LINEARNA ALGEBRA

DAMIR BAKIĆ

Predgovor

Namjera mi je bila napisati praktičan udžbenik linearne algebre; sadržajno zaokružen, ali ne predug; rigorozan, ali ne prestrog. Namijenjen je studentima i nastavnicima kao udžbenik za standardni jednogodišnji kurs linearne algebre uobičajen na studiju matematike i fizike na preddiplomskoj razini.

Linearna algebra je grana matematike koja proučava vektorske prostore, linearne operatore i sustave linearnih jednadžbi. Konkretnu realizaciju linearne algebre nalazimo u analitičkoj geometriji, odnosno u prostorima klasa orijentiranih dužina u dvije i tri dimenzije. Ti prostori predstavljaju ishodišnu točku u izgradnji opće teorije vektorskih prostora i linearnih operatora. Svoje poopćenje, pak, linearna algebra nalazi u teoriji operatora i funkcionalnoj analizi.

Vektorski prostori igraju jednu od centralnih uloga u modernoj matematici. Stoga linearna algebra nalazi široku primjenu u drugim matematičkim disciplinama. Jednako ekstenzivno primjenjuje se linearna algebra i u drugim prirodnima te u društvenim znanostima. U svim primjenama slijedi se u osnovi isti obrazac: dani problem koji nije moguće direktno ili eksplicitno riješiti nastoji se "linearizirati", tj. aproksimirati nekim linearnim problemom koji se zatim rješava metodama linearne algebre.

Svrha je ovog udžbenika prikazati glavne rezultate linearne algebre u opsegu u kojem se ova teorija uobičajeno izlaže studentima prve godine studija matematike. I po načinu izlaganja i po izboru materijala prepoznat će se da je udžbenik ponajprije namijenjen matematičarima. Napokon, glavninu materijala i čine bilješke s predavanja koja sam držao studentima prve godine matematike i fizike na PMF-u Sveučilišta u Zagrebu tijekom posljednjih desetak godina.

Ipak, od čitatelja se ne zahtijeva nikakavo posebno predznanje; podrazumijeva se tek poznavanje uobičajene matematičke notacije i vladanje osnovnim elementima naivne teorije skupova i matematičke logike. Stoga vjerujem da će ovaj udžbenik biti pristupačan i koristan i studentima drugih, posebno prirodoslovnih, tehničkih i ekonomskih fakulteta.

U sadržajnom smislu udžbenik se gotovo podudara s programom istoimenog kolegija za studente prve godine preddiplomskog studija matematike na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu. Osnovna ideja je i bila odabrani materijal organizirati kao praktičan i efikasan udžbenik. Zato sam svjesno izostavio uvodno izlaganje skupovno-teorijskih činjenica s jedne, i naprednijih tema s druge strane. Ti i drugi izostavljeni dijelovi (poput matematičkih i izvanmatematičkih primjena, povijesnih napomena, komentara vezanih za izgradnju teorije i individualne doprinose pojedinih matematičara, ekstenzivnog popisa literature) detaljno su izloženi u klasičnim sveučilišnim udžbenicima profesora S. Kurepe i K. Horvatića. Uz to, povijesne činjenice i opis različitih aspekata nastanka i izgradnje linearne algebre kao moderne matematičke teorije danas su široko dostupni na mnogobrojnim internetskim stranicama enciklopedijske orijentacije.

Materijal je organiziran na sljedeći način. Uvodno poglavlje je u izvjesnom smislu prolog: u njemu se prikazuje prostor radijvektora s namjerom da se prepozna i usvoji koncept vektorskog prostora. Naglasak zato nije na potpunosti izlaganja, već na strukturnim svojstvima prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$. Upravo radi lakšeg uvida u strukturu odlučio sam za ogledni primjer vektorskog prostora uzeti prostor radijvektora, a ne mnogo sofisticiraniji i korisniji (ali tehnički zamršeniji) prostor klasa orijentiranih dužina V^3. "Dug" prema prostoru V^3 vraćen je u Dodatku na kraju drugog poglavlja.

U drugom poglavlju uveden je pojam vektorskog prostora na apstraktnoj razini te su obrađene standardne teme poput baze, dimenzije, potprostora.

Treće poglavlje je posvećeno matricama. U njemu su navedeni i dokazani klasični teoremi o matricama i determinantama.

Četvrto poglavlje se izravno nadovezuje na prethodno i sadrži cjelovitu diskusiju o sustavima linearnih jednadžbi. Sustavi linearnih jednadžbi nisu samo univerzalna zadaća koja se prirodno javlja unutar linearne algebre i u njezinim primjenama; oni su u izvjesnom smislu i sadržajna jezgra teorije. Na primjer, tek u proučavanju sustava prirodno se nameće potreba za uvođenjem i proučavanjem višedimenzionalnih vektorskih prostora (Dok je relativno lako akceptirati potrebu za proučavanjem vektorskog prostora dimenzije 4, uvođenje prostora proizvoljne dimenzije je krajnje neintuitivno.) Slično, tek pri proučavanju sustava linearnih jednadžbi imamo priliku vidjeti teorem o rangu i defektu na djelu. U tom smislu, pozicioniranje poglavlja o sustavima linearnih jednadžbi (pa onda, posljedično, i poglavlja o matricama i determinantama) u izlaganju linearne algebre uvijek je delikatno pitanje. Ovdje smo izgradnju teorije započeli proučavanjem apstraktnih vektorskih prostora te razvojem potrebnog tehničkog aparata. Tek tada su obrađeni sustavi linearnih jednadžbi, a u njihovom tretmanu su bitno korišteni rezultati iz prethodnih dvaju poglavlja. Dosljedna provedba ovakvog pristupa vjerojatno bi podrazumijevala da se prije sustava izlože i uvodna poglavlja teorije operatora; time bi se svi rezultati o rješivosti i rješavanju sustava linearnih jednadžbi dobili još elegantnije. Takav bi izbor, međutim, teoriji dao još naglašeniju apstraktnu (moguće i preapstraktnu) notu. Zbog toga, a i zato što je pogodno radi vježbi i rješavanja praktičnih problema sustave linearnih jednadžbi obraditi čim prije, poglavlje o sustavima ipak prethodi diskusiji o operatorima.

Peto poglavlje je u cijelosti posvećeno linearnim operatorima i predstavlja centralni dio izloženog materijala. Poglavlje završava relativno opširnim izlaganjem o spektru, svojstvenim i invarijantnim potprostorima te svojstvenom polinomu.

Posljednje, šesto poglavlje sadržava pregled standardnog materijala o konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima. Osobito je naglašena uloga Gram-Schmidtova postupka ortogonalizacije. Uvršteno je i nekoliko tipičnih primjena, poput QR faktorizacije matrice, problema najbolje aproksimacije te približnog rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

Svako poglavlje završava odgovarajućim skupom zadataka različite prirode. Neki su od njih sasvim tehnički, drugi služe kao vježba apstraktnog rezoniranja, u trećima se uvode novi pojmovi ili navode nove činjenice. Svi su zadaci odabrani iz obilne neformalne arhive zadataka prikupljene na PMF-Matematičkom odjelu Sveučilišta u Zagrebu. Ona se sastoji od mnoštva primjera s auditornih vježbi te ispitnih i kolokvijskih zadataka, a nastala je dugogodišnjim radom brojnih sadašnjih i biših asistenata koji su proteklih desetljeća vodili vježbe iz kolegija Linearna algebra.

Nemoguće je matematičku teoriju u potpunosti svladati bez testiranja našeg razumijevanja kroz rješavanje zadataka. Zato savjetujem čitateljima da pokušaju samostalno riješiti navedene zadatke. Uvrštene zadatke treba shvatiti kao integralni dio teksta.

Ovaj je udžbenik nastao uz potporu mojih kolega i studenata i na izravan poticaj urednice u Školskoj knjizi, gđe Štefice Dumančić Poljski. U različitim fazama nastanka dijelove rukopisa čitali su i dali korisne opaske i prijedloge moji kolege s PMF-Matemtičkog odjela Sveučilišta u Zagrebu na čemu im srdačno zahvaljujem. Posebno zahvaljujem doc. dr. Ljiljani Arambašić kao i recenzentima, prof. dr. Ivici Gusiću, prof. dr. Mirku Primcu i prof. dr. Zoranu Vondračeku na brojnim korisnim primjedbama i sugestijama. Unaprijed zahvaljujem i svima koji će me upozoriti na greške ili dati primjedbe i komentare.

U Zagrebu, ožujak 2008.

Sadržaj

1. Uvod

U ovom poglavlju uvodimo pojam vektorskog prostora na neformalnoj, intuitivnoj razini. Željeli bismo ilustrirati osnovne ideje te pokazati pozadinu, odnosno temelje nekih apstraktnih koncepata koji će kasnije biti uvedeni. To ćemo učiniti proučavajući radijvektore u ravnini i prostoru. Nije nam pritom namjera iznijeti kompletan pregled klasične algebre vektora. Primarni nam je cilj uočiti i istaknuti strukturna svojstva prostora radijvektora u dvije, odnosno tri dimenzije. Ti će nam prostori kasnije poslužiti kao prototip u izgradnji opće teorije vektorskih prostora.

Naša razmatranja ovdje neće biti aksiomatski zasnovana. Osnovne pojmove poput, primjerice, pravca i ravnine ćemo shvaćati intuitivno.

1.1. **Radijvektori u ravnini.**

Označimo s E^2 ravninu koju shvaćamo kao skup točaka. Neka je u E^2 dan pravokutn koordinatni sustav s ishodištem u točki O. Svakoj točki $A \in E^2$ možemo pridružiti radijvektor $\overrightarrow{OA}$, tj. strelicu s početkom u točki O i završetkom u točki A.

Skup svih radijvektora u ravnini označavamo s $V^2(O)$, naglašavajući time da je ishodište početna točka svih radijvektora koje promatramo. Kad god nam ne bude važno specificirati završne točke, radijvektore ćemo označavati simbolima $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v} \ldots$ Radijvektor $\overrightarrow{OO}$ zovemo nulvektorom i označavamo s $\overrightarrow{0}$.

Modul radijvektora $\overrightarrow{OA}$ definiramo kao duljinu dužine $\overline{OA}$ i označavamo s $|\overrightarrow{OA}|$. Uočimo da je $\overrightarrow{0}$ jedini radijvektor čiji modul iznosi 0. *Smjer* radijvektora $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{0}$ definiramo kao pravac OA. Smjer nulvektora se ne definira. Nadalje, kažemo da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni ako točke O, A, B leže na istom pravcu. Primijetimo da je, prema definiciji, nulvektor kolinearan sa svakim radijvektorom.

Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni i netrivijalni (tj. različiti od $\overrightarrow{0}$) radijvektori. Kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ *jednako orijentirani* ako točke A i B leže s iste strane točke O na pravcu OAB. Ako se točke A i B nalaze s različitih strana točke O na pravcu OAB, kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ *suprotno orijentirani.*

Primijetimo da je orijentacija samo relativan pojam; niti jedan radijvektor sam po sebi nema orijentaciju.

Jednaka orijentacija Suprotna orijentacija

Iz prethodnih je definicija očito da je svaki netrivijalan radijvektor jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom. Iskažimo ovaj zaključak i formalnom napomenom:

Napomena 1.1.1. Neka su zadani realan broj $m > 0$ i radijvektor $\overrightarrow{OT} \neq \overrightarrow{0}$. Tada postoji jedinstven radijvektor $\overrightarrow{OA}$ čiji modul iznosi m, čiji je smjer pravac OT i koji je orijentiran jednako kao $\overrightarrow{OT}$.

Za radijvektor $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ definiramo suprotan radijvektor $-\overrightarrow{a}$ kao radijvektor koji ima jednak modul i smjer kao $\overrightarrow{a}$, a orijentiran je suprotno u odnosu na $\overrightarrow{a}$. Uočimo da je pojam suprotnog radijvektora dobro (tj. jednoznačno) definiran na temelju prethodne napomene.

Nakon što smo uveli osnovne pojmove, sada možemo definirati zbrajanje radijvektora.

Nekolinearne radijvektore zbrajamo prema zakonu paralelograma: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijvektor $\overrightarrow{OC}$ pri čemu je C jedinstvena točka ravnine E^2 sa svojstvom da je četverokut $OACB$ paralelogram.

Zakon paralelograma: zbrajanje nekolineranih radijvektora

Da bismo definiciju kompletirali, potrebno je još definirati zbroj $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ i kad su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni.

Najprije uzimamo da je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$, $\forall \overrightarrow{a} \in V^2(O)$, te $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $\forall \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$.

Ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni, netrivijalni, i nisu jedan drugome suprotni, zbroj $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ definirat ćemo tako da mu propišemo modul, smjer i orijentaciju.

Prema *napomeni 1.1.1*, time će radijvektor $\vec{a}+\vec{b}$ biti jednoznačno određen. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}|+|\vec{b}|$, koji je kolinearan s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a orijentiran je jednako kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije te ako je $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, onda $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}|-|\vec{b}|$, koji je kolinearan s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a orijentiran je jednako kao $\vec{a}$. Konačno, ako je $|\vec{a}|<|\vec{b}|$, definicija je analogna (pa je, posebno, $\vec{a}+\vec{b}$ orijentiran kao $\vec{b}$).

Zbrajanje kolineranih radijvektora

Sada je zbroj $\vec{a}+\vec{b}$ definiran za svaka dva radijvektora i pritom je, za zadane $\vec{a}$ i $\vec{b}$, njihov zbroj $\vec{a}+\vec{b}$ jednoznačno određen radijvektor. Dobili smo, dakle, preslikavanje $+ : V^2(O)\times V^2(O)\to V^2(O)$. U tom smislu kažemo da je zbrajanje binarna operacija na skupu $V^2(O)$.

Sad bismo željeli istražiti svojstva ovako uvedene operacije zbrajanja radijvektora. Uočimo prvo da pravokutni koordinatni sustav kojeg smo na početku fiksirali nije igrao nikakvu ulogu ni u našem poimanju radijvektora, ni u prethodnim definicijama. Važno je tek bilo fiksirati ishodišnu točku O. Koordinatizacija će, međutim, biti vrlo koristan alat u našim razmatranjima.

Svakoj točki $A\in E^2$ možemo pridružiti uređen par njezinih koordinata u odabranom pravokutnom sustavu. Želimo li specificirati neki radijvektor $\overrightarrow{OA}$ (što se zapravo svodi na specifikaciju završne točke A), dovoljno je poznavati uređen par koordinata točke A.

Sada je prirodno zapitati se: ako su dani radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, možemo li iz koordinata točaka A i B "iščitati" koordinate završne točke radijvektora $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$?

Propozicija 1.1.2. *Neka je* $A = (a_1, a_2)$ *i* $B = (b_1, b_2)$. *Tada je* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, *gdje je* $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

Dokaz. Uzmimo najprije da su vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nekolinerni. Tada je, ako smo označili $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, točka C sjecište pravaca p i q pri čemu je p paralelan s OB i prolazi točkom A, dok je q paralelan s OA i prolazi točkom B. Sada se dokaz naše tvrdnje da točka C ima koordinate $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ svodi na rješavanje elementarne zadaće iz analitičke geometrije.

Kad su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinerni, provjera je još jednostavnija pa detalje izostavljamo. □

Uz pomoć prethodne propozicije lako je odrediti sva algebarska svojstva operacije zbrajanja.

Propozicija 1.1.3. *Binarna operacija zbrajanja* $+ : V^2(O) \times V^2(O) \to V^2(O)$ *ima sljedeća svojstva:*

(1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2(O)$;
(2) *za nulvektor* $\vec{0} \in V^2(O)$ *vrijedi* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V^2(O)$;
(3) *za svaki* $\vec{a} \in V^2(O)$ *i njemu suprotan* $-\vec{a} \in V^2(O)$ *vrijedi* $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$;
(4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$.

Dokaz. (1) Odaberimo proizvoljne $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ te označimo $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OT}$ i $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \overrightarrow{OS}$. Treba dokazati da je $T = S$, a za to je dovoljno utvrditi da su koordinate točaka T i S identične. Neka je $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$. Sada je, prema *propoziciji 1.1.2*, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$ pri čemu je $D = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$. Kako je $\overrightarrow{OT} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$, ponovnom primjenom *propozicije 1.1.2* dobivamo da je $T = (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))$. Potpuno analogno nalazimo da vrijedi i $S = ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)$. Jer je zbrajanje realnih brojeva asocijativno, koordinate točaka T i S su u parovima jednake, pa slijedi $T = S$.

Tvrdnje (2) i (3) su zapravo dijelovi definicije zbrajanja radijvektora pa se ovdje nema što dokazivati. Tvrdnja (4) je pak očita posljedica definicije zbrajanja radijvektora. Alternativno, i ovu tvrdnju možemo dokazati kao i tvrdnju (1) služeći se *propozicijom 1.1.2.* □

Svojstvo (1) iz prethodne propozicije se zove asocijativnost (zbrajanja radijvektora). Svojstvo (2) opisno izričemo tako da kažemo da je $\vec{0}$ neutralni element za zbrajanje. Svojstvo (3) opisuje algebarsku narav suprotnog vektora: kad se bilo koji radijvektor zbroji sa sebi suprotnim, rezultat je neutralni element za zbrajanje (tj. nulvektor). Striktno govoreći, pojam suprotnog radijvektora definirali smo samo za netrivijalne radijvektore, no jednakost $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ (koja je dio naše definicije zbrajanja) pokazuje da

$\overrightarrow{0}$ igra ulogu suprotnog radijvektora samome sebi. Konačno, svojstvo (4) se naziva komutativnost (zbrajanja radijvektora).

Primijetimo da operacije zbrajanja realnih, odnosno kompleksnih brojeva imaju identična svojstva.

Kao i pri računanju s brojevima, i ovdje je običaj izraz $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$ zapisivati u jednostavnijem obliku $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. Kolokvijalno govorimo da se radi o oduzimanju, no treba uočiti da oduzimanje radijvektora nije nova operacija, nego tek naziv za zbroj radijvektora $\overrightarrow{a}$ i radijvektora suprotnog radijvektoru $\overrightarrow{b}$. Isti dogovor podrazumijevamo i kod oduzimanja brojeva.

Osim zbrajanja radijvektora važna će nam biti još jedna operacija: množenje radijvektora realnim brojevima. Običaj je da se u ovom kontekstu realni brojevi nazivaju skalarima i da se označavaju malim grčkim slovima. Prije nego što definiciju navedemo, uočimo bitnu strukturnu razliku u odnosu na zbrajanje: dok je zbrajanje $+ : V^2(O) \times V^2(O) \to V^2(O)$ binarna operacija na skupu $V^2(O)$ (što znači da se zbrajaju dva radijvektora, a rezultat je opet radijvektor), množenje radijvektora skalarima je preslikavanje $\cdot : \mathbb{R} \times V^2(O) \to V^2(O)$; operandi su ovdje raznorodni (jedan skalar i jedan radijvektor), a rezultat je opet radijvektor.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\overrightarrow{a} \in V^2(O)$. Umnožak $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$ definira se kao radijvektor čiji: (i) modul iznosi $|\alpha| \cdot |\overrightarrow{a}|$; (ii) smjer je isti kao smjer od $\overrightarrow{a}$; (iii) orijentacija je ista kao orijentacija od $\overrightarrow{a}$ ako je $\alpha > 0$, odnosno suprotna orijentaciji od $\overrightarrow{a}$ ako je $\alpha < 0$.

Kao i kod množenja brojeva i ovdje je običaj pisati $\alpha\overrightarrow{a}$ umjesto $\alpha \cdot \overrightarrow{a}$.

Operacija množenja radijvektora skalarima iskazana je uz prešutnu primjenu *napomene 1.1.1*: $\alpha\overrightarrow{a}$ je definiran tako što smo mu propisali modul, smjer i orijentaciju. Pritom, odrednice (ii) i (iii) nemaju smisla ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. No, već iz (i) neposredno vidimo da je $\alpha \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, kao i $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, $\forall \overrightarrow{a} \in V^2(O)$.

Očito je iz definicije da vrijedi sljedeće pravilo:

Propozicija 1.1.4. *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\overrightarrow{a} \in V^2(O)$. Ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ i $A = (a_1, a_2)$, te ako stavimo $\alpha\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT}$, onda je $T = (\alpha a_1, \alpha a_2)$.*

Teorem 1.1.5. *Operacije zbrajanja $+ : V^2(O) \times V^2(O) \to V^2(O)$ i množenja skalarima $\cdot : \mathbb{R} \times V^2(O) \to V^2(O)$ na skupu $V^2(O)$ imaju sljedeća svojstva:*

(1) $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^2(O)$;
(2) *za nulvektor* $\overrightarrow{0} \in V^2(O)$ *vrijedi* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$, $\forall \overrightarrow{a} \in V^2(O)$;
(3) *za svaki* $\overrightarrow{a} \in V^2(O)$ *i njemu suprotan* $-\overrightarrow{a} \in V^2(O)$ *vrijedi* $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$;
(4) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$, $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2(O)$;
(5) $\alpha(\beta\overrightarrow{a}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a} \in V^2(O)$;
(6) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a} \in V^2(O)$;

(7) $\alpha(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=\alpha\overrightarrow{a}+\alpha\overrightarrow{b}, \forall\alpha\in\mathbb{R}, \forall\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in V^2(O)$;
(8) $1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}, \forall\overrightarrow{a}\in V^2(O)$.

Dokaz. Prve četiri tvrdnje već su izrečene i dokazane[1] u *propoziciji 1.1.3.* Dokažimo tvrdnju (5). Neka je $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$ i $A=(a_1,a_2)$. Stavimo $\alpha(\beta\overrightarrow{a})=\overrightarrow{OB}$ i $(\alpha\beta)\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OC}$. Uzastopnom primjenom prethodne propozicije dobivamo $B=(\alpha(\beta a_1),\alpha(\beta a_2))$ i $C=((\alpha\beta)a_1,(\alpha\beta)a_2)$. Kako je množenje realnih brojeva asocijativno, očito slijedi $B=C$.

Analogno se dokazuju i preostale tri tvrdnje. Uočimo da će u dokazima tvrdnji (6) i (7) završni dio argumentacije biti pozivanje na distributivnost množenja realnih brojeva prema zbrajanju. □

Prethodni teorem sadrži popis osnovnih svojstava zbrajanja i množenja skalarima u skupu $V^2(O)$. Svojstva (5), (6) i (7) nazivaju se, redom, kvaziasocijativnost, distributivnost množenja prema zbrajanju skalara i distributivnost množenja prema zbrajanju radijvektora.

Ovih osam svojstava igra fundamentalnu ulogu u izgradnji pojma apstraktnog vektorskog prostora. U tom smislu ćemo, prejudicirajući terminologiju i pojmove koji će biti uvedeni u sljedećem poglavlju, od sada na dalje govoriti da je $V^2(O)$ vektorski prostor.

Iz navedenih svojstava (ili iz samih definicija) lako se izvode i druga pravila za računanje s radijvektorima poput $(-1)\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$, $(\alpha-\beta)\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{a}-\beta\overrightarrow{a}$ i $\alpha(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=\alpha\overrightarrow{a}-\alpha\overrightarrow{b}$.

Dokazi ovih tvrdnji su posve jednostavni pa ih stoga izostavljamo. No oprez je potreban kako bi se ispravno shvatila i interpretirala prva od navedenih jednakosti. Tu nije riječ o mehaničkom ispuštanju zagrade (na kakvo smo navikli pri računanju s brojevima) jer izrazi na lijevoj i desnoj strani jednakosti potječu iz različitih definicija: dok se na lijevoj strani jednakosti radi o množenju radijvektora $\overrightarrow{a}$ skalarom -1, na desnoj se strani pojavljuje suprotan radijvektor - pojam koji je definiran ranije. Nije stoga ničim a priori osigurano da su izrazi s različitih strana navedene jednakosti identični. Nasreću, ti su radijvektori zaista jednaki, a provjera je jednostavna.

Teorem 1.1.5 predstavlja polaznu točku u proučavanju strukturnih svojstava vektorskog prostora $V^2(O)$. Veliku važnost ima okolnost da su definicije obiju operacija s radijvektorima geometrijske prirode. To nam omogućuje da razne geometrijske činjenice (koje možemo vizualizirati, pa stoga i intuitivno prihvaćati) prepoznamo ili iskažemo u terminima algebarskih operacija.

Propozicija 1.1.6. *Neka su $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in V^2(O)$ kolinearni te neka je $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$. Tada postoji jedinstveni skalar α takav da je $\overrightarrow{b}=\alpha\overrightarrow{a}$. Obratno, ako za neke $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in V^2(O)$ i $\alpha\in\mathbb{R}$ vrijedi $\overrightarrow{b}=\alpha\overrightarrow{a}$, onda su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni.*

[1] Nije običaj u tvrdnju nekog teorema uključivati iskaze prethodno dokazanih propozicija ili teorema. Ovdje smo učinili iznimku kako bismo objedinili sva svojstva i dobili kompletnu sliku.

Dokaz. Ako je $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, onda je očito $\overrightarrow{b} = 0 \cdot \overrightarrow{a}$. Ako je $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$, uzmimo $\alpha = \frac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, što je dobro definirano zbog $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Sada je jasno da vrijedi ili $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$ ili $\overrightarrow{b} = (-\alpha)\overrightarrow{a}$ ovisno o tome jesu li $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jednake ili suprotne orijentacije.

Druga tvrdnja propozicije je izravna posljedica definicije množenja radijvektora skalarima. □

Dakle, jednakošću $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$ karakterizira se kolinearnost radijvektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Primijetimo da smo u prvoj tvrdnji prethodne propozicije morali izuzeti slučaj $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Zaista, ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, onda je, po definiciji, svaki radijvektor $\overrightarrow{b}$ kolinearan s $\overrightarrow{a}$, no jednakost $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$ je moguća jedino ako je i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Ovoj maloj tehničkoj smetnji možemo jednostavno doskočiti. Uzmimo proizvoljne $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2(O)$ i potražimo skalare α i β za koje bi vrijedilo $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. Neovisno o izboru radijvektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, ova će jednakost očito biti zadovoljena uzmemo li $\alpha = \beta = 0$. Ima li i drugih, netrivijalnih izbora $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$? Ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni, takva mogućnost očito postoji. Zaista, ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, onda vrijedi $1 \cdot \overrightarrow{a} + 0 \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. Ako je pak $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, onda, prema prethodnoj propoziciji, postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$, a odatle odmah slijedi $(-\alpha) \cdot \overrightarrow{a} + 1 \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Vrijedi i obrat: Ako postoje skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ od kojih je bar jedan različit od 0, a koji zadovoljavaju jednakost $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, radijvektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni. Kako bismo to pokazali, pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Tada jednakost $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ odmah povlači $\overrightarrow{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{b}$ pa su, prema drugom dijelu tvrdnje prethodne propozicije, $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni. Ako je $\alpha = 0$, onda je prema pretpostavci $\beta \neq 0$ i potpuno analogno opet zaključujemo da su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni.

Korisno je ovo zapažanje formulirati i na sljedeći, ekvivalentan način:

Korolar 1.1.7. *Radijvektori* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2(O)$ *su nekolinearni ako i samo ako vrijedi*

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{1}$$

Korolar 1.1.7 je od fundamentalne važnosti za naša daljnja razmatranja. Smisao je u tome da smo nekolinearnost (a time a posteriori i kolinearnost) dvaju radijvektora uspjeli iskazati na algebarski način. Radijvektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su nekolinearni ako i samo ako jednakost $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ može biti zadovoljena **samo** za trivijalan izbor skalara: $\alpha = \beta = 0$.

Spomenimo još da se izraz oblika $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ naziva *linearna kombinacija* radijvektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ s koeficijentima α i β. Općenito, izraz $\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, zovemo linearnom kombinacijom vektora $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ s koeficijentima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Sljedeći teorem otkriva ulogu koju u prostoru $V^2(O)$ imaju skupovi koji se sastoje od (bilo koja) dva nekolinearna radijvektora.

Teorem 1.1.8. *Neka su* $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ *nekolinerni. Tada za svaki* $\vec{v} \in V^2(O)$ *postoje jedinstveni skalari* α *i* β *takvi da vrijedi* $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$*.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan $\vec{v}$ i prvo dokažimo egzistenciju prikaza $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Uočimo najprije da su i $\vec{a}$ i $\vec{b}$ netrivijalni zbog pretpostavljene nekolinearnosti.

Ako je $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{a}$, onda prema *propoziciji 1.1.6* imamo $\vec{v} = \alpha\vec{a}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Odavde odmah slijedi $\vec{v} = \alpha\vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$. U slučaju kad bi $\vec{v}$ bio kolinearan s $\vec{b}$, zaključivali bismo analogno.

Pretpostavimo da $\vec{v}$ nije kolinearan niti s $\vec{a}$, niti s $\vec{b}$. Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$. Neka je točka A' paralelna projekcija točke T na pravac OA u smjeru pravca OB. Analogno, neka je točka B' paralelna projekcija točke T na pravac OB u smjeru pravca OA.

Kako je četverokut $OA'TB'$ paralelogram, vrijedi $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$. Nadalje, dvostrukom primjenom *propozicije 1.1.6* nalazimo skalare α i β, takve da vrijedi $\overrightarrow{OA'} = \alpha\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = \beta\overrightarrow{OB}$. Uvrštavanjem ovih dviju jednakosti u prethodnu dobivamo $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Preostalo je pokazati jedinstvenost ovakvog zapisa svakog radijvektora $\vec{v}$. U tu svrhu pretpostavimo da za neki $\vec{v}$ vrijedi $\vec{v} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$ i $\vec{v} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$. Izjednačavanjem dobivamo $\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b}$ što možemo zapisati u obliku $(\alpha_1 - \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{b} = \vec{0}$. Kako su prema pretpostavci $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni, *korolar 1.1.7* pokazuje da je sada nužno $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ i $\beta_1 - \beta_2 = 0$, tj. $\alpha_1 = \alpha_2$ i $\beta_1 = \beta_2$. □

Imamo li, dakle, bilo koja dva nekolinearna radijvektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, **svaki** se radijvektor $\vec{v}$ može prikazati kao njihova linearna kombinacija, i to na **jedinstven način**. Istaknimo da je riječ o ekskluzivnom svojstvu dvočlanih skupova radijvektora (a pritom je nužno i da su promatrani radijvektori nekolinearni).

Jedan, ma kako odabran radijvektor nije dovoljan da se, množeći ga skalarima, preko njega izraze svi elementi prostora $V^2(O)$. Uzmemo li pak tri ili više radijvektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, $n \geq 3$, od kojih su bar dva nekolinearna, svaki će se $\overrightarrow{v} \in V^2(O)$ moći prikazati u obliku $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$ (dakle, kao njihova linearna kombinacija), no ne više na jedinstven način.

Da bismo to pokazali, pretpostavimo npr. da je dan skup $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\}$, pri čemu neka $\overrightarrow{a_1}$ i $\overrightarrow{a_2}$ nisu kolinearni. Prema prethodnom teoremu, $\overrightarrow{a_3}$ možemo prikazati u obliku $\overrightarrow{a_3} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2}$ s jedinstveno određenim skalarima λ_1, λ_2. Uzmimo sada proizvoljan $\overrightarrow{v} \in V^2(O)$. Ponovnom primjenom *teorema 1.1.8* dobivamo i jedinstveno određene $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2}$, što možemo pisati i kao $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a_1} + \beta\overrightarrow{a_2} + 0 \cdot \overrightarrow{a_3}$. S druge strane, očito vrijedi i $\overrightarrow{v} = (\alpha - \lambda_1)\overrightarrow{a_1} + (\beta - \lambda_2)\overrightarrow{a_2} + 1 \cdot \overrightarrow{a_3}$. Tako je $\overrightarrow{v}$ prikazan na dva različita načina kao linearna kombinacija radijvektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$. Štoviše, jasno je da takvih prikaza radijvektora $\overrightarrow{v}$ zapravo ima beskonačno mnogo.

Analogno bismo rezonirali i kad bismo, umjesto s tri, radili općenito s $n \geq 3$ radijvektora.

Definicija 1.1.9. Svaki dvočlani skup $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ čiji su članovi nekolinearni naziva se baza vektorskog prostora $V^2(O)$.

Ako je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ proizvoljno odabrana baza prostora $V^2(O)$, *teorem 1.1.8* jamči da se svaki član prostora $V^2(O)$ može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija elemenata baze.

U praksi, ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ i $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $T = (t_1, t_2)$, koeficijente α i β za koje vrijedi $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ možemo odrediti slijedeći dokaz *teorema 1.1.8*. Alternativno, primjenom *propozicija 1.1.2* i *1.1.4*, problem se svodi na rješavanje sustava od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Očito je da će konkretan račun biti tim jednostavniji čim je baza zgodnije odabrana.

U tom smislu posebno mjesto zauzima baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ koja se sastoji od jediničnih (tj. modula 1) radijvektora u smjeru pozitivnih dijelova koordinatnih osi našeg odabranog koordinatnog sustava. Tada, za proizvoljan $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT} \in V^2(O)$, pri čemu je $T = (t_1, t_2)$, očito vrijedi $\overrightarrow{v} = t_1\overrightarrow{i} + t_2\overrightarrow{j}$.

Baza $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ zove se kanonska ili standardna baza prostora $V^2(O)$ (no trebamo biti svjesni da ta baza ovisi o našem prethodnom izboru koordinatnog sustava u ravnini). Iako je u konkretnim zadaćama često najjednostavnije operirati upravo s kanonskom bazom, bitno je imati na umu da bazu prostora predstavlja svaki skup od dva nekolinearna vektora. U teoriji, tj. u smislu tvrdnje *teorema 1.1.8*, sve su baze ravnopravne.

Istaknimo na kraju da se sve baze prostora sastoje od točno dva radijvektora. Točno dva nekolinearna radijvektora (i to bilo koja dva) imaju moć da pomoću njih, i to na jedinstven način, izrazimo svaki drugi element prostora $V^2(O)$. Ova opaska je u skladu s našom intuicijom prema kojoj prostor $V^2(O)$ zamišljamo dvodimenzionalnim.

1.2. **Vektorski prostor $V^3(O)$.**

Prethodna razmatranja možemo proširiti i na radijvektore u prostoru. Označimo s E^3 intuitivno shvaćen trodimenzionalni prostor koji također shvaćamo kao skup točaka. I ovdje ćemo fiksirati pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u O. Neka $V^3(O)$ označava skup svih radijvektora s početnom točkom O. Modul, smjer i orijentacija, kao i pojam suprotnog radijvektora definirani su identično kao u $V^2(O)$. Jednako su definirane i binarna operacija zbrajanja $+ : V^3(O) \times V^3(O) \to V^3(O)$ i operacija množenja radijvektora skalarima $\cdot : \mathbb{R} \times V^3(O) \to V^3(O)$.

I ovdje je korisno najprije utvrditi kako se ove operacije realiziraju u terminima koordinata završnih točaka radijvektora.

Propozicija 1.2.1. *Neka je $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ i $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Tada je $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Nadalje, označimo li za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$, vrijedi $D = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nisu kolinearni. Uočimo da se sada zbroj $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ dobiva pravilom paralelograma u ravnini OAB. Pretpostavimo, konkretnosti radi, da se ravnina OAB ne podudara niti s jednom od koordinatnih ravnina. Označimo $C = (c_1, c_2, c_3)$.

Neka su A', B', C', redom, ortogonalne projekcije točaka A, B, C na xy-ravninu. Tada je $A' = (a_1, a_2, 0)$, $B' = (b_1, b_2, 0)$ i $C' = (c_1, c_2, 0)$. Kako je $OACB$ paralelogram, i njegova ortogonalna projekcija na xy-ravninu $OA'C'B'$ je paralelogram. Zato je $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$. Iz *propozicije 1.1.2* (primijenjene u xy-ravnini) sada dobivamo $C' = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, 0)$. Odavde je $c_1 = a_1 + b_1$ i $c_2 = a_2 + b_2$.

Na sasvim analogan način, koristeći ortogonalnu projekciju paralelograma $OACB$ na yz-ravninu, dobivamo i $c_3 = a_3 + b_3$.

Slično zaključujemo da vrijedi $C = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ i u svim drugim situacijama. Druga tvrdnja propozicije se dokazuje analogno. □

Uz pomoć prethodne propozicije sada lako možemo proučiti svojstva operacija u $V^3(O)$. Sljedeći teorem navodimo bez dokaza jer se sve njegove tvrdnje dobivaju izravnom primjenom *propozicije 1.2.1.*

Teorem 1.2.2. *Operacije zbrajanja $+ : V^3(O) \times V^3(O) \to V^3(O)$ i množenja skalarima $\cdot : \mathbb{R} \times V^3(O) \to V^3(O)$ na skupu $V^3(O)$ imaju sljedeća svojstva:*

(1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}, \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$;
(2) *za nulvektor* $\vec{0} \in V^3(O)$ *vrijedi* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V^3(O)$;
(3) *za svaki* $\vec{a} \in V^3(O)$ *i njemu suprotan* $-\vec{a} \in V^3(O)$ *vrijedi* $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$;
(4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$;
(5) $\alpha(\beta \vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V^3(O)$;
(6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V^3(O)$;
(7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$;
(8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \forall \vec{a} \in V^3(O)$.

Uočimo da je iskaz prethodnog teorema identičan iskazu *teorema 1.1.5.* Prema tome, strukturna svojstva operacija zbrajanja i množenja skalarima na skupovima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su ista. U tom smislu kažemo da je i $V^3(O)$ vektorski prostor. Imajući na umu ovu strukturnu sličnost prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$, i ovdje bismo željeli provesti razmatranja analogna onima koja su nas dovela do pojma baze u prostoru $V^2(O)$.

Definicija 1.2.3. Neka je $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$, $n \geq 2$, konačan skup radijvektora u $V^3(O)$, te neka je $\vec{v_i} = \overrightarrow{OT_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Kažemo da su radijvektori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ komplanarni ako točke $O, T_1, T_2, \ldots, T_n$ leže u istoj ravnini. U suprotnom kažemo da su radijvektori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ nekomplanarni.

Primijetimo da su svaka dva radijvektora komplanarna. Uzmemo li tri radijvektora, jasno je da oni mogu i ne moraju biti komplanarni. Na primjer, ako s $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ označimo jedinične radijvektore u smjeru pozitivnih dijelova koordinatnih osi, jasno je da su oni nekomplanarni. Nasuprot tomu, radijvektori $\vec{i}$, $\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{i} - \vec{j}$ očito su komplanarni.

