บทที่ 3

ไอเกนแวลลิว และ ไอเกนเวกเตอร์ (Eigenvalue and Eigenvector)

ในกรณี การแปลงเชิงเส้น $T: V \to V$ มี A เป็นเมทริกซ์การแปลงของ T ที่ทำให้ $T(v) = Av$ สำหรับทุก $v \in V$ ถ้ามีสเกลาร์ λ ที่ทำให้ มีเวกเตอร์ v ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ที่ทำให้ $Av = \lambda v$ แล้วจะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น ซึ่งมีการประยุกต์ใช้ในหลายสาขา

3.1 ไอเกนแวลลิว และไอเกนเวกเตอร์ (Eigenvalue and Eigenvector)

บทนิยาม 3.1.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เรียกสเกลาร์ λ ที่ทำให้สมการ

$$Av = \lambda v \qquad (1)$$

มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ (Nontrivial solution) ว่า *ไอเกนแวลลิว* (Eigenvalue) ของ A และเรียกเวกเตอร์ v ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์นั้น ว่า *ไอเกนเวกเตอร์* (Eigenvector) สำหรับ ค่า λ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงแสดงว่า $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ สำหรับ ไอเกนแวลลิว $\lambda = 3$ ของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

และ $\lambda v = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

แสดงว่า $Av = \lambda v$

ดังนั้น $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ สำหรับ ไอเกนแวลลิว $\lambda = 3$ ■

การหาไอเกนแวลลิว ของเมทริกซ์ A

พิจารณาจากการหาไอเกนเวลลิว จากตัวอย่างง่าย ๆ ก่อน ดังนี้

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาไอเกนแวลลิวของ A เมื่อกำหนด

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$$

วิธีทำ ให้ λ เป็น eigenvalue ของ A

แสดงว่า $$Av=\lambda v$$

ดังนั้น $$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}$$

$$\lambda\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda-3 & 0\\ -8 & \lambda+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

ผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ เมื่อ

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 0\\ -8 & \lambda+1\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)-(-8)0=0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

$$\lambda=3,\ -1$$

ดังนั้น ไอเกนแวลลิว ของเมทริกซ์ A มี 2 ค่า คือ $\lambda_1=3$ และ $\lambda_2=-1$ ■

สรุปหลักการหาไอเกนแวลลิว

โดยทั่วไป ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ และจากสมการเงื่อนไขตามบนนิยาม

$$Av=\lambda v$$

สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูป ระบบสมการเอกพันธ์ (Homogeneous System) ในรูป

$$(\lambda I-A)v=\bar{0}$$

ซึ่งระบบสมการดังกล่าวจะมีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์เมื่อดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่เป็น 0 นั่นคือ

$$|\lambda I - A| = 0$$

แล้วแก้สมการ เพื่อหาไอเกนแวลลิว λ ตามต้องการ

หมายเหตุ

สมการ $|\lambda I - A| = 0$ เพื่อใช้ในการหาไอเกนแวลลิว เรียกว่า *สมการแคแรกเตอร์ริสติก (Characteristic Equation)* ของ A และ $|\lambda I - A|$ จะอยู่ในรูปพหุนามของ λ ที่มีดีกรี n ดังนี้

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \ldots + c_n$$

เรียกพหุนามนี้ว่า *พหุนามแคแรกเตอร์ริสติก (Characteristic Polynomial)*

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาไอเกนแวลลิวของ A เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอร์ริสติก คือ

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 - 2 \\ 0 - (-1) & \lambda - 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)\lambda - 1(-2) = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1, 2$$

ดังนั้น ไอเกนแวลลิว ของเมทริกซ์ A มี 2 ค่า คือ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 2$ ■

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาไอเกนแวลลิวของ A เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอร์ริสติก คือ

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2)-(-5)(1) = 0$$
$$\lambda^2-4+6 = 0$$
$$\lambda^2+2 = 0$$

แสดงว่า ไม่มี Eigenvalue ที่เป็นจำนวนจริง ■

ตัวอย่าง 3.1.5 จงหาไอเกนแวลลิวของ A เมื่อกำหนด

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & -17 & 8\end{bmatrix}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอร์ริสติก คือ

$$|\lambda I - A| = 0$$
$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -4 & 17 & \lambda-8\end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4 = 0$$

