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса,

Фельдман Григорий – Новосибирск, гимназия 1,

Логунов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Анацкий Анатолий – Ленск, лицей 2;

#### по 11 классам –

Козачок Марина – Долгопрудный, ФМШ 5,

Прасолов Максим – Новосибирск, гимназия 1,

Чернов Вадим – Челябинск, лицей 31,

Ситников Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Щичко Антон – Челябинск, лицей 31,

Столяров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Иванов Григорий – Рыбинск, лицей 2,

Куприн Сергей – Челябинск, лицей 31,

Музыка Степан – Жуковский, школа 8,

Печенкин Николай – Москва, школа 192,

Буфетов Алексей – Москва, лицей «Вторая школа»,

Бяков Леонид – Нижний Тагил, политехническая гимназия,

Смотров Дмитрий – Челябинск, лицей 31,

Рябченко Александр – Новосибирск, СНЦ НГУ,

Трифонов Иван – Ангарск, школа 10.

В этом году жюри олимпиады приняло решение отметить участников, набравших наибольшее число баллов в своих параллелях. Специальные призы «За абсолютный результат на олимпиаде» получили 11-классник Александр Магазинов из Ярославля, 10-классники Николай Белухов из Болгарии, Мария Илюхина из Москвы и Иван Митрофанов из Коломны, а приз «За лучший результат по 9 классам» был вручен Михаилу Кеверу из Санкт-Петербурга. Особо хочется отметить результат А. Магазинова, набравшего максимально возможное количество баллов (56 из 56 возможных) при решении сложного варианта 11 класса.

*Публикацию подготовили*

*Н.Агаханов, П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин*

# XL Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады прошел в городе Снежинске. В олимпиаде приняли участие около 170 школьников 9 – 11 классов в составе команд от федеральных округов России и городов Москвы и Санкт-Петербурга.

Ниже приводятся условия задач теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

### 9 класс

#### Задача 1. Максимальная амплитуда

Брусок массой  $M$ , покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из груза массой  $m$  и легкой длинной пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный неподвижный блок (рис. 1). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола  $\mu = 0,3$ . Отношение массы бруска к массе груза  $M/m = 8$ . Груз совершает вертикальные колебания с периодом  $T = 0,5$  с. Какова максимально возможная

амплитуда таких колебаний, при которых они остаются гармоническими?

*В.Грибов*

#### Задача 2. Курсирующий катер

По реке, скорость течения которой  $u$ , навстречу друг другу плывут два однотипных теплохода. В некоторый момент времени, когда один из теплоходов проплывал мимо пункта  $A$ , а другой – мимо пункта  $B$ , из  $A$  в  $B$  отплыл быстроходный катер, который стал курсировать между теплоходами вплоть до их встречи. Какой путь относительно берега реки проплыл катер? Расстояние от  $A$  до  $B$  вдоль фарватера реки  $L$ . В стоячей воде скорость теплоходов  $v$ , а катера  $V$ . Пункт  $A$  находится выше пункта  $B$  по течению реки. Как изменится ответ, если катер стартует из пункта  $B$ ?

*В.Слободянин*

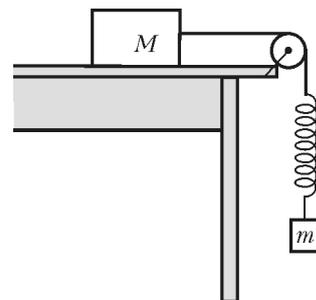


Рис. 1



**Задача 5. Полубесконечная цепочка**

На рисунке 8 изображена полубесконечная цепочка, состоящая из одинаковых источников постоянного тока с ЭДС

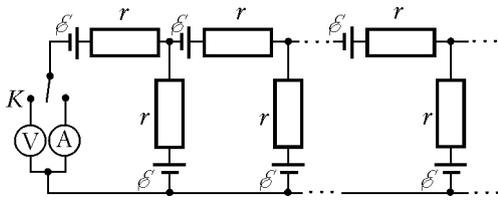


Рис. 8

$\varepsilon = 1,2$  В и внутренним сопротивлением  $r = 2,0$  Ом. К входным клеммам цепочки с помощью перекидного ключа К могут быть подключены либо идеальный вольтметр V, либо идеальный амперметр А. Определите показания этих приборов.

С.Козел

**11 класс**

**Задача 1. Разорвавшийся снаряд**

Пушечный снаряд массой  $M = 100$  кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами  $p_1 = 3,6 \cdot 10^4$  кг·м/с и  $p_2 = 2,4 \cdot 10^4$  кг·м/с. Импульсы осколков направлены под углом  $\alpha = 60^\circ$  друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной. Найдите эту энергию.

А.Чудновский

**Задача 2. Шайба на привязи**

Круглый вертикальный цилиндр радиусом  $R$  прикреплен к горизонтальной плоскости (рис.9). Внизу с боковой поверхностью цилиндра соединена нерастяжимая нить длиной  $L$ , направленная по касательной к поверхности цилиндра. На другом конце нити закреплена маленькая шайба. Шайбе сообщают горизонтальную скорость  $v_0$ , направленную перпендикулярно нити, и шайба начинает скользить по плоскости.

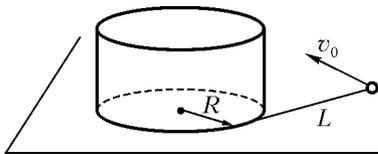


Рис. 9

1) Сколько времени будет продолжаться движение шайбы (наматывание нити на цилиндр) в отсутствие трения? 2) Сколько времени будет продолжаться движение шайбы при наличии трения между шайбой и плоскостью, если коэффициент трения равен  $\mu$ ?

Е.Бутиков

**Задача 3. Два термодинамических процесса**

На рисунке 10 изображена система, состоящая из баллона объемом  $V_0 = 0,2$  м<sup>3</sup> и цилиндра с поршнем. Начальный

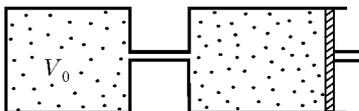


Рис. 10

объем баллона и цилиндра  $V_1 = kV_0$ , где  $k = 2,72$ . В системе находится воздух под давлением  $p_0 = 10^5$  Па и при температуре  $T_0 = 300$  К, равной температуре наружного воздуха. Передвигая поршень, весь воздух из цилиндра закачивают в баллон. Определите количество теплоты, которое передается окружающей среде в следующих двух случаях.

1) Поршень передвигается медленно, так что в каждый момент времени вся система находится в тепловом равновесии с окружающей средой.

2) Поршень передвигается достаточно быстро, так что за время его перемещения можно пренебречь теплообменом с окружающей средой, но воздух внутри системы в каждый момент времени находится в равновесном состоянии. После завершения процесса перекачки температура воздуха в баллоне постепенно сравнивается с температурой окружающего воздуха.

*Примечание.* Адиабатический процесс описывается уравнением  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = C_p/C_V$ .

С.Козел

**Задача 4. Исследование конденсатора**

Для определения емкости  $C_2$  и сопротивления утечки  $r_2$  конденсатора собрана мостовая схема (рис.11), которая сбалансирована при подключении гармонического переменного напряжения. Оказалось, что баланс моста не нарушается при любом изменении частоты напряжения. Чему равны параметры  $C_2$  и  $r_2$ , если известно, что  $r_1 = 2500$  Ом,  $r_3 = 10$  Ом,  $L_3 = 1$  Гн,  $r_4 = 800$  Ом? Гальванометр измеряет действующее значение силы тока.

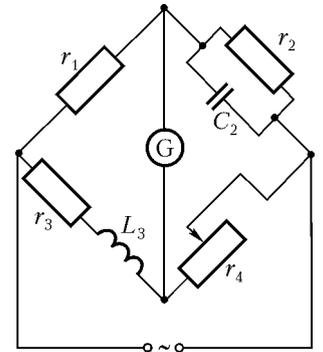


Рис. 11

М.Огарков

**Задача 5. У торца соленоида**

У торца вертикально расположенного длинного соленоида на тонком немагнитном листе лежит соосно с соленоидом круглое тонкое кольцо из сверхпроводника (рис. 12).

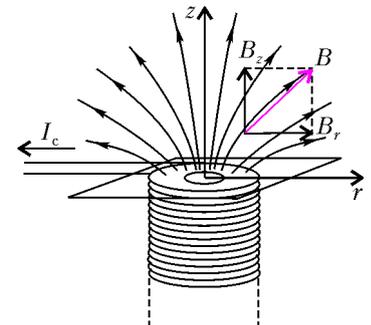


Рис. 12

В начальном состоянии сила тока в витках соленоида и сила тока в кольце равны нулю. При протекании тока по виткам соленоида возникает неоднородное магнитное поле. Вертикальную  $B_z$  и радиальную  $B_r$  составляющие вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  можно в некоторой ближней области

задать с помощью соотношений  $B_z \approx B_0(1 - \alpha z)$ ,  $B_r \approx B_0\beta r$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые константы, а  $B_0$  определяется силой тока в соленоиде. По виткам соленоида начинают пропускать ток силой  $I$ , постепенно увеличивая его значение. Определите:

- 1) критическое значение силы тока  $I_0$  в соленоиде, при котором кольцо начинает подниматься над опорой;
- 2) высоту кольца над опорой при  $I = 2I_0$ ;
- 3) частоту малых колебаний сверхпроводящего кольца при  $I = 2I_0$ .

Числовые данные: константы  $\alpha = 36$  м<sup>-1</sup> и  $\beta = 18$  м<sup>-1</sup>, масса кольца  $m = 100$  мг, коэффициент самоиндукции кольца  $L = 1,8 \cdot 10^{-8}$  Гн, площадь кольца  $S = 1$  см<sup>2</sup>, магнитная постоянная  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м, плотность катушки соленоида  $n = 10^3$  м<sup>-1</sup>.

С.Козел

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТУР

## 9 класс

## Задача 1. Механический «черный ящик»

Внутри «черного ящика» находится система из трех пружин, соединенных друг с другом (рис.13). В точке  $A$  две пружины прикреплены к корпусу «черного ящика». Упоры  $B$  и  $C$  ограничивают перемещение крючков. Начальные деформации пружин неизвестны. Определите жесткости каждой из пружин при малых деформациях.

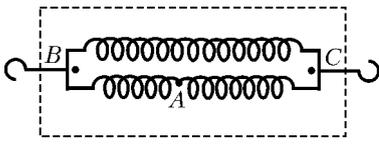


Рис. 13

**Оборудование:** «черный ящик», динамометр, линейка, миллиметровка, липкая лента.

*Е.Елькина, М.Карманов*

## Задача 2. Экспериментатор Глюк

Экспериментатору Глюку на день рождения подарили «черный ящик», в котором находится источник постоянного напряжения с последовательно присоединенным к нему неизвестным сопротивлением (рис.14). Глюк захотел узнать, какой ток потечет через источник, если соединить проводки, торчащие из «черного ящика». Поскольку под рукой у экспериментатора оказался далеко не идеальный амперметр, что не позволило измерить этот ток напрямую, он обратился за помощью к вам. Помогите Глюку. Для этого:

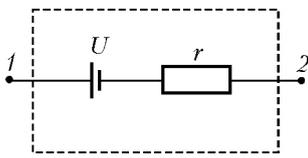


Рис. 14

- 1) изучите зависимость мощности, выделяющейся на внешней нагрузке, от силы тока через источник;
- 2) определите ток короткого замыкания «черного ящика» при помощи этой зависимости.

