ЗА КОНЕЧНОТО И БЕСКОНЕЧНОТО

Отсекогаш прашањето за природата и улогата на бесконечноста во математиката предизвикувало бројни тешкотии како кај филозофите од античко време така и кај денешните математичари. Дали бесконечноста е нешто реално или е пак само "*измислица корисна при сметањето*", како што мислеше Лајбниц? Иако теоријата за множества што ја даде Кантор во минатиот век овозможи да се дефинира и квантифицира бесконечноста на прецизен начин, кај математичарите сеуште постојат две филозофски тенденции: едната става акцент врз корисната примена на бесконечноста, а другата настојува да се ослободи од неа.

"*Повеќе од кое и да е друго прашање, прашањето за безконечноста отсекогаш ги интересирало луѓето повеќе од која и да е друга идеја, идејата за безконечноста ја поттикнувала и будела нивната интелигенција повеќе од кој било друг поим, поимот бесконечност заслужува да биде разјаснет*".

Така зборуваше во 1925 година, еден од најголемите математичари на сите времиња, Давид Хилберт. Дури ни денес не можеме да речеме дека е даден одговор на сите прашања што ги поставува поимот бесконечност, макар биле тие и чисто математички. А тоа е само една од карактеристиките на овој поим, вткаен во историјата на математиката од нејзините почетоци па се до денес.

Бесконечноста во математиката остава простор за многу прашања. На пример, дали една бесконечност може да биде поголема од другата? Дали деловите на бесконечното се конечни или бесконечни? Како да се спореди бесконечноста на точките од една права со оние од рамнината? Настојувајќи да одговорат на овие прашања, научниците честопати запаѓале во парадокси. Дури на крајот од XIX век, со појавата на теоријата на множествата, поимот бесконечност може да биде прецизиран на задоволувачки начин. Но во никој случај не е завршена расправата околу улогата на бесконечноста во математиката.

Во третиот век пред нашата ера античкиот математичар Архимед изработил еден голем труд во врска со пребројувањето на зрна песок што ја исполнуваат површината на целата земја. Бидејќи сите зрна песок не можат да се избројат и така пребројувањето да заврши, Архимед заклучил дека низата од цели броеви нема крај, што значи дека може да биде продолжена до бесконечност. Така бесконечноста ја покажувала својата аритметичка страна пред математичарот кој се обидел да изброи броеви поголеми од вообичаените. Овој аритметички аспект на бесконечноста се појавил подоцна, затоа што многу порано таа ги откривала своите други форми.

Питагорејците (VI век п.н.е.), Зенон (V век п.н.е), Евдокс од Книд (во почетокот на IV век п.н.е.) и Евклид (почетокот на III век п.н.е.), кои што се само најпознатите имиња, веќе го имале забележано тоа. Така, на пример, бесконечноста се појавувала при обидите да се определи некој број со целата негова физичка или геометриска големина. Обидувајќи се бројчено (со цел или рационален број) да го определат односот помеѓу должината на дијагоналата и должината на страната, што под претпоставка е еднаква на 1, кај квадратот, питагорејците дошле до заклучок дека овие две должини се немерливи (што, со современи зборови кажано, значи дека квадратен корен од 2 е ирационален број).

Бесконечноста истотака се појавувала со идејата дека една континуирана големина е делива до бесконечност. Таков е случајот со парадоксите, како оној за зајакот и желката, со кои што Зенон се обидувал да покаже дека движењето е невозможно, бидејќи за да стигне до една точка, телото што се движи мора најпрвин да ја помине половината од растојанието, но пред тоа да ја помине и половината од таа половина, и така натаму, делејќи го патот до бесконечност. Друго објаснување за бесконечноста дал Архимед, кој покажал како може да се измери еден лак на параболата, кога ке се земат се помали и помали сегменти од него.

Значи, античките математичари ја анализирале бесконечноста низ обидите да се брои без крај, да се мерат големини како што се дијагоналата на квадратот или лакот на параболата, или пак да се дефинираат особините на низата. Според Аристотел, првиот теоретичар на бесконечноста и на низите, бесконечноста е "*она што не може да се помине и коешто нема граница*". А штом нема граница, не може да се определи и не може да постои самостојно. Всушност, ако едно нешто е бесконечно, дали тогаш не можеме да кажеме дека и неговите делови се бесконечни? И дали во тој случај ќе се согласиме дека бесконечноста на целото е поголема од онаа на неговите делови?

