Über Polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen.

Von

Wladimir Markoff.

(Übersetzt von Dr. J. Grossmann)

Vorwort von Serge Bernstein in Charkow.

Die Abhandlung, die hier in deutscher Sprache erscheint, ist die Arbeit des früh verstorbenen Mathematikers W. A. Markoff.*) Sie ist im Jahre 1892 in russischer Sprache erschienen (im Verlage der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg), aber auch in Rußland wenig bekannt geworden. Sie enthält eine Vertiefung und Weiterbildung bekannter Ideen von Tchebyscheff, und verdient, bei dem steigenden Interesse, das diese Ideen finden, und bei der Bedeutung ihrer Anwendungen, allgemein bekannt zu werden. Das wichtigste Resultat der vorliegenden Arbeit ist meiner Ansicht nach die Aufstellung einer exakten oberen Grenze für die k^{te} Ableitung eines Polynoms n^{ten} Grades in einem Intervalle, in dem der Betrag des Polynoms eine gegebene Grenze nicht übersteigt. Die Beantwortung dieser Frage**) ist viel schwieriger, als man annehmen könnte, und hat Markoff zur Entwicklung mehrerer Hilfssätze von selbständigem Interesse veranlaßt.

Die vorliegende Übersetzung ist an einigen Stellen dem Original

---

*) Wladimir Andrejewitsch Markoff, geboren am 7. Mai 1871, ist am 18. Januar 1897, fünfundzwanzigjährig, an Schwindsucht gestorben. Außer der hier veröffentlichten Abhandlung, die er noch als Student verfaßt hat, hat er noch zwei Abhandlungen über positive ternäre quadratische Formen geschrieben, von denen die erste 1893 in den Communications de la Société Mathématique de Charkow, die zweite erst nach seinem Tode als Magisterdissertation (St. Petersburg 1897) erschienen ist. Er beweist unter anderem in diesen Arbeiten die Eisensteinschen Formeln für die Klassenzahl der positiven ternären quadratischen Formen.

**) Man vergleiche meine Note „Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markoff" (Commun. de la Soc. Math. de Charkow 1913).

gegenüber gekürzt. Diese Kürzungen sind auf Wunsch der Annalenredaktion vorgenommen und von dem Bruder des verstorbenen Verfassers, dem Akademiker A. A. Markoff, in entgegenkommender Weise geprüft und gutgeheißen worden.

Kapitel I.

§ 1.

Wir wollen hier Funktionen der einen Veränderlichen x von der Gestalt

$$(1) \qquad p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

betrachten, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$p_0, p_1, \cdots, p_n$$

reelle Parameter sind, die der Gleichung

$$(2) \qquad \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_n p_n = \alpha$$

genügen, und

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \alpha$$

gegebene reelle Zahlen sind, von denen α und mindestens noch eine der Zahlen α_k nicht gleich Null sind.

Solche Funktionen wollen wir *Funktionen von Gestalt* (1) nennen.

Die lineare Funktion

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$$

der Koeffizienten irgend einer ganzen Funktion von x

$$\Phi(x) = P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \cdots + P_n$$

von nicht höherem als n^{tem} Grade wollen wir mit

$$\omega(\Phi)$$

bezeichnen.

Den größten Wert, den der absolute Betrag einer Funktion $\Psi(x)$ von Gestalt (1) annimmt, wenn x ein Intervall*) (a, b) von a bis $b > a$ durchläuft, wollen wir *die Abweichung der Funktion* $\Psi(x)$ *von Null in dem Intervalle* (a, b) nennen.

Diejenigen der Funktionen von Gestalt (1), denen der kleinste Wert der Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b) entspricht, wollen wir *die am wenigsten von Null in dem Intervalle* (a, b) *abweichenden Funktionen von Gestalt* (1) nennen.**)

---

*) Alle Intervalle, von denen die Rede sein wird, sind als die Grenzpunkte einschließend angenommen.

**) Die Existenz mindestens einer solchen Funktion ist evident.

§ 2.

Hilfssatz. *Es sei*

$$y = f(x)$$

eine Funktion von Gestalt (1), *L ihre Abweichung von Null in dem Intervalle* (a, b), *es seien*

(3) $$x_1, x_2, \cdots, x_p$$

sämtliche voneinander verschiedene Wurzeln der Gleichung

$$L^2 - y^2 = 0,$$

die im Intervalle (a, b) *liegen.*

Ist y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) *abweichende Funktion von Gestalt* (1), *so gibt es keine ganze Funktion von x von nicht höherem als* n^{tem} *Grade* $g(x)$ *derart, daß*

$$\omega(g) = 0$$

ist, und zugleich die Produkte

$$g(x_1)f(x_1),\ g(x_2)f(x_2), \cdots, g(x_p)f(x_p)$$

sämtlich negativ ausfallen.

Gibt es umgekehrt keine solche Funktion $g(x)$, *so ist y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle* (a, b) *abweichende Funktion von Gestalt* (1).

Beweis. Gibt es eine solche Funktion $g(x)$, dann ist in dem Intervalle (a, b) die Abweichung von Null der Funktion

$$y_1 = y + \varrho g(x),$$

die zu den Funktionen von Gestalt (1) gehört, bei genügend kleinem positiven Werte der Zahl ϱ kleiner als L.

In der Tat, betrachten wir die Differenz

$$L^2 - {y_1}^2 = L^2 - y^2 - 2\varrho y g(x) - \varrho^2 g^2(x).$$

Da

$$f(x_l)g(x_l) < 0 \qquad l = 1, 2, \cdots, p$$

ist, so kann man eine hinreichend kleine positive Zahl δ finden, derart, daß keines der Intervalle

(4) $$(x_1 - \delta, x_1 + \delta),\ (x_2 - \delta, x_2 + \delta), \cdots, (x_p - \delta, x_p + \delta)$$

Wurzeln der Gleichung

$$y g(x) = 0$$

enthält.

Bezeichnen wir mit M, μ, N und ν positive Zahlen, die den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{r} g^2(x) < M, \\ -2y\,g(x) > \mu \end{array}\right\} \text{ innerhalb der Intervalle (4),}$$

$$\left.\begin{array}{r}|2y\,g(x)|+g^2(x)<N,\\ L^2-y^2>\nu\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{innerhalb des Intervalls } (a,b),\\ \text{aber außerhalb der Intervalle } (4)^*)\end{array}$$

genügen, und sei ϱ kleiner als jede der Zahlen

$$1,\ \frac{\mu}{M},\ \frac{\nu}{N}.$$

Alsdann ist innerhalb des Intervalles (a, b), aber außerhalb der Intervalle (4)

$$L^2-y_1{}^2>\nu-\frac{\nu}{N}N=0,$$

innerhalb der Intervalle (4)

$$L^2-y_1{}^2>\varrho\left(\mu-\frac{\mu}{M}M\right)=0,$$

und folglich ist die Abweichung von y_1 von Null in dem Intervalle (a, b) kleiner als L.

Wenn aber keine solche Funktion $g(x)$ existiert, dann ist die Differenz zwischen einer jeden Funktion von Gestalt (1) und y für mindestens eine der Zahlen (3) von nicht entgegengesetztem Vorzeichen mit y, und folglich ist die Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b) einer jeden Funktion von Gestalt (1) nicht kleiner als L.

§ 3.

Satz 1. *Es sei*

$$y=f(x)$$

eine Funktion von Gestalt (1), *die nicht gleich* $\frac{\alpha}{\alpha_n}$ *ist*, L *ihre Abweichung von Null in dem Intervalle* (a, b), *es seien*

$$x_1,\ x_2,\cdots,x_p$$

sämtliche in dem Intervalle (a, b) *gelegenen und nach wachsendem Werte geordneten voneinander verschiedenen Wurzeln der Gleichung*

$$L^2-y^2=0. \tag{5}$$

Es werde ferner

$$F(x)=\prod_{l=1}^{l=p}(x-x_l)=\sum_{i=0}^{i=p}Q_i\,x^{p-i} \tag{6}$$

und

$$F_l(x)=\frac{F(x)}{x-x_l},\qquad l=1,2,\cdots,p \tag{7}$$

gesetzt.

---

*) Den absoluten Betrag irgend einer Zahl r bezeichnen wir mit $|r|$.

Ist y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1), *so gibt es unter den Zahlen*

$$(8) \qquad \omega(F_1)(-1)^1 f(x_1),\ \omega(F_2)(-1)^2 f(x_2), \cdots, \omega(F_p)(-1)^p f(x_p)$$

keine zwei von entgegengesetztem Vorzeichen. Im Falle

$$p < n + 1$$

ist außerdem

$$(9) \qquad \omega(F\psi) = 0,$$

was auch für eine ganze Funktion von nicht höherem als $(n-p)^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ sein mag.

Gibt es umgekehrt in der Reihe (8) *keine zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen, und findet außerdem, im Falle $p < n + 1$, die Gleichung* (9) *für jede ganze Funktion von nicht höherem als $(n-p)^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ statt, so ist y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt* (1).

Beweis. Wir bemerken vor allem, daß

$$p \leqq n + 1$$

ist, da y keine Konstante sein kann, und jede im Intervalle (a, b) gelegene und von a und b verschiedene Wurzel der Gleichung (5) von gerader Vielfachheit sein muß.

Ferner haben wir nach der Lagrangeschen Formel, was auch für eine ganze Funktion von nicht höherem als n^{tem} Grade $g(x)$ sein mag,

$$(10) \qquad g(x) = AF(x)R(x) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} F_l(x),$$

wo A eine konstante Zahl bedeutet, und $R(x)$ im Falle $p < n + 1$ eine ganze Funktion von nicht höherem als $n - p^{\text{tem}}$ Grade ist; im Falle $p = n + 1$ ist

$$R(x) = 0.$$

Aus (10) folgt

$$(11) \qquad \omega(g) = A\omega(FR) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} \omega(F_l).$$

Findet, im Falle $p < n + 1$, die Gleichung (9) nicht für jede ganze Funktion von nicht höherem als $n - p^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ statt, so kann man eine Funktion $R(x)$ so auswählen, daß

$$\omega(FR) \gtrless 0$$

wird, und dann, indem wir

$$g(x_l) = -f(x_l), \qquad l = 1, 2, \cdots, p$$

setzen, die Zahl A so bestimmen, daß

$$\omega(g) = 0$$

wird, und folglich kann nach dem Hilfssatz des § 2 y nicht eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) sein.

Ist also y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1), und ist $p < n + 1$, so findet die Gleichung (9) für jede ganze Funktion von nicht höherem als $(n - p)^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ statt.

Wenn also y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) ist, so geht Formel (11) in

$$\omega(g) = \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} \omega(F_l) \tag{12}$$

über.

Berücksichtigen wir aber die Gleichung

$$F'(x_l) = (-1)^{p-l} \prod_{m=1}^{m=l-1} (x_l - x_m) \cdot \prod_{m=l+1}^{m=p} (x_m - x_l),$$

so folgt, daß wenn es in der Reihe (8) Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen gibt, der Gleichung

$$\omega(g) = 0 \tag{13}$$

zugleich mit den Ungleichungen

$$g(x_1)f(x_1) < 0,\ g(x_2)f(x_2) < 0,\ \cdots,\ g(x_p)f(x_p) < 0 \tag{14}$$

Genüge geleistet werden kann, und folglich, nach dem Hilfssatz des § 2, y nicht eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) sein kann.

Gibt es dagegen in der Reihe (8) keine zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen, und findet außerdem, im Falle $p < n + 1$, die Gleichung (9) für jede ganze Funktion von nicht höherem als $n - p^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ statt, so kann nicht der Gleichung (13) und zugleich den Ungleichungen (14) Genüge geleistet werden, und folglich ist y nach Hilfssatz des § 2 eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1).

§ 4.

Setzen wir in Gleichung (9) nacheinander

$$\psi(x) = x^{n-p},\ \psi(x) = x^{n-p-1},\ \cdots,\ \psi(x) = 1,$$

so erhalten wir aus Gleichung (9) die ihr äquivalenten Gleichungen

$$\begin{array}{l}
\alpha_0 Q_0 + \alpha_1 \quad Q_1 + \cdots + \quad \alpha_p Q_p = 0, \\
\alpha_1 Q_0 + \alpha_2 \quad Q_1 + \cdots + \alpha_{p+1} Q_p = 0, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\alpha_{n-p} Q_0 + \alpha_{n-p+1} Q_1 + \cdots + \quad \alpha_n Q_p = 0.
\end{array}$$

Wir bemerken noch, daß wenn y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) ist, $\omega(\Phi)$, wie aus Formel (12) ersichtlich, in der Gestalt

$$\omega(\Phi) = \sum_{l=1}^{l=p} C_l \Phi(x_l)$$

dargestellt werden kann, wo die Zahlen $C_1, C_2, \cdots, C_p$ nicht von $\Phi(x)$ abhängen, und die Reihe

$$C_1 f(x_1), \; C_2 f(x_2), \cdots, C_p f(x_p)$$

keine zwei Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen enthält.

