René Descartes

Zdravko Kurnik, Zagreb

Ove godine navršilo se 350 godina od smrti velikana francuske znanosti *Renéa Descartesa*, jednog od najvećih umova čovječanstva. Descartesovo znanstveno djelo obuhvaća niz znanosti kao što su: filozofija, matematika, fizika, psihologija, fiziologija, medicina, meteorologija i dr. U filozofiji on je osnivač racionalizma i smatraju ga ocem moderne filozofije. Od njegove filozofije spominjemo samo osnovnu činjenicu, važnu i za njegova znanstvena istraživanja: postavljanje načela sumnje u pouzdanost osjetilne spoznaje i svijesti o sebi kao polazišta za svaku filozofiju. Jedino je matematičke postavke držao pouzdanim. Širokom krugu ljudi poznat je po osnovnom načelu svoje filozofije:

Cogito, ergo sum —
mislim, dakle postojim.

* * *

René Descartes rodio se 3l. ožujka 1596. godine u La Hayeu blizu Toursa u staroj plemićkoj obitelji. Kada mu je bilo osam godina otac ga upisuje u isusovački koledž u La Flècheu, gdje postaje dobar klasičar. Školu napušta 1612. godine. Sljedećih pet godina karakteriziraju lutanja i pomalo slobodan život, a onda samoća i početak istraživanja. Vrijeme od 1617. do 1628. godine je period njegovoga vojničkog života. Sudjelovao je u Tridesetgodišnjem ratu. Slijede putovanja po Nizozemskoj, Njemačkoj, Švicarskoj i Italiji. U Nizozemskoj je od 1629. godine proživio punih 20 godina, baveći se samo filozofijom i znanošću. Od jeseni 1649. pa do svoje smrti od upale pluća 11. veljače 1650. godine boravi u Stockholmu na poziv švedske kraljice Kristine. Nakon 17 godina njegove kosti vraćene su u Francusku i pokopane u Parizu na mjestu gdje je danas veličanstveni mauzolej francuskih velikana Panthéon.

Djela: *O svijetu* (1634.), *Rasprava o metodi pravilnog upravljanja umom i traženje istine u znanostima. Dioptrika. Meteori. Geometrija* (1637.), *Metafizičke meditacije* (1641.), *Načela filozofije* (1644., 1647.), *Strasti duše* (1649.) i dr.

* * *

Descartes je dao važne doprinose mnogim znanostima. Od njegovih doprinosa matematici navest ćemo one najvažnije i vrlo bliske školskoj matematici.

1. Descartes je uveo u matematiku pojam *promjenljive veličine*. To je ubrzalo razvoj nekih grana matematike i pojavu novih. Uvođenjem promjenljive veličine počinje u povijesti matematike novi period — *period matematike promjenljivih veličina*.

2. Besmrtnu slavu Descartes je stekao otkrićem *analitičke geometrije*. Zanimljiva je mala povijest ovog otkrića. U vojničkom periodu njegova života, u noći 10. studenoga 1619. godine u zimskom stanu vojske u

Neuburgu na Dunavu Descartes je usnio tri čudesna sna i on tvrdi da mu se tada otkrio čarobni ključ koji otvara riznicu prirode i daje mu temelj svih znanosti. On nije nigdje točno objasnio što je taj ključ, ali se vjeruje da je to primjena algebre u geometriji — analitička geometrija i, znatno općenitije, objašnjenje prirodnih pojava pomoću matematike. Zbog ratnih i drugih okolnosti otkriće će ostati nepoznato 18 godina.

Analitička metoda objelodanjena je konačno 8. lipnja 1637. godine u dijelu "Geometrija" njegove ranije navedene "Rasprave o metodi". Novom metodom on se služi pri rješavanju jedne neodređene zadaće. Kao rezultat dobiva krivulju s jednadžbom

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

Krivulja je hiperbola, a jednadžba *prva* jednadžba čunjosječnice objelodanjena u analitičkom obliku (za izvod v. [3], [4]).