Така доаѓаме до двата принципа што ги спречувале античките математичари да ја сметат за самостојна или, како што велел Аристотел, "*остварлива*" аксиомата што ја дал Евклид, дека целото е поголемо од еден од неговите составни делови, и тезата дека во тоа цело постојат повеќе бесконечности од кои некои се помали, а некои поголеми. Исто така, дали идејата на Архимед, според која бесконечноста може геометриски да се докаже и физички да се реализира во случајот со зрната песок кои ги има по целата Земја, не е спротивна на анализата на Аристотел, кој бесконечноста ја сфаќал само како негација на она што е конечно.

Аристотел ја оправдувал потребата да се размислува за бесконечноста, но го негирал секое нејзино физичко или математичко постоење. Според него, сигурно е дека математичарот има потреба од одредени поголеми или помали вредности од една дадена големина, но тоа никако не значи дека станува збор за бесконечности што можат да бидат определени, иако не се ограничени. Ако бесконечноста во математиката и припаѓа на категоријата квантитет, тоа е само како потенцијална бесконечност, односно квантитет којшто секогаш може да биде поголем или помал, но само како можност. Оваа победа на потенцијалната над актуелната бесконечност ги мина вековите и дојде до наши дни и покрај големиот удар што и беше зададен во деветнаесеттиот век со теоријата на бесконечните множества, изработена од германскиот математичар Георг Кантор (1829 – 1920).

Овде не можеме да ги наведеме сите оние кои во античко време и во средниот век дискутирале или ја менувале концепцијата на Аристотел како нешто најзначајно, на што се повикувале и филозофите, теолозите и научниците: Епикур, Папус, Проклус, Филопон, Ал Кинди, Ал Најризи, Табит ибн Кира, Авицена и други. Едните мислеле дека бесконечноста не може да биде предмет на размислување, или пак некаква мера. Ако пак го допуштале нејзиното постоење, како што вели античкиот филозоф Проклус (412 – 485), тоа било само "*поради постоење на конечното*". Други пак се согласувале дека една бесконечност може да биде поголема од друга, како што е случајот со множеството на целите позитивни броеви, на пример,кое содржи многу повеќе елементи од множеството на целите парни броеви. Арапскиот научник Табит ибн Кира (836 – 901), кој се согласувал со ова, забележал и тоа дека множествата на целите парни и целите непарни броеви претставуваат случај каде две бесконечности се еднакви.

Така, од математичка гледна точка, се поставуваат следните прашања: Дали постои само една или повеќе бесконечности? Ако ги има повеќе, по што тие се разликуваат и како можат да се споредат? Дали една бесконечност може да биде поголема од друга? Кога за две бесконечности може да се рече дека се еднакви? Дали деловите на бесконечноста се конечни или бесконечни? Дали една бесконечност може да се зголеми? Сите овие прашања оставаат простор за создавање парадокси.

Тие парадокси долго време го спречуваа влегувањето на бесконечноста во математиката, додека пак темата за бесконечноста уште од средниот век ќе го воведе теолошкото сфаќање за една квалитативна бесконечност како начин на постоење на еден совршен и семоќен Бог. Совршенството на совршеното Битие секако било во спротивност со Аристотеловата идеја за една неопределена и потенцијална бесконечност. Но фактот дека таа е квантитативна ќе ја удвои традиционалната опозиција квалитет / квантитет со една друга, онтолошката и математичката бесконечност. Така Спиноза (1632 – 1667) ќе ја даде и опозицијата "*вистинска бесконечност*", онаа на неделивата супстанција, наспроти "*лажна бесконечност*", т.е. бесконечност според бројот и предметот на имагинацијата.

Дали бесконечноста е измислица или реалност?

Што се однесува до математиката, раѓањето на физиката на Галилеј повторно ја активира целата работа. Потребата да се дефинираат поимите моментна брзина и забрзување, да се формулираат законите на движењето, да се генерализира поимот крива линија, сето тоа доведе до поимите функција и диференцијал. Диференцијалното сметање, таа нова "*наука за бесконечноста*", создадена истовремено од Исак Њутн (1642 – 1727) и Вилхелм Лајбниц (1646 – 1716), ги воведе "*инфинитезималните елементи*", коишто претставуваат бескрајно мали количества. Тука постојат различни видови бесконечности, а постојат и правила што овозможуваат тие бесконечности да се споредуваат како меѓусебно, така и со конечното. Бесконечно малото, додадено или одземено од едно конечно количество, е занемарливо, бидејќи е "*неспоредливо помало*" од него. Не се менува редот во бесконечно големото ако му се додаде едно конечно количество (на пример, x е од ист ред како и $x + 100$ кога x се стреми кон бесконечност). Исто така, бесконечно малото се занемарува пред бесконечно малото од понизок ред (на пример, $1/x^2$ е занемарливо во однос на $1/x$ кога x се стреми кон бесконечност).