Sljedeća propozicija gotovo je identična *teoremu 1.1.8* te je navodimo samo radi potpunosti. I dokaz je identičan pa ga izostavljamo.

Propozicija 1.2.4. *Neka su* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ *nekolinearni radijvektori. Za svaki* $\vec{v} \in V^3(O)$ *komplanaran s* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *postoje jedinstveni skalari* α *i* β *takvi da vrijedi* $\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

U odnosu na *teorem 1.1.8* jedina je razlika što se ovdje zaključak ne odnosi na sve radijvektore, nego tek na one koji su komplanarni s dvama zadanima. Stvarni, puni analogon *teorema 1.1.8* je sljedeći rezultat.

Teorem 1.2.5. *Neka su* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ *nekomplanarni. Za svaki radijvektor* $\vec{v} \in V^3(O)$ *postoje jedinstveni skalari* α, β, γ *takvi da vrijedi* $\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$.

Dokaz. Uočimo najprije da zbog pretpostavljene nekomplanarnosti nikoja dva od zadanih radijvektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne mogu biti kolinearna.

Stavimo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ te uzmimo proizvoljan $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$. Neka je T' paralelna projekcija točke T na ravninu OAB u smjeru pravca

OC. Dalje, neka je T'' projekcija točke T na pravac OC paralelna s ravninom OAB.

Očito je $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{OT''}$. Kako je $\overrightarrow{OT''}$ kolinearan s $\overrightarrow{OC}$, imamo, prema *propoziciji 1.1.6*, $\overrightarrow{OT''} = \gamma\overrightarrow{OC}$ za neki $\gamma \in \mathbb{R}$. S druge strane, primjena *propozicije 1.2.4* daje $\overrightarrow{OT'} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ za neke α i β. Uvrštavanjem ovih dviju jednakosti u prethodnu slijedi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'} + \overrightarrow{OT''} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Za dokaz jedinstvenosti pretpostavimo da neki $\overrightarrow{v}$ dopušta dva takva prikaza: $\overrightarrow{v} = \alpha_1\overrightarrow{a} + \beta_1\overrightarrow{b} + \gamma_1\overrightarrow{c}$ i $\overrightarrow{v} = \alpha_2\overrightarrow{a} + \beta_2\overrightarrow{b} + \gamma_2\overrightarrow{c}$. Izjednačavanjem dobivamo $\alpha_1\overrightarrow{a} + \beta_1\overrightarrow{b} + \gamma_1\overrightarrow{c} = \alpha_2\overrightarrow{a} + \beta_2\overrightarrow{b} + \gamma_2\overrightarrow{c}$, odnosno $(\alpha_1 - \alpha_2)\overrightarrow{a} + (\beta_1 - \beta_2)\overrightarrow{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Ako bi sada bilo $\alpha_1 \neq \alpha_2$, slijedilo bi $\overrightarrow{a} = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\overrightarrow{b} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\overrightarrow{c}$, a to bi, prema definiciji zbrajanja, značilo da je $\overrightarrow{a}$ komplanaran s $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$, što je protivno pretpostavci.

Jednako se otklone mogućnosti $\beta_1 \neq \beta_2$ i $\gamma_1 \neq \gamma_2$. $\square$

Definicija 1.2.6. Svaki skup $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ od tri nekomplanarna radijvektora naziva se baza prostora $V^3(O)$.

Primijetimo da je ova definicija baze formalno različita od definicije baze prostora $V^2(O)$ (*definicija 1.1.9*). No usporedba prethodnog teorema i *teorema 1.1.8* pokazuje da smo u funkcionalnom smislu dobili identičan rezultat: za proizvoljno odabranu bazu prostora $V^3(O)$ svaki radijvektor iz $V^3(O)$ na jedinstven se način može prikazati kao linearna kombinacija elemenata baze.

Slično kao i u $V^2(O)$ i ovdje bismo lako vidjeli da takvo svojstvo ne može imati ni jedan skup s manje od tri člana, kao i ni jedan skup koji sadrži više od tri člana. U ovom drugom slučaju, kad imamo skup S koji se sastoji od $n \geq 4$ radijvektora, još se svaki radijvektor iz $V^3(O)$ možda i može prikazati kao linearna kombinacija elemenata skupa S (uvjet je da nisu svi elementi od S komplanarni), ali ne više na jedinstven način.

Svojstvo iz *teorema 1.2.5* mogu, dakle, imati samo tročlani skupovi radijvektora (koji moraju biti i nekomplanarni). Kao i u slučaju prostora $V^2(O)$, ovo je potpora našem intuitivnom poimanju trodimenzionalnosti prostora $V^3(O)$.

Za kraj, korisno je formulirati kriterij nekomplanarnosti triju radijvektora. Očekivano, sljedeći rezultat je potpuno analogan *korolaru 1.1.7*: tri su radijvektora nekomplanarna ako i samo ako se nulvektor može prikazati kao njihova linearna kombinacija **samo** na trivijalan način.

Korolar 1.2.7. *Radijvektori* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3(O)$ *su nekomplanarni ako i samo ako vrijedi*

$$\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \tag{2}$$

Dokaz. Pretpostavimo da su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ nekomplanarni. Nulvektor očito možemo zapisati u obliku $\overrightarrow{0} = 0\cdot\overrightarrow{a} + 0\cdot\overrightarrow{b} + 0\cdot\overrightarrow{c}$. *Teorem 1.2.5* jamči jedinstvenost ovakvog prikaza, čime upravo dobivamo implikaciju (2) iz iskaza korolara.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (2). Odmah se vidi da tada $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ ne mogu biti kolinearni. Kad bi $\overrightarrow{c}$ bio komplanaran s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ imali bismo, prema *propoziciji 1.2.4*, $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Posljednju jednakost možemo pisati i kao $\alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + (-1)\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Kako je koeficijent uz $\overrightarrow{c}$ različit od 0, ova jednakost je u kontradikciji s pretpostavljenom implikacijom (2). Stoga su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ nekomplanarni. $\square$.

1.3. **Vektorska interpretacija sustava linearnih jednadžbi s dvije i tri nepoznanice.**

Na više načina sustavi linearnih jednadžbi zauzimaju jedno od centralnih mjesta u linearnoj algebri. Na tehničkoj razini, rješavanje sustava linearnih jednadžbi nazaobilazan je dio rješavanja gotovo svake zadaće linearne algebre. S druge strane, za razumijevanje i izgradnju teorije sustava linearnih jednadžbi upravo je nužno razviti opću teoriju vektorskih prostora i njihovih preslikavanja - linearnih operatora.

Da bismo to ilustrirali, pokazat ćemo kako se sustavi jednadžbi s dvije, odnosno tri nepoznanice mogu interpretirati i analizirati uz pomoć prethodnih rezultata o radijvektorima.

Promotrimo najprije 3 sustava s po dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice.

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & 0. \end{array}$$

U prvom slučaju jedino rješenje je uređen par $(3, 1)$, drugi sustav ima beskonačno mnogo rješenja; to su svi uređeni parovi oblika $(2t + 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$, a treći sustav nema rješenja. Dobro poznata analitičko-geometrijska interpretacija sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice pokazuje da su to upravo svi slučajevi koji mogu nastupiti. Smisao je te interpretacije svaku jednadžbu shvatiti kao jednadžbu pravca te time rješavanje sustava svesti na geometrijski problem nalaženja sjecišta dvaju pravaca.

U ovom trenutku nas više od konkretne metode nalaženja rješenja zanima analiza danog sustava. Dok je riječ o jednadžbama s dvije nepoznanice, spomenuta analitička interpretacija sustava je jasna i učinkovita. Ispravno je pretpostaviti da se analogno mogu analizirati i sustavi linearnih jednadžbi s tri nepoznanice nakon što razvijemo analitičku geometriju u prostoru. U takvoj geometrijskoj interpretaciji svaka bi jednadžba zapravo predstavljala jednadžbu neke ravnine. Stoga bi se analiza danog sustava svela na razmatranje međusobnog položaja ravnina u prostoru.

Očiti nedostatak ovakvog pristupa je u nemogućnosti daljnje generalizacije, tj. analognog, geometrijskog tretmana općih sustava linearnih jednadžbi s, općenito, n nepoznanica. Želimo li, dakle, razviti opću teoriju sustava linearnih jednadžbi, bilo bi korisno iznaći i druge interpretacije.

Promotrimo jednadžbu u nepoznanicama x i y

$$\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} \tag{3}$$

gdje su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ proizvoljno odabrani radijvektori u $V^2(O)$.

Neka je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$, pri čemu je $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ i $C = (c_1, c_2)$. Sad se možemo pozvati na *propozicije 1.1.2* i *1.1.4* te prethodnu jednadžbu pisati u obliku

$$(c_1, c_2) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y). \tag{4}$$

Napokon, kako je jednakost uređenih parova ekvivalentna jednakostima odgovarajućih komponenti, (4) možemo zapisati kao sustav jednadžbi

$$\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2. \end{array} \tag{5}$$

Početna jednadžba (3) je ekvivalentna sustavu linearnih jednadžbi (5) u smislu: uređen par (x, y) zadovoljava (3) ako i samo ako zadovoljava i sustav (5).

Štoviše, identično rezoniranje možemo primijeniti i u obrnutom smjeru. Ako je zadan sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice oblika (5), pri čemu su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ proizvoljni realni brojevi, on je ekvivalentan jednadžbi (3) gdje je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$, i $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$.

Na ovaj način analizu danog sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice možemo provesti analizirajući vektorsku jednadžbu oblika (3). Iz rezultata prve točke ovog poglavlja odmah je jasno:

jednadžba $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ za zadane radijvektore $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^2(O)$

- ima jedinstveno rješenje, u slučaju kad su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nekolinearni (*teorem 1.1.8*);
- ima beskonačno mnogo rješenja ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni i ako je i $\overrightarrow{c}$ kolinearan s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$;

- nema rješenja ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni i ako je pritom $\overrightarrow{c}$ nekolinearan s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Ovime smo dobili alternativnu mogućnost analize sustava jednadžbi s dvije nepoznanice. Uočimo: dok se analitičko-geometrijska interpretacija temeljila na tumačenju "redaka" (svaka jednadžba je predstavljala pravac), ova vektorska interpretacija se zasniva na tumačenju "stupaca": radijvektori koje smo uveli su zadani koeficijentima uz nepoznanicu "x", nepoznanicu "y" te slobodnim članovima sustava (5).

Potpuno analogno sada možemo tretirati sustave od tri jednadžbe s tri nepoznanice oslanjajući se na prethodno dobivene rezultate o radijvektorima u prostoru $V^3(O)$. Uz pomoć *propozicije 1.2.1* lako se zaključuje:

Sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice oblika

$$\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & t_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & t_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & t_3 \end{array} \tag{6}$$

pri čemu su $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, t_1, t_2, t_3$ proizvoljni realni brojevi, ekvivalentan je jednadžbi

$$\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} \tag{7}$$

gdje je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ i $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $T = (t_1, t_2, t_3)$.

Sada možemo lako analizirati (u smislu egzistencije i broja rješenja) svaki sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice proučavajući rješivost ekvivalentne vektorske jednadžbe (7). Na temelju rezultata iz prethodne točke zaključujemo:

jednadžba $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ za zadane radijvektore $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{v} \in V^3(O)$

- ima jedinstveno rješenje, u slučaju kad su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ nekomplanarni;
- ima beskonačno mnogo rješenja i ona ovise o jednom slobodnom parametru, ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ komplanarni i nekolinearni i ako je i $\overrightarrow{v}$ komplanaran s $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$;
- nema rješenja, ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ komplanarni i nekolinearni i ako $\overrightarrow{v}$ nije komplanaran s $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$;
- ima beskonačno mnogo rješenja i ona ovise o dva slobodna parametra, ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ kolinearni, pri čemu je bar jedan od njih netrivijalan, i ako je i $\overrightarrow{v}$ kolinearan s $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$;
- nema rješenja, ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ kolinearni i ako $\overrightarrow{v}$ nije kolinearan s $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.

Ovo su svi slučajevi koji mogu nastupiti. Istaknimo da je prvi slučaj pokriven *teoremom 1.2.5.* Drugi slučaj je opisan u diskusiji koja je prethodila *definiciji 1.1.9.* Nadalje, zaključak u trećem slučaju slijedi direktno iz definicije zbrajanja: ako su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ komplanarni, onda je i svaki radijvektor oblika $x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$ s njima komplanaran, pa stoga jednadžba $\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}+z\overrightarrow{c}$ u ovom slučaju nije rješiva. Analogno se argumentira i nepostojanje rješenja u posljednjem slučaju.

Pokažimo kako slijedi zaključak u preostalom slučaju kad su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ kolinearni, bar jedan od njih netrivijalan, i kad je i $\overrightarrow{v}$ s njima kolinearan.

Pretpostavimo da je $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$. Sada, prema *propoziciji 1.1.6*, postoje jedinstveno određeni realni brojevi β, γ i τ takvi da vrijedi $\overrightarrow{b}=\beta\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c}=\gamma\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{v}=\tau\overrightarrow{a}$. Kombinirajući ove tri jednakosti lako dobivamo, za proizvoljno odabrane $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{v}=(\tau-\lambda\beta-\mu\gamma)\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}+\mu\overrightarrow{c}$. Uočimo da su ovdje β, γ i τ konstante (tj. u svakoj konkretnoj situaciji dobivamo za njih konkretne vrijednosti), dok su λ i μ proizvoljni realni brojevi, međusobno neovisni i neovisni o vrijednostima β, γ i τ. U tom smislu se ovdje kaže da rješenje ovisi o dva slobodna parametra.

Slično bismo mogli analizirati i sustave linearnih jednadžbi s tri nepoznanice u kojima broj jednadžbi nije nužno jednak 3. No to nam ovdje nije cilj. Nije nam ni namjera ovdje podrobno ulaziti u metode nalaženja svih rješenja ovakvih sustava. Potpunu i detaljnu diskusija općih (m jednadžbi, n nepoznanica) sustava linearnih jednadžbi provest ćemo u četvrtom poglavlju, nakon što pripremimo odgovarajuću teorijsku podlogu.

Za sada tek uočimo da smo i ovdje, kao i kod jednadžbi s dvije nepoznanice, analizu danog sustava proveli interpretiravši "stupce" (tj. koeficijente uz istu nepoznanicu) kao radijvektore u $V^3(O)$. Strukturna svojstva prostora $V^3(O)$, nadasve *propozicija 1.2.4* i *teorem 1.2.5*, učinkovito su nas dovela do zaključaka o egzistenciji i broju rješenja danog sustava.

Prirodno je sada očekivati da bi nam pri analizi i rješavanju općih sustava linearnih jednadžbi na sličan način mogli poslužiti "višedimenzionalni analogoni" prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$ koji bi s njima dijelili ista strukturna svojstva. Izgradnja i razvoj teorije takvih, apstraktnih, vektorskih prostora (i njihovih preslikavanja) osnovni je predmet proučavanja linearne algebre.

1.4. **Zadaci.**

1. Upotpunite dokaz *propozicije 1.1.2.*
2. Dokažite da vrijede relacije $(-1)\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$, $(\alpha-\beta)\overrightarrow{a}=\alpha\overrightarrow{a}-\beta\overrightarrow{a}$ i $\alpha(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})=\alpha\overrightarrow{a}-\alpha\overrightarrow{b}$, za sve $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in V^3(O)$ i sve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
3. Neka je $A=(1,2,1), B=(1,1,0), C=(0,1,1)$. Ispitajte čine li radijvektori $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ bazu prostora $V^3(O)$.
4. Neka je $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\}$ baza prostora $V^2(O)$. Pokažite da je tada i $\{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b},\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\}$ jedna baza za $V^2(O)$. Nadalje, odredite nužan i dovoljan uvjet na skalare $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ da bi i skup $\{\alpha\overrightarrow{a}-\beta\overrightarrow{b},\gamma\overrightarrow{a}+\delta\overrightarrow{b}\}$ bio baza za $V^2(O)$.

5. Riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 12 \\ 2x & - & y & - & z & = & 6 \\ x & & & + & z & = & 2. \end{array}$$

6. Služeći se vektorskom interpretacijom pokažite da je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & z & = & 7 \end{array}$$

rješiv te da je skup njegovih rješenja beskonačan jednoparametarski skup. Nakon toga, riješite sustav služeći se nekom od uobičajenih metoda.

2. Vektorski prostori

2.1. **Pojam vektorskog prostora.**

Grubo govoreći, vektorski prostor je skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja i operacija množenja skalarima koje poštuju uobičajena računska pravila. Da bismo definiciju mogli iskazati precizno, podsjetimo se prvo pravila računanja s brojevima.

Napomena 2.1.1. Binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i množenja $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na skupu realnih brojeva imaju sljedeća svojstva:

(1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
(2) postoji $0 \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(3) za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $-\alpha \in \mathbb{R}$ tako da je $\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = 0$;
(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, $\forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$;
(5) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
(6) postoji $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sa svojstvom $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(7) za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ tako da je $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$;
(8) $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$;
(9) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Kad god imamo neki skup $\mathbb{F}$ na kojem su zadane binarne operacije zbrajanja $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ i množenja $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ koje imaju navedenih devet svojstava (pri čemu, naravno, u tom slučaju svuda umjesto $\mathbb{R}$ treba stajati $\mathbb{F}$), kažemo da je $\mathbb{F}$ *polje*. Preciznije bi bilo reći da je uređena trojka $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje jer je riječ o zajedničkim svojstvima skupa $\mathbb{F}$ i na njemu definiranih binarnih operacija $+$ i $\cdot$. U tom smislu, prethodna napomena se može jezgrovito reformulirati: skup realnih brojeva s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja je polje.

Odmah vidimo da su i skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, kao i skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ daljnji primjeri polja. Postoje i brojni drugi primjeri. Nasuprot tomu, skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja nije polje jer u $\mathbb{Z}$ nije zadovoljen uvjet (7).

Kako smo već naznačili u uvodnom poglavlju, vektorski prostor je struktura koja je izgrađena "nad poljem skalara". Konkretno, u prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ definirano je množenje radijvektora realnim brojevima. Pritom su nam važnija od same prirode realnih brojeva bila svojstva algebarske strukture koju čini skup $\mathbb{R}$ zajedno s operacijama zbrajanja i množenja. Preciznije, bitno nam je bilo da je skup $\mathbb{R}$ polje. U tom smislu, u formalnoj definiciji vektorskog prostora dopustit ćemo da ulogu polja skalara umjesto skupa $\mathbb{R}$ igra bilo koje odabrano polje $\mathbb{F}$.

Definicija 2.1.2. Neka je V neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja $+ : V \times V \to V$ i operacija množenja skalarima iz polja $\mathbb{F}$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Kažemo da je uređena trojka $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ako vrijedi:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in V$;
(2) postoji $0 \in V$ sa svojstvom $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in V$;
(3) za svaki $a \in V$ postoji $-a \in V$ tako da je $a + (-a) = -a + a = 0$;
(4) $a + b = b + a$, $\forall a, b, \in V$;
(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$;
(6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$;
(7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$;
(8) $1 \cdot a = a$, $\forall a \in V$.

Vektorski prostor je, dakle, struktura koja se sastoji od skupa snabdjevenog dvjema operacijama koje trebaju zadovoljavati navedenih 8 svojstava. Primijetimo da je riječ o identičnim pravilima računanja koja smo otkrili kao zakonitosti u prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ (usp. *teoreme 1.1.5* i *1.2.2*). Štoviše, formalna definicija vektorskog prostora je i nastala tako da smo apstrahirali prirodu skupova $V^2(O)$ i $V^3(O)$ i usredotočili se na strukturu prisutnu u oba prostora. Opći plan je da sada na načelnom, apstraktnom nivou istražimo svojstva *svih* vektorskih prostora, dakle, svih skupova V (zajedno s odgovarajućim operacijama $+$ i $\cdot$) koji zadovoljavaju *definiciju 2.1.2.*

Uz ovaj načelni komentar, korisno je uz definiciju vektorskog prostora navesti i niz konkretnih pojašnjenja i opaski. Navodimo ih u sljedećoj formalnoj napomeni.

Napomena 2.1.3. (a) Uočimo da su operacije na vektorskom prostoru, po definiciji, *preslikavanja.* Time su implicitno navedene još dvije važne činjenice: prvo, jer je zbrajanje binarna operacija na V, zbroj je definiran za svaka dva elementa iz V i, za svaka dva elementa, taj je zbroj jedinstveno određen element skupa V. Analogno, jer je množenje skalarima preslikavanje s $\mathbb{F} \times V$ u V, dobro je definiran umnožak svakog skalara iz $\mathbb{F}$ sa svakim elementom iz V i rezultat te operacije je opet jedinstveno određen element skupa V.

(b) U definiciji vektorskog prostora priroda elemenata skupa V je irelevantna. Smisao definicije je da skup V, što god po svojoj naravi bio, zajedno s operacijama čija se prisutnost u definiciji zahtijeva, zadovoljava postavljene uvjete. Ipak, običaj je da se elementi vektorskog prostora uvijek nazivaju **vektorima**. Vektore ćemo, kao i u prethodnoj definiciji, označavati malim latinskim slovima.

(c) U definiciji vektorskog prostora zahtijeva se da na skupu V bude definirano i množenje vektora elementima polja $\mathbb{F}$. To je smisao fraze *V je vektorski prostor nad* $\mathbb{F}$. Načelno, $\mathbb{F}$ može biti bilo koje polje. Ipak, najvažniji su slučajevi vektorskih prostora sagrađenih nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Stoga ćemo se ograničiti samo na ova dva slučaja. Od sada nadalje, oznaka $\mathbb{F}$ će značiti isključivo $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Vektorski prostori nad poljem $\mathbb{R}$ nazivaju se realni vektorski prostori; za one nad poljem $\mathbb{C}$ kažemo da su kompleksni. U oba slučaja elemente polja označavat ćemo malim grčkim slovima i zvati **skalarima**.

(d) Kad god to bude moguće, naše definicije i teoremi će biti iskazani simultano za oba slučaja i tada će u iskazima stajati simbol $\mathbb{F}$. U posebnim slučajevima izrijekom će se navesti o kojem polju je riječ. U trenutku nije jasna potreba da se teorija postavi toliko široko. (Naši pilot-primjeri $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su realni prostori i nije bilo naznaka da bi teoriju trebalo širiti i na kompleksne prostore.) No, simultan tretman realnih i kompleksnih vektorskih prostora neće dodatno opteretiti naša razmatranja jer će gotovo svi argumenti biti univerzalni, tj. neovisni o izboru polja. U drugu ruku, pokazat će se da teorija realnih vektorskih prostora svoje prirodno upotpunjenje dobiva tek u ovom, širem kontekstu.

(e) Formalno, govori se o uređenoj trojci $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$. No kad je iz konteksta jasno o kojim se operacijama i o kojem polju radi, pisat ćemo jednostavno V. Poput, primjerice, "vektorski prostor $V^2(O)$".

Slično, kad je iz konteksta jasno da se radi o nekom vektorskom prostoru, često ćemo i atribut vektorski ispuštati. U načelu, termin prostor u kontekstu linearne algebre uvijek podrazumijeva da se zapravo radi o vektorskom prostoru.

Daljnji komentari definicije odnose se na postavljene uvjete (1)-(8), pa su više tehničke prirode.

Napomena 2.1.4. (a) Svojstvo (2) u definiciji govori o postojanju neutralnog elementa za zbrajanje. Taj je označen simbolom 0 i naziva se nulvektor. Primijetimo da je 0 jedini vektor u vektorskom prostoru koji ima to svojstvo.

Zaista, zamislimo da postoji i vektor $n \in V$ koji zadovoljava $a + n = n + a = a, \forall a \in V$. Posebno, tada bismo imali i $0 + n = 0$. U drugu ruku, jer je nulvektor neutralan za zbrajanje, vrijedi i $n + 0 = n$. Sad je bitno da je zbrajanje funkcija; rezultat zbrajanja bilo koja dva vektora je jedinstven i zato je $n = 0$.

Nije slučajno da je za simbol nulvektora odabran isti onaj koristimo za oznaku realnog broja nula. Time se upravo željela naglasiti uloga (tj. neutralnost za zbrajanje) nulvektora jer, očito, isto svojstvo ima i broj nula pri zbrajanju brojeva. Iz konteksta će uvijek biti jasno radi li se o broju nula ili o nulvektoru nekog prostora.

(b) Uvjet (3) nalaže da za svaki vektor a postoji njemu "suprotan" $-a$ koji zadovoljava $a + (-a) = -a + a = 0$. Uočimo da je nulvektor univerzalan (jedan za sve), dok je suprotni vektor $-a$ definiran kao objekt koji se odnosi samo na dani vektor a. Za svaki $a \in V$ suprotni vektor je jedinstveno određen (te je, jedino zahvaljujući tomu, i moguće vektor suprotan vektoru a označavati funkcionalnom oznakom $-a$).

Zaista; pretpostavimo da u vektorskom prostoru V za neki vektor a postoje vektori $b, c \in V$ sa svojstvom $a + b = b + a = 0$ i $a + c = c + a = 0$. Sada uz upotrebu asocijativnosti (to je uvjet (1)) i svojstvo neutralnog elementa (uvjet (2)) imamo $b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$.

Odavde odmah zaključujemo da vrijedi $-0 = 0$ i $-(-a) = a$. Nadalje, i ovdje ćemo umjesto $a + (-b)$ pisati jednostavno $a - b$ i govoriti o "oduzimanju" (točno kako smo navikli pri računanju s brojevima i radijvektorima). Na kraju, uočimo da u sadržaju pojma suprotnog vektora nema geometrijskih konotacija - riječ je isključivo o izvjesnom algebarskom svojstvu. Naravno, termin "suprotan vektor" inspiriran je stvarnim izgledom suprotnog radijvektora u prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$.

(c) Svojstvo (5) iz definicije vektorskog prostora zove se kvaziasocijativnost. Prefiks kvazi upozorava da se u jednakosti pojavljuju dvije vrste množenja: množenje u polju i množenje vektora skalarima.

(d) Svojstva (6) i (7) zovu se distributivnost množenja prema zbrajanju skalara, odnosno vektora. Na manipulativnom nivou njima ćemo se služiti kao i kad računamo u polju (uočimo da i ovdje možemo govoriti o izlučivanju kad oba pravila čitamo s desna na lijevo). S filozofskog stajališta ova svojstva treba razumjeti kao zahtjev da dvije operacije definirane na vektorskom prostoru budu jedna s drugom vezane, usklađene.

(e) Posljednji zahtjev izgleda nedužno ali je važan jer priječi da u društvo vektorskih prostora uđu i neke degenerirane strukture. Zamislimo, npr. da na skupu V imamo binarnu operaciju $+$ sa svojstvima (1) - (4). Takvih primjera je mnogo; najjednostavniji je vjerojatno $(\mathbb{Z}, +)$. Definirajmo sada množenje skalarima iz polja F formulom $\alpha v = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$. Naravno da ovakvo degenerirano množenje nije zanimljivo, no treba uočiti da tako dobivena struktura $(V, +, \cdot)$ zadovoljava uvjete (1)-(7). Jedino (8) ne vrijedi čim je $V \neq \{0\}$. Samo zahvaljujući uvjetu (8) ovako konstruiran primjer ipak nije vektorski prostor.

(f) Prethodni primjer pokazuje da je uvjet (8) nezavisan od ostalih. Može se pokazati da isto vrijedi i za sve ostale uvjete. Uvjeti iz *definicije 2.1.2* su međusobno nezavisni. Da se to pokaže, može se, za svaki pojedini uvjet, kao što smo to gore učinili za uvjet (8), konstruirati primjer u kojem bi bili zadovoljeni svi uvjeti iz definicije osim tog, odabranog.

Pogledajmo sada najvažnije primjere vektorskih prostora.

1. $V^2(O)$, $V^3(O)$.

2. Na skupu $\mathbb{R}^2$ svih uređenih parova realnih brojeva definiramo zbrajanje $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ i množenje realnim skalarima $\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$. Uz ovako uvedene operacije $\mathbb{R}^2$ je realan vektorski prostor. Sasvim lagano se provjere svi uvjeti iz *definicije 2.1.2.* No, i bez formalne provjere, već otprije znamo da je ovo vektorski prostor; naime, $\mathbb{R}^2$ s ovako uvedenim operacijama je, ništa drugo, nego koordinatna realizacija vektorskog prostora $V^2(O)$.

Istim argumentima se vidi da je i $\mathbb{R}^3$ s analogno definiranim operacijama također realan vektorski prostor.

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka $\mathbb{R}^n$ označava skup svih uređenih n-torki realnih brojeva (drugim riječima, $\mathbb{R}^n$ je Kartezijev produkt od n kopija skupa $\mathbb{R}$). Definirajmo $(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$

i, za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$. Lako se vidi da je uz ovako definirane operacije i $\mathbb{R}^n$ realan vektorski prostor.

Primijetimo da smo time dobili čitavu seriju prostora $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, kao prirodno poopćenje prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ koje smo poznavali od ranije.

4. Skup $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, potpuno analogno možemo opskrbiti strukturom vektorskog prostora. Definicije operacija su identične, jedino je sada riječ o uređenim n-torkama kompleksnih brojeva, te će ovo biti kompleksan vektorski prostor (vektore iz $\mathbb{C}^n$ množimo, dakle, kompleksnim skalarima). Očito, $\mathbb{C}^n$ s ovako uvedenim operacijama ima svih osam svojstava iz *definicije 2.1.2*, te time postaje kompleksan vektorski prostor za sve $n \in \mathbb{N}$.

5. Ako u prethodna dva primjera uzmemo $n = 1$, primjećujemo da je i polje $\mathbb{R}$ realan vektorski prostor (dakle, prostor nad samim sobom), kao što je i polje $\mathbb{C}$ kompleksan vektorski prostor.

Ova dva primjera nisu inspirativna; u stvari se radi o izvjesnoj degeneraciji jer, za razliku od svih drugih primjera u kojima su vektori i skalari raznorodni objekti, ovdje su i vektori i skalari realni, odnosno kompleksni brojevi. No, kako i $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja zadovoljavaju sve uvjete iz *definicije 2.1.2*, riječ je o legitimnim primjerima vektorskih prostora.

6. Još neinspirativniji je vektorski prostor $\{0\}$ koji se sastoji od samo jednog vektora i na kojem su operacije dane s $0+0=0$, te $\alpha \cdot 0 = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$. Odmah se vidi da su zadovoljeni svi formalni uvjeti, pa je i ovo vektorski prostor. Zovemo ga trivijalnim ili nulprostorom. Uočimo da nulprostor možemo shvatiti i kao realan i kao kompleksan vektorski prostor, ovisno o tome što odaberemo za $\mathbb{F}$.

7. Primjeri (3) i (4) imaju svoje prirodno poopćenje u vektorskim prostorima matrica. Za prirodne brojeve m i n neka $M_{mn}(\mathbb{F})$ označava skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. (U slučaju $m = n$ umjesto M_{mn} običaj je pisati kratko M_n. U ovom slučaju govorimo o kvadratnim matricama reda n.) Tipičan element skupa $M_{mn}(\mathbb{F})$ zapisujemo u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

U stvari je riječ o funkcijama $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ uz dogovor da funkcijsku vrijednost $A(i, j)$ označavamo kraće s a_{ij} i onda, dogovorno, zapisujemo u pravokutnu $m \times n$ tablicu i to u i-ti redak i j-ti stupac. S obzirom na to da je riječ o funkcijama odmah zaključujemo da su matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ s m redaka i n stupaca jednake ako i samo ako vrijedi $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Sada definiramo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

i, za $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nije teško provjeriti (pa i ovdje izostavljamo detalje) da uz ove operacije skup $M_{mn}(\mathbb{F})$ postaje vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Jasno je da ovdje ulogu nulvektora ima tzv. nulmatrica

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da smo dobili dvije serije vektorskih prostora, ovisno o tome nad kojim poljem radimo. U konkretnim slučajevima govorimo o realnim, odnosno kompleksnim matricama. U daljnjem ćemo pisati jednostavno M_{mn} ako u tom trenutku nije važno o kojem se polju radi (u smislu da se tada sve rečeno odnosi na oba slučaja); želimo li pak naglasiti da govorimo o realnim ili kompleksnim matricama, pisat ćemo $M_{mn}(\mathbb{R})$, odnosno $M_{mn}(\mathbb{C})$.

Uočimo i da su za $m = 1$ elementi prostora M_{1n} uređene n-torke skalara. Slično, ako je $n = 1$, govorimo o jednostupčanim matricama.

8. Neka $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ označava skup svih nizova realnih, odnosno kompleksnih brojeva. Radeći analogno kao u prostorima $\mathbb{F}^n$ definiramo zbrajanje nizova kao $(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots)$ i množenje skalarima iz polja $\mathbb{F}$ s $\alpha(a_1, a_2, a_3, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots)$. I ovdje se lako provjeravaju sva tražena svojstva. Na ovaj način smo dobili vektorske prostore nizova realnih, odnosno kompleksnih brojeva.

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka P_n označava skup svih polinoma s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ čiji je stupanj manji ili jednak n, zajedno s nulpolinomom. Operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima imamo otprije: $\sum_{i=0}^n a_i t^i + \sum_{i=0}^n b_i t^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) t^i$, $\alpha \sum_{i=0}^n a_i t^i = \sum_{i=0}^n \alpha a_i t^i$. Uz ove operacije i skup P_n postaje vektorski prostor. Ovisno o izboru polja $\mathbb{F}$ opet govorimo o realnim ili kompleksnim prostorima polinomima.

10. Neka P označava skup svih polinoma, bez ograničenja na stupanj. I ovo je, uz uobičajene operacije s polinomima, vektorski prostor, realan ili kompleksan, ovisno o tome gledamo li polinome s realnim ili kompleksnim koeficijentima.

Slično kao i kod matrica, pisat ćemo kratko P_n ili P ako nam polje u momentu nije važno, a ako polje želimo naglasiti koristit ćemo proširenu oznaku poput $P_n(\mathbb{R})$.

11. Ne moramo se zaustaviti na polinomima; možemo npr. promatrati skup $C(\mathbb{R})$ svih neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$. Uz operacije zbarajanja $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, i množenja realnim skalarima $(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, i $C(\mathbb{R})$ postaje vektorski prostor. Inače se kaže da smo ovdje operacije zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarima definirali "po točkama".

Primjera je još mnogo, no ovdje možemo zastati. Daljnje primjere ćemo, kad se za to ukaže potreba, uvesti i opisati u hodu. No i ovako vidimo kako je *definicija 2.1.2* dovoljno univerzalna da struktura koju proučavamo - vektorski prostor - ima mnogo različitih realizacija. Ta nas okolnost potiče da teoriju razvijamo u punoj općenitosti, tj. na sasvim apstraktnom nivou. Smisao je u tome da će tada svaki dobiveni rezultat, odnosno svaki teorem biti primjenjiv u *svim* vektorskim prostorima.

Kao i u prostorima radijvektora, i u općim se vektorskim prostorima iz definicionih uvjeta izvode daljnja računska pravila. Navedimo neka:

Propozicija 2.1.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada:*

(1) *Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$ vrijedi $\alpha a = 0$ ako i samo ako je $\alpha = 0$ ili $a = 0$,*
(2) $(-\alpha)a = \alpha(-a) = -(\alpha a)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$,
(3) $\alpha(a-b) = \alpha a - \alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$,
(4) $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall a \in V$.

Dokaz. (1) Uzmimo da je $\alpha = 0$. Tada je, za svaki $a \in V$, $a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1+0)a = 1 \cdot a = a$. (Uočimo da smo u prethodnom nizu jednakosti koristili, redom, definicione uvjete (8), (6) i ponovno (8).) Sad objema stranama dobivene jednakosti dodamo $-a$. Uz korištenje asocijativnosti zbrajanja i neutralnosti nulvektora, dobivamo $0 \cdot a = 0$.

Ako pak uzmemo $a = 0$ onda za proizvoljan skalar α zaključujemo ovako: $\alpha 0 + \alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha 0$. Još uvijek ne znamo koliko iznosi $\alpha 0$, ali to je neki vektor iz V pa, prema (3) iz *definicije 2.1.2*, postoji vektor njemu suprotan. Dodamo li $-(\alpha 0)$ objema stranama dobivene jednakosti, slijedi $\alpha 0 = 0$.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\alpha a = 0$. Ako je $\alpha = 0$, nema se što dokazivati. Ako $\alpha \neq 0$ onda postoji $\alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ pa jednakost $\alpha a = 0$ možemo množiti s α^{-1}. Prema upravo dokazanom, rezultat je $\alpha^{-1}(\alpha a) = 0$. Koristeći svojstva (5) i (8) iz *definicije 2.1.2*, odavde dobivamo $a = 0$.

Slično se dokazuju i ostale tvrdnje, pa daljnje detalje izostavljamo. □

Sve četiri tvrdnje prethodne propozicije su očite u vektorskim prostorima radijvektora $V^2(O)$ i $V^3(O)$. No u formalnom dokazu se nismo smjeli osloniti niti na koji konkretan primjer vektorskog prostora, već nam je jedino sredstvo na raspolaganju bio skup uvjeta iz *definicije 2.1.2.* Zato se metoda dokaza i svela isključivo na formalno manipuliranje s definicionim uvjetima.

Poruka je prethodne propozicije da u svakom vektorskom prostoru zaista vrijede pravila na kakva smo navikli pri računanju s brojevima. Zato ćemo u daljnjem i uvjete (1)-(8) iz *definicije 2.1.2* i pravila dokazana u *propoziciji 2.1.5* koristiti prešutno, bez eksplicitnog citiranja.

2.2. **Baza i dimenzija.**

Definicija 2.2.1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Izraz oblika $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$, pri čemu je $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ i $k \in \mathbb{N}$, naziva se linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s koeficijentima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Uočimo da je linearna kombinacija pojam definiran samo za konačno mnogo vektora. To je uvijek dobro definiran vektor iz V koji ne ovisi o poretku vektora koje kombiniramo (jer zbrajanje u V je komutativno), niti su potrebne zagrade koje bi naznačavale redoslijed zbrajanja (jer zbrajanje u V je asocijativno).

Često $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ zapisujemo ekonomičnije kao $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$.

Definicija 2.2.2. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, konačan skup vektora iz V. Kažemo da je skup S linearno nezavisan ako vrijedi

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup S linearno zavisan.

