Euler et le problème de Bâle

Si quelqu'un nous trouve et nous communique ce qui, jusqu'ici, a échappé à nos efforts, grande sera notre reconnaissance.

Jacques BERNOULLI[1].

Résumé :

Cet article expose le problème de Bâle. C'est certainement par les mots ci-dessus de Jacques Bernoulli que le problème est devenu célèbre à la fin du 17ème siècle. Celui-ci peut se résumer ainsi :

$$\boxed{La\ série\ \ 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots etc.converge.\ \ La\ valeur\ de\ sa\ limite\ est\ \ \frac{\pi^2}{6}}$$

Il a été résolu par Leonhard EULER. Nous présenterons d'abord comment Pietro MENGOLI a posé le problème en montrant également que cette série converge. Nous étudierons ensuite comment, à partir d'un problème d'interpolation, Leonhard EULER a conjecturé que cette limite devait être « le sixième du carré d'un cercle de rayon un ». Nous regarderons une première démonstration proposée en 1735, puis une seconde datant de 1742. Nous regarderons comment ce résultat peut être étendu en nous intéressant sommairement à la fonction Zêta.

Le problème de Bâle avant Euler :

La somme $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ est évoquée pour la première fois par Mengoli en 1644 dans son œuvre « *Novae Quadraturae Arithmeticae* ». Ce mathématicien est né à Bologne en 1626 environ et mort en 1686 à 60 ans dans la même ville. Habitée depuis le IXème siècle, fondée par les étrusques, elle fait partie au XVIIème des états papaux. Mengoli est élève de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), auquel il succède en 1647 à la chaire de mathématiques de l'université de Bologne. Docteur en philosophie et en droit[2]. Il est ordonné prêtre en 1660. Il publie en 1650 l'ouvrage « *Novae Quadraturae Arithmeticae, seu de additione fractionum* ». Celui-ci traite des séries infinies, en calculant certaines sommes et en démontrant certaines de leurs propriétés. Dans la préface, il démontre la divergence de la série harmonique, 40 ans avant Jacques Bernoulli. Cette œuvre est composée de trois livres.

Le premier montre que :

[1] Voir [11] page 254. La famille des Bernoulli est une grande famille de mathématiciens et de physiciens.

[2] Voir Mengoli par Rosa Massa page 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Cette somme[3] s'obtient en remarquant que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

de sorte que les sommes partielles sont de la forme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Mengoli trouve une majoration de la somme de la série des inverses des carrés, à l'aide de la remarque suivante :

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 1$$

ce qui conduit à majorer notre somme par 2, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{La série } \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge.}}$$

En 1673, Leibniz (1646-1716) découvre le problème de Bâle par un échange épistolaire envoyé par Henry Oldenburg[4] (1616-1716), premier secrétaire de la Royal Society of London.

Leibniz fut le mentor de plusieurs membres de la famille Bernoulli, ce qui amena Jacques Bernoulli en 1689 à s'emparer du problème, sans arriver à le résoudre toutefois, et à participer à le rendre célèbre, notamment par les mots cités au début de cet article.

En 1730, James Stirling (1692-1770) dans son livre « *Methodus Differentialis* » propose le nombre décimal 1, 644934066 comme approximation de notre somme, valeur exacte jusqu'à la 9ème décimale[5]. Stirling n'y reconnait cependant pas la valeur exacte de cette limite.

[3] On peut remarquer que cette série, à un coefficient près, est la somme des inverses des nombres triangulaires. Ceux-ci sont de la forme $T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$

[4] Correspondance du 6 avril 1673 voir le pdf page 51 et 14 mai 1673, page 63

[5] Voir [4] page 54.

Une biographie sommaire de Leonhard Euler.

Le premier âge.

Léonhard Euler naquit le 15 avril 1707 à Bâle, en Suisse[6]. Son père, Paul, était un pasteur calviniste. C'était un homme de grande culture qui avait étudié les mathématiques avec le célèbre Jean Bernoulli, ce qui lui permit d'initier son fils dans ses premiers pas en mathématiques. Sa mère, Marguerite Brucker, était « *issue était issue d'une famille favorablement connue dans la république des lettres, par plusieurs savants distingués qui ont porté ce nom*[7]». Leonhard put ainsi grandir dans des dispositions très favorables à l'étude.

Leonhard fut un vrai enfant prodige. On dit qu'il avait une grande mémoire, ainsi qu'une aptitude naturelle au calcul telle qu'elle lui permettait de réaliser mentalement des calculs extrêmement difficiles. C'est une qualité qu'on retrouvera en filigrane tout au long de ses nombreux écrits.

Son père l'orienta vers des études de philosophie et de théologie, à Bâle, dans le but de l'amener à inscrire ses pas dans les siens et devenir pasteur. Le jeune Léonhard ne tarda pas à être remarqué de Jean Bernoulli. A défaut de pouvoir lui donner des leçons particulières, Bernoulli « *s'offrit à lui lever chaque samedi, les difficultés qu'il aurait rencontrées en étudiant les ouvrages les plus difficiles* » ([1], page 16).

En 1723, Euler reçut le grade de maitre-ès-arts, et embrassa, pour se conformer aux volontés de son père, l'étude de la théologie et des langues orientales. Enfin, le consentement de son père vint rendre le jeune homme aux mathématiques. Il continua à suivre les leçons de Jean Bernoulli et se lia d'une grande amitié avec ses deux fils Nicolas et Daniel.

La période russe

En 1725, les deux jeunes Bernoulli furent appelés à l'académie des sciences de Saint Pétersbourg. A leur départ, ils promirent à Euler qu'ils feraient leur possible pour lui trouver une place convenable. Il les rejoignit peu de temps après comme *« adjoint pour les mathématiques*[8] ».

---

[6] [1], page 15 : « *Il passa les premières années de son enfance à Riehen, et c'est à ce séjour champêtre dans un pays où les progrès de la corruption ont toujours été lents, et surtout aux bons exemples de ses parents, qu'il a dû cette simplicité de caractère et cette pureté de mœurs dignes du premier âge, qui l'ont distingué toute sa vie* ».