Така, оперативната хиерархија направена врз брзината на растење или опаѓање на функциите што претставуваат бесконечност овозможува да се дадат одговори на некои од погоре поставените прашања. Но со ова не беа надминати сите тешкотии. Така Галилеј го разгледувал односот меѓу целите позитивни броеви (1, 2, 3, ...) и нивните квадрати (1, 4, 9, ...). Констатирајќи дека секој цел број има свој квадрат, а реципрочно, секој квадрат потекнува од цел позитивен број, тој заклучил дека во бесконечноста не важат односите за еднаквост и нееднаквост.

Лајбниц пак, кој работел на поставувањето на законите на еднаквоста и нееднаквоста во бесконечноста, не можел да го прифати овој заклучок. Неговата анализа на бесконечностите го покажувала токму "*новиот начин на собирање, одземање, множење и делење, својствен на неспоредливите количества, односно оние што се бесконечно големи или бесконечно мали во споредба со другите*". Но Лајбниц не ја негирал вредноста на Евклидовата аксиома, дека целото е поголемо од еден негов дел, туку се обидел тоа и да го објасни. Значи, тој се прашувал дали со парадоксот на Галилеј овие соодноси не се сметаат за завршени целини.

Лајбниц бесконечно малото или бесконечно големото ги сметал само за помошни вредности што ги олеснуваат пресметките чијшто краен резултат е изразен во конечни количества, но кои не се содржат во себе. Всушност, тој го застапувал она што го рекол Проклус, поаѓајќи од Аристотел, дека бесконечноста постои само затоа што го има конечното.

Бесконечно малото претставува количество "*шūо се īуби*", кое некогаш е ништо (во споредба со едно конечно количество), а некогаш нешто (во споредба со бесконечно малото од повисок ред).

Бесконечно големото претставува едно асимптотско количество, коешто никогаш не ја достигнува бесконечната граница кон којашто се стреми. Асимптотските, или количествата што се губат, во XVII век претставуваат една нова верзија, создадена врз поимот функција, од Аристотеловото сфаќање на математичката бесконечност како нешто што може да биде, но никогаш не се остварува. Во такви услови е тешко да се постават на исто ниво конечните количества, коишто и во светот и во математиката се сметаат за реални, и бесконечните, чијашто математичка "*реалносū*" се негира, бидејќи немаат ништо суштинско. Така тие, според Лајбниц, се само "*измислица*" корисна при сметањето, што го ограничува разликувањето, а аналогни се, на пример, на $i^2 = -1$.

"*Диференцијалноūо сметање е корисно коīа се рабоūи за ūримена на маūемаūикаūа во физикаūа. Сеūак, јас во никој случај не насūојувам на ūој начин да ја сфаūам ūриродаūа на нешūаūа*",

пишува тој. Значи, математичарот Лајбниц и дал на бесконечноста таков статус, таа да може да се користи, но не го оправдувал постоењето на актуелната бесконечност.

Лајбниц како метафизичар сепак не се колебал да го обнови поимот супстанција, така што и го дал постоењето на бесконечноста. Тоа што е цело и завршено не мора да биде конечно, ни само бесконечно што може да постои. Тоа цело постои, и секогаш е една остварлива бесконечност.

“Јас сум толку за актуелната бесконечност, што не мислам дека природата се гнаси од неа, како што некој велат вулгарно, туку дека ја прикажува насекаде, со цел подобро да ги покаже совршенствата на нејзиниот Создател”

пишува Лајбниц во едно писмо до Фошер.

Како тогаш може да се поврзат оваа смела метафизика и разумната математика? Со концепциски разлики. Лајбниц забележал, од една страна, дека дури и во физичкиот свет не мора деловите да постојат во состојба на одделни елементи, како што се познатите зрна песок што ги наведувал Архимед. Во една бесконечност што постои не постојат нејзините делови. Од друга страна, поделбата на една низа не значи дека таа се разложува на нејзините атомски делови. И една завршна анализа, “*не постои бесконечен број, ниту пак линија или некое друго бесконечно количество, ако тие се разгледуваат како вистински целини*”. Се на се, бесконечноста постои, но не може да се изброи. Оттука и заклучокот дека аритметичките операции се применуваат само кај потенцијалната бесконечност. И покрај “*инфинитистичката метафизика*”, Лајбниц како математичар останал наследник на традицијата од времето на Аристотел.

