Osnove teorije grafova

Uvod

Teorija grafova jedna je od grana matematike koja nalazi veliku primjenu u prometu.

Grafom možemo opisivati modele određenoga realnog sustava, kao što su gradovi povezani cestama, rafinerije i potrošači spojeni naftovodima, plinovodi, električni sklopovi i sl.

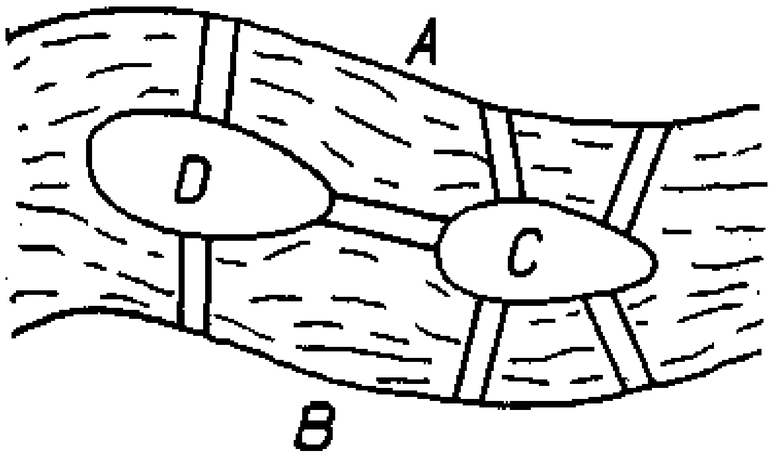
Grafom se mogu opisivati i apstraktni objekti, kao što su: baze podataka, tok računalnog programa, prikaz aktivnosti u projektu, socijalni odnosi, hijerarhija u radnoj organizaciji i dr.

Jedan od najstarijih problema vezanih uz teoriju grafova upravo je iz područja prometa, poznat pod nazivom:

Zadatak o kenigsberškim mostovima

Zadatak o kenigsberškim mostovima

Rijeka Pregel teče kroz grad Kenigsberg (danas Kalinjingrad)[1]. Po sredini rijeke nalaze se dva otoka. Sedam mostova povezuje otoke s obalama i međusobno, kako je prikazano na slici 1.

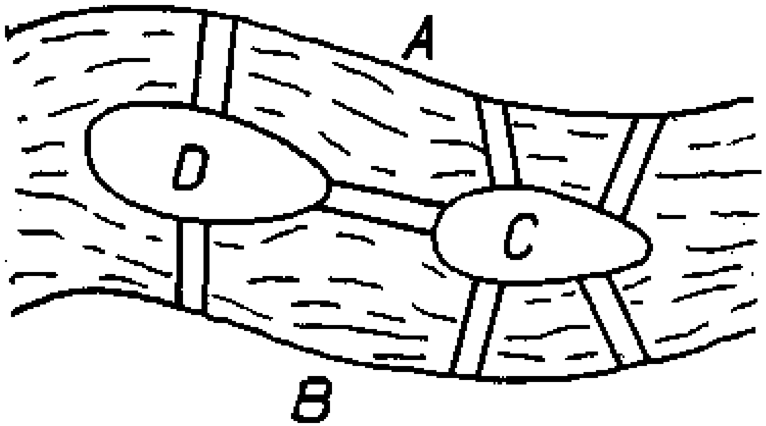


Slika 1

Zadatak se sastoji u tome da se nađe put između obala i otoka tako da se preko svakoga mosta prođe samo jednom.

