INTRODUCCIÓN A
LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

GENNY ALEXANDRA NAVARRETE MOLANO

Trabajo de grado para optar por el titulo de Matemático

DIRECTOR: JOSÉ JOAQUÍN VALDERRAMA
Matemático Universidad Nacional de Colombia
Docente Facultad de Matemáticas

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ

Bogotá, Diciembre 2003

Resumen

Se presenta una introducción a las ecuaciones en diferencias. Primero se enuncian los conceptos de sucesión y series necesarios para el desarrollo del tema. Posteriormente se explican las ecuaciones en diferencias de primer orden siguiendo con las ecuaciones en diferencias de orden dos y orden N, a continuación se muestra un concepto básico de sistemas de ecuaciones lineales en diferencias, y por ultimo un paralelo entre ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales.

Abstract

Introduction to the Difference Equations:

An introduction to the differences equations appears. First, necessary succession and series concepts are enunciated for the development of the topic. Later first order differences equations are explained and follow the second order and N-order differences equations, next a basic notion of linear systems in differences equations is shown; finally, a brief comparison between difference equations and differential equations is presented.

Introducción

Las ecuaciones en diferencias y diferenciales ordinarias son herramientas versátiles de análisis. Son una excelente representación de un gran número de situaciones dinámicas y su teoría asociada es suficientemente rica para suministrar elementos para su comprensión.

Múltiples problemas de significativa importancia en diversos campos del saber humano, requieren para su estudio de la elaboración de un modelo matemático que los represente. Estos modelos están constituidos principalmente por Ecuaciones Diferenciales y Ecuaciones en Diferencias. Esto se evidencia por el hecho que dentro de las matemáticas aplicadas, las Ecuaciones Diferenciales juegan un papel muy importante en las disciplinas científicas. En sus inicios aparece en problemas mecánicos y geométricos, posteriormente su campo de aplicación se va extendiendo a todas las ramas de la física y en los últimos años es común encontrarlas aplicadas a disciplinas tan diversas como la biología, la economía, la ingeniería, la sociología y la fisiología, entre otras.

De más reciente aparición son las Ecuaciones en Diferencias, las cuales han adquirido una importancia relevante con el creciente estudio y simulación de sistemas discretos en las diferentes disciplinas que modelan y estudian sistemas discretos como la ingeniería y la economía, dado que este tipo de modelamiento es más ajustado a la realidad.

Por otra parte es una área importante en otras carreras como Ingenierías y Economía, lo cual nos permite ver que tiene un extenso campo teórico como practico, elemental en el perfeccionamiento de dichas carreras, con lo cual podemos observar que es de gran interés el estudio de las Ecuaciones en Diferencias, ya que seria de gran apoyo a estas el poder encontrar artículos básicamente enfocados a las Ecuaciones en Diferencias

Reseña histórica

“Desde hace por lo menos 3.500 años, se resuelven problemas que dan lugar a ecuaciones. En los escritos de los antiguos babilonios y egipcios, se han descifrado tales problemas y la forma de resolverlos. Algunas de las antiguas tablillas contienen problemas de tipo algebraico y geométrico, pero las soluciones no utilizan nociones de la geometría. Un antiguo pergamino de los babilonios contiene la solución de la ecuación: $x^2 - x = 870$. Tómese la mitad de 1, que es el coeficiente de x, y cuádrese. Entonces, súmese 1/4 a 870, para obtener 3.481/4. Ahora, tómese la raíz cuadrada de 3.481/4 para obtener 59/2. Al número obtenido, súmese la mitad de 1 que es el coeficiente de x. El resultado obtenido, 30, es una solución de la ecuación"

Durante el desarrollo de la historia encontramos una primera fase, que comprende el periodo de 1700 a. de C. a 1700 d. de C., se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontramos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. de C.), llamada *álgebra geométrica*, rica en métodos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viète (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones). Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax + b = c$ han pasado más de 3.000 años.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid -1.650 a. de C- y el de Moscú -1.850 a, de C.-) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refiere a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$
$$x + ax + bx = 0$$

donde *a, b* y *c* eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban *aha* o *montón*, por montón eran conocidos los números enteros.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhid responde al problema siguiente:

"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24".

En notación moderna, la ecuación sería: $x + 1 / 7 x = 24$

La solución la obtenían por un método que hoy conocemos con el nombre de "método de la falsa posición" o "regula falsi". Consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos obtendremos la solución exacta.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto el simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

Los babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.) casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d. de C.) son los *Sulvasütras*, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos.

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen,* sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$1/4 anchura + longitud = 7\ manos$$

$$longitud + anchura = 10\ manos$$

Para resolverlo comienzan asignando el valor 5 a una *mano* y observaban que la solución podía ser: *anchura = 20, longitud = 30* . Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación. En nuestra notación, sería:

$$y + 4x = 28$$

$$y + x = 10$$

restando la segunda de la primera, se obtiene $3x = 18$, es decir, $x = 6$ e $y = 4$.

También resolvían sistemas de ecuaciones, donde alguna de ellas era cuadrática.

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero uti1izando métodos geométricos. Thymaridas (400 a. de C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Diophante sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Utilizó ya un álgebra sincopada como hemos señalado anteriormente. Sin embargo, unas de las dificultades que encontramos en la resolución de ecuaciones por Diophante es que carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Las ecuaciones en diferencias y diferenciales ordinarias son herramientas versátiles de análisis. Son una excelente representación de un gran número de situaciones dinámicas y su teoría asociada es suficientemente rica para suministrar elementos para su comprensión.

1. ECUACIONES EN DIFERENCIAS

1.1 Sucesiones Aritméticas y Geométricas

Definición 1.1: Una función $U(n)$ que esta definida en el dominio de todos los enteros no negativos se llama sucesión y se denota por $\{U(n)\}$. Y la infinidad de valores de $U(n)$, $n = 0,1,2,...$ se ordenan en la forma

$$U(0),U(1),U(2),....$$

Cada uno de los valores que forman la sucesión se llama término de la sucesión. Dado que la variable n no es sino un número que representa el orden de los términos, se puede decir que una sucesión es un acomodo lineal de una infinidad de números ordenados por cierta regla.

Las sucesiones más comunes son las aritméticas y las geométricas.

Definición 1.2: Una sucesión aritmética esta compuesta de términos que se obtienen sumando sucesivamente una constante al primer termino. La constante se llama diferencia común.

Definición 1.3: Una sucesión geométrica consta de términos que se obtienen multiplicando el primer término sucesivamente por una constante que se llama razón común.

Por consecuencia, para evitar casos excepcionales, se permite que una diferencia común sea cero, pero se supone que toda razón común es diferente de cero.

1.2 Ecuaciones en Diferencias

Definición 1.4: Sean $A_1(n), A_2(n)\ y\ B(n)$ funciones conocidas que nunca se hacen cero en cierto dominio de la variable n. entonces

$$A_1(n)U(n+1) + A_2(n)U(n) = B(n),$$

se llama ecuación en diferencias de primer orden lineal de $U(n)$.

Definición 1.5: Una solución de una Ecuación en Diferencias es una función que satisface la ecuación, ó es una función que satisface una ecuación dada para cualquier valor de la variable perteneciente a un dominio en el que esta definida la función.

Se hace notar que dada una ecuación en diferencias, una solución definida en esta forma no necesariamente es única. El hecho que una solución contenga una constante arbitraria significa que hay una cantidad infinita de soluciones. Aunque este hecho parece extraño, en un problema práctico hay algunas condiciones adicionales que deben satisfacerse junto con las Ecuaciones en Diferencias y así resulta que mediante dichas condiciones, se selecciona una sola solución de entre una infinitada de ellas.

Definición 1.6.: Una ecuación que define el valor de una función en el valor inicial de la variable se llama *condición inicial* de la Ecuación en Diferencias de primer orden. El valor de una función definido por medio de una condición inicial se llama *valor inicial*.

Definición 1.7: Si una solución de la Ecuación en Diferencias dada (condiciones de unicidad) contiene constantes arbitrarias y satisface condiciones iniciales ajustando apropiadamente dichas constantes, se llama *solución general* de la Ecuación en Diferencias. Si se asignan valores particulares a las constantes arbitrarias de una solución general, la solución obtenida se llama solución particular.

Por lo cual en las Ecuaciones en Diferencias debemos tener en cuenta problemas de existencia y unicidad de las soluciones bajo las condiciones iniciales dadas, en un problema práctico de progresiones geométricas, basta con obtener una solución que satisfaga una condición inicial dada.

Por el contrario cuando aun método que empiece con el valor inicial e introduzca valores conocidos en la ecuación en forma repetida para encontrar la solución sucesivamente, se le llama método de iteración o iterativo. Este tipo de métodos se utiliza a menudo para resolver ecuaciones numéricas.

Si se cumplen las condiciones siguientes.

i) El valor inicial U(0) es dado.

ii) Dados valores arbitrarios de la variable $x, U(x)$ y $U(x+1)$ es determinado de
Manera única mediante la ecuación en diferencias.

Definición 1.8: Principio de inducción matemática.

i') El valor $U(0)$ de $U(x)$ en $x=0$ es único.

ii') Si el valor $U(k)$ para $x=k$ esta determinado de manera única, entonces el
valor de $U(k+1)$ para $x=k+1$ también esta determinado de manera única.

De esta manera para las ecuaciones en diferencias que satisfagan la condición (ii), la existencia y unicidad de las soluciones bajo las condiciones iniciales dadas quedan probadas, mediante principio de inducción matemática.