**Примечание:** внешней нагрузкой называется все, что подключается к выводам 1 и 2 «черного ящика».

**Оборудование:** «черный ящик», переменное сопротивление, миллиамперметр (внутреннее сопротивление указано на приборе), вольтметр (внутреннее сопротивление 700 Ом), соединительные провода, миллиметровая бумага.

*И.Иоголевич*

## 10 класс

## Задача 1. Шарик в трубке

Внутри цилиндрической трубки собрана конструкция, изображенная на рисунке 15. Трубка с пробками является симметричной (ее центр масс расположен ровно посередине). Определите: массу трубки, массу шарика, жесткость пружины. Массой пружины можно пренебречь.



Рис. 15

**Примечание:** конец трубки, из которого выходит нить, погружать в воду запрещается; плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

**Оборудование:** трубка в сборке, линейка, сосуд с водой, спичка.

*М.Карманов*

## Задача 2. Электрический «черный ящик» (1)

В «черном ящике» собрана схема из трех элементов, соединенных «звездой» (рис.16). Два элемента являются постоянными резисторами, а третий элемент имеет нелиней-

ную вольт-амперную характеристику. Определите:

- 1) провод какого цвета соединен с нелинейным элементом;
- 2) значения сопротивлений резисторов;
- 3) вольт-амперную характеристику нелинейного элемента.

**Оборудование:** «черный ящик», два мультиметра, регулируемый источник тока, соединительные провода, миллиметровая бумага.

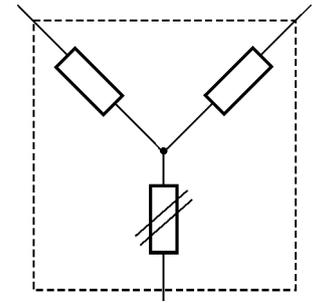


Рис. 16

*И.Иоголевич, М.Карманов*

## 11 класс

## Задача 1. Дифракция и дисперсия

- 1) Используя дифракционную решетку, определите границы — максимальную  $\lambda_{\text{max}}$  и минимальную  $\lambda_{\text{min}}$  длины волн — спектра излучения выданного вам источника в видимой области.

- 2) С помощью щели направьте узкий пучок света на одну из граней призмы (рис.17). Подберите угол падения  $\varphi_1$  так, чтобы пучок проходил симметрично через призму ( $\varphi_1 = \varphi_2$  для средней части спектра). Получите на экране спектр источника и измерьте углы отклонения  $\delta(\lambda_{\text{max}})$  и  $\delta(\lambda_{\text{min}})$  для границ спектра источника. Рассчитайте угловую дисперсию призмы  $\Delta\delta/\Delta\lambda$  при симметричном ходе лучей.

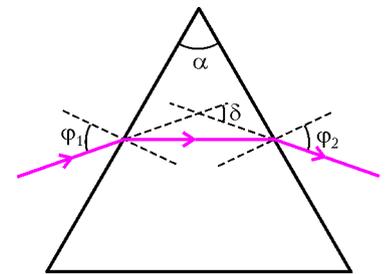


Рис. 17

- 3) Рассмотрите ход луча с некоторой длиной волны в призме и выразите показатель преломления  $n$  материала призмы через углы  $\alpha$  и  $\delta$  при симметричном ходе лучей. Рассчитайте показатель преломления призмы для средней части спектра.

- 4) Оцените дисперсию показателя преломления  $\Delta n/\Delta\lambda$ .

**Оборудование:** источник света, призма, дифракционная решетка (100 штр./мм), прищепки, экран со щелью, миллиметровая бумага.

*Ю.Марфенков*

## Задача 2. Электрический «черный ящик» (2)

В «черном ящике» находятся три элемента, соединенные последовательно (возможные варианты: катушка индуктивности, конденсатор, резистор). Есть только два вывода, соединенные с крайними точками цепочки из трех элементов.

- 1) Определите, какие элементы находятся в «черном ящике».

- 2) Измерьте параметры этих элементов.

**Оборудование:** «черный ящик», генератор гармонического сигнала с регулируемой частотой, двухлучевой осциллограф, дополнительное сопротивление с известным номиналом  $R_0$ , соединительные провода.

*И.Иоголевич*

## Призеры олимпиады

*Дипломы I степени***по 9 классам получили**

*Михайлов Александр* – Челябинск, лицей 31,  
*Кокшаров Григорий* – Пермь, школа 146,  
*Самойлов Леонид* – Саратов, ФТЛ 1,  
*Буслав Павел* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Макарова Мария* – Москва, лицей 1557;

**по 10 классам –**

*Кулиев Виталий* – Киров, ФМЛ,  
*Мыльников Дмитрий* – Самара, школа 27,  
*Котов Андрей* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Ефимов Сергей* – Бийск-2, Бийский лицей Алтайского края,  
*Сокко Анастасия* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Соловьева Ксения* – Пермь, школа 146;

**по 11 классам –**

*Зоркин Сергей* – Иркутск, лицей ИГУ,  
*Муравьев Александр* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Мостовых Павел* – Санкт-Петербург, школа 306,  
*Киселев Александр* – Москва, школа 1189 им. И.В.Курчатова.

*Дипломы II степени***по 9 классам получили**

*Фейзханов Рустем* – Москва, лицей 1557,  
*Аллеев Андрей* – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,  
*Захаров Алексей* – Пермь, школа 146,  
*Трихин Петр* – Долгопрудный, ФМШ 5,  
*Толстов Иван* – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,  
*Черников Юрий* – Дубна, лицей «Дубна»,  
*Дубов Александр* – Вологда, Вологодский многопрофильный лицей,  
*Павлова Елизавета* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Шульчевский Дмитрий* – Рязань, лицей 52;

**по 10 классам –**

*Суханов Илья* – Саров, лицей 15,  
*Пестременко Максим* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Андреев Андрей* – Чебоксары, лицей 44,  
*Дрожжин Александр* – Саратов, лицей прикладных наук,  
*Кононенко Даниил* – Новосибирск, гимназия 1,  
*Поташев Александр* – Москва, лицей «Вторая школа»,  
*Кузин Денис* – с. Ельники (Мордовия), лицей 2,  
*Дербышев Андрей* – Ярославль, гимназия 2,  
*Рогожников Алексей* – Москва, лицей 1303,  
*Сивцев Петр* – Якутск, Республиканский лицей-интернат;

**по 11 классам –**

*Бударагин Дмитрий* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Артамонов Семен* – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,  
*Мартынов Денис* – Снежинск, гимназия 127,  
*Труханов Никита* – Оренбург, гимназия 1,  
*Былинкин Александр* – Снежинск, гимназия 127,  
*Обморошев Борис* – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,  
*Былинкин Алексей* – Снежинск, гимназия 127,  
*Щепетильников Антон* – Снежинск, гимназия 127,

*Попов Антон* – Челябинск, лицей 31,  
*Рындин Максим* – Березники, школа 3.

*Дипломы III степени***по 9 классам получили**

*Байдасов Марат* – Нижний Новгород, лицей 40,  
*Семенов Станислав* – Саров, лицей 15,  
*Бурмистров Михаил* – Тамбов, лицей 14,  
*Маслов Ярослав* – Новокузнецк, лицей 84,  
*Анютин Николай* – п. Радуга, школа 10,  
*Решетняк Семен* – Владивосток, школа 23,  
*Чупраков Денис* – Киров, школа 65,  
*Пусева Дарья* – Ростов-на-Дону, Классический лицей 1 при РГУ,  
*Степанов Сергей* – Якутск, Республиканский лицей-интернат,  
*Зеленев Андрей* – Киров, ФМЛ,  
*Кононов Артем* – Майкоп, школа 7,  
*Матвеев Харитон* – Москва, школа 401,  
*Мельников Игорь* – Озерск, школа 32,  
*Павлов Артем* – Воркута, лицей 1,  
*Плешаков Руслан* – Владивосток, школа 25,  
*Сашурин Александр* – Москва, школа 179;

**по 10 классам –**

*Алексеев Дмитрий* – Москва, школа 444,  
*Бельтюков Ярослав* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Еловинов Андрей* – Бийск-2, Бийский лицей Алтайского края,  
*Коршунов Николай* – Великий Новгород, гимназия 2,  
*Гуцин Григорий* – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,  
*Анисимов Андрей* – Ноябрьск, школа 10,  
*Проскурин Михаил* – Нижневартовск, лицей,  
*Будкин Григорий* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Власов Владислав* – Красноярск, Красноярский кадетский корпус им. А.И.Лебеда,  
*Сметнев Денис* – Саров, гимназия 2,  
*Лучников Константин* – Тамбов, лицей 14,  
*Тараканов Александр* – Курган, гимназия 47;

**по 11 классам –**

*Капун Евгений* – Челябинск, лицей 31,  
*Лисов Денис* – Москва, лицей 1525,  
*Федянин Дмитрий* – Саратов, ФТЛ 1,  
*Афанасьев Александр* – Владивосток, гимназия 1,  
*Богер Евгений* – Киров, ФМЛ,  
*Лыков Антон* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Марковцев Вадим* – Сергиев Посад, ФМЛ,  
*Рассказов Александр* – Астрахань, технический лицей,  
*Королев Алексей* – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,  
*Горбенко Виктор* – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ» РАН,  
*Майоров Денис* – Москва, СУНЦ МГУ,  
*Мудла Алексей* – Ноябрьск, школа 10,  
*Иванов Николай* – Чебоксары, лицей 3,  
*Шарафутдинов Азат* – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ.

*Публикацию подготовили С.Козел, В.Слободянин*

# XIII Всероссийская заочная математическая олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» при участии журнала «Квант» проводит очередную Всероссийскую заочную математическую олимпиаду для школьников 5–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 2006 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать по адресу: 115446 Москва, а/я 450, ОРГКОМИТЕТ, «М-КВАНТ» – номер класса.

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом.

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получают призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и призы получили все, приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получают приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2006/07 учебном году.

*Вниманию учителей математики 5–10 классов!*

*Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!*

## Задачи олимпиады

### 5 класс

1. В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только рычажные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?

2. Червяк ползет по столбу, начав путь от его основания. За каждый день он проползает вверх на 3 см, а за каждую ночь сползает вниз на 1 см. Когда он достигнет верхушки столба, если его высота 75 см?

3. Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было выдать, не открывая кошельков?

4. Круглая поляна обсажена деревьями. Мальчик и девочка пошли вокруг поляны, считая деревья. Они идут в одном направлении, но начали считать в разных местах. Дерево, которое у девочки было седьмым, у мальчика было двадцатым, а дерево, которое у мальчика было седьмым, у девочки было девяносто третьим. Сколько деревьев растет вокруг поляны? Ответ объясните.

5. Можно ли прямоугольник размером  $35 \times 23$  разрезать без остатка на прямоугольники размером  $5 \times 7$ ? Если можно, то как? Если нельзя, то почему?

### 6 класс

1. Доктор Айболит раздал четырем заболевшим зверям 2006 чудодейственных таблеток. Носорог получил на одну

таблетку больше, чем крокодил, бегемот – на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Сколько таблеток придется съесть слону?

2. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живет в 10-м подъезде в квартире 333, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом девятиэтажный. На какой этаж ему следует подняться? (На каждом этаже число квартир одно и то же, номера квартир в доме начинаются с единицы.)

3. Возьмите любое трехзначное число. Умножьте его на 7, результат умножьте на 11, а новый результат – на 13. Сравните полученное число с исходным, опишите обнаруженное явление и объясните его причину.

4. Страницы в книге пронумерованы подряд, от первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 25 листов и сложил номера всех 50 вырванных страниц. У него получилось 2006. Докажите, что сложение было выполнено неправильно.

5. Среди всех положительных чисел с суммой цифр, равной 21, найдите наименьшее и наибольшее. Ответ обоснуйте.

### 7 класс

1. Фраза **BeKybekjwe – xezjxe j tvnemwe ctyd meuw**, имеющая прямое отношение к математике, зашифрована следующим образом: русские буквы заменены на латинские, причем гласные заменены на гласные, а согласные – на согласные. Расшифруйте фразу.

2. Найдите последнюю цифру числа  $2007^{2006}$ .

3. Выразите  $l$  из соотношения

$$2l + k = \frac{4l^2 - k^2}{m + 2l}.$$

4. Изобразите на координатной плоскости  $Oxy$  множество точек, координаты  $x$  и  $y$  которых удовлетворяют уравнению

$$\|x| + x| + \|y| + y| = 0.$$

5. Очень мощный прожектор высвечивает конус, угол между диаметрально противоположными лучами которого равен  $90^\circ$ . Каким конечным числом таких прожекторов можно гарантированно осветить все пространство?

### 8 класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$xy + x + y = 3.$$

2. Дан треугольник со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Найдите площадь фигуры, каждая точка которой удалена от данного треугольника не больше чем на 1 см.

3. См. задачу 2 для 7 класса.

4. См. задачу 5 для 7 класса.

5. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2006^2} < 1.$$

**9 класс**

1. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = 25.$$

2. Докажите неравенство

$$\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \dots \cdot \cos (2^{2006})^\circ \leq \frac{1}{2^{2007} \sin 1^\circ}.$$

3. См. задачу 5 для 7 класса.

4. Что больше:
- $2006^{2007}$
- или
- $2007^{2006}$
- ?

5. Рациональным или иррациональным является число
- $\sin 2007^\circ$
- ?

2. См. задачу 5 для 7 класса.

3. Докажите неравенство

$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 2006^\circ \leq \frac{1}{\sin (1/2)^\circ}.$$

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. Изобразите на плоскости параметров
- $0ab$
- множество точек
- $(a, b)$
- таких, для которых уравнение

$$(ab + 1)x^2 + (a + b)x + 1 = 0$$

относительно переменной  $x$  имеет действительные корни, большие единицы.

**10 класс**

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{2006 - x} = \sqrt{2006}.$$

# Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная физика» – часть программы Международного интеллект-клуба (МИК) «ГЛЮОН», проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально одаренных детей, проявляющих интерес к математике, физике и информатике. Уникальность этого турнира состоит в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знаниями физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура – заочный и очный.

## X Турнир «Компьютерная физика»

Традиционно, заочный тур этого турнира начался в сентябре 2005 года рассылкой задания заочного тура «Кинетика фазовых переходов» по заявкам в лицеи, школы и гимназии (это задание было опубликовано в журнале «Квант» №5 за 2005 г.). Шесть лучших команд были приглашены на финал – очный тур соревнований, который проходил с 29 января по 5 февраля 2006 года в городе Протвино на базе Государственного научного центра Института физики высоких энергий. В проведении турнира приняли участие Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова и администрация города Протвино. Турнир прошел при поддержке фонда «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С» и журнала «Квант».

Прежде всего состоялась защита заочных заданий. Каждой команде было предложено выступить с докладом научных результатов перед командами оппонента и рецензента. Научная дискуссия завершилась победой команды «МИФИ-1» лицея 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Подготовка к соревнованиям очного тура началась с лекции профессора МГУ А.М.Попова о фотоэффекте и его классической и квантовой интерпретации, после чего ко-

манды получили задание очного тура и в течение последующих двух дней решали поставленную задачу.

На защите очного задания отличилась команда гимназии 56 из Ижевска, представившая наиболее развернутое и глубокое решение и ставшая победителем этого тура. Она же стала и абсолютным победителем турнира по итогам двух туров и получила переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени и памятным значками были награждены команда гимназии 56 из Ижевска и команда «МИФИ-1» лицея 1511 при МИФИ. Дипломы II степени получили команда Самарского аэрокосмического лицея и команда «МИФИ-2» лицея 1511 при МИФИ, а диплом III степени завоевала команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете им. Н.Э.Баумана. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

### Очный тур «Фотоэффект»

Современные взгляды на процесс фотоионизации атомов восходят к знаменитой работе А.Эйнштейна по фотоэффекту, выполненной в 1905 году и лежащей в основе квантовой теории. Фотоэффект был открыт Г.Герцем в 1887 году и позднее детально исследован А.Г.Столетовым. Опыт Столетова по изучению фотоэффекта с поверхности металлов привели к установлению ряда фактов, необъяснимых с точки зрения классической физики. Так, оказалось, что энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности воздействующего излучения и для данного материала определяется лишь его частотой  $\omega$ . Причем существует минимальное значение частоты излучения  $\omega^*$  – так называемая красная граница фотоэффекта, – вызывающего фотоэффект; для значений  $\omega < \omega^*$  фотоэффект невозможен. Преодолевая трудности объяснения закономерностей фотоэффекта, Эйнштейн высказал гипотезу, что свет представляет собой поток частиц – квантов света, фотонов, несущих энергию  $\hbar\omega$  ( $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка). Предположение о том, что свет распространяется в пространстве и поглощается веществом порциями  $\hbar\omega$ ,

позволяет сразу же объяснить существование красной границы фотоэффекта, загадочной с точки зрения классической физики. Действительно, уравнение Эйнштейна для кинетической энергии электронов, вырываемых из атомов (с поверхности твердого тела) полем электромагнитной волны, имеет вид  $E_k = \hbar\omega - I$ , где  $I$  – потенциал ионизации атома (работа выхода  $A$  для твердых тел). В случае  $\hbar\omega < I$  энергии кванта недостаточно для удаления электрона из атома, и фотоэффект невозможен.

Цель предлагаемого задания – исследовать явление фотоэффекта и понять, что можно и что нельзя объяснить в этом явлении, исходя из классических представлений.

Рассмотрим следующую модель взаимодействия электронного газа в металле с внешним электромагнитным полем. Электрон в металле движется под действием силы  $F_e = eE_0(x)\cos\omega t$  со стороны поля электромагнитной волны. Здесь  $E_0(x)$  – амплитуда электрического поля волны, которая убывает с глубиной проникновения в металл по закону  $E_0(x) = E \cdot \exp(-x/\delta)$ , где  $\delta$  – глубина проникновения поля,  $E$  – электрическое поле на поверхности металла, при этом вектор электрического поля направлен вдоль поверхности металла. Кроме того, электрон с некоторой частотой  $\nu$  рассеивается на ионах, находящихся в узлах кристаллической решетки. В результате этого рассеяния скорость электрона практически не меняется по величине, однако случайным образом меняет свое направление. Таким образом, движение конкретного электрона носит случайный характер, однако в среднем по многим столкновениям электрон набирает энергию от поля электромагнитной волны. Если эта энергия превысит работу выхода  $A$ , электрон может вылететь с поверхности металла (произойдет фотоэффект). При этом величина фототока будет пропорциональна числу покинувших металл электронов.

### Задание

Считая электронный газ в металле двумерным, напишите программу, моделирующую движение электронов в металле с учетом действия электрического поля волны и столкновения электронов с узлами кристаллической решетки, и исследуйте:

- 1) зависимость фототока от интенсивности воздействующего на металл излучения для фиксированной частоты излучения;
- 2) зависимость фототока от частоты излучения при заданном значении интенсивности излучения;
- 3) распределение фотоэлектронов по энергиям для различных частот воздействующего излучения.

Какие из полученных зависимостей соответствуют экспериментальным данным?

При проведении моделирования считайте, что  $\delta = 30 - 300 \text{ \AA}$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ ,  $A = 4 \text{ эВ}$ . Исследуйте диапазон частот  $\omega = 1,8 \cdot 10^{15} - 1,8 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$  (от излучения Nd лазера до водородной лампы). Рассеяние электронов на узлах решетки считайте изотропным.

### Разбор задания

Рассмотрим качественную картину явления. Между столкновениями движение электрона описывается уравнением

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}_0 \cos \omega t$$

с начальным условием  $\vec{v}(t = t_i) = \vec{v}_i$ , где  $t_i$  – момент времени  $i$ -го столкновения,  $\vec{v}_i$  – вектор скорости электрона после  $i$ -го столкновения. Решение этого уравнения имеет

вид

$$\vec{v} = \vec{v}_i + \frac{e\vec{E}_0}{m\omega} (\sin \omega t - \sin \omega t_i).$$

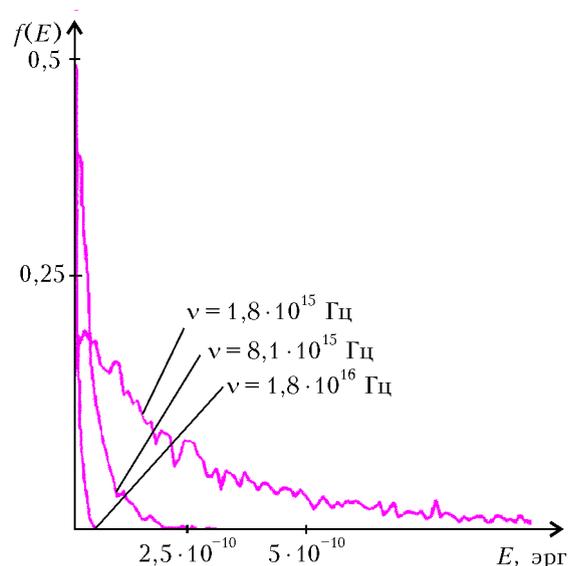
Таким образом, под действием поля электромагнитной волны электрон в металле совершает колебательное движение с амплитудой колебаний скорости  $v_e = eE_0/(m\omega)$ , а также приобретает дополнительную дрейфовую скорость  $v_{dr} = -(eE_0/(m\omega))\sin \omega t_i$ , определяемую фазой электрического поля волны в момент столкновения. В результате в высокочастотном случае  $\omega \gg \nu$  (а этот случай всегда выполнен в оптическом диапазоне частот) в среднем по большому числу столкновений электрон набирает энергию порциями порядка колебательной энергии электрона в поле электромагнитной волны

$$\Delta W \sim \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}.$$

Обычно эта величина существенно меньше работы выхода, т.е. для того чтобы электрон набрал энергию, достаточную для выхода с поверхности металла, должно произойти много актов столкновения.

Последнее выражение позволяет на качественном уровне понять основные зависимости, которые должны описывать явление фотоэффекта с точки зрения классической физики. Вероятность выхода электронов с поверхности металла (т.е. величина фототока) должна быть, во-первых, пропорциональна интенсивности излучения (квадрату напряженности электрического поля волны), а во-вторых, обратно пропорциональна квадрату частоты излучения.