[7] Ibid.

[8] [13] page 157 :« *L. Euler concourait en même temps pour une chaire dans l'université de Bâle; mais c'est le sort qui prononce entre les savants admis à disputer ces places, et il ne fut pas favorable, nous ne disons point à Euler, mais à sa patrie, qui le perdit peu de jours après et pour toujours. Deux ans auparavant, Nicolas et Daniel Bernoulli avaient été appelés en Russie : Euler, qui les vit partir avec regret, obtint d'eux la promesse de chercher à lui procurer le même honneur, qu'il ambitionnait de partager; et il ne faut pas en être surpris. La splendeur de la capitale d'un grand empire, cet éclat qui, se répandant sur les travaux dont elle est le théâtre, et sur les hommes qui l'habitent, semble ajouter à leur gloire, peut aisément séduire la jeunesse, et frapper le citoyen libre, mais obscur et pauvre, d'une petite république. Les Bernoulli furent fidèles à leur parole, et se donnèrent, pour avoir auprès d'eux un concurrent si redoutable, autant de soins que des hommes ordinaires en auraient pu prendre pour écarter leurs rivaux*».

Mais pourquoi ces jeunes mathématiciens se sont-ils rendus à Saint Pétersbourg, et pas plutôt auprès d'une des académies des différents pays de l'Europe occidentale, qui étaient la plupart en plein essor scientifique ? Voici quelques notes historiques sur la Russie pour mieux comprendre ce choix géographique.

La géographie mettant en place le décor de l'histoire, rappelons que la Russie est un territoire remarquablement homogène[9]. C'est ce qui explique son expansion et donc ses dimensions. Pour ce qui est de la latitude, on se rapproche, au nord, de celle de l'Alaska, alors qu'au sud, la latitude correspond à celle du Canada. Bénéficiant d'une faible influence océanique, l'essentiel du territoire est soumis, comme on s'en doute, à un climat très rigoureux. Mais à cela s'ajoute une relative pénurie de bonnes terres agricoles et un besoin essentiel d'accès aux voies maritimes, au début du règne de Pierre le Grand en 1694.

Historiquement, la Russie est d'abord Kiévienne. Alors à son apogée, elle accepte solennellement le christianisme par l'intermédiaire de Constantinople en 988. C'est donc de Byzance et non de Rome qu'elle reçoit la religion chrétienne, ce qui contribuera de manière décisive à l'isolement de la Russie par rapport au reste de l'Europe et à la civilisation latine.

A cette période succède celle dite des apanages, qui correspond à l'invasion et à la domination mongole qui a retardé l'évolution de la Russie de près de 150 ou 200 ans. L'ascension de Moscou fait entrer la Russie dans sa période moscovite. Et c'est donc dans un contexte d'isolement, de grand retard et de méfiance envers l'étranger que le tsar Pierre prit les rênes de l'état en 1694. Les 30 années suivantes correspondent à une soudaine montée de la puissance russe. C'est à la suite de leur victoire durant la guerre du nord contre la Suède, état alors puissant d'Europe, que les russes s'établirent solidement sur le golfe de Finlande. L'année 1703 vit la fondation de Saint Pétersbourg à l'embouchure de la Neva. La Russie s'implantait ainsi solidement sur la Baltique et disposait d'une *« fenêtre sur l'Europe ».* Elle remplaçait la Suède dans son rôle de puissance dominante au nord du continent et accédait au statut de puissance européenne de premier plan. Le règne de Pierre le Grand, qui s'acheva le 8 février 1725, au moment où arrivent les deux jeunes Bernoulli, ne connut qu'une seule année sans guerre, 1724. Ainsi donc, *« les considérations militaires entrainèrent des mesures fiscales, celles-ci à leur tour des édits destinés à stimuler le commerce et l'industrie[10], des changements dans l'administration, faute de quoi celle-ci aurait été incapable de mettre en application ces édits, puis des mesures pour favoriser l'éducation car sans elle une administration moderne ne pouvait fonctionner*» ([2] page250). *Le tsar Pierre, «négligeant la base pour s'occuper du sommet»* ([3] page 313), eut l'idée de créer une académie des sciences, à l'instar de la France.

[9] La Russie est une immense plaine qui fut jadis le fond d'une mer très étendue ([2], pages 14 à 20).

[10] [3] page 300 : «*En 1725, la Russie compte 86 usines métallurgiques et arsenaux, 15 fabriques de drap, 14 fabriques de cuir, 15 manufactures de laine, 9 de soieries, 6 de coton ; et des scieries, des poudreries, des papeteries, des fabriques de verre…*».

Pour franchir le fossé du retard et de l'isolement, La Russie se mettait à l'école de l'occident. Les pays occidentaux servaient de modèle à l'empereur, ou plutôt Pierre chercha à adapter les institutions occidentales aux besoins et aux possibilités de la Russie. C'est ainsi que l'impératrice Catherine, à la mort de son époux, exécuta le projet qu'il avait formé : celui d'ériger, dans sa (nouvelle) capitale Saint Pétersbourg, une académie des sciences.

C'est dans ce contexte précis que le jeune Euler va découvrir et s'emparer du « *problème de Bâle* »...

L'interpolation

Le point de départ d'Euler dans la théorie des séries fut le problème de l'interpolation, à savoir :

Etendre une suite de nombre a_n, *définie pour* $n \in \mathbb{N}$, à *des valeurs non entières de* n.

Par exemple, le problème de l'interpolation appliqué à la suite définie par :

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_3 = 24...$$

revient à étendre les valeurs des termes à $a_{\frac{1}{2}}$, $a_{\frac{3}{2}}$ ..., ce qui correspond à des indices rationnels.