1.2.1 Ecuaciones en Diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes.

Ecuaciones tales que estén definidas en cierto dominio de una variable y que relacionen una función incógnita de la variable n con la función de la variable $n+1$, que difiere en 1 de la primera, por ejemplo $U(n)\, y U(n+1)$, se llaman Ecuaciones en Diferencias de primer orden. En general una ecuación que relacione una función incógnita $U(n)$ con $U(n+1), U(n+2), \ldots U(n+N)$ se llama Ecuación en Diferencia o Ecuación en Diferencias finita de orden N. A menos que se diga específicamente otra cosa, se supondrá que n y $U(n)$ varían en el conjunto de los números enteros y el de los reales, respectivamente.

Ejemplo:
Si tenemos la ecuación en diferencias defina como sigue:

$$U(n) - U(n-1) = aU(n-1).$$

y remplazando $n-1$ por n en la ecuación entonces tenemos,

$$U(n+1) - U(n) = aU(n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

entonces tenemos una ecuación en diferencias con a defina como una constante.

Definición 1.9: Si en particular en la ecuación en diferencias lineal de primer orden $A_1(n)U(n+1) + A_2(n)U(n) = B(n)$, la función $B(n)$ es idénticamente cero, y $A_1(n) = 1, A_2(n) = a$ funciones conocidas que nunca se hacen cero en cierto dominio de la variable n. Entonces

$$U(n+1) - aU(n) = 0$$

se llama ecuación en diferencias homogénea con coeficientes constantes.

Teorema 1.1: *Sucesión geométrica.*

Sea a una constante distinta de cero, la ecuación en diferencias

$$U(n+1) - aU(n) = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

tiene como solución la familia

$$U(n) = Ca^n \qquad (2).$$

para cualquier valor de parámetro C.

Demostración:
se sustituye n por $n+1$ en la ecuación (2) y se tiene

$$U(n+1) = Ca^{(n+1)} \qquad (3).$$

las ecuaciones (2) y (3) implican que

$$\begin{aligned} U(n+1) - U(n) &= Ca^{(n+1)} - Ca^{n} \\ &= (a-1)Ca^{n} \quad remplazando\, de (2) \\ &= (a-1)U(n) \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (2) es una solución de la ecuación (1). Si se hace $n = 0$ en la ecuación (2), $U(0) = C$.

Eligiendo C adecuadamente, se satisface la condición inicial. Obviamente la ecuación (2) cumple la condición de unicidad. Por consiguiente la ecuación (2) es una solución general de la de la ecuación (1)[1].

Teorema 1.2: *Sucesión aritmética.*

Sea $U(n+1) - U(n) = b, \qquad n = 0,1,2,... \qquad (4)$
tiene como solución la familia

$$U(n) = C + bn, \qquad (5)$$

Demostración:
A partir de

$$\begin{aligned} &U(1) = U(0) + b, \\ &U(2) = U(1) + b = U(0) + 2b,... \end{aligned}$$

se sustituye n por $n+1$ en la ecuación (5) y se tiene

$$U(n+1) = c + b(n+1). \qquad (6)$$

las ecuaciones (5) y (6) implican que

$$U(n+1) - U(n) = C + b(n+1) - (C + bn) = b.$$

Por lo tanto la ecuación (5) es una solución de la ecuación (4). Si se hace $n = 0$ en la ecuación (5), $\qquad U(0) = C$.

---

[1] *Nota:* No es posible imaginar por su naturaleza que un problema de progresión geométrica tuviera dos soluciones. Si bien se obtuvo ciertamente una solución única de una progresión geométrica utilizando un método iterativo, se considera el procedimiento general para resolver una Ecuación en Diferencias mediante este método.

Eligiendo C adecuadamente, se satisface la condición inicial. Obviamente la ecuación (4) cumple la condición de unicidad. Por consiguiente la ecuación (5) es una solución general de la de la ecuación (4).

Definición 1.10: Si en particular en la ecuación en diferencias lineal de primer orden $A_1(n)U(n+1)+A_2(n)U(n)=B(n)$, se tiene que las funciones $A_1(n), A_2(n)$ son constantes, se le llama de coeficiente constante.

Puesto que se supone que $A_1(n)$ no se hace cero, se pueden dividir ambos miembros de la ecuación por $A_1(n)$. Si se hace

$$\frac{A_2(n)}{A_1(n)}=A(n) \qquad \text{y} \qquad \frac{B(n)}{A_1(n)}=R(n),$$

entonces

$$U(n+1)+A(n)U(n)=R(n), \qquad (7)$$

se considera la forma general de la ecuación en diferencias de primer orden lineales.

Teorema 1.3:
Sea la ecuación (7) para los $A(n)\neq 0$.

Demostración:
Si tenemos $n=0,1,2,3$ entonces en (7)

$$U(1)=AU(0)+B,$$
$$U(2)=AU(1)+B=A^2U(0)+(1+A)B,$$
$$U(3)=AU(2)+B=A^2U(0)+A(1+A)B+B=A^3U(0)+(1+A+A^2)B.$$

lo cual sugiere una solución general de la forma

$$U(n)=A^nU(0)+(1+A+A^2+...+A^{n-1})A.$$

El coeficiente de b es una sucesión geométrica, y por lo tanto,

$$U(n)=A^nU(0)+\frac{1-A^n}{1-A}B, \qquad si \qquad A\neq 1$$
$$U(n)=U(0)+nB, \qquad si \qquad A=1$$

Si $A=1$, esta concuerda con la ecuación (5), si U(0) se escribe como *C*. $U(x)=C+xB$.

Si $A \neq 1$, se escribe en la forma

$$U(n) = A^x \left\{ U(0) - \frac{B}{1-A} \right\} + \frac{B}{1-A}.$$

Si hacemos $U(0) - \frac{B}{1-A} = C$, entonces

$$U(n) = CA^n + \frac{B}{1-A}, \qquad A \neq 1$$

Encontrando así la solución general de la ecuación (7) con una constante arbitraria *C*.

Definición 1.11: Si $C = 0$ entonces $U(n)$ se reduce a la función constante $\frac{B}{1-A}$. Este se llama valor de equilibrio de $U(n)$ y se denota por $U^*(n)$;

$$U^*(n) = \frac{B}{1-A}.$$

Por consiguiente la solución general se escribe entonces de la forma

$$U(n) = CA^n + U^*(n).$$

Ejemplo 1: $U(n+1) - 3U(n) = 2n - 5$.

En este caso, se sugiere que $U^*(n) = K_1 n + K_2$, como el segundo miembro de la ecuación. Entonces

$$U^*(n+1) - 3U^*(n) = \{K_1(n+1) + K_2\} - 3\{K_1 n + K_2\} = -2K_1 n + (K_1 - 2K_2)$$

comparando el coeficiente de *n* y el termino constante de esta expresión con los correspondientes de $2n - 5$, se tiene

$$-2K_1 = 2, \qquad K_1 + 2K_2 = -5.$$

De donde se obtiene $K_1 = -1 \, y \, K_2 = 2$. Por lo tanto $U^*(n) = -n + 2$ es solución particular. Una solución general es

$$U(n) = C3^n - n + 2.$$

Ejemplo 2: $U(n+1) - 3U(n) = 3^n$.

Puesto que $\alpha = a = 3$, se supone que $U^* = K_1 n 3^n$. Entonces

$$U^*(n+1) - 3U^*(n) = K_1(n+1)3^{n+1} - K_1 n 3^{n-1} = 3K_1 3^n.$$

Por lo tanto, $3K_1 = 1$, esto es, $K_1 = \frac{1}{3}$ y $U^*(n) = \frac{1}{3} n \cdot 3^n$. Una solución general es

$$U(n) = \left(C + \frac{1}{3} n \right) 3^n.$$

1.2.2 Ecuaciones en diferencias y razones comunes no constantes

Teorema 1.4:
Sea $U(n+1) - A(n)U(n) = 0 \qquad n = 0,1,2,... \qquad (8)$
para los $A(n)$ tales que no se hace 0 para ningún valor de *n*.

Demostración: Si se busca la solución sucesivamente por el método de iteración, partiendo de *U*(0), se tiene

$$U(1) = U(0)A(0),$$
$$U(2) = U(1)A(1) = U(0)A(0)A(1),$$
$$U(3) = U(2)A(2) = U(0)A(0)A(1)A(2),....$$

Normalmente se adopta el símbolo $\prod$ para representar un producto de términos sucesivos de una sucesión $\{A(n)\}$, y se define

$$\prod_{k=m}^{i} A(k) = A(m)A(m+1)...A(i-1)A(i)\,,$$

para $m \leq i$.

Entonces

$$U(1) = U(0)\prod_{k=0}^{0} A(k),$$
$$U(2) = U(0)\prod_{k=0}^{1} A(k),$$
$$U(3) = U(0)\prod_{k=0}^{2} A(k),$$

A partir de estas expresiones se infiere una solución general de la ecuación (8),

$$U(n) = C\prod_{k=0}^{n-1} A(k), \qquad C = U(0), \qquad n = 1,2,....$$

Esta se generaliza en

$$U(n) = C\prod_{k=\alpha}^{n-1} A(k), \qquad C = U(\alpha), \qquad n = \alpha+1, \alpha+2,...$$

para una sucesión que empiece desde $n = \alpha$.