โดยการแยกตัวประกอบโดยใช้ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem) จะได้ว่า

แทนค่า $\lambda=4$ ในพหุนามด้านซ้ายจะเห็นว่า แล้วได้ค่าเป็น 0
เช่น $4^3-8(4)^2+17(4)-4=64-128+68-4=0$
แสดงว่า $(\lambda-4)$ เป็นตัวประกอบแล้วนำไปตั้งหาร

จะได้ว่า $(\lambda-4)(\lambda^2-4\lambda+1)=0$

ดังนั้น ไอเกนแวลลิว ของเมทริกซ์ A มี 3 ค่าคือ $\lambda_1=4,\ \lambda_2=2+\sqrt{3}$ และ $\lambda_2=2-\sqrt{3}$ ■

ทฤษฎีบท 3.1.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ และ λ เป็นจำนวนจริง แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) λ เป็นไอเกนแวลลิวของ A

(2) ระบบสมการ $(\lambda I-A)v = \bar{0}$ มีคำตอบที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

(3) $|\lambda I - A| = 0$

(4) มีเวกเตอร์ $v\neq\bar{0}$ ใน $\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $Av=\lambda v$

จากทฤษฎีบทดังกล่าวเราสามารถสรุปการหาไอเกนสเปซได้ ดังนี้

การหาไอเกนสเปซ ของเมทริกซ์ A

สำหรับแต่ละ λ ที่เป็นไอเกนแวลลิว ที่มีเวกเตอร์ $v \neq \bar{0}$ เป็น ไอเกนเวกเตอร์
จะได้ว่า $Av = \lambda v$ หรือ $|\lambda I - A| v = 0$
เราเรียกสเปซคำตอบของสมการนี้ว่า ***ไอเกนสเปซ (Eigenspace)*** สำหรับค่า λ นั้น
ดังตัวอย่างในการหาต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1. 6 จงหาฐานไอเกนแวลลิวของ A เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หา λ จากสมการแคแรกเทอร์ริสติก

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(\lambda - 5)^2 = 0$$

แสดงว่า ไอเกนแวลลิว ของเมทริกซ์ A มี 2 ค่า คือ $\lambda_1 = 1$ และ $\lambda_2 = 5$
ดังนั้นจะมีไอเกนสเปซของ A อยู่ 2 ไอเกนสเปซ

กรณี 1 ถ้า $\lambda = 5$ จะได้ระบบสมการ คือ

$$|\lambda I - A| v = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ คำตอบ คือ $x_3 = t,\ x_2 = s,\ x_1 = -s$

ดังนั้น $$v = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ เป็นฐานของไอเกนสเปซ สำหรับ $\lambda = 5$

กรณี 2 ถ้า $\lambda = 1$ จะได้ระบบสมการ คือ

$$|\lambda I - A|v = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แก้สมการในทำนองเดียวกัน จะได้

$$v = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

แสดงว่า $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ เป็นฐานของไอเกนสเปซ สำหรับ $\lambda = 1$ ■

การหาไอเกนแวลลิวของเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม

เนื่องจากการหาดีเทอร์มินันท์ ของเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยม เท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก ทำให้การหาเกนแวลลิว หาได้อย่างง่าย ดังนี้

พิจารณา

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

เนื่องจากสมการแคเรกเทอริสติก คือ

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

จะได้ $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0$

ดังนั้น ไอเกนแวลลิว มี 4 ค่า คือ

$$\lambda_1 = a_{11},\ \lambda_2 = a_{22}\ ,\ \lambda_3 = a_{33},\ \lambda_4 = a_{44}$$

ทฤษฎีบท 3.1.2 ถ้า A เป็นเมทริกซ์เชิงสามเหลี่ยมด้านบน หรือด้านล่าง ที่มีขนาด $n \times n$ แล้ว ไอเกนแวลลิวของ A จะเป็นสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก ของ A