Smisao ove definicije postaje očit u usporedbi s tvrdnjama *korolara 1.1.7* i*1.2.7.* U njima smo pokazali da se nekolinearnost, odnosno nekomplanarnost radijvektora može algebarski opisati upravo implikacijom (1) iz prethodne definicije. U tom smislu je onda prirodno i u općoj, apstraktnoj situaciji zamišljati da vektori linearno nezavisnog skupa S, zadovoljavajući uvjet (1), zauzimaju "različite smjerove".

Napomena 2.2.3. (a) Istaknimo još jednom puni smisao prethodne definicije: za svaki konačan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ vektora u V linearna kombinacija $\sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = 0$ će očito biti jednaka 0 odaberemo li koeficijente $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Linearna nezavisnost skupa S znači da je to **jedini** način kako možemo dobiti 0 linearno kombinirajući elemente skupa S. Drugim riječima, nulvektor se može prikazati kao linearna kombinacija elemenata skupa S **samo** na taj, trivijalan način gdje je $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

(b) Linearno zavisni skupovi su, po definiciji, oni koji nisu nezavisni. Eksplicitno, $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je linearno zavisan ako

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F} \text{ takvi da } \alpha_j \neq 0 \text{ bar za jedan } j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ i } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0.$$

U ovom slučaju, dakle, nulvektor možemo iskazati kao linearnu kombinaciju vektora skupa S i na neki netrivijalan način.

(c) Najčešće atribut linearno ispuštamo pa govorimo o nezavisnim, odnosno zavisnim skupovima.

(d) Za svaki $a \in V$, $a \neq 0$, jednočlan skup $\{a\}$ je nezavisan. Ovo je očito iz *propozicije 2.1.5(1)*.

(e) Svaki skup koji sadrži nulvektor je zavisan. Zaista, ako je npr. $a_1 = 0$, onda je očito $1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2 + \ldots + 0 \cdot a_k = 0$ i, kako je prvi koeficijent različit od 0, skup je zavisan.

(f) Zavisnost, odnosno nezavisnost ne ovisi o poretku vektora u promatranom skupu S. To je direktna posljedica komutativnosti zbrajanja u vektorskom prostoru.

(g) Svaki neprazan podskup nezavisnog skupa je nezavisan. Da to pokažemo, uzmimo nezavisan skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ i njegov podskup $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, $l < k$. (Uzimajući ovakav podskup T ne gubimo na općenitosti jer S, zahvaljujući prethodnoj opasci (f), uvijek možemo prenumerirati). Neka sada vrijedi $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i = 0$. Posebno, odavde je i $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i + 0 \cdot a_{l+1} + \ldots + 0 \cdot a_k = 0$. Sad pak iz nezavisnosti skupa S zaključujemo da su svi koeficijenti u ovoj linearnoj kombinaciji nužno jednaki 0; posebno je $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$.

(h) Izravno iz prethodne tvrdnje slijedi: svaki nadskup zavisnog skupa je zavisan.

Nije sasvim precizno govoriti o nezavisnim i zavisnim vektorima (te zato *definicija 2.2.2* i govori o nezavisnim i zavisnim skupovima). Sljedeća propozicija pokazuje, međutim, kako ima smisla za vektore zavisnog skupa govoriti da su *međusobno* zavisni.

Propozicija 2.2.4. *Skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$, u vektorskom prostoru V je linearno zavisan ako i samo ako postoji $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takav da je a_j linearna kombinacija preostalih elemenata skupa S.*

Ako je skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \geq 2$, linearno zavisan, uređen, te ako je $a_1 \neq 0$, onda postoji $l \in \{2, \ldots, k\}$ takav da je a_l linearna kombinacija svojih prethodnika u skupu S, tj. vektora $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$.

Dokaz. Ako za neki a_j vrijedi $a_j = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_k a_k$ onda možemo pisati i $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{j-1} a_{j-1} + (-1) a_j + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \ldots + \alpha_k a_k = 0$, a to upravo znači (usp. (b) u prethodnoj napomeni) da je S zavisan. Obratno, ako je skup S linearno zavisan, tada po definiciji postoje koeficijenti α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, koji nisu svi jednaki 0, takvi da je $\sum_{i=1} \alpha_i a_i = 0$. Ako je npr. $\alpha_j \neq 0$, odavde očito slijedi $a_j = -\frac{1}{\alpha_j} \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i a_i - \frac{1}{\alpha_j} \sum_{i=j+1}^{k} \alpha_i a_i$.

Za dokaz druge tvrdnje uzmimo opet netrivijalnu linernu kombinaciju skupa S koja je jednaka 0: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0$. Označimo s l indeks sa svojstvom $\alpha_l \neq 0$, $\alpha_i = 0$, $i = l+1, \ldots, k$ (smisao je da odredimo posljednji netrivijalni koeficijent). Sada možemo pisati i $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i = 0$. Primijetimo da je $l > 1$. Ako bi, naime, bilo $l = 1$ onda bismo imali $\alpha_1 \neq 0$, a prethodna jednakost bi glasila $\alpha_1 a_1 = 0$. No tada bi iz *propozicije 2.1.5(1)* slijedilo $a_1 = 0$ što je kontradikcija s pretpostavkom. Konačno, jer je $l > 1$, iz $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i a_i = 0$ očito slijedi $a_l = -\frac{1}{\alpha_l} \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i a_i$. $\square$

Prethodna propozicija daje jednostavan kriterij za utvrđivanje zavisnosti danog skupa. Posebno, kad je skup zavisan, bar jedan vektor se sigurno može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. U tom smislu druga tvrdnja je vrijedno profinjenje ove konstatacije: ako znamo da je skup S zavisan, ako poredak njegovih elemenata držimo fiksnim te ako znamo da je prvi vektor netrivijalan (tj. različit od 0) onda, štoviše, postoji element u S koji se može prikazati čak kao linearna kombinacija svojih prethodnika. Primijetimo da se pretpostavka $a_1 \neq 0$ u ovoj, drugoj tvrdnji propozicije ne može izostaviti. To je očito kad promotrimo skup $\{\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}\}$ u $V^2(O)$; taj skup je zavisan jer sadrži $\vec{0}$, a u njemu niti jedan element nije moguće prikazati kao linearnu kombinaciju prethodnika.

Primjer 2.2.5. Lako se vidi da je $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ linearno nezavisan skup u $\mathbb{R}^4$. Nasuprot tome skup $\{a_1 = (1,2,1,1,), a_2 = (1,-2,0,-1), a_3 = (1,6,2,3)\}$ u istom prostoru je zavisan jer vrijedi $a_3 = 2a_1 - a_2$.

Slično, u prostoru polinoma P_n skup $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ je nezavisan. Argumentirati možemo ovako: smatrajmo skup uređenim, uočimo da je prvi element netrivijalan. Kad bi sada taj skup bio zavisan, postojao bi u njemu, prema drugoj tvrdnji *propozicije 2.2.4*, element koji bi bio linearna kombinacija svojih prethodnika. No, usporedimo li stupnjeve polinoma na lijevoj i desnoj strani te hipotetičke jednakosti, vidimo da je ona nemoguća.

Linearna nezavisnost je, kako smo vidjeli, apstraktno poopćenje pojmova nekolinearnosti, odnosto nekomplanarnosti koje poznajemo iz prostora radijvektora. Razmatranja o bazama prostora radijvektora nameću pitanje možemo li i u proizvoljnom vektorskom prostoru pomoću elemenata nezavisnog skupa izraziti svaki drugi vektor prostora. No, odmah je jasno da sama nezavisnost nije dovoljna - primjer skupa $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ u $V^3(O)$ to pokazuje već na prvi pogled.

Definicija 2.2.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao

$$[S] = \{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N}\}. \tag{2}$$

Dodatno, definira se $[\emptyset] = \{0\}$.

Linearna ljuska nepraznog skupa S je, dakle, skup svih mogućih linearnih kombinacija elemenata skupa S. Uočimo da u definiciji nema ograničenja na broj elemenata skupa S; on može biti i beskonačan. No u svakom slučaju, u definiciji linearne ljuske uzimaju se u obzir samo konačne linearne kombinacije elemenata iz S.

Ako je S konačan, recimo $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, onda se prethodna definicija svodi na

$$[S] = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}\}.$$

Pogledajmo primjer: ako u prostoru $\mathbb{R}^3$ odaberemo $a_1 = (1, 7, 0)$ i $a_2 = (-1, 2, 0)$, nije teško pokazati da je tada $[\{a_1, a_2\}] = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Definicija 2.2.7. Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V (ili da S generira V) ako vrijedi $[S] = V$.

Smisao definicije je sljedeći: jasno je da za svaki $S \subseteq V$ vrijedi $[S] \subseteq V$. Jednakost iz definicije je, dakle, ekvivalentna obratnoj inkluziji i poanta je upravo u tome. Skup S je sustav izvodnica za V ako se svaki vektor iz V nalazi u $[S]$, tj. ako se svaki vektor iz V može prikazati kao linearna kombinacija elemenata skupa S.

Odmah je jasno da je svaki nadskup sustava izvodnica također sustav izvodnica za isti prostor. No, dodavanje vektora u sustav izvodnica niti nije interesantno; uostalom ekstremni primjer je čitav prostor V koji je, po definiciji, sustav izvodnica za sebe sama. Poželjno je naći čim manji sustav izvodnica te time moći opisati sve vektore prostora sa što manje elemenata (koji taj sustav izvodnica konstituiraju). No, redukcija sustava izvodnica je delikatna zadaća.

Primijetimo u prolazu da je upravo obratno s linearnom nezavisnošću: podskup nezavisnog skupa je uvijek nezavisan, no nadskup nezavisnog skupa može i ne mora biti nezavisan (usp. *napomenu 2.2.3(g)* i *propoziciju 2.2.4*).

Pogledajmo skup $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Taj je očito sustav izvodnica za prostor $\mathbb{R}^4$. Izostavimo li, međutim, bilo koji njegov element, tako dobiven skup evidentno više neće biti sustav izvodnica.

Drugačije je sa skupom

$$S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

u prostoru M_2. Lako se provjeri da je S sustav izvodnica za M_2. Izostavimo li iz njega $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dobiveni skup više nije sustav izvodnica. Međutim, S bez matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ bit će novi, manji sustav izvodnica za M_2.

Prirodno je pitanje: možemo li kontrolirano smanjivati dani sustav izvodnica s ciljem da reducirani skup i dalje bude sustav izvodnica?

Propozicija 2.2.8. *Neka je S sustav izvodnica za vektorski prostor V te neka u S postoji vektor x koji se može prikazati kao linearna kombinacija (nekih drugih) elemenata iz S. Tada je i $S \setminus \{x\}$ sustav izvodnica za V.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pri čemu je $x_i \in S$, $x_i \neq x$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uzmimo sada proizvoljan $v \in V$. Trebali bismo v prikazati kao linearnu kombinaciju vektora iz $S \setminus \{x\}$. Kako je S sustav izvodnica za V, postoje $k \in \mathbb{N}$, skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ i vektori $a_1, \ldots, a_k \in S$ takvi da je $v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j$. Ako su svi a_j u ovom prikazu različiti od x, nema se što dokazivati. Ako je pak neki a_j jednak vektoru x (uzmimo konkretnosti radi da je $a_1 = x$), onda uvrštavanjem prve relacije u drugu slijedi $v = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j a_j$. $\square$

Sada je teren pripremljen za uvođenje pojma baze vektorskog prostora.

Definicija 2.2.9. Konačan skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

Uočimo prvo da na apstraktnoj razini navedena definicija opisuje i baze prostora $V^2(O)$ i $V^3(O)$. Drugačije rečeno, baze tih prostora zadovoljavaju ovu definiciju. Zaista, dvočlani skupovi nekolinearnih radijvektora u $V^2(O)$ i tročlani skupovi nekomplanarnih vektora u $V^3(O)$ su linearno nezavisni sustavi izvodnica za te prostore.

Jednako je važno da se baze vektorskih prostora u funkcionalnom smislu ponašaju isto kao baze prostora radijvektora. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.2.10. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza za V. Tada za svaki vektor $v \in V$ postoje jedinstveno određeni skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da vrijedi $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$.*

Dokaz. Jer je B sustav izvodnica za V, svaki vektor $v \in V$ dopušta prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$.

Ako bi za neki $v \in V$ vrijedilo $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ i također $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$ oduzimanjem bismo dobili $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) b_i = 0$. Jer je skup B i linearno nezavisan, odavde po definiciji slijedi $\alpha_i - \beta_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Teorem 2.2.10 je fundamentalan rezultat linearne algebre. Smisao je u tome da svaki vektor danog prostora možemo na jedinstven način predočiti kao linearnu kombinaciju vektora baze. Na ovaj se način svaki problem i svaki račun u tom prostoru može svesti na operiranje s konačno mnogo (baznih) vektora.

Primjer 2.2.11. (a) Skup $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ je baza prostora $\mathbb{R}^3$. Uočimo također da je isti skup i baza kompleksnog prostora $\mathbb{C}^3$.

(b) Općenito, u prostoru $\mathbb{R}^n$ promotrimo vektore $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ (dakle, i-ta komponenta vektora e_i iznosi 1, a sve ostale komponente su jednake 0, $i = 1, 2, \ldots, n$). Skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je baza prostora $\mathbb{R}^n$. Jasno je da je isti skup i baza prostora $\mathbb{C}^n$.

(c) U prostoru matrica M_{mn} promotrimo skup $E = \{E_{ij} : i = 1, 2, \ldots, m,$ $j = 1, 2, \ldots, n\}$ gdje su koeficijenti matrice $E_{ij} = [e_{kl}]$ dani s $e_{ij} = 1$ i $e_{kl} = 0$

čim je $k \neq i$ ili $l \neq j$. (Dakle, matrica E_{ij} ima jedinicu na presjeku i-tog retka i j-tog stupca, a svi ostali njezini koeficijenti iznose 0.) Skup E je baza za M_{mn}.

(d) $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ je baza prostora P_n.

(e) I skupovi $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ i $\{(2,1,0),(1,1,7),(-1,-3,3)\}$ su baze prostora $\mathbb{R}^3$.

U svim ovim primjerima se lako utvrdi da su navedeni skupovi i linearno nezavisni i sustavi izvodnica; stoga je provjera izostavljena.

Baze u primjerima (a), (b), (c), (d) zovu se *standardne ili kanonske baze* navedenih prostora. To je zato što se svaki vektor tih prostora prirodno prikazuje kao linearna kombinacija elemenata ovih baza. Primjerice, za $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, očito vrijedi $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Slično, ako je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$, odmah vidimo da vrijedi $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$.

Primjeri (e) nisu standardni. Želimo li prikazati vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ kao linearnu kombinaciju vektora jedne ili druge navedene baze, očito ćemo trebati riješiti sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice. Primijetimo: *teorem 2.2.10* jamči da će u obje navedene baze, i to za svaki vektor x, rješenje dobivenog sustava biti jedinstveno.

Prethodni primjeri pokazuju da vektorski prostori kojima se najčešće bavimo posjeduju bazu. Štoviše, iz posljednjeg primjera vidimo (što nam je dobro poznato u prostorima radijvektora) da vektorski prostor može imati i mnogo različitih baza.

Egzistencija baze u proizvoljnom vektorskom prostoru je, međutim, netrivijalno pitanje. U prvom redu, uočimo da je po našoj definiciji baza konačan skup. Implicitno, time smo zapravo naša razmatranja ograničili samo na jednu, doduše dovoljno široku klasu prostora.

Definicija 2.2.12. Kaže se da je vektorski prostor V konačnodimenzionalan ili konačnogeneriran ako postoji neki konačan sustav izvodnica za V.

Češće je u uporabi termin "konačnodimenzionalan" iako treba primijetiti da taj termin u svom sadržaju nema ništa s pojmom dimenzije (uostalom, koncept dimenzije još nismo ni uveli).

Prethodno navedeni primjeri eksplicitno pokazuju da su prostori $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, M_{mn}, P_n konačnodimenzionalni.

Nasuprot tomu, prostor P nije konačnodimenzionalan, tj. nema konačnih sustava izvodnica. Da bismo to pokazali, pogledajmo proizvoljan konačan skup $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, u P. Označimo s k_i stupanj polinoma p_i, $i = 1, 2, \ldots n$. Neka je $k = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$. Sada je jasno da svaki polinom p koji se može izraziti kao linearna kombinacija elemenata skupa S ima stupanj najviše k. To očito povlači da je $[S] \neq P$; drugim riječima, S nije sustav izvodnica za P.

Kaže se da je P, kao i svi drugi takvi prostori, beskonačnodimenzionalan. U daljnjim razmatranjima ograničit ćemo se samo na konačnodimenzionalne prostore. Beskonačnodimenzionalne prostore spominjat ćemo uglavnom samo u komentarima i (protu)primjerima.

Sad možemo dokazati još jedan od fundamentalnih rezultata. Prvo je na redu jedna sama za sebe korisna propozicija.

Propozicija 2.2.13. *Neka je* $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $m \in \mathbb{N}$*, sustav izvodnica za vektorski prostor* $V \neq \{0\}$*. Tada postoji baza prostora* V *koja je podskup skupa* S*.*

Dokaz. Ako je skup S linearno nezavisan, nema se što dokazivati. Ako je zavisan, prema prvoj tvrdnji *propozicije 2.2.4*, postoji neki $a_j \in S$ koji je linearna kombinacija preostalih vektora skupa S. Sad smo u uvjetima *propozicije 2.2.8*: i skup $S \setminus \{a_j\}$ je sustav izvodnica za V. Ako je taj skup nezavisan, ujedno je i baza za V i dokaz je gotov.

Ako je pak $S \setminus \{a_j\}$ zavisan, opet prema *propoziciji 2.2.4* postoji neki njegov član, recimo a_k, koji je linearna kombinacija preostalih članova tog skupa. Ponovnom primjenom *propozicije 2.2.8* zaključujemo da je $(S \setminus \{a_j\}) \setminus \{a_k\} = S \setminus \{a_j, a_k\}$ sustav izvodnica za V.

Postupak nastavljamo sve dok nakon nekog koraka (tj. izbacivanja nekog vektora) ne dobijemo nezavisan skup. Bitno je uočiti da je nakon svakog koraka skup koji dobivamo izbacivanjem nekog vektora sustav izvodnica.

U najgorem slučaju, kad bismo izveli $m - 1$ korak, ostali bismo s jednočlanim skupom, recimo $\{a_l\}$ koji bi, po konstrukciji, također bio sustav izvodnica za V. No taj jednočlan skup će tada nužno biti linearno nezavisan, pa dakle i baza za V. U protivnom bi, naime, prema *napomeni 2.2.3(d)*, vrijedilo $a_l = 0$. To je, međutim, nemoguće jer $\{a_l\}$ je sustav izvodnica za V, a prema pretpostavci je $V \neq \{0\}$. □

Napomena 2.2.14. Postupak koji smo primijenili u prošlom dokazu naziva se redukcija sustava izvodnica do baze.

Teorem 2.2.15. *Svaki konačnodimenzionalan vektorski prostor* $V \neq \{0\}$ *ima bazu.*

Dokaz. Po definiciji, V ima bar jedan konačan sustav izvodnica. Uzmimo jedan takav skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ i na njega primijenimo prethodnu propoziciju. □

Uočimo da smo iz tvrdnje prethodnog teorema zaista morali izostaviti nulprostor. Naime, po definiciji je $\{0\}$ konačnodimenzionalan, no taj prostor nema niti jednu bazu naprosto zato jer nema linearno nezavisnih podskupova.

Već smo i u prostorima radijvektora vidjeli da vektorski prostor može imati više baza. Indikativno je da svaka baza prostora $V^2(O)$ dvočlani skup, a da se svaka baza prostora $V^3(O)$ sastoji od točno tri vektora.

Lema 2.2.16. *Neka je* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ *sustav izvodnica za vektorski prostor* V*, te neka je* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset V$ *linearno nezavisan. Tada je* $k \leq n$*.*

Dokaz. Pogledajmo skup $B_1' = \{a_1, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Jer je B sustav izvodnica za V, element a_1 se može prikazati kao linearna kombinacija elemenata skupa B; drugim riječima, a_1 se može prikazati kao linearna kombinacija preostalih elemenata skupa B_1'. Zato je, prema *propoziciji 2.2.4*, skup B_1' zavisan. Uočimo da njegov prvi element, a_1, nije nulvektor jer a_1 dolazi iz nezavisnog skupa A. Možemo, dakle, primijeniti drugu tvrdnju *propozicije 2.2.4*: postoji neki element skupa B_1', recimo b_i, koji je linearna kombinacija svojih prethodnika.

U drugu ruku, uočimo da je skup B_1' sustav izvodnica - jer je nadskup sustava izvodnica B. Sad pak iz *propozicije 2.2.8* zaključujemo da je i skup $B_1 = B_1' \setminus \{b_i\} = \{a_1, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$ sustav izvodnica za V.

Ako je ovime skup A iscrpljen (tj. ako je bilo $k = 1$), dokaz je gotov. U protivnom, uzmimo a_2 i uvrstimo ga kao prvi element u skup B_1. Promotrimo dobiveni skup $B_2' = \{a_2, a_1, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$. Ponovimo argumentaciju iz prethodnog koraka: B_2' je zavisan jer je njegov element a_2 linearna kombinacija preostalih njegovih elemenata (to je zato što je B_1 bio sustav izvodnica). Nadalje, prvi element skupa B_2', a_2, nije nulvektor pa opet prema *propoziciji 2.2.4* postoji neki vektor u B_2' koji je linearna kombinacija svojih prethodnika. Neka je to b_j. (Primijetimo da to svakako nije a_1 jer bi relacija $a_1 = \lambda a_2$ proturječila pretpostavljenoj nezavisnosti skupa A.) Sad "izbacimo" taj vektor b_j. Promotrimo nastali skup $B_2 = (\{a_2, a_1\} \cup B) \setminus \{b_i, b_j\}$. Na kraju, uočimo da je taj skup sustav izvodnica; to opet slijedi iz *propozicije 2.2.8* jer B_2 je nastao izbacivanjem "zavisnog" vektora iz sustava izvodnica B_2' (a B_2' jest sustav izvodnica jer je nadskup sustava izvodnica B_1).

Postupak nastavimo. Uočimo da smo nakon r-tog koraka ubacili u originalni sustav izvodnica B r elemenata skupa A, izbacili r elemenata skupa B, i ostali sa skupom B_r koji je također sustav izvodnica za V. Pritom ne može biti da je skup B iscrpljen u $r < k$ koraka. Kad bi tako bilo, sustav izvodnica B_r bi se sastojao isključivo od elemenata skupa A, te bi preostali elementi iz A bili njihove linearne kombinacije. No to je kontradikcija s nezavisnošću skupa A.

Očito će nakon k-tog koraka skup A biti iscrpljen i, kako smo u tih k koraka detektirali (i izbacili) k različitih elemenata skupa B, jasno je da vrijedi $k \leq n$. □

Teorem 2.2.17. *Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Sve baze prostora V su jednakobrojne.*

Dokaz. Neka su A i B baze za V. Označimo broj njihovih elemenata s k, odnosno n. Kako je A nezavisan, a B sustav izvodnica, prethodna lema povlači $k \leq n$. No, B je također nezavisan, dok je A isto tako sustav izvodnica; zato lema daje i $n \leq k$. □

Prethodni teorem je posljednji u nizu pokazatelja na temelju kojih zaključujemo da je naša definicija baze vektorskog prostora uspjela. I više od toga; imajući na umu broj elemenata svih baza u $V^2(O)$ i $V^3(O)$, sada je logično definirati pojam dimenzije na sljedeći način:

Definicija 2.2.18. Neka je $V \neq \{0\}$ konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dimenzija prostora V se definira kao broj elemenata bilo koje njegove baze. Dodatno, uzima se da je dimenzija nulprostora 0.

Pojam dimenzije je dobro i konzistentno definiran jer svaki konačnodimenzionalan prostor različit od $\{0\}$ ima bazu (*teorem 2.2.15*), a sve njegove baze imaju jednako mnogo elemenata (*teorem 2.2.17*).

Dimenzija prostora V standardno se označava s $\dim V$. Iz *primjera 2.2.11* odmah proizlazi: $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dim M_{mn} = mn$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\dim P_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Uočimo da sada sintagma konačnodimenzionalan prostor poprima i "konkretnije" značenje. Naime, po definiciji, konačnodimenzionalni prostori su oni koji posjeduju konačne sustave izvodnica. No, nakon *teorema 2.2.15* znamo da takvi prostori imaju i (konačnih) baza, a to, po prethodnoj definiciji, znači da im je dimenzija konačna. Tu činjenicu često ćemo u nastavku pisati kao $\dim V < \infty$.

Diskusiju o bazama završit ćemo propozicijom podjednako korisnom i u teoriji i pri rješavanju konkretnih problema.

Sjetimo se da *propozicija 2.2.13* osigurava da se svaki konačan sustav izvodnica može reducirati do baze. Tvrdnja naredne propozicije je, u izvjesnom smislu, dualna.

Propozicija 2.2.19. *Neka je* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom prostoru* V. *Tada se* A *može nadopuniti do baze.*

Dokaz. Ako je A i sustav izvodnica za V, nema se što dokazivati. Pretpostavimo stoga da nije. Sad nam je zadaća naći neki nadskup skupa A koji će biti baza za V.

Odaberimo proizvoljnu bazu $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ za V; to možemo na temelju *teorema 2.2.15.* Implicitno, ovime smo označili $\dim V = n$.

Promotrimo skup $A \cup B = \{a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots, b_n\}$. Očito je zavisan jer se bar jedan njegov element može prikazati kao linearna kombinacija ostalih (takav je svaki a_i zato jer je skup B baza). Osim toga, $a_1 \neq 0$, jer skup A je nezavisan pa ne može sadržavati nulvektor. Prema drugoj tvrdnji *propozicije 2.2.4* zato postoji vektor skupa $A \cup B$ koji se može prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika u tom skupu. To, naravno, ne može biti nikoji a_i zbog pretpostavljene nezavisnosti skupa A. Neka je b_j neki takav element koji je prikaziv kao linearna kombinacija svojih prethodnika u $A \cup B$.

Pogledajmo skup $(A \cup B) \setminus \{b_j\}$. Nastao je izbacivanjem vektora b_j iz skupa $A \cup B$. Jer je $A \cup B$ sustav izvodnica (naime, nadskup je sustava izvodnica B) i jer je b_j prikazan pomoću ostalih njegovih elemenata, *propozicija 2.2.8* jamči da je i $(A \cup B) \setminus \{b_j\}$ sustav izvodnica za V.

Ako je $(A \cup B) \setminus \{b_j\}$ nezavisan, gotovi smo. Ako nije, postupak ponovimo. U ovom, drugom koraku svi argumenti su identični prethodnima, a na kraju, nakon izbacivanja nekog b_l, ostajemo sa skupom $(A \cup B) \setminus \{b_j, b_l\}$ koji je još uvijek sustav izvodnica za V.

Evidentno, nakon točno k koraka ovim postupkom dolazimo do baze prostora V koja sadrži čitav skup A. $\square$

U praksi se postupak nadopunjavanja nezavisnog skupa do baze provodi točno kao u prethodnom dokazu.

Primjer 2.2.20. Uočimo skup $A = \{a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, -1, -1)\}$ u prostoru $\mathbb{R}^4$. Očito je A nezavisan pa ga možemo proširiti do baze. Uzmimo kanonsku bazu $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ iz *primjera 2.2.11* i promotrimo uniju $A \cup E = \{a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Taj je skup zavisan sustav izvodnica i sad, kao u prošlom dokazu, moramo u njemu detektirati vektore koji su linearne kombinacije svojih prethodnika.

Najprije rješavamo jednadžbu $e_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Kad izjednačimo odgovarajuće komponente (čime dobivamo sustav od četiri linearne jednadžbe s dvije nepoznanice) odmah vidimo da rješenja nema. Zaključujemo da e_1 nije moguće prikazati kao linearnu kombinaciju prethodnika.

Može li biti $e_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 e_1$? Jednostavnim računom dobivamo $e_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) - e_1$. Zato vektor e_2 treba izbaciti.

Preostao nam je skup $\{a_1, a_2, e_1, e_3, e_4\}$ pa sada promatramo jednadžbu $e_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 e_1$. Lako se vidi da rješenja nema. Odavde zaključujemo da je skup $\{a_1, a_2, e_1, e_3\}$ nezavisan (jer u njemu prvi vektor nije trivijalan i niti jedan vektor nije linearna kombinacija prethodnika; usp. *propoziciju 2.2.4*).

Mogli bismo sada računati i konstatirati da će posljednji vektor, e_4, biti linearna kombinacija ovih vektora, te će stoga i on biti suvišan. No, taj zaključak možemo izvesti i bez računa na temelju sljedećeg *korolara 2.2.22.*

U svakom slučaju, tražena baza je $\{a_1, a_2, e_1, e_3\}$.

Napomena 2.2.21. Postupak proširenja nezavisnog skupa do baze prostora nikako nije jedinstven. Najjednostavnije to možemo vidjeti već u $V^2(O)$. Odaberemo li netrivijalan vektor $\vec{a}$, skup $\{\vec{a}\}$ je nezavisan. No sada je jasno da će skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ biti baza za $V^2(O)$ čim je vektor $\vec{b}$ nekolinearan s $\vec{a}$.

Tako je i općenito. Svaki linearno nezavisan skup od k elemenata u prostoru V dimenzije $n > k$ može se zapravo na beskonačno mnogo načina proširiti do baze za V.

Želimo li provjeriti da je određeni skup baza nekog prostora, općenito govoreći, treba provjeriti i da je taj skup nezavisan i da je sustav izvodnica. Ne postoji uzročno posljedična veza između ta dva pojma (i nije teško naći primjere zavisnih sustava izvodnica, ili pak nezavisnih skupova koji nisu sustavi izvodnica). Poznajemo li, međutim, dimenziju prostora, sve postaje lakše.

Korolar 2.2.22. *Neka je V vektorski prostor, te neka je* $\dim V = n < \infty$.

(i) Svaki linearno nezavisan skup u V ima n ili manje elemenata. Svaki linearno nezavisan skup u V koji ima točno n elemenata je baza za V.

(ii) Svaki sustav izvodnica za V ima n ili više elemenata. Svaki sustav izvodnica za V koji ima točno n elemenata je baza za V.

Dokaz. (i) Uzmimo linearno nezavisan skup A s k elemenata. Prema *propoziciji 2.2.19*, A se može dopuniti do baze za V (ili već jest baza). Kad bi sad bilo $k > n$ došli bismo u kontradikciju s *teoremom 2.2.17*. Slično, pretpostavimo li da nezavisan skup A s n elemenata nije baza, ponovo *propozicija 2.2.19* i *teorem 2.2.17* daju kontradikciju.

(ii) Dokaz ove tvrdnje je posve analogan s tim da ulogu *propozicije 2.2.19* ovdje preuzima *propozicija 2.2.13*. Detalje izostavljamo. □

Primjer 2.2.23. Lagrangeov interpolacijski polinom.
Dobro je poznato da kroz svake dvije točke u ravnini možemo povući jedinstveni pravac. Drugim riječima, ako su dane točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) pri čemu je $x_1 \neq x_2$, onda postoji jedinstveni polinom prvog stupnja $p(x) = ax + b$ sa svojstvom $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$. Ova se činjenica generalizira na sljedeći način:

Neka je $n \geq 1$ te neka su dane točke u ravnini (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) pri čemu su svi x_i međusobno različiti. Tada postoji jedinstveni polinom p čiji stupanj je manji ili jednak $n-1$, $p \in P_{n-1}$, sa svojstvom $p(x_i) = y_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Taj polinom p je dan formulom

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j}(x - x_k)}{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j}(x_j - x_k)} y_j. \qquad (*)$$

Ovaj polinom p naziva se Lagrangeov interpolacijski polinom.

Da bismo to pokazali, uzmimo najprije da je $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Jedini polinom koji pripada prostoru P_{n-1} i ima ovih n nultočaka je nulpolinom, a to nam u ovom slučaju upravo daje i gornja formula $(*)$.

Sljedeći najjednostavniji slučaj je $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots = y_n = 0$. Ovdje se traži polinom p_1 stupnja najviše $n - 1$ kojemu su $x_2, \ldots, x_n$ nultočke i koji zadovoljava $p_1(x_1) = 1$. Očito je da p_1 mora biti oblika $p_1(x) = c(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ pri čemu je c konstanta. Sad iz uvjeta $p_1(x_1) = 1$ lagano dobivamo c te izlazi

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_1 - x_n)} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(x - x_k)}{\prod_{k=2}^{n}(x_1 - x_k)}.$$

Još uočimo da je p_1 jedini polinom iz P_{n-1} koji zadovoljava postavljene uvjete.

Potpuno analogno dobivamo: za $1 \leq j \leq n$, jedini polinom iz prostora P_{n-1} koji zadovoljava $p(x_j) = 1$ i $p(x_i) = 0$, $\forall i \neq j$, je dan formulom

$$p_j(x) = \frac{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j}(x - x_k)}{\prod_{1 \leq k \leq n; k \neq j}(x_j - x_k)}.$$

Pokažimo sada da je skup $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ linearno nezavisan u prostoru P_{n-1}. Pretpostavimo da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = 0$. Uvrštavanjem točke x_j u lijevu i desnu stranu ove jednakosti odmah dobivamo $\alpha_j = 0$. To očito možemo učiniti za svaki $j = 1, \ldots, n$, pa je time nezavisnost promatranog skupa dokazana.

Sad tvrdimo da je skup $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ zapravo baza za P_{n-1}. To je neposredna posljedica prethodnog korolara i činjenice (koju otprije znamo) $\dim P_{n-1} = n$.

Svaki $f \in P_{n-1}$ zato ima jedinstven prikaz oblika $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j$. Posebno, takav prikaz mora imati, ako postoji, i traženi interpolacijski polinom: $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j$. Sada iz uvjeta $p(x_i) = y_i, \forall i = 1, \ldots, n$, uvrštavanjem x_i u prethodnu jednakost odmah dobivamo $\alpha_i = y_i, \forall i = 1, \ldots n$. Dakle, $p = \sum_{j=1}^{n} y_j p_j$. No to je upravo jednakost $(*)$.

Napomena 2.2.24. *Korolar 2.2.22* pokazuje da svaki linearno nezavisan skup u prostoru dimenzije n ima najviše n elemenata. U tom smislu je definicija linearne nezavisnosti, kako smo je naveli, sasvim zadovoljavajuća za konačnodimenzionalne prostore.

U beskonačnodimenzionalnim prostorima potrebno je definirati i nezavisnost beskonačnih skupova. Formalna definicija glasi: kaže se da skup A u vektorskom prostoru V linearno nezavisan, ako je svaki konačan podskup od A linearno nezavisan.

Primijetimo da ova definicija ima smisla kad je A beskonačan skup, jer se definicioni uvjet odnosi samo na konačne podskupove, a za takve je pojam nezavisnosti već uveden. Ako je pak A konačan skup, onda *napomena 2.2.3(g)* pokazuje da je ovakva definicija nezavisnosti ekvivalentna *definiciji 2.2.2.*

Kao primjer jednog beskonačnog nezavisnog skupa navodimo skup svih monoma $M = \{t^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ u prostoru P.

Sad se pojam baze za beskonačnodimenzionalne prostore definira kao i za prostore konačne dimenzije: baza je svaki linearno nezavisan sustav izvodnica. Inače se takve baze zovu *algebarske ili Hammelove baze.*

Lako se vidi da je skup svih monoma M baza vektorskog prostora P. Pokazuje se da i svaki beskonačnodimenzionalan prostor ima bazu; no taj je dokaz netrivijalan i temelji se na aksiomu izbora.

2.3. **Potprostor.**

Promotrimo prostor $V^3(O)$ i u njemu podskup svih radijvektora čije završne točke leže u xy-ravnini. Očito je taj podskup zapravo realizacija prostora $V^2(O)$ u xy-ravnini te je, dakle, i sam za sebe vektorski prostor s istim operacijama koje su definirane na čitavom $V^3(O)$. Ovakvu situaciju, gdje je jedan vektorski prostor smješten u drugome, htjeli bismo proučiti u punoj općenitosti.

Definicija 2.3.1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Ako je i $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ uz iste operacije iz V, kažemo da je M potprostor od V.

Uočimo da se izrijekom zahtijeva da M bude vektorski prostor uz operacije koje su već definirane na V. U stvari se radi o restrikcijama funkcija $+ : V \times V \to V$ i $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ na $M \times M$, odnosno na $\mathbb{F} \times M$. U tom smislu se kaže da su operacije na M naslijeđene iz V.

Vidjeli smo da se $V^2(O)$ može shvatiti kao potprostor od $V^3(O)$. Slično, pogledajmo netrivijalan radijvektor $\overrightarrow{a} \in V^2(O)$ i njegovu linearnu ljusku: $[\{\overrightarrow{a}\}] = \{\lambda\overrightarrow{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Lako se vidi da je $[\{\overrightarrow{a}\}]$ potprostor od $V^2(O)$. U $[\{\overrightarrow{a}\}]$ spadaju oni i samo oni radijvektori koji su kolinearni s $\overrightarrow{a}$. Ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, to znači da završne točke svih radijvektora iz $[\{\overrightarrow{a}\}]$ leže na pravcu OA. U tom smislu često se kaže (i zamišlja) kako je $[\{\overrightarrow{a}\}]$ pravac kroz ishodište koji prolazi točkom A.

Kad je M potprostor od V, pisat ćemo $M \leq V$.

Jasno je da svaki vektorski prostor ima dva "rubna" potprostora; to su $\{0\}$ i sam V. U oba slučaja odmah se vidi da je definicioni uvjet zadovoljen na trivijalan način. I kaže se da su ovi potprostori trivijalni. Jasno je da su mnogo zanimljiviji oni pravi, netrivijalni potprostori prostora V koji su različiti i od nulprostora i od prostora V.

Pretpostavimo da je V vektorski prostor te da nam je dan njegov neprazan podskup M. Želimo li utvrditi je li M potprostor od V, slijedom *definicije 2.3.1*, trebali bismo provjeriti zadovoljava li M sve uvjete iz definicije vektorskog postora. No stvarni posao je, zahvaljujući idućoj propoziciji, mnogo manji.

Propozicija 2.3.2. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazan podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi*

(i) $a + b \in M$, $\forall a, b \in M$,
(ii) $\alpha a \in M$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a \in M$.

