Bevis for monotoniforhold – i ’gør det selv’-format

Sætning 1 (s. 107)

Hvis funktionen f er differentiabel i et interval gælder:

A. Hvis f er **voksende** i et interval, så er differentialkvotienten $f'(x_0)$ større end eller lig nul i intervallet.
   Altså: f voksende i et interval $\Longrightarrow f'(x_0) \geq 0$
B. Hvis f er **aftagende** i et interval, så er differentialkvotienten $f'(x_0)$ mindre end eller lig nul i intervallet.
   Altså: f aftagende i et interval $\Longrightarrow f'(x_0) \leq 0$

Bemærk at vi her KUN ser på denne del – vi nøjes med ”at gå til højre” i pilens retning.

Bevis for sætning 1A

1. f voksende: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \qquad f(x_2)$
   Indsæt det korrekte ulighedstegn mellem $f(x_1)$ og $f(x_2)$.
2. Opskriv trin 2 i tretrinsreglen (dvs. differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$) ved at anvende x_1, x_2, $f(x_1)$ og $f(x_2)$ i stedet for x, x_0, $f(x)$ og $f(x_0)$.
3. Vurder hvilket fortegn tæller og nævner vil have. Husk at argumentere. Skriv jeres argumenter ned.
4. Vurder hvilket fortegn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vil få når man bestemmer grænseværdien (dvs. trin 3). Hvorfor bliver konklusionen at $f'(x_0)$ IKKE kan blive NEGATIV?
5. Skriv ned hvad I nu har bevist.

Bevis for sætning 1B

1. f aftagende: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \qquad f(x_2)$
   Indsæt det korrekte ulighedstegn mellem $f(x_1)$ og $f(x_2)$.
2. Opskriv trin 2 i tretrinsreglen (dvs. differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) ved at anvende x_1, x_2 , $f(x_1)$ og $f(x_2)$ i stedet for x, x_0, $f(x)$ og $f(x_0)$.
3. Vurder hvilket fortegn tæller og nævner vil have. Husk argumentation, og skriv ned.
4. Vurder hvilket fortegn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vil få når man bestemmer grænseværdien (dvs. trin 3). Hvorfor bliver konklusionen at $f'(x_0)$ IKKE kan blive POSITIV?
5. Skriv ned hvad I nu har bevist.

Sætning 2 (s. 108)

Hvis en differentiabel funktion f har **lokalt maksimum** eller **lokalt minimum** i x_0 vil gælde at $f'(x_0) = 0$.

Bevis for sætning 2

1. Hvis **lokalt maksimum**:

   Tegn en skitse, og betragt fortegn for differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ på hver side af x_0 på følgende måde:

   - **Til venstre for x_0:**
     Hvilket fortegn har Δx?
     Hvorfor er $f(x_0)$ større end $f(x)$? Hvilket fortegn har Δy da?
     Hvilket fortegn har $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hermed?
     Hvad kan I herudfra slutte om fortegnet for $f'(x_0)$?
   - **Til højre for x_0:**
     Hvilket fortegn har Δx?
     Hvorfor er $f(x_0)$ større end $f(x)$? Hvilket fortegn har Δy da?
     Hvilket fortegn har $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hermed?
     Hvad kan I herudfra slutte om fortegnet for $f'(x_0)$?
   - Argumenter for hvorfor der så gælder at $f'(x_0) = 0$ i lokalt maksimum. Skriv jeres argumentation ned med ord.

2. Hvis **lokalt minimum**:

   Tegn en ny skitse, og betragt fortegn for differenskvotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ på hver side af x_0 på følgende måde:

   - Til venstre for x_0:
     Hvilket fortegn har Δx?
     Hvorfor er $f(x_0)$ mindre end $f(x)$? Hvilket fortegn har Δy da?
     Hvilket fortegn har $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hermed?
     Hvad kan I herudfra slutte om fortegnet for $f'(x_0)$?
   - Til højre for x_0:
     Hvilket fortegn har Δx?
     Hvorfor er $f(x_0)$ mindre end $f(x)$? Hvilket fortegn har Δy da?
     Hvilket fortegn har $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hermed?
     Hvad kan I herudfra slutte om fortegnet for $f'(x_0)$?
   - Argumenter for hvorfor der så gælder at $f'(x_0) = 0$ i lokalt minimum. Skriv jeres argumentation ned med ord.

Sætning 3 s. 108 nederst

A. f er differentiabel og $f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ voksende
B. f er differentiabel og $f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ aftagende

Denne sætning beviser vi ikke – den anvender vi blot rigtig meget ☺