ตัวอย่าง 3.1.7 จงหาไอเกนแวลลิวของ A กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านบน

จะได้ว่าไอเกนแวลลิว มี 3 ค่า คือ

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3$ และ $\lambda_3 = 5$ ■

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาไอเกนแวลลิวของ A กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมด้านล่าง

จะได้ว่าไอเกนแวลลิว คือ

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$ และ $\lambda_3 = -4$ ■

การหาไอเกนแวลลิวของเมทริก์ที่อยู่ในรูป A^k

ถ้า λ เป็นไอเกนแวลลิวของ A และ v เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับ λ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ A(Av) &= A(\lambda v) \\ (AA)v &= \lambda(Av) \\ A^2 v &= \lambda(\lambda v) \\ A^2 v &= \lambda^2 v \qquad \text{..............*} \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

โดยหลักการของการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า สำหรับ จำนวนเต็มบวก k ใดๆ

$$A^k v = \lambda^k v \qquad \text{...............**}$$

ทฤษฎีบท 3.1.3 ถ้า λ เป็นไอเกนแวลลิวของ A โดยมี v เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A ที่สอดคล้องกับ λ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ แล้ว λ^k เป็นไอเกนแวลลิวของ A^k โดยมี v เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ A^k ที่สอดคล้องกับ λ^k

ตัวอย่าง 3.1. 9 จงหาไอเกนแวลลิวของ A^5 กำหนด

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จาก ตัวอย่าง 3.1.5 เราทราบว่า

$$\lambda=1 \quad \text{และ} \quad \lambda=5$$

ดังนั้น ไอเกนแวลลิว ของ A^5 คือ

$$\lambda=(1)^5 \quad \text{และ} \quad \lambda=(5)^5$$

นั่นคือ $\lambda=1$ และ $\lambda=5^5$

โดยมีเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอร์ ที่สอดคล้องกับ $\lambda=1$

และมีเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นไอเกนเวกเตอรีที่สอดคล้องกับ $\lambda=5$ ■

บทนิยาม 3.1.2 สเกลาร์ λ จะเรียกว่าเป็นไอเกนแวลลิว ของการดำเนินการเชิงเส้น $T:V\to V$ ถ้ามีเวกเตอร์ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน V ที่ทำให้ $T(v)=\lambda v$ และเรียก v ว่าเป็น *ไอเกนเวกเตอร์* ของ T ที่สอดคล้องกับ λ

หมายเหตุ ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัด โดยมี B เป็นฐานใด ๆ และ $T:V\to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า

1) ไอเกนแวลลิวของ T ย่อมเป็นไอเกนแวลลิวของเมทริกซ์การแปลง $[T]_B$

2) เวกเตอร์ v จะเป็นไอเกนเวกเตอร์ของ T ที่สอดคล้องกับ λ ก็ต่อเมื่อ $[v]_B$ จะเป็นไอเกนเวกเตอร์ของ $[T]_B$ ที่สอดคล้องกับ λ

ตัวอย่าง 3.1.10 จงหาไอเกนแวลลิว และฐานของไอเกนสเปซของการแปลงเชิงเส้น $T:P_2 \to P_2$ ที่กำหนดโดย

$$T(a+bx+cx^2)=(3a-2b)+(-2a+3b)x+(5c)x^2$$

วิธีทำ

$$T(1)=(3(1)-2(0))+(-2(1)+3(0)x+5(0)x^2=3-2x+0x^2$$

$$T(x)=(3(0)-2(1))+(-2(0)+3(1)x+5(0)x^2=-2+3x+0x^2$$

$$T(x^2)=(3(0)-2(0))+(-2(0)+3(0)x+5(1)x^2=0+0x+5x^2$$

จะได้เมทริกซ์การแปลงของ T คือ

$$[T]_B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

จาก ตัวอย่าง 3.1.5 จะได้ $\lambda=1$ และ $\lambda=5$ เป็นไอเกนแวลลิว

1) ถ้า $\lambda=5$ จะได้ฐานของไอเกนสเปซ คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

2) ถ้า $\lambda=1$ จะได้ฐานของไอเกนสเปซ คือ

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

■