Модерната историја на математичката бесконечност започнува со Бернард Болцано (1781 – 1848). Во делото под наслов “*Парадоксите на бесконечноста*” овој чешки математичар од италијанско потекло, кој исто така бил и физичар, логичар, филозоф и теолог, напишал една одбрана и приказ на актуелната бесконечност. Таа се потпира врз идејата дека таканаречените парадокси, што се среќаваат низ векови уште од времето на Зенон од Елеја, не можат да опстанат при една консеквентна анализа. Негова главна цел била “*вистинската*” бесконечност да ја поврзе со полето на пресметките и на количествата, а не со Бога, а поаѓајќи од математиката, да ги постави основите на своите науки, физиката и метафизиката. Веќе оттогаш теологијата и е потчинета на математиката на бесконечноста. А кај неа, се разбира, преовладува квантитативната страна. Според Болцано Бог е бесконечен само затоа што ние го сметаме за надарен со способности кои имаат бесконечни големини.

Болцано сигурно не бил првиот што го потврдил постоењето на актуелната бесконечност, ниту пак прв ја забележал можноста за постоење на различни, нееднакви едни со други, бесконечности, а не бил, навистина, ни првиот што ја поврзал еднаквоста на две бесконечности со можноста да се воспостави една релација меѓу нивните елементи. Но тој бил првиот што се обидел да создаде едно чисто математичко сфаќање и едно систематско сметање кај актуелната бесконечност.

Во својата работа Болцано прави еден паралелизам меѓу конечното и бесконечноста. Од логичка гледна точка, актуелната бесконечност е поим какви што се и поимите цел број или пак дропка. Што се однесува до математиката, постојат бесконечни множества што логички можат да се замислат како завршени целини. Така можеме да зборуваме за множество на целите броеви, за една бесконечна права линија, или пак за некој друг објект што содржи бесконечен број елементи што концепциски се определени. Затоа не е потребно да се набројат сите елементи на едно множество за да се види неговото постоење. Доволно е едно множество да биде определено со една или повеќе негови карактеристики: на пример, две дадени точки ја определуваат отсечката или правата. Како што рекол Лајбниц, актуелната бесконечност е присутна насекаде, и тоа во доменот на постојното.

Што се однесува до сметањето, тоа се темели врз следните дефиниции. Бесконечно големо е она што е “*поголемо од кој било број*”, односно поголемо од n, при што n е кој било цел позитивен број. Бесконечно мало е она што помножено со кој било цел позитивен број ќе биде помало од дадената единица. Оваа дефиниција не ја следи аксиомата на Архимед, која вели дека за две нееднакви големини постои секогаш број што ги содржи и двете, од најмалата па до најголемата. Болцано не ја доведувал во прашање оваа аксиома. Исто така, тој не ја оспорувал аксиомата дадена пред две илјади години, со тоа што сметал дека бесконечни множества се определени со можноста да добијат елементи што им одговараат од некое од нивните подмножества. А тоа што другите го наведувале како парадокас, тој го сметал за особина на бесконечноста. Така не е ништо необично што може да се направи една релација меѓу точките од страната од еден квадрат со оние од неговата дијагонала, или пак помеѓу множеството на целите броеви и множеството на нивните квадрати. Кога се работи за едно такво множество, иста е бесконечноста, било да е тоа страна на квадратот и неговата дијагонала или пак низа од цели броеви и нивните квадрати. Сепак, Болцано нема да ги извлече заклучоците од ова испитување. Тој нема, како што подоцна ќе направи Кантор, да ја дефинира еднаквоста на две бесконечности преку можноста да се најдат елементи што се совпаѓаат кај разгледуваните множества.

Кога Болцано се обидел да воведе една аритметика во бесконечноста, тој паднал во стапицата на конечното, дефинирајќи ја еднаквоста на две бесконечни множества, E и F, преку нивната сличност, а нивната нееднаквост со можноста едното да му припаѓа на другото. Како пример Болцано го наведува множеството од точки на отсечката [0, 5] од правата, коешто се содржи во отсечката [0, 12], и коешто, значи, е "*помало*" од него. Но што се случува во исто време кога E се совпаѓа со F, како што е случај во тој пример, а кога ќе се дефинира $x \leftrightarrow 12x/5$? Дали и натаму E и F ќе претставуваат иста бесконечност? Или пак ќе се вратиме на стогодишната аксиома која што ја претставува нееднаквоста на целото и делот. А и што ќе постигнеме со тоа, ако велиме дека постои една бесконечност од бесконечност, а не им ги определиме броевите (бројните карактеристики) што им припаѓаат?