Veličinu Descartesovog otkrića ne umanjuje ni sljedeća "nezgodna" činjenica: on još nema koordinatni sustav u današnjem smislu i nazive njegovih dijelova (ima ishodište, ima samo jednu os - os apscisa, dok drugu os uspostavlja prema nužnosti, koordinatni sustav je kosokutni), a vladanje krivulje proučava samo u I. kvadrantu. Danas se koordinatni sustav po njegovu latiniziranom imenu Cartesius naziva *Kartezijev koordinatni sustav*.

3. Poliedar je geometrijsko tijelo omeđeno mnogokutima. Svaki poliedar ima određeni broj vrhova (V), bridova (B) i strana (S). Brojeve V, B i S za konveksne poliedre povezuje jednostavne relacija

$$V - B + S = 2.$$

Gornju formulu otkrio je švicarski matematičar Euler 1752. godine, tražeći prostorni analogon izraza $(n-2)\pi$ za zbroj kutova n-terokuta. Po njemu ona se danas naziva *Eulerova formula za poliedre*. No, formulu je poznavao već Descartes 1620. godine, što je otkriveno u njegovim neobjavljenim rukopisima, a koji su objelodanjeni između 1897. i 1910. godine u Parizu. Zato se ona ponekad u matematičkim knjigama može naći i pod nazivom *Descartes-Eulerova formula za poliedre*. Važnost te formule leži i u povijesnoj činjenici da je ona bila u izvjesnom smislu prvi veliki teorem nove matematičke discipline — *topologije*.

4. On razvija pojam *potencije* i prvi puta oko 1628. godine uvodi današnje označavanje eksponenta gore desno od baze. Tako za potencije baze a ima oznake a^2 (piše i aa), a^3, a^4, a^5 itd.

5. Dao je potpuno objašnjenje *negativnih brojeva* i zasnovao operacije s njima.

6. On je imao predodžbu o realnom broju koja je bliska današnjoj. Doduše, u "Geometriji" još uvijek promatra omjere geometrijskih veličina, a ne i same realne brojeve koji se iza njih kriju. Međutim, on te omjere uvodi sasvim općenito, jedinstveno i sustavno, označava ih općim slovima kao brojeve u algebri i definira operacije s njima kao s brojevima. Od njega potječe i naziv *realan* u današnjem smislu.

7. U trećem dijelu svoje "Geometrije" on se bavi algebarskim problemima. Posebno ga zanimaju metode algebarskog i grafičkog rješavanja algebarskih jednadžbi. Već 1628. godine jasno razlikuje pozitivna i negativna, a govori i o imaginarnim rješenjima. I naziv *imaginaran* potječe upravo od njega.

Proučavajući problem dijeljenja polinoma $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ sa $x - \alpha$, gdje je α rješenje jednadžbe $P_n(x) = 0$, izriče tvrdnju da je broj rješenja te jednadžbe jednak eksponentu najviše potencije nepoznanice x. Dakle, Descartes poznaje *osnovni teorem algebre*, koji će prvi strogo dokazati tek mladi Gauss 1797. godine.

8. Među najvažnija njegova otkrića u algebri ubraja se ovo *Descartesovo pravilo za polinome*:

Broj pozitivnih nultočaka polinoma $P_n(x)$ s realnim koeficijentima ne može biti veći od broja promjena predznaka u nizu njegovih koeficijenata a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n. Pri tome se broj nultočaka razlikuje od broja promjena predznaka za parni broj. Za određivanje broja negativnih nultočaka polinoma $P_n(x)$ dovoljno je primijeniti pravilo na polinom $P_n(-x)$.