Daraus folgt, daß wenn

$$\omega(\Phi) \quad \text{nicht} \quad = \alpha_n \Phi(z)$$

ist, wo z irgend eine im Intervalle (a, b) gelegene Zahl bedeutet, so wird das Maximum des absoluten Betrages einer jeden am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichenden Funktion von Gestalt (1) nicht weniger als zweimal im Intervalle (a, b) erreicht.

Ist aber

$$\omega(\Phi) = \alpha_n \Phi(z),$$

und liegt z im Intervalle (a, b), dann ist offenbar *jede Funktion von Gestalt* (1), *deren Abweichung von Null in dem Intervalle* (a, b) *gleich* $\left|\frac{\alpha}{\alpha_n}\right|$ *ist, und nur eine solche, eine am wenigsten von Null in dem Intervalle* (a, b) *abweichende Funktion von Gestalt* (1).

In diesem Falle ist α_n offenbar nicht gleich Null.

§ 5.

Satz 2. *Gibt es mehr als eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt* (1), *so kann man unter den am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichenden Funktionen von Gestalt* (1) *eine finden, deren absoluter Betrag im Intervalle (a, b) seinen größten Wert für nicht mehr als μ Werte von x erreicht, wo*

$$\mu = \frac{n+2}{2} \quad \textit{für } n \textit{ gerade},$$

$$\mu = \frac{n+1}{2} \quad \textit{für } n \textit{ ungerade}$$

ist. Ist die Anzahl dieser Werte von x gleich μ, so sind bei geradem n die beiden Zahlen a und b unter ihnen enthalten, bei ungeradem n mindestens eine dieser Zahlen.

Beweis. Es sei y eine am wenigsten von Null in dem Intervall (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1), L ihre Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b),

$$x_1, x_2, \cdots, x_p \tag{15}$$

sämtliche in dem Intervalle (a, b) gelegenen und voneinander verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$L^2 - y^2 = 0.$$

Es sei η eine andere am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1).

Bezeichnen wir die Differenz

$$\eta - y$$

mit $v(x)$. Dann können nicht mehr als μ der Zahlen (15) der Gleichung

$$v(x) = 0 \tag{16}$$

genügen, und wenn genau μ der Zahlen (15) der Gleichung (16) genügen, dann sind bei geradem n die beiden Zahlen a und b unter diesen μ Zahlen enthalten, bei ungeradem n mindestens eine dieser Zahlen.

In der Tat, jede der Zahlen (15), die von a und b verschieden ist und der Gleichung (16) genügt, muß eine Wurzel von gerader Vielfachheit für diese Gleichung sein.

Da

$$\omega(v) = \omega(\eta) - \omega(y) = 0$$

ist, so wird die Funktion

$$w(x) = y + \varrho\, v(x)$$

eine Funktion von Gestalt (1) sein, welchen Wert die Zahl ϱ auch haben mag.

Setzen wir aber

$$0 < \varrho < 1,$$

so findet dann für jeden Wert von x, der der Gleichung (16) nicht genügt, mindestens eine der Ungleichungen

$$w^2(x) < y^2 \quad \text{oder} \quad w^2(x) < \eta^2$$

statt.

Daher ist der absolute Betrag von $w(x)$, für alle im Intervalle (a, b) gelegenen und der Gleichung (16) nicht genügenden Werte von x, kleiner als L. Für die Werte von x, die der Gleichung (16) genügen, ist

$$w(x) = y = \eta.$$

Da nun unter diesen letzteren Werten von x nicht mehr als μ der Zahlen

(15) enthalten sind, so erreicht der absolute Betrag von $w(x)$ seinen größten Betrag L nicht mehr als für μ Werte von x.

Erreicht ferner der absolute Betrag von $w(x)$ den Wert L für genau μ im Intervalle (a, b) gelegene Werte von x, so sind unter diesen μ Werten von x beide Zahlen a und b enthalten bei geradem n, mindestens eine dieser Zahlen bei ungeradem n.

§ 7.*)

Gehen wir über zu dem Falle

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(\varkappa)}(z) = \left(\frac{d^{\varkappa}\Phi(x)}{dx^{\varkappa}}\right)_{x=z},$$

wo $\varkappa$ eine ganze positive Zahl $< n$, z eine gegebene Zahl bedeutet. In diesem Falle geht die Gleichung (9) in

$$\frac{d^{\varkappa}(F(z)\,\psi(z))}{dz^{\varkappa}} = 0 \tag{17}$$

über.

Entwickeln wir diese k^{te} Ableitung des Produktes zweier Funktionen nach der Leibnizschen Formel, so erhalten wir

$$F^{(\varkappa)}(z)\,\psi(z) + \frac{\varkappa}{1}F^{(\varkappa-1)}(z)\,\psi'(z) + \cdots + F(z)\,\psi^{(\varkappa)}(z) = 0. \tag{18}$$

Da die Zahlen

$$\psi(z),\ \psi'(z),\ \cdots,\ \psi^{(n-p)}(z)$$

ganz willkürlich sind, so besagt die Gleichung (18), daß für

$$\varkappa \leqq n - p$$

notwendig

$$F^{(\varkappa)}(z) = F^{(\varkappa-1)}(z) = \cdots = F(z) = 0,$$

für

$$\varkappa > n - p$$

notwendig

$$F^{(\varkappa)}(z) = F^{(\varkappa-1)}(z) = \cdots = F^{(\varkappa-n+p)}(z) = 0$$

sein muß.

Wir bemerken noch, daß im Falle

$$p < n, \quad \varkappa > n - p$$

die Reihe

$$\varkappa,\ \varkappa - 1,\ \cdots,\ \varkappa - n + p$$

mindestens zwei positive Zahlen enthält, die nicht größer als p sind.

Fände also bei $p < n$ die Gleichung (17) für jede ganze Funktion

---

*) Im § 6 ist ausführlich der Fall $n = 2$ untersucht, und sind einige Beispiele für $n = 3$, $n = 4$ betrachtet. Die Formel (17) entspricht der Formel (44) des Originals usw.

von nicht höherem als $(n-p)^{\text{tem}}$ Grade $\psi(x)$ statt, so würde entweder der Grad von $F(x)$ kleiner als $p-1$ sein, oder aber die Gleichung

$$F(x)=0$$

würde imaginäre oder gleiche Wurzeln besitzen.

Ist daher

$$\omega(\Phi)=\Phi^{(\varkappa)}(z), \quad 0<\varkappa<n,$$

so muß der absolute Betrag einer jeden am wenigsten von Null in dem Intervalle (a,b) abweichenden Funktion von Gestalt (1) seinen größten Wert im Intervalle (a,b) für mindestens n Werte von x in diesem Intervalle erreichen.

§ 8.

Ist

$$\omega(\Phi)=\Phi^{(n)}(z)=n!\,P_0{}^{*)}, \quad p<n+1,$$

so geht die Gleichung (9) bei

$$\psi(x)=x^{n-p}$$

in

$$\frac{d^n\left(F(z)\,z^{n-p}\right)}{dz^n}=n!=0$$

über, was unmöglich ist.

Ist daher

$$\omega(\Phi)=\Phi^{(n)}(z),$$

so erreicht der absolute Betrag einer jeden am wenigsten von Null in dem Intervalle (a,b) abweichenden Funktion von Gestalt (1) seinen größten Wert im Intervalle (a,b) für mindestens $n+1$ Werte von x in diesem Intervalle.

Dasselbe gilt für den Fall, daß

$$\omega(\Phi)=\Phi(z)$$

ist, wo z irgend eine nicht im Intervalle (a,b) gelegene Zahl bedeutet. (Von dem Falle, daß

$$\omega(\Phi)=\Phi(z)$$

ist und z im Intervalle (a,b) liegt, war schon in § 4 die Rede.)

In der Tat, in diesem Falle lautet Gleichung (9)

$$F(z)\,\psi(z)=0,$$

und da $\psi(z)$ willkürlich ist, muß

$$F(z)=0$$

sein.

Das ist aber unmöglich, da alle Wurzeln der Gleichung

$$F(x)=0$$

im Intervalle (a,b) liegen.

---

*) Mit $n!$ bezeichnen wir das Produkt $1\cdot 2\cdots n$.

Aus Satz 2 folgt, daß in den beiden Fällen, von denen in diesem Paragraphen die Rede war, nur eine einzige am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existiert.

§ 9.

Aus dem in §§ 7 und 8 Gesagten und aus Satz 2 folgt, daß wenn

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(\varkappa)}(z), \qquad 0 < \varkappa \leqq n$$

und $n \geqq 3$ ist, nicht mehr als eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existieren kann.

Ist $n = 1$, so ist $\varkappa = 1 = n$, und aus § 8 folgt dann, daß in diesem Falle nicht mehr als eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existieren kann.

Dasselbe gilt für den Fall, daß $n = \varkappa = 2$ ist.

Ferner folgt aus Satz 2, daß im Falle $n = 2$, $\varkappa = 1$ nicht mehr als eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existieren kann, falls nicht die Gleichung

$$\omega((x-a)(x-b)) = 2z - a - b = 0$$

stattfindet, d. h. falls nicht

$$z = \frac{a+b}{2}$$

ist.

Ist aber $n = 2$, $\varkappa = 1$ und $z = \frac{a+b}{2}$, so gibt es (wie in § 6 gezeigt ist) in der Tat unendlich viele am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktionen von Gestalt (1).

§ 10.

Ehe wir weiter gehen, schicken wir zwei einfache algebraische Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Besitzt die Gleichung*

$$G(x) = x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_{s-1} x + A_s = 0, \tag{19}$$

wo s irgendeine positive und ganze Zahl bedeutet, keine imaginären Wurzeln, so findet bei jedem ganzen und positiven Werte von $\varkappa \leqq s$ *die Ungleichung*

$$(G^{(\varkappa)}(x))^2 - G^{(\varkappa-1)}(x)\, G^{(\varkappa+1)}(x) > 0$$

für alle reellen Werte von x mit Ausnahme der Wurzeln der Gleichung (19) *von höherer als* $\varkappa^{\text{ter}}$ *Vielfachheit statt. Für diese Ausnahmswerte von x geht die Ungleichung in eine Gleichung über.*

§ 11.

Hilfssatz 2. *Es seien sämtliche Wurzeln der Gleichung*

$$G(x) = x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_s = 0, \tag{20}$$

die wir mit

$$x_1, x_2, \cdots, x_s$$

bezeichnen, reell, es sei z eine Wurzel der Gleichung

$$G^{(\varkappa)}(x) = 0,$$

wo $\varkappa$ irgendeine ganze nicht negative Zahl $< s$ ist und es werde

$$G_l(x) = \frac{G(x)}{x - x_l} \qquad l = 1, 2, \cdots, s$$

gesetzt; dann gibt es in der Reihe

$$(21) \qquad G_1^{(\varkappa)}(z),\ G_2^{(\varkappa)}(z),\ \cdots,\ G_s^{(\varkappa)}(z),\ G^{(\varkappa+1)}(z)$$

keine zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen.

Zahlen aus der Reihe (21) *können nur dann gleich Null sein, wenn z eine Wurzel der Gleichung* (20) *von höherer als $\varkappa^{\text{ter}}$ Vielfachheit ist.* (Ist z eine Wurzel der Gleichung (20) von höherer als $\varkappa + 1^{\text{ter}}$ Vielfachheit, so sind sämtliche Zahlen der Reihe (21) offenbar gleich Null.)*)

Kapitel II.

§ 13.

Wir setzen nun, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt,

$$a = -1, \quad b = 1$$

und beschränken uns auf den Fall, daß

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(\varkappa)}(z)$$

ist, wo $\varkappa$ irgend eine ganze nicht negative Zahl $\leqq n$ bedeutet.

Wir schließen die beiden Fälle:

1) $\varkappa = 0$ und z im Intervalle (a, b) gelegen;

2) $n = 2,\ \varkappa = 1,\ z = \frac{a+b}{2} = 0$

aus der Betrachtung aus.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß in dem Falle, den wir jetzt betrachten, nur eine einzige am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existiert.

Wir bezeichnen diese Funktion mit

$$y = f(x),$$

ihre Abweichung von Null im Intervalle (a, b) mit L, die im Intervalle (a, b) gelegenen Wurzeln der Gleichung

$$(22) \qquad L^2 - y^2 = 0,$$

---

*) Wir lassen die einfachen Beweise dieser zwei Sätze weg.