1.3 Métodos de solución por Diferencias y Sumas

1.3.1 Diferencias

Definición 1.12: Dada una función U y una constante h talque $n+h$ pertenezca al dominio de dicha función, denominaremos primera diferencia de U a aquella función cuyo valor en *n* viene dado por

$$\Delta U(n) = U(n+h) - U(n),$$

designando así a esta función por ΔU, y su valor particular en n lo simbolizaremos por $\Delta U(n)$.

El símbolo Δ es llamado operador diferencia y colocado antes de la función indica que esta se ha trasformado en la función diferencia. El numero h recibe el nombre de intervalo de diferencia.

En nuestro caso $h = 1$ entonces la ecuación seria:

$$\Delta U(n) = U(n+1) - U(n).$$

1) La primera diferencia correspondiente a la función $U(n) = n$ es:
   $\Delta U(n) = (n+1) - n$ ósea $\Delta n = 1$.
2) La diferencia correspondiente a un valor constante C esta definida por:
   $\Delta U(C) = C - C = 0$, entonces $\Delta C = 0$.
3) La diferencia correspondiente a una función a^n esta dada por:
   $$\Delta U(a^n) = a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n,$$

por lo que se tiene que $\Delta a^n = (a-1)a^n$.

Ejemplo 1:
Si $U(n) = 2n+3$
$\Delta U(n) = \{2(n+1)+3\} - (2n+3) = 2,$
Ya que $U(n+1) = 2(n+1)+3.$
Además $U(0) = 3, U(1) = 5, U(2) = 7, U(3) = 9, \dots$
Entonces $\Delta U(0) = 5-3 = 2, \Delta U(1) = 7-5 = 2, \Delta U(2) = 9-7 = 2, \dots$

La grafica de $2n+3$ es una recta. La diferencia 2 se llama pendiente de la recta, que es precisamente el coeficiente de n .

1.3.2 Diferencias de polinomios

Definición 1.13:_El calculo en diferencias de un polinomio se reduce a calcular la diferencia de n^k. Sin embargo, la diferencia no resulta expresada con una formula muy sencilla.

Ejemplo 2:

$$\Delta n^3 = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$
$$\Delta n^4 = (n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Una función que es fundamental para calcular la diferencia y suma de polinomio es la función factorial $n^{(k)}$, definida como

$$n^{(0)} = 1$$
$$n^{(1)} = n$$
$$n^{(2)} = n(n-1)$$
$$n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$$
$$\vdots$$
$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1)$$

Ejemplo 3:

$$n^{(1)} = n$$
$$n^2 = n(n-1) = n^2 - n$$
$$n^{(3)} = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n.$$

Para poder calcular la diferencia de la ecuación (1), entonces tenemos para $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta n^{(k)} &= (n+1)^{(k)} - n^{(k)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} - \frac{n!}{(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)! - (n+1-k)n!}{(n+1-k)!} \\
&= k\frac{n!}{(n+1-k)!} \\
&= k\frac{n!}{(n-(k-1))!} \\
&= kn^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$\Delta n = kn^{(k-1)}, \qquad (k = 1,2,\ldots) \qquad (2).$$

Ejemplo 4: $\Delta n^3 = 3n^{(3-1)} = 3n^2$.

$\Delta n^4 = 4n^{(4-1)} = 4n^3$.

La función $\binom{n}{k}$ definida por $\binom{n}{k} = \dfrac{n^{(k)}}{k!}$ $\qquad (k = 0,1,2,...)$.

Se llama coeficiente binomial. De la ecuación (2)

$$\Delta \frac{n^{(k)}}{k!} = \frac{kn^{(k-1)}}{k!} = \frac{n^{(k-1)}}{(k-1)!}. \quad \text{Por lo tanto} \quad \Delta\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}.$$

1.3.3 Sumas

***Definición 1.14*:** Sean $U(n)$ *y* $u(n)$ dos funciones talque $\Delta U(n) = u(n)$ entonces $u(n)$ se llama diferencia de $U(n)$. Recíprocamente, $U(n)$ se llama una suma indefinida de $u(n)$.
Así la solución general de $\Delta U(n) = u(n)$, se denota por $\Delta^{-1}u(n)$.

Entonces si $\Delta U(n) = u(n)$ tenemos que

$$\Delta^{-1}u(n) = U(n) + C \qquad (3)$$

donde C es una constante arbitraria[2].

Ejemplo 5: $\dfrac{\Delta n^4}{4} = n^3$ esto implica que $\Delta^{-1}n^{(3)} = \dfrac{n^{(4)}}{4} + C$.

Las operaciones para calcular la diferencia y obtener una suma de ciertas función, se representa escribiendo los símbolos Δ y Δ^{-1}, respectivamente, antes de dicha función. En este sentido Δ y Δ^{-1} se llaman operadores.
Si se suma la diferencia $\Delta U(n)$, se obtiene $\Delta^{-1}(\Delta U(n))$. Esta expresión se escribe en la forma $\Delta^{-1}\Delta U(n)$ y $\Delta^{-1}\Delta$ se llama producto de los operadores Δ y Δ^{-1}. El producto $\Delta\Delta^{-1}$ se define de manera semejante. El producto de dos operadores significa que se realizan dos operaciones sucesivas.

---

[2] *Nota:* si se denota una solución particular de la ecuación en diferencias con la propia $U(n)$, la solución general de la ecuación en diferencias es $U(n) + C$. Pero si se permite que la solución n tome valores no enteros, entonces C debe ser una función arbitraria con periodo 1.

Aunque tanto $\Delta\Delta^{-1}$ como $\Delta^{-1}\Delta$ son el producto de Δ y Δ^{-1}, no son operadores iguales, es decir, no representan la misma operación. Si se sustituye la ecuación (3) en el primer miembro de la segunda ecuación para eliminar $u(n)$, entonces resulta

$$\Delta^{-1}\Delta U(n) = U(n) + C. \qquad (4)$$

Puesto que, por definición, $\Delta^{-1}u(n)$ es una solución de $\Delta U(n) = u(n)$, entonces

$$\Delta\Delta^{-1}u(n) = u(n) \qquad (5)$$

Como $u(n)$ es arbitraria se puede remplazar con $U(n)$. Entonces de las ecuaciones (4) y (5),

$$\Delta^{-1}\Delta U(n) - \Delta\Delta^{-1}U(n) = C.$$

Por consiguiente, en general $\Delta^{-1}\Delta U(n) \neq \Delta\Delta^{-1}U(n)$.

1.3.4 Algunas propiedades de los operadores Δ

Teorema 1.5 : Ley conmutativa respecto a las constantes. Si C es una constante, la diferencia de la función $CU(n)$ es igual al producto de C por la diferencia de $U(n)$, ósea:

$$\Delta[CU(n)] = C\Delta U(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Delta[CU(n)] &= CU(n+1) - CU(n) \\ &= C[U(n+1) - U(n)] \\ &= C\Delta U(n)\end{aligned}$$

Ejemplo 6:

$$\Delta(3n) = 3\Delta n = 3,$$

$$\Delta(5n^2) = 5\Delta n^2 = 5(2n+1)$$

Teorema 1.6: Ley distributiva. La diferencia de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus diferencias, es decir si U_1 y U_2 son dos funciones, se tendra:

$$\Delta[U_1(n) + U_2(n)] = \Delta U_1(n) + \Delta U_2(n)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Delta[U_1(n)+U_2(n)] &= [U_1(n+1)+U_2(n+1)]-[U_1(n)+U_2(n)] \\ &= [U_1(n+1)-U_1(n)]+[U_2(n+1)-U_2(n)] \\ &= \Delta U_1(n)+\Delta U_2(n)\end{aligned}$$

Colorario: Dadas k funciones $U_1, U_2, U_3; \ldots U_k$ y k constantes arbitrarias, $C_1, C_2, C_3; \ldots C_k$ se tendrá

$$\Delta[C_1U_1(n)+C_2U_{21}(n)+\ldots+C_kU_{k1}(n)] = C_1\Delta U_1(n)+C_2\Delta U_{21}(n)+\ldots+C_k\Delta U_{k1}(n)$$

para todo valor entero positivo k.

1.3.5 Aplicación de la sumatoria.

Definición 1.15: *Suma de series*. Si en la ecuación $U(n) = C\sum_{k=\alpha}^{n-1} R(k),\quad C = U(\alpha),\qquad n = \alpha+1, \alpha+2, \ldots.$ para una sucesión que empiece desde $n = \alpha$, si remplazamos $R(n)$ con $u(n)$ se obtiene

$$U(n)-U(\alpha) = \sum_{k=\alpha}^{n-1} u(k).$$

Se puede considerar que esta formula dice que la suma de la serie del segundo miembro esta representada con las sumas de $u(n)$ del primer miembro, debido a que si $\Delta^{-1}u(n) = U(n)+C$, entonces $\Delta^{-1}u(n)-\Delta^{-1}u(\alpha) = U(n)+U(\alpha)$, lo cual implica que

$$\sum_{k=\alpha}^{n-1} u(k) = \Delta^{-1}u(n)-\Delta^{-1}u(\alpha).$$

Hagamos $n-1 = n$ y $\alpha = m$, donde m y n son enteros no negativos. Entonces la ecuación anterior se convierte en

$$\sum_{k=m}^{n} u(k) = \Delta^{-1}u(n+1)-\Delta^{-1}u(m) \qquad n \geq m.$$

El segundo miembro de la ecuación se denota por $[\Delta^{-1}u(n)]_m^{n+1}$ y se llama suma definida de $u(n)$ de m a $(n+1)$.