Овој предизвик, како што знаеме, ќе биде разрешен од Георг Кантор со теоријата на множествата, за која ќе разработи една специфична аритметика. Решавачко значење има сознанието дека по конечното постои едно трансконечно, односно една бесконечна скала со одредени елементи кои по природа се бесконечни, а кои сепак можат да бидат определени, како и кај конечното, со броеви кои ќе можат да се разликуваат едни од други. Секако тогаш за првпат во математиката се зборувало за бесконечни броеви! Или барем за трансконечни, односно броеви што се бескрајно големи, бидејќи Кантор не го признавал постоењето на бесконечно мали броеви. Така ќе треба да се чека "*нестандардната анализа*" од 1966 година, кога и тие ќе бидат признаени како дефинирани целини.

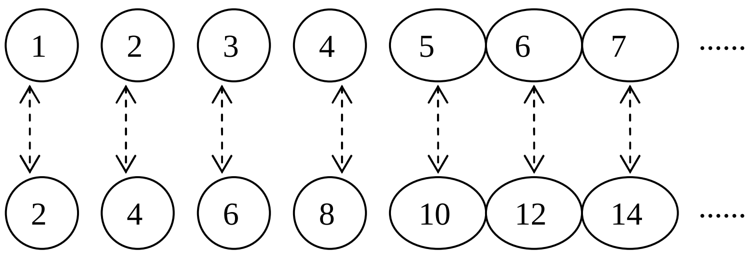
Кантор ја изработил теоријата на множествата проучувајќи ги точките на дисконтинуитет (прекин) кај функциите што можат да се претстават со тригонометриски редови (сума на бесконечен број членови – функции од форма $c_n\sin nx + d_n\cos nx$). Во рамките на тие проучувања тој ја воведува дефиницијата на реалните броеви како граници на низи од рационални броеви и ја формулира аксиомата за совпаѓање меѓу реалните броеви и правата во рамнина (овие множества даваат една бројчена и геометриска претстава). Во 1883 година тој ги открива “*трансконечните редни броеви*” и предлага на еден експлицитен начин, во трансконечноста да се генерализира поимот за еден цел конечен број.

Кантор поставува една јасна граница помеѓу кардинален и реден (ординарен) број. Првиот поим произлегува од броењето на елементите на едно множество, операција што не зависи од редоследот на елементите, а вториот доаѓа од нумерирањето или набројувањето, при што се воспоставува еден ред кај елементите (подредување). Во доменот на конечното овие два поима се мешаат додека не е таков случајот и во доменот на бесконечноста.

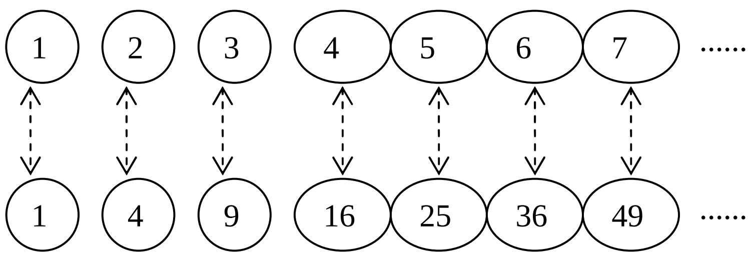
Најнапред да го прецизираме поимот трансконечен кардинален број, поедноставен поим, бидејќи е занемарена структурата на редот кај множествата. Кантор претпоставил дека две бесконечни множества имаат ист кардинален број ако постои биекција на едното во другото. Таков е случајот кај множеството на цели броеви и множеството на нивните квадрати, кај множеството на парни броеви и цели броеви, кај множеството од точки на две било кои отсечки од една права и така натаму. Множествата што биективно се пресликуваат едно во друго се наречени “*еквипотентни*”.

Оваа дефиниција одговара и на конечните множества, и тогаш еквипотентноста се совпаѓа со поимот еквивалентност. Со ова за прв пат беа надминати тешкотиите што го спречуваа поставувањето на една трансконечна аритметика. Никој пред Кантор немал проект за генерализирање на поимот за цел конечен број во оној за трансконечен. Скалата на трансконечни кардинални броеви започнува со кардиналниот број на множеството N на природните броеви, кое може да се изброи. Овој кардинален број е означен како $\aleph_0$ (симболот $\aleph$ - алеф - е првата буква од еврејската азбука). Голем број бесконечни множества се еквипотентни со N. На пример множеството Q_+ на позитивните рационални броеви го има истиот кардинален број како и N, бидејќи можат да се избројат, без исклучок, сите рационални броеви во редослед: 1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 1/3, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, 5/1, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, 4/3, 5/2, 6/1 итн. Така добиената низа дефинира една биекција на *N* во *Q*. Исто така, во 1874 година Кантор покажал дека множеството на алгебарски броеви, односно реалните броеви што се корени на полином со коефициенти цели броеви, е исто така еквипотентно со *N*.