In § 12 wird gezeigt, das der Fall, wo a und b beliebige Zahlen sind, sich leicht zuf den Fall $a = -1$, $b = 1$ zurückführen läßt. Die Numerierung der Formeln ist hier wieder entsprechend geändert.

die wir nach wachsendem Werte ordnen, mit

$$x_1, x_2, \cdots, x_p.$$

Da im Falle $\varkappa > 0$ keine Funktion von Gestalt (1) eine Konstante sein kann, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß im Falle $\varkappa > 0$ nur zwei Voraussetzungen hinsichtlich p gemacht werden können,

$$p = n + 1 \quad \text{oder} \quad p = n.$$

Was den Fall $\varkappa = 0$ betrifft, so ist, wie wir später sehen werden, in diesem Falle

$$p = n + 1.$$

Ist nun $p = n + 1$, so muß y der Differentialgleichung

(23) $$L^2 - y^2 = \frac{1 - x^2}{n^2} y'^2$$

genügen, da jede Wurzel der Gleichung (22), die im Intervalle (a, b) gelegen und von a und b verschieden ist, eine Wurzel gerader Vielfachheit sein muß.

Aus Gleichung (23) folgt

(24) $$y = \pm L S_n(x),$$

wo

$$S_n(x) = \operatorname{Cos}(n \operatorname{arc} \operatorname{Cos} x)$$

ist.

Die Funktion (24) ist in der Tat eine ganze Funktion und ihr absoluter Betrag erreicht im Intervalle (a, b) seinen größten Wert L für genau $n + 1$ Werte von x, und zwar für

$$\vartheta_1 = -1 = \operatorname{Cos} \frac{n}{n}\pi, \quad \vartheta_2 = \operatorname{Cos} \frac{n-1}{n}\pi, \cdots,$$

$$\vartheta_l = \operatorname{Cos} \frac{n-l+1}{n}\pi, \cdots,$$

$$\vartheta_n = \operatorname{Cos} \frac{1}{n}\pi, \quad \vartheta_{n+1} = 1 = \operatorname{Cos} \frac{0}{n}\pi.$$

Da y eine Funktion von Gestalt (1) sein soll, so muß

$$\pm L = \frac{\alpha}{S_n^{(\varkappa)}(z)}$$

sein.

Wir haben somit, falls $p = n + 1$ ist,

(25) $$y = \frac{\alpha}{S_n^{(\varkappa)}(z)} S_n(x),$$

$$L = \left| \frac{\alpha}{S_n^{(\varkappa)}(z)} \right|.$$

§ 14.

Ist $\varkappa = n$, so folgt aus dem Vorhergehenden $p = n + 1$, und daher ist bei $\varkappa = n$

(26) $$y = \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(x),$$

$$L = \frac{|\alpha|}{2^{n-1} n!}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle die Glieder der zur Funktion (26) gehörenden Reihe (8) sämtlich von einem und demselben Vorzeichen sind.

In der Tat, es wird sich dann um die Reihe

$$n!(-1)^1 \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\vartheta_1), \quad n!(-1)^2 \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\vartheta_2), \cdots,$$

$$n!(-1)^{n+1} \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\vartheta_{n+1})$$

handeln, und da

$$S_n(\vartheta_l) = \operatorname{Cos}(n - l + 1)\pi = (-1)^{n-l+1}$$

ist, so sind sämtliche Glieder der Reihe gleich

$$(-1)^{n+1} \frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Daraus folgt der folgende Satz von Tschebyscheff.

Satz: *Die Funktion*

$$\frac{\varrho}{2^{n-1}} \operatorname{Cos}(n \operatorname{arc} \operatorname{Cos} x)$$

weicht von Null in dem Intervalle $(-1, 1)$ *weniger ab, als jede andere ganze Funktion* n^{ten} *Grades von* x*, deren Koeffizient von* x^n *gleich* ϱ *ist.*

§ 15.

Die zur Funktion (25) gehörenden Funktionen (6) und (7) lauten jetzt

$$F(x) = \frac{(x^2-1) S_n'(x)}{2^{n-1} n},$$

$$F_l(x) = \frac{(x^2-1) S_n'(x)}{2^{n-1} n(x - \vartheta_l)},$$

und folglich geht die zur Funktion (25) gehörende Reihe (8), nachdem wir ihre Glieder sämtlich durch

$$\frac{(-1)^{n+1}\alpha}{2^{n-1} n S_n^{(\varkappa)}(z)}$$

dividiert haben, in

$$(27)\qquad \frac{d^{\varkappa}\left(\frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_1}\right)}{dz^{\varkappa}}, \quad \frac{d^{\varkappa}\left(\frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_2}\right)}{dz^{\varkappa}}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{\varkappa}\left(\frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_{n+1}}\right)}{dz^{\varkappa}}$$

über.

Nach Satz 1 kann die Gleichung (25) dann und nur dann stattfinden, wenn es in der Reihe (27) keine zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen gibt.

Für $\varkappa = 0$ geht die Reihe (27) in

$$(28)\qquad \frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_1}, \quad \frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{(z^2-1)S_n'(z)}{z-\vartheta_{n+1}}$$

über, und da z nach Voraussetzung im Falle $\varkappa = 0$ nicht im Intervalle (a, b) liegt, so sind die Glieder der Reihe (28) sämtlich von einem und demselben Vorzeichen.

Ist also

$$\omega(\Phi) = \Phi(z)$$

und liegt z nicht im Intervalle (a, b), so ist

$$y = \frac{\alpha}{S_n(z)} S_n(x),$$

$$L = \left| \frac{\alpha}{S_n(z)} \right|.$$

§ 16.

Wir schließen die eben betrachteten Fälle $\varkappa = 0$ und $\varkappa = n$ nunmehr aus der Betrachtung aus, und nehmen im folgenden

$$0 < \varkappa < n$$

an.

Wir bezeichnen mit

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-\varkappa+1}$$

die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$(29)\qquad S_n^{(\varkappa+1)}(x) = 0,$$

mit $\Phi_n(x)$ die Funktion

$$\frac{(x^2-1)S_n'(x)}{x-\vartheta_{n+1}} = (x+1)S_n'(x).$$

Es ist leicht zu sehen, daß für $\varkappa < n-1$ die Wurzeln der Gleichung

$$(30)\qquad \Phi_n^{(\varkappa)}(x) = (x+1)S_n^{(\varkappa+1)}(x) + \varkappa S_n^{(\varkappa)}(x) = 0$$

und die Wurzeln der Gleichung (29) einander trennen.

In der Tat, das Vorzeichen von $\Phi_n^{(\varkappa)}(x)$ ist für (zahlenmäßig) genügend große negative Werte von x identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{n-\varkappa},$$

für $x = \zeta_l$ identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{n-\varkappa-l},$$

da

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(\zeta_l) = \varkappa S_n^{(\varkappa)}(\zeta_l),$$

das Vorzeichen von $S_n^{(\varkappa)}(x)$ für (zahlenmäßig) genügend große Werte von x identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{n-\varkappa}$$

ist und die Gleichung

$$S_n^{(\varkappa)}(x) = 0$$

genau l Wurzeln besitzt, die kleiner als ζ_l sind.

Ebenso finden wir, indem wir mit $\Psi_n(x)$ die Funktion

$$\frac{(x^2-1)\,S_n'(x)}{x-\vartheta_1} = (x-1)\,S_n'(x)$$

bezeichnen, daß für $\varkappa < n-1$ die Wurzeln der Gleichung

(31) $$\Psi_n^{(\varkappa)}(x) = (x-1)\,S_n^{(\varkappa+1)}(x) + \varkappa S_n^{(\varkappa)}(x) = 0$$

und die Wurzeln der Gleichung (29) einander trennen.

Wir bezeichnen mit

(32) $$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_{n-\varkappa}$$

die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung (30), mit

(33) $$\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-\varkappa}$$

die ebenfalls nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung (31).

Nach Bewiesenem ist für $\varkappa < n-1$

$$\xi_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \zeta_2 < \cdots < \xi_{n-\varkappa-1} < \zeta_{n-\varkappa-1} < \xi_{n-\varkappa},$$
$$\eta_1 < \zeta_1 < \eta_2 < \zeta_2 < \cdots < \eta_{n-\varkappa-1} < \zeta_{n-\varkappa-1} < \eta_{n-\varkappa}.$$

Ferner bemerken wir, daß

$$\xi_1 < \eta_1$$

ist, da das Vorzeichen von

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(\eta_1) = 2\,S_n^{(\varkappa+1)}(\eta_1)$$

mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{n-\varkappa-1}$$

identisch ist.

Ebenso ist

$$\eta_{n-\varkappa} > \xi_{n-\varkappa}.$$

Endlich ist es leicht zu sehen, daß die Zahlen (32) und (33) einander trennen.

In der Tat, aus der Voraussetzung, daß zwischen zwei konsekutiven Zahlen (33)

$$\eta_l \text{ und } \eta_{l+1}$$

zwei Zahlen (32)

$$\xi_j \text{ und } \xi_{j+1}$$

liegen, würde folgen, daß die Gleichungen

$$\Psi_n^{(x)}(\xi_j) = -2S_n^{(x+1)}(\xi_j),$$
$$\Psi_n^{(x)}(\xi_{j+1}) = -2S_n^{(x+1)}(\xi_{j+1}),$$

die tatsächlich statthaben, unverträglich sind, da die Zahlen

$$S_n^{(x+1)}(\xi_j) \quad \text{und} \quad S_n^{(x+1)}(\xi_{j+1})$$

von entgegengesetztem Vorzeichen sind, während aus unserer Voraussetzung folgen würde, daß die Zahlen

$$\Psi_n^{(x)}(\xi_j) \quad \text{und} \quad \Psi_n^{(x)}(\xi_{j+1})$$

von einem und demselben Vorzeichen sind.

Daher enthält jedes der Intervalle

(34) $$(\eta_1, \eta_2),\ (\eta_2, \eta_3),\ \cdots,\ (\eta_{n-x-1}, \eta_{n-x})$$

nicht mehr als eine der Zahlen

$$\xi_2,\ \xi_3,\ \cdots,\ \xi_{n-x},$$

und da diese Zahlen alle im Intervalle (η_1, η_{n-x}) liegen, so enthält jedes der Intervalle (34) eine dieser Zahlen.

Somit ist

$$\xi_1 < \eta_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \zeta_2 < \cdots < \xi_{n-x-1} < \eta_{n-x-1} < \zeta_{n-x-1} < \xi_{n-x} < \eta_{n-x}.$$

Daraus folgt, daß in der Reihe (27) das erste und letzte Glied dann und nur dann nicht von entgegengesetztem Vorzeichen sind, wenn z in einem der Intervalle

(35) $$(-\infty, \xi_1),\ (\eta_1, \xi_2),\ (\eta_2, \eta_3),\ \cdots,\ (\eta_{n-x-1}, \xi_{n-x}),\ (\eta_{n-x}, \infty)$$

liegt.

Wir wollen beweisen, daß wenn z in einem der Intervalle (35) liegt, die Reihe (27) keine zwei Glieder von entgegengesetztem Vorzeichen enthält.

Dazu bestimmen wir das Vorzeichen der Funktion

(36) $$\frac{d^x((x-1)\,\varphi_l(x))}{dx^x},$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{(x-1)\,S_n'(x)}{x-\vartheta_l} = \varphi_l(x), \qquad l = 2, 3, \cdots, n$$

gesetzt ist, für $x = \xi_i$.

Wir haben

$$\left(\frac{d^x((x-1)\,\varphi_l(x))}{dx^x}\right)_{x=\xi_i} = (\xi_i - 1)\varphi_l^{(x)}(\xi_i) + x\varphi_l^{(x-1)}(\xi_i) = (\vartheta_l - 1)\,\varphi_l^{(x)}(\xi_i),$$

da

$$\Phi_n^{(x)}(\xi_i) = \left(\frac{d^x((x-\vartheta_l)\,\varphi_l(x))}{dx^x}\right)_{x=\xi_i} = (\xi_i - \vartheta_l)\varphi_l^{(x)}(\xi_i) + x\varphi_l^{(x-1)}(\xi_i) = 0$$

ist.

Nun ist nach Hilfssatz 2

$$\varphi_i^{(\varkappa)}(\xi_i)$$

von demselben Vorzeichen wie

$$\Phi_n^{(\varkappa+1)}(\xi_i),$$

d. h. von demselben Vorzeichen wie

$$(-1)^{n-\varkappa-i}.$$

Folglich ist die Funktion (36) von demselben Vorzeichen wie

$$(-1)^{n-\varkappa-i+1}.$$

Ebenso finden wir, daß die Funktion (36) für $x=\eta_i$ von demselben Vorzeichen wie

$$(-1)^{n-\varkappa-i}$$

ist.