Dokaz. Nužnost navedenih uvjeta je očita. Da dokažemo dovoljnost trebamo provjeriti uvjete iz *definicije 2.1.2.* Prema pretpostavci M je neprazan skup, a pretpostavljeni uvjeti (i) i (ii) upravo jamče da će restrikcije na M operacija definiranih na V zaista biti preslikavanja s $M \times M$, odnosno $\mathbb{F} \times M$ s vrijednostima u M.

Preostaje provjeriti osam uvjeta iz *definicije 2.1.2.* No, odmah se vidi da su ti uvjeti automatski naslijeđeni iz V, te se zapravo i nema što provjeravati. Na primjer: zbrajanje svih vektora u V je asocijativno i komutativno pa je, posebno, asocijativno i komutativno i zbrajanje svih vektora iz M. Dalje, jer je M neprazan, možemo uzeti neki $a \in M$. Ako sad primijenimo uvjet (ii) na vektor a i skalar 0, zaključujemo da je $0 \in M$.

Na sličan se način provjere i ostali uvjeti. $\square$

Često se tvrdnja prethodne propozicije izriče tako da se kaže kako je neprazan podskup M prostora V potprostor od V ako i samo ako je M zatvoren na zbrajanje i množenje skalarima.

Štoviše, ovi se uvjeti mogu objediniti: idući korolar jamči da je M potprostor ako i samo ako je zatvoren na sve dvočlane linearne kombinacije vlastitih vektora.

Korolar 2.3.3. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i M neprazan podskup od V. Tada je M potprostor od V ako i samo ako vrijedi*

$$(*)\ \alpha a + \beta b \in M,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F},\ \forall a, b \in M.$$

Dokaz. Treba dokazati da je uvjet $(*)$ ekvivalentan uvjetima (i) i (ii) iz prethodne propozicije.

Pretpostavimo da vrijedi $(*)$. Odaberimo proizvoljne $a, b \in M$. Ako sad u $(*)$ uvstimo $\alpha = \beta = 1$, dobivamo upravo (i). Slično dobivamo i (ii) ako za proizvoljan $a \in M$ iskoristimo $(*)$ s $\alpha \in \mathbb{F}$, $\beta = 1$ i $b = 0$.

Obratno, uzmimo da vrijedi (i) i (ii). Da bismo dokazali $(*)$ uzmimo proizvoljne $a, b \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Sad prvo primijenimo (ii) (na α i a, a onda na β i b) da zaključimo kako je $\alpha a \in M$ i $\beta b \in M$. Preostaje primijeniti (i). $\square$

Napomena 2.3.4. Ako je $M \leq V$, onda je, prema prethodnom korolaru, M zatvoren na dvočlane linearne kombinacije svojih elemenata. Jednostavnim induktivnim argumentom može se pokazati da to vrijedi i za sve (naravno, konačne) linearne kombinacije vektora iz M. Eksplicitno: ako je $M \leq V$, onda za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in M$.

Primjer 2.3.5. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in M_n$ kažemo da je gornjetrokutasta ako vrijedi $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$. Smisao naziva je sljedeći: za elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ kažemo da tvore dijagonalu kvadratne matrice (od lijevog gornjeg do desnog donjeg kuta matrice). Koeficijenti a_{ij} za čije indekse vrijedi $i > j$ nalaze se ispod dijagonale. Ako smo sada propisali da za sve $i > j$ vrijedi $a_{ij} = 0$, onda su svi značajni (tj. netrivijalni) koeficijenti matrice A sadržani u gornjem trokutu, uključujući dijagonalu. Matrica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ je primjer gornjetrokutaste matrice.

Analogno, za matricu $B = (b_{ij}) \in M_n$ kažemo da je donjetrokutasta ako vrijedi $b_{ij} = 0$, $\forall i < j$.

Označimo s G, odnosno s D skup svih gornjetrokutastih, odnosno donjetrokutastih matrica u M_n. Sad se laganom primjenom *korolara 2.3.3* vidi da vrijedi $\mathsf{G} \leq M_n$, kao i $\mathsf{D} \leq M_n$.

Primjer 2.3.6. Za matricu $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ definiramo transponiranu matricu A^t formulom $A^t = [b_{ij}] \in M_{nm}$, $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$. Smisao je u tome da retci matrice A predstavljaju stupce matrice A^t (i obratno). Ako je, npr. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, onda je $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Primijetimo da je za $A \in M_n$ i $A^t \in M_n$. Zato sljedeće definicije imaju smisla: kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n$ simetrična ako vrijedi $A^t = A$, dok za matricu $B \in M_n$ kažemo da je antisimetrična ako vrijedi $B^t = -B$. Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ je simetrična. Uočimo da je A zaista simetrična s obzirom na dijagonalu. Lako se vidi da je to osobina svake simetrične matrice, pa odatle i ime.

Označimo sa S, odnosno A skup svih simetričnih, odnosno antisimetričnih matrica u M_n. Primjenom *korolara 2.3.3* lako se pokazuje da su i S i A potprostori od M_n.

Primjer 2.3.7. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$. Tada je $[S]$ potprostor od V.

I ovdje dokaz provodimo primjenom *korolara 2.3.3.* Odaberimo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $a, b \in [S]$. Po definiciji linearne ljuske, vektori a i b su oblika $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ i $b = \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j$ pri čemu su λ_i, μ_j neki skalari, x_i, y_j neki vektori iz skupa S, a n i m prirodni brojevi. No sada je odmah jasno da je $\alpha a + \beta b$ opet linearna kombinacija nekih vektora iz S, dakle $\alpha a + \beta b \in [S]$.

Pojam potprostora definiran je neovisno o dimenziji prostora. Ako pretpostavimo da je prostor V konačnodimenzionalan i da vrijedi $\dim V = n$, te da je M potprostor od V, bilo bi logično očekivati da onda vrijedi $\dim M \leq n$. Zaista, ako bi skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ bio baza za M (što implicitno znači da je $\dim M = m$), onda je, posebno, B linearno nezavisan skup u V, pa prema *korolaru 2.2.22* slijedi $m \leq n$.

Ipak, ovaj argument nije kompletan! Problem je u tome što mi a priori ne znamo da je i potprostor M konačnodimenzionalan (koliko god to bilo "logično"). Ako bismo prethodno dobili taj podatak, onda bi, međutim, naša argumentacija bila besprijekorna. Dokaz koji slijedi je zato korigirana verzija prethodnog argumenta.

Propozicija 2.3.8. *Neka je V vektorski prostor takav da je $\dim V = n < \infty$, te neka je M potprostor od V. Tada je $\dim M \leq n$.*

Ako je M potprostor od V takav da je $\dim M = n$, onda je $M = V$.

Dokaz. Ako je $M = \{0\}$ nemamo što dokazivati.

Uzmimo zato $M \neq \{0\}$ i odaberimo $a_1 \in M$, $a_1 \neq 0$. Kako je M potprostor, prema *napomeni 2.3.4*, imamo $[\{a_1\}] \subseteq M$. Ako vrijedi $[\{a_1\}] = M$, onda je $\{a_1\}$ sustav izvodnica za M (štoviše baza), pa je M konačnodimenzionalan. U suprotnom, možemo naći $a_2 \in M \setminus [\{a_1\}]$. Uočimo da to znači (zbog *propozicije 2.2.4*) da je skup $\{a_1, a_2\}$ nezavisan pa, posebno, *korolar 2.2.22* pokazuje da je $\dim V \geq 2$. Osim toga, jer je M potprostor, $[\{a_1, a_2\}] \subseteq M$. Ako je $[\{a_1, a_2\}] = M$, opet smo gotovi (i vidimo da je $\dim M = 2$). U suprotnom, postupak analogno nastavimo. U najviše n koraka dobit ćemo $[\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}] = M$. Naime, u protivnom bismo mogli odabrati vektor $a_{n+1} \in M \setminus [\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}]$, a tada bi, opet zbog *propozicije 2.2.4*, skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ bio nezavisan. To je, međutim, nemoguće zbog *korolara 2.2.22*.

Ovaj posljednji argument ujedno dokazuje i drugu tvrdnju propozicije. □

Primjer 2.3.9. Izračunajmo dimenzije potprostora iz *primjera 2.3.5* i *2.3.6.* Za $A \in \mathsf{G}$, svi koeficijenti ispod dijagonale iznose 0, dok za elemente na dijagonalnim mjestima i u gornjem trokutu nema nikakavih ograničenja. Ako sada, za proizvoljne $1 \leq i, j \leq n$, s $E_{ij} \in M_n$ označimo matricu koja na presjeku i-tog retka i j-tog stupca ima jedinicu, a na svim drugim mjestima nule, lako se vidi da je skup $\{E_{ij} \in M_n : i \leq j\}$ baza za G. Zato je $\dim \mathsf{G} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Na identičan način se vidi da vrijedi i $\dim \mathsf{D} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Za $A \in \mathsf{S}$ su svi elementi ispod dijagonale jednoznačno određeni onima iznad dijagonale, dok za one iznad dijagonale i na dijagonalnim mjestima nema ograničenja. Zato je i ovdje $\dim \mathsf{S} = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Konačno, uočimo da za $B = (b_{ij}) \in \mathsf{A}$ jednakost $b_{ij} = -b_{ji}$, $\forall i, j$, pokazuje da svi dijagonalni koeficijenti moraju biti jednaki 0. Zato je $\dim \mathsf{A} = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Propozicija 2.3.10. *Neka je V vektorski prostor te neka su L i M njegovi potprostori. Tada je i $L \cap M$ potprostor od V.*

Dokaz. Primijenit ćemo *korolar 2.3.3.* Uzmimo proizvoljne $a, b \in L \cap M$ i proizvoljne skalare α i β. Jer je, posebno, $a, b \in L$ i jer je L potprostor, *korolar 2.3.3* povlači da je $\alpha a + \beta b \in L$. Na isti način zaključujemo da je i $\alpha a + \beta b \in M$. Zato je $\alpha a + \beta b \in L \cap M$. □

Napomena 2.3.11. Ako je M_i, $i \in I$, familija potprostora vektorskog prostora V (pri čemu je indeksni skup I proizvoljno velik, moguće i beskonačan), onda je i $\bigcap_{i \in I} M_i$ također potprostor od V. Dokaz ove tvrdnje je zapravo identičan dokazu prethodne propozicije.

Uzmimo sada proizvoljan neprazan podskup S vektorskog prostora V. Tvrdimo da je $[S]$ presjek svih potprostora od V koji sadrže skup S (te je zato $[S]$ zapravo najmanji potprostor od V koji sadrži S).

Zaista, označimo s L_i, $i \in I$, familiju svih potprostora od V koji sadrže S. Uočimo da ta familija sadrži barem jedan potprostor, naime, sam V. Tvrdimo, dakle, da vrijedi $[S] = \bigcap_{i \in I} L_i$.

Da bismo to pokazali, uzmimo najprije proizvoljan $x \in [S]$; po definiciji linearne ljuske znamo da je x oblika $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j$ za neke skalare α_j, vektore $a_j \in S$ i neki $k \in \mathbb{N}$. No, kako je $S \subseteq L_i$, $\forall i \in I$, vrijedi i $a_j \in L_i, \forall j =$

$1,\dots,k$, $\forall i \in I$. Prema *korolaru 2.3.3* sada slijedi $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_j \in L_i$, $\forall i \in I$, a to pokazuje da je $x \in \bigcap_{i\in I} L_i$.

Ovime smo pokazali da vrijedi $[S] \subseteq \bigcap_{i\in I} L_i$. Sad još uočimo da je i $[S]$ potprostor od V (*primjer 2.3.7*) koji očito, po definiciji linearne ljuske, sadrži S. To znači da je $[S]$ jedan od potprostora iz familije L_i, $i \in I$; recimo da je $[S] = L_{i_0}$ za neki indeks $i_0 \in I$. Sada je jasno da vrijedi i $\bigcap_{i\in I} L_i \subseteq L_{i_0} = [S]$.

Za razliku od presjeka, unija dvaju potprostora nekog vektorskog prostora gotovo nikad neće biti potprostor. Pogledajmo, na primjer, netrivijalne radijvektore $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2(O)$ i jednodimenzionalne potprostore $[\{\overrightarrow{a}\}]$ i $[\{\overrightarrow{b}\}]$ od $V^2(O)$. Ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ kolinearni, ti se potprostori očito podudaraju. Ako su $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nekolinearni, onda $[\{\overrightarrow{a}\}]$ i $[\{\overrightarrow{b}\}]$ zapravo predstavljaju dva pravca kroz ishodište. Kad bi $[\{\overrightarrow{a}\}] \cup [\{\overrightarrow{b}\}]$ bio potprostor, trebao bi, prema *korolaru 2.3.3*, sadržavati i vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ što je, očito, nemoguće.

Općenito, može se pokazati da će unija dvaju potprostora biti potprostor jedino u slučaju kad je jedan od tih potprostora sadržan u drugom (što je posve nezanimljiva situacija).

Kad već unija $L \cup M$ dva potprostora vektorskog prostora V nije potprostor od V, možemo potražiti najmanji potprostor od V koji tu uniju sadrži. To nas dovodi upravo u situaciju kakvu smo razmatrali u prethodnoj napomeni.

Definicija 2.3.12. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Suma potprostora L i M označava se s $L + M$ i definira kao $L + M := [L \cup M]$.

Suma potprostora L i M je, dakle, najmanji potprostor istog prostora V koji sadrži i L i M. Iduća propozicija otkriva pozadinu naziva *suma* i oznake $+$. Primijetimo usput da je iz definicije jasno kako vrijedi $L + M = M + L$. To je vidljivo i iz naredne propozicije.

Propozicija 2.3.13. *Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Tada je $L + M = \{x + y : x \in L, y \in M\}$.*

Dokaz. Ako je $x \in L$ i $y \in M$, onda je $x, y \in L \cup M$, pa po definiciji linearne ljuske imamo $x + y \in [L \cup M] = L + M$.

Obratno, uzmimo $v \in L + M$. Po definiciji sume potprostora, to znači da postoje $k \in \mathbb{N}$, vektori $v_1, v_2, \dots, v_k \in L \cup M$ i skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ takvi da je $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$. Po definiciji unije, neki od vektora v_i su iz L, neki su iz M. Ako je potrebno, možemo ih prenumerirati tako da vrijedi $v_1, \dots, v_r \in L$ i $v_{r+1}, \dots, v_k \in M$ (pri čemu je $0 \le r \le k$). Kako su i L i M potprostori, *korolar 2.3.3* povlači $x := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \in L$ i $y := \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i v_i \in M$. Odavde je $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i + \sum_{i=r+1}^{k} \lambda_i v_i = x + y$.

U slučajevima $r = 0$ i $r = k$ imamo $v = 0 + y$, odnosno $v = x + 0$ pa je i tada v prikazan kao zbroj jednog vektora iz L i jednog vektora iz M. $\square$

Općenito, prikaz vektora $v \in L+M$ u obliku $v = x+y$, $x \in L, y \in M$, nije jedinstven. Na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in M_2$ pripada sumi $\mathsf{G}+\mathsf{D}$ jer se može prikazati kao zbroj jedne gornjetrokutaste i jedne donjetrokutaste matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Međutim, to nije jedini prikaz takve vrste jer vrijedi i $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Usput, primijetimo da se A u stvari može na beskonačno mnogo načina prikazati u obliku $A = B + C$ gdje je $B \in \mathsf{G}$ i $C \in \mathsf{D}$.

Jasno je iz navedenih jednakosti da je više različitih rastava matrice A u obliku $A = B + C$ gdje je $B \in \mathsf{G}$ i $C \in \mathsf{D}$ omogućeno upravo time što su dijagonalni koeficijenti matrice A mogli biti "svrstani" u bilo koji od dva pribrojnika. Uočimo da je presjek potprostora G i D skup dijagonalnih matrica. Odavde naslućujemo da je stvarni uzrok nejedinstvenosti rastava zapravo prisutnost netrivijalnih vektora u presjeku promatranih potprostora.

Definicija 2.3.14. Neka je V vektorski prostor, te neka su L i M njegovi potprostori. Kažemo da je suma potprostora L i M direktna i tada je označavamo s $L \dotplus M$ ako je $L \cap M = \{0\}$.

Propozicija 2.3.15. *Neka su L i M potprostori vektorskog prostora V. Suma $L + M$ je direktna ako i samo ako svaki vektor $v \in L + M$ dopušta jedinstveni prikaz u obliku $v = a + b$, $a \in L, b \in M$.*

Dokaz. Uzmimo da je suma direktna, tj. $L \cap M = \{0\}$. Pretpostavimo da za vektor $v \in L + M$ vrijedi $v = a + b$ i također $v = c + d$ pri čemu su $a, c \in L$ i $b, d \in M$. Odavde je $a+b = c+d$, što možemo pisati kao $a-c = d-b$. Vektor na lijevoj strani jednakosti je u L jer L je potprostor i $a, c \in L$. No taj je vektor jednak onome na desnoj strani jednakosti koji, iz analognih razloga, leži u M. Zato je $a - c \in L \cap M$. Kako je, prema pretpostavci, presjek nulpotprostor, slijedi $a - c = 0$, dakle $a = c$. Uvrštavanjem u jednakost $a + b = c + d$ dobivamo i $b = d$.

Da dokažemo obrat, pretpostavit ćemo da suma nije direktna. To znači da postoji $a \in L \cap M$, $a \neq 0$. Posebno je i $-a \in L \cap M$. Sad nulvektor koji, naravno, pripada sumi $L + M$ ima dva različita rastava u obliku zbroja jednog vektora iz L i jednog iz M: $0 = 0 + 0$ i $0 = a + (-a)$. $\square$

Ako je V konačnodimenzionalan prostor, onda su, za $L, M \leq V$ i potprostori L, M, $L \cap M$ i $L + M$ konačnodimenzionalni. Jasno je da vrijedi $\dim(L \cap M) \leq \dim L, \dim M \leq \dim(L + M)$. Mnogo više o odnosu ovih dimenzija govori sljedeći teorem.

Teorem 2.3.16. *Neka je V konačnodimenzionalan prostor, te neka su L i M potprostori od V. Tada je $dim(L+M) + dim(L \cap M) = dim L + dim M$.*

Dokaz. Neka je $B_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ baza za $L \cap M$. Kako je to nezavisan skup i u L i u M, možemo ga, dvaput primjenjujući *propoziciju 2.2.19*, dopuniti do baze za L i do baze za M. Neka su $B_L = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_r\}$ i $B_M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ tako dobivene baze potprostora L, odnosno M.

Uočimo da smo time implicitno označili $\dim (L \cap M) = k$, $\dim L = k + r$ i $\dim M = k + s$.

Sada tvrdimo da je $B_L \cup B_M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_r, c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ baza za $L + M$. To bi značilo da je $\dim (L + M) = k + r + s = \dim L + \dim M - \dim (L \cap M)$ i tvrdnja teorema time bi bila dokazana.

Pokažimo prvo da je skup $B_L \cup B_M$ nezavisan. Pretpostavimo da je

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j + \sum_{t=1}^{s} \gamma_t c_t = 0.$$

Odavde je $\sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j = -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i - \sum_{t=1}^{s} \gamma_t c_t$. Prema izboru i konstrukciji naših baza vidimo da je vektor na lijevoj strani ove jednakosti element potprostora L, a njegov oblik na desnoj strani jednakosti pokazuje da leži i u potprostoru M. Zato je $\sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j \in L \cap M$. Kako je $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ baza za $L \cap M$, postoje skalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takvi da je $\sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$. Ovo možemo pisati u obliku $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i - \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j = 0$, a odavde, zbog nezavisnosti skupa B_L, slijedi $\lambda_i = 0$, $\forall i$ i $\beta_j = 0$, $\forall j$. Kad to uvažimo u jednakosti $(*)$, dobivamo $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i + \sum_{t=1}^{s} \gamma_t c_t = 0$, a jer je i skup B_M nezavisan, zaključujemo i $\alpha_i = 0$, $\forall i$, i $\gamma_t = 0$, $\forall t$.

Preostaje pokazati da je skup $B_L \cup B_M$ sustav izvodnica za $L + M$. Odaberimo proizvoljan $v \in L + M$. Prema *propoziciji 2.3.13* postoje $x \in L$ i $y \in M$ takvi da je $v = x + y$. Sada je x linearna kombinacija vektora baze B_L, y je linearna kombinacija vektora baze B_M, pa je jasno da je $v = x + y$ linerna kombinacija vektora iz skupa $B_L \cup B_M$.

Primijetimo na kraju da smo dokaz započeli izborom jedne baze potprostora $L \cap M$ čime smo implicitno pretpostavili da je taj prostor netrivijalan. Da bismo kompletirali dokaz, potrebno je još posebno razmotriti mogućnost $L \cap M = \{0\}$. (Inače nema apriornog razloga za to. No, u ovako izvedenom dokazu ipak ovaj slučaj moramo promotriti posebno jer je dokaz započeo uzimanjem neke baze presjeka. Ako je suma direktna, po definiciji je presjek nulprostor, a on nema bazu.)

Uzmimo, dakle, da je $L \cap M = \{0\}$. Odaberimo po volji po jednu bazu za L i M; neka su to npr. $B_L = \{b_1, \ldots, b_l\}$ i $B_M = \{c_1, \ldots, c_m\}$. I ovdje tvrdimo da je njihova unija $B_L \cup B_M = \{b_1, \ldots, b_l, c_1, \ldots, c_m\}$ baza za $L + M$. Primijetimo odmah da to povlači tvrdnju teorema jer je tada $\dim (L + M) = l + m = \dim L + \dim M - \dim (L \cap M)$. Sam dokaz da je $B_L \cup B_M$ baza za $L + M$ je sasvim sličan prethodnome, pa detalje izostavljamo. $\square$

Istaknimo dokazanu formulu za dimenziju direktne sume:

Korolar 2.3.17. *Neka potprostori L i M konačnodimenzionalnog prostora čine direktnu sumu. Tada je* $dim(L \dotplus M) = dim L + dim M$.

Napomena 2.3.18. Često je zgodno operirati s bazom prostora čiji početni dio predstavlja bazu nekog određenog potprostora. Primijetimo da to svojstvo nema svaka baza danog prostora.

Međutim, dokaz *teorema 2.3.16* pokazuje standardni manevar kojim takvu bazu dobivamo. Ako je, dakle, dan potprostor L konačnodimenzionalnog prostora V, onda se najprije odabere proizvoljna baza za L, a nakon toga se, primjenom *propozicije 2.2.19*, taj nezavisan skup dopuni do baze cijelog prostora V.

Primjer 2.3.19. Promotrimo potprostore G i D prostora M_n iz *primjera 2.3.5.* Uočimo da je $\mathsf{G} \cap \mathsf{D}$ skup svih dijagonalnih matrica iz M_n (to su one čiji su svi koeficijenti i ispod i iznad dijagonale jednaki 0), a dimenzija tog potprostora očito iznosi n.

Sad formula iz *teorema 2.3.16* povlači (usp. *primjer 2.3.9*) $\dim(\mathsf{G}+\mathsf{D}) = \dim \mathsf{G} + \dim \mathsf{D} - \dim(\mathsf{G} \cap \mathsf{D}) = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) - n = n^2$. Kako je M_n jedini vlastiti potprostor dimenzije n^2 (*propozicija 2.3.8*), zaključujemo da je $\mathsf{G} + \mathsf{D} = M_n$.

Primjer 2.3.20. Pogledajmo potprostore S i A simetričnih i antisimetričnih matrica u prostoru M_n. Primijetimo da je njihova suma direktna jer $A \in \mathsf{S} \cap \mathsf{A}$ povlači $A = A^t = -A$, a odavde je $A = 0$. Uvažavajući izračunate dimenzije u *primjeru 2.3.9* primjenom *korolara 2.3.17* nalazimo $\dim(\mathsf{S} \dotplus \mathsf{A}) = \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = n^2$. Prema drugoj tvrdnji *propozicije 2.3.8*, odavde je $\mathsf{S} \dotplus \mathsf{A} = M_n$. *Propozicija 2.3.15* u ovoj situaciji daje sljedeći zaključak: svaka kvadratna matrica može se na jedinstven način prikazati kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

Definicija 2.3.21. Neka je V vektorski prostor, te neka je L potprostor od V. Potprostor M prostora V se naziva direktan komplement od L ako vrijedi $L \dotplus M = V$.

Jer je, općenito, $L+M = M+L$, za bilo kakve potprostore od V, navedena definicija je simetrična: ako je M direktan komplement od L, onda je i L direktan komplement od M. Ponekad se kaže, preciznije, da je M direktan komplemet od L u V ako se hoće naglasiti ambijentni prostor V. Prethodni primjer pokazuje da su potprostori simetričnih i antisimetričnih matrica direktni komplementi jedan drugomu u prostoru M_n.

Iz definicije je odmah jasno da su u svakom vektorskom prostoru V dva trivijalna potprostora V i $\{0\}$ direktni komplementi jedan drugomu.

Pitanje egzistencije direktnog komplementa za proizvoljan potprostor danog konačnodimenzionalnog prostora je riješeno idućim teoremom.

Teorem 2.3.22. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i L njegov potprostor. Tada postoji direktan komplement od L u V.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan pravi potprostor L od V. Neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ baza za L te neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ njezino nadopunjenje do baze prostora V (usp. *napomenu 2.3.18*). Ovime smo implicitno označili $\dim L = k$ i $\dim V = n$.

Definirajmo sada $M := [\{a_{k+1}, \dots, a_n\}]$. *Primjer 2.3.7* pokazuje da je M potprostor od V. Skup $\{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ je linearno nezavisan kao podskup nezavisnog skupa; zato to nije samo sustav izvodnica za potprostor M, nego je i baza za M. Posebno, slijedi $\dim M = n - k$.

Pokažimo da je presjek potprostora L i M trivijalan. Ako je $x \in L \cap M$ onda x dopušta prikaz u obliku $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ (jer je element od L), ali i $x = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i$ (jer leži i u M). Oduzimanjem slijedi $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ odakle zbog nezavisnosti skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ slijedi $\alpha_i = 0$, $\forall i$. No, tada je $x = 0$.

Time je pokazano da potprostori L i M čine direktnu sumu. Sad *korolar 2.3.17* pokazuje da vrijedi $\dim (L \dot{+} M) = \dim L + \dim M = k + (n-k) = n$. Druga tvrdnja *propozicije 2.3.8* sad povlači da je $L \dot{+} M = V$, a to upravo znači da je M direktan komplement od L u V. $\square$

Napomena 2.3.23. Pogledajmo netrivijalan radijvektor $\overrightarrow{a}$ u prostoru $V^2(O)$ i potprostor $L = [\{\overrightarrow{a}\}] \leq V$. Ako je $\overrightarrow{b}$ bilo koji radijvektor nekolinearan s $\overrightarrow{a}$ i ako stavimo $M = [\{\overrightarrow{b}\}]$, jasno je da je M direktan komplement od L u $V^2(O)$. Vidimo, dakle, da L ima beskonačno mnogo različitih direktnih komplemenata.

Lako je vidjeti da je tako i u proizvoljnom vektorskom prostoru: niti jedan netrivijalan potprostor nema jedinstven direktan komplement. Zato ni nema neke posebne oznake za direktan komplement. Uzroci te nejedinstvenosti vidljivi su već i u prethodnom dokazu (usp. *napomenu 2.2.21*). Iz *korolara 2.3.17* je, međutim, jasno da svi direktni komplementi potprostora L u prostoru V imaju istu dimenziju: $\dim V - \dim L$.

Inače se u praksi direktan komplement danog potprostora traži točno kao u dokazu *teorema 2.3.22.*

Na kraju ovog dijela uvodimo još jednu važnu konstrukciju s potprostorima.

Neka je V vektorski prostor, ne nužno konačnodimenzionalan. Neka je M potprostor od V. Na V definiramo binarnu relaciju $\sim$ formulom $x \sim y \Leftrightarrow y - x \in M$, $x, y \in V$.

Lako je vidjeti da je $\sim$ relacija ekvivalencije na V. Za $x \in V$ vrijedi $x \sim x$ jer M sadrži 0. Ako je $x \sim y$ onda je, po definiciji, $y - x \in M$, a jer je M potprostor, tada je i $x - y \in M$ što upravo znači $y \sim x$. Time smo provjerili refleksivnost i simetričnost. Napokon, relacija je i tranzitivna jer iz $x \sim y$ i $y \sim z$ imamo $y - x \in M$ i $z - y \in M$. Kako je M potprostor, slijedi i $(y - x) + (z - y) \in M$, tj. $z - x \in M$ pa je, dakle, $x \sim z$.

Za dani $x \in V$ s $[x]$ označavamo klasu ekvivalencije[2] određenu vektorom x; po definiciji je $[x] = \{y \in V : x \sim y\}$.

Vektor x naziva se reprezentantom ili predstavnikom ove klase ekvivalencije. Uočimo da se ista klasa $[x]$ može predočiti i drugim predstavnicima; iz opće teorije skupova znamo da vrijedi $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$. Sjetimo se također da je prostor V disjunktna unija svih klasa ekvivalencije $[x]$, $x \in V$.

Klase ekvivalencije za ovako uvedenu relaciju možemo i preciznije opisati: vrijedi $[x] = x+M$, $\forall x \in V$, pri čemu $x+M$ označava skup $\{x+a : a \in M\}$.

Da bismo to pokazali, uzmimo najprije $y \in [x]$. Po definiciji to znači da je $x \sim y$; dakle $y - x \in M$. Označimo li $y - x$ s a, možemo pisati $y = x + a$. Kako je $y - x = a \in M$, to pokazuje da je $y \in x + M$.

Obratno, ako je $y \in x + M$, to znači da postoji $a \in M$ takav da je $y = x + a$. Odavde je $y - x = a$ i, kako je $a \in M$, dokazali smo da je $x \sim y$, tj. $y \in [x]$.

Definicija 2.3.24. Neka je M potprostor prostora V. Svaki skup oblika $x+M = \{x+a : a \in M\}$, $x \in V$, naziva se linearna mnogostrukost u smjeru potprostora M. Skup svih linearnih mnogostrukosti u smjeru potprostora M označava se s V/M i naziva kvocijentni skup ili kvocijent (prostora V po potprostoru M).

Vidjeli smo, dakle, da odabrani potprostor M prostora V prirodno inducira relaciju ekvivalencije na V. Sad bismo željeli i u kvocijentni skup V/M uvesti strukturu vektorskog prostora.

Definirajmo zbrajanje klasa ekvivalencije (tj. linearnih mnogostrukosti) na sljedeći način: $[x] + [y] = [x + y]$, $x, y \in V$. Definicija je sasvim prirodna: klase ekvivalencije određene reprezentatima x i y zbrajamo tako da vektore x i y zbrojimo u polaznom prostoru V i onda zbroj $[x] + [y]$ definiramo kao klasu čiji reprezentant je upravo $x+y$. Problem s ovom definicijom je u tome što moramo pokazati da je konzistentna (često se kaže dobra), tj. neovisna o izboru predstavnika pojedinih klasa.

Da bismo to učinili, odaberimo $x' \in [x]$ i $y' \in [y]$. Primijetimo da je tada $[x'] = [x]$ i $[y'] = [y]$. Sada je zbroj ovih dviju klasa definiran kao $[x + y]$, ali također i kao $[x' + y']$, ako smo za reprezentante odabrali vektore x' i y'. Treba, dakle, vrijediti $[x+y] = [x'+y']$, a to je ekvivalentno s $x+y \sim x'+y'$, odnosno, po definiciji naše relacije, s $x' + y' - (x + y) \in M$.

No, iz $x \sim x'$ i $y \sim y'$ imamo $x' - x \in M$ i $y' - y \in M$. Kako je M potprostor, i zbroj ova dva vektora će ostati u M; dakle je $(x'-x)+(y'-y) \in M$, a to smo i htjeli. Time smo pokazali da je operacija zbrajanja linearnih mnogostrukosti zaista dobra.

Sasvim analogno ćemo definirati množenje skalarima. Prije svega, ako je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, nad tim istim poljem skalara ćemo graditi prostor V/M. Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $[x] \in V/M$ definiramo $\alpha[x] = [\alpha x]$. Definicija je jednako

[2]Važno je registrirati malu, ali bitnu razliku u odnosu na oznaku linearne ljuske. Linearna ljuska je pojam definiran za podskupove vektorskog prostora i, čak i kada je riječ o linearnoj ljusci jednočlanog skupa koji sadrži samo element x, pišemo $[\{x\}]$.

prirodna kao definicija zbrajanja, a jednako je i delikatna. I ovdje smo dužni provjeriti da rezultat množenja linearne mnogostrukosti skalarom ne ovisi o izboru reprezentanta. Precizno: ako je $[x] = [x']$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, treba pokazati da vrijedi $[\alpha x] = [\alpha x']$. Kako je provjera sasvim slična onoj maloprijašnjoj, detalje izostavljamo.

Uočimo još (s obzirom da je $[x] = x + M$, $x \in V$) da navedene operacije s linearnim mnogostrukostima možemo zapisati i u obliku $(x+M)+(y+M) = (x + y) + M$, $\alpha(x + M) = \alpha x + M$.

Sada, dakle, imamo definirane operacije $+ : V/M \times V/M \to V/M$ i $\cdot : \mathbb{F} \times V/M \to V/M$ što je preduvjet da V/M bude vektorski prostor.

Teorem 2.3.25. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je M potprostor od V. Tada je uz operacije $(x+M)+(y+M) = (x+y)+M$, $x, y \in V$ i $\alpha(x + M) = \alpha x + M$, $\alpha \in \mathbb{F}, x \in M$, kvocijentni skup V/M vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Već smo vidjeli da su operacije navedene u izreci teorema dobro definirane. Preostaje provjeriti uvjete iz definicije vektorskog prostora. No, odmah se vidi da su svi potrebni uvjeti osigurani odgovarajućim svojstvima operacija u V.

Na primjer, zbrajanje u V/M je asocijativno točno zato što je zbrajanje u prostoru V asocijativno: $((x+M)+(y+M))+(z+M) = ((x+y)+z)+M = (x + (y + z)) + M = (x + M) + ((y + M) + (z + M))$.

Slično se provjere i ostali uvjeti. Uočimo da je nulvektor u kvocijentu $[0] = 0 + M = M$. □

Vektorski prostor V/M naziva se kvocijentni prostor (prostora V po potprostoru M). Primijetimo da trivijalni izbori $M = \{0\}$ i $M = V$ dovode do nezanimljivih kvocijentnih prostora. Ako je $M = \{0\}$ onda je $x \sim y \Leftrightarrow x = y$, te je $[x] = \{x\}$. Zato je u ovoj situaciji kvocijentni skup V/M u bijekciji s polaznim prostorom V i zapravo se, do na formalizam u razlici između elemenata $x \in V$ i $\{x\} \in V/\{0\}$, radi o istom prostoru. Ako je pak $M = V$, onda je jasno da je $x \sim y$, $\forall x, y \in V$, te u ovom slučaju dobivamo samo jednu klasu ekvivalencije: $V/V = \{[0]\}$. Dakle, V/V je nulprostor.

Dosadašnja diskusija o kvocijentnim prostorima nije bila ovisna o dimenziji polaznog prostora. Ako pretpostavimo da je V konačnodimenzionalan, onda imamo razloga vjerovati da je takav i V/M pa ima smisla pokušati odrediti i dimenziju kvocijentnog prostora.

Teorem 2.3.26. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i M njegov potprostor. Tada je i prostor V/M konačnodimenzionalan i vrijedi $dim\, V/M = dim\, V - dim\, M$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je M netrivijalan potprostor od V; stavimo $\dim V = n$ i $\dim M = k$. Neka je $B_M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ neka baza za M i $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ neko njezino nadopunjenje do baze za V.

Tvrdimo da je tada skup $\{a_{k+1} + M, a_{k+2} + M, \ldots, a_n + M\}$ baza za V/M (evidentno, to će dokazati i više nego što se u iskazu teorema tvrdi).

Pretpostavimo da je $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i(a_i + M) = 0$. Imamo li na umu kako su definirane operacije u kvocijentu i da je nulvektor u kvocijentu mnogostrukost $0 + M = M$, ovo znači $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i + M = 0 + M$, drugim riječima, $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i \in M$. Zato postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takvi da je $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$. Odavde je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ i, zbog nezavisnosti skupa B, $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Time je dokazano da je skup $\{a_{k+1} + M, a_{k+2} + M, \ldots, a_n + M\}$ linearno nezavisan.

Preostalo je pokazati da je to i sustav izvodnica za V/M. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i odmah ga napišimo u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Sada je, opet po definiciji operacija u kvocijentu, $x + M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + M = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i + M)$. Preostaje samo uočiti da je $a_i + M = 0 + M$, $\forall i = 1, \ldots k$ jer je, za $i = 1, \ldots k$, $a_i \in M$. □

2.4. **Zadaci.**

1. Neka je G neprazan skup i $* : G \times G \to G$ binarna operacija na G. Uređen par $(G, *)$ se zove grupa ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(1) $a * (b * c) = (a * b) * c$, $\forall a, b, c \in G$;
(2) postoji $e \in G$ takav da je $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$;
(3) za svaki $a \in G$ postoji $a^{-1} \in G$ takav da vrijedi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Ako još vrijedi i $a * b = b * a$, $\forall a, b \in G$, kažemo da je $(G, *)$ komutativna ili Abelova grupa.
Pokažite da su $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abelove grupe.

Napomena. Uočimo da je grupa matematička struktura koja je implicitno prisutna u definicijama polja i vektorskog prostora. Na primjer, svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva navedena u *napomeni 2.1.1* (koja čine definiciju polja) sada se mogu konciznije izreći na sljedeći način:

(1) $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa;
(2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa;
(3) $a(b + c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Identična svojstva imaju i operacije zbrajanja i množenja u $\mathbb{C}$ i u bilo kojem polju $\mathbb{F}$. Uočimo također da prva četiri uvjeta iz definicije vektorskog prostora zapravo znače da je $(V, +)$ Abelova grupa. Često se zato i kaže da je $(V, +)$ aditivna Abelova grupa vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$.

2. Neka je S neprazan skup. Označimo s $B(S)$ skup svih bijektivnih preslikavanja sa S u S. Dokažite da je skup $B(S)$ uz kompoziciju preslikavanja kao binarnu operaciju grupa. Uočite da grupa $(B(S), \circ)$ nije komutativna čim skup S ima više od dva elementa.
3. Upotpunite dokaz *propozicije 2.1.5.*
4. Za koje vrijednosti parametra t je skup $\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, 4, 0), (1, t, 7, 1)\}$ linearno nezavisan u prostoru $\mathbb{R}^4$?
5. Je li skup $\{(1, i, 1 + i), (i, 0, i), (1, 1, 1)\}$ baza prostora $\mathbb{C}^3$?