Результаты компьютерного моделирования полностью подтверждают высказанные предположения. Отметим, что линейная зависимость величины фототока от интенсивности излучения действительно наблюдается в лабораторных экспериментах. Что касается зависимости от частоты излучения, то она не подтверждается экспериментальными данными. Эксперимент показывает, что существует красная граница фотоэффекта, т.е. критическая частота излучения, ниже которой фотоэффект невозможен. Обычно значение этой частоты лежит в ультрафиолетовом диапазоне. Теория же подсказывает, что чем ниже частота излучения, тем больше будет фототок с поверхности, по крайней мере пока выполнено условие  $\omega \gg \nu$ .



Рассчитанные спектры фотоэлектронов, вылетевших с поверхности металла (при различных частотах воздействующего поля), приведены на рисунке. Как и следовало ожидать, в рамках классических представлений наблюдается широкое энергетическое распределение, причем средняя энергия фотоэлектронов возрастает с увеличением интенсивности излучения и уменьшением его частоты. Эксперименты показывают, однако, что электроны, покинувшие поверхность металла, характеризуются практически одной и той же энергией, которая к тому же не зависит от интенсивности. Увеличение же частоты излучения приводит к увеличению энергии фотоэлектронов. Объяснить отмеченные выше особенности фотоэффекта смогла только квантовая теория.

Решение этого задания представила команда гимназии 56 из Ижевска в составе: Павлов Сергей, Мокрушин Александр, Анкудинов Владимир, Манохин Александр.

## XI Турнир «Компьютерная физика»

Международный интеллект-клуб «ГЛЮОН» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в XI Турнире «Компьютерная физика», очный тур которого пройдет в январе – феврале 2007 года в городе Пушино (Московская обл.).

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «ГЛЮОН»

Тел.: (495)517-8014, факс.: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

Сайт: www.informika.ru/text/goscom/gluon

### Заочный тур «Поверхностное натяжение»

Одна из основных задач физической теории – описание свойств вещества на микроскопическом уровне с целью определения его макроскопических характеристик. Для этого необходимо построение моделей, описывающих строение вещества на атомно-молекулярном уровне. Все макроскопические характеристики вещества (такие как плотность, теплоемкость, диэлектрическая проницаемость, проводимость, коэффициент поверхностного натяжения и др.) могут быть рассчитаны в рамках изучения атомно-молекулярной динамики, поскольку, в конечном счете, определяются физикой взаимодействия частиц между собой и с внешними электромагнитными полями.

Предлагается на примере простой микроскопической модели конденсированного состояния вещества (жидкости) изучить эффект возникновения поверхностной энергии и связанного с ним явления поверхностного натяжения, а также определить коэффициент поверхностного натяжения по заданному потенциалу межмолекулярного взаимодействия.

В качестве модели среды рассмотрим  $N$  молекул, взаимодействующих между собой по закону (потенциал Леннарта–Джонса)

$$U(r) = -U_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} \right),$$

где  $r$  – расстояние между парой атомов,  $r_0$  определяется атомным размером и составляет приблизительно  $1 - 4 \text{ \AA}$ , а  $U_0$  задает глубину потенциальной ямы – для атомов инертных газов  $U_0 \approx 0,005 - 0,02 \text{ эВ}$ . Соотношение характерной величины кинетической энергии молекул ( $\sim kT$ ) и глубины потенциальной ямы определяет фазовое состояние

вещества. В случае если потенциальная энергия взаимодействия молекул существенно превышает их кинетическую энергию, молекулы будут удерживаться рядом друг с другом силами межмолекулярного притяжения.

Полная потенциальная энергия взаимодействия может быть определена как сумма парных энергий взаимодействия молекул и зависит от геометрии системы. Существует некоторая пространственная конфигурация, соответствующая минимуму потенциальной энергии взаимодействия. Изменение пространственной конфигурации с сохранением объема сопровождается изменением площади поверхности рассматриваемой системы, при этом происходит изменение потенциальной энергии взаимодействия. Оказывается, что в случае короткодействующего потенциала, описывающего межмолекулярное взаимодействие, величина изменения потенциальной энергии  $\Delta U$  пропорциональна увеличению площади поверхности  $\Delta S$ , т.е.  $\Delta U = \sigma \Delta S$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения. Таким образом, с наличием поверхностного слоя жидкости связано существование так называемой поверхностной энергии  $U = \sigma S$ , которая тем больше, чем больше площадь поверхности. Стремление системы к минимуму потенциальной энергии ведет к возникновению сил поверхностного натяжения, возникающих при деформации поверхности относительно формы, характеризующейся минимальной площадью поверхности. Эти силы – силы поверхностного натяжения – стремятся минимизировать площадь поверхности.

В данной задаче требуется рассмотреть двумерную модель конденсированного состояния совокупности  $N$  атомов (молекул) и показать, что при произвольной начальной геометрической форме жидкости под действием сил межмолекулярного взаимодействия двумерная жидкость со временем приобретает форму круга (в качестве поверхности двумерной жидкости выступает периметр).

Моделирование системы на этапе вычисления потенциальной энергии может быть проведено путем численного интегрирования уравнений Ньютона, описывающих движение отдельных атомов или молекул. Начальные координаты и скорости молекул могут быть выбраны случайным образом, но так, чтобы начальный ансамбль атомов (молекул) моделировал конденсированную фазу вещества.

### Задание

1. Установите связь между изменением величины потенциальной энергии ансамбля атомов (молекул) и изменением площади поверхности. Определите коэффициент поверхностного натяжения.

2. Определите зависимость коэффициента поверхностного натяжения от числа молекул в жидкости ( $N$  изменяется от 100 до 1000).

3. Определите зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры ансамбля частиц (в диапазоне температур, соответствующих существованию конденсированной фазы).

В качестве параметров используйте  $r_0 = 4 \text{ \AA}$  и  $U_0/k = 200 \text{ К}$  – такие параметры приблизительно соответствуют потенциалу взаимодействия между атомами ксенона, масса атома ксенона составляет 130 атомных единиц.

*Публикацию подготовили  
В.Альминдеров, А.Попов, О.Поповичева*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## КМШ

### Задачи

(см. «Квант» №4)

1. Не обязательно – см. рис. 1.

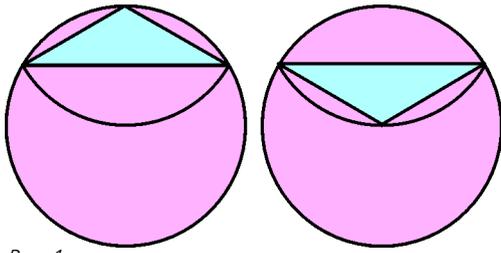


Рис. 1

2. Покажем, что наименьший периметр прямоугольника равен 14. Легко проверить, что не подходят прямоугольники размером  $1 \times n$ , где  $n \leq 5$ ;  $2 \times n$ , где  $n \leq 4$ ;  $3 \times n$ , где  $n \leq 3$  (при других значениях  $n$  прямоугольник имеет периметр, превышающий 13). Прямоугольник  $3 \times 4$  подходит. Действительно,

|  |   |  |  |
|--|---|--|--|
|  | V |  |  |
|  | V |  |  |
|  | V |  |  |

Рис. 2

если Малыш последовательно будет ставить крестики в отмеченные клетки (рис.2), то он выиграет, поскольку на каждый его ход Карлсон вынужден будет отвечать ходом на той же горизонтали (если он этого не сделает, то у Малыша будет возможность поставить 3 крестика по горизонтали).

3. Из всех артистов, кроме Удава, можно составить не более 3 пар для исполнения песни: Мартышка + Попугай, Мартышка + Слононок и Попугай + Слононок. Так как Удав исполнил 1 песню, то всего было исполнено не больше  $1 + 3 = 4$  песен.

Кроме того, из всех артистов, кроме Удава, можно составить не более 1 тройки для исполнения танца: Мартышка + Попугай + Слононок. Так как Удав исполнил 2 танца, то всего было исполнено не больше  $2 + 1 = 3$  танцев.

Итого, на концерте могло быть исполнено не более  $4 + 3 = 7$  номеров, а так как, по условию, их и было ровно 7, то концерт состоял в точности из 4 песен и 3 танцев.

Итак, были исполнены 3 песни следующими составами: Мартышка + Попугай, Мартышка + Слононок и Попугай + Слононок, а также еще одна – четвертая – песня, которую кто-то из тройки Мартышка, Слононок и Попугай исполнил вдвоем с Удавом. Поэтому из них троих кто-то исполнил 3 песни, а остальные двое – по 2 песни.

Перейдем к танцам. Один танец Мартышка, Слононок и Попугай исполнили втроем, и еще 2 танца по двое из них исполнили вместе с Удавом. Поэтому кто-то из них дважды участвовал в этих двух танцах, а остальные двое – по разу. Таким образом, кто-то из тройки Мартышка, Слононок и Попугай исполнил 3 танца, а остальные двое – по 2 танца.

Если кто-то из этой тройки исполнил  $3 + 3 = 6$  номеров, то остальные двое исполнил по  $2 + 2 = 4$  номера. По условию, Мартышка исполнила больше номеров, чем Слононок, поэтому в данном случае Слононок мог исполнить только 4 номера. Если же двое из троих исполнили по  $3 + 2 = 2 + 3 = 5$  номеров, то один исполнил  $2 + 2 = 4$  номера. И опять же, так как Мартышка исполнила больше номеров, чем Слононок, то в данном случае Слононок мог исполнить только 4 номера. Как видим, во всех случаях Слононок исполнил 4 номера. О Мартышке и Попугае ничего определенного сказать нельзя, но это и не требуется.

4. Обозначим через А, Б, В, Г утверждения Ани, Бори, Вити, Гены соответственно. Верному утверждению припишем значение И (истина), неверному – Л (ложь). Логическое следование обозначим знаком  $\Rightarrow$ . Учитывая, что каждое из трех утверждений  $I \Rightarrow I$ ,  $L \Rightarrow I$ ,  $L \Rightarrow L$  истинно, а утверждение  $I \Rightarrow L$  ложно, составим таблицу истинности всевозможных вариантов утверждений ребят:

| А | Б | В<br>(Б $\Rightarrow$ А) | Г<br>(А $\Rightarrow$ Б) | В $\Rightarrow$ Г | Г $\Rightarrow$ В |
|---|---|--------------------------|--------------------------|-------------------|-------------------|
| И | И | И                        | И                        | И                 | И                 |
| И | Л | И                        | И                        | И                 | И                 |
| Л | И | Л                        | И                        | И                 | Л                 |
| Л | Л | И                        | И                        | И                 | И                 |

Из этой таблицы видно, что утверждение  $В \Rightarrow Г$  всегда истинно, а утверждение  $Г \Rightarrow В$  может быть ложным.

5. Покажем, как можно добиться равновесия. Две гирьки назовем парой, если сумма их масс равна 201 г. Ясно, что 50 пар образуют половину общей массы всех 200 гирек. Добьемся того, чтобы на левой чашке, так же, как и на правой, присутствовали 50 пар.

Если на левой чашке можно указать 50 гирек, парные для которых находятся на правой чашке, то оставим их на левой чашке, а с правой чашки переместим к ним парные гирьки (переместив также другие 50 гирек с левой чашки на правую).