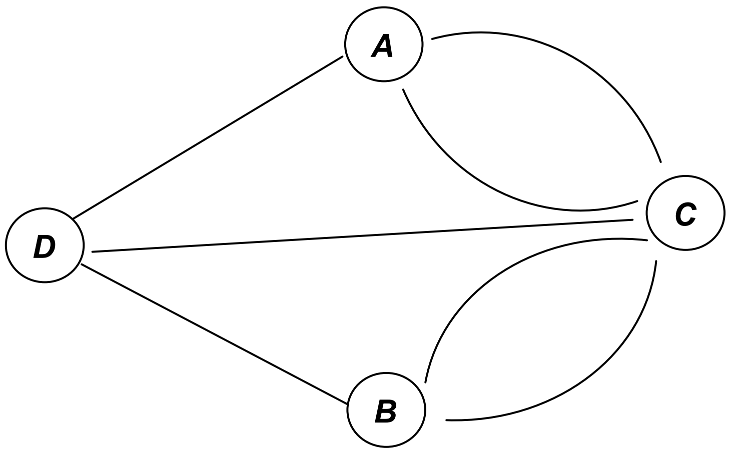
[1] Lučki grad i glavni grad Kalinjingradske oblasti - ruske enklave između Poljske i Litve s pristupom Baltičkome moru

Slika 1



Sistem mostova može biti prikazan pomoću grafa na slijedeći način: Obale označene s *A* i *B* i otoci, označeni s *C* i *D* su *vrhovi* grafa. Mogući putevi između obala i otoka prikazani su linijama, koje spajaju parove vrhova. To su *bridovi grafa* (slika 2).

Slika 2



Taj zadatak rješavao je Euler [2] 1736. godine i dokazao da traženi put ne postoji.

[2] Leonhard Euler (1707. – 1783.), švicarski matematičar

Definicija grafa

- **Definicija 1:** ***Graf*** $G = (V, R)$ je skup V s relacijom $R \subseteq V \times V$.

- Elementi skupa V označuju se s v_i i nazivaju ***vrhovi*** ili ***čvorovi*** grafa.
- Elementi relacije R, tj. uređeni parovi $(v_i, v_j) \in R$ nazivaju se ***bridovi***, ***grane*** ili ***lukovi*** grafa.

Prikaz grafova:

Vrhovi grafa prikazuju se kao točke ili kružići, a bridovi kao linije koje spajaju odgovarajuće vrhove. Linije su orijentirane ili neorijentirane, ovisno o vrsti grafa.

Možemo reći i:

GRAF je familija točaka (ili kružića) koji se nazivaju vrhovi ili čvorovi, zajedno sa spojnicama među njima, koje se nazivaju bridovi, grane ili lukovi.

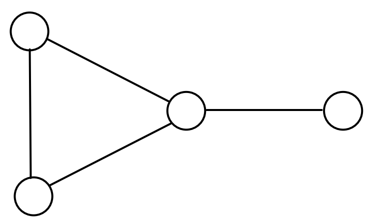
- **Definicija 2:** Graf $G = (V, R)$ je ***neorijentirani*** ili ***neusmjereni graf***, ako je relacija R simetrična, tj. ako vrijedi:

$$(v_i, v_j) \in R \Rightarrow (v_j, v_i) \in R$$

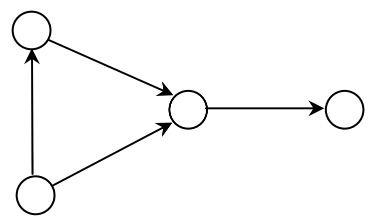
Graf $G = (V, R)$ je ***orijentirani*** ili ***usmjereni graf*** ako je relacija R antisimetrična, tj. ako vrijedi:

$$(v_i, v_j) \in R \Rightarrow (v_j, v_i) \notin R$$

Primjeri grafova



Neorijentirani graf



Orijentirani graf

- Kod neorijentiranoga grafa, iz činjenice da postoji veza između vrhova v_i i v_j (spojeni bridom) slijedi da postoji veza i između vrhova v_j i v_i.

  Kod tih se grafova bridovi obično crtaju kao linije bez strelica koje spajaju dva vrha, pri čemu se podrazumijeva da postoji veza u oba smjera.

- Kod orijentiranih grafova, iz činjenice da postoji veza između vrhova v_i i v_j slijedi da veza između vrhova v_j i v_i ne postoji, osim eventualno ako su v_i i v_j isti vrh. (Tada se radi o bridu koji povezuje vrh sa samim sobom, tj. o petlji.)

  Kod orijentiranih grafova bridovi se obično crtaju kao linije sa strelicom koja je usmjerena u smjeru u kojem je uspostavljena veza između dva vrha.