Soluciones generales de ecuaciones en diferencias de primer orden lineales. El problema de resolver una ecuación en diferencias de primer orden lineal se puede reducir a un problema de sumatoria. Por simplicidad, se considera una ecuación en diferencias con coeficientes constantes,

$$U(n+1)-aU(n) = R(n) \qquad a \neq 0. \quad (6)$$

Una solución particular de la ecuación homogénea $U(n+1)-aU(n)=0$, que resulta de la ecuación (6) haciendo que $R(n)$ sea cero, es a^n. Sea ahora

$$U(n)=a^n V(n)$$

y obténgase una ecuación en diferencias para $V(n)$. El primer miembro de la ecuación (6) resulta ser

$$U(n+1)-aU(n)=a^{n+1}V(n+1)-a\cdot a^n V(n)=a^{n+1}\{V(n+1)-V(n)\}$$

dividiendo ambos miembros de la ecuación (6) por a^{n+1}, se tiene

$$\Delta V(n)=a^{-n-1}R(n).$$

Por consiguiente, $V(n)=\Delta^{-1}\{a^{-n-1}R(n)\}+C$.

Si se multiplica esta expresión por a^n, se tiene

$$U(n)=Ca^n+a^{n-1}\Delta^{-1}\left\{\frac{R(n)}{a^n}\right\}, \qquad (7)$$

que es la solución general de la ecuación (6). El primer termino es precisamente la solución general de $U(n+1)-aU(n)=0$.

En el caso que el coeficiente no es constante, basta reemplazar a^{n-1}, a^n y el primer termino con $\prod_{k=0}^{n-1}A(k)$, $\prod_{k=0}^{n}A(k)$ y la ecuación $U(n)=C\prod_{k=0}^{n-1}A(k),\ C=U(0),\ n=1,2,\ldots,$ respectivamente.

Ejemplo: Resolver $U(n+1)-aU(n)=b \qquad a\neq 1$.

Sustitúyase *b* por $R(n)$ en la ecuación (7). Entonces

$$U(n)=Ca^n+a^{n+1}\Delta^{-1}\left(\frac{b}{a^n}\right)=Ca^n+a^{n-1}b\Delta^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=Ca^n+a^{n-1}b\frac{1}{\frac{1}{a}-1}\left(\frac{1}{a}\right)^n=Ca^n+\frac{b}{1-a}.$$

1.3.6 Diferencias de segundo orden y orden N.

Definición 1.16: A partir de la función $U(n)$, se define la función $\Delta U(n)$, y si a su vez se puede definir su diferencia $\Delta[\Delta U(n)]$. Esta se llama diferencia de segundo orden de $U(n)$ y se escribe $\Delta^2 U(n)$. Δ^2 representa el cuadrado $\Delta\cdot\Delta$ del operador diferencia Δ. De manera semejante se puede definir $\Delta^N U(n)$ por medio de $\Delta\left[\Delta^{N-1}U(n)\right]$ para cualquier numero natural *N*. por ejemplo, si $U(n) = n^2$,

$$\Delta n^2 = \Delta\left\{n^2 + n^1\right\} = 2n+1, \qquad \Delta^2 n^2 = \Delta(2n+1) = 2,$$

$$\Delta^3 n^2 = \Delta 2 = 0, \qquad \Delta^4 n^2 = \Delta^5 n^2 = \ldots = 0.$$

De la definición anterior es obvio que Δ^N es un operador lineal. Esto es,

$$\Delta^N\left\{aU(n) + bV(n)\right\} = a\Delta^N U(n) + b\Delta^N V(n).$$

Ahora bien, dado que $\Delta U(n) = U(n+1) - U(n)$,

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \Delta U(n+1) - \Delta U(n)\\ &= \left\{U(n+3) - 2U(n+2) + U(n+1)\right\} - \left\{U(n+2) - 2U(n+1) + U(n)\right\}\\ &= U(n+3) - 3U(n+2) + 3U(n+1) - U(n),\end{aligned}$$

y asi sucesivamente.

Una tabla donde se enlistan los valores de $U(n), \Delta U(n), \Delta^2 U(n), \ldots$, se llama tabla de diferencias. Se acostumbra colocar el valor $\Delta U(a)$ entre los renglones U(a) y U(a+1).

n	0		1		2		3		4		5
$U(n)$	0		1		4		9		16		25
$\Delta U(n)$		1		3		5		7		9	
$\Delta^2 U(n)$			2		2		2		2		
$\Delta^3 U(n)$				0		0		0			

Tabla 1.1 Diferencias de x^2.

Ya sabemos como expresar un polinomio $U(n)$ de grado *N* en términos de funciones factoriales. Ahora se demuestra que los coeficientes se representan utilizando $U(0), \Delta U(0), \ldots, \Delta^N U(0)$. Sea

$$U(n) = A_0 + A_1 n^1 + A_2 n^2 + A_3 n^3 + \ldots + A_k n^N$$

y calculamos sucesivamente las diferencias

$$\Delta U(n) = A_1 + 2A_2 n^{(1)} + 3A_3 n^{(2)} + \ldots + NA_N n^{(N-1)}$$

$$\Delta^2 U(n) = 2\cdot 1\cdot A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3 n^{(1)} + \ldots + N(N-1)A_N n^{(N-2)}$$

$$\Delta^3 U(n) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot A_3 + \ldots + N(N-1)(N-2)A_N n^{(N-3)}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^N U(n) = N!\,A_N n^{(0)}.$$

se sustituye $n=0$ en las formas anteriores, puesto que $0^N=0$, se tiene $U(0)=A_0, \Delta U(0)=A_1, \Delta^2 U(0)=2!A_2, \Delta^3 U(0)=3!A_3, ..., \Delta^N U(0)=N!A_N$.
De aquí se determinan de inmediato $A_0, A_1, ..., A_N$.
Si $U(n)$ es un polinomio en la variable *n*, entonces

$$U(n)=U(0)+n^{(1)}\Delta U(0)+\frac{n^{(2)}}{2!}\Delta^2 U(0)+\frac{n^{(3)}}{3!}\Delta^3 U(0)+...+\frac{n^{(N)}}{N!}\Delta^N U(0) \text{ .(8)}$$

Y esta ecuación se llama formula de interpolación de Newton. Si se emplean coeficientes binomiales, se escribe en la forma

$$U(n)=U(0)+\binom{n}{1}\Delta U(0)+\binom{n}{2}\Delta^2 U(0)+\binom{n}{3}\Delta^3 U(0)+...+\binom{n}{N}\Delta^N U(0). \quad (9)$$

Si se usa una tabla de diferencias, la ecuación (8) sirve para representar un polinomio en términos de funciones factoriales.
Ejemplo: representar n^3-5n+2 en términos de funciones factoriales.

N	0		1		2		3
$U(n)$	2		-2		0		14
$\Delta U(n)$		-4		2		14	
$\Delta^2 U(n)$			6		12		
$\Delta^3 U(x)$				6			

Tabla 1.2 Tabla división sintética.

$$U(n)=2-4n^{(1)}+6\frac{n^{(2)}}{2!}+6\frac{n^{(3)}}{3!}$$
$$=2-4n^{(1)}+3n^{(2)}+n^{(3)}$$

Dada una función, utilizando la formula de Newton, se puede construir un polinomio que adquiera los mismos valores que tiene la función cuando $n=0,1,2,...,k$. Se puede considerar al polinomio como una aproximado de la función en un punto *n* que no sea entero. En este sentido, las ecuaciones (8) o (9) se les llama algunas veces formula de interpolación de Newton.

2. ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINELAES DE ORDEN SUPERIOR

2.1 Ecuaciones en diferencias lineales

Definición 2.1: La ecuación
$A_0(n)U(n+N)+A_1(n)U(n+N-1)+...,A_{N-1}(n)U(n+1)+A_N(n)U(n)=R(n)$
se llama ecuación lineal en diferencias de una función incógnita $U(n)$.

Definición 2.2: Si tanto $A_0(n)$ como $A_N(n)$ son funciones que nunca se hacen cero, se dice que la ecuación es de *N*-ésimo orden o una ecuación de orden *N*. $R(n)$ se llama término no homogéneo, y si es la constante es 0, la ecuación se llama homogénea. Si todas las funciones $A_0(n), A_1(n),..., A_{N-1}(n), A_N(n)=R(n)$ son constantes, entonces se dice que la ecuación es de coeficientes constantes.

Ejemplo: $U(n+2)-2U(n+1)+U(n)=0$.

Esta se vuelve a escribir como $\Delta U(n)=u(n)$,
y se puede encontrar una solución efectuando sumatoria repetidamente.
Puesto que $\Delta^2 U(n)=\Delta\{\Delta U(n)\}$, si se hace

$$\Delta U(n)=u(n),$$

la ecuación en diferencias se convierte en

$$\Delta u(n)=0,$$

esto es, la ecuación se separa en dos ecuaciones, $\Delta u(n)=0$ implica que $u(n)=C_1$. Si se remplaza $u(n)$ con C_1 en la primera ecuación ($\Delta U(n)=u(n)$) se tiene $\Delta U(n)=C_1$.
Por lo tanto $U(n)=\Delta^{-1}C_1 = C_1 n + C_2$
La ecuación anterior es solución general de la ecuación $\Delta U(n)=u(n)$ (verificar).