6. Neka je t_0 realan broj. Je li skup $\{(t-t_0)^i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ baza prostora P_n?
7. Pokažite da je skup $\{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 1, 7), (6, 2, 13)\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^3$ pa ga reducirajte do baze prostora $\mathbb{R}^3$.
8. Nadopunite skup $\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\}$ do baze prostora M_2.
9. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V, te neka je $v \in V$. Je li i skup $\{a_1 + v, a_2 + v, \ldots, a_n + v\}$ linearno nezavisan?
10. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza za vektorski prostor V. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektor $b \in V$ da bi i skup $\{b, a_2, \ldots, a_n\}$ bio baza za V.
11. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza za vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Uočite da vektori a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, leže i u prostoru $\mathbb{C}^n$. Je li skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza i za $\mathbb{C}^n$?
12. Pokažite da prostor $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ nije konačnodimenzionalan.
13. Pokažite da je skup aritmetičkih nizova $X = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_{k+1} - x_k = x_2 - x_1, \forall k \in \mathbb{N}\}$ potprostor prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dokažite da je X konačnodimenzionalan i odredite mu neku bazu i dimenziju.
14. Dokažite da je $\mathbb{C}^n$ i realan vektorski prostor uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja (isključivo) realnim skalarima. Pokažite da dimenzija tako shvaćenog vektorskog prostora $\mathbb{C}^n$ iznosi $2n$.
15. Neka su u vektorskom prostoru V dani konačni skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$. Dokažite da je $[A] = [B]$ ako i samo ako vrijedi $a_i \in [B]$, $\forall i = 1, \ldots, r$ i $b_j \in [A]$, $\forall j = 1, \ldots, s$.
16. U prostoru $\mathbb{R}^3$ dani su vektori $a_1 = (1, 3, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $b_1 = (-1, 0, -1)$ i $b_2 = (-1, -1, -1)$. Pokažite da vrijedi $[\{a_1, a_2\}] = [\{b_1, b_2\}]$.
17. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.
18. Pokažite da je skup $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : 2a - b - c = 0, a - b + 2c - d = 0\}$ potprostor od M_2 i odredite mu neku bazu i dimenziju.
19. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.
20. Dokažite da je skup $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = x_1 - x_n\}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$ i odredite mu neku bazu i dimenziju.
21. Odredite po jedan direktan komplement svakom od potprostora iz prethodna četiri zadatka.
22. Neka su L i M međusobno različiti potprostori prostora V, te neka vrijedi $\dim L = \dim M = 3$, $\dim V = 4$. Dokažite da je tada $\dim (L \cap M) = 2$.
23. Neka su L i M potprostori prostora V, te neka vrijedi $\dim L = 4$, $\dim M = 2$, $\dim V = 5$. Dokažite: ili je $M \subseteq L$, ili je $L + M = V$.
24. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka su L i M njegovi potprostori. Dokažite da je $\dim L = \dim M$ ako i samo ako postoji potprostor K od V koji je direktan komplement i za L i za M.

25. Neka su L i M potprostori prostora V, te neka su $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ i $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ baze od L, odnosno M. Uzmimo da je baza $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ numerirana tako da je skup $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ baza za $L+M$. Uočimo da je $k \leq s$ i, prema *teoremu 2.3.16*, $\dim(L \cap M) = s - k$. Nadalje, vektori $b_{k+1}, \ldots, b_s$ leže u $L + M$, pa se svaki od njih može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze B. Neka je

$$b_j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} a_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij} b_i, \ \forall j = k+1, k+2, \ldots, s.$$

Označimo $c_j := \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij} a_i$, $j = k+1, k+2, \ldots, s$. Dokažite da je tada skup $\{c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_s\}$ baza za $L \cap M$.

26. U prostoru $\mathbb{R}^3$ zadani su potprostori L i M svojim bazama $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, odnosno $b_1 = (1, 0, 2)$, $b_2 = (1, -1, 2)$. Odredite bazu potprostora $L \cap M$.

27. Provjerite da je množenje skalarom u kvocijentnom prostoru dobro definirano (tj. da definicija ne ovisi o izboru predstavnika klasa/linearnih mnogostrukosti).

28. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Na Kartezijevom produktu $V \times W$ definiramo zbrajanje s $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ i množenje skalarima iz $\mathbb{F}$ formulom $\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$. Dokažite da je uz ove operacije i $V \times$W vektorski prostor. Nadalje, ako su V i W konačnodimenzionalni, dokažite da je $\dim V \times W = \dim V + \dim W$.

Dodatak: vektorski prostor V^3.

Na kraju, uvedimo još prostor V^3 klasa orijentiranih dužina i objasnimo njegovu vezu s prostorom $V^3(O)$. To ćemo učiniti navodeći sve relevantne činjenice bez dokaza. Dokazi navedenih tvrdnji D1 - D5 mogu se naći u [4], gdje je prostor V^3 iscrpno i sustavno opisan.

Za $A, B \in E^3$ uređen par (A, B) se naziva orijentirana dužina s početkom u točki A i završetkom u točki B. Obično se orijentirana dužina (A, B) označava s $\overrightarrow{AB}$ i zamišlja kao strelica s početkom u A i završetkom u B.

Na skupu svih orijentiranih dužina uvodimo relaciju $\sim$ na sljedeći način: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ako i samo ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. Primijetimo da $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ u slučaju kad točke $ABCD$ nisu kolinearne znači da je četverokut $ABDC$ paralelogram.

D1. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih orijentiranih dužina.

Skup klasa ekvivalencije orijentiranih dužina s obzirom na relaciju $\sim$ označava se s V^3. Klase orijentiranih dužina zovu se vektori. U ovom kontekstu vektor je, dakle, skup svih međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Vektore označavamo simbolima $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \ldots$, odnosno $[\overrightarrow{AB}], [\overrightarrow{CD}], \ldots$, ako izrijekom želimo navesti reprezentante. Nulvektor je ovdje $[\overrightarrow{AA}]$ (i pritom treba uočiti da je $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB}$, $\forall A, B \in E^3$).

Važna je činjenica da se za svaki vektor može naći reprezentant s početkom u danoj točki:

D2. Za svaki $\overrightarrow{a} \in V^3$ i svaku točku $A \in E^3$ postoji jedinstvena točka $B \in E^3$ takva da vrijedi $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$.

Zbrajanje se u V^3 definira sljedećim "pravilom trokuta": za zadane vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ odabere se proizvoljna točka $A \in E^3$ te se, na temelju D2, nađu točke B i C takve da vrijedi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$. Tada je $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AC}]$.

D3. Zbrajanje u V^3 je dobro definirano, tj. rezultat ne ovisi o izboru početne točke predstavnika prvog sumanda. Nadalje, pravilo trokuta za zbrajanje nekolinearnih vektora daje isti rezultat kao i pravilo paralelograma koje se ovdje izvodi na sljedeći način. Za $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in V^3$ se odabere proizvoljna točka A te se, primjenom D2, nađu točke B i C takve da je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$. Sada se u ravnini ABC nađe jedinstvena točka D za koju je četverokut $ABDC$ paralelogram i definira se $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [\overrightarrow{AD}]$.

Modul vektora $\overrightarrow{a}$ se definira kao duljina dužine $\overline{AB}$ gdje je $\overrightarrow{AB}$ bilo koji reprezentant od $\overrightarrow{a}$. Nadalje, smjer vektora $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ se definira kao smjer pravca AB gdje je $\overrightarrow{AB}$ bilo koji reprezentant od $\overrightarrow{a}$. Pritom se pod smjerom pravca p podrazumijeva familija svih pravaca paralelnih s p.

Kolinearni vektori su oni koji su istog smjera, a po definiciji uzimamo da je nulvektor kolinearan sa svakim vektorom. Ako su sada $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ netrivijalni kolinearni vektori, (međusobnu) orijentaciju im definiramo na identičan način kao u prostoru radijvektora nakon što im odaberemo reprezentante s početkom u istoj točki.

Lako se pokazuje da su sve prethodne definicije konzistentne, tj. neovisne o izboru predstavnika pojedinih vektora. Nadalje, svaki vektor u V^3 je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.

Sada se definira množenje vektora skalarima jednako kao u prostorima $V^2(O)$ i $V^3(O)$ (pri čemu se ovdje $\alpha\overrightarrow{a}$ efektivno definira tako da mu se odredi jedan predstavnik s početkom u unaprijed odabranoj točki A).

D4. V^3 je realan vektorski prostor.

Za vektore $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\overrightarrow{c} = [\overrightarrow{OC}]$ kažemo da su komplanarni (nekomplanarni) ako točke O, A, B, C leže (ne leže) u istoj ravnini. Primijetimo da je za utvrđivanje (ne)komplanaranosti najprije potrebno dane vektore reprezentirati s početkom u istoj točki. Nije teško pokazati da je definicija dobra, tj. neovisna o izboru početne točke O.

D5. Svaki skup od tri nekomplanarna vektora je baza prostora V^3. Posebno, $\dim V^3 = 3$.

Istaknimo na kraju da je prostor $V^3(O)$ tek simplificirana realizacija prostora V^3. Ukoliko odaberemo i fiksiramo točku $O \in E^3$ onda, temeljem tvrdnje D2, svaki vektor $\vec{a} \in V^3$ možemo reprezentirati s početkom u točki O. Tada vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ možemo poistovjetiti s njegovim predstavnikom $\overrightarrow{OA}$ i u tom smislu $V^3(O)$ postaje model koji pokazuje kako prostor V^3 izgleda "lokalno". Izborom različitih početnih točaka, recimo O i O', dobivamo prostore $V^3(O)$ i $V^3(O')$ koji su, do na translaciju koja točku O prevodi u O', jednaki.

Pokazuje se da je zapravo prostor V^3 prikladan za primjene, osobito u fizici. Na primjer, modeliranje i istraživanje vodenih tokova ili strujanja zraka podrazumijeva upravo prirodu vektora kao elemenata prostora V^3. U prostoru V^3 sve međusobno ekvivalentne orijentirane dužine predstavljaju jedan vektor i, sukladno tomu, dani vektor nije fiksiran samo za neku, određenu točku, već ima svoju realizaciju (tj. reprezentant) s početkom u svakoj točki prostora - upravo kao što npr. riječni tok ili vjetar pokazuje isti intezitet, smjer i orijentaciju u svakoj točki unutar određenog promatranog područja.

Odluka da kao prototip vektorskog prostora umjesto prostora V^3 odaberemo njegovu simplifikaciju $V^3(O)$ bila je motivirana željom da uvodna razmatranja budu što jednostavnija, rasterećena tehničkih detalja (poput, npr. operiranja s klasama ekvivalencije) i fokusirana na algebarsku strukturu.

3. Matrice

3.1. **Operacije s matricama.**

Podsjetimo se definicije matrice: za prirodne brojeve m i n, preslikavanje $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ naziva se matrica tipa (m, n) s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Običaj je djelovanje svake takve funkcije A napisati tablično, u m redaka i n stupaca, pišući u i-ti redak i j-ti stupac funkcijsku vrijednost $A(i, j)$. U tom smislu se kaže da je A matrica s m redaka i n stupaca. Napokon, običaj je da se i funkcijska vrijednost $A(i, j)$ jednostavnije označi kao a_{ij}. Uz ove dogovore svaku matricu s m redaka i n stupaca standardno pišemo u obliku

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Katkad će biti praktično za danu matricu A njezin koeficijent u i-tom retku i j-tom stupcu označavati s $[A]_{ij}$ ili $(A)_{ij}$. Ponekad ćemo, da se izbjegne eventualna mogućnost zabune, indekse odvajati zarezom te pisati $a_{i,j}$, odnosno $[A]_{i,j}$.

Skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Ako je $m = n$ pišemo kraće $M_n(\mathbb{F})$, a elemente tog skupa zovemo kvadratnim matricama reda n. Kao i prije, pisat ćemo kratko M_{mn}, odnosno M_n ako nam u trenutku nije važno radimo li s realnim ili s kompleksnim matricama.

U točki 2.1. uveli smo i osnovne operacije s matricama. Sjetimo se da smo za $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ definirali zbroj $A + B$ kao matricu istog tipa, $A + B = [c_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, pri čemu je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, 2, \ldots, m, \forall j = 1, 2, \ldots, n$. Analogno, za $\lambda \in \mathbb{F}$, definirali smo $\lambda A = [d_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, gdje je $d_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall i = 1, 2, \ldots, m, \forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Vidjeli smo da je $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz ovako uvedene operacije vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Znamo također da je $\dim M_{mn}(\mathbb{F}) = mn, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Uz zbrajanje i množenje skalarom može se definirati i množenje matrica. Za razliku od zbrajanja, koje je binarna operacija na svakom od prostora M_{mn}, množenje matrica je operacija u kojoj, općenito, ni faktori, ni rezultat nisu matrice istog tipa.

Definicija 3.1.1. Neka je $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{rs}$. Kažemo da su matrice A i B ulančane ako je $n = r$.

Matrice A i B su, dakle, ulančane ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Ovo nije simetrična relacija; ako su matrice A i B ulančane (u tom poretku), ne slijedi nužno da su ulančane i u obrnutom poretku. Na primjer, $A \in M_{24}$ i $B \in M_{43}$ su očito ulančane, a B i A nisu.

Primijetimo još da su kvadratne matrice istog tipa $A, B \in M_n$ ulančane u oba poretka.

Definicija 3.1.2. Neka su $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in M_{ns}$ ulančane matrice. Tada je produkt AB definiran kao matrica $AB = [c_{ij}] \in M_{ms}$ pri čemu je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ \forall i = 1, 2, \ldots, m,\ \forall j = 1, 2, \ldots, s.$$

Umnožak AB ima redaka kao prvi faktor i stupaca kao drugi faktor. Smisao definicije je da koeficijent c_{ij}, koji se u produktu nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu, izračunamo kao "umnožak i-tog retka od A i j-tog stupca od B". Pod tim umnoškom se podrazumijeva zbroj $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$. Sada je jasno kako zahtjev da matrice budu ulančane upravo znači da svaki redak od A ima točno onoliko elemenata koliko i svaki stupac od B, čime je osigurano da ovakvo množenje bude smisleno. Pogledajmo primjer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 19 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Napomena 3.1.3. (a) Istaknimo još jednom: množenje matrica je preslikavanje $\cdot : M_{mn} \times M_{ns} \to M_{ms}$, $m, n, s \in \mathbb{N}$. Zato, općenito, množenje nije binarna operacija. Izuzetak je jedino slučaj $m = n = s$; jedino tada je množenje $\cdot : M_n \times M_n \to M_n$ binarna operacija na skupu M_n.

(b) Iz definicije je jasno da množenje matrica nije komutativna operacija. Naime, promatramo li proizvoljne ulančane matrice A i B, umnožak BA ne samo da općenito neće biti jednak AB, nego možda uopće nije ni definiran. Čak i u prostorima M_n u kojima je definiran produkt bilo kojih dviju matrica u oba poretka, zakon komutacije ne vrijedi (kako pokazuje sljedeći primjer):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi $A0 = 0$ i $0A = 0$ (pri čemu nulmatrica mora biti prikladno formatirana da bismo je s desna ili s lijeva mogli množiti s A).

(d) Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo jediničnu matricu reda n kao kvadratnu matricu

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedinična matrica ima, dakle, jedinice na svim dijagonalnim mjestima, a svi ostali koeficijenti jednaki su joj 0.

Ovdje je prikladno uvesti tzv. Kroneckerov simbol δ_{ij}, koji ovisi o dva indeksa i i j i definiran je formulom $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ 0, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$ Uz ovu oznaku, jediničnu matricu n-tog reda jednostavno zapisujemo kao $I = [\delta_{ij}] \in M_n$.

Sad se lako provjeri da za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi $AI = A$ i $IA = A$. Pritom je bitno uočiti da je u prvoj navedenoj jednakosti $I \in M_n$, dok je u drugoj jednakosti $I \in M_m$.

Ovo pokazuje da se jedinična matrica, prikladno formatirana, ponaša kao neutralni element za množenje svih matrica.

U idućem teoremu navest ćemo sva svojstva množenja matrica.

Teorem 3.1.4. *Za množenje matrica vrijedi (kad god su navedeni produkti definirani):*

(1) $A(B + C) = AB + AC$;
(2) $(A + B)C = AC + BC$;
(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$;
(4) $(AB)C = A(BC)$;
(5) $IA = A$, $AI = A$.

Formulacija "kad god su navedeni produkti definirani" podrazumijeva da navedena pravila vrijede za matrice proizvoljnog tipa pod uvjetom da su faktori koji se pojavljuju u pojedinim umnošcima ulančane matrice. Svojstva (1) i (2) zovu se desna, odnosno lijeva distributivnost množenja prema zbrajanju, a svojstvo (3) se naziva kvaziasocijativnost. Uočimo i ovdje da na jednoj razini ova svojstva predstavljaju računska pravila (koja ćemo u u nastavku koristiti prešutno, bez eksplicitnog citiranja), dok na drugoj razini ova pravila treba razumjeti kao pokazatelje da je množenje matrica usklađeno s operacijama zbrajanja i množenja skalarima. U tom smislu možemo reći da je množenje matrica usklađeno sa strukturom vektorskih prostora M_{mn}.

Dokaz teorema. Dokažimo tvrdnju (4) - asocijativnost množenja matrica.

Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$, $B = [b_{ij}] \in M_{ns}$, $C = [c_{ij}] \in M_{st}$. Uočimo da je tada $AB \in M_{ms}$, pa je produkt $(AB)C$ definiran i rezultat je matrica iz M_{mt}. Sasvim analogno se vidi da je i $A(BC) \in M_{mt}$. Zato preostaje samo vidjeti da su u matricama $(AB)C$ i $A(BC)$ svi odgovarajući koeficijenti jednaki.

Odaberimo proizvoljne $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq t$. Sada je

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{s} [AB]_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{s} (\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk}) c_{kj},$$

a s druge strane imamo

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} [BC]_{pj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} (\sum_{r=1}^{s} b_{pr} c_{rj}) = \sum_{r=1}^{s} (\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pr}) c_{rj},$$

odakle je očito da su dobiveni rezultati identični (do na izbor indeksa sumacije, što je irelevantno). Još primijetimo da je zamjena redoslijeda sumiranja (što je sadržaj posljednje jednakosti) moguća jer su sume konačne, a zbrajanje u polju komutativno.

Dokazi svih ostalih tvrdnji su znatno jednostavniji i svode se na direktnu provjeru. Zato detalje izostavljamo. □

Korolar 3.1.5. *Množenja matrica u vektorskom prostoru $M_n(\mathbb{F})$ ima sljedeća svojstva:*

(1) $A(B+C) = AB + AC$, $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$;
(2) $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$;
(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$;
(4) $(AB)C = A(BC)$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$;
(5) $IA = AI = A$, $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$.

Definicija 3.1.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ na kojem je, dodatno, zadana binarna operacija množenja $\cdot : V \times V \to V$. Tada se V zove asocijativna algebra s jedinicom ako operacija množenja na V ima sljedeća svojstva:

(1) $a(b+c) = ab + ac$, $\forall a, b, c \in V$;
(2) $(a+b)c = ac + bc$, $\forall a, b, c \in V$;
(3) $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall a, b \in V$;
(4) $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b \in V$;
(5) postoji $e \in V$ sa svojstvom $ea = ae = a$, $\forall a \in V$.

Ponekad se, ako nema opasnosti od zabune, kraće kaže algebra. Međutim, bolje je koristiti puno ime jer se time jasno daje do znanja da u V postoji neutralan element za množenje te da je operacija množenja asocijativna. Postoje, naime, i vektorski prostori na kojima je dana binarna operacija množenja koja nije asocijativna i ne posjeduje neutralni element. Takve strukture se također zovu (neasocijativne) algebre.

Sad prethodni korolar u ovom novom kontekstu možemo izreći na sljedeći način:

Korolar 3.1.7. *$M_n(\mathbb{F})$ je asocijativna algebra s jedinicom.*

Sad bismo željeli dodatno istražiti svojstva množenja u algebri M_n. Prije svega, uočimo bitnu razliku u odnosu na množenje u polju: dok i u $\mathbb{R}$ i u $\mathbb{C}$ (kao i u svakom polju) jednakost $ab = 0$ povlači $a = 0$ ili $b = 0$, u algebri matrica nije tako. U M_n postoje takozvani djelitelji nule, tj. matrice A i B obje različite od nulmatrice, a takve da vrijedi $AB = 0$. Na primjer, takve su matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$.

Nadalje, u polju svaki element $a \neq 0$ ima multiplikativni inverz, tj. element $a^{-1} \in \mathbb{F}$ sa svojstvom $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. To opet nije slučaj u algebri matrica. Na primjer, za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ne može postojati matrica $B \in M_2$ takva da vrijedi $AB = I$. Zaista, uzmimo proizvoljnu matricu $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$ i pretpostavimo da vrijedi $AB = I$. Kako je $AB = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix}$, jednakost $AB = I$ bi značila da moraju biti zadovoljene jednakosti $a + 2c = 1$, $b + 2d = 0$, $2a + 4c = 0$ i $2b + 4d = 1$, a taj sustav očito nema rješenja.

S druge strane, lako je provjeriti da za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ postoji matrica $B \in M_2$ sa svojstvom $AB = BA = I$.

U ovom svjetlu je prirodno uvesti sljedeću definiciju.

Definicija 3.1.8. Kaže se da je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi $AB = BA = I$. U tom se slučaju matrica B zove multiplikativni inverz ili inverzna matrica od A i označava s A^{-1}.

Za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ koja nema multiplikativni inverz kažemo da je singularna.

Napomena 3.1.9. (a) Uočimo da matrica $A \in M_n$ može imati najviše jedan inverz. Kad bi, naime, postojale matrice $B, C \in M_n$ koje bi zadovoljavale $AB = BA = I$ i $AC = CA = I$, onda bi zbog asocijativnosti množenja slijedilo $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Zbog toga i ima smisla matricu B koja zadovoljava jednakost $AB = BA = I$ zvati inverznom matricom matrice A i označavati je funkcijskom oznakom A^{-1}.

(b) Matrica I je regularna i sama sebi inverzna jer vrijedi $I \cdot I = I$.

(c) Ako je A regularna onda po definiciji vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. To, posebno, pokazuje da je i A^{-1} regularna matrica te da vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.

(d) Ako su matrice $A, B \in M_n$ regularne, regularan je i njihov umnožak AB te vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Zaista, ponovo uz pomoć asocijativnosti množenja matrica imamo $(AB)B^{-1}A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Analogno se pokaže da vrijedi i $B^{-1}A^{-1}(AB) = I$.

Sad se lakim induktivnim argumentom pokazuje: ako su $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$, $k \in \mathbb{N}$, regularne matrice, regularna je i matrica $A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$ i vrijedi $(A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(e) Skup svih regularnih matrica n-tog reda s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označava se s $GL(n, \mathbb{F})$. Inače, ponekad se umjesto regularna kaže i invertibilna matrica.

Primijetimo da pretposljednji dio prethodne napomene pokazuje da je množenje, kad se provodi samo nad regularnim matricama, binarna operacija na skupu $GL(n, \mathbb{F})$. Naime, točno to znači tvrdnja da je umnožak dviju regularnih matrica također regularna matrica.

Sjetimo se da smo u *zadatku 1* u prethodnom poglavlju definirali pojam grupe. Nije teško utvrditi da je $GL(n, \mathbb{F})$ s binarnom operacijom množenja grupa čiji je neutralni element jedinična matrica.

Propozicija 3.1.10. *Za binarnu operaciju množenja na skupu $GL(n,\mathbb{F})$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedi:*

(1) $A(BC) = (AB)C$, $\forall A, B, C \in GL(n,\mathbb{F})$;
(2) *postoji* $I \in GL(n,\mathbb{F})$ *takva da je* $AI = IA = A$, $\forall A \in GL(n,\mathbb{F})$;
(3) *za svaku matricu* $A \in GL(n,\mathbb{F})$ *postoji* $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{F})$ *tako da vrijedi* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Dakle, $(GL(n,\mathbb{F}), \cdot)$ *je grupa.*

Definicija 3.1.11. $GL(n,\mathbb{F})$ se zove opća linearna grupa reda n nad poljem $\mathbb{F}$.

U nastavku bismo željeli pobliže istražiti regularne matrice. Dva pitanja prirodno proizlaze iz prethodne diskusije:

- kako se može prepoznati je li dana matrica regularna?
- kako se za zadanu regularnu matricu računa njezin inverz?

3.2. **Determinanta.**

U ovoj točki uvest ćemo determinantu kvadratne matrice i ispitati njena svojstva. Pokazat će se da je determinanta prikladan teorijski instrument za opis regularnih matrica.

Izlaganje započinjemo pregledom osnovnih činjenica o permutacijama. Svojstva permutacija predstavljat će važnu tehničku podršku našem istraživanju determinanti.

Želimo li proučavati permutacije od npr. n elemenata, nije nam važna priroda tih elemenata, već samo efekt djelovanja svake pojedine permutacije. Zato te objekte možemo idealizirati. Konkretno, ovdje ćemo promatrati permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pritom na skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$ podrazumijevamo prirodni uređaj.

Definicija 3.2.1. Neka je n proizvoljan prirodan broj. Permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ je bilo koja bijekcija $p : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Često se kaže i da je p permutacija od n elemenata. Skup svih permutacija od n elemenata označavamo sa S_n.

Uobičajeno je u praksi permutacije zapisivati tablično, u obliku $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$. Uočimo: jer je p bijekcija, svaki element skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ se u donjem retku pojavljuje točno jednom.

Za svaki n permutacije unutar skupa S_n možemo komponirati. Kako je kompozicija dviju bijekcija opet bijekcija, time smo dobili jednu binarnu operaciju na skupu S_n. U stvari je $(S_n, \circ)$ grupa (usp. *zadatak 1* u 2. poglavlju).

Propozicija 3.2.2. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Skup* S_n *s kompozicijom kao binarnom operacijom čini grupu od* $n!$ *elemenata.*

Dokaz. Kompozicija bilo kakvih preslikavanja je asocijativna operacija. Neutralni element u S_n je identična permutacija $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Za proizvoljan element $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n$ inverz je zapravo inverzno preslikavanje $p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ (pri čemu stupce u tabličnom zapisu od p^{-1} možemo, ako želimo, "presložiti" tako da u prvom retku tablice elementi skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ budu poredani u svom prirodnom, rastućem poretku.

Druga tvrdnja se dokazuje jednostavnim induktivnim argumentom. Broj elemenata skupa S_1 očito je jednak $1!$ - to je baza indukcije.

Da provedemo korak, pretpostavimo da je tvrdnja točna za $n \in \mathbb{N}$. Pogledajmo proizvoljan element $p \in S_{n+1}$ i uočimo da se vrijednost $p(n+1)$ može odabrati na $n+1$ način. Zamislimo da je $p(n+1) = i$ za neki $i \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$. Ostatak djelovanja permutacije p je proizvoljno bijektivno preslikavanje skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ na skup $\{1, 2, \dots, n, n+1\} \setminus \{i\}$, a takvih, prema pretpostavci indukcije, ima $n!$. Preostaje uočiti da je $(n+1)n! = (n+1)!$. □

Uočimo da je prva tvrdnja prethodne propozicije zapravo specijalan slučaj tvrdnje *zadatka 2* u 2. poglavlju. Grupa $(S_n, \circ)$ je, dakle, specijalan slučaj grupe $(B(S), \circ)$ svih bijektivnih preslikavanja na nepraznom skupu S s kompozicijom kao binarnom operacijom. Grupa S_n se naziva simetrična grupa stupnja n.

Kad zapisujemo kompoziciju dviju permutacija p i q, znak komponiranja $\circ$ obično ispuštamo i pišemo jednostavnije pq.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $q \in S_n$ proizvoljna permutacija. Preslikavanja $l_q : S_n \to S_n$, $l_q(p) = qp$ i $d_q : S_n \to S_n$, $d_q(p) = pq$ su bijekcije. Preslikavanje $p \mapsto p^{-1}$ je također bijekcija skupa S_n na samog sebe.*

Dokaz. Neka je $qp_1 = qp_2$. Komponiranjem s q^{-1} s lijeve strane slijedi $p_1 = p_2$. Dakle, l_q je injekcija. Jer je skup S_n konačan, to je dovoljno da se zaključi kako je l_q bijektivno preslikavanje. Analogno se dokazuju ostale dvije tvrdnje. □

Definicija 3.2.4. Neka je $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n$. Svaki par (i, j) takav da vrijedi $i < j$ i $p(i) > p(j)$ naziva se inverzija u permutaciji p. Broj svih inverzija u p označava se s $I(p)$. Ukoliko je $I(p)$ paran broj, kažemo da je permutacija parna; u suprotnom kažemo da je p neparna permutacija.

Primijetimo da je $I(id) = 0$, stoga je identična permutacija parna. Ako pak pogledamo $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$, vidimo da su inverzije u p parovi $(1, 3)$, $(2, 3)$ i $(2, 4)$; zato je ovdje $I(p) = 3$ pa je p je neparna.

Definicija 3.2.5. Za $p \in S_n$ definira se predznak kao $\operatorname{sign} p := (-1)^{I(p)}$.

Propozicija 3.2.6. *Za sve p iz S_n vrijedi* $sign\, p = \Pi_{i<j} \frac{p(j)-p(i)}{j-i}$.

Dokaz. Jer je p bijekcija, svaki nazivnik u navedenom produktu nalazi se, do na predznak, u jednom i samo jednom brojniku. Zato je apsolutna vrijednost produkta jednaka 1. U drugu ruku, svaki od razlomaka ima negativan predznak onda i samo onda kad je par (i, j) inverzija u permutaciji p. Dakle, vrijednost navedenog produkta je jednaka 1 točno onda kad je permutacija parna. □

Propozicija 3.2.7. *Za sve p i q iz S_n vrijedi* $sign\, pq = sign\, p \cdot sign\, q$

Dokaz.

$$\operatorname{sign} pq = \Pi_{i<j} \frac{pq(j) - pq(i)}{j - i} = \Pi_{i<j} \frac{p(q(j)) - p(q(i))}{q(j) - q(i)} \Pi_{i<j} \frac{q(j) - q(i)}{j - i}.$$

Preostaje primijetiti, argumentirajući kao u prethodnom dokazu, da je

$$\Pi_{i<j} \frac{p(q(j)) - p(q(i))}{q(j) - q(i)} = \Pi_{i<j} \frac{p(j) - p(i)}{j - i} = \operatorname{sign} p.$$

□

Korolar 3.2.8. *Za svaku permutaciju $p \in S_n$ vrijedi* $sign\, p = sign\, p^{-1}$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi direktno iz $pp^{-1} = id$ i prethodne propozicije. □

Uzmimo proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, te proizvoljne i, j takve da je $1 \leq i < j \leq n$. Definirajmo permutaciju p formulom

$$p(k) = \left\{ \begin{array}{ll} k, & k \neq i, j \\ j, & k = i \\ i, & k = j \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{array} \right).$$

Svaka permutacija ovog tipa naziva se transpozicija. Transpoziciju općenito možemo označiti s $p(i \leftrightarrow j)$.

Propozicija 3.2.9. *Svaka transpozicija je neparna permutacija.*

Dokaz. Trebamo pokazati da je broj inverzija u svakoj transpoziciji neparan. Uzmimo proizvoljnu transpoziciju

$$p = p(i \leftrightarrow j) = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{array} \right).$$

Ako je $j = i + 1$, jasno je da je $I(p) = 1$ jer jedina inverzija u p je par $(i, i + 1)$.

U općem slučaju stavimo $j = i + r$. Primijetimo da se između i i $j = i + r$ nalazi točno $r - 1$ elemenata skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Sad je jasno da transpoziciju $p(i \leftrightarrow i + r)$ možemo realizirati kao kompoziciju od $2r - 1$ transpozicija oblika $p(s \leftrightarrow s + 1)$. (Najprije s $r - 1$ uzastopnih zamjena "dovedemo" i ispred $i + r$, a zatim s r uzastopnih zamjena $i + r$ "pomaknemo unatrag" ispred $i + 1$.)

Dakle, p je kompozicija od neparnog broja $(2r-1)$ neparnih permutacija. Primjenom *propozicije 3.2.7* sada slijedi da je i p neparna. $\square$

Sada smo spremni uvesti determinantu kvadratne matrice.

Definicija 3.2.10. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Determinanta matrice A označava se s $\det A$ i definira s

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}.$$

Uočimo prvo da je determinanta definirana samo za kvadratne matrice i da je $\det A$ skalar. Spomenimo odmah i da se determinanta matrice $A = [a_{ij}] \in M_n$ ponekad označava i kao $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Determinanta matrice A je, dakle, definirana kao konačna suma pri čemu se sumacija vrši po permutacijama od n elemenata. Zato imamo $n!$ pribrojnika; svaka permutacija p generira član $(-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$ koji se naziva osnovni sumand (pridružen permutaciji p ili generiran permutacijom p). Predznak tog sumanda je upravo predznak (signum) dane permutacije. Na primjer, ako za p uzmemo identičnu permutaciju $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, pridruženi osnovni sumand je $(-1)^0 a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$; dakle, umnožak elemenata na dijagonali.

Primijetimo da se u svakom osnovnom sumandu nalazi po jedan i samo jedan koeficijent iz svakog retka matrice A. Također, jer je svaka permutacija $p \in S_n$ bijekcija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na sebe sama, svaki osnovni sumand sadrži jedan i samo jedan koeficijent iz svakog stupca od A.

Ako je $n = 1$ determinanta je, očito, trivijalna funkcija: $\det(a) = a$.

Za $n = 2$ imamo samo dvije permutacije u S_2; to su $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. S obzirom na to da je id parna, a p neparna, očito je da za svaku matricu drugog reda imamo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Već kad je $n = 3$, račun postaje kompliciraniji. S_3 ima šest elemenata: $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, od kojih su id, p_3 i p_4 parne, a ostale tri neparne. Zato je, za svaku matricu trećeg reda, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$a_{13}a_{22}a_{31}$.

Već i iz ovih jednostavnih primjera je jasno da operiranje s definicijom determinante nije lagano. Kad bismo, na primjer, izravno iz definicije trebali izračunati determinantu matrice petog reda, imali bismo $5! = 120$ osnovnih sumanada. Prva nam je zadaća, dakle, naći lakše i efikasnije metode za računanje determinanti. Započnimo s jednim važnim posebnim slučajem.

Propozicija 3.2.11. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ proizvoljna donjetrokutasta kvadratna matrica. Tada je $\det A = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.*

Dokaz. Po definiciji je (usp. *primjer 2.3.5*) $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$, što znači da su svi koeficijenti matrice A iznad dijagonale jednaki 0.

Uočimo da je produkt dijagonalnih elemenata zapravo osnovni sumand generiran identičnom permutacijom. Zato se dokaz propozicije svodi na činjenicu da za svaku permutaciju $p \in S_n$, $p \neq id$, pridruženi osnovni sumand iznosi 0.

Odaberimo proizvoljnu $p \in S_n$ i pogledajmo $p(1)$. Ako $p(1) \neq 1$, imamo $1 < p(1)$ i zato $a_{1p(1)} = 0$. Jasno je da je tada i čitav osnovni sumand pridružen ovoj permutaciji p jednak 0.

Time smo pokazali da u nastavku trebamo promatrati samo one permutacije koje zadovoljavaju $p(1) = 1$. Uzmimo jednu takvu permutaciju p i pogledajmo $p(2)$. Jer je p injekcija, ne može biti $p(2) = 1$. Mogućnosti su, dakle, $p(2) = 2$ i $p(2) > 2$. No, ako je $p(2) > 2$ onda je $a_{2p(2)} = 0$ i opet je cijeli osnovni sumand generiran ovom permutacijom jednak 0.

Netrivijalan (ne-nul) doprinos mogu dati, dakle, samo one permutacije za koje vrijedi $p(1) = 1$ i $p(2) = 2$. Sad se razmatranje analogno nastavi dalje. Jasno je da na kraju dolazimo do zaključka kako netrivijalan doprinos može dati samo identična permutacija. $\square$

Korolar 3.2.12. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$ dijagonalna matrica ($a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$). Tada je $\det A = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.*

Malom modifikacijom dokaza *propozicije 3.2.11* mogli bismo pokazati da je i determinanta svake gornjetrokutaste matrice jednaka produktu dijagonalnih koeficijenata. To će, međutim, slijediti iz iduće propozicije koja će se pokazati višestruko korisnom.

Sjetimo se da je za matricu A transponirana matrica A^t ona čiji retci su stupci matrice A. Ako je $A = [a_{ij}]$ i $A^t = [b_{ij}]$, onda vrijedi $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$. Uočimo također da je za $A \in M_n$ i $A^t \in M_n$. Prirodno je razmotriti vezu determinanti ovih dviju matrica.

Propozicija 3.2.13. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi $\det A^t = \det A$.*

Dokaz. Označimo $A = [a_{ij}]$ i $A^t = [b_{ij}]$, pritom je $b_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.
Uočimo da za osnovni sumand u $\det A$ pridružen permutaciji $p \in S_n$ vrijedi $(-1)^{I(p)} a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)} = (-1)^{I(p^{-1})} a_{p^{-1}(1)1}a_{p^{-1}(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{p^{-1}(n)n}$.

Naime, prema *korolaru 3.2.8*, prvo imamo $(-1)^{I(p)} = (-1)^{I(p^{-1})}$. Osim toga, jer je p bijekcija, postoji jedinstven $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ za koji vrijedi $p(i) = 1$. Odavde je $p^{-1}(1) = i$, pa sada faktor $a_{ip(i)}$ u osnovnom sumandu generiranom permutacijom p zapravo glasi a_{i1}, a to možemo pisati i kao $a_{p^{-1}(1)1}$.