- Za grafove koji nisu ni orijentirani ni neorijentirani kažemo da su ***mješoviti***.

Kod mješovitoga grafa, između dva vrha mogu postojati kako jednosmjerne, tako i dvosmjerne veze.

Jednosmjerne se veze uvijek crtaju strelicom, dok se dvosmjerne veze mogu crtati na različite načine:

- samo linijom bez strelica,
- linijom sa strelicama s obje strane, ili
- dvjema linijama sa suprotno orijentiranim strelicama.

Pomoću grafova možemo modelirati složene probleme, kao, primjerice, predstaviti prometnice u državi, te električne i računalne mreže.

Navedimo nekoliko primjera grafova u prometnoj struci:

- Skup naselja u Hrvatskoj (vrhovi grafa) i skup parova naselja koja su izravno povezana željezničkom prugom (bridovi grafa).
- Sve ceste u nekoj županiji. Vrhovi su mjesta ili raskrižja, a bridovi su ceste koje ih spajaju. Ako su sve ceste dvosmjerne, radi se o neorijentiranome grafu.
- Skup svih jednosmjernih ulica u Rijeci primjer je orijentiranoga grafa.
- Skup svih cesta u Rijeci primjer je grafa koji nije ni orijentiran ni neorijentiran.
- Sustav za prijenos informacija je graf, kod kojega su vrhovi punktovi iz kojih se prenose ili primaju informacije, a bridovi su linije prijenosa.

- Proces izvršavanja određenoga programa može se podijeliti na stanja. Iz pojedinoga stanja može se nastaviti na razne načine. Neka stanja mogu biti nepoželjna.

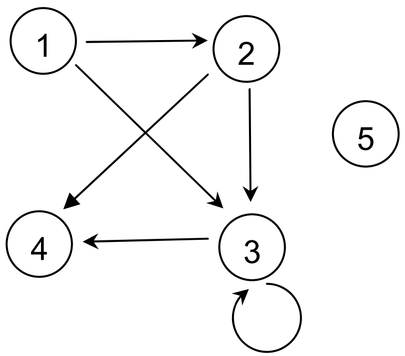
  Problem utvrđivanja onih aktivnosti koje mogu dovesti u nepoželjna stanja je problem teorije grafova. U njemu stanja predstavljaju vrhove, a mogući prijelazi iz jednoga stanja u drugo su bridovi grafa.

Primjeri prikaza grafova

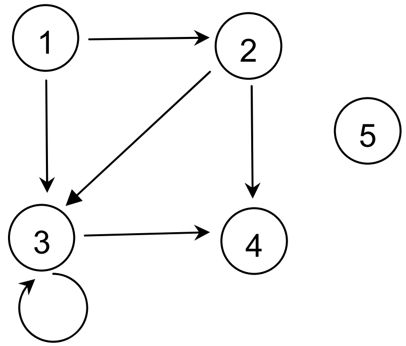
1. Prikažimo graf $G = (V, R)$, ako je:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

Rješenje:



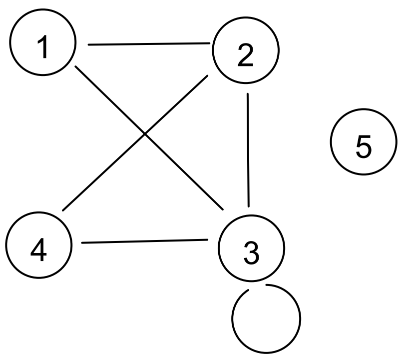
ili



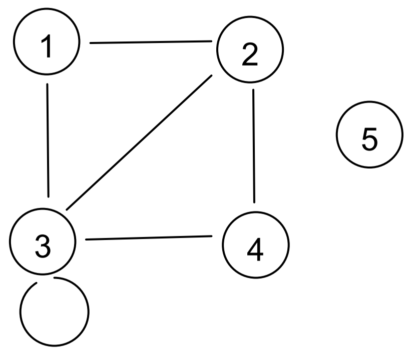
2. Prikažimo graf $G = (V, R)$, ako je:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (2,1), (3,1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}$.