Somit muß in jedem der Intervalle

$$(\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2),\ \cdots,\ (\xi_{n-\varkappa}, \eta_{n-\varkappa})$$

eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{d^\varkappa((x-1)\,\varphi_l(x))}{dx^\varkappa}=0$$

liegen; außerhalb dieser Intervalle aber wird die Funktion (36) nie Null.

Daraus folgt, daß die Funktion (36) im ganzen Intervalle (η_i, ξ_{i+1}) von demselben Vorzeichen wie

$$(-1)^{n-\varkappa-i},$$

d. h. von demselben Vorzeichen wie

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(\eta_i)$$

ist.

Auch in den Intervallen $(-\infty, \xi_1)$ und $(\eta_{n-\varkappa}, \infty)$ sind die Funktionen $\Phi_n^{(\varkappa)}(x)$ und (36) nicht von entgegengesetztem Vorzeichen.

Somit enthält die Reihe (27), falls z in einem der Intervalle (35) gelegen ist, keine zwei Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen.

Folglich findet die Gleichung (25) *dann und nur dann statt, wenn z in einem der Intervalle* (35) *gelegen ist oder, was dasselbe besagt, dann und nur dann, wenn*

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(z)\,\Psi_n^{(\varkappa)}(z) \geqq 0$$

ist.

§ 17.

Unter anderem findet die Gleichung (25) im Falle

$$S_n^{(\varkappa+1)}(z)=0$$

statt.

Bemerken wir, daß im Falle

$$\varkappa \equiv n \pmod{2}$$

die Gleichung

$$S_n^{(\varkappa+1)}(0) = 0$$

statthat, folgender Hilfssatz daraus folgt, der in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung des in § 11 wiedergegebenen Tschebyscheffschen Satzes darstellt.

Satz. *Die Funktion*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-\varkappa}{2}}\left(\frac{n-\varkappa}{2}\right)!\,\varrho}{2^{\varkappa-1}n\left(\frac{n+\varkappa}{2}-1\right)\left(\frac{n+\varkappa}{2}-2\right)\cdots(\varkappa+1)}\,\mathrm{Cos}\,(n \operatorname{arc} \mathrm{Cos}\, x)$$

weicht in dem Intervalle $(-1, 1)$ *für jeden ganzen positiven Wert von* $\varkappa \leqq n$, *der der Kongruenz*

$$\varkappa \equiv n \pmod{2}$$

genügt, von Null weniger ab als jede andere ganze Funktion von x *von nicht höherem als* n^{tem} *Grade, deren Koeffizient von* $x^\varkappa$ *gleich* ϱ *ist.*

Der Faktor

$$\frac{(-1)^{\frac{n-\varkappa}{2}}\left(\frac{n-\varkappa}{2}\right)!}{2^{\varkappa-1}n\left(\frac{n+\varkappa}{2}-1\right)\left(\frac{n+\varkappa}{2}-2\right)\cdots(\varkappa+1)}$$

ist für $\varkappa = n-2$ *durch*

$$-\frac{1}{2^{n-3}n}$$

für $\varkappa = n$ *durch*

$$\frac{1}{2^{n-1}}$$

zu ersetzen.

§ 18.

Wir bemerken, daß die Wurzeln der Gleichung

(37) $$S_n^{(\varkappa-1)}(x) = 0$$

ebenfalls in den Intervallen (35) liegen.

In der Tat, folgt aus der Gleichung

$$1 - S_n^2(x) = \frac{(1-x^2)\,S_n'^2(x)}{n^2}$$

durch Differentiation die Gleichung

$$(x^2-1)\,S_n''(x) + x\,S_n'(x) = n^2 S_n(x)\,,$$

und differentiieren wir diese letztere Gleichung $\varkappa - 1$ mal, so erhalten wir die Gleichung

(38) $$(x^2-1)\,S_n^{(\varkappa+1)}(x) + (2\varkappa-1)x\,S_n^{(\varkappa)}(x) = \{n^2-(\varkappa-1)^2\}\,S_n^{(\varkappa-1)}(x).$$

Aus Gleichung (38) folgt für diejenigen Werte von x, die der Gleichung (37) genügen,

$$S_n^{(\varkappa)}(x) = -\frac{(x^2-1)\,S_n^{(\varkappa+1)}(x)}{(2\varkappa-1)x}.$$

Folglich ist für diese Werte von x

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(x) = (x+1)\,S_n^{(\varkappa+1)}(x) + \varkappa\,S_n^{(\varkappa)}(x) = \frac{S_n^{(\varkappa+1)}(x)}{(2\varkappa-1)x}(x+1)\{(\varkappa-1)x+\varkappa\},$$

$$\Psi_n^{(\varkappa)}(x) = (x-1)\,S_n^{(\varkappa+1)}(x) + \varkappa\,S_n^{(\varkappa)}(x) = \frac{S_n^{(\varkappa+1)}(x)}{(2\varkappa-1)x}(x-1)\{(\varkappa-1)x-\varkappa\}.$$

Diese Formeln zeigen, daß für diejenigen Werte von x, die der Gleichung (37) genügen,

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(x) \quad \text{und} \quad \Psi_n^{(\varkappa)}(x)$$

von demselben Vorzeichen wie

$$\frac{S_n^{(\varkappa+1)}(x)}{(2\varkappa-1)x}$$

sind, und daß folglich die Wurzeln der Gleichung (37) sämtlich in den Intervallen (35) liegen.

Da die größte Wurzel der Gleichung (37) größer als $\zeta_{n-\varkappa}$ ist, so ist

$$\frac{S_n^{(\varkappa+1)}(x)}{(2\varkappa-1)x}$$

und folglich auch

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(x) \quad \text{und} \quad \Psi_n^{(\varkappa)}(x)$$

positiv für diese Wurzel, d. h. diese Wurzel ist größer als $\eta_{n-\varkappa}$.

Ebenso finden wir, daß die kleinste Wurzel der Gleichung (37) kleiner als ξ_1 ist.

Folglich liegen die Zahlen (32) und (33) sämtlich zwischen der kleinsten und der größten Wurzel der Gleichung (37).

Unter anderem liegen die Zahlen (32) und (33) für $\varkappa = 1$ sämtlich zwischen

$$-\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}\frac{\pi}{2n},$$

für $\varkappa = 2$ liegen die Zahlen (32) und (33) sämtlich zwischen

$$-\operatorname{Cos}\frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}.$$

Offenbar liegen die Zahlen (32) und (33) auch für $\varkappa > 2$ sämtlich zwischen

$$-\operatorname{Cos}\frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}.$$

Folglich wird die Gleichung (25) sicher statthaben, falls

$$|z| \geqq \operatorname{Cos}\frac{\pi}{2n},$$

und auch, falls

$$x > 1, \quad |z| \geqq \operatorname{Cos}\frac{\pi}{n}$$

ist.

§ 19.

Wir gehen zur Betrachtung der Voraussetzung

$$p = n$$

über.

Unter dieser Voraussetzung genügt die Funktion

$$F(x) = \prod_{l=1}^{l=n} (x - x_l)$$

der Bedingung

(39) $$F^{(\varkappa)}(z) = 0,$$

und die Reihe

(40) $$F_1^{(\varkappa)}(z)(-1)^1 f(x_1),\ F_2^{(\varkappa)}(z)(-1)^2 f(x_2),\ \cdots,\ F_n^{(\varkappa)}(z)(-1)^n f(x_n),$$

wo

$$F_l(x) = \frac{F(x)}{x - x_l}$$

gesetzt ist, enthält keine zwei Glieder von entgegengesetztem Vorzeichen.

Auf Grund von Hilfssatz 2 kann man die Reihe (40) durch die Reihe

(41) $$(-1)^1 f(x_1),\ (-1)^2 f(x_2),\ \cdots,\ (-1)^n f(x_n)$$

ersetzen.

Umgekehrt, erreicht der absolute Betrag irgend einer Funktion von Gestalt (1) $h(x)$ seinen größten Wert im Intervalle (a, b) für genau n Werte von x in diesem Intervalle

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_n,$$

ist zweitens

$$\frac{d^{\varkappa}\left(\prod_{l=1}^{l=n}(z - \varrho_l)\right)}{dz^{\varkappa}} = 0,$$

und sind endlich die Zahlen der Reihe

$$(-1)^1 h(\varrho_1),\ (-1)^2 h(\varrho_2),\ \cdots,\ (-1)^n h(\varrho_n)$$

sämtlich von einem und demselben Vorzeichen, so ist die Funktion $h(x)$ eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1).

§ 20.

Bezüglich der Zahlen

(42) $$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

können vier verschiedene Voraussetzungen gemacht werden:

1. Unter den Zahlen (42) ist $a = -1$, aber nicht $b = 1$ enthalten.

2. Unter den Zahlen (42) ist $b = 1$, aber nicht $a = -1$ enthalten.

3. Unter den Zahlen (42) sind beide Zahlen $a = -1$ und $b = 1$ enthalten und der Grad von y ist gleich $n - 1$.

4. Unter den Zahlen (42) sind beide Zahlen $a = -1$ und $b = 1$ enthalten und der Grad von y ist gleich n.

Greift die erste dieser Voraussetzungen Platz, so genügt y der Differentialgleichung

$$L^2 - y^2 = \frac{(x+1)(c-x)}{n^2} y'^2, \tag{43}$$

wo c irgendeine konstante Zahl bedeutet.

Aus Gleichung (43) folgt

$$y = \pm L S_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right), \tag{44}$$

wobei c aus der Bedingung (39), $\pm L$ aus der Gleichung

$$\omega(y) = f^{(\varkappa)}(z) = \alpha$$

zu bestimmen sind.

Der absolute Betrag der auf diese Weise bestimmten Funktion (44) erreicht seinen größten Wert im Intervalle (a, b) genau n mal dann und nur dann, wenn

$$c > 1, \quad \frac{c+1}{2} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{n} + \frac{c-1}{2} \leqq 1,$$

d. h. dann und nur dann, wenn

$$1 < c \leqq 1 + 2 \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}$$

ist.

Liegt aber die Zahl c in den eben angegebenen Grenzen, so findet auf Grund des vorigen Paragraphen die Gleichung (44) wirklich statt.

In diesem Falle unterscheidet sich die zu y gehörende Funktion $F(x)$ von der Funktion

$$\Phi_n(v) = (v+1) S_n'(v),$$

wo

$$v = \frac{2x+1-c}{c+1}$$

ist, nur um einen Zahlenfaktor.

Bezeichnen wir daher die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$F^{(\varkappa)}(x) = 0$$

mit

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-\varkappa},$$

so haben wir

$$\varepsilon_i = \frac{c+1}{2} \xi_i + \frac{c-1}{2}.$$

Nimmt c

$$\text{von } 1 \text{ bis } 1 + 2 \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}$$

zu, so nimmt ε_i

$$\text{von } \xi_i \text{ bis } \lambda_i = \left(1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \xi_i + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}$$

zu.

Wir bemerken noch, daß für $x = \xi_i$ die Funktion (44) der Funktion (25) gleich ist.

Also, *die Gleichung* (44) *findet dann und nur dann statt, wenn* z *in einem der Intervalle*

$$(\xi_1, \lambda_1),\ (\xi_2, \lambda_2),\ \cdots,\ (\xi_{n-\varkappa}, \lambda_{n-\varkappa})$$

liegt oder, was dasselbe besagt, dann und nur dann, wenn

$$\Phi_n^{(\varkappa)}(z)\, \Phi_n^{(\varkappa)}\left(z \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi}{2n} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \leqq 0$$

ist; nur für $z = \xi_i$ ist

$$p = n + 1;$$

ist aber $z = \lambda_i$, so greift nicht die erste, sondern die vierte Voraussetzung dieses Paragraphen Platz.

Liegt z im Intervalle (ξ_i, λ_i), so gibt uns die Bedingung (39) zur Bestimmung von c die Gleichung

$$z = \varepsilon_i = \frac{c+1}{2} \xi_i + \frac{c-1}{2},$$

woraus

$$c = \frac{2z - \xi_i + 1}{\xi_i + 1}$$

folgt.

Liegt folglich z *im Intervalle* (ξ_i, λ_i), *so ist*

$$y = \frac{(1+z)^\varkappa \alpha}{(1+\xi_i)^\varkappa S_n^{(\varkappa)}(\xi_i)} S_n\left(\frac{(1+\xi_i)(x-z)}{1+z} + \xi_i\right),$$

$$L = \frac{(1+z)^\varkappa}{(1+\xi_i)^\varkappa} \cdot \left| \frac{\alpha}{S_n^{(\varkappa)}(\xi_i)} \right|.$$

Wir bemerken, daß

$$\lambda_i < \eta_i$$

ist, da sonst für $z = \eta_i$ zwei verschiedene am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktionen von Gestalt (1) existierten, unter denen eine Funktion vorhanden wäre, deren absoluter Betrag seinen größten Wert im Intervalle (a, b) $n+1$ mal erreicht, was unmöglich ist.