Considérese ahora la ecuación en diferencias dada remplazando $R(n)$ con una función $S(n)$ en el segundo miembro de (1),

$$A_0(n)U_N(n+N)+A_1(n)U(n+N-1)+...+A_N(n)U(n)=S(n). \qquad (2)$$

supóngase que $U_1(n)$ y $U_2(n)$ son soluciones de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. Sea

$$U(n)=C_1U_1(n)+C_2U_2(n), \qquad C_1 \text{ y } C_2 \text{ son constantes.}$$

Entonces

$$A_0(n)U(n+N)+A_1(n)U(n+N-1)+...+A_N(n)U(n)$$
$$= \quad A_0(n)\{C_1U_1(n+N)+C_2U_2(n+N)\}$$
$$+A_1(n)\{C_1U_1(n+N-1)+C_2U_2(n+N-1)\}$$
$$+....+A_N(n)\{C_1U_1(n)+C_2U_2(n)\}$$
$$= \quad C_1\{A_0(n)U_1(n+N)+A_1(n)U_1(n+N-1)+...+A_N(n)U_1(n)\}+...$$
$$+C_2\{A_0(n)U_2(n+N)+A_1(n)U_2(n+N-1)+...+A_n(n)U_2(N)\}$$

las expresiones que siguen entre llaves a C_1 y C_2 son las ecuaciones (1) y (2) igualadas a $R(n)$ y $S(n)$, respectivamente. Por consiguiente $U(n)$ es una solución de la ecuación en diferencias

$$A_0(n)U_N(n+N)+A_1(n)U(n+N-1)+...+A_N(n)U(n)=C_1R(n)+C_2S(n)$$
(3).

Definición 2.3: Si $U_1(n)$ es una solución general, contiene *N* constantes arbitrarias y puede satisfacer una condición inicial dada. Si $U_2(n)$ es una solución particular, $U(n)$ contiene también *N* constantes arbitrarias y puede satisfacer una condición inicial, ya que $U(n)$ es la suma de $U_1(n)$ y una función totalmente determinada. Por lo tanto, $U(n)$ es una solución general de la ecuación (3). Si $U_2(n)$ es también una solución general, con mayor razón $U(n)$ lo es.

(i) Si $U_1(n)$ y $U_2(n)$ son, respectivamente, soluciones de las ecuaciones en diferencias lineales (1) y (2) cuyos coeficientes son iguales, entonces $U(n)=C_1U_1(n)+C_2U_2(n)$ es una solución de la ecuación lineal en diferencias (3) cuyos coeficientes son iguales a los de las ecuaciones anteriores y cuyo termino no homogéneo es $\{C_1R(n)+C_2S(n)\}$, donde $R(n)$ y $S(n)$ son los términos no homogéneos de las ecuaciones (1) y (2), respectivamente. En el caso especial de que alguna de las funciones $U_1(n)$ y $U_2(n)$ sea una solución general, entonces $U(n)$ también es solución general de la ecuación (3).

Si se eligen $S(n)=0$ y $C_1=C_2=1$, esta proposición implica lo siguiente:

(ii) Una solución general de la ecuación lineal en diferencias (1), es la suma de una solución particular de la propia ecuación y una solución general de la ecuación lineal en diferencias homogénea obtenida haciendo igual a 0 el segundo miembro de (1).

Por lo tanto, el problema de resolver la ecuación (1) se ha separado en dos problemas. Se llamara solución homogénea de la ecuación (1), a una solución general de la ecuación en diferencias lineal homogénea obtenida haciendo el segundo miembro de (1) igual a cero.

Cuando se resuelve una ecuación en diferencias lineal homogénea, es importante la siguiente proposición, la cual es consecuencia de (i) en el caso en que $R(n) = S(n) = 0$.

(iii) Si dos funciones $U_1(n)$ y $U_2(n)$ son soluciones de una ecuación en diferencias lineal homogénea, entonces $U(n) = C_1U_1(n) + C_2U_2(n)$ es también solución de la misma ecuación, para cualquier par de constantes C_1 y C_2.

Aplicando repetidamente esta proposición, se puede generalizar de tal forma que se cumple para el caso en que el número de soluciones es más de dos.

2.1.1 Soluciones generales de Ecuaciones en Diferencias lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Definición 2.4: La siguiente se llama Ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.

$$U(n+2) + aU(n+1) + bU(n) = 0, \qquad b \neq 0 \qquad (4)$$

supóngase la ecuación (4) posee una solución de la forma

$$U(n) = e^n, \qquad e \neq 0. \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4), se tiene

$$e^{n+2} + ae^{n+1} + be^n = 0.$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación por e^n, se tiene la ecuación

$$e^2 + ae + b = 0, \qquad (6)$$

que *e* debe satisfacer.

De forma inversa, si e satisface (6), la ecuación (5) es ciertamente una solución de (4).

Definición 2.5: La ecuación (6) se llama ecuación característica de la ecuación (4) y las raíces de (5) se llaman raíces características.

La ecuación (6) es cuadrática y, en general, tiene e_1 y e_2. Como es bien conocido, estas raíces están dadas por la siguiente formula

$$e_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}), \qquad e_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b})$$

Empleando estas raíces e_1 y e_2, se puede resolver el problema. Sean C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Hágase

$U(n) = C_1 e_1^n + C_2 e_2^n, \qquad si \qquad e_1 \neq e_2 \qquad (7)$

$U(n) = (C_1 + C_2 n) e_1^n, \qquad si \qquad e_1 = e_2$[3] $\qquad (8)$

Entonces $U(n)$ es una solución general de la ecuación (4). Se demostrara este resultado. Puesto que las raíces pueden ser números complejos, $U(n)$ puede tener forma compleja.

Demostración: basta probar que
1. $U(n)$ es solución de (4), y
2. Se puede imponer arbitrariamente una condición inicial.

Hemos visto ya que e_1^n y e_2^n son soluciones de (4), así que para demostrar 1 solamente nos falta demostrar que en el caso $e_1 = e_2$, ne_1^n es solución de (4). Si $U(n) = ne_1^n$, entonces

$U(n+2) = (n+2)e_1^{n+2} = ne_1^{n+2} + 2e_1^{n+2}$,

$U(n+1) = ne_1^{n+1} + e_1^{n+1}$.

Por lo tanto,

$U(n+2) + aU(n+1) + bU(n) = ne_1^n(e_1^2 + ae_1 + b) + e_1^{n+1}(2ae_1 + 1)$.

Por lo tanto ne_1^n es una solución de la ecuación (4). De esta manera, se sabe ahora que e_1^n y e_2^n en la ecuación (7) y e_1^n y ne_1^n en la ecuación (8), son soluciones de (4). De acuerdo con (iii), que establece la característica de una ecuación en diferencias lineal homogénea, queda probado 1. Ahora se prueba 2. Si se sustituye *n* por 0 y 1 en la ecuación (7), resulta

$$U(0) = C_1 + C_2, \qquad U(1) = C_1 e_1 + C_2 e_2.$$

Si se hace $U(0) = \alpha$ y $U(1) = \beta$, entonces

$$\alpha = C_1 + C_2, \qquad \beta = C_1 e_1 + C_2 e_2.$$

Puesto que $e_1 - e_2 \neq 0$, resolviendo estas ecuaciones, se tiene

$$C_1 = \frac{\beta - e_2 \alpha}{e_1 - e_2}, \qquad C_2 = \frac{\alpha e_1 - \beta}{e_1 - e_2}.$$

Por lo tanto, dados α y β arbitrariamente, si se determinan C_1 y C_2 de las ecuaciones anteriores, se cumple que

$$U(0) = C_1 + C_2 = \alpha, \qquad U(1) = C_1 e_1 + C_2 e_2 = \beta,$$

[3] Denominadas raíces múltiples.

esto es, se satisface ciertamente la condición inicial. De esta manera, se ha demostrado que la ecuación (7) satisface 2. En el caso en el que la raíz es múltiple, se puede seguir el mismo procedimiento (Verificar).

2.1.2 Soluciones particulares de ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Definición 2.6: Una solución general de la ecuación no homogénea

$$U(n+2) + aU(n+1) + b(n) = R(n), \quad b \neq 0, \qquad (9)$$

es, como se establece en (ii) la suma de una solución general de la correspondiente ecuación homogénea (una solución homogénea) y una solución particular de la ecuación (9). La ecuación característica y las raíces características de (4) son también llamadas así con respecto a la ecuación (9).

Para encontrar una solución particular de (9), el método de los coeficientes indeterminados también es muy apropiado y útil. Por lo que se refiere a la forma supuesta de una solución particular, también es valida una regla semejante a la que se cumple para as ecuaciones de primer orden. Sean e_1 y e_2 las raíces características de la ecuación (9) y $P_N(n)$ y $Q_N(n)$ polinomio en *n* de grado *N*. en este caso, si $R(n) = \alpha^n P_N(n)$, se puede encontrar una solución particular $U^*(n)$ de (9) haciendo

$$\begin{cases} U^*(n) = \alpha^n Q_N(n), & si \quad \alpha \neq e_1 \ \ y \ \alpha \neq e_2, \\ U^*(n) = \alpha^n n Q_N(n), & si \quad \alpha = e_1 \neq e_2 \ \ o \ \alpha = e_2 \neq e_1, \\ U^*(n) = \alpha^n n^2 Q_N(n), & si \quad \alpha = e_1 = e_2. \end{cases}$$

Si las constantes α son números complejos, la clasificación anterior incluye el caso en que $R(n)$ es el producto de un polinomio en *n* por una suma de funciones trigonometriítas. Si

$$R(n) = (\beta\, sen\, \varphi n + \gamma \cos \varphi n) r^n P_N(n),$$

se puede hacer

$$U^*(n) = (k_1\, sen\, \varphi n + k_2 \cos \varphi n) r^n Q_N(n)$$

y así sucesivamente, según la clasificación dada anteriormente. Pero incluso si $R(n)$ es de la forma anterior, a veces es conveniente considerarla como la parte real de una función de valor complejo y usar el teorema de De Moivre.