Rješenje:



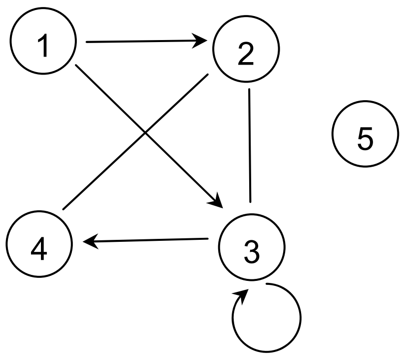
ili



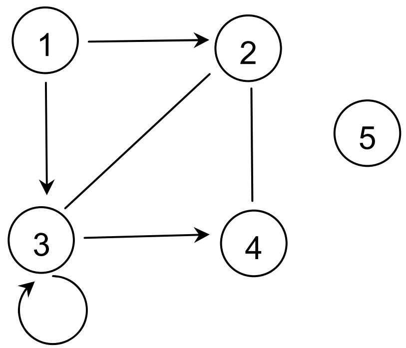
3. Prikažimo graf $G = (V, R)$, ako je:

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$.

Rješenje:



ili



Primjedbe:

- U prvome primjeru radi se o orijentiranome, u drugome o neorijentiranome, a u trećemu o mješovitome grafu.

- Ne postoji jedinstveni način crtanja grafa. Relativni odnos kružića ili točaka koje predstavljaju vrhove i linija koje predstavljaju bridove grafa nema važnosti. Tako su u svakome od ovih primjera navedene po dvije različite slike koje predstavljaju isti graf.

- Kod neorijentiranoga i mješovitoga grafa, dvostruko orijentirani bridovi, zapravo neorijentirani, ovdje su nacrtani linijama bez strelica. Umjesto toga, mogli smo nacrtati linije sa strelicama na obje strane ili s dvije linije sa suprotno orijentiranim strelicama.

Planarni graf

•***Planarni*** ili ***ravni*** graf je onaj graf koji se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi ne sijeku.

To znači da zajednička točka dvaju bridova može biti samo vrh grafa koji predstavlja zajedničku krajnju točku tih bridova.

Primjer:

Graf mreža cesta je planaran graf, ako se isključi mogućnost postojanja nadvožnjaka i prometnih petlji.

Podgraf i parcijalni graf

- ***Podgraf*** nekoga grafa dobiva se ako se izdvoje neki vrhovi i oni bridovi grafa koji ih povezuju.

- **Definicija 3:** Podgraf grafa $G = (V, R)$ je graf G_1 oblika

$$G_1 = (W, R \cap (W \times W))$$

gdje je $W \subseteq V$.

Parcijalni graf nekoga grafa je takav graf koji ima iste vrhove i neke od bridova zadanoga grafa.

Definicija 4: Parcijalni graf grafa $G = (V, R)$ je graf G_2 oblika

$$G_2 = (V, Q),$$

gdje je $Q \subseteq R$.

Parcijalni podgraf

- ***Parcijalni podgraf*** nekoga grafa $G = (V, R)$ dobiva se ako se u grafu izdvoje neki vrhovi i neki bridovi.

- **Definicija 5:** Parcijalni podgraf nekoga grafa $G = (V, R)$ je graf G_3 oblika:

$$G_3 = (W,\ Q \cap (W \times W))$$

gdje je $W \subseteq V$ i $Q \subseteq R$.

Primjer:

Neka graf (V, R) predstavlja kartu cesta u Hrvatskoj, pri čemu je V skup svih naselja u Hrvatskoj, a $(v_i, v_j) \in R$ cesta koja vodi od naselja v_i u naselje v_j.
- Karta svih cesta u PGŽ je podgraf promatranoga grafa.
- Karta svih cesta prvoga reda u Hrvatskoj je parcijalni graf.
- Karta svih cesta prvoga reda u PGŽ je parcijalni podgraf.

Ulazni i izlazni vrhovi

Za svaki brid (v_i, v_j) kaže se da izlazi iz vrha v_i i da ulazi u vrh v_j.

Kaže se i da je v_i početni, a v_j završni vrh brida (v_i, v_j).