Ce problème a peu de signification d'un point de vue moderne, puisque $m!$ est défini uniquement pour $m \in \mathbb{N}$. Selon Jean-Etienne Montucla (1725-1799)[11], c'est John Wallis (1616-1703) qui «*parait être le premier auteur de ce nom*»[12]. Nous allons prendre un exemple pour mieux comprendre cette notion d'interpolation, à partir d'un article écrit par Euler, le numéro E019[13].

Euler introduit son article en affirmant que l'étude des suites de nombres, «*non seulement en raison de leur beauté, mais aussi à cause de leur grande utilité, mérite l'attention des géomètres. Le problème le plus important dans ce sujet est de déterminer, pour toute suite donnée, son terme général*». Il prend alors un exemple de suite dont «*le terme général ne peut être exposé*», la suite:

$$1, 2, 6, 24, 120\ etc.,$$

Puis il continue : « *Récemment, motivé par ces résultats concernant les séries que le célèbre Goldbach[14] (1690-1764) nous a communiqué, je cherchais une expression générale qui donnerait tous les termes de la suite :*

$$1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 + etc.\text{ »}$$

---

[11] Voir [5] page 301

[12] Voir [14] pages 8 à 10.

[13] Aux alentours de 1910, le mathématicien suédois Gustav Eneström a réalisé une enquête exhaustive sur les travaux d'Euler. Il a compté et recensé 866 œuvres distinctes, y compris des livres, des articles de revues et certaines lettres qu'il considérait comme particulièrement importantes. A chacun d'entre eux a été attribué un numéro, de E001 à E866, qui est maintenant appelé le «*numéro Eneström*». Cette numérotation permet d'identifier rapidement les écrits d'Euler.

[14] Voir [15], en particulier la première lettre d'Euler à Goldbach.

En langage moderne, cette « suite » est donc $\sum_{m=0}^{+\infty} m\,!$. Euler trouve alors une autre expression du terme général de cette série en proposant (en langage moderne) :

$$m! = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{1-m} \times (k+1)^m}{k+m}$$

Il fait remarquer que cette expression n'est pas mise en défaut, que m soit un nombre entier (naturel) ou une fraction, et qu'elle donne des approximations pour n'importe quel terme souhaité, sauf dans les cas n = 0 et n = 1, dans lequel elle devient juste 1. Puis Euler continue alors en remarquant que si cette expression n'est pas très utile pour le calcul, elle est en revanche «*merveilleusement appropriée pour interpoler des termes dont les indices sont des fractions*». Pour $m = \frac{1}{2}$, il obtient :

$$\sqrt{\frac{2 \times 4 \ \times \ 4 \times 6 \ \times \ 6 \times 8 \ \times \ 8 \times 10}{3 \times 3 \ \times \ 5 \times 5 \ \times \ 7 \times 7 \ \times \ 9 \times 9} \times etc.},$$

Cela lui «*rappelle immédiatement*» une formule similaire à propos de l'aire d'un disque, qu'il avait vue dans un des travaux de Wallis… Pour Wallis en effet, l'aire d'un cercle de diamètre 1 (c'est-à-dire $\frac{\pi}{4}$) est égale au produit infini :

$$\frac{2 \times 4 \ \times \ 4 \times 6 \ \times \ 6 \times 8 \ \times \ 8 \times 10}{3 \times 3 \ \times \ 5 \times 5 \ \times \ 7 \times 7 \ \times \ 9 \times 9} \times etc.$$ [15]

En langage moderne, Euler montre ainsi[16] que

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

De l'interpolation à l'utilisation du calcul infinitésimal[17]

Euler va aller plus loin ; pour lui, interpoler une suite, c'est déterminer la quantité qui la généralise. Euler affirme : « *nous avons une parfaite connaissance de la nature d'une suite si nous connaissons son terme général, c'est-à-dire la formule qui expose le terme général en fonction de l'indice x, que x soit entier, fractionnaire ou irrationnel* ».

Selon lui, le problème de l'interpolation consiste à déterminer le terme général d'une suite dont on connait les premiers termes de la loi de récurrence, c'est-à-dire (en langage moderne) déterminer f(x) sachant qu'on connait f(n).

Mais Euler, dans l'article E019 considère comme insatisfaisante l'expression du terme général de la série au moyen d'un autre terme général. Il semble estimer alors que les

---

[15] $\frac{\pi}{2} = \frac{2\times2}{3\times3} \times \frac{4\times4}{5\times5} \times \frac{6\times6}{7\times7} \times$ …etc, ou encore $\frac{\pi}{4} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)(2n+2)}{(2n+1)^2}$ dans [6].

[16] Il s'agit pour nous de $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, *la fonction Gamma étant une extension de la factorielle* à $\mathbb{R}_+^*$. Voir la fin de l'article E019.

[17] Voir [7].

termes intermédiaires, c'est-à-dire ceux qui n'ont pas un indice entier, ne sont déterminés qu'approximativement. C'est pour cela qu'il délaisse cette méthode de l'interpolation, et qu'il devient intéressé par une méthode qui serait capable de donner la valeur exacte (et non une approximation) des termes intermédiaires…

La série des inverses des carrés : une découverte intéressante…

En 1731, Euler publie un article qu'il nomme «*De Summatione Innumerabilium progressium*» (article E020). Nous allons découvrir dans ce qui suit comment ce «grand homme»[18] fut mis sur la voie de la somme de la série des inverses des carrés. En accord avec ses récentes avancées qui lient les séries au calcul intégral, il va exprimer le terme suivant à l'aide d'une intégrale :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \left(= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \text{ en langage moderne} \right)$$

Euler, d'abord, part de l'égalité suivante :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

qu'il intègre sur $[0, x]$:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n-1} = \int_0^x \frac{1 - t^n}{1 - t}\, dt \qquad (1)$$

Il fait remarquer que la somme de gauche est égale à 0 si x=0, et que si x=1, nous obtenons la formule[19] suivante:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t}\, dt$$

Le travail d'Euler étant encore pour le moment lié à celui de l'interpolation, on remarquera avec lui que la valeur de cette somme, par exemple pour $n = \frac{1}{2}$,

est égale[20] à $2 - 2ln2$.