Analogno rezoniranje primjenjuje se i na sve ostale faktore u osnovnom sumandu. Zato možemo pisati

$$\det A = \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$$

$$= \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p^{-1})} a_{p^{-1}(1)1} a_{p^{-1}(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{p^{-1}(n)n} = \text{ (jer } a_{kl} = b_{lk}\text{)}$$

$$= \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p^{-1})} b_{1p^{-1}(1)} b_{2p^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot b_{np^{-1}(n)}$$

(jer je, prema *propoziciji 3.2.3*, $p \mapsto p^{-1}$ bijekcija, sumaciju po svim $p \in S_n$ možemo provesti i tako da sumiramo po svim $p^{-1} \in S_n$)

$$= \sum_{p^{-1}\in S_n} (-1)^{I(p^{-1})} b_{1p^{-1}(1)} b_{2p^{-1}(2)} \cdot \ldots \cdot b_{np^{-1}(n)} = \text{ (supstituiramo } p^{-1} = q\text{)}$$

$$= \sum_{q\in S_n} (-1)^{I(q)} b_{1q(1)} b_{2q(2)} \cdot \ldots \cdot b_{nq(n)} = \det A^t.$$

□

Korolar 3.2.14. *Determinanta svake gornjetrokutaste matrice je produkt dijagonalnih elemenata.*

Dokaz. Uočimo da gornjetrokutasta matrica transponiranjem prelazi u donjetrokutastu, a dijagonalni koeficijenti pritom ostaju na svojim mjestima. Sada je tvrdnja očita posljedica *propozicija 3.2.13* i *3.2.11*. □

Propozicija 3.2.15. *Pomnožimo li neki redak (ili stupac) matrice A skalarom λ, za determinantu tako dobivene matrice B vrijedi $\det B = \lambda \det A$.*

Dokaz. Napomenimo najprije da se pod množenjem retka ili stupca skalarom λ podrazumijeva da se svaki koeficijent tog retka ili stupca množi s λ.

Dokažimo najprije tvrdnju za retke. Neka smo u matrici A r-ti redak množili s λ i tako dobili matricu B. Ako označimo $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ onda je $b_{ij} = a_{ij}$, $\forall i \neq r$, $\forall j$, i $b_{rj} = \lambda a_{rj}$, $\forall j$. Sada je

$$\det B = \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot b_{rp(r)} \cdot \ldots \cdot b_{np(n)}$$

$$= \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot \lambda a_{rp(r)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$$

$$= \lambda \sum_{p\in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{rp(r)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)} = \lambda \det A.$$

Uzmimo sada matricu B koja nastaje tako da r-ti stupac u A množimo skalarom λ. Uočimo da je tada B^t matrica koja nastaje tako da r-ti redak u A^t množimo s λ. Sada kombinacijom upravo dokazane tvrdnje za retke i *propozicije 3.2.13* imamo $\det B = \det B^t = \lambda \det A^t = \lambda \det A$. □

Korolar 3.2.16. *Za svaku matricu $A \in M_n$ vrijedi $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.*

Dokaz. Tvrdnja se dobiva uzastopnom primjenom prethodne propozicije (n puta). □

Propozicija 3.2.17. *Neka matrica B nastaje međusobnom zamjenom dvaju redaka (ili stupaca) u matrici $A \in M_n$. Tada je $\det B = -\det A$.*

Dokaz. Dokažimo prvo tvrdnju za stupce. Neka B nastaje iz A tako da u A zamijenimo k-ti i l-ti stupac. Ako označimo $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$, onda, za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, imamo $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{ako je} \quad j \neq k, l \\ a_{il} & \text{ako je} \quad j = k \\ a_{ik} & \text{ako je} \quad j = l \end{cases}$.

Uzmimo, konkretnosti radi, da je $k < l$ i promotrimo transpoziciju $q = q(k \leftrightarrow l) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & l & \ldots & k & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}$.

Sada uz pomoć permutacije q možemo pisati $b_{ij} = a_{iq(j)}$, $\forall i, j$, a odavde imamo:

$$\det B = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot b_{np(n)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1q(p(1))} a_{2q(p(2))} \cdot \ldots \cdot a_{nq(p(n))}$$

(iskoristimo sada da je, prema *propoziciji 3.2.9*, q neparna permutacija pa primjenom *propozicije 3.2.7* dobivamo $(-1)^{I(p)} = -(-1)^{I(q)}(-1)^{I(p)} = -(-1)^{I(qp)}$)

$$= -\sum_{p \in S_n} (-1)^{I(qp)} a_{1,qp(1)} a_{2,qp(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,qp(n)}$$

(sad, prema *propoziciji 3.2.3*, znamo da je preslikavanje $p \mapsto qp$ bijekcija sa S_n na S_n pa umjesto sumacije po svim $p \in S_n$, isti efekt možemo dobiti ako sumiramo po svim qp, $p \in S_n$)

$$= -\sum_{qp \in S_n} (-1)^{I(qp)} a_{1,qp(1)} a_{2,qp(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,qp(n)} = \text{ (supstituiramo } qp = s)$$

$$= -\sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdot \ldots \cdot a_{ns(n)} = -\det A.$$

Tvrdnja za retke sada slijedi kombinacijom upravo dokazane tvrdnje za stupce i *propozicije 3.2.13*. □

Korolar 3.2.18. *Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka retka (ili stupca), onda je $\det A = 0$.*

Dokaz. Zamjenom tih dvaju jednaka redaka (stupaca) $\det A$ će ostati jednaka (jer dobivamo jednaku matricu) i, istovremeno, zbog *propozicije 3.2.17*, promijeniti predznak. Vrijedi, dakle, $\det A = -\det A$. □

Propozicija 3.2.19. *Neka matrica $B = [b_{ij}]$ nastaje iz matrice $A = [a_{ij}] \in M_n$ tako da nekom retku (stupcu) u A pribrojimo neki drugi redak (stupac) matrice A pomnožen skalarom λ. Tada je $\det B = \det A$.*

Dokaz. Napomenimo najprije da redak ili stupac pribrajamo drugom retku, odnosno stupcu tako da redom zbrajamo odgovarajuće koeficijente (one na istim matričnim mjestima, tj. s istim indeksima).

Dokažimo najprije tvrdnju za retke. Zamislimo da smo s-tom retku pribrojili r-ti redak pomnožen s λ. Ovdje je, za sve $j = 1, 2, \ldots, n$, $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{ako je} \quad i \neq s \\ a_{sj} + \lambda a_{rj} & \text{ako je} \quad i = s \end{cases}$. Sada je

$$\det B = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot b_{np(n)}$$

$$= \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{s-1,p(s-1)} (a_{sp(s)} + \lambda a_{rp(s)}) \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$$

(primjenom zakona distribucije u polju ovo možemo rastaviti u dvije sume)

$$= \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)} + \lambda \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{rp(r)} \cdot \ldots \cdot a_{rp(s)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$$

$$= \det A.$$

Naime, druga suma ispred zadnje jednakosti iznosi 0 jer ta suma predstavlja determinantu matrice s dva jednaka retka.

Kao i prije, odgovarajuća tvrdnja za stupce dobiva se kombinacijom upravo dokazane tvrdnje za retke i *propozicije 3.2.13*. □

Kombiniranom primjenom prethodnih propozicija možemo relativno efikasno izračunati determinantu svake matrice.

Definicija 3.2.20. Neka je $A \in M_{mn}$. Elementarne transformacije matrice A (ili nad matricom A) su:

(I) međusobna zamjena dvaju redaka (stupaca);
(II) množenje nekog retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$;
(III) pribrajanje nekom retku (stupcu) drugog retka (stupca) prethodno pomnoženog skalarom λ.

Uočimo najprije da smo elementarne transformacije definirali za matrice bilo kojeg tipa. U ovom kontekstu, kad računamo determinante, ograničit ćemo se, naravno, samo na kvadratne matrice.

Prethodno dokazane tvrdnje pokazuju da je lako pratiti posljedice po determinantu polazne matrice ukoliko nad njom vršimo elementarne transformacije. Ukratko: pri transformaciji (I) determinanta mijenja predznak, pri transformaciji (II) determinanta se množi (tim istim) skalarom λ, a primjenom transformacije (III) determinanta se ne mijenja.

Sada je ideja spretno kombinirati elementarne transformacije s namjerom da zadanu matricu svedemo na trokutasti oblik; znamo da će determinanta tako dobivene matrice biti samo produkt elemenata na dijagonali.

O općoj strategiji primjene elementarnih transformacija s namjerom da se polazna matrica svede na trokutasti oblik detaljno ćemo govoriti u idućoj točki. Za sada pogledajmo kako to funkcionira na jednostavnom primjeru:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ (zamijenimo 1. i 3. redak) } = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(1. redak množimo s -1 i dodajemo 2. retku, nakon toga 1. redak množimo s -2 i dodajemo 3. retku)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \text{ (zamijenimo 2. i 3. redak) } = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{(2. redak množimo s 2 i dodajemo 3. retku)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} = 16.$$

Slično bismo postupali i kad bismo računali determinante višeg reda.

Prethodni primjer pokazuje jednu metodu računanja determinanti. Postoje i druge tehnike kojima se može izračunati determinanta zadane matrice, bez izravnog pozivanja na definiciju. Najvažnija je, bez sumnje, Laplaceova formula.

Promotrimo ponovno definicionu formulu za determinantu:

$$\det [a_{ij}] = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}.$$

Pretpostavimo da je $n \geq 2$, fiksirajmo neki, npr. i-ti redak i pogledajmo faktor u svakom osnovnom sumandu koji se nalazi u i-tom retku; to je $a_{ip(i)}$. Ovisno o tome što je $p(i)$, taj je koeficijent u prvom, drugom, ili, općenito, u j-tom stupcu matrice A. Za sve one permutacije $p \in S_n$ za koje je $p(i) = 1$, taj faktor će glasiti a_{i1}. Ukoliko grupiramo zajedno sve osnovne sumande koji potječu od permutacija p sa svojstvom $p(i) = 1$, iz svih tih sumanada ćemo očito moći izlučiti faktor a_{i1}. Slično bismo mogli razmišljati i dalje.

Uočimo da za odabrani i možemo pisati $S_n = \cup_{j=1}^n \{p \in S_n : p(i) = j\}$, pri čemu je ova unija disjunktna. Zato sumu iz definicije determinante možemo zapisati na sljedeći način:

$$\det [a_{ij}] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p \in S_n \\ p(i) = j}} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{ij} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\sum_{\substack{p \in S_n \\ p(i)=j}} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i-1,p(i-1)} a_{i+1,p(i+1)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)} \Big).$$

Definiramo li, za $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$A_{ij} = \sum_{\substack{p \in S_n \\ p(i)=j}} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i-1,p(i-1)} a_{i+1,p(i+1)} \cdot \ldots \cdot a_{np(n)},$$

možemo pisati

$$\det [a_{ij}] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Izrazi A_{ij} zovu se algebarski komplementi ili kofaktori matričnih koeficijenata a_{ij}.

Prethodnu formulu obično iskazujemo tako da kažemo kako smo determinantu razvili po njezinom i-tom retku. Primijetimo da je formula izvedena za proizvoljan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, no progres u odnosu na definiciju determinante je samo prividan: sve dok ne dobijemo jednostavnu i efikasnu formulu za izračunavanje algebarskih komplemenata, dotle prethodna formula predstavlja tek naznatno modificiranu definiciju determinante.

Teorem 3.2.21. *(Laplaceov razvoj determinante) Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$, $n \geq 2$. Tada je*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n, \ \ i \ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \ \forall j = 1, 2, \ldots, n,$$

pri čemu za sve i, j, vrijedi $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, a Δ_{ij} je determinanta matrice $n-1$. reda koja nastaje tako da iz matrice A uklonimo i-ti redak i j-ti stupac.

Obje formule se zovu Laplaceov razvoj. Uočimo da se u prvoj formuli radi o razvoju po i-tom retku (jer u prvoj formuli indeks i je fiksan i svi koeficijenti a_{ij} i njihovi algebarski komplementi A_{ij} pod znakom sume pripadaju i-tom retku), a teorem tvrdi da ta jednakost vrijedi za svaki i.

Analogno, druga formula predstavlja razvoj determinante po j-tom stupcu, pri čemu za j možemo odabrati bilo koji element skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Pogledajmo primjer: determinantu matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ izračunat ćemo razvojem po drugom retku: $\det A = 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2(-2) + 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 4.$

Očito je da se Laplaceovim razvojem računanje determinante n-tog reda svodi na računanje n determinanti Δ_{ij} koje su $n-1$. reda. Na prvi pogled, pojednostavnjenje u odnosu na definiciju možda i nije veliko, no sada rekurzivno možemo nastaviti dalje i svaki od algebarskih komplemenata A_{ij}, odnosno determinanti Δ_{ij}, izračunati ponovnom primjenom Laplaceova razvoja snižavajući opet red determinante. Primjena je osobito spretna ukoliko determinantu razvijamo po retku ili stupcu u kojem su mnogi koeficijenti jednaki 0 - jer tada, očito, algebarske komplemente ne treba ni računati. U tom smislu je najefikasnije Laplaceov razvoj primjenjivati u kombinaciji s elementarnim transformacijama. Za ilustraciju, izračunajmo determinantu matrice iz prethodnog primjera na sljedeći način: najprije prvi stupac dodajmo drugom, zatim prvi stupac dodajmo trećem, a onda determinantu tako dobivene matrice izračunajmo Laplaceovim razvojem po prvom retku. Dobivamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 36 = 4.$$

Dokaz teorema. Dokažimo prvo formulu za razvoj po retcima. Načelno je formula $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$, već dokazana u diskusiji prije iskaza teorema. Zato preostaje samo dokazati formulu za algebarske komplemente.

Prvo ćemo to učiniti za $i = n$ i $j = n$. Treba, dakle, dokazati da je $A_{nn} = (-1)^{n+n} \Delta_{nn} = \Delta_{nn}$. Po definiciji algebarskih komplemenata imamo

$$A_{nn} = \sum_{\substack{p \in S_n \\ p(n) = n}} (-1)^{I(p)} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,p(n-1)}.$$

Međutim, izraz na desnoj strani prethodne jednakosti je upravo Δ_{nn}. Da se to zaključi treba samo uočiti da preslikavanje $p \mapsto p_{|\{1,2,\ldots,n-1\}}$ predstavlja bijekciju skupa $\{p \in S_n : p(n) = n\}$ na skup S_{n-1}, te da je parnost permutacije $p \in S_n$, za koju vrijedi $p(n) = n$, ista kao parnost njezine restrikcije na skup $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Uzmimo sada proizvoljne i, j. Izvršimo u matrici A $n - i$ uzastopnih zamjena susjednih redaka (kojima i-ti redak dovodimo na posljednje mjesto) i $n - j$ uzastopnih zamjena susjednih stupaca (nakon kojih će j-ti stupac postati posljednji u dobivenoj matrici). Tako dobivamo

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} & a_{nj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} & a_{ij} \end{bmatrix}.$$

Prema *propoziciji 3.2.17* imamo $\det B = (-1)^{(n-i)+(n-j)}\det A$, odnosno $\det A = (-1)^{i+j}\det B$. Koristeći prethodni dio dokaza, uspoređivanjem nalazimo $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Kao i mnogo puta do sada, tvrdnju za stupce dobit ćemo transponiranjem. Ovdje, a i u nekim drugim prilikama, spretnije je koristiti oznaku $\Delta(A)_{ij}$ umjesto Δ_{ij}, jer želimo naglasiti da se podmatrica čiju determinantu računamo dobiva uklanjanjem i-tog retka i j-tog stupca upravo iz matrice A.

Primijenit ćemo već dokazanu formulu za Laplaceov razvoj po j-tom retku na determinantu matrice A^t: $\det A = \det A^t = \sum_{i=1}^n [A^t]_{ji}(-1)^{j+i}\Delta(A^t)_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ij}(-1)^{j+i}\Delta(A)_{ij}$. Uočimo da smo ovdje koristili i jednakost $\Delta(A^t)_{ji} = \Delta(A)_{ij}$, a opravdanje je sljedeće: ako iz matrice A uklonimo i-ti redak i j-ti stupac, pa tako dobivenu matricu transponiramo, efekt je točno isti kao da iz A^t uklonimo j-ti redak i i-ti stupac, a *propozicija 3.2.13* jamči da se determinanta transponiranjem ne mijenja. □

Laplaceov teorem ima i donekle iznenađujući nastavak. Vidjeli smo da zbroj umnožaka koeficijenata iz nekog retka (stupca) matrice s njihovim algebarskim komplementima daje determinantu. Iduća propozicija govori o tome što će se dogoditi ako elemente nekog retka ili stupca množimo s "tuđim" algebarskim komplementima.

Propozicija 3.2.22. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n$. Tada vrijedi*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = 0,\ \forall i \neq k \ \text{ i } \ \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ik} = 0,\ \forall j \neq k.$$

Dokaz. Dokažimo najprije prvu formulu (u kojoj se množe koeficijenti i-tog retka s algebarskim komplementima koeficijenata iz k-tog retka). Uvedimo pomoćnu matricu $B \in M_n$ koja neka ima sve retke kao i matrica A, osim k-toga; u k-tom retku matrice B neka je opet prepisan i-ti redak matrice A. Kako B ima dva jednaka retka, to je $\det B = 0$. S druge strane, možemo na B primijeniti Laplaceov razvoj po njezinom k-tom retku. Tako dobivamo: $0 = \det B = \sum_{j=1}^n [B]_{kj}(-1)^{k+j}\Delta(B)_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{k+j}\Delta(B)_{kj} =$ (jer se B i A podudaraju u svim retcima osim k-toga, imamo $\Delta(B)_{kj} = \Delta(A)_{kj}$) $= \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{k+j}\Delta(A)_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj}$.

Druga tvrdnja se lako dobiva iz ove, upravo dokazane i *propozicije 3.2.13.* □

Definicija 3.2.23. Neka je $A \in M_n$. Adjunkta matrice A je matrica $\widetilde{A} = [x_{ij}]$, pri čemu je $x_{ij} = A_{ji}$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Adjunkta kvadratne matrice A je, dakle, transponirana matrica algebarskih komplemenata originalne matrice A. Na primjer, za $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ lako nalazimo da je $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Korolar 3.2.24. *Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$.*

Dokažimo prvo $A\widetilde{A} = (\det A)I$. Treba zapravo vidjeti da u matrici $A\widetilde{A}$ svi izvandijagonalni koeficijenti iščezavaju i da svi dijagonalni iznose $\det A$. Označimo opet $A = [a_{ij}]$ i $\widetilde{A} = [x_{ij}]$, $x_{ij} = A_{ji}$. Uzmimo proizvoljne indekse i, k. Sada je $(A\widetilde{A})_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}$. Ako je $k = i$, imamo upravo Laplaceov razvoj po i-tom retku pa je rezultat $\det A$. Ako je pak $k \neq i$, onda nam prva jednakost iz prošle propozicije kaže da je rezultat 0.

Jednakost $\widetilde{A}A = (\det A)I$ dokazuje se analogno, korištenjem Laplaceova razvoja po stupcima i druge jednakosti iz prethodne propozicije. $\square$

Pokazat će se da je prethodni korolar jedan od važnih koraka u opisu regularnih matrica. No, prije nego što se vratimo regularnim matricama, dokazat ćemo još jedan klasičan teorem o determinantama.

Lako je utvrditi da determinanta nije aditivna funkcija, tj. općenito ne vrijedi $\det(A + B) = \det A + \det B$ za $A, B \in M_n$. Ne vrijedi ni $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ za $\lambda \in \mathbb{F}$ i $A \in M_n$ za $n > 1$ (usp. *korolar 3.2.16*). S obzirom na to da je M_n algebra, možemo također pitati kako se determinanta ponaša s obzirom na množenje matrica. Za razliku od zbrajanja i množenja skalarom, ovdje odgovor nipošto nije očit jer u izrazu $\det(AB)$ imamo posla sa zamršenom operacijom množenja matrica i još zamršenije definiranom determinantom. Tim je neočekivanija činjenica da je determinanta multiplikativno preslikavanje, tj. da vrijedi $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\forall A, B \in M_n$. Dokažimo prvo sam po sebi koristan pomoćni rezultat.

Lema 3.2.25. *Neka su $X, Y \in M_n$, $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}$ blok-matrice pri čemu je $n \geq 2$, $A \in M_k$, $B \in M_{n-k}$, $C \in M_{k,n-k}$, $D \in M_{n-k,k}$, $1 \leq k < n$. Tada je $\det X = \det A \cdot \det B$ i $\det Y = \det A \cdot \det B$.*

Blok-matricama se nećemo baviti sustavno; stoga ih niti nećemo formalno definirati, nego ćemo ih shvaćati intuitivno. Općenito, kad se za to ukaže potreba, matricu možemo na prikladan način razdijeliti na blokove i promatrati svojstva tih "podmatrica". Tvrdnja leme se u tom svjetlu može interpretirati na sljedeći način: ako neku kvadratnu matricu uspijemo razdijeliti na blokove, s tim da dijagonalni blokovi budu kvadratne matrice (ali ne nužno istog tipa), te da bar jedan od izvandijagonalnih blokova bude nulmatrica, onda je determinanta polazne matrice umnožak determinanti matrica na dijagonalnim mjestima.

Uočimo da je, općenito, $k \neq n - k$ pa izvandijagonalni blokovi ne moraju biti kvadratne matrice.

Promotrimo slučaj $n = 2$. Ovdje je jedina mogućnost razdiobe na blokove $k = n - k = 1$ i ovdje su blokovi u stvari matrice prvog reda. Ako je riječ o matricama kao u iskazu leme, onda imamo $X = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$ i $Y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ d & b \end{bmatrix}$. Kako je $\det X = \det Y = ab$, i kako za svaku matricu prvog reda $[m]$ po definiciji determinante vrijedi $\det[m] = m$, vidimo da je u ovom slučaju tvrdnja leme točna.

Dokaz leme. Promotrimo najprije blok matrice oblika $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_n$. Dokaz provodimo indukcijom po n (dakle, po redu matrice X).

Bazu indukcije čini slučaj $n = 2$, a upravo smo u komentaru prije dokaza vidjeli da je tada tvrdnja leme točna.

Pretpostavimo da je tvrdnja leme točna za svaku gornjetrokutastu blok-matricu reda $n-1$ pri čemu su dijagonalni blokovi kvadratne matrice (reda k, odnosno $n-1-k$, za $1 \leq k \leq n-2$), a blok u lijevom donjem uglu je nulmatrica.

Uzmimo matricu $X \in M_n$ kao u iskazu leme; $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $A \in M_k$, $B \in M_{n-k}$, $C \in M_{k,n-k}$, $1 \leq k < n$.

Pogledajmo najprije rubne slučajeve $k = 1$ i $k = n-1$. Ako je $k = 1$, blok u lijevom gornjem uglu je skalar (matrica prvog reda (a)), u ostatku prvog stupca su nule i tvrdnju dobivamo primjenom Laplaceova razvoja za $\det X$ po prvom stupcu. Sasvim analogno, ako je $k = n-1$, blok u desnom donjem kutu je matrica prvog reda (b) i tvrdnja izlazi primjenom Laplaceova razvoja za $\det X$ po posljednjem, n-tom retku.

Pretpostavimo sada da je $2 \leq k \leq n-2$. Determinantu matrice

$$X = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & c_{11} & \dots & c_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & c_{k1} & \dots & c_{k,n-k} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-k,1} & \dots & b_{n-k,n-k} \end{bmatrix}$$

izračunat ćemo Laplaceovim razvojem po prvom retku:

$$\det X = a_{11}(-1)^{1+1}\Delta(X)_{11} + \ldots + a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta(X)_{1k} +$$

$$c_{11}(-1)^{1+k+1}\Delta(X)_{1,k+1} + \ldots + c_{1,n-k}(-1)^{1+n}\Delta(X)_{1n}.$$

Preostaje izračunati poddeterminante $\Delta(X)_{1j}$. Za $1 \leq j \leq k$ možemo direktno primijeniti pretpostavku indukcije: lijevi gornji blok je ovdje matrica iz M_{k-1} koja nastaje iz bloka A uklanjanjem prvog retka i j-tog stupca. Dobivamo $\Delta(X)_{1j} = \Delta(A)_{1j} \cdot \det B$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Ako pak računamo $\Delta(X)_{1j}$ za $j > k$ onda u lijevom gornjem kutu imamo matricu (koja je nastala iz originalnog bloka A) s $k-1$ redaka i k stupaca. Da bismo primijenili pretpostavku indukcije, u determinanti $\Delta(X)_{1j}$ koja je $n-1$. reda organizirat ćemo drugačiju razdiobu na blokove. U spomenuti blok u lijevom gornjem kutu pridodat ćemo još jedan redak te time gornji lijevi blok učiniti kvadratnom $k \times k$ matricom. Primijetimo da smo time i donji desni blok učinili kvadratnom matricom (ta sada ima $n-k-1$ redaka i $n-k-1$ stupaca). Sada ponovno možemo primijeniti pretpostavku indukcije. Odmah se vidi da je $\Delta(X)_{1j} = 0$ za sve $j > k$ jer je zadnji redak matrice u lijevom gornjem bloku nulredak.

Na ovaj način prethodna formula prelazi u

$$\det X = a_{11}(-1)^{1+1}\Delta(A)_{11} \cdot \det B + \ldots + a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta(A)_{1k} \cdot \det B =$$

$$\det B \cdot (a_{11}(-1)^{1+1}\Delta(A)_{11} + \ldots + a_{1k}(-1)^{1+k}\Delta(A)_{1k}) = \det A \cdot \det B.$$

Drugu tvrdnju leme mogli bismo dokazati analogno. Alternativno, može se uočiti da donjetrokutasta blok-matrica transponiranjem prelazi u gornjetrokutastu blok-matricu; zato druga tvrdnja slijedi kombiniranom primjenom prethodno dokazane tvrdnje i *propozicije 3.2.13.* □

Teorem 3.2.26. *(Binet-Cauchy) Za sve $A, B \in M_n$ vrijedi $det(AB) = det A \cdot det B$.*

Dokaz. Stavimo $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$. Prema prethodnoj lemi imamo

$$\det A \cdot \det B = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

(zamijenimo 1. stupac s $n+1$., 2. stupac s $n+2$., ... , n-ti stupac s $2n$-tim)

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ b_{11} & \ldots & b_{1n} & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}$$

(sad ćemo primijeniti elementarnu transformaciju (III) koja ne mijenja determinantu: $n+1$. redak pomnožimo s a_{11} i dodajemo 1. retku, $n+2$. redak pomnožimo s a_{12} i dodajemo 1. retku, ..., $2n-ti$ redak pomnožimo s a_{1n} i dodajemo 1. retku)

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \ldots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \\ b_{11} & \ldots & b_{1n} & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix}$$

(sada $n+1$. redak pomnožimo s a_{21} i dodajemo 2. retku, $n+2$. redak pomnožimo s a_{22} i dodajemo 2. retku, ... , $2n$-ti redak pomnožimo s a_{2n} i dodajemo 2. retku)

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{kn} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n1} & \dots & a_{nn} \\ b_{11} & \dots & b_{1n} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

(analogno nastavljamo dalje te nakon još $n-2$ koraka konačno dobivamo)

$$= (-1)^n \det \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -I \end{vmatrix} \text{ (ponovno primijenimo lemu)}$$

$$= (-1)^n \det(AB) \cdot (-1)^n = \det(AB).$$

$\square$

Ovime smo kompletirali pregled najvažnijih svojstava determinante. Sada smo spremni vratiti se proučavanju regularnih matrica i odgovoriti na dva pitanja s kraja prethodne točke. Sljedeći teorem daje oba odgovora.

Teorem 3.2.27. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $\det A \neq 0$. U tom slučaju je inverzna matrica A^{-1} dana formulom $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$. Još vrijedi $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.*

Dokaz. Neka je A regularna. Po definiciji, tada postoji inverzna matrica $A^{-1} \in M_n$ za koju vrijedi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Kad na jednakost $AA^{-1} = I$ primijenimo determinantu dobivamo $\det(AA^{-1}) = \det I = 1$, a odavde je, prema *Binet-Cauchyjevom teoremu*, $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$. Nužno je, dakle, $\det A \neq 0$. Osim toga, posljednja jednakost pokazuje da za determinantu inverzne matrice vrijedi $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\det A \neq 0$. Prema *korolaru 3.2.24* imamo $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (\det A)I$. Kako je $\det A \neq 0$, ovu jednakost možemo pomnožiti s $\frac{1}{\det A}$. Tako dobivamo (usput koristimo i *korolar 3.1.5(3)*) $A(\frac{1}{\det A}\widetilde{A}) = (\frac{1}{\det A}\widetilde{A})A = I$. Po definiciji, ovo znači da je matrica A regularna a zbog jedinstvenosti inverza (*napomena 3.1.9(a)*), slijedi $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$. $\square$

Primjer. Matrica $A = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ je regularna jer je $\det A = 7$. Kako je $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$, prethodni teorem jamči da je $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$.

3.3. **Rang.**

U prošloj točki smo pokazali da regularne matrice možemo karakterizirati pomoću determinante. Rang matrice je još jedan koncept prikladan za prepoznavanje regularnih matrica i računanje njihovih inverza. Rang je, međutim, za razliku od determinante, definiran za sve matrice (ne nužno kvadratne), što ga čini važnim tehničkim sredstvom i u širem kontekstu.

Definicija 3.3.1. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i neka su $S_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, S_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m1}(\mathbb{F})$ njezini stupci. Rang matrice A, $r(A)$, definira se formulom $r(A) = \dim\,[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$.

Napomena 3.3.2. (a) Ponekad se kaže da je skup $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ stupčana reprezentacija matrice $A \in M_{mn}$. Uočimo da je $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ sadržan u prostoru jednostupčanih matrica s m redaka, te je zato $[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}] \leq M_{m1}$. Odavde zaključujemo da za sve $A \in M_{mn}$ vrijedi $r(A) \leq m$.

U drugu ruku, po definiciji linearne ljuske, $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ je sustav izvodnica za potprostor $[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$ pa je zato, prema *korolaru 2.2.22*, $r(A) = \dim\,[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}] \leq n$.

Tako vidimo da za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi $r(A) \leq m$ i $r(A) \leq n$; dakle, $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

(b) Kako stupci matrice A čine sustav izvodnica za $[\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$ i kako se svaki sustav izvodnica može reducirati do baze (*propozicija 2.2.13*), to vidimo da je rang matrice zapravo broj njezinih linearno nezavisnih stupaca. Često se i ova opisna formulacija uzima za definiciju ranga.

(c) Za razliku od determinante, rang je funkcija koja poprima isključivo cjelobrojne vrijednosti. Još uočimo da je nulmatrica jedina matrica ranga 0. Također se odmah vidi da za jediničnu matricu $I \in M_n$ vrijedi $r(I) = n$.

Rang je, dakle, broj linearno nezavisnih stupaca u danoj matrici. Vidjet ćemo i u drugim prilikama da stupci matrice imaju u teoriji važniju ulogu od redaka. No nije nekorisno ponekad promotriti i sporedne objekte i sporedne uloge. Možemo se, na primjer, ovdje pitati i koliko nezavisnih redaka ima dana matrica. Indikativna je pritom diskusija 2×2 sustava linearnih jednadžbi provedena u prvom poglavlju.

Pogledajmo matricu koeficijenata $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ sustava linearnih jednadžbi $\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}$. Njezin rang može biti 0, 1, ili 2. Slučaj u kojem je rang 0 odmah možemo isključiti iz razmatranja jer tada je to nulmatrica i pripadajući sustav jednadžbi je u tom slučaju nezanimljiv (trivijalan). Pretpostavimo da rang matrice A iznosi 1. Po definiciji, to znači da su stupci ove matrice linearno zavisni, tj. da postoji skalar λ takav da je $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. U našoj vektorskoj intepretaciji sustava ovo znači da su radijvektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni (gdje je $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$) te stoga sustav ili nema rješenja, ili je rješenja beskonačno mnogo. No isti zaključak onda mora proizići i iz analitičko-geometrijske interpretacije. To znači da jednadžbe sustava definiraju paralelne pravce, a to je moguće samo tako da koeficijenti a_1, b_1 i a_2, b_2 budu proporcionalni kao uređeni parovi. No, posljednji zaključak upravo znači da su retci matrice A linearno zavisni, pa broj linearno nezavisnih redaka u A također iznosi 1.

Analogno bismo rezonirali i kad bi rang matrice A iznosio 2 i zaključili da su i retci u A nužno nezavisni.

Na ovaj način zaključujemo: svaka matrica $A \in M_2$ ima jednak broj linearno nezavisnih redaka i stupaca. To, naravno, nije slučajno.

Teorem 3.3.3. *Neka je rang matrice $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ jednak r. Tada i broj linearno nezavisnih redaka u A iznosi r.*

Dokaz. Označimo stupce od A sa $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Prema pretpostavci, $r(A) = \dim [\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}] = r$. Pokazat će se da nije smanjenje općenitosti pretpostavimo li da je skup $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ linearno nezavisan. Tada je, posebno, svaki daljnji stupac matrice A linearna kombinacija ovih prvih r:

$$S_j = \gamma_{1j} S_1 + \gamma_{2j} S_2 + \ldots + \gamma_{rj} S_r, \ \forall j = r+1, \ldots, n. \tag{1}$$

Uvedimo matricu $\overline{A} \in M_{mr}$ čija je stupčana reprezentacija $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$. (Dakle, $\overline{A}$ nastaje iz A ispuštanjem zadnjih $n - r$ stupaca.)

Pretpostavimo da $\overline{A}$ ima točno p nezavisnih redaka. Jasno je da je $p \leq m$ (jer m je ukupni broj redaka matrice $\overline{A}$), no također je i

$$p \leq r \tag{2}$$

jer su retci matrice $\overline{A}$ elementi prostora $\mathbb{F}^r$ (retci su uređene r-torke), a u tom prostoru nezavisan skup može imati najviše r elemenata.

Ponovno neće biti smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da prvih p redaka u $\overline{A}$ čini nezavisan skup. Eksplicitno, ako retke u $\overline{A}$ označimo s $\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_m}$, onda je skup $\{\overline{R_1}, \ldots, \overline{R_p}\}$ linearno nezavisan, dok za ostale retke postoje skalari λ_{ij} takvi da vrijedi

$$\overline{R_i} = \lambda_{1i} \overline{R_1} + \lambda_{2i} \overline{R_2} + \ldots + \lambda_{pi} \overline{R_p}, \ \ i = p+1, \ldots, m. \tag{3}$$

Sada tvrdimo da identične relacije vrijede i za retke $R_1, R_2, \ldots, R_m$ matrice A:

$$R_i = \lambda_{1i} R_1 + \lambda_{2i} R_2 + \ldots + \lambda_{pi} R_p, \ \ i = p+1, \ldots, m. \tag{4}$$

Da bismo dokazali ovih $m-p$ jednakosti, fiksirajmo proizvoljan i, $p+1 \leq i \leq m$. Gledajući element po element moramo vidjeti da vrijedi

$$a_{ij} = \lambda_{1i}a_{1j} + \lambda_{2i}a_{2j} + \ldots + \lambda_{pi}a_{pj}, \ \forall j = 1, 2, , \ldots, n. \tag{5}$$

Za $j = 1, 2, \ldots, r$, međutim, nemamo što dokazivati - točno to nam govori jednakost (3) kad je raspišemo po elementima redaka. Uzmimo zato $j > r$. Najprije iz (1) čitamo $a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \gamma_{kj}a_{ik}$ = (koristeći (3)) = $\sum_{k=1}^{r} \gamma_{kj}(\sum_{l=1}^{p} \lambda_{li}a_{lk})$. Preostaje pokazati da je i desna strana jednakosti (5) jednaka dobivenom izrazu.

Zaista, ako iskoristimo (1), desnu stranu od (5) možemo pisati u obliku $\sum_{l=1}^{p} \lambda_{li}a_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \lambda_{li}(\sum_{k=1}^{r} \gamma_{kj}a_{lk})$.

Time smo dokazali relacije (4). Iz (4) čitamo da A ima najviše p nezavisnih redaka. Ako broj nezavisnih redaka u A označimo s t, vrijedi, dakle, $t \leq p$. Pogotovo je tada, prema (2), $t \leq r$.

Kako je matrica A bila proizvoljno odabrana, dobivena nejednakost vrijedi za sve matrice. Posebno, ako tu nejednakost primijenimo i na A^t, dobivamo $r \leq t$. Zato je $t = r$. $\square$

Uočimo da smo u završnom argumentu dokaza prešutno koristili sljedeću očiglednu činjenicu: skup jednostupčanih matrica $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq M_{m1}(\mathbb{F})$ je linearno nezavisan ako i samo ako je nezavisan skup uređenih m-torki $\{x_1^t, x_2^t, \ldots, x_k^t\} \subseteq \mathbb{F}^m$.

Pitanje broja linearno nezavisnih redaka u matrici je irelevantno za samu definiciju ranga jer za rang su, po definiciji, relevantni isključivo stupci dane matrice. U tom smislu se pitanje broja nezavisnih redaka može činiti akademskim, a prethodni teorem samo usputnom primjedbom. Međutim, brzo će se pokazati da je taj teorem izrazito koristan pri efektivnom računanju ranga.

Zabilježimo najprije tvrdnju *teorema 3.3.3* u ekvivalentnom obliku koji će biti spretniji za primjenu.

Korolar 3.3.4. *Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi $r(A) = r(A^t)$.*

U pročavanju determinante bilo je korisno vidjeti kako se determinanta ponaša pri primjeni elementarnih transformacija (uvedenih u *definiciji 3.2.20*). Isto pitanje možemo postaviti i za rang.

Teorem 3.3.5. *Neka je matrica A' dobivena iz matrice $A \in M_{mn}$ primjenom neke elementarne transformacije. Tada je $r(A') = r(A)$.*

Dokaz. Dokažimo teorem najprije u slučaju kad je A' dobivena iz A nekom transformacijom stupaca. Najprije primijetimo: ako A' nastaje iz A jednom od elementarnih transformacija stupaca, onda primjenom istovrsne transformacije stupaca na A' dobivamo originalnu matricu A. Zbog toga je dovoljno dokazati da vrijedi $r(A') \leq r(A)$ (jer tada će isti zaključak primijenjen na ove dvije matrice u obrnutim ulogama dati i obrnutu nejednakost).

Označimo stupce matrica A i A' sa $S_1, \ldots, S_n$, odnosno $S_1', \ldots, S_n'$. Po definiciji ranga, treba dokazati $\dim [\{S_1', S_2', \ldots, S_n'\}] \leq \dim [\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$.

To će slijediti iz $[\{S_1', S_2', \ldots, S_n'\}] \subseteq [\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$, a za to je dovoljno vidjeti da vrijedi $S_1', S_2', \ldots, S_n' \in [\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}]$. Ovo je, međutim, trivijalna posljedica definicije elementarnih transformacija. Naime, ovisno o tome koju smo transformaciju izvršili, svaki od stupaca S_j' je ili jednak nekom S_i, ili je oblika λS_k, ili je pak oblika $S_k + \lambda S_l$.