Если на левой чашке можно указать 50 гирек, парные для которых находятся среди них (т.е. 25 пар), то на правой также существует не меньше 25 пар. Оставляя эти гирьки на месте, добавим к ним 25 пар с правой чашки (также переместив другие 50 гирек с левой чашки на правую).

Поскольку один из перечисленных случаев всегда имеет место, то с помощью указанных переключений можно добиться равновесия.

## ДОПОЛНЯЙ И ВЛАСТВУЙ

1. Указание. Прибавьте к обеим частям предполагаемого равенства сумму

$$\frac{4n-1}{2} + \frac{4n-2}{3} + \frac{4n-3}{4} + \dots + \frac{2}{4n-1} + \frac{1}{4n}.$$

2. а) Рассмотрим общий член данной последовательности:

$$\begin{aligned} 3 \cdot a_n &= \frac{\underbrace{11 \dots 1}_n \underbrace{1077 \dots 78}_{n-1} \underbrace{11}_{n-1}}{n} = \frac{\underbrace{11 \dots 1}_{n-1} \cdot 10^{2n+2}}{n} + \\ &+ \frac{\underbrace{77 \dots 7}_{n-1} \cdot 10^{n+2}}{n} + 8 \cdot 10^{n+1} + \frac{\underbrace{11 \dots 1}_{n-1} \cdot 10}{n} + 1 = \\ &= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^{2n+3} + \frac{7}{9} \cdot (10^n - 1) \cdot 10^{n+2} + 8 \cdot 10^{n+1} + \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} 27 \cdot a_n &= (10^n - 1) \cdot 10^{2n+3} + 7 \cdot (10^n - 1) \cdot 10^{n+2} + \\ &+ 72 \cdot 10^{n+1} + (10^n - 1) \cdot 10 + 9 = \\ &= 10^{3n+3} - 10^{2n+3} + 7 \cdot 10^{2n+2} - 7 \cdot 10^{n+2} + 72 \cdot 10^{n+1} + 10^{n+1} - 1 = \\ &= 10^{3n+3} - 3 \cdot 10^{2n+2} + 3 \cdot 10^{n+1} - 1 = (10^{n+1} - 1)^3. \end{aligned}$$

Поэтому  $a_n = \left( \frac{10^{n+1} - 1}{3} \right)^3 = \left( \frac{\underbrace{33 \dots 3}_{n+1}}{3} \right)^3$ .

б) Заметим, что  $m = 8\underbrace{9\dots9}_k 87 = 9 \cdot 10^{k+2} - 13$ ,

$$n = 8\underbrace{7\dots7}_{k+2} = 8 \cdot 10^{k+2} + \underbrace{7\dots7}_{k+2} = 8 \cdot 10^{k+2} +$$

$$+ \left( \frac{\underbrace{7\dots7}_{k+2} + \underbrace{2\dots22}_{k+2}}{k+2} + 1 \right) - \frac{\underbrace{2\dots22}_{k+2}}{k+2} - 1 =$$

$$= 9 \cdot 10^{k+2} - \frac{\underbrace{2\dots22}_{k+2}}{k+2} - 1 = 9 \cdot 10^{k+2} -$$

$$- \frac{2}{9} \cdot (10^{k+2} - 1) - 1 = \frac{79}{9} \cdot 10^{k+2} - \frac{7}{9}.$$

Поэтому

$$m \cdot n = (9 \cdot 10^{k+2} - 13) \cdot \left( \frac{79}{9} \cdot 10^{k+2} - \frac{7}{9} \right) =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - 10^{k+2} \cdot \left( \frac{79 \cdot 13}{9} + 7 \right) + \frac{91}{9} =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - \left( \frac{1090 \cdot 10^{k+2} - 91}{9} \right) =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - \left( \frac{1089 \cdot 10^{k+2} + 10^{k+2} - 1}{9} - 10 \right) =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - \left( 121 \cdot 10^{k+2} + \frac{11\dots1}{k+2} - 10 \right) =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - \left( 121 \cdot 10^{k+2} + \frac{11\dots101}{k+2} \right) =$$

$$= 79 \cdot 10^{2k+4} - 121\underbrace{11\dots101}_{k+2} =$$

$$= 79 \cdot 10^{k+2} \cdot 10^{k+2} - 121\underbrace{11\dots101}_{k+2}.$$

Очевидно, все цифры этой разности не меньше 7.

3. а) Дополним число  $N$  дробью  $\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2007}$ .

Получим

$$3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{6}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots + \frac{1003}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2005 \cdot 2007} +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2005 \cdot 2007}.$$

Если складывать дроби с конца в начало, то все выражение «сложится», как телескопическая антенна:

$$3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{6}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots$$

$$\dots + \frac{1002}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2005} + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2005} =$$

$$= 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{6}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2003} = \dots$$

$$\dots = 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{6}{9 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} =$$

$$= 3 + \frac{4}{9} + \frac{5}{9 \cdot 11} + \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11} = 3 + \frac{4}{9} + \frac{1}{2 \cdot 9} = 3,5.$$

Поскольку  $2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2007 > 10^{997}$ , то

$$0 < \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2007} < 10^{-997}$$

и получаем ответ:

$$N = 3,5 - \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 2007} = 3,4\underbrace{99\dots99}_{99} \dots$$

б) Рассмотрим следующие дополнения:

$$B_1 = \frac{7998}{7997} \cdot \frac{7995}{7994} \cdot \frac{7992}{7991} \cdot \dots \cdot \frac{1005}{1004} \cdot \frac{1002}{1001},$$

$$B_2 = \frac{7999}{7998} \cdot \frac{7996}{7995} \cdot \frac{7993}{7992} \cdot \dots \cdot \frac{1006}{1005} \cdot \frac{1003}{1002}.$$

Понятно, что  $B \cdot B_1 \cdot B_2 = 8$ . Очевидно также, что  $B > B_1 > B_2$ . Поэтому  $8 = B \cdot B_1 \cdot B_2 < B^3$ . Значит,  $B > 2$ . Но тогда  $2 = A < B$ .

Докажем теперь, что  $C < A$ . Обозначим

$$D = C^3 = \sqrt{576} - \sqrt{575} + \sqrt{573} - \sqrt{572} +$$

$$+ \sqrt{570} - \sqrt{569} + \dots + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Используем идею дополнения. Строим выражения

$$D_1 = \sqrt{575} - \sqrt{574} + \sqrt{572} - \sqrt{571} + \sqrt{569} - \sqrt{568} + \dots + \sqrt{2} - \sqrt{1},$$

$$D_2 = \sqrt{574} - \sqrt{573} + \sqrt{571} - \sqrt{570} + \sqrt{568} - \sqrt{567} \dots + \sqrt{1} - \sqrt{0}.$$

Очевидно,  $D < D_1 < D_2$ . Ясно также, что  $D + D_1 + D_2 = 24$ . Поэтому  $D < 8$ , а значит,  $C < 2$ .

Итак,  $C < A < B$ .

### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

#### Вопросы и задачи

1. Из-за конечного углового размера Солнца края теней от предметов размыты. В каждую точку отрезков  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  (рис.3) попадают лучи лишь от части солнечного диска. Границы полутеней – точки  $B_1$  и  $B_2$  – совпадут раньше, чем сближатся предметы 1 и 2.

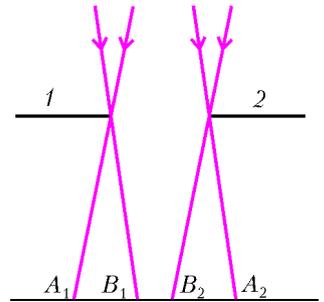


Рис. 3

2. Если спичка находится вблизи строки  $S$ , то ни один луч, выходящий из строки, не попадет в зрачок (рис.4,а). Если же спичка расположена у самого глаза, то некоторые лучи проходят внутрь зрачка (рис.4,б).

3. «Проведя» эту линию с помощью длинной линейки или ровной палки, вы, как и следовало ожидать, попадете на

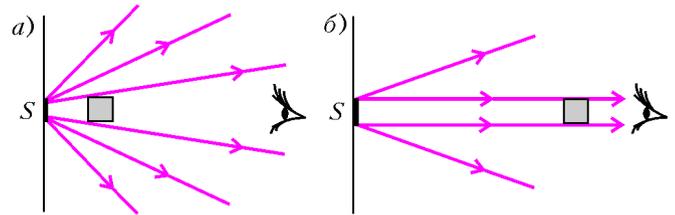


Рис. 4

Солнце. Но линия, проведенная лишь мысленно, может и «промахнуться». Эта иллюзия связана с тем, что небо представляется нам куполообразным.

4. Вблизи сетки-ограды даже отдельный ее прут может заметно перекрыть поле зрения глаза. Удаляясь от сетки, мы увеличиваем и поле зрения и световой поток от игроков, проходящий через большее число отверстий.

5. Нет. Небо вокруг звезды как через трубу, так и без нее выглядит одинаково ярко, а рассеянный атмосферой солнечный свет значительно ярче света звезд.

6. Конечно, можно. Отраженные лучи, ищущие от зеркала к линзе, неотличимы от действительных солнечных лучей.

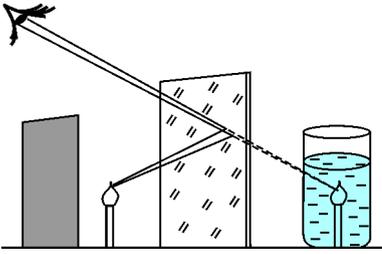


Рис. 5

7. Выпуклые зеркала имеют более широкую область обзора, чем плоские.

8. Можно. Для этого надо закрыть свечу от зрителя экраном и получить ее зеркальное отражение от стеклянной пластины (рис.5). Затем совместить изображение

свечи с сосудом, наполненным водой.

9. Коэффициент отражения лучей заметно возрастает по мере приближения угла падения к прямому. (Этот случай не связан с возникновением миража из-за искривления лучей у поверхности разогретого асфальта.)

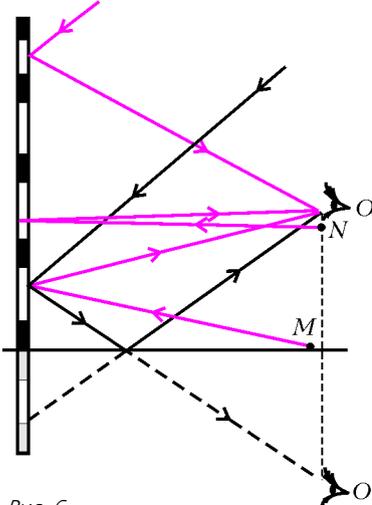


Рис. 6

10. Наблюдатель  $O$  (рис.6), судя по рисунку в тексте, находится на уровне второго этажа дома. Глядя непосредственно на дом, в окна верхних этажей он видит отражение светлого неба, а в нижних – отражение темной земли ( $M$ ) или своего места наблюдения ( $N$ ). Глядя же на мокрый асфальт, наблюдатель  $O$  во всех окнах видит небо – то же, что видел бы зеркальный ему наблюдатель  $O'$ .

11. Из-за преломления света на границе вода – воздух изображение дна будет казаться наклонным с наибольшей глубиной у ног человека.