Cependant, la somme visée est $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots etc.$

Au paragraphe 17 de l'article E020, Euler affirme, en substance que pour $0 < x < 1$,

[18] Voir [1] page 6.

[19] Il a donc exprimé la somme des n premiers termes de la série harmonique à l'aide d'une intégrale.

[20] L'intégrale devient $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{1-t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{t}}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\right) dt.$ Euler fait remarquer alors qu'il peut continuer pour 1+ $\frac{1}{2}$, puis $2 + \frac{1}{2}$, etc.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

De (1), Euler en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt.$$

A la base des procédures utilisées par Euler, on trouve la notion de quantité géométrique, qui implique que la fonction, comprise comme une expression de cette quantité, possède intrinsèquement certaines propriétés. Cela correspond, en langage moderne, à la continuité, la dérivabilité, le développement en séries de Taylor, et ici en l'occurrence la possibilité d'intervertir[21] les signes $\int$ et $\sum$)).

Au paragraphe 18, il fait alors remarquer que pour $0 < x < 1$:

$$\boxed{\int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -\ln(1-x)}$$

On va démontrer ce résultat.

De l'égalité :

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

on tire :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$$

puis :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dx = \int_0^X (1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1})\, dx + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + \frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

Or pour $0 < x < 1$ on a :

$$0 \le \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt < \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)}$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} = 0$$

---

[21] Voir [7] pour une explication approfondie.

donc cela assure la convergence[22] :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\ dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Par le changement de variable $1-t=v$ on a :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\int_1^{1-x} \frac{dv}{v} = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Euler, à la fin du paragraphe 21, propose ainsi:

$$"-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + etc"$$

Euler perçoit que le problème de Bâle se cache à proximité. Il trouve alors une manière d'obtenir les carrés parfaits qu'il désirait au dénominateur: il divise par x avant d'intégrer à nouveau :

$$\int_0^x \frac{1}{t}(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n})dt = x + \frac{x^2}{2\times 2} + \frac{x^3}{3\times 3} + \frac{x^4}{4\times 4} + \cdots \frac{x^n}{n\times n} \qquad (2)$$

Au paragraphe 22, Euler utilise ainsi le résultat suivant[23]:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt \qquad (3)}$$

Démontrons ce résultat.

D'abord remarquons que jusqu'à présent on a posé : $0 < x < 1$. Or Ici, Euler choisit clairement la valeur : $x = 1$.

La fonction $x \longmapsto \frac{\ln(1-x)}{x}$ est définie par prolongement par continuité avec la valeur 1, en $x = 0$, car $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Posons: $g_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{n+k} = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n+1+k}(n+1) < \frac{x^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$$

---

[22] En fait, cette convergence est uniforme sur $[0,a]$ (avec $a<1$). En effet, si $f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} x^k$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$, alors $0 < |f(x) - f_n(x)| < \frac{a^{n+1}}{(1-a)(n+1)}$. Puisque les f_n sont continues sur $[0,a]$, on peut donc affirmer que $\int f = \lim\limits_{n\to +\infty} \int f_n$ et retrouver le même résultat. On peut aussi invoquer la convergence normale de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur tout compact $[0,a]$ contenu dans son disque de convergence.

[23] la fonction $x \longmapsto -\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ \ dt\ s'appelle\ la\ fonction\ Dilogarithme.$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0, a]$ (avec $a < 1$). Les g_n sont continues sur $[0, a]$, on a donc :

$$-\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x \left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}\dots+\frac{t^{n-1}}{n}\right)dt = x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\dots+\frac{x^n}{n^2}+etc\dots$$

donc

$$\boxed{-\int_0^x \ln(1-t)\ \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}}$$

On s'intéresse pour terminer à la valeur $x = 1$. Posons : $h_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], 0 < |h_n(x)| < \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k^2}$$

La suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $[0,1]$ donc

$$\lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

et

$$\lim_{x\to 1}\left(-\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt\right) = -\int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt = \lim_{x\to 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

La série des inverses des carrés est une série à convergence lente (ou sous-linéaire)[24]. Si on commence par calculer les sommes partielles, il faut au moins 200 termes (204 exactement) pour avoir les deux premières décimales exactes et 30 000 (exactement 29355) pour en avoir quatre. Euler va utiliser le résultat (3) pour opérer une transformation de cette série par une autre à convergence rapide (ou linéaire). Il va montrer :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}\,k^2} + (\ln(2))^2}$$

Démontrons ce résultat.

Notons

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \text{ et } I = \int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt.$$

On décompose l'intégrale I en deux :

[24] Pour sa vitesse de convergence, voir [8] page 160

$$\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt = \int_0^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt - \int_x^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt$$
$$= -S - \int_x^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt$$

Dans l'intégrale précédente, on fait le changement de variable $1-t=v$ et on pose $z=1-x$ $(0<z<1)$

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt = -\int_{1-x}^0 \frac{1}{1-v}\ln(v)\ dv = \int_0^z \frac{1}{1-v}\ln(v)\ dv$$

En utilisant le développement en série de $\frac{1}{1-v}$ et une intégration par parties, on obtient[25] :

$$\int_0^z \frac{1}{1-v}\ln(v)\ dv = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} v^n \ln(v)\ dv = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z v^n \ln(v)\ \ dv$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{v^{k+1}}{k+1}\ \ln(v)\right]_0^z - \int_0^z \frac{v^k}{k+1}dv\right)$$
$$= \ln(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$$
$$= -\ln(z)\ln(1-z) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2} = -\ln(z)\ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$$

En conclusion :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} = -\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1-t)\ dt = S - \ln(z)\ln(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$$
$$S = \sum_{=1}^{\infty}\frac{x^k+z^k}{k^2} + \ln(z)\ln(y)$$

En prenant $x=z=\frac{1}{2}$ on obtient :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}\,k^2} + (\ln(2))^2$$

[25] L'interversion du signe d'intégration et du signe somme nécessite la convergence uniforme sur $[0,z]$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v^n \ln(v)$: c'est une série de Bertrand.