Кардиналниот број на едно множество го покажува бројот на неговите елементи и овозможува проширување на поимот број кај бесконечните множества. Попрецизно, за две множества се вели дека се еквипотентни (било да се конечни или бесконечни) или дека имаат ист кардинален број, ако постои биекција меѓу нив. На пример, множеството на цели позитивни броеви има ист кардинален број како и множеството на целите парни броеви (цртеж А) или множеството на целите квадрати на броевите (цртеж Б).

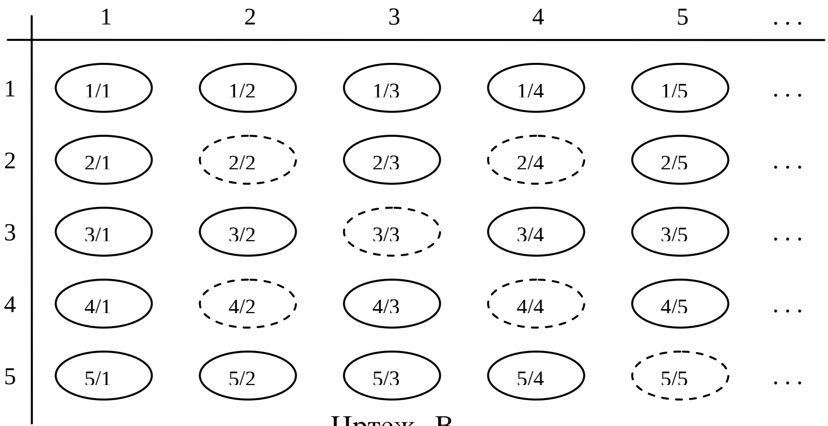


Цртеж А



Цртеж Б

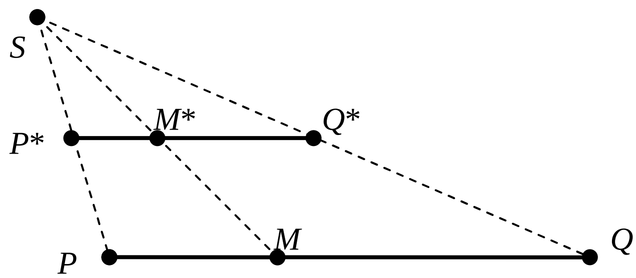
Исто така, множеството на рационалните броеви е еквипотентно со множеството на целите броеви. Всушност сите рационални броеви можат да се набројат, без исклучок, на пример во низата 1/1, 1/2, 2/1, 3/1, 1/3, 1/4, 2/3, итн. Така добиената низа дефинира биекција на множеството на цели позитивни броеви во множеството на рационални позитивни броеви. Ова исцрпно набројување е претставено на цртежот В. (Испуштени се рационалните броеви што се повторуваат).



Цртеж В

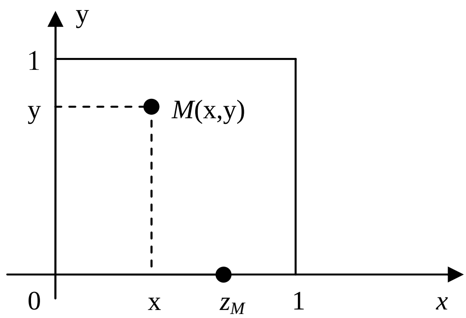
Кантор ќе докаже и тоа дека множеството R на реални броеви не е еквипотентно со N. Доказот дека R има поголем степен од N се врши со методот на дијагонала, што тој го измислил.

Две отсечки RQ и R^*Q^* со различни должини имаат ист кардинален број, или поинаку речено, тоа значи дека тие содржат "толкав број" точки. Всушност, на секоја точка M од првата отсечка и одговара една и само една точка M^* од втората отсечка и обратно. Таква биекција е прикажана на цртежот Г.



Цртеж Г

Потоа, тој открил дека постои биекција меѓу множеството точки кај квадратот чијашто страна е интервалот [0, 1] и самиот тој интервал. Можеби позачудувачки е фактот што множеството од точки што се содржат во еден квадрат има ист кардинален број како и множеството од точки на неговата страна. Всушност, на секоја точка M од квадратот со страна 1 и одговара само една точка од интервалот [0, 1]. Ако M е дефинирана со координатите x и y, кои децимално можат да се претставаат како $x = 0, x_1\, x_2\, x_3 \ldots$ и $y = 0, y_1\, y_2\, y_3 \ldots$, тогаш на M и одговара точка од интервалот [0, 1] која децимално запишана изгледа вака: z=0, $x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots$ (ако, на пример, x=0,51 а y=0,24, тогаш z=0,5214). Спротивно на тоа, секоја точка од интервалот [0, 1] може да се запише така што ќе и одговара еден единствен пар (x, y), односно само една точка од квадратот. Значи, квадратот и неговата страна се еквипотентни (цртеж Д).