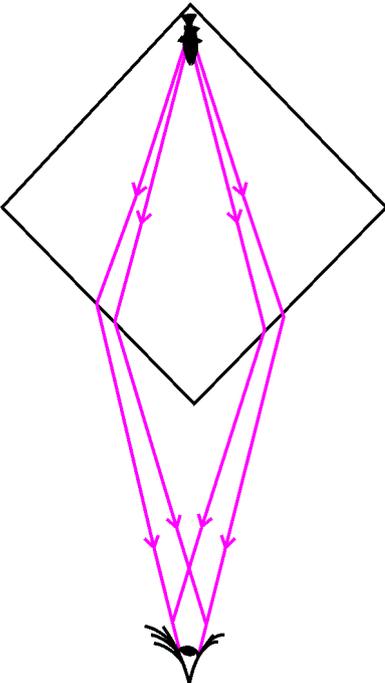


Рис. 7

12. Кажущаяся скорость меньше истинной в  $n$  раз, где  $n$  – показатель преломления воды.

13. В результате преломления лучей на гранях аквариума (см. рис.7 – вид сверху) в глаз попадают два потока лучей.

14. Идущие от монеты лучи отражаются от задней стенки банки и, преломившись на поверхности воды, попадают в глаз. От мокрой ладони, приложенной к задней стенке, отражения не будет – лучи или поглотятся или рассеются.

15. Из-за рефракции – искривления световых лучей при прохождении через атмосферу – уже ушедший за горизонт нижний край Солнца кажется нам приподнятым. Верхний край солнечного диска приподнимается рефракцией слабее. Поэтому Солнце у гори-

зонта кажется немного сплюснутым по вертикали.

16. На более длинном пути в атмосфере, который проходит свет к глазу от низко стоящего светила, заметно рассеиваются практически все составляющие светового спектра, кроме самых длинных волн – красных.

### Микроопыт

На левом рисунке в тексте ближний цилиндр кажется по крайней мере раз в восемь меньше, чем дальний. На правом рисунке все три цилиндра кажутся одинаковыми. Линейка, однако, удостоверит вас в том, что малый цилиндр в три раза меньше большого. Все дело – в эффекте перспективы.

### ВОЗРОЖДЕНИЕ «БЕСПОЛЕЗНЫХ» ЧИСЕЛ

1. а) При четном  $k$  утверждение очевидно, для  $k = 2s + 1$  из предположения, что  $N_k$  является квадратом, вытекает  $2^{2s+1} - 1 = (2m + 1)^2$ , откуда  $2^{2s} = 2(m^2 + m) + 1$ , что невозможно; б)  $2^k - 1$  в двоичной системе записывается с помощью  $k$  единиц.

2. а) Пусть  $k = 2s + 1$ , тогда

$$N_{2s+1} - 1 = 2^{4s+1} - 2^{2s} - 1 = 2^{4s-2} (2^3 + 1) - 2^{2s} - 1 = 9 \cdot 2^{4s-2} - (2^{2s-1} + 1)^2,$$

а  $2^{2s-1} + 1 = (2 + 1)(2^{2s-2} - 2^{2s-3} + \dots - 2 + 1)$  делится на 3;

б) из равенства  $\sum_{t=1}^m t^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$  получаем

$$\sum_{t=1}^m (2t-1)^3 = \sum_{t=1}^{2m-1} t^3 - \sum_{t=1}^{m-1} (2t)^3 = (2m-1)^2 m^2 - 2(m-1)^2 m^2 = m^2(m^2-1),$$

остается положить  $m^2 = 2^{k-1}$  при нечетном  $k$ .

3. Искомая сумма равна  $(\sigma(n) - n)/n$ , а  $\sigma(n) = n$ .

4. Так как  $\sigma(2^8) = 7 \cdot 73$ ,  $\sigma(2^8 \cdot 7 \cdot 73) = 7 \cdot 73 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 37$ ,

$\sigma(37) = 2 \cdot 19$ ,  $\sigma(19) = 2^2 \cdot 5$ , то для числа

$n = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$  имеем  $\sigma(n) = 3n$ ; если взять

$n = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$ , то получим  $\sigma(n) = 4n$ . Равенства

$\sigma(2^9) = 3 \cdot 11 \cdot 31$ ,  $\sigma(11) = 2^2 \cdot 3$ ,  $\sigma(31) = 2^5$  приводят к числу

$n = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ , для которого  $\sigma(n) = 3n$ . Поскольку

$\sigma(2^{13}) = 3 \cdot 43 \cdot 127$ ,  $\sigma(43) = 2^2 \cdot 11$ ,  $\sigma(127) = 2^7$ , то получаем

число  $n = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127$ , для него  $\sigma(n) = 3n$ . Из

$\sigma(2^{14}) = 7 \cdot 31 \cdot 151$ ,  $\sigma(151) = 2^3 \cdot 19$  находим

$n = 2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$  и  $\sigma(n) = 3n$ ; добавив множитель

3, получим  $n = 2^{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$  и  $\sigma(n) = 4n$ .

5. Равенства  $\sigma(2^{10}) = 23 \cdot 89$ ,  $\sigma(23) = 2^3 \cdot 3$ ,  $\sigma(89) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ ,

$\sigma(3^3) = 2^3 \cdot 5$ ,  $\sigma(5^2) = 31$  приводят к числу

$n = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 89$ , для которого  $\sigma(n) = 4n$ . Из

$\sigma(2^{11}) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ ,  $\sigma(2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13) = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2$ ,

$\sigma(3^3) = 2^3 \cdot 5$ ,  $\sigma(5^2) = 31$ ,  $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19$  ( $\sigma(13^2)$  не рассмат-

риваем: второй множитель 13 появился за счет  $(\sigma(3^2))$ ) по-

лучаем  $n = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$ , для него  $\sigma(n) = 5n$ . По-

скольку  $\sigma(2^{15}) = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257$ ,  $\sigma(257) = 2 \cdot 3 \cdot 43$ ,

$\sigma(43) = 2^2 \cdot 11$ ,  $\sigma(17) = 2 \cdot 3^2$ ,  $\sigma(3^5) = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$ ,  $\sigma(7^2) = 3 \cdot 19$ ,

$\sigma(5^2) = 31$ , то  $n = 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 257$  и

$\sigma(n) = 6n$ .

**ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ**

1.  $q = \frac{\pi d^2 BN}{4R} = 5 \cdot 10^{-3}$  Кл.
2.  $I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + kl^2/16}{R} = 0,5$  А.
3.  $P = \frac{\pi k^2 l^4}{16(\pi + 1)^3 R}$ .
4.  $Q = \left(\frac{\varepsilon - Bvl}{R + r}\right)^2 Rt = 64$  Дж.
5.  $v = 3$  м/с.
6.  $\varepsilon = \frac{\sqrt{2WL}}{t} = 14,1$  В.
7.  $P = \left(\frac{Bvd}{R + \rho d/S}\right)^2 R$ .
8.  $\Delta\varphi = \frac{\omega l^2 B}{2} = 0,3$  В.

**XXXII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**

**Заключительный этап**

**9 класс**

1. Ясно, что ломаная пересекает диагональ. Пусть  $A$  – одна из вершин ломаной, лежащая на диагонали. Будем двигаться по ломаной, пока не попадем первый раз снова в вершину  $B$ , лежащую на диагонали. Из симметрии, если двигаться по ломаной из  $A$  в другую сторону, то  $B$  также окажется первой вершиной на диагонали, в которую мы попадем. При этом ломаная уже замкнется, поэтому через остальные 13 центров клеток на диагонали ломаная не проходит.

Раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы диагональ была черной. Заметим, что на нашей ломаной белые и черные клетки чередуются, поэтому их количества равны. В исходном же квадрате черных клеток на одну больше. Поскольку клетки диагонали черные и ломаная не проходит через 13 из них, то она не проходит и через 12 белых клеток.

Итого, длина ломаной не более  $15^2 - 13 - 12 = 200$ .

2. Рассмотрим какое-нибудь натуральное число  $n > 1000000$ . Покажем, что условию будут удовлетворять четверка чисел  $-n, n + 1, n(n + 1) + 1, n(n + 1)(n(n + 1) + 1) + 1$ . Действительно, применив трижды соотношение

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a(a+1)},$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)+1} = \\ & = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)+1} + \frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)} = \\ & = -\frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)} = \\ & = \frac{1}{n(n+1)(n(n+1)+1)(n(n+1)(n(n+1)+1)+1)}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

3. 117.

Заметим, что  $2006 = 17 \cdot 118$ , поэтому найдутся 2 цвета, в которые покрашены в сумме не менее  $2 \cdot 118 = 236$  точек.

Докажем индукцией по  $k$ , что через  $2k - 1$  точку двух цветов всегда можно провести  $k - 1$  непересекающуюся хорду с одноцветными концами. База очевидна. Пусть  $k > 2$ . Тогда среди точек возьмем две одноцветные, стоящие подряд. Соединим их хордой, выбросим и применим предположение индукции к оставшимся точкам.

Выбрав 235 точек двух цветов и применив данное утверждение, получаем, что 117 хорд Коля сможет провести всегда. Осталось привести пример, когда больше хорд провести нельзя.

Допустим, на окружности стоят  $17k$  точек. Пусть Петя покрасит каждую точку в цвет, соответствующий остатку от деления на 17 ее номера. Докажем индукцией по  $k$ , что через эти точки можно провести не более  $k - 1$  хорды с выполнением условия. База очевидна, докажем переход. Пусть проведено некоторое количество хорд. Рассмотрим две соединенные точки  $A$  и  $B$  на минимальном расстоянии друг от друга, получим такую хорду  $AB$ , что на одной из дуг, на которые она делит окружность, нет концов других проведенных хорд. Теперь сотрем хорду  $AB$  и уберем с окружности все точки этой дуги, включая один из концов хорды. Мы получим исходную раскраску  $17l$  точек при  $l < k$ . Они соединены не более чем  $l - 1$  хордой, поэтому изначально хорд было не больше  $l - 1 + 1 \leq k - 1$ , что и требовалось.

4. Пусть  $M$  – вторая точка пересечения  $\omega$  со стороной  $AC$ . Докажем, что четырехугольник  $ATLC$  вписанный. Действительно, заметим, что при гомотетии с центром  $A$ , переводящей окружность  $\omega$  в описанную окружность треугольника  $ABC$ , прямая  $MK$  переходит в прямую  $CB$ , а следовательно, они параллельны (рис.8).

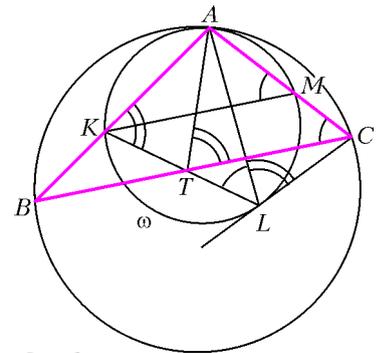


Рис. 8

Тогда получаем, что  $\angle AMK = \angle ACB = \angle ACT$ , но из вписанности четырехугольника  $AMLK$  имеем  $\angle AMK = \angle ALK = \angle ALT$ . Отсюда  $\angle ACT = \angle ALT$ , т.е. четырехугольник  $ATLC$  вписанный. Следовательно,  $\angle CTA = \angle CLA$ , но по свойству касательной  $\angle CLA = \angle LKA$ , т.е.