2.1.3 Ecuaciones en diferencias lineales de tercer orden o superior

Definición 2.7: Los métodos de solución ya mencionados también se pueden aplicar a ecuaciones en diferencias lineales de orden tres o mayor. Puesto que la ecuación característica de este caso es una ecuación algebraica de grado *N*, el numero de raíces es *N*. Según sea *e* una raíz simple *p* una de multiplicidad *k*, defínase una función mediante Ce^n ó

$$(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + ... + C_k n^{k-1})e^n, \qquad (10)$$

cada una de las cuales corresponde a un término de la ecuación (7) y (8), respectivamente. Si se hace la suma de dichas funciones, se tiene una función que contiene *N* constantes arbitrarias. Aunque se omite la demostración, se puede probar que esa función es una solución general de la ecuación homogénea, como la del caso de segundo orden.

Si una raíz compleja es de multiplicidad *k*, su conjugada compleja también es raíz de multiplicidad *k*. Por lo tanto, en este caso, basta remplazar los coeficientes $C_1 e^n$ de n^{i-1} en la ecuación (10) con la expresión de la formula

$$U(n) = Cr^n \cos(\theta n) + C' r^n sen(\theta n).$$

Pero en muchos casos, a diferencia del caso de segundo orden, resulta muy laborioso resolver las ecuaciones características.

Para encontrar una solución particular, si el término no homogéneo de la ecuación es $\alpha^n P_m(n)$ y si α coincide con una raíz *e* de multiplicidad *k*, se puede hacer

$$U^*(n) = \alpha^n n^k Q_m(n).$$

2.2 Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias

Definición 2.8: Las ecuaciones en diferencias tratadas hasta ahora consisten en una sola ecuación en una función incógnita. Un conjunto de *N* ecuaciones en diferencias de *N* funciones incógnitas se llama sistema de ecuaciones en diferencias simultáneas. Para resolver el sistema se trata de eliminar $(N-1)$ funciones de las *n* ecuaciones para formar una ecuación en diferencias en una sola función.

Ejemplo:

$$\begin{cases} U(n+1) - V(n) = 0, \\ V(n+1) - 4U(n) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

La primera ecuación se escribe como $U(n+2) - V(n+1) = 0$. De esta y la segunda ecuación, se tiene

$$U(n+2) - 4U(n) = 0.$$

Si luego se remplaza, por ejemplo, la segunda ecuación del sistema con la ecuación en diferencias de $U(n)$ anterior, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} U(n+1) - V(n) = 0, \\ U(n+2) - 4U(n) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Siguiendo el mismo procedimiento, de este nuevo sistema se obtiene la segunda ecuación del sistema original. Por lo tanto, se puede elegir cualquiera de los dos sistemas.

La segunda ecuación del nuevo sistema es la ecuación en diferencias lineal de segundo orden cuyas raíces características son ± 2. Por consiguiente, una solución general de la ecuación es $U(n) = C_1 2^n + C_2(-2)^n$.

En seguida se obtiene

$$V(n) = U(n+1) = C_1 2^{n+1} + C_2(-2)^{n+1}$$

de la primera ecuación. Dados los valores iniciales $U(0)$ y $V(0)$, se tiene $U(0) = C_1 + C_2$, y $V(0) = 2C_1 - 2C_2$. De estas ecuaciones, se determinan C_1 y C_2. Además, dado que $U(1)$ se determina por $V(0)$, la condición de unicidad para $U(n)$ se cumple. Por consiguiente $V(n)$ resulta determinar de manera única de la primera ecuación del sistema. De esta manera dicha pareja de funcione es una solución general del sistema.

2.2.1 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Primeramente se considera una solución general del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} U(n+1) &= aU(n) + bV(n) \\ V(n+1) &= cU(n) + dV(n) \end{aligned} \qquad (3).$$

Supóngase que

$$U(n) = Ce^n, \qquad V(n) = C'e^n, \qquad e \neq 0. \qquad (4)$$

Donde al menos una de las constantes C y C' no es 0, sustituyendo estas expresiones en (3) y dividiendo por e^n, se tiene

$$\begin{aligned} (e-a)C - bC' &= 0 \\ -cC + (e-d)c' &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Eliminando C y C' de este sistema, se obtiene

$$(e-a)(e-d) - (-b)(-c) = 0. \qquad (6)$$

Recíprocamente, si se satisface (6) entonces (5) tiene una solución tal que no ambas C y C' son cero. De este hecho se ve que si e satisface (6), entonces la pareja $U(n)$, $V(n)$ es una solución del sistema (3). La ecuación (6) se llama ecuación característica y sus raíces se llaman raíces características. Si se escribe la ecuación (6) en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} e-a & -b \\ -c & e-d \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$

la correspondencia entre (6) y el sistema (3) se ve más fácilmente. Además, obsérvese que si el termino constante $(ad - bc)$ de (6) es 0, existe solamente una solución no nula.

Una vez encontradas las raíces características, la razón de los coeficientes C y C' en (4) se determina de (5) utilizando la primera o la segunda ecuación. Se supone que b y c no son ambas cero. Si las raíces características e_1 y e_2 no son iguales, usando los coeficientes determinados en esta forma, se puede hacer

$$U(n) = C_1 e_1^n + C_2 e_2^n, \qquad V() = C_1' e_1^n + C_2' e_2^n \qquad (8)$$

Si las raíces características e_1 y e_2 son iguales, en este caso la ecuación tiene raíces múltiples, se hace

$$U(n) = (C_1 + C_2 n)e_1^n, \qquad V(n) = (C_1' + C_2' n)e_1^n. \qquad (9)$$

Sin embargo, se debe hacer notar que C y C' no son necesariamente proporcionales. Para determinar los coeficientes se debe sustituir (9) en el sistema (3).

Ejemplo:

$$U(n+1) = U(n) + V(n),$$
$$V(n+1) = -U(n) + V(n).$$

Las raíces de la ecuación característica $(e-1)^2 + 1 = 0$, son $e_1 = 1 + i$ y $e_2 = 1 - i$, de (5), $C_1' = iC_1$ y $C_2' = -iC_2$. Por lo tanto

$$U(n) = C_1(1+i)^n + C_2(1-i)^n,$$
$$V(n) = iC_1(1+i)^n - iC_2(1-i)^n.$$

para expresar estas funciones en forma real se escribe $1 \pm i = \sqrt{2}(\cos(45^o) \pm i sen(45^o))'$,

Entonces

$$U(n) = (\sqrt{2})^n \{C\cos(45^o n) + C' sen(45^o n)\}$$
$$V(n) = (\sqrt{2})^n \{C'\cos(45^o n) - C sen(45^o n)\}.$$

Este resultado se puede obtener también como sigue. Puesto que $U(n)$ satisface la ecuación de segundo orden cuya ecuación característica es igual a la dada anteriormente,

$$U(n) = (\sqrt{2})^n \left\{ C\cos(45^o\, n) + C' sen(45^o\, n) \right\},$$

de la primera ecuación del sistema,

$$\begin{aligned} V(n) &= U(n+1) - U(n) \\ &= (\sqrt{2})^{n+1} \left\{ C\cos(45^o\, n + 45) + C' sen(45^o\, n + 45) \right\} \\ &\quad - (\sqrt{2})^n \left\{ C\cos(45^o\, n) + C' sen(45^o\, n) \right\}, \end{aligned}$$

2.2.2 Sistemas no homogéneos

Definición 2.9: Si un sistema lineal es no homogéneo, entonces una solución general del sistema es la suma de una solución particular del mismo y una solución general del correspondiente sistema homogéneo. Para encontrar una solución particular, se puede emplear el método de los coeficientes indeterminados.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} &U(n+1) - V(n) = n, \\ &V(n+1) - 4U(n) = 0. \end{aligned}$$

Dado que las raíces características son distintas de 1. se puede hacer

$$\begin{aligned} &U(n) = k_1 + k_2 n, \\ &V(n) = k_1' + k_2' n. \end{aligned}$$

sustituyendo estas expresiones en el sistema se tiene

$$\begin{aligned} &k_1 + k_2(n+1) - k_1' - k_2' n = n, \\ &k_1' + k_2'(n+1) - 4k_1 - 4k_2 n = 0. \end{aligned}$$

comparando los coeficientes de las potencias de n, resulta

$$\begin{aligned} &k_1 + k_2 - k_1' = 0, && k_1' + k_2' - 4k_1 = 0, \\ &k_2 - k_2' = 1. && k_2' - 4k_2 = 0. \end{aligned}$$

cuya solución es

$$k_1 = -\frac{5}{9}, \qquad k_2 = -\frac{1}{3}, \qquad k_1' = -\frac{8}{9}, \qquad k_2' = -\frac{4}{3}.$$

Por lo tanto una solucion general es

$$\begin{aligned} &U(n) = C_1 2^n + C_2(-2)^n - \frac{5}{9} - \frac{1}{3}n, \\ &V(n) = C_1 2^{n+1} + C_2(-2)^{n-1} - \frac{8}{9} - \frac{4}{3}n. \end{aligned}$$

3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1 Analogías entre el cálculo de diferencias y el cálculo diferencial

Al definir la derivada de una función como limite de cociente de diferencias se deducen interesantes analogías entre el cálculo de diferencias finitas y el cálculo diferencial.