Dans la formule -ln(1-x) $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, on choisit $x = \frac{1}{2}$, on obtient $ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}$, donc

$$\boxed{S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\,k^2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}\right)^2}$$

Euler trouve alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\,k^2} \cong 1.164481\ et \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}\right)^2 \cong 0.480453$$

Il obtient donc comme approximation

$$S \cong 1.644934$$

Il affirme alors à propos de cette approximation que «*si l'on veut déterminer la somme de cette série en ajoutant un certain nombre de termes dès le début, il faut ajouter plus d'un millier de termes pour que ce nombre soit trouvé*»[26]. Il s'agit certainement simplement d'une remarque à titre indicatif, car il faut additionner environ quinze millions de termes pour avoir ces six décimales exactes (14 959 887 exactement).

Pour finir, la convergence de ces séries est assez rapide pour permettre d'obtenir les valeurs :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}\,k^2} \cong 1{,}164481 \qquad \text{pour}\ \ n = 18$$

$$ln(2) \cong \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k} \cong 0.6931472 \quad \text{pour}\ \ n = 23 \quad \Rightarrow \qquad [ln(2)]^2 \cong 0.480453$$

Si on note R_n le reste de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}\,k^2}$ et R'_n celui de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k}$ on a les majorations suivantes :

$$R_n < \frac{1}{2^n\,(n+1)^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{n-1}\,(n+1)^2} \quad \Rightarrow \ R_{22} < 1.037 \times 10^{-8}$$

$$R'_n < \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^n\,(n+1)} \quad \Rightarrow \ R_{21} < 2.167\ \times 10^{-8}$$

Si on note a la valeur approchée de $ln(2)$ on a :

$$|[ln(2)]^2 - a^2| = |ln(2) - a| \ \times \ |ln(2) + a| < 2 \times |ln(2) - a| < 4.334\ \times 10^{-8}$$

[26] « *Si quis autem huius seriei summam addendis aliquot terminis initialibus determinare voluerit, plus quam mille terminos addere deberet, quo nostrum inventum numerum reperiret* », E020, paragraphe 22.

Conclusion : la valeur donnée par Euler est une valeur approchée à moins de :

$$1.037 \times 10^{-8} + 4.334 \times 10^{-8} = 0.5371 \times 10^{-7} < 10^{-7}$$

Euler a donc obtenu six décimales exactes en additionnant seulement vingt-trois termes de cette série.

« *Cette approximation de la somme ne signifierait pas grand-chose pour beaucoup de monde, mais parmi ses nombreuses compétences, Euler est extraordinairement fort en calcul. Il s'aperçoit que cette valeur approchée est n'est pas très éloignée de* $\frac{\pi^2}{6}$ »[27]. En effet, $\sqrt{1.644934 \times 6} \cong 3.141592 \ldots$

La série des inverses des carrés : une première démonstration

Au paragraphe 2 de l'article E041, nommé « *De Summis Serierum Reciprocarum* », Euler affirme: «*J'ai récemment trouvé, de manière tout à fait inattendue, une expression élégante pour la somme de la série*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

qui dépend de la quadrature du cercle, de sorte que si la somme totale de cette série est obtenue, à partir de là, la quadrature du cercle suit immédiatement. A savoir, j'ai trouvé pour six fois la somme de cette série égale au carré du périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1. (...) En effet, j'ai récemment montré (voir le paragraphe précédent) que la somme de cette série était d'environ 1,6449340668482264364; En multipliant ce nombre par six, puis en prenant la racine carrée, on trouve[28] *3,141592653589793238 qui exprime le périmètre d'un cercle dont le diamètre est 1. (...) Je vais donc expliquer très complètement comment j'ai accompli cela*».

Brièvement, voici la démonstration[29]:

Euler note que la fonction $x \to \frac{sinx}{x}$ $s'annule\ pour\ les\ valeurs$:

$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \pm 4\pi$, etc.

Il fait alors l'hypothèse audacieuse que la fonction $x \to \frac{sinx}{x}$ est la même que le produit infini

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \ldots$$

car ils ont les mêmes racines[30]. Il réécrit ce produit de la manière suivante :

---

[27] Voir la fin de l'article de E. Sandifer ([9])

[28] L'étape précédente conclue par Euler et qui correspond à l'article E020 du 5 mars 1731 donnait une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, puis de π, à 10^{-6} près. Il commence ici son article E041 datant du 5 décembre 1735 avec une estimation beaucoup plus précise, puisque il propose une valeur approchée de π, à 10^{-18} près !

[29] Voir [10]

[30] Le développement en produit de la fonction sinus utilisé par Euler se justifie aujourd'hui par le théorème de factorisation de Weierstrass, en analyse complexe. Il affirme que les fonctions dites entières peuvent être représentées par un produit infini, appelé produit de Weierstrass, mettant en jeu leurs zéros :

$$\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\dots$$

Il remarque alors que s'il développe ce produit infini, le coefficient en x^2du développement sera

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}-\frac{1}{25\pi^2}\dots$$

Euler connait le développement de la série de Taylor de $x \rightarrow \frac{sinx}{x}$ en $x=0$:

$$1-\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\dots$$

Il obtient alors en identifiant les coefficients en x^2 :

$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{4\pi^2}-\frac{1}{9\pi^2}-\frac{1}{16\pi^2}-\frac{1}{25\pi^2}\dots=-\frac{1}{3!}$$

C'est-à-dire

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Examinons la solution d'Euler au problème de Bâle, tel qu'il la décrit dans son article. Cela nous donnera un aperçu de la manière dont Euler est arrivé à la solution élégante que nous décrivons ci-dessus.
Soit s la longueur d'un arc sur un cercle[31] de rayon 1, et soit y = sin(s).
« *Alors, par une méthode bien connue, le sinus y, peut être défini par une série de l'arc donné* »[32], comme

$$y=s-\frac{s^3}{1.2.3}-\frac{s^5}{1.2.3.4.5}-\frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7}+etc.$$