Цртеж Д

Тоа толку го изненадило, што на Дедекинд, со кого редовно се допишувал, му напишал:

“*Гледам, но не можам да поверувам*”.

Во 1891 година, со методот на дијагонала, Кантор докажал дека за секое бесконечно множество E множеството од делови на E има поголем степен од E (партитивно множество). Овој резултат е апсолутно фундаментален: тоа значи дека не постојат само два трансконечни кардинални броја, $\aleph_0$ и кардиналниот број c на множеството реални броеви R, туку бесконечно многу. Значи, се работи за генерализирање на кардиналните конечни броеви, но сепак со аритметички правила што се делумно одвоени од оние што се користат во доменот на конечното.

Всушност, сумата на кардиналните броеви на две бесконечни множества E и F е дефиниран како кардинален број на унијата од E и F. Така на пример, имаме: $\aleph_0 + n = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + ... + \aleph_0 + ... = \aleph_0$ и за секој од двата трансконечни кардинални броја c и $\aleph_0$, $c + n = c + \aleph_0 = c$. При множењето, аналогно на ова, на погоре спомнатата биекција меѓу точките на квадратот со страна 1 и оние од отсечката со должина 1 се врши операцијата $c \cdot c = c$. Но, освен ваквите разлики, асоцијативноста, комутативноста и дистрибутивноста остануваат важечки при собирањето и множењето на трансконечните кардинални броеви.

На овој стадиум останува еден отворен проблем: дали навистина секогаш можеме да споредуваме два кои било кардинални броја? При дадени две множества, E и F, можно е да се покаже дека постои биекција на E врз F, што значи дека е Card(F)=Card(E). Но за споредбата да биде секогаш можна, потребно е да се исклучи евентуалноста од некој четврти случај. Под тој услов сите кардинални броеви можат да се наредат во една низа, аналогна на низата од цели природни броеви 1, 2, 3,..., односно во едно множество, одредено преку релацијата "*поголемо од*". Еве, повторно се враќаме на поимот ред. Подредено множество е множеството во кое е дефинирана релацијата означена со <. За две подредени множества се вели дека се од исти ред ако се изоморфни, односно ако постои биекција f на едното во другото, којашто го запазува редот, односно $f(x) < f(y)$ за $x < y$.

За множеството E се вели дека е добро подредено ако секое вистинско подмножество од E има најмал елемент. Едно конечно множество е секогаш добро подредено. Бесконечната низа од цели природни броеви е добро подредено множество, а исто така и секоја низа дефинирана со N.

Кантор се обидувал кај добро подредените множества да прикаже ситуација иста како и кај низата од цели природни броеви. Тој би бил во право под услов да се докаже дека секое множество може да биде добро подредено. Тоа го направил германскиот математичар Ернест Зермело (1871 – 1953) во 1904 година. Благодарејќи на неговата теорема, на кои било бесконечни множества можат да се пренесат особините на конечните броеви, а посебно особината на индукција.

Кантор се прашувал дали кардиналниот број c е непосреден следбеник на кардиналниот број $\aleph_0$ од едно преброиво множество, или дали $c = \aleph_1$. Потврдниот одговор на ова прашање е познатата “*хипотеза за постојаното*”, што Кантор ја формулира за прв пат во 1878 и којашто напразно се обидувал да ја докаже се до крајот на својот живот. Хилберт ја запишал како нерешен проблем, прв на списокот што тој го предложил на меѓународниот конгрес на математичарите во 1900 година. Одговорот ќе биде даден во две различни времиња. Најпрвин Австриецот Курт Гедел (1906 – 1978) ќе ја докаже во 1938 година компатибилноста на оваа хипотеза со класичните аксиоми од теоријата на множествата, наречени аксиоми на Зермело Франкел. Потоа, во 1963 година, американецот Пол Коен ќе докаже дека таа не зависи од овие аксиоми. Поврзувањето на овие два резултата значи дека дадената хипотеза не може да се докаже, ниту пак да се побие со овие аксиоми.