Preostalo je dokazati tvrdnju teorema u slučaju kad A' nastaje transformacijom redaka matrice A. Uočimo da efekt $A \to A'$ možemo proizvesti i okolnim putem: $A \to A^t \to (A^t)^\natural \to ((A^t)^\natural)^t = A'$. Naznačeni koraci imaju sljedeće značenje: matricu A najprije transponiramo, nad transponiranom matricom izvedemo transformaciju stupaca koja odgovara danoj transformaciji redaka $A \to A'$ i na kraju tako dobivenu matricu $(A^t)^\natural$ opet transponiramo - očito se konačni rezultat $((A^t)^\natural)^t$ zaista podudara s A'.

Zato je $r(A') = r(((A^t)^\natural)^t)$. S druge strane, kombinacijom prethodnog korolara i prethodno dokazane tvrdnje za stupce, imamo $r(((A^t)^\natural)^t) = r((A^t)^\natural)$ $= r(A^t) = r(A)$. □

Definicija 3.3.6. Kažemo da je matrica $B \in M_{mn}$ ekvivalentna matrici $A \in M_{mn}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.

Napomena 3.3.7. Definirana relacija $\sim$ je očito relacija ekvivalencije na prostoru M_{mn}.

Neposredno iz prethodnog teorema sada slijedi:

Korolar 3.3.8. *Za $A, B \in M_{mn}$ vrijedi: $A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B)$.*

Teorem 3.3.5 i prethodni korolar daju nam praktičnu metodu za računanje ranga. Ideja je primijeniti na zadanu matricu A konačan niz elementarnih transformacija s namjerom da se dobije ekvivalentna matrica B čiji rang možemo iščitati i bez računanja.

Definicija 3.3.9. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i $r \in \{0, 1, 2 \ldots, \min\{m, n\}\}$. Matrica
$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \in M_{mn},$$
pri čemu je točno r jedinica na dijagonalnim mjestima, zove se kanonska matrica tipa $m \times n$ ranga r.

Rang matrice D_r zaista iznosi r jer prvih njezinih r stupaca očito čini linearno nezavisan skup, a ostali stupci su nulstupci.

Za ilustraciju pogledajmo prostor M_{43}. Kanonske matrice tipa 4×3 su:
$$D_0 = 0,\ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako se i naslućuje, skup kanonskih matrica u prostoru M_{mn} će biti skup predstavnika svih klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalentnosti matrica. To je sadržaj sljedećeg teorema. Međutim, dokaz tog teorema dat će nam i više: algoritam za računanje ranga proizvoljne matrice.

Teorem 3.3.10. *Neka je $A \in M_{mn}$ i $r(A) = r$. Tada je $A \sim D_r \in M_{mn}$.*

Dokaz. Ako je $A = 0$ onda je u stvari $A = D_0$, pa se nema što dokazivati.

Pretpostavimo da je $A = [a_{ij}] \neq 0$. Smijemo pretpostaviti da je $a_{11} \neq 0$ (jer, u suprotnom, primjenom transformacije (I) možemo u gornji lijevi kut matrice dovesti koeficijent različit od 0). Primijenimo transformaciju (II) (množenje s $\frac{1}{a_{11}}$) na prvi redak matrice A tako da u lijevom gornjem kutu dobijemo 1. Označimo tako dobivenu matricu s

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} \end{bmatrix}.$$

Jasno je da vrijedi $A \sim A'$. Sad ćemo sustavno primjenjivati transformaciju (III), prvo nad retcima, zatim nad stupcima matrice A' s ciljem da dobijemo matricu

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Konkretno, da bismo iz A' dobili B, treba 1. redak od A' množiti s $-a'_{21}$ i dodati 2. retku, zatim ponovno 1. redak od A' množiti s $-a'_{31}$ i dodati 3. retku, i analogno dalje. Time ćemo u prvom stupcu, od drugog retka naniže dobiti same nule. Analogni manevar sada treba provesti nad stupcima tako da i u prvom retku, od drugog stupca nadalje dobijemo nule.

Jasno je da je $A \sim A' \sim B$; posebno, ove tri matrice imaju jednake rangove. Ako je $r(A) = 1$, nužno je $b_{ij} = 0$, $\forall i, j$ (jer u protivnom bi rang matrice B bio barem 2), te je prema tome $B = D_1$ i dokaz je gotov.

Ako je $r(A) > 1$, onda je i $r(B) > 1$, pa je barem jedan od koeficijenata b_{ij} različit od 0. Nije smanjenje općenitosti ako pretpostavimo da je $b_{22} \neq 0$. Naime, primjenom transformacije (I) nad matricom B (konkretno, zamjenom 2. i i-tog retka, te 2. i j-tog stupca) možemo postići da koeficijent b_{ij} koji je različit od 0 dođe na poziciju "dva-dva". Sad nastavimo primjenjujući transformaciju (III) u istom duhu kao u prvom koraku, s namjerom da dođemo do matrice

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Opet je $B \sim C$, pa onda zbog tranzitivnosti ove relacije i $A \sim C$, te je stoga i $r(A) = r(C)$. Ako je $r(A) = 2$, jasno je da je $c_{ij} = 0$, $\forall i, j$ i zato je $C = D_2$. Ako je $r(A) > 2$, postupak nastavimo. □

Korolar 3.3.11. *Neka su $A, B \in M_{mn}$. Tada vrijedi: $A \sim B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$.*

Dokaz. Jedan smjer je već dokazan u *korolaru 3.3.8.* Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je $r(A) = r(B) = r$. Tada je, prema prethodnom teoremu, $A \sim D_r$ i $B \sim D_r$. Kako je $\sim$ simetrična i tranzitivna relacija, zaključujemo da je $A \sim B$. □

Primjer. Izračunajmo rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Najprije prvi redak dodajemo drugom, a zatim prvi redak množimo s -1 i dodajemo trećem. Tako dobivamo $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Već sada vidimo, po definiciji ranga, da je $r(A) = 2$. U praksi tako često postupamo; ako smo zainteresirani samo za rang dane matrice nije nužno doći sve do matrice D_r ako se rang može očitati i ranije.

Prethodnim rezultatima opisali smo svojstva i tehnike računanja ranga. Pogledajmo sada čemu rang matrice služi.

Vratimo se najprije na trenutak elementarnim transformacijama. Do sada smo elementarne transformacije doživljavali (i koristili) kao neku "vanjsku" intervenciju nad matricama, potpuno izvan konteksta algebarske strukture prostora M_{mn}. S filozofskog stajališta takva situacija nije poželjna, s estetskog još manje. Zato je prirodno pitati imaju li ipak elementarne transformacije i neku algebarsku interpretaciju.

Definicija 3.3.12. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Elementarne matrice n-tog reda su

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \ i,j = 1,2,\dots,n, \ i \neq j;$$

$$E_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & 1 \end{bmatrix}, \ i = 1,2,\dots,n, \ \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\};$$

$$E_{i,j,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \ i,j = 1,2,\dots,n, \ i \neq j, \ \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Napomena 3.3.13. Podrazumijevamo da je u matrici $E_{i,j,\lambda}$ skalar λ na mjestu (i,j) (pa je u navedenoj definiciji matrica $E_{i,j,\lambda}$ prikazana u slučaju kad je $j < i$).

Primijetimo da E_{ij} nastaje zamjenom i-tog i j-tog stupca (ili retka) u matrici I. Zato je, prema *propoziciji 3.2.17*, $\det E_{ij} = -1$, te je, prema *teoremu 3.2.27*, E_{ij} regularna matrica.

Iz istog su razloga i matrice $E_{i,\lambda}$ i $E_{i,j,\lambda}$ regularne. Naime, te su matrice trokutaste, pa im je determinanta jednaka produktu dijagonalnih koeficijenata. Dakle je $\det E_{i,\lambda} = \lambda \neq 0$ i $\det E_{i,j,\lambda} = 1$.

Štoviše, lako je odrediti i inverze elementarnih matrica. Vrijedi $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_{i,\lambda}^{-1} = E_{i,\frac{1}{\lambda}}$, $E_{i,j,\lambda}^{-1} = E_{i,j,-\lambda}$.

Teorem 3.3.14. *Množenjem proizvoljne matrice $A \in M_{mn}$ s elementarnim matricama s lijeve, odnosno desne strane realiziraju se elementarne transformacije nad retcima, odnosno stupcima matrice A.*

Dokaz. Najprije treba uočiti da za množenje s lijeva treba uzimati elementarne matrice iz algebre M_m, dok za množenje s desna uzimamo elementarne matrice iz M_n.

Pritom je $E_{ij}A$ matrica koja nastaje zamjenom i-tog i j-tog retka u A, $E_{i,\lambda}A$ je matrica koju dobivamo tako da i-ti redak u A množimo s λ, a umnožak $E_{i,j,\lambda}A$ je matrica koja se dobije kad se i-tom retku matrice A pribroji njezin j-ti redak pomnožen s λ.

Analogno se precizira tvrdnja o množenju matrice A elementarnim matricama s desne strane.

Sve navedene činjenice se dokazuju direktnom provjerom. □

Dosad dobivene rezultate sada ćemo primijeniti na kvadratne matrice i tako dobiti još jednu važnu karakterizaciju regularnih matrica.

Teorem 3.3.15. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $r(A) = n$. Prema *teoremu 3.3.10*, $A \sim D_n$. Kako je ovdje $D_n \in M_n$ kanonska matrica s točno n jedinica na dijagonali, zapravo je $D_n = I$. Imamo, dakle, $A \sim I$.

Po definiciji relacije $\sim$, A se može dobiti iz I primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija nad I. Prema *teoremu 3.3.14*, ako smo primijenili k transformacija nad retcima i l transformacija nad stupcima, možemo pisati $A = E_k \cdot \ldots \cdot E_2E_1IF_1F_2 \cdot \ldots \cdot F_l$, pri čemu su E_i, F_j, elementarne matrice koje realiziraju izvedene transformacije. Kako su, prema *napomeni 3.3.13*, elementarne matrice regularne, i matrica A je, kao produkt regularnih matrica, regularna.

Preostaje dokazati obrat. Tu pretpostavljamo da je matrica A regularna, a treba pokazati da je $r(A) = n$.

Pretpostavimo suprotno: neka za regularnu matricu A vrijedi $r(A) \neq n$. Kako rang matrice $A \in M_n$ ne može biti veći od n, $r(A) \neq n$ znači da je $r(A) < n$. Dakle je skup stupaca $\{S_1, \ldots, S_n\}$ matrice A linearno zavisan. Po *propoziciji 2.2.4*, postoji neki S_k koji je linearna kombinacija preostalih stupaca matrice A. Recimo da je $S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i S_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i S_i$. Izvedimo sad nad A sljedeće transformacije stupaca: pomnožimo prvi stupac s $-\lambda_1$ i dodajmo ga k-tom; pomnožimo zatim drugi stupac s $-\lambda_2$ i dodajmo ga također k-tom i analogno dalje (slijedeći prikaz stupca S_k pomoću ostalih). Tako dobivena matrica B će očito u k-tom stupcu imati same nule. Zato mora biti $\det B = 0$. Prema *propoziciji 3.2.19* tada imamo i $\det A = \det B = 0$. No, to je kontradikcija s $\det A \neq 0$ što slijedi iz pretpostavke da je A regularna i *teorema 3.2.27*. □

Iz prvog dijela dokaza opažamo da su elementarne matrice svojevrsni "atomi" iz kojih je sastavljena svaka regularna matrica. Ovu činjenicu vrijedi zabilježiti kao zasebnu tvrdnju.

Korolar 3.3.16. *Svaka regularna matrica je produkt konačnog broja elementarnih matrica.*

Sada možemo na još jedan način opisati relaciju ekvivalentnosti matrica.

Korolar 3.3.17. *Matrice $A, B \in M_{mn}$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da vrijedi $B = SAT$.*

Dokaz. Ako postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da vrijedi $B = SAT$ onda, prema prethodnom korolaru, postoje prirodni brojevi k i l i elementarne matrice $E_1, E_2, \ldots, E_k \in M_m$ i $F_1, F_2, \ldots, F_l \in M_n$ takve da vrijedi $B = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l$. Prema *teoremu 3.3.14*, odavde zaključujemo da je $A \sim B$.

Obratno, ako je $A \sim B$, onda, ponovno na temelju *teorema 3.3.14*, nalazimo elementarne matrice $E_1, E_2, \ldots, E_k \in M_m$ i $F_1, F_2, \ldots, F_l \in M_n$ takve da vrijedi $B = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l$. Sad definiramo $S = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$ i $T = F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l$. □

S teorijske točke gledišta *teoremi 3.3.15* i *3.2.27* su jednako vrijedni jer oba daju kompletnu karakterizaciju regularnih matrica. No, *teorem 3.3.15* je često spretniji za primjenu od *teorema 3.2.27*. Štoviše, uz malu modifikaciju argumenta iz dokaza dobivamo jednostavnu, tzv. Gauss-Jordanovu metodu invertiranja matrica.

Pretpostavimo da je matrica $A \in M_n$ regularna. Prema *teoremu 3.3.15*, tada je $r(A) = n$ i $A \sim I$. Matricu I možemo, dakle, dobiti elementarnim transformacijama nad matricom A. Lako se vidi da to možemo učiniti transformirajući samo retke (ili samo stupce) od A. Pretpostavimo da smo učinili tako. Prema *teoremu 3.3.14* imamo onda $I = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A$, pri čemu smo učinili t transformacija, a matrice E_i su elementarne matrice kojima su (upravo tim redom) te transformacije redaka realizirane.

Matrica $E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$ je zbog *napomena 3.3.13* i *3.1.9(d)* regularna. Zato prethodna jednakost pokazuje da su A i $E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$ jedna drugoj inverzne matrice (usp. *zadatak 10*). Vrijedi, dakle, $A^{-1} = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$, što možemo pisati i kao $A^{-1} = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 I$. Sad, međutim, u svjetlu *teorema 3.3.14*, zadnju jednakost možemo pročitati na sljedeći način: ako na matricu I primijenimo točno one iste transformacije redaka, i to u istom poretku kojima smo iz matrice A dobili I, rezultat će biti upravo A^{-1}!

U praksi nije potrebno voditi zapisnik o učinjenim transformacijama. Zadanoj matrici čiji inverz tražimo (čak i ako ne znamo unaprijed da je regularna), računat ćemo rang isključivo transformirajući njezine retke, a svaku transformaciju koju izvodimo odmah ćemo, paralelno, učiniti i nad jediničnom matricom. Izađe li da je rang dane matrice $A \in M_n$ manji od n, ovaj paralelni postupak je bio uzaludan. Ako je pak zadana matrica regularna, njezin rang je nužno jednak n, u konačno mnogo koraka prevest ćemo tu matricu u jediničnu, a paralelni konačni rezultat (tj. matrica koju smo dobili istim koracima iz I) je tada traženi inverz od A.

Primjer. Odredimo, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Formirajmo odmah "duet" od matrica A i I: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (koje smo odijelili iscrtkanom linijom) i transformirajmo retke lijeve strane (to je zadana matrica A) s namjerom da dođemo do I, a iste te tranformacije usput izvedimo i na desnoj strani.

Započet ćemo tako da prvi redak pomnožimo s -1 pa ga dodamo drugom retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

(sad zamijenimo drugi i treći redak)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \text{ (od prvog retka oduzmemo drugi) } \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

(sad od drugog retka oduzmemo treći pomnožen s 2; te prvom retku dodamo treći pomnožen s 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prethodne diskusije sada slijedi da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Identičnu tehniku možemo primijeniti i kad izvodimo samo transformacije stupaca matrice koju želimo invertirati - opravdanje je potpuno analogno maloprijašnjem objašnjenju postupka invertiranja pomoću transformacija redaka.

Naravno, rang matrice najefikasnije možemo izračunati ako kombiniramo transformacije redaka i stupaca. Tako bismo i ovdje mogli poći od činjenice da, ako je matrica A regularna, imamo (kao u prvom dijelu dokaza *teorema 3.3.15*) $I = E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l$ gdje su E_i, F_j prikladno odabrane elementarne matrice.

Odavde je $A = (E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1)^{-1} (F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l)^{-1}$, pa invertiranjem dobivamo $A^{-1} = F_1 F_2 \cdot \ldots \cdot F_l E_k \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$. Opet je dobivena formula za A^{-1}, no ne vidi se kako bi se ovo moglo jednostavno i efikasno iskoristiti za određivanje A^{-1} kao u slučaju kad transformiramo samo retke ili samo stupce.

Na kraju, vratimo se još jednom dokazu *teorema 3.3.10*, odnosno algoritmu za računanje ranga matrice.

Pretpostavimo da je A kvadratna matrica. Da bismo izračunali njezin rang, nije nužno da je elementarnim transformacijama dovedemo do kanonske matrice D_r. Za određivanje ranga je sasvim dovoljno svesti matricu A na gornjetrokutasti oblik. Pogledajmo primjer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ovdje smo u prvom koraku prvi redak množili s -2 i dodali drugom retku, a nakon toga smo prvi redak množili s -1 i dodali trećem retku. U drugom koraku smo drugi redak pomnožili s -1 i dodali trećem retku. Rang dobivene matrice, pa onda i rang polazne matrice A evidentno iznosi 3; naime, trokutasta struktura jasno pokazuje da su svi stupci linearno nezavisni.

Jednostavnom adaptacijom algoritma iz dokaza *teorema 3.3.10* svaku kvadratnu matricu možemo elementarnim transformacijama dovesti do gornjetrokutastog oblika. Štoviše, jasno je da to možemo postići isključivo transformirajući retke.

Pretpostavimo na trenutak da smo do gornjetrokutaste forme uspjeli doći bez zamjene redaka. Ako dobivenu gornjetrokutastu matricu označimo s U, onda je $U = E_k \cdot \ldots \cdot E_2E_1A$ pri čemu su sve matrice E_t, $t = 1, 2, \ldots, k$, oblika $E_t = E_{j,i,\lambda}$ jer smo koristili samo transformaciju (III). Primijetimo još da je u svim tim matricama $j < i$ zato što smo u svakom koraku određeni redak množili nekim skalarom i dodavali nekom retku ispod njega. Zato su sve korištene matrice $E_t = E_{j,i,\lambda}$, $t = 1, 2, \ldots, k$, donjetrokutaste.

Osim toga, iz jednakosti $U = E_kE_{k-1} \cdot \ldots \cdot E_2E_1A$ dobivamo $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}U$. Pritom su, zbog $E_{j,i,\lambda}^{-1} = E_{j,i,-\lambda}$, i sve matrice E_t^{-1}, $t = 1, 2, \ldots, k$, donjetrokutaste.

Lema 3.3.18. *Neka su $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in M_n$ donjetrokutaste (gornjetrokutaste) matrice. Tada je i AB donjetrokutasta (gornjetrokutasta) matrica.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju za donjetrokutaste matrice. U ovom slučaju je $a_{ij} = b_{ij} = 0, \forall i < j$. Označimo $AB = [c_{ij}]$. Uzmimo proizvoljne indekse i, j takve da je $i < j$. Treba pokazati da je $c_{ij} = 0$. Po definiciji množenja matrica imamo $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Ako je $k < j$ onda je $b_{kj} = 0$, a ako je $k \geq j$, onda je pogotovo $k > i$, pa je $a_{ik} = 0$. Dakle, za sve k je $a_{ik}b_{kj} = 0$ pa je zato i $c_{ij} = 0$.

Tvrdnja za gornjetrokutaste matrice se dokazuje slično. $\square$

Vratimo se sada prethodnoj diskusiji. Ako označimo $L = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$, onda jednakost $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}U$ možemo pisati kao $A = LU$, a matrica L je, prema prethodnoj lemi, donjetrokutasta. Prikazali smo, dakle, A kao umnožak dviju trokutastih matrica. Ovakva faktorizacija matrice A se naziva LU faktorizacija ili LU dekompozicija.

Primijetimo da svi dijagonalni koeficijenti u matrici L iznose 1. Naime, kad množimo donjetrokutaste matrice, račun iz dokaza leme (u istim oznakama) pokazuje da je $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$, što znači da u produktu na svakom dijagonalnom mjestu stoji umnožak odgovarajućih dijagonalnih koeficijenata. Kako je $L = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$ i kao svaka od matrica E_t^{-1} na dijagonali ima isključivo jedinice, slijedi i da su svi dijagonalni koeficijenti u L jednaki 1.

Dijagonalne koeficijente u matrici U označimo, redom, s $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Uvedimo sada još dvije matrice. Neka je $D \in M_n$ dijagonalna matrica $D = \begin{bmatrix} d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}$, a $U' \in M_n$ neka je gornjetrokutasta matrica s jedinicama na svim dijagonalnim mjestima i takva da vrijedi $U = DU'$ (usp. *zadatak 15*). Sada našu dekompoziciju možemo pisati u obliku $A = LDU$, pri čemu su matrice L, D i U, redom, donjetrokutasta, dijagonalna i gornjetrokutasta, a svi dijagonalni koeficijenti u matricama L i U iznose 1.

Cijela prethodna diskusija provedena je pod pretpostavkom da se zadana matrica A može svesti na gornjetrokutasti oblik bez zamjene redaka. Općenito, za svaku matricu A postoji izbor elementarnih transformacija redaka kojima se A prevodi u gornjetrokutastu matricu, no to nije uvijek moguće provesti bez zamjene redaka.

Takva je, na primjer, matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Ako u njoj od drugog i od trećeg retka oduzmemo prvi redak dobivamo $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sad se vidi da iz dobivene matrice nije moguće dobiti gornjetrokutasti oblik isključivom primjenom transformacije (III) nad njezinim retcima. Naravno, ukoliko zamijenimo drugi i treći redak, dobivamo gornjetrokutastu matricu.

U ovakvim slučajevima, kad je nužno obaviti neke zamjene redaka, možemo pretpostaviti da smo sve potrebne zamjene učinili unaprijed. Prema *teoremu 3.3.14*, to znači da na početku matricu A množimo s nekoliko (konačno mnogo) elementarnih matrica oblika E_{ij}. Lako se pokazuje da je produkt konačnog broja matrica oblika E_{ij} matrica P koja u svakom retku i u svakom stupcu ima točno jednu jedinicu, dok su na svim ostalim mjestima nule. Takve se matrice zovu permutacijske matrice. Drugačije rečeno, matrica P nastaje iz I nekom permutacijom stupaca (ili redaka); otuda i ime.

Izvršimo li, dakle, potrebne zamjene redaka unaprijed, dobit ćemo matricu PA pri čemu je P neka permutacijska matrica, a matrica PA se sada može svesti na gornjetrokutasti oblik isključivo primjenom transformacije (III) nad retcima. Iz prethodne diskusije sad zaključujemo da ovdje imamo faktorizaciju oblika $PA = LU$, odnosno $PA = LDU$.

3.4. **Zadaci.**

1. Dokažite tvrdnje (1), (2) i (3) iz *teorema 3.1.4.*
2. Za $A \in M_n$ definiramo $A^0 = I$, $A^1 = A$ i, induktivno, $A^{k+1} = A \cdot A^k$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi $A^k A^l = A^{k+l}$ i $(A^k)^l = A^{kl}$, za sve $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dokažite da je $M = \{B \in M_2(\mathbb{R}) : AB = BA\}$ potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ i odredite mu jednu bazu i dimenziju.
4. Odredite sve matrice iz M_n koje komutiraju sa svakom matricom $A \in M_n$. (Skup koji se traži se može zapisati kao $\{T \in M_n : AT = TA, \forall A \in M_n\}$, a naziva se centar algebre M_n.)
5. Pokažite da je produkt dviju gornjetrokutastih matrica također gornjetrokutasta matrica.
6. Pokažite da je inverz regularne gornjetrokutaste (donjetrokutaste) matrice također gornjetrokutasta (donjetrokutasta) matrica.
7. Neka su A i B ulančane matrice. Dokažite da je $(AB)^t = B^t A^t$.
8. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Dokažite da je tada i A^t regularna matrica i da vrijedi $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
9. Neka je $A \in M_n$ simetrična regularna matrica. Dokažite da je i matrica A^{-1} simetrična.
10. Neka za matrice $A, B \in M_n$ vrijedi $AB = I$. Dokažite da su tada i A i B regularne matrice te da vrijedi $B = A^{-1}$.
11. Trag kvadratne matrice je preslikavanje $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ definirano s $\mathrm{tr}([a_{ij}]) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Pokažite da vrijedi $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B)$ za sve skalare α i β i sve kvadratne matrice A i B.
12. Dokažite da za sve $A, B \in M_n$ vrijedi $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
13. Neka je $X = \{A \in M_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$. Pokažite da je X potprostor od M_n i odredite mu jednu bazu i dimenziju.
14. Pokažite da ne postoje matrice $A, B \in M_n$ sa svojstvom $AB - BA = I$.
15. Neka je $U \in M_n$ gornjetrokutasta matrica. Pokažite da postoje dijagonalna matrica $D \in M_n$ i gornjetrokutasta matrica U' čiji su svi dijagonalni koeficijenti jednaki 1, takve da vrijedi $U = DU'$.
16. Za $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{C})$ definira se hermitski adjungirana matrica $A^* = [b_{ij}] \in M_{nm}$ s $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j$ (gdje je $\overline{a_{ji}}$ kompleksno konjugiran broj broju a_{ji}). Dokažite da za ulančane kompleksne matrice A i B vrijedi $(AB)^* = B^* A^*$.
17. Pokažite da za svaki n iz $\mathbb{N}$ skup A_n svih parnih permutacija od n elemenata uz kompoziciju kao binarnu operaciju, čini grupu. (Grupa A_n se naziva alternirajuća podgrupa od S_n.) Nadalje, dokažite da A_n ima $\frac{1}{2}n!$ elemenata.
18. Kompletirajte dokaz *propozicije 3.2.17.*
19. Kompletirajte dokaz *korolara 3.2.24.*

20. Izračunajte $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

21. Neka je $A \in M_3$ regularna matrica, te neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Izračunajte $A(\widetilde{ABA})A$.

22. Pokažite da je adjunkta gornjetrokutaste matrice također gornjetrokutasta.

23. Pokažite da je adjunkta dijagonalne matrice također dijagonalna.

24. Neka je $A \in M_n$ singularna matrica. Dokažite da je tada i $\widetilde{A}$ singularna.

25. Neka je $A \in M_n$. Izračunajte $\det \widetilde{A}$ u ovisnosti o $\det A$.

26. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Izračunajte $\widetilde{\widetilde{A}}$.

27. Neka je $SL(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) : \det A = 1\}$. Pokažite da je množenje binarna operacija na skupu $SL(n, \mathbb{F})$, te da je $(SL(n, \mathbb{F}), \cdot)$ grupa (koja se naziva specijalna linearna grupa reda n nad poljem $\mathbb{F}$).

28. Pokažite pomoću determinante da je matrica $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ regularna i odredite joj inverz koristeći formulu iz *teorema 3.2.27.*

29. Dokažite da je $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ za $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. (Ova se determinanta naziva Vandermondeova determinanta reda n.)

30. Izračunajte inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

31. Izračunajte inverz matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \dots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

32. Izračunajte $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

33. Odredite $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

34. Izračunajte $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$.

35. Odredite inverz matrice $I - J \in M_n$ gdje je $J \in M_n$ matrica koja na svim mjestima ima jedinice.

36. Provjerite eksplicitno sve tvrdnje iz dokaza *teorema 3.3.14*.

37. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

38. Ovisno o parametru t odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & t & 1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 & -8 \\ -2 & 1 & 5 & 2t \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

39. U prostoru $\mathbb{R}^4$ zadani su vektori $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (1, 1, -1, 2)$, $a_3 = (0, -2, 1, 1)$ i $a_4 = (4, -3, 1, -1)$. Računajući rang matrice čiji su stupci (ili retci) vektori a_1, a_2, a_3, a_4 odredite je li skup $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ linearno nezavisan.

40. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

41. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

42. Za zadane matrice $B \in M_{n1}$ i $C \in M_{1n}$, $B, C \neq 0$, pokažite da je rang matrice $A = BC$ jednak 1. Obratno, pokažite da za svaku matricu $A \in M_n$ ranga 1 postoje $B \in M_{n1}$ i $C \in M_{1n}$, $B, C \neq 0$, takve da je $A = BC$.

43. Neka su A i B proizvoljne ulančane matrice. Pokažite da vrijedi $r(AB) \leq r(B)$ i $r(AB) \leq r(A)$.

44. Neka je $A \in M_{mn}$. Pod minorom matrice A reda k podrazumijevamo determinantu bilo koje kvadratne $k \times k$ podmatrice od A. (Drugim riječima, minora reda k je determinanta bilo koje matrice koja nastaje uklanjanjem $m-k$ redaka i $n-k$ stupaca iz matrice A.) Dokažite: $r(A)=k$ ako i samo ako postoji bar jedna minora od A reda k različita od 0, a sve minore od A reda većeg od k su jednake 0.

45. Odredite LU faktorizaciju matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

46. Neka je $A \in M_n$ matrica koja dopušta prelazak na gornjetrokutasti oblik primjenom elementarnih transformacija redaka, ali bez zamjene redaka. Neka je $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$ pri čemu su D_1, D_2 dijagonalne, L_1, L_2 donjetrokutaste, U_1, U_2 gornjetrokutaste, te neka su svi dijagonalni elementi u L_1, L_2, U_1, U_2 jednaki 1. Dokažite da je tada $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ i $U_1 = U_2$.

(Uputa: u jednakosti $L_2^{-1}L_1D_1 = D_2U_2U_1^{-1}$ usporedite posebno dijagonalne, posebno izvandijagonalne elemente.)

47. Neka je A simetrična matrica koja dopušta LDU dekompoziciju. Pokažite da tada jedinstvena (u smislu prethodnog zadatka) LDU dekompozicija matrice A glasi $A = LDL^t$.

4. Sustavi linearnih jednadžbi

4.1. **Rješivost i struktura skupa rješenja.**

Definicija 4.1.1. Linearna jednadžba nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednadžba oblika $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ pri čemu su $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}$.

Opći sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ sastoji se od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} . \tag{1}$$

Skalari a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$, zovu se koeficijenti sustava, a $b_1, \ldots, b_m$ slobodni članovi.

Definicija 4.1.2. Rješenje sustava (1) je svaka uređena n-torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \ldots, x_n = \gamma_n$ zadovoljava sve jednadžbe (tj. ta supstitucija sve jednadžbe prevodi u numeričke identitete).

Uz sustav (1) uobičajeno vežemo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

One se, redom, zovu matrica sustava, matrica nepoznanica, matrica slobodnih članova i proširena matrica sustava.

Uz pomoć uvedenih matrica sustav (1) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$AX = B. \tag{2}$$

Napomena 4.1.3. Sustav (1) i matrična jednadžba (2) ekvivalentni su, ne samo po zapisu, nego i u sljedećem smislu: uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ zadovoljava (1) ako i samo ako jednostupčana matrica $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ zadovoljava (2). Drugim riječima, prirodna identifikacija $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \mapsto \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$

predstavlja bijekciju skupa svih rješenja sustava (1) na skup svih rješenja matrične jednadžbe (2).

U nastavku ćemo slobodno, bez eksplicitnog referiranja na prethodnu napomenu, koristiti i (1) i (2). U ovom poglavlju želimo riješiti tri zadaće:

- naći nužne i dovoljne uvjete da bi sustav (1) bio rješiv,
- opisati skup svih rješenja sustava (1),
- naći metodu za nalaženje svih rješenja sustava (1).

Odgovor na pitanje o rješivosti općeg sustava linearnih jednadžbi dat će nam, kako je to sugerirano u uvodnom poglavlju, analiza stupaca matrice sustava. U osnovi, odgovor je sadržan u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 4.1.4. *Uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n$ je rješenje sustava (1) ako i samo ako vrijedi $B = \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2 + \cdots + \gamma_n S_n$ gdje je $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ stupčana reprezentacija matrice A.*

Dokaz. Tvrdnja izlazi direktno iz definicije operacija s matricama. □

Teorem 4.1.5. *(Kronecker-Capelli) Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako vrijedi $r(A) = r(A_p)$.*

Dokaz. Po definiciji ranga imamo $r(A) = \dim [\{S_1, \dots, S_n\}]$ i također $r(A_p) = \dim [\{S_1, \dots, S_n, B\}]$. Jasno je da vrijedi $[\{S_1, \dots, S_n\}] \leq [\{S_1, \dots, S_n, B\}]$ i zato je $r(A) \leq r(A_p)$. Sada imamo sljedeći niz ekvivalentnih tvrdnji: $r(A) = r(A_p) \Leftrightarrow [\{S_1, \dots, S_n\}] = [\{S_1, \dots, S_n, B\}] \Leftrightarrow B \in [\{S_1, \dots, S_n\}] \Leftrightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in F$ takvi da je $B = \gamma_1 S_1 + \gamma_2 S_2 + \cdots + \gamma_n S_n \Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 4.1.4*) postoji rješenje sustava (i to je upravo n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$). □

Definicija 4.1.6. Kaže se da je sustav linearnih jednadžbi (1) homogen ako vrijedi $b_1 = \cdots = b_m = 0$. Opći oblik homogenog sustava je dakle

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\cdots & & & & & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}, \tag{3}
$$

odnosno

$$AX = 0\,. \tag{4}$$

Propozicija 4.1.7. *Homogeni sustav je uvijek rješiv. Skup svih rješenja homogenog sustava* (3) *je vektorski prostor.*

Dokaz. Prva tvrdnja je trivijalna jer svaki homogeni sustav ima bar trivijalno rješenje $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \dots, \gamma_n = 0$. Primijetimo usput da se rješivost homogenog sustava jednako očito dobiva i iz prethodnog *teorema 4.1.5.*

Da bismo dokazali drugu tvrdnju dovoljno je vidjeti da je skup svih rješenja homogenog sustava (3) potprostor od $\mathbb{F}^n$ (odnosno, ekvivalentno, da je skup svih rješenja homogenog sustava zapisanog u obliku (4) potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$). Priklonimo se matričnom zapisu (4) i označimo skup svih rješenja s $\Omega \subseteq M_{n1}(\mathbb{F})$. Za $C_1, C_2 \in \Omega$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ sada, zbog distributivnosti i kvaziasocijativnosti množenja matrica i $AC_1 = AC_2 = 0$, imamo $A(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \lambda_1 AC_1 + \lambda_2 AC_2 = 0$, dakle $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \in \Omega$. □

Napomena 4.1.8. Prostor rješenja Ω homogenog sustava $AX = 0$ je uvijek konačnodimenzionalan. Ako označimo $\dim \Omega = d$, pokazat će se da vrijedi $d = n - r$ gdje je $r = r(A)$. Ovaj rezultat ćemo dobiti u sljedećoj točki kao direktnu posljedicu opisa Gaussove metode eliminacije.

Napomena 4.1.9. Uz oznaku $\dim \Omega = d$ neka je skup $\{C_1, \ldots, C_d\}$ baza prostora rješenja Ω homogenog sustava $AX = 0$. Tradicionalno, ovo se zove fundamentalni skup rješenja. Svako rješenje je sada oblika $C = \lambda_1 C_1 + \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_d C_d$ za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$. Ovo, međutim, nije nova činjenica, nego svojstvo (svake) baze (bilo kojeg) vektorskog prostora.

U opisu strukture skupa rješenja proizvoljnog nehomogenog sustava (1) (odnosno (2)) spretno je paralelno promatrati i pridruženi homogeni sustav (3) (odnosno (4)).

Propozicija 4.1.10. *Neka je dan proizvoljan sustav $AX = B$, neka je C_0 bilo koje njegovo rješenje, te neka je Ω prostor rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$. Tada je $C_0 + \Omega := \{C_0 + C : C \in \Omega\}$ skup svih rješenja sustava $AX = B$.*

Dokaz. Vrijedi, dakle, $AC_0 = B$. Jasno je da za proizvoljan $C \in \Omega$ imamo $A(C_0 + C) = AC_0 + AC = B + 0 = B$ pa je $C_0 + C$ rješenje sustava $AX = B$. Obratno, pretpostavimo da je C_1 neko rješenje sustava $AX = B$, dakle, $AC_1 = B$. Oduzmimo od toga jednakost $AC_0 = B$. Dobivamo $A(C_1 - C_0) = 0$, što pokazuje da je $C_1 - C_0$ rješenje pridruženog homogenog sustava. Zato postoji $C \in \Omega$ takav da $C_1 - C_0 = C$, tj. $C_1 = C_0 + C$. □

Napomena 4.1.11. (a) C_0 iz teksta prošle propozicije zovemo partikularnim rješenjem. Ukoliko opet, za $d > 0$, s $\{C_1, \ldots, C_d\}$ označimo bazu za Ω onda je proizvoljno rješenje sustava oblika $C_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i C_i$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{F}$. Ako je $d = 0$ onda je $\Omega = \{0\}$ i oba sustava, $AX = B$ i $AX = 0$, imaju jedinstveno rješenje.

(b) Uočimo da je skup svih rješenja proizvoljnog sustava $AX = B$ linearna mnogostrukost $C_0 + \Omega$; dakle, element kvocijentnog prostora $\mathbb{F}^n/\Omega$ čiji reprezentant je partikularno rješenje C_0. Kako se svaka klasa ekvivalencije može reprezentirati bilo kojim svojim elementom, to u ovom slučaju vidimo da za reprezentant klase (tj. partikularno rješenje) zaista možemo odabrati proizvoljan vektor C_0 takav da je $AC_0 = B$.

4.2. **Gaussova metoda eliminacije.**

Gaussova metoda eliminacije je algoritam kojim rješavamo sustave linearnih jednadžbi. Kako smo vidjeli u prethodnoj točki, to se svodi na nalaženje jednog partikularnog rješenja i na određenje baze prostora rješenja pridruženog homogenog sustava. Jedno od vrijednih svojstava Gaussove metode je činjenica da u primjeni nije potrebno unaprijed utvrđivati je li zadani sustav uopće rješiv. Naime, Gaussova metoda u svojoj osnovi ima računanje ranga matrice sustava te će eventualna nerješivost sustava (tj. činjenica da matrica sustava i proširena matrica sustava nemaju isti rang) tijekom izvođenja algoritma postati očita.

Opis Gaussove metode započinjemo jednom "strateškom" definicijom.

Definicija 4.2.1. Dva sustava linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.

U pozadini ove definicije je ideja da od danog sustava prijeđemo na neki ekvivalentan, ali što jednostavniji, tako da mu rješenja budu lako dokučiva. Uočimo da broj jednadžbi ovdje nije relevantna činjenica. To je i intuitivno jasno, jer danom sustavu uvijek možemo dodati neku od njegovih jednadžbi ili njihovih kombinacija čime se broj jednadžbi mijenja, a skup rješenja evidentno ostaje isti. U drugu ruku, uočimo li u danom sustavu da su npr. dvije jednadžbe proporcionalne, očito je da jednu od njih možemo izostaviti bez ikakvih posljedica.