§ 21.

Ebenso finden wir, daß der zweiten Voraussetzung die Funktion

$$y = \pm L S_n\left(\frac{2x - 1 - d}{1 - d}\right) \tag{45}$$

entspricht, wobei die Zahl d aus der Bedingung (39), $\pm L$ aus der Gleichung

$$\omega(y) = f^{(\varkappa)}(z) = \alpha$$

zu bestimmen ist.

Die Gleichung (45) *findet dann und nur dann statt, wenn z in einem der Intervalle*

$$(\mu_1, \eta_1),\ (\mu_2, \eta_2),\ \cdots,\ (\mu_{n-\varkappa}, \eta_{n-\varkappa})$$

liegt, wo

$$\mu_i = \left(1 + \mathrm{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right)\eta_i - \mathrm{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}$$

ist oder, was dasselbe besagt, dann und nur dann, wenn

$$\Psi_n^{(\varkappa)}(z)\,\Psi_n^{(\varkappa)}\, z\left(\mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2n} + \mathrm{Sin}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \leqq 0$$

ist; nur für $z = \eta_i$ ist die Funktion (45) der Funktion (25) gleich und

$$p = n + 1;$$

ist aber $z = \mu_i$, so greift nicht die zweite, sondern die vierte Voraussetzung des vorigen Paragraphen Platz.

Liegt ferner z im Intervalle (μ_i, η_i), so ist

$$y = \frac{(1-z)^{\varkappa}\alpha}{(1-\eta_i)^{\varkappa} S_n^{(\varkappa)}(\eta_i)}\, S_n\left(\frac{(1-\eta_i)(x-z)}{1-z} + \eta_i\right),$$

$$L = \frac{(1-z)^{\varkappa}}{(1-\eta_i)^{\varkappa}} \cdot \left|\frac{\alpha}{S_n^{(\varkappa)}(\eta_i)}\right|.$$

Wir bemerken, daß, den Fall

$$n = 2,\quad \varkappa = 1,\quad \lambda_1 = \mu_1 = 0$$

ausgenommen, stets die Ungleichung

$$\lambda_i < \mu_i$$

gilt, da sonst dem Werte $z = \lambda_i$ zwei verschiedene am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktionen von Gestalt (1) entsprechen müßten, was, den obgenannten Fall ausgenommen, unmöglich ist.

§ 22.

Die dritte Voraussetzung gibt

(46) $$y = \frac{\alpha}{S_{n-1}^{(\varkappa)}(z)}\, S_{n-1}(x),$$

$$L = \left|\frac{\alpha}{S_{n-1}^{(\varkappa)}(z)}\right|.$$

Die Gleichung (46) *findet offenbar nur für*

$$z = \nu_1,\ z = \nu_2,\ \cdots,\ z = \nu_{n-\varkappa}$$

statt, wo

(47) $$\nu_1,\ \nu_2,\ \cdots,\ \nu_{n-\varkappa}$$

die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d^{\varkappa}\left((x^2-1)\,S'_{n-1}(x)\right)}{dx^{\varkappa}}=0$$

bedeuten.

§ 23.

Beachten wir, daß für

$$\varkappa \text{ nicht } \equiv n \pmod{2}$$

eine der Zahlen (47) gleich Null ist, so erhalten wir folgenden Satz.

Satz. *Die Funktion*

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1-\varkappa}{2}}\left(\frac{n-1-\varkappa}{2}\right)!\,\varrho}{2^{\varkappa-1}(n-1)\left(\frac{n-1-\varkappa}{2}-1\right)\left(\frac{n-1+\varkappa}{2}-2\right)\cdots(\varkappa+1)}\operatorname{Cos}\left((n-1)\arccos x\right)$$

weicht im Intervalle $(-1, 1)$ *für jeden ganzen und positiven Wert von* $\varkappa < n$, *der der Kongruenz*

$$\varkappa \equiv n \pmod{2}$$

nicht genügt, von Null weniger ab, als jede andere ganze Funktion von x *von nicht höherem als* n^{tem} *Grade, deren Koeffizient von* $x^{\varkappa}$ *gleich* ϱ *ist.*

Der Faktor

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1-\varkappa}{2}}\left(\frac{n-1-\varkappa}{2}\right)!}{2^{\varkappa-1}(n-1)\left(\frac{n-1+\varkappa}{2}-1\right)\left(\frac{n-1+\varkappa}{2}-2\right)\cdots(\varkappa+1)}$$

ist für $\varkappa = n-3$ *durch*

$$-\frac{1}{2^{n-4}(n-1)},$$

für $\varkappa = n-1$ *durch*

$$\frac{1}{2^{n-2}}$$

zu ersetzen.

§ 24.

Wir gehen zur Betrachtung der vierten Voraussetzung über.

Greift diese Voraussetzung Platz, so besitzt die Gleichung

$$y' = 0$$

außer den Wurzeln

$$x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

noch eine Wurzel β.

Diese Wurzel muß einer der Ungleichungen

$$\beta \leqq a = -1,\quad \beta \geqq b = 1$$

genügen, da sonst in der Reihe (41) Zahlen von entgegengesetztem Vorzeichen vorhanden wären.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß der Fall

$$\beta = a = -1$$

nur für

$$z = \mu_1,\ z = \mu_2,\ \cdots,\ z = \mu_{n-\varkappa},$$

der Fall

$$\beta = b = 1$$

nur für

$$z = \lambda_1,\ z = \lambda_2,\ \cdots,\ z = \lambda_{n-\varkappa}$$

stattfinden kann.

In den beiden eben erwähnten Fällen werden Funktionen, die schon oben betrachtet sind, als die am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichenden Funktionen von Gestalt (1) sich herausstellen.

Nehmen wir nun

$$\beta > b = 1$$

an. In diesem Falle wird der absolute Betrag von y zuerst zunehmen, so lange x von $b = 1$ bis β zunimmt, dann bei weiterem Zunehmen von x erst bis zu Null abnehmen und dann unbegrenzt zunehmen.

Zugleich damit wird die Gleichung

$$L^2 - y^2 = 0 \tag{48}$$

außer den $n-2$ zweifachen Wurzeln

$$x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1} \tag{49}$$

und den zwei einfachen

$$a = -1,\quad b = 1 \tag{50}$$

noch die zwei Wurzeln

$$\gamma > \beta \quad \text{und} \quad \delta > \gamma$$

besitzen.

Ebenso besitzt die Gleichung (48) im Falle

$$\beta < a = -1$$

außer den Zahlen (49) und (50) noch die zwei Wurzeln

$$\gamma < \beta \quad \text{und} \quad \delta < \gamma.$$

In beiden Fällen genügt die Funktion y der Differentialgleichung

$$L^2 - y^2 = \frac{(1-x^2)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2(x-\beta)^2}\, y'^2. \tag{51}$$

Wir bemerken, daß Zolotareff in seinem Aufsatze „Anwendung der elliptischen Funktionen auf Fragen betreffend die am wenigsten und am meisten von Null abweichenden Funktionen" die Lösung der Gleichung (51) durch elliptische Funktionen ausgedrückt hat. Wir wollen uns aber mit dieser Bemerkung begnügen.

§ 25.

Wir setzen

$$\frac{f(x)}{f(-1)} = W(x) = \sum_{l=0}^{l=n} q_l x^{n-l}.$$

Nehmen wir dann

$$\beta > 1$$

an, so haben wir zur Bestimmung der Koeffizienten der Funktion $W(x)$

$$q_0, q_1, \cdots, q_n$$

und der Zahlen

$$x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, \beta, \gamma \text{ und } \delta$$

die Gleichungen

$$(52)\quad \begin{cases} W(-1) = 1, & \\ W(x_2) = (-1)^1, & W'(x_2) = 0, \\ W(x_3) = (-1)^2, & W'(x_3) = 0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ W(x_{n-1}) = (-1)^{n-2}, & W'(x_{n-1}) = 0, \\ W(1) = (-1)^{n-1}, & W'(\beta) = 0, \\ W(\gamma) = (-1)^{n-1}, & \\ W(\delta) = (-1)^n, & F^{(\varkappa)}(z) = \left\{ \dfrac{d^\varkappa \left((x^2-1)\prod\limits_{l=2}^{l=n-1}(x-x_l)\right)}{dx^\varkappa} \right\}_{x=z} = 0. \end{cases}$$

Damit die vierte Voraussetzung Platz greife und außerdem

$$\beta > 1$$

sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (52) eine solche Lösung zulassen, daß die Zahlen

$$(53)\qquad x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, \beta$$

reell, endlich und den Ungleichungen

$$(54)\qquad -1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < 1 < \beta$$

genügend ausfallen.

Mehr als eine solche Lösung können die Gleichungen (52) nicht zulassen, da sonst mehr als eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) existierte.

Wir wollen beweisen, daß, den Fall

$$n = 2, \quad \varkappa = 1, \quad \lambda_1 = \nu_1 = \mu_1$$

ausgenommen, die Ungleichungen

$$\lambda_i < \nu_i < \mu_i$$

stattfinden und daß, wenn

$$\lambda_i < z < \nu_i$$

ist, die Gleichungen (52) eine solche Lösung zulassen, daß die Zahlen (53) reell, endlich und den Ungleichungen (54) genügend ausfallen.

Dazu bemerken wir, daß für $z = \lambda_i$ die Gleichungen (52) eine Lösung besitzen, für die

$$(55)\quad \begin{cases} W(x) = (-1)^n S_n\left(x \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi}{2n} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{2n}\right), \\ x_2 = \left(1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{Cos} \frac{n-1}{n}\pi + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}, \\ x_3 = \left(1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{Cos} \frac{n-2}{n}\pi + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \left(1 + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{Cos} \frac{2}{n}\pi + \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n}, \\ \beta = \gamma = 1, \quad \delta = 1 + 2 \operatorname{Tg}^2 \frac{\pi}{2n} \end{cases}$$

ist, und wollen nun unter

$$(56)\qquad x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ und } W(x)$$

solche Funktionen von z (die letzte auch von x) verstehen, die den Gleichungen (52) genügen und für $z = \lambda_i$ die Werte (55) haben.

Die Ableitungen nach z der auf diese Weise bestimmten Funktionen in z (56) und der Funktion $W'(x)$ wollen wir mit

$$\delta x_2,\ \delta x_3,\ \cdots,\ \delta x_{n-1},\ \delta\beta,\ \delta\gamma,\ \delta\delta,\ \delta W(x),\ \delta W'(x)$$

bezeichnen.

Differentiieren wir nun die Gleichungen (52) nach z, so erhalten wir die Gleichungen

$$(57)\quad \begin{cases} \delta W(-1) = 0, & \\ \delta W(x_2) + W'(x_2)\,\delta x_2 = 0, & \delta W'(x_2) + W''(x_2)\,\delta x_2 = 0, \\ \delta W(x_3) + W'(x_3)\,\delta x_3 = 0, & \delta W'(x_3) + W''(x_3)\,\delta x_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \delta W(x_{n-1}) + W'(x_{n-1})\,\delta x_{n-1} = 0, & \delta W'(x_{n-1}) + W''(x_{n-1})\,\delta x_{n-1} = 0, \\ \delta W(-1) = 0, & \\ \delta W(\gamma) + W'(\gamma)\,\delta\gamma = 0, & \delta W'(\beta) + W''(\beta)\,\delta\beta = 0, \\ \delta W(\delta) + W'(\delta)\,\delta\delta = 0, & \\ F^{(\varkappa+1)}(z) - F_2^{(\varkappa)}(z)\,\delta x_2 - F_3^{(\varkappa)}(z)\,\delta x_3 - \cdots - F_{n-1}^{(\varkappa)}(z)\,\delta x_{n-1} = 0. & \end{cases}$$

Hier ist

$$F(x) = (x^2 - 1) \prod_{l=2}^{l=n-1} (x - x_l),$$

$$F_l(x) = \frac{F(x)}{x - x_l}$$

gesetzt.

Aus den Gleichungen (57) folgt, wenn wir die Gleichungen (52) berücksichtigen,

$$\delta W(-1) = \delta W(x_2) = \delta W(x_3) = \cdots = \delta W(x_{n-1}) = \delta W(1) = 0.$$

Daraus schließen wir, daß

(58) $$\delta W(x) = A F(x)$$

ist, wo A eine von x unabhängige Zahl bedeutet und folglich, daß

(59) $$\delta W'(x) = A F'(x)$$

ist.