Со испитувањата на Кантор повторно почнала расправата околу бесконечноста, токму во времето кога многумина сметале дека е завршена. Уште од почетокот теоријата за трансконечноста имала свои противници. Најголемиот противник бил Леополд Кронекер (1823 – 1891), кој се обидел да го спречи издавањето на првите написи на Кантор, во кои тој докажувал дека множеството на реални броеви не може да се изброи и дека множеството од точки на квадратот е еквипотентно со множеството точки на неговата страна. Но затоа пак Дедекинд бил на страната на Кантор. Подоцна Хилберт енергично ќе го брани “*рајот*” на Канторовото творештво, што тој го сметал за “*најчист производ на математичкиот гениј*”. Впрочем, парадоксите што ќе бидат пронајдени во теоријата на множествата, а првиот ќе го открие самиот Кантор, ќе бидат причина за расправа. Математичарите ќе се поделат на два табора: приврзаниците на Кантор, како Хилберт, ќе прават се за “*никој да не ги истера од рајот*”; а другите пак, како Кронекер, Анри Поанкаре и подоцна Брауер и Херман Вејл, ќе се задржат, како и Аристотел некогаш, само на потенцијалната бесконечност, без да прават излети во апстракциите на трансконечното. Овие вторите сметале дека само целите броеви се неспорни, дадени како низа со неограничена должина, а не како множество или завршена целина.

Исто така имало големи дискусии во врска со "*аксиомата за избор*". Искажана од Зермело во 1904 година, оваа аксиома вели дека за секое, дури и бесконечно семејство на множества што не се празни, постои функција (што не е однапред одредена), којашто на секое множество му додава еден елемент и така овозможува да се добие ново множество. Наскоро е забележано дека бројни резултати (како на пример тој што потврдува дека секој векторски простор има своја база), што им припаѓаат на други делови од математиката, а не само на теоријата на множествата, не можат да бидат прецизно докажани без оваа аксиома. Историјата на аксиомата оди паралелно со онаа на хипотезата на постојаното.

Овие резултати ги запреа расправиите, покажувајќи ја истовремено и логичката легитимност на противничките опции. Затоа не треба да не чуди тоа што, од крајот на минатиот век, забрзано се развива математиката на множествата, се поапстрактна (општа топологија, теорија на интерпретацијата, функционална анализа, нестандардна анализа и др.) и во којашто наоѓаат примена аксиомите од таков тип, како и конструктивната математика, која што ја испитува можноста на методите во доменот на конечното.

Дали бесконечноста е неопходна во математиката?

Треба да се согласиме дека со се посистематско користење на сметачите, математичарот денес е принуден да прави алгоритамски репродукции на традиционалните дисциплини за бесконечноста (геометрија, анализа или топологија), што директно се приспособуваат на конечната и дискретната градба на технолошката алатка. Исто така е актуелен развојот на таканаречената "*финитарна*" математика, што е заснована врз целите конечни броеви. Од една страна се смета дека единствено конечни процеси можат да бидат извршени. Од друга страна, пак, се бараат начини за разграничување (конструкции, правила итн.) на методите што, преку конечните процеси даваат пристап до поимите за бесконечноста. Интересна е констатацијата дека и нестандардната анализа, којашто во своите почетоци, за да ја наметне идејата за проширување на множеството на реални броеви со бесконечни елементи, беше за една инфинистичка опција, сега таа се свртува кон финитарните техники. Повеќе актуелни испитувања овозможуваат да се воведе еден финитарен модел на реалните броеви.

Финитарната математика го надминува прашањето за теоретската неопходност од примената на Канторовите скали за трансконечните кардинални броеви. Ова прашање, кое веќе го поставувал Французинот Емил Борел (1871 – 1956), сега повторно е актуелизирано од американскиот логичар Соломон Феферман од Станфордскиот универзитет. Одговорот е дека во математиката што може да се примени на физичкиот свет, нема никаква логичка пречка за прифаќање на актуелната бесконечност. Поаѓајќи од идеите изложени од Вејл во неговата монографија "Das Kontinuum" (1918), Феферман покажува дека кај сите проблеми што се поставуваат со примената на класичната или на модерната функционална анализа можеме да се ограничиме на една бесконечност што може да се изброи. Дали тоа значи дека треба сосема да се откажеме од поимот реален број? Не, бидејќи треба да кажеме дека бројни математички резултати ја користат трансконечноста.

Така двојството конечност/бесконечност продолжува да создава во математиката една линија на поделба, што математичарите постојано ја дефинираат и никогаш не можат во целост да ја разрешат. Ако е релативно лесно да се признае вредноста на еден резултат, поаѓајќи од познатите хипотези, тогаш многу потешко е тоа да се направи кога се работи за хипотези што можат или треба да бидат прифатени. Како што напишал Анри Лебег:

"*математичрите секогаш во целост се согласувале само кога се работело за нешто што претставувало очигледна, апсолутна или дефинитивна неспорна вистина*".

Превземено од списанието *La Recherche*, Paris, 1994