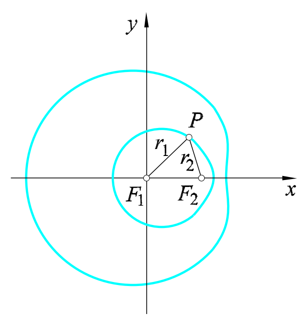
Ovo je pravilo vrlo korisno, jer ukazuje na smjer u kojem treba tražiti nultočke ili upozorava na nepotrebna provjeravanja. Primjeri: U nizu koeficijenata 36, -12, 31, -11, -5, 1 polinoma $P(x) = x^5 - 5x^4 - 11x^3 + 31x^2 - 12x + 36$ nalazimo 4 promjene predznaka, a u nizu koeficijenata 36, 12, 31, 11, -5, -1 polinoma $P(-x)$ 1 promjenu predznaka. Prema pravilu polinom ima 1 negativnu realnu nultočku i 0, 2 ili 4 pozitivne realne nultočke. Budući da polinom ima cjelobrojne koeficijente, te nultočke možemo najprije tražiti u skupu **Q**. Prema osnovnom teoremu o racionalnim nultočkama polinoma s cjelobrojnim koeficijentima nultočke su faktori slobodnog člana 36. Ovaj smjer nije teško ispitati. Kao rezultat ispitivanja dobivamo da su -3, 2 i 6 nultočke našeg polinoma, pa lako nalazimo rastav polinoma na faktore: $P(x) = (x+3)(x-2)(x-6)(x^2+1)$.

U nizu koeficijenata 1000, -350, 365, -90, 38, -4, 1 polinoma $P(x) = x^6 - 4x^5 + 38x^4 - 90x^3 + 365x^2 - 350x + 1000$ nalazimo 6 promjena predznaka, a u nizu koeficijenata 1000, 350, 365, 90, 38, 4, 1 polinoma $P(-x)$ nema promjena predznaka. Prema pravilu polinom nema negativnih realnih nultočaka a ima 6, 4, 2 ili 0 pozitivnih realnih nultočaka. Daljnja razmatranja pokazuju da polinom nema ni pozitivnih realnih nultočaka. To se lijepo vidi iz rezultata, rastava zadanog polinoma na faktore: $P(x) = (x^2+5)(x^2-x+20)(x^2-3x+10)$.

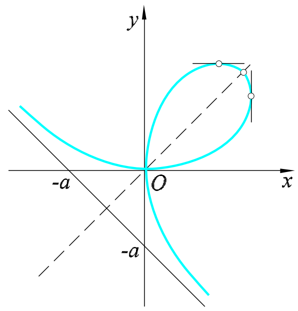
9. Za rješavanje algebarske jednadžbe četvrtog stupnja Descartes je uveo novi postupak. Iz toga postupka je vidljivo da je on otkrio i primjenjivao *metodu neodređenih koeficijenata*. Naime, on je pridruženi polinom četvrtog stupnja $P_4(x)$ napisao u obliku produkta dvaju kvadratnih polinoma kojima je koeficijente ostavio neodređene, a onda je uspoređivanjem dobio za te koeficijente određeni sustav jednadžbi.

10. U svojim općim razmatranjima o krivuljama Descartes daje i jednu *klasifikaciju* ravninskih krivulja, što je prvi slučaj u geometriji. Sve krivulje dijeli na dvije klase, geometrijske i mehaničke krivulje, u današnjoj terminologiji: algebarske i transcendentne. Za osnovu klasifikacije uzima rod, a ne stupanj jednadžbe krivulje, kao što je to danas uobičajeno.

11. Jedna ravninska algebarska krivulja četvrtoga reda naziva se *Descartesov oval*. Descartes tu krivulju prvi puta promatra 1637. godine u vezi sa sljedećom zadaćom iz optike: odrediti vrstu krivulje na kojoj se zrake koje izlaze iz jedne dane točke lome tako, da nakon loma prolaze kroz drugu danu točku. Ta krivulja ima svojstvo da udaljenosti r_1 i r_2 bilo koje njezine točke P od dviju čvrstih točaka F_1 i F_2 (žarišta) povezuje jednakost $r_1 + mr_2 = a$, gdje su m i a konstante. Za $m = 1$ dobiva se elipsa. Za $m = -1$ dobiva se hiperbola. Poseban slučaj ove krivulje je i *Pascalov puž*.



12. Jedna ravninska krivulja trećeg reda naziva se *Descartesov list*. U pravokutnim koordinatama jednadžba te krivulje glasi $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$. Pravac $x + y + a = 0$ je asimptota krivulje. Prvi puta je razmatra 1638. godine, ali mu njezin točan oblik nije bio poznat, već samo dio u I. kvadrantu ("list"). Njezin točan oblik odredio je Huygens 1692. godine, odredivši pri tome i jednadžbu asimptote. Zanimljivo je da petlja i dio ravnine između krivulje i asimptote imaju istu površinu: $3a^2/2$. Descartesov list povijesno je važan i zbog činjenice da se u njegovim razmatranjima te krivulje prvi puta može vidjeti *transformacija koordinata*.