Ersetzen wir nun in den Gleichungen (57)

$$\delta W(\gamma),\ \delta W(\delta),\ \delta W'(x_2),\ \delta W'(x_3),\ \cdots,\ \delta W'(x_{n-1}),\ \delta W'(\beta)$$

durch die für sie aus den Gleichungen (58) und (59) folgenden Werte und suchen wir aus den auf diese Weise erhaltenen Gleichungen

$$\delta x_2,\ \delta x_3,\ \cdots,\ \delta x_{n-1},\ \delta \beta,\ \delta \gamma,\ \delta \delta,$$

zu bestimmen, so kommt

(60) $$\left\{\begin{aligned} \delta x_j &= -\frac{A(x_j^2 - 1)}{n q_0 (x_j - \beta)}, \\ \delta \beta &= -\frac{A F'(\beta)}{W''(\beta)}, \\ \delta \gamma &= -\frac{A(\gamma^2 - 1)}{n q_0 (\gamma - \beta)}, \\ \delta \delta &= -\frac{A(\delta^2 - 1)}{n q_0 (\delta - \beta)}. \end{aligned}\right.$$

Ersetzen wir aber in der letzten der Gleichungen (57)

$$\delta x_2,\ \delta x_3,\ \cdots,\ \delta x_{n-1}$$

durch ihre Werte (60) und suchen wir aus der auf diese Weise erhaltenen Gleichung A zu bestimmen, so kommt

$$A = -\frac{n q_0 F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2 - 1}{x_l - \beta} F_l^{(\varkappa)}(z)}$$

und ferner

(61)
$$\left\{\begin{aligned} \delta x_j &= \frac{\frac{x_j^2-1}{x_j-\beta} F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(\varkappa)}(z)}, \\ \delta\beta &= \frac{n q_0 F^{(\varkappa+1)}(z) F'(\beta)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(\varkappa)}(z) W''(\beta)}, \\ \delta\gamma &= \frac{\frac{\gamma^2-1}{\gamma-\beta} F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(\varkappa)}(z)}, \\ \delta\delta &= \frac{\frac{\delta^2-1}{\delta-\beta} F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(\varkappa)}(z)}. \end{aligned}\right.$$

Wir bemerken, daß für jeden Wert von z, für den die Werte der Funktionen

(62) $$x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \beta$$

reell, endlich und den Ungleichungen

(63) $$-1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < 1 \leqq \beta$$

genügend ausfallen, die Ungleichung

$$\frac{q_0 F'(\beta)}{W''(\beta)} = \frac{F'(\beta)}{\frac{W''(\beta)}{q_0}} > 0$$

statthat, da die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in den Funktionen

$$F'(x) \quad \text{und} \quad \frac{W''(x)}{q_0}$$

positiv sind, und die Gleichungen

$$F'(x) = 0 \quad \text{und} \quad W''(x) = 0$$

für einen solchen Wert von z keine Wurzeln haben, die größer oder gleich β sind.

Aus den Formeln (61) und auf Grund der eben gemachten Bemerkung und des Hilfssatzes 2 schließen wir, daß

(64) $$x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \beta,\ \gamma \text{ und } \delta$$

stetige und mit z zunehmende Funktionen von z sein werden für jeden Wert von z, für den die Werte der Funktionen (62) reell, endlich und den Ungleichungen (63) genügend ausfallen.

Da die Gleichungen

$$x_j = x_{j+1}, \quad x_{n-1} = 1,$$

wie aus den Gleichungen (52) ersichtlich, nicht statthaben können, so bleiben bei stetigem Zunehmen der Funktionen (62) die Ungleichungen (63) immer richtig, wenn sie am Anfange des Zunehmens richtig waren.

Wenn also jedem im Intervalle (λ_i, ϱ), wo ϱ irgendeine Zahl größer als λ_i bedeutet, enthaltenen Werte von z ein endlicher Wert der Funktion β entspricht, so werden die Funktionen (64) für $z = \varrho$ reelle, endliche und mit z zunehmende Funktionen von z sein; außerdem werden dann die Ungleichungen (63) statthaben und

$$\beta > 1$$

sein.

Nehmen wir an, daß jedem im Intervalle (λ_i, μ_i) enthaltenen Werte von z ein endlicher Wert von β entspreche, so würden wir auf Grund des eben Ausgeführten zu dem Schlusse kommen, daß die für $z = \mu_i$ am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) eine von der Funktion (45) verschiedene Funktion sei, was unmöglich ist.

Daher muß im Intervalle (λ_i, μ_i) eine von λ_i und μ_i verschiedene Zahl ϱ_i vorhanden sein derart, daß jedem Werte von z, der im Intervalle (λ_i, ϱ_i) enthalten und von ϱ_i verschieden ist, ein endlicher Wert von β entspricht, β aber unbegrenzt wächst, wenn z zunehmend sich dem Grenzwert ϱ_i nähert.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß wenn z zunehmend sich dem Grenzwerte ϱ_i nähert, dann

$$x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$$

zunehmend sich gewissen endlichen Grenzwerten nähern.

Folglich nähern sich auch die Koeffizienten der Funktion

$$h(x) = \frac{W'(x)}{n q_0 (x - \beta)} = \prod_{l=2}^{l=n-1} (x - x_l)$$

gewissen endlichen Grenzwerten, wenn z zunehmend sich dem Grenzwerte ϱ_i nähert.

Wir haben ferner

$$\begin{aligned} W(x) &= n q_0 \int_{-1}^{x} (x - \beta)\, h(x)\, dx + 1 \\ &= n q_0 \int_{-1}^{x} x\, h(x)\, dx - n q_0 \beta \int_{-1}^{x} h(x)\, dx + 1. \end{aligned} \tag{65}$$

Aus der Gleichung

$$W(x_2) = nq_0\int_{-1}^{x_2} x\,h(x)\,dx - nq_0\beta\int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx + 1 = -1$$

folgt

(66) $$q_0 = \frac{2}{n\beta\int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx - n\int_{-1}^{x_2} x\,h(x)\,dx}$$

und ferner

(67) $$q_0\beta = \frac{2}{n\int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx - \frac{n}{\beta}\int_{-1}^{x_2} x\,h(x)\,dx}.$$

Da die Gleichung

$$h(x) = 0$$

für

$$\lambda_i < z < \varrho_i$$

keine Wurzeln besitzt, die zwischen -1 und x_2 liegen, so können wir aus den Formeln (66) und (67) schließen, daß, wenn z zunehmend sich dem Grenzwerte ϱ_i nähert, q_0 sich dem Grenzwerte Null, $q_0\beta$ sich einem gewissen endlichen Grenzwerte nähert.

Daher folgt aus Formel (65), daß gleichzeitig $W(x)$ gegen eine gewisse ganze Funktion von x von $n-1^{\text{tem}}$ Grade konvergiert und zwar gleichmäßig für alle Werte von x im Intervalle $(-1, 1)$.

Da aber für jedes den Ungleichungen

$$\lambda_i < z < \varrho_i$$

genügende z der absolute Betrag von $W(x)$ im Intervalle $(-1, 1)$ seinen größten Wert, der gleich 1 ist, genau $n$mal erreicht und

$$W(-1) = 1$$

ist, so ist

$$\lim_{z=\varrho_i} W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x).$$

Zugleich ist natürlich

$$\lim_{z=\varrho_i} x_j = \operatorname{Cos}\frac{n-j}{n-1}\pi,$$

$$\lim_{z=\varrho_i} F(x) = (x^2-1)\,S'_{n-1}(x),$$

und folglich muß ϱ_i einer der Zahlen (47) gleich sein; da aber die Anzahl der Zahlen (47) der Anzahl der Intervalle

$$(\lambda_1, \mu_1),\ (\lambda_2, \mu_2),\ \cdots,\ (\lambda_{n-x}, \mu_{n-x})$$

gleich ist, so haben wir

$$\varrho_i = \nu_i.$$

Folglich ist in der Tat

$$\lambda_i < \nu_i < \mu_i,$$

und die Gleichungen (52) lassen für

$$\lambda_i < z < \nu_i$$

eine Lösung zu, für die die Zahlen (53) reell, endlich und den Ungleichungen (54) genügend ausfallen.

§ 26.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, daß, *wenn*

$$\lambda_i < z < \nu_i,$$

oder, was dasselbe besagt, wenn

$$\Phi_n^{(x)}\left(z \operatorname{Cos}^2\frac{\pi}{2n} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{2n}\right)\frac{d^x\left((z^2-1)S'_{n-1}(z)\right)}{dz^x} < 0$$

ist, dann die vierte Voraussetzung des § 20 *Platz greift und*

$$\beta > 1$$

ist.

Nimmt außerdem z *von* λ_i *bis* ν_i *zu, so nehmen die* x_j

$$von \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{n-j+1}{n}\pi + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n} \quad bis \quad \operatorname{Cos}\frac{n-j}{n-1}\pi,$$

β *und* γ

$$von\ 1\ bis\ \infty,$$

und endlich δ

$$von\ 1 + 2\operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\ bis\ \infty$$

zu.

Hier sind wie früher mit

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

sämtliche im Intervalle (a, b) gelegenen und nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung (22) bezeichnet.

Ebenso finden wir, indem wir mit

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n$$

die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$y = 0$$

bezeichnen, daß, *wenn* z *von* λ_i *bis* ν_i *zunimmt, dann* r_j *für* $j < n$

$$von \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{2n-2j+1}{2n}\pi + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n} \quad bis \quad \operatorname{Cos}\frac{2n-3j-1}{(2n-1)}\pi,$$

r_n

$$von \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{1}{2n}\pi + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\ bis\ \infty$$

zunimmt.

§ 27.

Durch ganz analoge Betrachtungen wie die in § 25 dargelegten, können wir schließen, daß, *wenn*

$$\nu_i < z < \mu_i,$$

oder, was dasselbe besagt, wenn

$$\frac{d^{\varkappa}((z^2-1)\,S'_{n-1}(z))}{dz^{\varkappa}}\,\Psi_n^{(\varkappa)}\left(z \operatorname{Cos}^2\frac{\pi}{2n} + \operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{2n}\right) < 0$$

ist, dann die vierte Voraussetzung des § 20 *Platz greift und*

$$\beta < -1$$

ist.

Nimmt außerdem z von ν_i bis μ_i zu, so nehmen die x_j

$$\textit{von } \operatorname{Cos}\frac{n-j}{n-1}\pi \textit{ bis } \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{n-j}{n}\pi - \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\beta \textit{ und } \gamma \textit{ von } -\infty \textit{ bis } -1,$$

$$\delta \textit{ von } -\infty \textit{ bis } -1 - 2\operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$r_1 \textit{ von } -\infty \textit{ bis } \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{2n-1}{2n}\pi - \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

und r_j für $j > 1$

$$\textit{von } \operatorname{Cos}\frac{2n-2j+1}{2(n-1)}\pi \textit{ bis } \left(1 + \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Cos}\frac{2n-2j+1}{2n}\pi - \operatorname{Tg}^2\frac{\pi}{2n}$$

*zu.**)

Kapitel III.

§ 32.

Kennen wir die am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1), so ist es leicht folgende Aufgabe zu lösen.

Aufgabe. *Den größten Wert zu bestimmen, den der absolute Betrag einer linearen Funktion $\omega(h)$, gebildet aus den Koeffizienten einer ganzen Funktion von nicht höherem als n^{tem} Grade $h(x)$ annehmen kann, wenn die Abweichung der Funktion $h(x)$ von Null in dem Intervalle (a, b) die gegebene positive Zahl M nicht übersteigt.*

Lösung. *Es sei y die am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b)*

---

*) Die §§ 28—31 deren wesentlicher Inhalt in Beispielen besteht, lassen wir weg. S. B.

abweichende Funktion von Gestalt (1), *L ihre Abweichung von Null in demselben Intervalle, dann ist das gesuchte Maximum gleich*

$$\frac{M}{L}|\alpha|$$

und entspricht der Funktion

$$h(x) = \frac{M}{L}y.$$

In der Tat, wäre für irgend eine ganze Funktion von nicht höherem als n^{tem} Grade $g(x)$, deren Abweichung N von Null in dem Intervalle (a, b) die Zahl M nicht übersteigt,

$$|\omega(g)| > \frac{M}{L}|\alpha|,$$

so würde die Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b) der Funktion von Gestalt (1)

$$\frac{\alpha}{\omega(g)}g(x)$$

gleich

$$\frac{|\alpha|}{|\omega(g)|}N < \frac{LN}{M} \leqq L$$

sein.