$\angle CTA = \angle TKA$ , и, значит,  $\angle BTA = \angle BKT$ . Тогда треугольники  $BTA$  и  $BKT$  подобны по двум углам, откуда  $BT^2 = BK \cdot BA$ . С другой стороны, произведение  $BK \cdot BA$  равно квадрату касательной к окружности  $\omega$  из точки  $B$ .

5. Заметим, что  $b_k = \frac{a_k}{c_k}$ , где  $c_k$  – наименьший простой делитель  $a_k$ . Так как  $b_9 > b_{10}$ , то  $b_9 > 1$  и  $b_9 \geq c_9$ . Отсюда  $a_{10} > a_9 \geq c_9^2$ . Но из неравенств  $a_i < a_{i+1}$ ,  $b_i > b_{i+1}$  следует, что  $c_i < c_{i+1}$ , т.е.  $c_1 < c_2 < \dots < c_{10}$ . Значит,  $c_9 \geq 23$ , так как 23 – девятое по счету простое число. Поэтому  $a_{10} > c_9^2 \geq 529 > 500$ .

6. Заметим, что точка  $X$  лежит на луче  $RP$  (рис.9), так как  $\angle RAZ > \angle ARP$  ( $\angle RAZ = \angle ABC = \pi - \angle PRQ = \angle ARP + \angle QRC$ ). Аналогично, точка  $Y$  лежит на луче  $RQ$ .

Тогда  $\angle ACB = \angle XAB$  и  $\angle APX = \angle RPB = \angle RQC$ , и треугольники  $APX$  и  $CQR$  равны по стороне и двум углам. Следовательно,  $PX = QR$ . Аналогично,  $PR = QY$ , откуда и следует утверждение задачи.

7. Выигрывает игрок, делающий второй ход.

Приведем выигрышную стратегию для второго.

Первыми несколькими ходами он склеивает каждую клетку, примыкающую к границе квадрата, со всеми ее соседями. На это требуется не более  $8 \cdot 99$  ходов, т.е. после этого будет склеено всего  $16 \cdot 99$  пар сторон и, как следствие, не

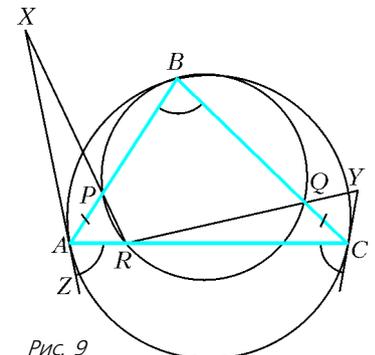


Рис. 9

более  $2 \cdot 16 \cdot 99 < \frac{10000}{2}$  до-

миношек окажутся склеенными с чем-нибудь еще. Следовательно, после этого еще останутся отдельные доминошки, и фигура не будет связной. Далее второй будет действовать произвольным образом, следя только за тем, чтобы не проиграть прямо нынешним ходом.

Тогда все доминошки распадаются на две связные фигуры, причем все несклеенные отрезки – это граница между этими фигурами, так как любой другой отрезок можно склеить. При этом одна из этих фигур содержит все граничные клетки квадрата.

В границе внутренней фигуры четное число отрезков (если мы обойдем эту ломаную, то отрезков, по которым мы шли вверх и вниз, будет поровну; то же с отрезками вправо и влево). Подсчитаем изначальное число разрезанных сторон отрезков. Оно равно суммарному периметру всех доминошек, уменьшенному на периметр квадрата и деленному на 2 (так как каждый из остальных отрезков считался по два раза),

т.е.  $\frac{6 \cdot 5000 - 400}{2}$  – четному числу. Значит, к данному моменту стерто также четное число сторон, и ходить должен первый. Противоречие.

**8.** Обозначим через  $c_1$  и  $c_2$  корни уравнения  $f(x) = 0$ , а через  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $f(f(x)) = 0$ , сумма которых равна  $-1$ . Множество корней последнего уравнения совпадает с объединением множеств корней уравнений  $f(x) = c_1$  и

$f(x) = c_2$ . Если  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями одного из последних двух уравнений, то их сумма, равная  $-1$ , будет по теореме Виета равна и  $-a$ , откуда  $a = 1$ . Можно считать, что  $c_1 \geq c_2$ . Но поскольку по теореме Виета  $c_1 + c_2 = -1$ , то

$c_2 \leq -\frac{1}{2}$ . Из условия следует, что дискриминант уравнения  $f(x) = c_2$  неотрицателен, поэтому  $1 - 4b + 4c_2 \geq 0$ , откуда  $b \leq -\frac{1}{4}$ .

В противном случае, не умаляя общности, можно записать, что  $x_1^2 + ax_1 + b = c_1$  и  $x_2^2 + ax_2 + b = c_2$ . Складывая последние два равенства, получим  $x_1^2 + x_2^2 + a(x_1 + x_2) + 2b = c_1 + c_2$ . Поскольку  $c_1 + c_2 = -a$  по теореме Виета, а  $x_1 + x_2 = -1$  по условию, то последнее равенство после сокращения перепишется так:  $x_1^2 + x_2^2 + 2b = 0$ . Но тогда  $b = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \leq -\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 = -\frac{1}{4}$ .

### 10 класс

**2.** В решении латинскими буквами везде обозначены натуральные числа.

По условию,  $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = y^3$ , или  $3x(x^2 + 2) = y^3$ .

Тогда  $y$  делится на 3,  $y = 3z$  и  $x(x^2 + 2) = 9z^3$ . Очевидно,  $\text{НОД}(x, x^2 + 2) \leq 2$ .

Докажем, что случай  $\text{НОД}(x, x^2 + 2) = 1$  невозможен. Действительно, в этом случае либо  $x = 9u^3$  и  $x^2 + 2 = v^3$ , либо  $x = u^3$  и  $x^2 + 2 = 9v^3$  при некоторых натуральных  $u, v$ . В первом случае получаем  $81u^6 + 2 = v^3$ , что невозможно, так как куб целого числа при делении на 9 дает остаток 0 или  $\pm 1$ . Аналогично, второе равенство влечет, что  $u^6 + 2 = 9v^3$ , что невозможно по тем же причинам.

Итак,  $\text{НОД}(x, x^2 + 2) = 2$ ,  $x(x^2 + 2) = 9z^3$ . Тогда  $x$  (и, следовательно,  $z$ ) четно, поэтому  $x(x^2 + 2)$  делится на 8. Поскольку  $x^2 + 2$  не делится на 4, получаем, что  $x$  делится на 4, что и требовалось.

*Замечание.* Можно доказать, что уравнение задачи имеет единственное решение в натуральных числах: (4; 6). Однако элементарное доказательство этого факта автору задачи неизвестно.

### 11 класс

**1.** При  $x \geq 1$  имеем  $1 \leq \sqrt{x} \leq x < \frac{\pi}{2}$ . Отсюда  $\sin \sqrt{x} \leq \sin x$ .

Далее, поскольку  $0 < \sin x < 1$ , имеем  $\sin x < \sqrt{\sin x}$ . Пусть  $0 < x < 1$ . Перепишем неравенство:  $\sin^2 t < \sin(t^2)$  при  $0 < t < 1$ . Так как  $\sin^2 0 = \sin(0^2)$ , то достаточно доказать  $(\sin^2 t)' < (\sin(t^2))'$ , или  $2 \sin t \cos t < 2t \cos(t^2)$ . Поскольку  $\frac{\pi}{2} > t > t^2 > 0$ , то  $\cos t < \cos(t^2)$ . Перемножив это неравенство и неравенство  $\sin t < t$ , получим  $\sin t \cos t < t \cos(t^2)$ .

**2.** Заметим, что дробь с периодом  $T$  после домножения на  $10^T - 1$  становится целым числом. Домножим наши две дроби

$a$  и  $b$  на число  $10^T - 1 = \underbrace{99 \dots 9}_T$ . Получатся два новых рациональных числа  $A = (10^T - 1)a$  и  $B = (10^T - 1)b$ . Числа

$A + B = (10^T - 1)(a + b)$  и  $AB = (10^T - 1)^2 ab$  целые, так как  $a + b$  и  $ab$  – дроби с периодом  $T$ , становящиеся целыми при домножении на  $10^T - 1$  и тем более на  $(10^T - 1)^2$ . Но два рациональных числа, сумма и произведение которых целые, являются корнями приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами, т. е. сами являются целыми числами. Значит,  $a$  и  $b$  могут быть записаны в виде обыкновенных дробей со знаменателем  $10^T - 1$ , откуда и следует утверждение задачи.

**3.** Выигрывает первый.

Разобьем все отмеченные точки на пары (множество отрезков в концах точек пары – горизонтальные отрезки длины 1). Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Пусть первым ходом он соединит точки из какой-нибудь пары. Если второй соединяет отрезком две точки какой-нибудь пары, то первый должен соединить отрезком две точки другой пары – назовем эти два отрезка двойкой первого типа. Если же второй соединит отрезком две точки из разных пар, то первый должен соединить отрезком две оставшиеся точки их этих пар – назовем эти два отрезка двойкой второго типа. Заметим, что количество точек делится на 4, поэтому последний ход сделает второй. Первый будет делать ответные ходы до тех пор, пока не останется одна пара – эти две оставшиеся точки соединит отрезком второй игрок. Заметим, что в двойке первого типа можно выбрать направление так, чтобы сумма двух векторов равнялась нулевому вектору, а в двойке второго типа – так, чтобы сумма двух векторов равнялась горизонтальному вектору длины 2 (любого из двух направлений). Теперь первому нужно выбрать направления в двойках второго типа, чтобы суммарная длина всех векторов в этих двойках равнялась либо нулевому вектору, либо горизонтальному вектору длины 2. После этого останутся только два отрезка длины 1 (первый ход первого игрока и последний ход второго), на которых первому игроку нужно выбрать направления так, чтобы сумма всех векторов равнялась нулевому вектору.

**4.** Пусть биссектрисы  $AI, BI, CI$  пересекают описанную окружность в точках  $A_0, B_0$  и  $C_0$  соответственно. Точки  $B_0$  и  $C_0$  являются серединами дуг  $AC$  и  $AB$  соответственно. Проведем через  $A$  прямую, параллельную  $B_0C_0$ , пересекающую биссектрисы в точках  $I_B$  и  $I_C$  (рис.10). Имеем

$$\begin{aligned} \angle AIB_0 &= \angle ABI + \angle BAI = \\ &= \angle ABB_0 + \angle BAA_0 = \angle B_0BC + \angle CAA_0 = \angle B_0AI, \end{aligned}$$

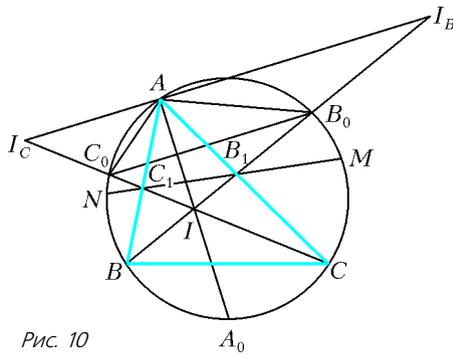


Рис. 10

поэтому треугольник  $B_0AI$  равнобедренный ( $B_0A = BI$ ). Аналогично,  $C_0A = CI$ . Поэтому треугольники  $B_0AC_0$  и  $B_0IC_0$  равны. Далее, отрезок  $B_0C_0$  является средним перпендикуляром к  $AI$ , а  $AI$  – высота в треугольнике  $IBC$ . Отсюда следует, что  $B_0C_0$  – средняя линия треугольника  $IBC$ . Получаем следующие равенства для радиусов описанных окружностей:

$$R(I_B I_C) = 2R(B_0 I C_0) = 2R(B_0 A C_0) = 2R(ABC).$$

Теперь достаточно доказать, что точки  $M$  и  $N$  лежат на описанной окружности треугольника  $I_B I_C$ . Заметим, что  $\angle A I_B I = \angle C_0 B_0 I = \angle C_0 B_0 A = \angle C_0 C A = \angle I C A$ , значит, точки  $A, I, C, I_B$  лежат на одной окружности, отсюда  $B_1 A \cdot B_1 C = B_1 I \cdot B_1 I_B$ . С другой стороны,  $B_1 A \cdot B_1 C = B_1 M \cdot B_1 N$ , так как точки  $A, M, C, N$  лежат на одной окружности. Следовательно,  $B_1 M \cdot B_1 N = B_1 I \cdot B_1 I_B$ , и точка  $I_B$  лежит на описанной окружности треугольника  $IMN$ . Аналогично, на ней лежит точка  $I_C$ , что и требовалось.