13. Važan smjer Descartesovih istraživanja bilo je traganje za *univerzalnom metodom rješavanja problema*. Rezultat toga traganja je njegovo djelo "Praktična i jasna pravila za vođenje uma u istraživanju istine", klasično djelo logike otkrivanja istina u znanostima. Prema Descartesu sve su znanosti međusobno povezane. Veza koja ih spaja jest čovjekov um. Djelo se sastoji od 21 pravila i objašnjenja uz 18 od njih. Pronađeno je među njegovim rukopisima i objavljeno poslije njegove smrti (1667.). Kako su nastajala pravila, možda nam najbolje kažu sljedeće riječi samoga Descartesa: "Kada sam kao mladić slušao o dosjetljivim pronalascima, pokušao sam pronalaziti sam ne čitajući autora. Postupajući tako, malo po malo opažao sam da upotrebljavam izvjesna pravila". Ta pravila čine metodu rješavanja problema koja se danas naziva *Descartesova metoda*. Shema u grubim crtama izgleda ovako:

1) Zadaća bilo koje vrste svodi se na matematičku zadaću.
2) Matematička zadaća bilo koje vrste svodi se na algebarsku zadaću.
3) Bilo koja algebarska zadaća svodi se na rješavanje jedinstvene jednadžbe.

Descartes je i sam uvidio da ova shema nije uvijek uporabljiva. Postoje problemi u mnogim područjima, pa i u samoj matematici, koji se ne mogu svesti na rješavanje jedinstvene jednadžbe. Univerzalna metoda rješavanja problema nije ostvarljiva. To je danas jasno svakom učeniku s dobrim znanjem matematike. Vjerojatno je ta spoznaja utjecala na Descartesa da "Pravila" ostavi nedovršenima. Međutim, iako pri ostvarenju Descartesove univerzalne zamisli često nastupaju nepredviđene i nepremostive teškoće, zamisao sadrži u sebi duboku pravilnost i znatno je utjecala na znanost. Znanstvenici se danas u svojim istraživanjima u punoj mjeri pridržavaju Descartesovih pravila. Osim toga, postoji mnoštvo problema za koje je Descartesova metoda primjenjiva. Posebno se to odnosi na konstruktivne zadatke, gdje je primjena Descartesove ili algebarske metode često zadnja mogućnost uspješnog rješavanja, i tekstualne zadatke u školskoj matematici. Detaljan opis metode s primjerima možete naći u [5] i [6].

* * *

Napomena. Prije samo četiri godine bila je 400. godišnjica rođenja Renéa Descartesa. Tim povodom učitelji matematike mogli su o životu i djelu toga velikana znanosti čitati u [4], a profesori matematike u [3]. U ovom članku prenesen je iz tih članaka nešto kraći opis Descartesova života i djela, ali je zato dan objedinjen i nešto širi uvid u njegov doprinos matematici. Na taj način nastavnicima matematike pruža se bolja mogućnost da pri obradi nekih matematičkih sadržaja, uz koje je vezano i Descartesovo ime, prema želji i potrebi navedu određeni njegov doprinos kao zanimljivu povijesnu činjenicu. Historicizmi mogu pospješiti ostvarenje *načela interesa* u nastavi matematike.

Literatura

[1] E. T. Bell, *Veliki matematičari* (prijevod s engleskog), Zagreb 1972.

[2] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb 1992.

[3] Z. Kurnik, *René Descartes* (1596. – 1650.) i njegovo djelo, MFL 2 (1996. – 97.), 73–78.

[4] Z. Kurnik, *René Descartes* (1596. – 1650.), Matka 18 (1996), 73–78.

[5] Z. Kurnik, *Descartesova metoda — problemi i jednadžbe*, Matematika i škola 1 (1999), 10–17.

[6] G. Polya, *Matematičeskoe otkrytie* (prijevod s engleskog), Nauka, Moskva 1976.