Ainsi, « *étant donné qu'il est plus simple pour moi de déterminer des facteurs que des racines* », on transforme l'équation donnée en cette forme :

$$0=1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1.2.3.y}+\frac{s^5}{1.2.3;4.5.y}+etc.$$

Si maintenant toutes les racines de cette équation étaient A, B, C, D, E, etc., alors tous les facteurs seraient les quantités

$$1-\frac{s}{A},\qquad 1-\frac{s}{B},\qquad 1-\frac{s}{C},\dots\ etc.$$

Par conséquent, on aurait :

$\boldsymbol{Th}$é$\boldsymbol{or}$è$\boldsymbol{me}$: *Soient f une fonction entière ne s'annulant pas en* 0, *s'annulant au moins une fois, et* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses zéros comptés avec multiplicités. Alors il existe une suite d'entiers* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et une fonction entière g telle que*:

$$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=0}^{+\infty}\left[(1-\frac{z}{z_n})\exp\left(\sum\nolimits_{k=1}^{k=p_n}\frac{\left(\frac{z}{z_n}\right)^k}{k}\right)\right]$$

[31] Soit un cercle de centre O et rayon 1 unité, notée u. Si l'unité de mesure des angles est le radian, alors la longueur d'un arc de cercle AM, en unités u, est égale à la mesure de l'angle$\widehat{AOM}$, en radians.
[32] Article E041, paragraphe 3.

$$1-\frac{s}{y}+\frac{s^3}{1.2.3.y}+\frac{s^5}{1.2.3.4.5.y}+etc.=\left(1-\frac{s}{A}\right)\left(1-\frac{s}{B}\right)\left(1-\frac{s}{C}\right)etc. \qquad (4)$$

Par exemple, en identifiant les coefficients en s, on obtient :

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\dots etc.$$

Euler choisit A comme étant «*le plus petit arc positif avec le même sinus que s*».

Il pose également p[33] comme étant le demi-périmètre d'un cercle de rayon 1. Maintenant, selon la périodicité des fonctions sinusoïdales, les autres arcs avec le même sinus que s sont

$$A, p-A, 2p+A, 3p-A, 4p+A, 5p-A\ etc.\ et -p-A, -2p+A, -3p-A, etc.$$

La somme de tous ces termes est donc égale à $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{A}+\frac{1}{p-A}+\frac{1}{-p-A}+\frac{1}{2p+A}+\frac{1}{-2p+A}+\frac{1}{3p-A}+\frac{1}{-3p-A}+etc. \qquad (5)$$

Euler fait remarquer que par identification des termes en s^2, ce qui correspond dans le produit infini aux produits « deux par deux », on obtient zéro. Et que pour les produits trois par trois, on obtient [34]

$$\frac{-1}{1.2.3.y}.$$

Ainsi, si on pose :

$$\alpha=a+b+c+d+e+etc.,$$

$$\beta=ab+ac+ad+ae+\cdots+bc+bd+be+\cdots+cd+ce+cf+\cdots$$

$$\gamma=abc+abd+abe+\cdots+bcd+bce+..,etc \text{ pour } \delta,\varepsilon\dots$$

C'est-à-dire que la somme des facteurs à un terme est α, la somme des facteurs de deux termes est β, la somme des facteurs de trois termes γ, La somme des facteurs de quatre termes δ, etc., alors la somme des carrés de tous les termes sera

$$a^2+b^2+c^2+d^2+etc.=\alpha^2-2\beta$$

La somme des cubes de tous les termes sera :

$$a^3+b^3+c^3+d^3+etc.=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma,$$

$$a^4+b^4+c^4+d^4+etc.=\alpha^4-4\alpha^2\beta+4\alpha\gamma+2\beta^2-4\delta\dots$$

Pour rendre plus claires comment ces formules peuvent s'utiliser, Euler note

$$P=a^2+b^2+c^2+d^2+etc.,$$

[33] Cela correspondrait pour nous à $p=\pi$, MAIS π est pour nous un nombre, alors que pour Euler, p est une grandeur, comme s ou y.

[34] Dans le cas fini, c'est-à-dire celui des polynômes, cela correspond aux relations liant les racines et les coefficients.

$$Q = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + etc.,$$

$$R = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + etc.,$$

et ainsi de suite. On aura

$$P = \alpha;\ \ Q = P\alpha - 2\beta;\ R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma;\ S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta, etc.$$

$$P = \frac{1}{y}, Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2}, R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.\,y}, etc.$$

Euler décide alors de « *mettre le sinus, y, égal au rayon* », de sorte que y = 1. Le plus petit arc A dont le sinus est 1 sera un quart de partie du périmètre c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ (en langage moderne). Pour Euler :

$$A = \frac{p}{2}.$$

L'égalité (5) devient alors :

$$1 = \frac{2}{p} + \frac{2}{p} - \frac{2}{3p} + \frac{2}{5p} - \frac{2}{3p} + \frac{2}{5p} - \frac{2}{7p} + \frac{2}{9p} - \frac{2}{7p} + etc.$$

$$\frac{4}{p}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + etc.) = 1$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + etc. = \frac{p}{4}$$

Euler affirme ainsi que « *quatre fois cette série est égale au demi-périmètre d'un cercle dont le rayon est un ou le périmètre total d'un cercle dont le diamètre est un* ».