Ulaz (Izvor) grafa je vrh u kojega ulaze bridovi izvana.

Izlaz (ponor) grafa je vrh iz kojega izlaze bridovi iz grafa.

Susjedni vrhovi i bridovi

- ***Susjedni vrhovi*** su oni vrhovi koji su povezani bridom.

- ***Susjedni bridovi*** oni bridovi koji imaju zajednički vrh.

- **Definicija 6:** Za vrhove u i v kažemo da su susjedni, ako postoji brid (u, v) u tome grafu koji ih spaja. Za bridove e i f kažemo da su susjedni, ako postoji vrh u tome grafu koji im je zajednički.

Ulazni i izlazni stupanj skupa vrhova

Definicija 7: Ako je graf $G = (V, R)$ i $W \subseteq V$ tada je

skup bridova koji izlazi iz W:

$$R^+(W) = \{(v_i, v_j) : v_i \in W,\ v_j \in V \setminus W\}$$

a skup bridova koji ulaze u W:

$$R^-(W) = \{(v_i, v_j) : v_i \in V \setminus W,\ v_j \in W\}$$

Izlazni stupanj od W je broj bridova koji izlaze iz W, tj. $is(W) = k(R^+(W))$.

Ulazni stupanj od W je broj bridova koji ulaze u W, tj. $us(W) = k(R^-(W))$.

Stupanj od W je $s(W) = us(W) + is(W)$.

Put i elementarni put u grafu

- **Definicija 8:** ***Put*** od vrha v_1 do vrha v_n je niz vrhova: v_1, v_2, …, v_n, gdje su $(v_i, v_{i+1}) \in R$ za $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Dakle, put je niz bridova (v_1, v_2), (v_2, v_3), …, (v_{n-1}, v_n). Označujemo ga i s $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$.

Elementarni put je put koji najviše jednom prolazi kroz svaki vrh.

- **Definicija 9:** Put grafa $G = (V, R)$ je elementaran put, ako su vrhovi u nizu koji opisuju put različiti.

Povezanost u grafu

- **Definicija 10:** *Graf $G = (V, R)$ je* ***strogo povezan*** *ako za svaka dva vrha $v_i, v_j \in V$ postoji put od v_i do v_j.*

Dakle, u strogo povezanome grafu može se naći put između bilo koja dva vrha.

- **Definicija 11:** Graf $G = (V, R)$ je ***povezan*** ako za svaka dva vrha $v_i, v_j \in V$ postoji ili put od v_i do v_j ili obratno.

Razni putevi u grafu

- **Definicija 12:** ***Kružni put*** grafa $G = (V, R)$ je put koji počinje i završava u istome vrhu.
- **Definicija 13:** ***Elementeran kružni put*** je kružni put kod kojega su vrhovi u nizu takvi da su jedino prvi i posljednji jednaki.
- **Definicija 14:** ***Petlja*** je kružni put koji ima samo jedan brid (luk).
- **Definicija 15:** ***Hamiltonov (kružni) put*** je elementarni (kružni) puti koji obilazi sve vrhove grafa.
- **Definicija 16:** ***Duljina puta*** jest broj vrhova u nizu umanjen za 1, odnosno broj bridova u nizu koji određuju put.

•**Definicija 17**: ***Lanac*** u grafu bez petlje je niz bridova koji se nadovezuju jedan na drugi, bez obzira na njihovu orijentaciju.

•**Definicija 18**: ***Ciklus*** duljine k je lanac $l_1, l_2, \ldots, l_k$ koji završava u istome vrhu kojim počinje.

U neorijentiranome grafu ne razlikuju se pojmovi put i lanac, te kružni put i ciklus.

•**Definicija 19**: ***Stablo*** ili ***drvo*** je graf koji nema ciklusa i u kojem samo jedan vrh ima ulazni stupanj 0, a ostali imaju ulazni stupanj 1.

To je povezan aciklički graf.

Često se tako definirani pojam stabla naziva orijentirano stablo, za razliku od neorijentiranoga stabla, koje je neorijentiran graf, povezan i bez ciklusa.