Definición 3.1: Dada una función y, se denomina derivada de dicha función a una nueva función Dy, cuyo valor en x es

$$Dy(x) = \lim_{x \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$$

D es el operador de diferenciación que aplicado a una función da lugar a la derivada de dicha función. El valor de $\frac{[\Delta y(x)]}{h}$ es la pendiente de la recta que une los puntos de la representación grafica de y correspondientes a unas abcisas x y $x+h$; el valor de $Dy(x)$ es la pendiente de la tangente geométrica en x. Por ejemplo, dado que

$$\Delta x^2 = 2xh + h^2$$

Entonces tenemos

$$Dx^2 = \lim_{h \to 0} \left(\frac{2xh + h^2}{h} \right) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

las sucesivas diferenciaciones de una función se indican con potencias sucesivas del operador D; así, la segunda derivada de y se representa por $D^2 y$ y proviene de $D(Dy)$, la tercera derivada se indica por $D^3 y$, etc.

Consideremos ahora la operación inversa a la diferenciación. Si una función Y es tal que $DY = y$, se dice que Y es la función primitiva de y. Así el operador inverso de diferenciación es D^{-1} y escribiremos $Y = D^{-1} y$ o $Y = \int y$ la denominación para Y de integral indefinida de la función y. Obsérvese que hay un numero infinito de integrales indefinida de una función y, puesto que $DY = y$ y también $D(Y + C) = y$, siendo C una constante cualquiera.

Calculo en diferencias	Calculo diferencial
1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$	1. $Dy(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$
2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \qquad n = 1$	2. $D^n y = D(D^{n-1} y) \qquad n = 1,2,\ldots$
3. $\Delta(Cy) = C\Delta(y)$	3. $D(Cy) = CDy$
4. $\Delta(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 \Delta(y_1) + C_2 \Delta(y_2)$	4. $D(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 D y_1 + C_2 D y_2$
5. si y es un polinomio de grado n, $\Delta^n y$ es constante y las diferencias de orden superior son nulas.	5. Si y es un polinomio de grado n, $D^n y$ es constante y las derivadas de orden superior son nulas.
6. $\Delta x^{(n)} = n x^{(n-1)}$	6. $Dx^n = nx^{n-1}$
7. $\Delta(u \cdot v) = (Eu)\Delta v + v \Delta u$	7. $D(u \cdot v) = uDv + vDu$
8. $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$	8. $D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu - uDv}{v^2}$
9. si $\Delta Y = y, \Delta^{-1} y = y + C$ siendo C una función periódica.	9. si $DY = y, \int y = Y + C$ siendo C una función periódica.

Tabla 3.1 Resultados del cálculo diferencial y analogías Correspondientes al cálculo de diferencias.

3.2 La ecuación en diferencias como aproximación a la ecuación diferencial.

Dada la estrecha relación existente entre el operador en diferencias finitas Δ y el operador derivada D no es extraño encontrar muchas conexiones entre las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales. Consideraremos la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes.

Sea y una función definida para valores reales de x en un intervalo $a \leq x \leq b$, tal que satisfaga una ecuación diferencial. Entonces,

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B \qquad\qquad a \leq x \leq b \qquad\qquad (1)$$

siendo A y B constantes arbitrarias y además $A \neq 0$. Supongamos que el valor de y para $x = a$ sea dado, es decir, que debemos hallar una función y que satisfaga a la ecuación diferencial con condición inicial

$$y(a) = y_0$$

donde y_0 es una constante dada.

Para lograr una aproximación a esta ecuación diferencial a través de una ecuación en diferencias será preciso un conjunto discreto de valores de x para los que pueda definirse la ecuación en diferencias. Por lo tanto escogemos un numero entero positivo cualquiera n y dividimos el intervalo $[a,b]$ en n partes iguales, cada una de longitud

$$h = \frac{b-a}{n}$$

siendo los puntos de subdivisión

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \ldots \qquad x_n = a + nh = b$$

Simplifiquemos la notación haciendo

$$y_k = y(x_k) = y(x_0 + kh)$$

además $\qquad Dy(x_k) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_k}{h}$

parece bastante razonable sustituir la ecuación diferencial por la ecuación en diferencias

$$\frac{\Delta y_k}{h} = Ay_k + B \qquad\qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad\qquad (2)$$

o bien

$$y_{k+1} = (1 + Ah)y_k + Bh \qquad k = 0,1,2,\ldots n-1$$

La condición inicial indica que el valor y_0 es dado.

La ecuación en diferencias es una ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes que puede resolverse fácilmente aplicando la función de valor de equilibrio entonces tenemos

$$y^* = \frac{Bh}{1-(1+Ah)} = -\frac{B}{A}$$

y por tanto

$$y_k = (1+Ah)^k \left(y_0 \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} \qquad\qquad k = 0,1,2,\ldots n-1$$

Si partiendo de la ecuación en diferencias (2) hacemos que

$$h \to 0 \qquad y \qquad x_k = x_0 + kh \to x$$

es evidente que dicha ecuación se convierte en la ecuación diferencial (1). Será por tanto de interés averiguar si la solución de la ecuación en diferencias tiende a una solución de la ecuación diferencial al imponer los mismos límites. Demostración,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim y_k \\ &= \lim \left[(1+Ah)^k \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} \right] \\ &= \left[\left(y_0 + \frac{B}{A} \right) \lim (1+Ah)^k - \frac{B}{A} \right] \\ &= \left[\left(y_0 + \frac{B}{A} \right) \lim (1+Ah)^{\frac{x-x_0}{h}} - \frac{B}{A} \right] \end{aligned}$$

escribiendo $Ah = e$ obtenemos

$$\lim \left[(1+e)^{\frac{1}{e}} \right]^{A(x-x_0)}$$

definimos a *e* como el siguiente limite

$$e = \lim_{e \to 0} (1+e)^{\frac{1}{e}}$$

al pasar el limite, haciendo que $h \to 0$ y siendo A constante, el producto $Ah = e$ tendera también a 0. Por tanto,

$$\lim \left[(1+e)^{\frac{1}{e}} \right]^{A(x-x_0)} = e^{A(x-x_0)}$$

entonces

$$Y(x) = \lim y_k = \left(y_0 + \frac{B}{A} \right) e^{A(x-x_0)} - \frac{B}{A}$$

Puede demostrarse que esta función y es, efectivamente, una solución de la ecuación diferencial (1) calculando su derivada y probando que la igualdad (1) se satisface para todo valor de x comprendido en el intervalo $a \le x \le b$ (Verificar).

En particular para $B = 0$ tenemos la ecuación diferencial

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) \qquad (3)$$

es decir, que el tipo instantáneo de cambio de la función y respecto a x es proporcional al valor de la función y. Entonces

$$y_{k+1} = (1 + Ah)y_k \qquad k = 0,1,2,\ldots n-1$$

de solución

$$y_k = y_0(1 + Ah)^k$$

bajo las condiciones restrictivas ya descritas la solución correspondiente a la ecuación diferencial (3) viene dada por la función exponencial

$$y(x) = y_0 e^{A(x-x_0)}$$

siendo y_0 el valor dado para y cuando $x = x_0$. Si y toma solamente valores positivos se dice que y sigue un crecimiento exponencial si $A > 0$ o que sigue un decrecimiento exponencial cuando A<0 cuando x crece a partir del valor inicial $x = x_0$. El crecimiento exponencial viene a ser, por tanto, el análogo en forma continua del crecimiento en progresión geométrica, que es discreto.

3.3 Un modelo probabilístico sobre el aprendizaje

Supongamos que deseamos estudiar como varia el comportamiento de un sujeto sometido a unas condiciones dadas de experimentación. Imaginemos para ello una serie de sucesos que empiezan con la percepción de un estimulo, al que sigue la realización de una respuesta y acaban con la aparición de un hecho circunstancial externo.

El comportamiento de un individuo se mide mediante la probabilidad p de que de una respuesta determinada, durante un intervalo de tiempo especificado, una vez que la secuencia de experimentos se ha iniciado. El líneas generales, p, indica el nivel de disposición del sujeto para dar una respuesta; su valor crece y decrece, según que los factores circunstanciales favorezcan o se opongan a la repetición de aquella.

Si imaginamos un experimento en el que se somete repetidamente a un sujeto a esta serie de sucesos, podemos dividir dicho experimento en varias etapas, siendo cada una de las cuales una prueba en la que el sujeto recorre la serie completa. La actuación del sujeto puede considerarse como una función del número de la prueba n lo que nos permite definir p_n como la probabilidad de obtener una respuesta dada la prueba número n. El número p_0 se considerara como el valor inicial que indica la disposición del sujeto a emitir la respuesta esperada en el momento en que se inicia por primera vez el experimento. A partir de p_n se define la función de p para el dominio de valores de $n = 0,1,2,\ldots$. Por ser p una función de probabilidad tendrá que ser

$$0 \leq p_n \leq 1 \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

siendo los valores extremos 1 y 0 los de certeza absoluta con respecto a que se de o no la respuesta.