Daher kann das gesuchte Maximum nicht größer sein als

$$\frac{M}{L}|\alpha|,$$

und dieser Grenzwert von $|\omega(h)|$ wird für die Funktion

$$h(x) = \frac{M}{L}y,$$

deren Abweichung vom Nullpunkte in dem Intervalle (a, b) gleich M ist, erreicht.

Offenbar ist auch umgekehrt, wenn der größte Wert von $|\omega(h)|$ der Funktion

$$h(x) = g(x)$$

entspricht, die Funktion

$$\frac{\alpha}{\omega(g)}g(x)$$

die am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1).

Es ist natürlich nicht nötig, hier

$$a = -1, \qquad b = 1$$

anzunehmen.

§ 33.

Auf Grund des vorigen Paragraphen und der Sätze der §§ 17 und 29, schließen wir auf den folgenden Satz.

Satz. *Übersteigt die Abweichung von Null einer ganzen Funktion*

$$h(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$$

von nicht höherem als n^{tem} Grade in dem Intervalle $(-1, 1)$ *nicht die Zahl M, so ist*

$$|p_0| \leqq 2^{n-1} M, \qquad |p_1| \leqq 2^{n-2} M,$$

$$|p_2| \leqq 2^{n-3} n M, \qquad |p_4| \leqq 2^{n-4} (n-1) M,$$

und für $i > 1$

$$|p_{2i}| \leqq \frac{2^{n-2i-1} n (n-i-1)(n-i-2) \cdots (n-2i+1) M}{i!},$$

$$|p_{2i+1}| \leqq \frac{2^{n-2i-2} (n-1)(n-i-2)(n-i-3) \cdots (n-2i) M}{i!};$$

dabei kann jede dieser Ungleichungen tatsächlich in eine Gleichung übergehen.

§ 34.

Aufgabe. *Zu bestimmen ist der größte Wert, den die Abweichung von Null in irgend einem gegebenen Intervalle (a, b) der $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung $h^{(\varkappa)}(x)$ einer ganzen Funktion $h(x)$ von nicht höherem als n^{tem} Grade haben kann, wenn die Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b) der Funktion $h(x)$ die gegebene positive Zahl M nicht übersteigt*).*

Lösung. Wir nehmen zunächst

$$a = -1, \qquad b = 1$$

an.

Für den größten Wert, den eine Funktion $\Phi(x)$ im Intervalle (a, b) annehmen kann, wollen wir die Bezeichnung

$$\max.\, \Phi(x)$$

einführen.

Das gesuchte Maximum möge der Funktion

$$h(x) = y = f(x)$$

entsprechen, und der absolute Betrag von $y^{(\varkappa)}$ möge dieses Maximum für den im Intervalle (a, b) liegenden Wert

$$x = t$$

erreichen.

*) Da die Zahl, die wir im Kapitel II mit L bezeichneten, eine stetige Funktion von z ist und folglich im Intervalle $(-1, 1)$ einen kleinsten Wert hat, so ist, wenn wir die zu Anfang des § 12 gemachte Bemerkung und § 32 berücksichtigen, die Existenz des gesuchten Maximums offenbar. Übrigens wird sie auch aus der Lösung folgen, die wir hier geben.

Aus dem im § 32 Gesagten folgt, daß y eine am wenigsten von Null in dem Intervalle (a, b) abweichende Funktion von Gestalt (1) sein muß, die dem Falle

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(x)}(t), \qquad \alpha = f^{(x)}(t)$$

entspricht.

Folglich ist entweder

(68) $$y = \pm MS_n(x),$$

oder

(69) $$y = \pm MS_{n-1}(x),$$

oder

(70) $$y = \pm MS_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right),$$

wo c eine gewisse reelle Zahl größer als 1 bedeutet, oder

(71) $$y = \pm MS_n\left(\frac{2x-1-d}{1-d}\right),$$

wo d eine gewisse reelle Zahl kleiner als -1 bedeutet, oder endlich

$$y = Mu,$$

wo

$$u = g(x)$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades bedeutet, deren absoluter Betrag im Intervalle (a, b) seinen größten Wert, der gleich Eins ist, für genau n in diesem Intervalle liegende Werte von x

$$x_1 = a = -1 < x_2 < \cdots < x_n = b = 1$$

erreicht, und wo überdies $g(x)$ so beschaffen ist, daß die Zahlen

$$(-1)^1 g(x_1),\ (-1)^2 g(x_2),\ \cdots,\ (-1)^n g(x_n)$$

sämtlich von einem und demselben Vorzeichen sind.

Diese Funktion u genügt der Differentialgleichung

(72) $$1 - u^2 = \frac{(1-x^2)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2(x-\beta)^2}\,u'^2,$$

wo die von x unabhängigen und reellen Zahlen

$$\beta, \gamma \text{ und } \delta$$

von einem und demselben Vorzeichen sind und den Ungleichungen

$$1 < |\beta| < |\gamma| < |\delta|$$

genügen.

Da für

$$c > 1 \quad \text{und} \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

die Ungleichungen

$$\frac{2}{c+1} < 1, \quad -1 \leqq \frac{2x+1-c}{c+1} = -1 + \frac{2(x+1)}{c+1} < 1$$

statthaben, so gilt für

$$c > 1, \qquad -1 \leqq x \leqq 1$$

die Formel

$$\left|\frac{d^{\varkappa} S_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)}{dx^{\varkappa}}\right| = \left(\frac{\lambda}{c+1}\right)^{\varkappa} \left|S_n^{(\varkappa)}\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)\right|$$
$$< \left|S_n^{(\varkappa)}\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)\right| \leqq \max. \left|S_n^{(\varkappa)}(x)\right|,$$

und folglich ist die Gleichung (70) unmöglich.

Ebenso finden wir, daß auch die Gleichung (71) unmöglich ist.

Ferner ist es leicht einzusehen, daß, *was auch für eine ganze nicht negative Zahl* $\varkappa \leqq n$ *sei, die Gleichung*

$$|S_n^{(\varkappa)}(x)| = \max. |S_n^{(\varkappa)}(x)|$$

für

$$x = -1 \quad \textit{und} \quad x = 1$$

und, falls

$$0 < \varkappa < n$$

ist, nur für diese Werte von x *stattfindet*

Wir haben in der Tat

$$S_1(x) = x, \qquad S_1'(x) = 1,$$
$$S_2(x) = 2x^2 - 1, \qquad S_2'(x) = 2x, \qquad S_2''(x) = 2,$$
$$S_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad S_3'(x) = 12x^2 - 3, \quad S_3''(x) = 24x, \quad S_3'''(x) = 24,$$

und unsere Behauptung findet folglich für

$$n = 1, \; n = 2 \quad \text{und} \quad n = 3$$

statt.

Aus der Gleichung

$$\operatorname{Sin} m\varphi - \operatorname{Sin}(m-2)\varphi = 2 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}(m-1)\varphi$$

folgt aber, wenn wir

$$S_m'(x) = \frac{m \operatorname{Sin}(m \operatorname{arc} \operatorname{Cos} x)}{\operatorname{Sin} \operatorname{arc} \operatorname{Cos} x}$$

berücksichtigen, die Gleichung

$$\frac{S_m'(x)}{m} - \frac{S_{m-2}'(x)}{m-2} = 2 S_{m-1}(x).$$

Differentiieren wir diese Gleichung $\varkappa - 1$ mal, so erhalten wir nach einfachen Umformungen die Gleichung

$$(73) \qquad S_m^{(\varkappa)}(x) = \frac{m}{m-2} S_{m-2}^{(\varkappa)}(x) + 2m S_{m-1}^{(\varkappa-1)}(x).$$

Wir bemerken, daß für

$$m > 3, \qquad 0 < \varkappa < m$$

mindestens eine der Bedingungen

$$0 < \varkappa < m - 2 \quad \text{oder} \quad 0 < \varkappa - 1 < m - 1$$

erfüllt ist.

Außerdem sind die Zahlen

$$S_{m-2}^{(\varkappa)}(-1) \quad \text{und} \quad S_{m-1}^{(\varkappa-1)}(1)$$

von einem und demselben Vorzeichen. Auch sind die Zahlen

$$S_{m-2}^{(\varkappa)}(-1) \quad \text{und} \quad S_{m-1}^{(\varkappa-1)}(-1)$$

von einem und demselben Vorzeichen.

Daher folgt aus Gleichung (73), daß wenn unsere Behauptung für jedes n kleiner als m richtig ist, sie auch für $n = m$ richtig sein wird.

Da aber unsere Behauptung für $n < 4$ wirklich richtig ist, so ist sie damit vollständig bewiesen.

Berücksichtigen wir ferner die Gleichung

$$(x^2-1)\, S_n^{(\varkappa+1)}(x) + (2\varkappa-1)x\, S_n^{(\varkappa)}(x) - \{n^2 = (\varkappa-1)^2\}\, S_n^{(\varkappa-1)}(x),$$

so finden wir leicht, daß

$$S_n^{(\varkappa)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)},$$

$$S_n^{(\varkappa)}(-1) = (-1)^{n-\varkappa}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)}$$

ist.

Folglich ist

$$\max. \left| S_n^{(\varkappa)}(x) \right| = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)}.$$

Der Ausdruck

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)}$$

nimmt mit wachsendem n zu.

Daher ist

$$\max. \left| S_{n-1}^{(\varkappa)}(x) \right| < \max. \left| S_n^{(\varkappa)}(x) \right|,$$

und folglich kann die Gleichung (69) nicht stattfinden.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir folgenden algebraischen Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 3. *Es seien A und B positive Zahlen,*

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_s,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_s$$

reelle Zahlen, die den Ungleichungen

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_s < a_s$$

genügen.

Wir setzen

$$G(x) = \quad A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s),$$
$$H(x) = -B(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_s).$$

Genügt z der Gleichung

$$G^{(\varkappa)}(z) = 0,$$

so ist

$$\frac{H^{(\varkappa)}(z)}{G^{(\varkappa+1)}(z)} < 0.$$

Beweis. Wir setzen

$$\frac{G(x)}{x-a_l} = G_l(x).$$

Nach der Lagrangeschen Formel haben wir

$$H(x) = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{H(a_l)}{G'(a_l)} G_l(x) + C\,G(x),$$

wo C eine konstante Zahl bedeutet, und folglich ist

$$H^{(\varkappa)}(z) = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{H(a_l)}{G'(a_l)} G_l^{(\varkappa)}(z).$$

Das Vorzeichen von $H(a_l)$ ist aber identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{s-l-1},$$

das Vorzeichen von $G'(a_l)$ ist identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{s-l},$$

das Vorzeichen von $G_l^{(\varkappa)}(z)$ ist nach Hilfssatz 2 identisch mit dem Vorzeichen von

$$G^{(\varkappa+1)}(z).$$

Folglich ist

$$\frac{H^{(\varkappa)}(z)}{G^{(\varkappa+1)}(z)} < 0,$$

was zu beweisen war.

Aus dem bewiesenen Hilfssatze folgt, wie wir nebenbei bemerken, daß *die Wurzeln der Gleichungen*

$$G^{(\varkappa)}(x) = 0 \quad \text{und} \quad H^{(\varkappa)}(x) = 0$$

einander trennen.

Wir kehren zu unserer Aufgabe zurück und nehmen

$$y = Mu, \quad \beta > 1$$

an.

In diesem Falle muß nach § 25 die Zahl t in einem der Intervalle

$$(\lambda_1, \nu_1),\ (\lambda_2, \nu_2),\ \cdots,\ (\lambda_{n-\varkappa}, \nu_{n-\varkappa})$$

liegen, und eine der Funktionen

$$u \quad \text{oder} \quad -u$$

muß mit derjenigen Funktion von x zusammenfallen, in die die in § 25 definierte Funktion von x und z

$$W(x)$$

für

$$z = t$$

übergeht.

Wir wenden uns daher zur Betrachtung dieser Funktion $W(x)$, wobei wir alle Bezeichnungen des § 25 beibehalten.

Außerdem wollen wir, was auch für ganze und positive Zahlen l und s sein mögen, die Ableitung von

$$W^{(l)}(x) = \frac{d^l W(x)}{dx^l},$$

nach z (genommen unter der Voraussetzung, daß x nicht von z abhängt) mit

$$\delta W^{(l)}(x),$$

die Ableitung s^{ter} Ordnung nach z von

$$W^{(l)}(z) = \left(\frac{d^l W(x)}{dx^l}\right)_{x=z}$$

(wobei berücksichtigt wird, daß die Koeffizienten der Funktion $W(x)$ von z abhängen) wie gewöhnlich mit

$$\frac{d^s W^{(l)}(z)}{dz^s}$$

bezeichnen.

Erinnern wir uns, daß nach dem im § 25 Bewiesenen

$$\lim_{z=\nu_i} W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x)$$

ist, so können wir auf Grund dessen, falls

$$z = \nu_i$$

ist,

$$W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x)$$

setzen.