Il continue: «*en effet c'est la même série, découverte il y a quelque temps par Leibniz, par laquelle il a défini la quadrature du cercle. De là, si notre méthode devrait apparaître à certains comme non suffisamment fiable, une grande constance vient à la lumière ici. Donc il ne devrait pas y avoir de doute sur le reste qui sera dérivé de cette méthode*»…

Nous prenons maintenant les carrés des termes dans le cas où y=1,

$$\frac{4}{p^2} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{9p^2} + \frac{4}{9p^2} + \frac{4}{25p^2} + \frac{4}{25p^2} + etc.$$

C'est-à-dire

$$\frac{8}{p^2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} etc.\right) = P = Q = 1$$

Donc

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + etc. = \frac{p^2}{8}$$

Ce qui nous fait donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ (en langage moderne).}$$

Or

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

donc

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} S$$

$$\frac{3}{4} S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$S = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

En continuant cette identification pour les termes en s^{2k+1}, où $k \in \mathbb{N}$, Euler obtient aussi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{6825.93555}.}$$

La série des inverses des carrés : une démonstration définitive

C'est en 1743 qu'Euler propose dans l'article E063 «*une méthode tout à fait différente de celle par où il y est parvenu au commencement*[35]». Il commence en réfléchissant à nouveau à partir des grandeurs[36]. Il écrit : « *Je considère un cercle, dont le rayon = 1, duquel je prends un arc quelconque =s, dont le sinus soit = x* ». De là on aura « *par la nature du cercle* » :

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc en intégrant

$$s = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

[35] Voir [20], il s'agit de l'article E063.

[36] Voir [7] : Comme cela a déjà été dit, à la base des procédures eulériennes, on trouve la notion de quantité géométrique. La fonction, comprise comme une expression de cette quantité, possédait certaines propriétés (continuité…). Ces propriétés étaient « évidentes » pour les courbes communément étudiées, une évidence pour ainsi dire figurale.

Puis Euler fait remarquer[37] que si $x = 1, alors\ s = \frac{\pi}{2}$. il en déduit :

$$s\,ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

On utilise le développement en série

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1.3}{2.4}u^4 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}u^{2n} etc.$$

Donc, en intégrant[38] terme à terme sur $[0, x]$, avec $x \leq 1$

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n.(2n+1)}x^{2n+1} etc.$$

Et

$$s\,ds = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2.3}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4.5}\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n.(2n+1)}\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} etc.$$

On intègre le membre de gauche (« en prenant x=1 on obtient $\frac{\pi^2}{8}$ »)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\,ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^x \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

De manière plus générale, en intégrant par parties :

$$\int_0^x \frac{u^{n+2}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = (n+1)\int_0^x u^n\sqrt{1-u^2}du - x^{n+1}\sqrt{1-x^2}$$

Or

$$\int_0^x u^n\sqrt{1-u^2}du = \int_0^x u^n\frac{(1-u^2)}{\sqrt{1-u^2}}du$$

Donc

[37] Il est important de noter ici qu'Euler parle du nombre π : « Il est clair que j'emploie la lettre π pour marquer le nombre de Ludolf Keulen 3,14159265 etc ». Il ne considère donc plus π comme un rapport de grandeurs, mais comme un nombre…

[38] La convergence est uniforme sur $[0, a]$ si $a < 1$ ce qui justifie l'égalité pour $0 \leq x < 1$. Pour $x = 1$, la convergence de l'intégrale et la continuité de la fonction définie par la série entière, permette d'étendre l'égalité à l'intervalle $[0,1]$.

$$\int_0^x \frac{u^{n+2}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{n+2}x^{n+1}\sqrt{1-x^2} + \frac{n+1}{n+2}\int_0^x \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

On a

$$\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{n+2}x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\right) = 0$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{u^{n+2}\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{u^n\,du}{\sqrt{1-u^2}}}$$

Il en découle :

$$\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \lim_{x\to 1} 1-\sqrt{1-x^2} = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{u^3\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^1 \frac{u^5\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{u^3\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2.4}{3.5}.$$

$$\int_0^1 \frac{u^7\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{6}{7}\int_0^1 \frac{u^5\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2.4.6}{3.5.7}$$

Et ainsi de suite, donc finalement,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{2.3}\times\frac{2}{3} + \frac{1.3}{2.4.5}\times\frac{2.4}{3.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\frac{2.4.6}{3.5.7} + etc.$$

Donc

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

On en déduit

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Conclusion : Euler et la fonction Zéta

Nous noterons à partir de maintenant

$$\zeta(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^n}, où\ n \in \mathbb{N}.$$

Puisque

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N}, \text{si } n > 2, \text{alors } \frac{1}{k^n} < \frac{1}{k^2},$$

On peut affirmer[39] que

$$\text{la série } 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots \text{ est convergente,}$$

et donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \text{si } n \geq 2, \zeta(n) \text{ existe et est bien définie.}$$

Dans son article E212 qu'il nomme « Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum», au chapitre 5, du tome II, paragraphe 122, Euler établit une relation entre les valeurs qui apparaissent dans la somme $\zeta(2n)$ et les coefficients que Jacques Bernoulli (1654, 1705), frère de Jean, avait découvert dans son livre « *Ars Conjectandi*[40] ». A la page 340, au chapitre 126, Euler affirme par exemple

$$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} = \frac{2^{29}\mathcal{B}}{30!}\pi^{30}$$

où $\mathcal{B} = \frac{1}{30}$ est un des nombres « *découverts par Jacques Bernoulli* ».

Dans l'article E393, il semblerait qu'Euler ait découvert la formule

$$\boxed{\zeta(2n) = \frac{|b_{2n}|}{2} \times \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}}$$

Dans son « *Introductio in Analysin Infinitorum* », au chapitre 10 du premier tome, au paragraphe 168, Euler possède bien la formule précédente. En effet, il calcule $\zeta(2n)$pour n variant de 1 à 13.

Que peut-on dire[41] de $\zeta(2n+1)$?