Suponemos, en primer lugar, que p_{n+1} depende solamente de p_n y no de los valores anteriores a p_n. En otras palabras, la actuación del sujeto en la prueba $n+1$, que se considera dependiente de lo acontecido en la prueba n, lo que no es sino decir que el modelo que acabamos de exponer es markoviano o que goza de la propiedad de Markov. Siguiendo a Bush y Mosteller, supondremos para simplificar que la dependencia entre p_{n+1} y p_n es lineal, es decir, que al representar gráficamente p_{n+1} a partir de p_n resultara una línea recta. La forma explicita de esta relación lineal será la ecuación.

$$p_{n+1} = a + mp_n \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

siendo m el coeficiente angular o pendiente de la recta esto es la cantidad en que varia p_{n+1} por unidad de incremento p_n y la ordenada en el origen o sea el valor de p_{n+1} cuando $p_n = 0$.

Esta relación lineal podemos escribirla en forma denominada de pérdidas y ganancias. Definimos un parámetro b así

$$m = 1 - a - b$$

con ello, la relación (4) puede escribirse de la forma

$$p_{n+1} = p_n + a(1 - p_n) - bp_n \qquad n = 0,1,2,\ldots. \qquad (5)$$

Si la probabilidad de que el sujeto actué en forma determinada en la prueba numero n es p_n, con $1 - p_n$ se indicara e incremento máximo posible que puede tener lugar partiendo de p_n y $-p_n$ se designara el decremento máximo posible que puede sufrir p_n al efectuarse la prueba $n+1$. Ello es consecuencia de que el valor de p_n ha de quedar comprendido ente 0 y 1. La ecuación (5) puede interpretarse diciendo que la variación en la probabilidad de obtener respuesta $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$ es proporcional al incremento o ganancia máxima posible y al decremento o perdida máxima posible. Las constantes de proporcionalidad son, respectivamente, a y b, midiéndose, por tanto, con el parámetro a aquellas circunstancias que incitan a que se de la respuesta (premio) y con b aquellas otras que desanimas al sujeto para que no de la respuesta (castigo).

Los parámetros a y b presentan unas limitaciones originadas por el hecho de que p_n y p_{n+1} quedan comprometidos entre 0 y 1. Cuando $p_n = 0$, se tendrá que $p_{n+1} = a$, por lo que $0 \le a \le 1$ mientras que si $p_n = 1$, será $p_{n+1} = 1 - b$, por lo que $(1-b)$ tendrá que estar comprometido entre 0 y 1, lo que indica que $0 \le b \le 1$, estas son las condiciones necesarias que han de satisfacer a y b para que p_{n+1} quede comprometido entre 0 y 1.

Cuando $a = 0$, la ecuación describe una situación en la que no se da compensación o premio alguno cuando se produce la respuesta, mientras que cuando $b = 0$ significa que no se somete al sujeto a ningún castigo si da la respuesta. Si $a = b$, la ecuación indica que la compensación y el castigo son iguales.

Bush y Mosteller “el cambio progresivo que se da en la probabilidad de obtener una respuesta en un experimento como el del corredor de Graham Gagne, o la caja de Skinner, en los que se hace aparecer las mismas circunstancias cada vez que se obtiene la respuesta esperada” consideremos:

Ejemplo:

Si $a = 0.4$ y $b = 0.1$, la ecuación (5) se convierte en

$$p_{n+1} = p_n + 0.4(1 - p_n) - 0.1p_n$$

o sea

$$p_{n+1} = 0.5p_n + 0.4 \qquad\qquad n = 0,1,2,\ldots \quad (6)$$

Suponiendo que el valor inicial $p_0 = 0.2$, podemos calcular sucesivamente $p_1 = 0.5\cdot(0.2) + 0.4 = 0.5$, $p_2 = 0.5\cdot(0.5) + 0.4 = 0.65,\ldots$. Para resolver la ecuación (6) y obtener con ello p_n para un valor cualquiera n, utilizaremos el valor de equilibrio con $A = 0.5$ y $B = 0.4$, con lo que

$$p^* = \frac{B}{1-A} = \frac{0.4}{1-0.5} = 0.8$$

por lo que obtenemos con valor inicial $p_0 = 0.2$,

$$p_n = (0.5)^n \cdot (0.2 - 0.8) + 0.8$$

o bien

$$p_n = -0.6\cdot(0.5)^n + 0.8 \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Esta solución expone la forma en que la probabilidad de obtener la respuesta varia a medida que se suceden las pruebas. Dado que $0 < a < 1$ y $p_0 < p^*$, la sucesión $\{p_n\}$ será monótona creciente y de limite $p^* = 0.8$. Por tanto, en pruebas repetidas en las que la proporción entre compensaciones y castigos se establezca en 4 a 1, las probabilidades p_n y $1 - p_n$, de que se de y no se de respuesta, tienden a los valores limites p^* y $1 - p^*$, que guardan entre si la misma proporción de 4 a 1.

Volviendo al caso general, observamos que la ecuación (5) puede escribirse de la forma explicita siguiente

$$p_{n+1} = (1 - a - b)p_n + a \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (7)$$

remplazando $1 - a - b = A$ y $a = B$, tenemos

$$p^* = \frac{B}{1-A} = \frac{a}{a+b}$$

siempre que a y b no sean ambos nulos a la vez. Se obtiene, por tanto, la solución

$$\begin{aligned} p_n &= (1-a-b)^n\left(p_0 - \frac{a}{a+b}\right) + \frac{a}{a+b} \qquad si \qquad a+b \neq 0 \\ p_n &= p_0 \qquad si \qquad a+b=0 \qquad con \qquad n = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (8)$$

Teniendo en cuenta las limitaciones $0 \le a \le 1$ y $0 \le b \le 1$ se observa que la constante $A = 1 - a - b$ queda comprendida entre -1 y 1, valores extremos que adopta A solamente en el caso en que a y b sean ambos iguales a 1 o a 0. En el caso en que $a = b = 1$, será $A = -1$, con lo que $\{p_n\}$ será una sucesión oscilante finita entre los valores p_0 y $1 - p_0$. Pero en los demás casos la sucesión $\{p_n\}$ será convergente, de limite p_0 cuando $a=b=0$, o de limite p^* para los demás valores a y b. Si es $0<a+b<1$, resultara $0<A<1$ y la sucesión $\{p_n\}$ será monótona decreciente de limite p^* si $p_0>p^*$, monótona creciente de limite p^* si $p_0<p^*$ y constante igual a p^* si $p_0=p^*$. Si $1<a+b<2$, tendremos que $-1<A<0$, y $\{p_n\}$ será una sucesión de limite p^*. El caso particular en que $a+b=0$ da lugar a una sucesión constante en la que cada elemento es p^*.

Consideremos dos casos mas, primero $a=0$, se supone que no se ofrece compensación alguna cuando se produce respuesta. La ecuación en diferencias (5) se convierte en

$$p_{n+1}=(1-b)p_n \qquad (9)$$

de solución

$$p_{n+1}=(1-b)^n p_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

que describe el decrecimiento continuo que sufre la probabilidad de obtener respuesta a partir de la probabilidad de obtener a partir de la probabilidad inicial p_0. Representado gráficamente p como función de n, se obtiene la curva de extinción experimental.

En el caso dos $a=b$, se dan por igual compensación y castigo al sujeto cada vez que da la respuesta. Dejando aparte los casos extremos en que $a=b=0$ y $a=b=1$, se tiene que cuando $a=b$ la cantidad $(1-a-b)^n \to 0$ cuando $n\to\infty$ y aplicando la relación (8) se obtiene que $p_n\to p^*$, que es igual a 0.5. Esto es, a medida que aumenta el número de pruebas la respuesta tiende a aparecer en la mitad de las mismas. El equilibrio entre compensación y castigo da lugar, a largo plazo, a un comportamiento indeciso del sujeto, que, que por igual, da respuesta o se abstiene de darla.

4. Conclusiones

El estudio de las ecuaciones en diferencias contribuye a que el estudiante aborde con menos dificultad los sistemas discretos. Además estos sistemas tienen la ventaja de ser modelos mas ajustados a la realidad. Aunque a nivel Matemático no se le ha dado gran importancia a el estudio de los sistemas discretos en otras profesiones como Ingeniería y Economía entre otras se hace necesario su estudio.

Los sistemas continuos son una alternativa para la solución de los problemas prácticos que no tienen respuesta en sistemas discretos, la investigación que se puede hacer directamente en ecuaciones en diferencias por ejemplo puede permitir encontrar nuevas soluciones comúnmente representadas en modelos continuos.

Bibliografía:

Takahashi, Takehito.
Ecuaciones en diferencias con aplicaciones.
México: grupo editorial iberoamericana.

Goldberg, Samuel.
Ecuaciones en diferencias finitas. Barcelona:
Marcombo S.A. 1964.

Dennis G, Zill.
Ecuaciones diferenciales con aplicaciones.
Grupo editorial iberoamericana.

Kenneth, Bogart.
Matemática discretas.

Varona Malumbres, Juan Luis.
Métodos clásicos de resolución de ecuaciones en diferencias ordinarias.
Universidad de la Rioja
http://personales.ya.com/casanchi/mat/varona01.htm.

Mahía, Ramón
Formulación y solución de ecuaciones lineales en diferencias con coeficientes constantes en el contexto del análisis.
Junio 1998.
http://www.uam.es/otroscentros/klein/doctras/doctra9804.pdf.

Neuman, Carlos Enrique.
Ecuaciones en Diferencias.
Septiembre 14, 2000.
http://www.intec.ceride.gov.ar/CN/EcDife5.pdf