Da die Derivierte

$$\frac{dW^{(\varkappa)}(z)}{dz} = \delta W^{(\varkappa)}(z) + W^{(\varkappa+1)}(z) = AF^{(\varkappa)}(z) + W^{(\varkappa+1)}(z) = W^{(\varkappa+1)}(z)$$

eine stetige Funktion von z ist, für jeden im Intervalle (λ_i, ν_i) liegenden Wert von z, so entspricht der größte Wert, den

$$|W^{(\varkappa)}(z)|$$

annimmt, wenn z im Intervalle (λ_i, ν_i) variiert, entweder dem Werte

$$z = \lambda_i,$$

oder dem Werte

$$z = \nu_i,$$

oder einem von λ_i und ν_i verschiedenen Werte von z, für den

$$W^{(\varkappa+1)}(z) = 0$$

ist.

Wir wollen zeigen, daß im letzteren Falle

$$|W^{(\varkappa)}(z)|$$

nicht seinen größten, sondern seinen kleinsten Wert im Intervalle (λ_i, ν_i) erreicht.

Wir nehmen also an, daß z verschieden von λ_i und ν_i ist, und daß

$$W^{(\varkappa+1)}(z) = 0$$

ist.

Da im Falle $\varkappa = n - 1$ die Gleichung

$$W^{(\varkappa+1)}(z) = n!\, g_0 = 0$$

nur für $z = \nu_0 = 0$ statthat, so folgt aus unserer Annahme

$$\varkappa < n - 1.$$

Wir haben

$$\frac{d^2 W^{(\varkappa)}(z)}{dz^2} = \frac{d W^{(\varkappa+1)}}{dz} = \delta W^{(\varkappa+1)}(z) + W^{(\varkappa+2)}(z) = A F^{(\varkappa+1)}(z) + W^{(\varkappa+2)}(z).$$

Hier ist

$$A = -\frac{n q_0 F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2 - 1}{x_l - \beta} F_l^{(\varkappa)}(z)} = -\frac{n q_0 F^{(\varkappa+1)}(z)}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} \frac{x_l^2 - 1}{x_l - \beta} F_l^{(\varkappa)}(z)} = -\frac{n q_0 F^{(\varkappa+2)}(z)}{\varphi^{(\varkappa)}(z)},$$

wobei

$$x_1 = -1, \qquad x_n = 1,$$

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{x - x_1}, \qquad F_n(x) = \frac{F(x)}{x - x_n},$$

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{x_l^2 - 1}{x_l - \beta} F_l(x) = \sum_{l=1}^{l=n} (x_l + \beta) F_l(x) + (\beta^2 - 1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l - \beta}$$

$$= -\sum_{l=1}^{l=n} (x - x_l) F_l(x) + (x + \beta) \sum_{l=1}^{l=n} F_l(x) + (\beta^2 - 1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l - \beta}$$

$$= -nF(x) + (x + \beta) F'(x) + (\beta^2 - 1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l - \beta}$$

gesetzt ist.

Wir setzen ferner

$$\sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l-\beta} = \psi(x),$$

$$(x-\beta)\,\psi(x) = \chi(x).$$

Da

$$\chi(x_l) = (x_l-\beta)\,\psi(x_l) = F_l(x_l) = F'(x_l),$$

$$\chi(\beta) = 0$$

ist, so folgt

$$\chi(x) = (x-\beta)\,\psi(x) = F'(x) - \frac{F'(\beta)}{F(\beta)}\,F(x),$$

$$\chi^{(\varkappa)}(z) = (z-\beta)\,\psi^{(\varkappa)}z + \varkappa\,\psi^{(\varkappa-1)}(z) = F^{(\varkappa+1)}(z) - \frac{F'(\beta)}{F(\beta)}\,F^{(\varkappa)}(z) = F^{(\varkappa+1)}(z),$$

$$\psi^{(\varkappa)}(z) = \frac{F^{(\varkappa+1)}(z) - \varkappa\,\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{z-\beta}$$

und ferner

$$\varphi^{(\varkappa)}(z) = (z+\beta)\,F^{(\varkappa+1)}(z) + (\beta^2-1)\,\frac{F^{(\varkappa+1)}(z) - \varkappa\,\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{z-\beta}$$

$$= \frac{z^2-1}{z-\beta}\,F^{(\varkappa+1)}(x) - \frac{\varkappa(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\psi^{(\varkappa-1)}(z).$$

Wir haben ferner

$$nq_0\,(x-\beta)\,F(z) = (x^2-1)\,W'(x).$$

Differentiieren wir diese Gleichung $\varkappa+1$ mal, setzen wir in die auf diese Weise erhaltene Gleichung

$$x = z$$

ein, und berücksichtigen wir, daß

$$F^{(\varkappa)}(z) = 0, \qquad W^{(\varkappa+1)}(z) = 0$$

ist, so erhalten wir die Gleichung

$$nq_0(z-\beta)\,F^{(\varkappa+1)}(z) = (z^2-1)\,W^{(\varkappa+2)}(z) + (\varkappa+1)\,\varkappa\,W^{(\varkappa)}(z),$$

aus der wir dann

$$nq_0\,F^{(\varkappa+1)}(z) = \frac{z^2-1}{z-\beta}\,W^{(\varkappa+2)}(z) + \frac{(\varkappa+1)\,\varkappa}{z-\beta}\,W^{(\varkappa)}(z)$$

erhalten.

Folglich ist

$$AF^{(\varkappa+1)}(z) = -\frac{nq_0\,F^{(\varkappa+1)}(z)}{\dfrac{\varphi^{(\varkappa)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)}}$$

$$= -\frac{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}\,W^{(\varkappa+2)}(z) + \dfrac{(\varkappa+1)\varkappa}{z-\beta}\,W^{(\varkappa)}(z)}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta} - \dfrac{\varkappa(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\dfrac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)}}$$

und ferner

$$(74)\qquad \frac{d^2 W^{(\varkappa)}(z)}{dz^2} = A F^{(\varkappa+1)}(z) + W^{(\varkappa+2)}(z)$$

$$= -\frac{\dfrac{z^2-1}{z-\beta} W^{(\varkappa+2)}(z) \dfrac{(\varkappa+1)\varkappa}{z-\beta} W^{(\varkappa)}(z)}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta} - \dfrac{\varkappa(\beta^2-1)}{z-\beta} \dfrac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)}} + W^{(\varkappa+2)}(z)$$

$$= \frac{\varkappa W^{(\varkappa)}(z)}{\beta - z} \cdot \frac{\varkappa + 1 + (\beta^2 - 1) \dfrac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)} \dfrac{W^{(\varkappa+2)}(z)}{W^{(\varkappa)}(z)}}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta} - \dfrac{\varkappa(\beta^2-1)}{z-\beta} \dfrac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)}}.$$

Da

$$\beta > 1, \qquad x_l^2 \leqq 1$$

ist, so haben wir auf Grund von Hilfssatz 2

$$\frac{z^2-1}{z-\beta} - \frac{\varkappa(\beta^2-1)}{z-\beta} \frac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)} = \frac{\varphi^{(\varkappa)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)} = \frac{\sum\limits_{l=1}^{l=n} \dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(\varkappa)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)} > 0.$$

Berücksichtigen wir aber, daß die Gleichung

$$W'(x) = 0$$

weder imaginäre, noch gleiche Wurzeln besitzt, und daß

$$W^{(\varkappa+1)}(z) = 0$$

ist, so schließen wir auf Grund von Hilfssatz 2, daß

$$\frac{W^{(\varkappa+2)}(z)}{W^{(\varkappa)}(z)} < 0$$

ist.

Wir bezeichnen mit

$$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$$

die nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$F'(x) = 0,$$

mit

$$b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}$$

die ebenfalls nach wachsendem Werte geordneten Wurzeln der Gleichung

$$\psi(x) = 0.$$

Aus der Gleichung

$$(x-\beta)\psi(x) = F'(x) - \frac{F'(\beta)}{F(\beta)} F(x)$$

schließen wir, daß der Koeffizient von x^{n-1} in der Funktion $\psi(x)$ negativ ist, das Vorzeichen von $\psi(x)$ für (zahlenmäßig) genügend große (negative) Werte von $-x$ identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^n,$$

das Vorzeichen von

$$\psi(a_e) = \frac{F'(\beta)}{F(\beta)} \frac{F(a_e)}{\beta - a_e}$$

identisch mit dem Vorzeichen von

$$(-1)^{n-l}.$$

Folglich ist

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \cdots < b_{n-1} < a_{n-1},$$

und da

$$\left(\frac{d^{\varkappa-1} F'(x)}{dx^{\varkappa-1}}\right)_{x=z} = F^{(\varkappa)}(z) = 0$$

ist, so folgt auf Grund von Hilfssatz 3

$$\frac{\psi^{(\varkappa-1)}(z)}{F^{(\varkappa+1)}(z)} < 0.$$

Berücksichtigen wir alle hier gemachten Bemerkungen, so schließen wir aus der Formel (74), daß

$$\frac{d^2 W^{(\varkappa)}(z)}{dz^2}$$

von demselben Vorzeichen ist wie $W^{(\varkappa)}(z)$, und daß daher im vorliegenden Falle $|W^{(\varkappa)}(z)|$ nicht seinen größten, sondern einen kleinsten Wert im Intervalle (λ_i, ν_i) erreicht.

Folglich entspricht der größte Wert, den $|W^{(\varkappa)}(z)|$ erreicht, wenn z im Intervalle (λ_i, ν_i) variiert, einem der Werte

$$z = \lambda_i \quad \text{oder} \quad z = \nu_i.$$

Für $z = \lambda_i$ ist aber

$$|W^{(\varkappa)}(z)| = \operatorname{Cos}^{2\varkappa} \frac{\pi}{2n} \cdot \left| S_n^{(\varkappa)}\left(\lambda_i \operatorname{Cos}^2 \frac{\pi}{2n} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{2n}\right)\right|$$

$$= \operatorname{Cos}^{2\varkappa} \frac{\pi}{2n} \cdot |S_n^{(\varkappa)}(\xi_i)| < \max. |S_n^{(\varkappa)}(x)|,$$

für $z = \nu_i$

$$|W^{(\varkappa)}(z)| = |S_{n-1}^{(\varkappa)}(\nu_i)| < \max. |S_n^{(\varkappa)}(x)|.$$

Folglich ist die Annahme

$$y = Mu, \quad \beta > 1$$

unmöglich.

Ebenso finden wir, daß auch die Annahme

$$y = Mu, \quad \beta < 1$$

unmöglich ist.

Ist also

$$a = -1, \quad b = 1, \quad \varkappa \leqq n - 1,$$

so ist das gesuchte Maximum gleich

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\} M}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)}$$

$$y = \pm M S_n(x), \qquad t = \pm 1.$$

Was den Fall

$$a = -1, \quad b = 1, \quad \varkappa = n$$

betrifft, so folgt aus dem Satze des § 33, daß in diesem Falle das gesuchte Maximum gleich

$$2^{n-1} n! = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\} M}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)},$$

$$y = \pm M S_n(x),$$

und t irgendeine im Intervalle (a, b) liegende Zahl ist.

Gehen wir dann (nach dem § 12) vom Falle

$$a = -1, \quad b = 1$$

zum Falle beliebiger a und b über, so erhalten wir folgenden Satz als Antwort auf die in diesem Paragraphen gestellte Frage.

Satz. *Übersteigt die Abweichung von Null in dem Intervalle (a, b) einer ganzen Funktion von nicht höherem als n^{tem} Grade $h(x)$ nicht die gegebene positive Zahl M, so übersteigt, was auch für eine ganze und positive Zahl $\varkappa \leqq n$ sei, die Abweichung von Null ihrer $\varkappa^{\text{ten}}$ Ableitung $h^{(\varkappa)}(x)$ in demselben Intervalle nicht die Zahl*

$$\frac{2^\varkappa n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots\{n^2-(\varkappa-1)^2\} M}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\varkappa-1)(b-a)^\varkappa},$$

und dieser Grenzwert wird für jede der Funktionen

$$h(x) = M S_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \quad \text{und} \quad h = -M S_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

und nur für diese Funktionen erreicht.

Wir bemerken, daß dieser Satz für den Fall $\varkappa = 1$ von A. A. Markoff im Aufsatze „Über ein Problem von D. J. Mendelejeff“ bewiesen ist.*)

---

*) Wir lassen den § 35 und den Anhang zum § 34 weg; der letzte enthält einen anderen Beweis des Fundamentalsatzes des § 34 für die Fälle $\varkappa = 1$, $\varkappa = 2$, $\varkappa = n - 2$, $\varkappa = n - 1$. S. B.