Les nombres de Bernoulli peuvent se calculer, à *partir du premier terme* $B_0 = 1$, *par la formule de récurrence* :

$$(m+1)B_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k$$

Avec un logiciel de calcul formel, on peut obtenir les premières valeurs de $\zeta(2n)$:

$$\zeta(2) = \frac{1}{6} \times \pi^2, \zeta(4) = \frac{1}{90} \times \pi^4, \zeta(6) = \frac{1}{945} \times \pi^6, \zeta(8) = \frac{1}{9\,450} \times \pi^8,$$

39

Théorème de comparaison des séries à termes positifs : On considère deux séries réelles $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$, telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq n_0 \forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

40 Voir [11] aux pages 97 et 98.

41 Voir l'article [23].

$(10) = \frac{1}{93\,355} \times \pi^{10}$ *et* $\zeta(12) = \frac{691}{638\,512\,875} \times \pi^{12}$.

On constate donc que, *pour les nombres pairs inférieurs strict* à 12, *on a* $\zeta(2p) = \frac{\pi^{2p}}{N}$.

On connait peu de chose, nous allons le voir sur les valeurs de la fonction Zeta pour les entiers impairs. A la vue des résultats pour les premiers nombres pairs, on peut légitimement se demander si $\zeta(2n+1)$ *n'est pas égal* à $\frac{\pi^{2n+1}}{N}$ *avec N entier*.

On peut montrer que cette conjecture est fausse.

Exercice[42] :

Montrer, en utilisant la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, que ζ(3) n'est pas de la forme $\frac{\pi^3}{N}$, avec N entier.

Faire la même étude pour $\zeta(5), \zeta(7)$ *et* $\zeta(9)$.

Solution :

$$On\ a :\quad \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad et\ on\ pose\ \ \tau(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}.$$

En faisant la différence on obtient :

$$\zeta(\alpha) - \tau(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}\zeta(\alpha)$$

Ce qui donne : $\tau(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\zeta(\alpha)$ *et dans l'hypothèse où* $\zeta(\alpha) = \frac{\pi^\alpha}{N}$ *la valeur de N est* :

$$N = \left(\frac{2^{\alpha-1}-1}{2^{\alpha-1}}\right)\frac{\pi^\alpha}{\tau(\alpha)}$$

On obtient un encadrement de N en utilisant deux sommes partielles successives de la série qui définit τ(α).

Par exemple pour :

$\alpha = 3$ *on trouve, avec les sommes partielles de rang* 3 *et* 4, *l'encadrement* :

$$25.49 < N < 25.95$$

$\alpha = 5$ *on trouve, avec les sommes partielles de rang* 4 *et* 5, *l'encadrement* :

[42] Cet exercice a été composé par André Bonnet.

$$295.09 < N < 295.2$$

$\alpha = 7$ *on trouve, avec les sommes partielles de rang* 3 *et* 4, *l'encadrement* :

$$2995.1 < N < 2995.4$$

$\alpha = 9$ *on trouve, avec les sommes partielles de rang* 3 *et* 4, *l'encadrement* :

$$29749.25 < N < 29749.37$$

Dans tous ces cas N ne peut être entier.

Pour terminer, remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$, $\zeta(2n)$ est transcendant[43]. Roger Apéry (1916-1994) montra en 1978 que $\zeta(3)$ n'est pas un nombre rationnel. En 2000, Tanguy Rivoal a démontré qu'une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, donc irrationnels ; c'est-à-dire qu' il existe une infinité de nombres irrationnels parmi les valeurs aux entiers impairs. Un dernier résultat : Wadim Zudilin montra en 2001 que l'ensemble $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\}$ n'est pas contenu dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que l'un de ces quatre nombres est irrationnel.

Bibliographie

[1] EULER Léonhard, œuvres complètes, lettres à une princesse d'Allemagne, tome 1 : éloge de Nicolas Euler, prononcé en français, par Nicolas FUSS. 1839.

[2] RIASANOVSKY Nicolas, Histoire de la Russie des origines à 1996.

[3] TROYAT Henri, Pierre le Grand.

[4] STIRLING Jacob, Methodus Differentialis : sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum, 1764.

[5] Jean Etienne MONTUCLA, Histoire des mathématiques, tome troisième.

[6] John WALLIS, Arithmetica Infinitorum.

[7] FERRARO Giovanni, Some Aspects of Euler's Theory of Series: Inexplicable Functions and the Euler–Maclaurin Summation Formula.

[8] DANTZER Jean François, Mathématiques pour l'agrégation, analyse et probabilités, Vuibert, 2016.

[9] SANDIFER Edward, How Euler did dit, Estimating the Basel Problem.

[10] SANDIFER Edward, Euler's Solution of the Basel Problem-The Longer Story.

[11] BERNOULLI Jacques, Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis, 1713.

[43] Cela veut dire que $\zeta(2n)$ n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients rationnels. Le fait que $\zeta(2n)$ soit transcendant résulte bien sûr du fait que π est un nombre transcendant.

[12] Mengoli Pietro, Novae quadraturae arithmeticae, seu De additione fractionum, 1650.

[13] EULER Leonhard, œuvres complètes, lettres à une princesse d'Allemagne, tome 1 : éloge de Leonhard Euler, prononcé devant l'académie française, par le marquis de Condorcet. 1839.

[14] JOYAL André, Le calcul du nombre π, 2008.

[15] FUSS Nicolas, Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18ème siècle, 1843.

[16] EULER Leonhard, De Progressionibus Transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. 1738 (article E019).

[17] EULER Leonhard, De Summatione Innumerabilium Progressionum, 1731 (article E020).

[18] EULER Leonhard, Methodus generalis summandi Progressiones, 1732 (article E025).

[19] EULER Leonhard, De Summis Serierum Reciprocarum, 1735(article E041).

[20] EULER Leonhard, article E063, Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, 1743.

[21] EULER Leonhard, De summis serierum numeros Bernoullianos involventium, 1770 (article E393)

[22] EULER Leonhard, Introductio in analysin infinitorum, volume 1, 1748 (article E101)

[23] RIVOAL Tanguy, Valeurs aux entiers de la fonction Zêta de Riemann.

[24] FRIEDELMEYER Jean Pierre, Bulletin de l'APMEP numéro 473, Euler ou l'art de chercher, découvrir, inventer.