U orijentiranome stablu se vrh koji ima ulazni stupanj nula zove ***korijen stabla***, a vrhovi drva koji imaju izlazni stupanj nula zovu se ***krajevi stabla***.

Matrice u teoriji grafova

Matrični račun predstavlja pogodan aparat za obrađivanje različitih problema s grafovima, posebno za pohranjivanje grafova na računalima.

Postoji više načina matričnoga prikaza grafova.

1. ***Matrica incidencije vrhova grafa*** $G = (V, R)$ je matrica

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ s elementima:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & za \quad (i, j) \notin R \\ 1 & za \quad (i, j) \in R \end{cases}$$

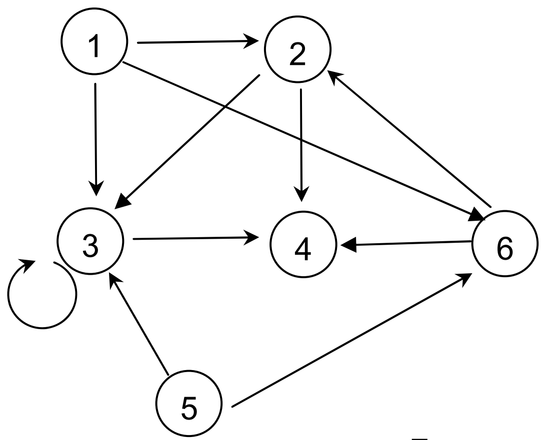
S *n* je označen broj vrhova grafa.

Primjer:

Neka je graf $G = (V, R)$ zadan s $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i
$R = \{(1,2), (1, 3), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (5, 3), (5, 6), (6, 2), (6, 4)\}$.

Prikažimo graf i napišimo matricu incidencije vrhova grafa.

Rješenje:



Matrica incidencije vrhova je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je graf neorijentiran, matrica incidencije vrhova je simetrična, tj. vrijedi:

$$a_{ij} = a_{ji},$$

odnosno:

$$A^T = A,$$

gdje je s A^T označena transponirana matrica matrice A.

Trag matrice zbroj elemenata na glavnoj dijagonali:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ako je trag matrice jednak nuli, graf nema petlje.

2. Matrica incidencije vrhova i bridova neorijentiranoga grafa

$G = (V, R)$ je:

$$M = [m_{ij}]_{n \times m}$$

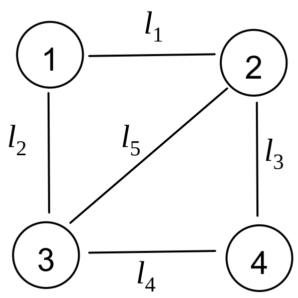
pri čemu je:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & ako \ \ je \ vrh \ v_i \ \ susjedan \ bridu \ l_j \\ 0 & ako \ vrh \ v_i \ \ nije \ susjedan \ bridu \ l_j \end{cases}$$

S *n* je označen broj vrhova, a s *m* broj bridova grafa.

Primjer:

Napišimo matricu incidencije vrhova i bridova grafa:



Rješenje:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

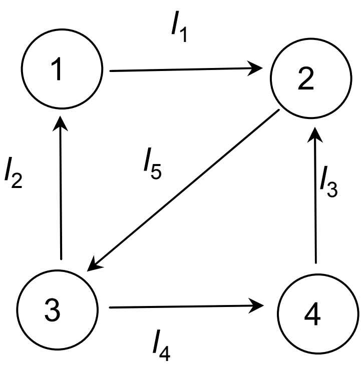
3. *Matrica incidencije vrhova i bridova orijentiranoga grafa*

$S = [s_{ij}]_{n \times m}$ je matrica s elementima -1, 0, 1,

definirana na sljedeći način:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & ako\ brid\ l_j\ izlazi\ iz\ vrha\ v_i \\ 0 & ako\ v_i\ i\ l_j\ nisu\ susjedni\ elementi \\ -1 & ako\ brid\ l_j\ ulazi\ u\ vrh\ v_i \end{cases}$$

Primjer: Napišimo matrice incidencije vrhova i bridova grafa:



Rješenje:

$$S=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$