5. Очевидно, что, начиная со второго члена, наши последовательности возрастают:  $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_{n+1}$ ,  $y_{n+2} > y_{n+1}$ . Так как  $x_3 > 1 + 1^2 = 2$ ,  $y_3 > 1^2 + 1 = 2$ , все члены каждой из последовательностей, начиная с третьего, больше 2. Аналогично, при  $n > 3$  получим  $x_n > 3$ ,  $y_n > 3$ .

Заметим теперь, что  $x_{n+2} > x_{n+1}^2 > x_n^4$  при  $n > 1$ . С другой стороны,  $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1} = y_n^2 + y_n + y_{n-1}^2 < 3y_n^2 < y_n^3$  при  $n > 3$ .

Итак, при  $n > 3$  имеем

$$\frac{\lg x_{n+2}}{\lg y_{n+2}} > \frac{4 \lg x_n}{3 \lg y_n}, \text{ а } \frac{\lg x_{2k}}{\lg y_{2k}} > \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \frac{\lg x_2}{\lg y_2}.$$

При достаточно большом  $k$  правая часть последнего неравенства больше 1, а значит,  $x_{2k} > y_{2k}$ , что и требовалось доказать.

6. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что  $SD$  – высота в грани  $SAB$ . Так как  $SS'$  – диаметр окружности, проходящей через  $S, S'$  и  $A$ , то  $\angle SAS' = 90^\circ$  (рис.11). Обозначив через  $R$  и  $r$  радиусы описанной сферы пирамиды и вписанной окружности треугольника

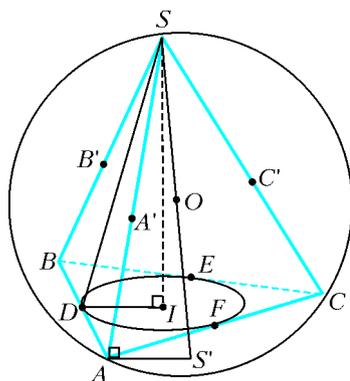


Рис. 11

$ABC$  соответственно, имеем

$$\begin{aligned} S'A'^2 &= S'A^2 + AA'^2 = (SS'^2 - SA^2) + AD^2 = \\ &= SS'^2 - (SA^2 - AD^2) = SS'^2 - SD^2 = \\ &= SS'^2 - (SI^2 + ID^2) = (2R)^2 - SI^2 - r^2. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляя  $S'B'$  и  $S'C'$ , получаем, что

$$S'A' = S'B' = S'C' = \sqrt{(2R)^2 - SI^2 - r^2}.$$

8. В решении будем пользоваться следующей известной теоремой.

**Теорема Холла.** Пусть дан двудольный граф  $G$ , т.е. его вершины разбиты на два подмножества  $A$  и  $B$  таких, что любое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.

Предположим, что для любого подмножества вершин  $A_1 \subseteq A$  количество вершин в  $A_1$  не больше, чем количество вершин, соединенных хотя бы с одной вершиной из  $A_1$ . Тогда в графе найдется паросочетание (т.е. набор ребер с различными концами), содержащее все вершины множества  $A$ . Перейдем к решению задачи. Построим граф, вершины которого соответствуют пионерам, а ребра – знакомствам. Степени вершин этого графа не менее 50 и не более 100. Докажем вспомогательное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $k \leq n \leq m$  – натуральные числа. Тогда из графа, степени вершин которого не менее  $n$  и не более  $m$ , можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее  $n - k$  и не более  $m - k$ .

**Доказательство.** Понятно, что достаточно доказать утверждение леммы для  $k = 1$ . До тех пор пока есть ребра, соединяющие пары вершин степени  $m$ , будем удалять такие ребра.

Пусть таких ребер больше нет, обозначим через  $A$  множество всех вершин степени  $m$  в полученном после удаления ребер графе  $G$ , а через  $B$  – множество всех остальных вершин.

Рассмотрим двудольный граф  $G'$  на тех же вершинах, в котором останутся лишь ребра между  $A$  и  $B$ . Проверим выполнение условия теоремы Холла для этого графа. Рассмотрим множество  $A_1 \subset A$ , пусть  $B_1$  – множество вершин, смежных с вершинами из  $A_1$ . Из  $A_1$  выходит не менее  $m|A_1|$  ребер к вершинам множества  $B_1$ , а в каждую вершину из  $B_1$  входит не менее  $n$  ребер, следовательно,  $|B_1| \geq |A_1|$  (через  $|X|$  мы, как обычно, обозначаем количество элементов в множестве  $X$ ).

Таким образом, по теореме Холла существует паросочетание, содержащее все вершины из  $A$ . Удалив из графа  $G$  ребра этого паросочетания, мы получим граф  $G_1$ , степени вершин которого не менее  $n - 1$  и не более  $m - 1$ . Лемма 1 доказана. Вернемся к решению задачи. Применив лемму 1 для исходного графа и  $k = 30$ , мы получим граф  $H$ , степени вершин которого не менее 20 и не более 70. Сделаем его ребра красными. Для каждой вершины этого графа отметим 20 вершин среди ее соседей и попарно соединим эти 20 вершин зелеными ребрами. Так как из каждой вершины выходит не более 70 красных ребер, то из нее выходит не более чем  $70 \cdot 19 = 1330$  зеленых ребер.

Рассмотрим граф  $H'$  с зелеными ребрами на вершинах графа  $H$ . Несложно по очереди покрасить эти вершины в 1331 цвет так, чтобы соседние вершины были разноцветными: рассматривая каждую следующую вершину, покрасим ее в любой незадействованный среди ее соседей цвет.

Теперь опять рассмотрим граф  $H$  с красными ребрами. Среди соседей каждой его вершины есть 20 выделенных, и все они покрашены в разные цвета.

**Замечание.** Можно покрасить пионеры всего в 761 цвет (это наблюдение принадлежит И.Богданову). Для доказательства этого факта надо заменить лемму 1 на более сильную лемму 2, доказательство которой предоставляется читателю.

**Лемма 2.** Пусть  $k \leq n$  – натуральные числа. В графе  $G$  степени всех вершин не менее  $n$  и не более  $2n$ . Тогда можно удалить несколько ребер так, чтобы степени всех вершин стали не менее  $k$  и не более  $2k$ .

## XI ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### Теоретический тур

#### 9 класс

- $x_m = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6,3 \text{ см.}$
- $l_1 = L \frac{V^2 + uv}{2vV}$ ;  $l_2 = L \frac{V^2 - uv}{2vV}$ .
- $\alpha = \frac{\Delta R}{R_0} \frac{c}{\lambda} \frac{\tau_{пл}}{\Delta \tau} = 0,021 \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ , где  $\frac{\Delta R}{R_0} = 0,068$ ,  $\tau_{пл} = 600 \text{ с}$  и  $\Delta \tau = 24 \text{ с}$  (все эти данные получены из графика); см. рисунок 12.

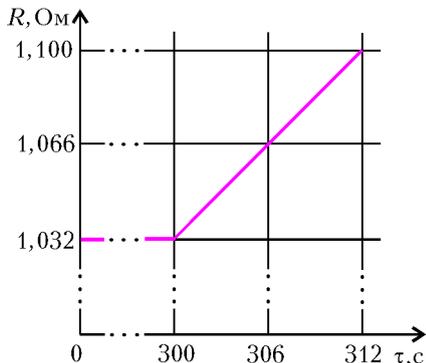


Рис. 12

- Если ключ  $K_1$  замкнут, а ключ  $K_2$  разомкнут, то  $I = 0$ ; если  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты, то ток течет от  $D$  и  $B$  и равен  $I = \frac{U}{8R}$ ; если  $K_2$  замкнут, а положение  $K_1$  произвольное, то ток течет от  $B$  и  $D$  и равен  $I = \frac{2U}{5R}$ .

#### 10 класс

- $x = \frac{mv}{\alpha}$ ; после остановки система будет иметь вид «лесенки» с шагом  $x$ .
- $x = \sqrt{\frac{3vR + C}{4vR + C} \left( L - \frac{2p_0}{\rho g} \right)} L$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная; исходное положение жидкости в трубке устойчиво.
- $\eta_p = \eta_V$ .
- $F = \frac{(3q_2 - q_1)(3q_1 - q_2)}{32\pi\epsilon_0 R^2}$ ; заряды должны отличаться более чем втрое.
- $U_V = -\frac{2\mathcal{E}}{1 + \sqrt{5}} \approx -0,74 \text{ В}$ ;  $I_A = -\frac{4\mathcal{E}}{(1 + \sqrt{5})^2 r} \approx -0,23 \text{ А}$ .

#### 11 класс

- $\frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3}$ ;  $W_{\min} = \frac{p_1 p_2 (1 - \cos \alpha)}{M} = 4,32 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ .
- 1)  $t = \frac{L^2}{2Rv_0}$ ; 2) если  $v_0 \leq L\sqrt{\frac{\mu g}{R}} = v^*$ , то  $t = \frac{v_0}{\mu g}$ ; если  $v_0 \geq v^*$ , то  $t = \frac{v_0}{\mu g} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\mu g L^2}{v_0^2 R}} \right)$ .
- 1)  $Q = p_0 k V_0 \ln k = 0,54 \cdot 10^5 \text{ Дж}$ ;

$$2) Q = \frac{5}{2} p_0 k V_0 (k^{\gamma-1} - 1) = 6,69 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

$$4. C_2 = \frac{L_3}{r_1 r_4} = 0,5 \text{ мкФ}; r_2 = \frac{r_1 r_4}{r_3} = 200 \text{ кОм.}$$

$$5. 1) I_0 = \sqrt{\frac{mgL}{2\beta}} \frac{2}{\mu_0 n S} = 11,1 \text{ А};$$

$$2) z = \frac{3}{4\alpha} = 2,08 \text{ см}; 3) f = \frac{\sqrt{\alpha g}}{\pi} = 6 \text{ Гц.}$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

seemat.ru

# журнал © Квант

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк,  
А.Е.Пацхверия, З.М.Сурова**

**ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР**

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева**

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info, phys@kvant.info

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Тел./факс: (501) 443-92-17, (272) 6-25-36

E-mail: marketing@chpk.ru