Prethodna definicija odmah otvara pitanje prepoznavanja, odnosno produciranja sustava koji su ekvivalentni zadanome.

Definicija 4.2.2. Elementarne transformacije sustava linearnih jednadžbi su:

(I) zamjena poretka dviju jednadžbi,
(II) množenje neke jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$,
(III) pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom λ nekoj drugoj jednadžbi sustava.

Propozicija 4.2.3. *Primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi dobiva se ekvivalentan sustav.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da su sustavi $AX = B$ i $A_1X = B_1$ ekvivalentni, gdje ovaj drugi nastaje iz prvog primjenom samo jedne od gornjih transformacija. Za to je pak dovoljno vidjeti da je proizvoljno rješenje od $AX = B$ ujedno i rješenje od $A_1X = B_1$; obratna inkluzija tada slijedi iz činjenice da se i $AX = B$ dobiva iz $A_1X = B_1$ primjenom istovrsne transformacije.

Ako smo $A_1X = B_1$ dobili iz $AX = B$ primjenom transformacije (I) ili (II) tvrdnja je potpuno trivijalna. Preostaje provjeriti učinak transformacije (III). Uzmimo da smo i-tu jednadžbu u $AX = B$ pomnožili s λ i dodali k-toj te na taj način dobili sustav $A_1X = B_1$. Neka je $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ proizvoljno rješenje od $AX = B$. Kako se polazni i dobiveni sustav razlikuju samo u k-toj jednadžbi, jedino treba provjeriti da $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ zadovoljava k-tu jednadžbu sustava $A_1X = B_1$. No, to je gotovo očito:

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij} + a_{kj})\gamma_j = \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\gamma_j = \lambda b_i + b_k\,.$$

□

Napomena 4.2.4. Uočimo da su elementarne transformacije sustava zapravo elementarne transformacije redaka proširene matrice A_p. Elementarne transformacije stupaca ovdje nećemo izvoditi. Može se primijetiti da bi elementarne transformacije stupaca zapravo značile uvođenje novih nepoznanica koje bi s originalnim nepoznanicama $x_1, \ldots, x_n$ bile vezane linearnim transformacijama.

Prijeđimo sada na opis Gaussove metode eliminacije. Istaknimo još jednom da je riječ o univerzalnom algoritmu za rješavanje proizvoljnog sustava linearnih jednadžbi.

Neka je dan sustav

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\,. \tag{5}$$

Elementarnim transformacijama sustava (a to su elementarne transformacije redaka proširene matrice A_p) dobivamo u konačno mnogo koraka matricu

$$A'_p = \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & | & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & b'_m \end{array}\right],$$

odnosno sustav

(6)

$$\begin{array}{cccccccc} x_1+ & & \cdots & & + & a'_{1,r+1}x_{r+1}+ & \cdots & +a'_{1n}x_n = & b'_1 \\ & x_2+ & \cdots & & + & a'_{2,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +a'_{2n}x_n = & b'_2 \\ & & & & & & & \ldots & \\ & & & & x_r+ & a'_{r,r+1}x_{r+1}+ & \cdots & +a'_{rn}x_n = & b'_r \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2+ & \cdots & +0\cdot x_r+ & & 0\cdot x_{r+1}+ & \cdots & +0\cdot x_n = & b'_{r+1} \\ \ldots & & & & & & & & \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2+ & \cdots & +0\cdot x_r+ & & 0\cdot x_{r+1}+ & \cdots & +0\cdot x_n = & b'_m \end{array}\,.$$

Primijetimo najprije da navedenu formu od A'_p uvijek možemo dobiti elementarno transformirajući retke polazne proširene matrice A_p. Pritom je pretpostavljeno, odnosno izračunato, $r(A) = r$. Naime, ako je $r = 0$ nema se što računati, a ako je $r > 0$ onda se *nekih* r stupaca može elementarnim transformacijama redaka dovesti do oblika kakav ima prvih r stupaca u A'_p. Vidjet će se da naša pretpostavka kako je to slučaj upravo s prvih r stupaca ne predstavlja smanjenje općenitosti.

Prema *propoziciji 4.2.3*, dobiveni sustav (6) je ekvivalentan polaznom sustavu (5).

Sada iz izgleda sustava (6), odnosno iz matrice A'_p, odmah uviđamo da je (6) rješiv ako i samo ako je $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$. To, naime, slijedi iz *teorema 4.1.5.* (Izravnu potvrdu ove činjenice nam daje i izgled zadnjih $m-r$ jednadžbi sustava (6).)

Ako, dakle, za bar jedan i, $r+1 \leq i \leq m$, vrijedi $b'_i \neq 0$, zadani sustav nema rješenja.

Pretpostavimo sada da je $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$. Tada dobivena matrica A'_p ima oblik

$$A'_p = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Odavde odmah vidimo da je $C_0 = (b'_1, b'_2, \ldots, b'_r, 0, \ldots, 0)$ jedno partikularno rješenje.

Preostaje naći bazu prostora rješenja pripadnog homogenog sustava. Uočimo da to također možemo iščitati iz gornje matrice; pritom treba zamišljati da je $b'_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, jer su u polaznom pridruženom homogenom sustavu svi slobodni članovi bili jednaki 0. Sad iz matrice A'_p nalazimo sljedeća rješenja pridruženog homogenom sustava:

$$\begin{array}{lcllllll} C_1 & = & (-a'_{1,r+1}, & -a'_{2,r+1}, & \ldots, & -a'_{r,r+1}, & 1, 0, \ldots, 0) \\ C_2 & = & (-a'_{1,r+2}, & -a'_{2,r+2}, & \ldots, & -a'_{r,r+2}, & 0, 1, \ldots, 0) \\ \ldots & & & & & & \\ C_{n-r} & = & (-a'_{1,n}, & -a'_{2,n}, & \ldots, & -a'_{r,n}, & 0, 0, \ldots, 1) \end{array}.$$

Da su $C_1, \ldots, C_{n-r}$ zaista rješenja pridruženog homogenog sustava vidi se direktnom provjerom. Jasno je također da je skup $\{C_1, \ldots, C_{n-r}\}$ linearno nezavisan (to je očito iz izgleda zadnjih $n-r$ komponenti u svakom C_i, $i = 1, 2, \ldots, n-r$).

Dokažimo da je skup $\{C_1, \ldots, C_{n-r}\}$ i sustav izvodnica za prostor rješenja pridruženoga homogenog sustava. Neka je $C = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ proizvoljno rješenje pridruženoga homogenog sustava. Eksplicitno, to znači:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\gamma_1 + & \cdots & \cdots & \cdots & +a'_{1,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +a'_{1n}\gamma_n = & 0 \\
 & \gamma_2 + & \cdots & \cdots & +a'_{2,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +a'_{2n}\gamma_n = & 0 \\
 & & & & & & \cdots & \\
 & & & \gamma_r & +a'_{r,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +a'_{rn}\gamma_n = & 0
\end{array}.$$

Sad tvrdimo da je $C = \gamma_{r+1}C_1 + \gamma_{r+2}C_2 + \ldots + \gamma_n C_{n-r}$. Da se u to uvjerimo, treba samo usporediti sve komponente. Međutim, prethodni skup jednakosti daje upravo jednakost prvih r komponenti, dok su jednakosti ostalih $n-r$ komponenti trivijalne.

Iz svega rečenog slijedi: opće rješenje dobivenog, a time i polaznog sustava je dano s $C_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i C_i$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{F}$.

Izravno iz prethodnog algoritma dobivamo sljedeću važnu činjenicu:

Korolar 4.2.5. *Neka je Ω prostor rješenja homogenog sustava $AX = 0$, $A \in M_{mn}(F)$, $r(A) = r$. Tada je $\dim\Omega = n - r$. Posebno, ukoliko je $r(A) = n$ onda sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje.*

Uočimo da dimenzija prostora rješenja ovisi samo o broju nepoznanica i o rangu matrice sustava; kako smo već i istaknuli, broj jednadžbi u sustavu sam za sebe nije relevantan podatak.

Primjer. Riješimo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\
2x_1 & + & & - & x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 12x_4 & + & 12x_5 & = & -1
\end{array}.$$

Transformirajući proširenu matricu sustava A_p dobivamo sljedeći niz ekvivalentnih matrica, odnosno sustava:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 5 & | & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 5 & | & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & 12 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 & | & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 & | & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 & | & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & | & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 & | & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde vidimo da rang matrica A i A_p iznosi 3 te da je dimenzija prostora rješenja pridruženog homogenog sustava jednaka 2. (U tradicionalnoj terminologiji reklo bi se da rješenje ovisi o dva slobodna parametra.) Pišemo li rješenja kao jednostupčane matrice, dobivamo partikularno rješenje

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ te } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje danog sustava je, dakle, $C = C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Ako je matrica sustava A kvadratna, tj. ako dani sustav ima jednak broj jednadžbi i nepoznanica, Gaussova metoda eliminacije je zapravo ekvivalent LU dekompoziciji koju smo razmatrali u završnoj točki prethodnog poglavlja[3].

Pretpostavimo da je dan sustav $AX = B$ pri čemu je $A \in M_n$. Uzmimo da je $A = LU$ faktorizacija matrice A na donjetrokutasti i gornjetrokutasti faktor. Sada dani sustav možemo pisati u obliku $LUX = B$. Uz supstituciju $UX = Y$ sada se rješavanje polaznog sustava svodi na rješavanje dvaju sustava: $LY = B$ i $UX = Y$. Primijetimo da su oba sustava rješiva neposrednim sukcesivnim određivanjem svih nepoznanica jer su obje matrice trokutaste. Uočimo još da, po konstrukciji, matrica L ima jedinice na svim dijagonalnim mjestima. Posebno, prema *propoziciji 3.2.11*, $\det L = 1$ te je, prema *teoremu 3.2.27*, L regularna matrica. Sad je, prema *teoremu 3.3.15*, $r(L) = n$. Primjenom *korolara 4.2.5* sada zaključujemo da je rješenje sustava $LY = B$ jedinstveno. Ako to rješenje označimo s Y_0, preostaje riješiti sustav $UX = Y_0$.

Za kraj razmotrimo još jedan specijalan slučaj. Uzmimo sustav $AX = B$ u kojem je opet broj jednadžbi m jednak broju nepoznanica n; dakle $A \in M_n$ je kvadratna matrica. Ukoliko je $r(A) < n$ onda je $n - r(A) > 0$ i imamo beskonačan (u stvari $(n-r(A))$-dimenzionalan) skup rješenja. Pobliže ćemo razmotriti slučaj kad je $n = r(A)$, tj. kad je matrica A regularna.

Definicija 4.2.6. Kaže se da je sustav $AX = B$ Kramerov ako je $A \in M_n$ (dakle, broj jednadžbi je jednak broju nepoznanica) i ako je A regularna matrica.

Propozicija 4.2.7. *Kramerov sustav $AX = B$ je rješiv, a rješenje mu je jedinstveno i dano formulom $C = A^{-1}B$.*

Dokaz. Da je C rješenje vidi se izravnim uvrštavanjem, a jedinstvenost slijedi iz *korolara 4.2.5.* □

Korolar 4.2.8. *Neka je $C = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ jedinstveno rješenje Kramerova sustava $AX = B$. Tada je $\gamma_j = \frac{D_j}{D}$, $j = 1, \dots n$, pri čemu je $D = detA$,*

[3] Postoji i analogna dekompozicija matrica koje nisu nužno kvadratne te se zapravo nalaženje takve dekompozicije pokazuje ekvivalentom Gaussove metode eliminacije za proizvoljne sustave linearnih jednadžbi.

a D_j je determinanta matrice čiji je j-ti stupac upravo B, dok su joj ostali stupci isti kao u A.

Dokaz. Kako je $A = [a_{ij}]$ regularna matrica, $D = \det A \neq 0$, pa je formula smislena. Iz $C = A^{-1}B$ vidimo da je γ_j zapravo umnožak j-tog retka od A^{-1} i matrice B. Prema *teoremu 3.2.27* znamo da je $A^{-1} = \frac{1}{D}\widetilde{A}$, gdje je $\widetilde{A}$ adjunkta matrice A. Po definiciji adjunkte je $[\widetilde{A}]_{rs} = A_{sr}$, pri čemu je A_{sr} algebarski komplement koeficijenta a_{sr}. Zato je $\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D}[\tilde{A}]_{ji}b_i = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \frac{1}{D}D_j$, s tim da je zadnja jednakost dobivena Laplaceovim razvojem determinante D_j po j-tom stupcu. $\square$

4.3. **Zadaci.**

1. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

2. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 11 \end{array}$.

3. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

4. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 6 \end{array}$.

5. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}$.

6. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$.

7. U ovisnosti o realnom parametru α riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & \alpha x_2 & - & 13x_3 & = & -32 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & \alpha \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & \alpha x_3 & = & 8 \end{array}.$$

8. U ovisnosti o realnom parametru λ riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \lambda x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & \lambda x_4 & = & 3 \\ & & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}.$$

9. U ovisnosti o realnom parametru λ riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 9 \\ \lambda x_1 & - & 4x_2 & + & 9x_3 & + & 10x_4 & = & 11 \end{array}.$$

10. Pokažite da je sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 13 \\ x_1 & & & & & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & & & = & -1 \end{array}$$

Kramerov pa ga riješite pomoću Kramerovih formula (iz *korolara 4.2.8*).

11. Riješite sustav $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

12. Riješite sustav $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = 0$.

13. Odredite LU dekompoziciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i uz pomoć te dekompozicije riješite sustav $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

14. Neka je $\{(1,1,0,-1),(1,0,1,2)\}$ baza potprostora M prostora $\mathbb{R}^4$. Pokažite da je M skup svih rješenja nekog homogenog sustava jednadžbi.

15. Neka je M potprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Pokažite da postoji homogeni sustav linearnih jednadžbi čiji prostor rješenja je M.

5. Linearni operatori

Fiksirajmo po volji odabran kut $\varphi \in [0, 2\pi)$ i promotrimo preslikavanje $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$ koje svaki radijvektor rotira za φ.

Kako je $V^2(O)$ vektorski prostor, prirodno je pitanje kako se ovo preslikavanje odnosi prema operacijama definiranima na $V^2(O)$. Nije teško zaključiti da vrijedi

(1) $R_\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = R_\varphi(\vec{a}) + R_\varphi(\vec{b})$,
(2) $R_\varphi(\alpha\vec{a}) = \alpha R_\varphi(\vec{a})$,

za sve radijvektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ i svaki skalar α. Na primjer, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni radijvektori, prvo svojstvo je posljedica činjenice da svaki paralelogram u ravnini rotacijom oko ishodišta prelazi u paralelogram. Slično se vidi da (1) vrijedi i u situaciji kad su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. Jednako je jednostavno pokazati da vrijedi i (2).

Kombinirajući oba navedena svojstva, zaključujemo da vrijedi i

$$R_\varphi(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha R_\varphi(\vec{a}) + \beta R_\varphi(\vec{b}),\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Možemo, dakle, zaključiti da je preslikavanje R_φ usklađeno s linearnom strukturom definiranom na $V^2(O)$. Ova činjenica ima dalekosežne posljedice. Prije svega, lako je ustanoviti da je zbog $(*)$ preslikavanje R_φ potpuno određeno svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi prostora $V^2(O)$. Da bismo to pokazali, uzmimo proizvoljnu bazu $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ od $V^2(O)$. Prema *teoremu 1.1.8*, svaki vektor $\vec{v} \in V^2(O)$ je oblika $\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neke skalare α i β. Jednakost $(*)$ sada povlači da je $R_\varphi(\vec{v}) = \alpha R_\varphi(\vec{a}) + \beta R_\varphi(\vec{b})$, a ovo jasno pokazuje da vektori $R_\varphi(\vec{a})$ i $R_\varphi(\vec{b})$ potpuno određuju djelovanje preslikavanja R_φ na svakom vektoru.

Sličnim razmišljanjem mogli bismo naslutiti i izvesti i druge posljedice jednakosti $(*)$. Zajednička pozadina svih takvih svojstava preslikavanja R_φ nije geometrijska priroda njegove definicije, nego činjenica da je njegovo djelovanje usklađeno s algebarskom strukturom prostora na kojem je definirano. Nije teško naći i druge primjere preslikavanja na $V^2(O)$ (npr. zrcaljenja u odnosu na neku fiksnu os, ortogonalne projekcije i sl.) koja bi zadovoljavala jednakosti (1) i (2), odnosno $(*)$. To nas navodi na ideju da sustavno, na apstraktnoj razini, proučimo svojstva preslikavanja vektorskih prostora koja su usklađena s linearnom strukturom na kojoj djeluju.

5.1. **Osnovna svojstva linearnih operatora.**

Definicija 5.1.1. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zove se linearan operator ako vrijedi $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Jasno je da definicija dopušta i mogućnost $V = W$; tada je uvjet da su V i W prostori nad istim poljem ispunjen automatski. Spomenimo usput da se u takvoj situaciji, kad imamo linearan operator $A : V \to V$, kaže da je A linearan operator na V.

Ako je riječ o preslikavanjima $A : V \to W$, gdje je $V \neq W$, sama priroda definicije linearnog operatora zahtijeva da prostori budu nad istim poljem. Naime, skalari α i β na lijevoj strani jednakosti $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ množe vektore x i y iz prostora V, dok na desnoj strani jednakosti ti isti skalari množe slike tih vektora, Ax i Ay, u prostoru W.

Linearne operatore često jednostavnije nazivamo samo operatorima, a linearnost pritom podrazumijevamo. Ovakva konvencija nije uvijek najspretnija, pa ćemo linearnost naglašavati gdje god iz konteksta nije jasno da se zaista radi o linearnom operatoru. Obično operatore označavamo velikim latinskim slovima, a umjesto $A(x)$ standardno pišemo Ax.

Prije nego pogledamo raznovrsne primjere linearnih operatora, navedimo nekoliko jednostavnih činjenica koje proizlaze izravno iz definicije.

Napomena 5.1.2. (a) Definiciona jednakost $A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, naziva se linearnost preslikavanja A. Odavde odmah slijedi $A(x + y) = Ax + Ay, \forall x, y \in V$ (ako se uzme $\alpha = \beta = 1$), te $A(\alpha x) = \alpha Ax$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha \in F$ (ako se uzme $\beta = 0$). Ova se svojstva zovu aditivnost i homogenost. Dakle, svaki je linearan operator aditivno i homogeno preslikavanje.

Lako se vidi da vrijedi i obrat: aditivno i homogeno preslikavanje vektorskih prostora je linearan operator. Zaista, pretpostavimo da je preslikavanje $A : V \to W$ vektorskih prostora V i W nad $\mathbb{F}$ aditivno i homogeno pa uzmimo proizvoljno odabrane vektore $x, y \in V$ te skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Sada je $A(\alpha x + \beta y) =$ (zbog aditivnosti) $= A(\alpha x) + A(\beta y) =$ (zbog homogenosti) $= \alpha Ax + \beta Ay$.

(b) Svaki linearan operator nulvektor prevodi u nulvektor: $A0 = 0$. To slijedi direktno iz definicije odaberemo li u definicionom uvjetu $\alpha = \beta = 0$.

(c) Ako je $A : V \to W$ linearan operator, jednostavnim induktivnim argumentom pokazuje se da tada vrijedi i $A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ax_i$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_n \in V$, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Često se zato kaže da linearni operatori poštuju linearne kombinacije. Ovo svojstvo pokazuje da je djelovanje linearnih operatora u punoj mjeri usklađeno s algebarskom strukturom vektorskih prostora.

Primjer 5.1.3. 1. Rotacija $R_\varphi : V^2(O) \to V^2(O)$ za kut φ je linearan operator na prostoru $V^2(O)$.

2. Preslikavanje $P : V^3(O) \to V^3(O)$ definirano s $P(\overrightarrow{OT}) = \overrightarrow{OT'}$, gdje je $T = (x, y, z)$ i $T' = (x, y, 0)$, je linearan operator; P se naziva ortogonalni projektor prostora $V^3(O)$ na $V^2(O)$ (pri čemu smo prostor $V^2(O)$ identificirali s potprostorom od $V^3(O)$ kojeg čine svi radijvektori čije završne točke leže u xy-ravnini).

3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$, je linearan operator. Može se uočiti da je ovaj operator apstraktna realizacija ortogonalnog projektora P iz prethodnog primjera.

4. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$, je linearan operator.

5. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2 + 5)$, *nije* linearan operator.

6. Transponiranje matrica $T : M_{mn}(\mathbb{F}) \to M_{nm}(\mathbb{F})$, $T(A) = A^t$, je linearan operator.

7. Hermitsko adjungiranje matrica $H : M_{mn}(\mathbb{C}) \to M_{nm}(\mathbb{C})$, $H(A) = A^*$, *nije* linearan operator (usp. *zadatak 16* u 3. poglavlju).

8. $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearan operator (usp. *zadatak 11* u 3. poglavlju).

9. $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *nije* linearan operator.

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$, je linearan operator.

11. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadani realni brojevi. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, je linearan operator.

12. $D : P_n \to P_n$, $Dp = p'$, pri čemu je p' derivacija polinoma p, je linearan operator.

13. Neka su V i W proizvoljni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je preslikavanje $0 : V \to W$, definirano s $0x = 0$, $\forall x \in V$, linearan operator. Ovaj operator se naziva nuloperator.

14. Neka je V proizvoljan vektorski prostor. Identitet $I : V \to V$ je linearan operator. Često se kaže da je I jedinični operator.

15. $D : P \to P$, $Dp = p'$, je linearan operator.

16. $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, je linearan operator.

17. $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, je linearan operator.

Provjerimo, za ilustraciju, da je preslikavanje iz primjera 4 zaista linearno. Za $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo $A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2) = (6(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2), -2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2), (\alpha x_1 + \beta y_1) - 7(\alpha x_2 + \beta y_2)) = \alpha(6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2) + \beta(6y_1 - y_2, -2y_1 + y_2, y_1 - 7y_2) = \alpha Ax + \beta Ay$. Slično se postupa i u svim ostalim primjerima.

Primijetimo dva dogovora prešutno uvedena u prethodnim primjerima. Kad operator djeluje na prostoru matrica ipak je preglednije pisati $T(A)$

umjesto TA (kao u primjerima 6 i 7). Drugo, kad operator prima vrijednosti u polju (koje je tada shvaćeno kao prostor nad samim sobom), obično se označava malim slovom (kao u primjerima 10 i 11).

U posljednja tri primjera operatori koje smo naveli djeluju na beskonačnodimenzionalnim prostorima. Takvima se nećemo baviti, već ćemo isključivo proučavati operatore na prostorima konačne dimenzije. Navedeni primjeri će nam biti korisni u situacijama u kojima ćemo željeti istaknuti, odnosno ilustrirati važnost pretpostavke o konačnodimenzionalnosti promatranih prostora.

Na početku ovog poglavlja vidjeli smo da je operator rotacije potpuno određen svojim djelovanjem na bazi prostora $V^2(O)$. Pokažimo sada da je to univerzalno svojstvo svih linearnih operatora.

Napomena 5.1.4. Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, baza prostora V. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i napišimo ga u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Sada je, prema *napomeni 5.1.2(c)*, $Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A b_i$. Odavde zaključujemo: poznajemo li vektore $Ab_1, \ldots, Ab_n$, onda implicitno poznajemo i Ax, za svaki vektor x iz domene.

Odavde također izvodimo i sljedeći zaključak: ako se linearni operatori $A, B : V \to W$ podudaraju u djelovanju na svim vektorima neke baze prostora V, onda je $A = B$. U ovom smislu često kažemo da je svaki linearni operator definiran na konačnodimenzionalnom prostoru jedinstveno određen svojim djelovanjem na (bilo kojoj) bazi.

Drugi pogled na prethodnu napomenu, možda iz malo drugačijeg kuta, dovodi nas do važnog postupka zadavanja linearnih operatora. To je sadržaj naredne propozicije.

Propozicija 5.1.5. *(Zadavanje na bazi i proširenje po linearnosti) Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, neka je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bilo koja baza za V i $(w_1, \ldots, w_n)$ bilo koja uređena n-torka vektora iz W. Tada postoji jedinstven linearan operator $A : V \to W$ takav da je $Ab_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljan $x \in V$ i prikažimo ga kao linearnu kombinaciju vektora baze $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Ako je $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, definiramo $Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$. Definicija je korektna jer je prikaz svakog vektora iz V u danoj bazi jedinstven. Dokažimo da je A linearan: za $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ i $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i b_i$ iz V, te α i β iz $\mathbb{F}$, uočimo najprije da je $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) b_i$. Sada je, prema definiciji preslikavanja A, očito da vrijedi $A(\alpha x + \beta y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i + \beta \mu_i) w_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = \alpha Ax + \beta Ay$.

Očito smo postigli i $Ab_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$.

Konačno, ako bi i $B : V \to W$ bio linearan operator sa svojstvom $Bb_i = w_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, onda iz prethodne napomene odmah slijedi $B = A$. $\square$

Primijetimo da je u iskazu $(w_1, \ldots, w_n)$ uređena n-torka (a ne skup). Zato je moguće da se neki od vektora w_i ponavljaju. Upravo to smo i željeli: propozicija nam sada jamči da za zadanu bazu domene postoji jedinstven linearan operator koji će bazne vektore preslikati u unaprijed zadane, po volji odabrane (ne nužno različite) vektore iz kodomene.

Posebno, jer je uređenu n-torku $(w_1, \ldots, w_n)$ moguće izabrati na beskonačno mnogo načina (čim je $W \neq \{0\}$), *propozicija 5.1.5* pokazuje da je skup svih linearnih operatora između dva dana vektorska prostora ne samo neprazan, nego i vrlo velik.

Nakon ovih početnih komentara sada možemo započeti s istraživanjem svojstava linearnih operatora. Pokažimo najprije da linearni operatori čuvaju strukturu potprostora.

Propozicija 5.1.6. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator.*

(i) *Ako je $L \leq V$, onda je $A(L) \leq W$.*
(ii) *Ako je $M \leq W$, onda je $A^{-1}(M) \leq V$.*

Dokaz. (i) Tvrdnja slijedi dvostrukom primjenom *korolara 2.3.3.* Za $Ax, Ay \in A(L)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ treba dokazati da je i $\alpha Ax + \beta Ay \in A(L)$. Međutim, zbog linearnosti imamo $\alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y)$, a taj vektor jest u $A(L)$ jer je L potprostor pa je, zbog $x, y \in L$, i $\alpha x + \beta y \in L$.

(ii) I ovdje se argument svodi na direktnu primjenu *korolara 2.3.3*: $x, y \in A^{-1}(M), \alpha, \beta \in \mathbb{F} \Rightarrow Ax, Ay \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha Ax + \beta Ay \in M \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A^{-1}(M)$. □

Posebno su nam zanimljiva dva specijalna slučaja: $L = V \leq V$ i $M = \{0\} \leq W$. To nas dovodi do definicije ranga i defekta - koncepata koji igraju centralnu ulogu u proučavanju linearnih operatora na konačnodimenzionalnim prostorima.

Definicija 5.1.7. Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori

$$\operatorname{Im} A = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$$

i

$$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$$

zovu se slika, odnosno jezgra[4] operatora A. Kad su V i W konačnodimenzionalni, rang i defekt operatora A definiraju se kao brojevi $\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A)$, odnosno $\mathrm{d}(A) = \dim(\operatorname{Ker} A)$.

Nakon uvođenja pojma slike i ranga operatora, možemo dopuniti iskaz *napomene 5.1.4.*

Napomena 5.1.8. Pretpostavimo da je $A : V \to W$ linearan operator te da je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bilo koja baza prostora V. Sada za proizvoljan $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V$ imamo $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i A b_i$, što pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$. Vrijedi, dakle, $\operatorname{Im} A = [\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}]$ i $\mathrm{r}(A) = \dim(\operatorname{Im} A) \leq n$.

[4]Oznake Im i Ker su uobičajene u literaturi, a dolaze od engleskih riječi *image* i *kernel.*

Uočimo da se tvrdnja iz napomene ne može poboljšati; ne možemo tvrditi da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ sustav izvodnica za cijelu kodomenu W. To je očito nemoguće u svim situacijama kad je $\dim V < \dim W$. No, čak i kad je $\dim V \geq \dim W$, operator ne mora biti surjektivan i potprostor $\mathrm{Im}\, A$ će biti pravi potprostor (dakle, $\neq$) od W.

U ovom kontekstu prirodno je također pitati kako se linearni operatori odnose prema linearno nezavisnim skupovima. No, primjer nuloperatora odmah pokazuje kako nema govora o tome kako bi linearni operatori općenito čuvali linearnu nezavisnost. Pokazat će se da je injektivnost dodatno svojstvo koje će osigurati da linearni operatori čuvaju linearnu nezavisnost.

Izvedimo najprije jednostavan i koristan kriterij injektivnosti linearnog operatora.

Propozicija 5.1.9. *Linearan operator $A : V \to W$ je injekcija ako i samo ako je $Ker\, A = \{0\}$ (tj. ako i samo ako je $d(A) = 0$).*

Dokaz. Uočimo prvo da za svaki linearni operator, zbog $A0 = 0$, vrijedi $0 \in \mathrm{Ker}\, A$. Ako je A injekcija, očito ni jedan drugi vektor više ne može biti u $\mathrm{Ker}\, A$. Obratno, pretpostavimo da je $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$ i uzmimo $Ax = Ay$. Tada je $Ax - Ay = 0$, što zbog linearnosti možemo pisati kao $A(x - y) = 0$. Odavde je, po definiciji jezgre, $x - y \in \mathrm{Ker}\, A$. Jer smo pretpostavili da je $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, slijedi $x - y = 0$, odnosno $x = y$. $\square$

Propozicija 5.1.10. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator. A je injekcija ako i samo ako je za svaki linearno nezavisan skup S u V skup $A(S) = \{Ax : x \in S\}$ linearno nezavisan u W.*

Dokaz. Neka je A injekcija i neka je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan u V. Da bismo dokazali nezavisnost skupa $\{Ax_1, \ldots, Ax_k\}$ pretpostavimo $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i Ax_i = 0$. Zbog linearnosti je sada $A(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i) = 0$, tj. $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in \mathrm{Ker}\, A$. Prema prethodnoj propoziciji jezgra operatora A je trivijalna pa je nužno $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$. Konačno, kako je prema pretpostavci skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ nezavisan, slijedi $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Obratno, neka A nije injekcija. Sada prema prethodnoj propoziciji postoji $x \in \mathrm{Ker}\, A$, $x \neq 0$. Skup $\{x\}$ je linearno nezavisan, no $\{Ax\} = \{0\}$ je očito zavisan. $\square$

Sada smo spremni za dokaz najvažnijeg teorema o linearnim operatorima na konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima. U stvari je sljedeći *teorem o rangu i defektu* jedan od dvaju najvažnijih teorema linearne algebre. (Drugi je *Gram-Schmidtov teorem ortogonalizacije*; njime i njegovim posljedicama bavit ćemo se u idućem poglavlju.)

Teorem 5.1.11. *(Teorem o rangu i defektu.) Neka je $A : V \to W$ linearan operator, te neka je $dim\, V < \infty$. Tada je $r(A) + d(A) = dim\, V$.*

Dokaz. Ako je A injekcija, teorem je već dokazan. Naime, za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ prostora V skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je, zbog *napomene 5.1.8* i *propozicije 5.1.10*, baza za $\operatorname{Im} A$. Dakle je $\mathrm{r}(A) = \dim V$. S druge strane, iz *propozicije 5.1.9* slijedi $\mathrm{d}(A) = 0$.

Ako pak A nije injekcija, stavimo $\mathrm{d}(A) = d > 0$ i odaberimo neku bazu $\{e_1, \ldots, e_d\}$ za $\operatorname{Ker} A$. Ovaj linearno nezavisan skup nadopunimo do baze $\{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ za V. Sada je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_d, Ae_{d+1}, \ldots, Ae_n\}$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$ (prema *napomeni 5.1.8*), a kako je $Ae_i = 0$ za $i = 1, \ldots, d$, zaključujemo da je u stvari skup $\{Ae_{d+1}, \ldots, Ae_n\}$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$. No taj je skup i baza za $\operatorname{Im} A$!

Zaista, pokažimo da je nezavisan: $\sum_{i=d+1}^n \alpha_i Ae_i = 0 \Rightarrow A(\sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} A$. Kako je također $\sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i \in [\{e_{d+1}, \ldots, e_n\}]$, zaključujemo da je $\sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} A \cap [\{e_{d+1}, \ldots, e_n\}]$. Jer su, po konstrukciji, ovi potprostori jedan drugome direktni komplementi, mora biti $\sum_{i=d+1}^n \alpha_i e_i = 0$, a odavde je $\alpha_i = 0$, $\forall i = d+1, \ldots, n$.

Dakle, $\mathrm{r}(A) = n - d = n - \mathrm{d}(A)$. $\square$

Definicija 5.1.12. Linearan operator $A : V \to W$ naziva se:

(i) monomorfizam ako je A injekcija;
(ii) epimorfizam ako je A surjekcija;
(iii) izomorfizam ako je A bijekcija.

Korolar koji slijedi jedna je od ključnih i najčešće citiranih posljedica *teorema o rangu i defektu.*

Korolar 5.1.13. *Neka je $A : V \to W$ linearan operator te neka je $\dim V = \dim W < \infty$. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

(i) *A je monomorfizam;*
(ii) *A je epimorfizam;*
(iii) *A je izomorfizam.*

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: $\mathrm{d}(A) = 0$ i $\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V = \dim W$ povlači $\mathrm{r}(A) = \dim W$; dakle, $\operatorname{Im} A = W$ pa je A i surjekcija.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: $\operatorname{Im} A = W$, tj. $\mathrm{r}(A) = \dim W = \dim V$ povlači $\mathrm{d}(A) = \dim V - \mathrm{r}(A) = 0$ pa je, prema *propoziciji 5.1.9*, A i injekcija. $\square$

Uočimo analogiju tvrdnje prethodnog korolara sa svojstvom funkcija koje su definirane i poprimaju vrijednosti na konačnim skupovima istog kardinalnog broja. Tipično, *korolar 5.1.13* se primjenjuje na operatore $A : V \to V$. U toj situaciji je pretpostavka $\dim V = \dim W$ automatski ispunjena pa je suvišna. No sada se možemo pitati vrijedi li tvrdnja korolara za operatore $A : V \to V$ i kad V nije konačnodimenzionalan. Odgovor je negativan, te se prethodni korolar pokazuje kao ekskluzivno svojstvo konačnodimenzionalnih prostora. Protuprimjeri su operatori lijevog i desnog pomaka na prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (to su posljednja dva operatora navedena u *primjeru 5.1.3*). Očito je S injekcija, ali ne i surjekcija, dok za operator T vrijedi upravo suprotno: surjektivan je, ali nije injektivan.

U sljedećoj propoziciji karakterizirat ćemo izomorfizme konačnodimenzionalnih vektorskih prostora. U osnovi, propozicija tvrdi da su izomorfizmi oni operatori koji prevode bazu u bazu.

Propozicija 5.1.14. *Neka je* $A : V \to W$ *linearan operator, te neka je* $\dim V = n < \infty$. *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) A *je izomorfizam;*
(ii) *za svaku bazu* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *od* V *skup* $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ *je baza za* W*;*
(iii) *postoji baza* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *od* V *takva da je skup* $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ *baza za* W.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Uzmimo neku bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ od V. Prema napomeni 5.1.8, skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A = W$, a jer je A i injekcija, iz *propozicije 5.1.10* zaključujemo da je taj skup i linearno nezavisan.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ako vrijedi (iii) onda je posebno $\dim V = \dim W$. Osim toga, (iii) povlači i da je A surjekcija. Sad djeluje *korolar 5.1.13.* $\square$

Propozicija 5.1.15. *Neka su* $A : V \to W$ *i* $B : W \to X$ *linearni operatori. Tada je i* $BA : V \to X$ *linearan operator. Posebno, kompozicija dvaju monomorfizama (epimorfizama, izomorfizama) je opet monomorfizam (epimorfizam, izomorfizam).*

Dokaz. Za $x, y \in V$ i skalare α, β imamo $BA(\alpha x + \beta y) = B(A(\alpha x + \beta y)) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha BAx + \beta BAy$. Druga tvrdnja je sad posljedica činjenice da je kompozicija dviju injekcija (surjekcija, bijekcija) opet injekcija (surjekcija, bijekcija). $\square$

Definicija 5.1.16. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem. Kažemo da je V izomorfan s W (i pišemo $V \simeq W$) ako postoji izomorfizam $A : V \to W$.

Propozicija 5.1.17. *Neka su* V *i* W *konačnodimenzionalni prostori nad istim poljem. Tada je* $V \simeq W$ *ako i samo ako vrijedi* $\dim V = \dim W$. *Posebno, izomorfnost prostora je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Ako je $V \simeq W$ onda odmah iz *propozicije 5.1.14* slijedi $\dim V = \dim W$. Obratno, ako je $\dim V = \dim W = n$ onda možemo odabrati baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za V i $\{f_1, \ldots, f_n\}$ za W; bitno je da obje imaju točno n elemenata. Prema *propoziciji 5.1.5* možemo naći operator $A : V \to W$ takav da je $Ae_i = f_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. *Propozicija 5.1.14* jamči da je A izomorfizam. $\square$

Napomena 5.1.18. U prethodnoj propoziciji dokazali smo da je izomorfnost relacija ekvivalencije samo kad se govori o konačnodimenzionalnim prostorima jer smo u dokazu bitno koristili *teorem o rangu i defektu*, odnosno njegove posljedice, kao i proceduru zadavanja operatora na bazi.

Tvrdnja, međutim, vrijedi i općenito. To je zato što se i bez pozivanja na jednakost dimenzija može direktno dokazati da je $\simeq$ simetrična relacija. Lako se, naime, vidi da vrijedi i ova, sama po sebi korisna, tvrdnja:

Ako je $A : V \to W$ izomorfizam, onda je i inverzno preslikavanje $A^{-1} : W \to V$ linearno te je zato i A^{-1} izomorfizam.

Napomena 5.1.19. Ako je $A : V \to V$ linearan i bijektivan, češće se kaže da je A regularan ili invertibilan operator. Termin izomorfizam je rezerviran za operatore između različitih prostora. U toj terminologiji za operatore koji nisu regularni kaže se da su singularni.

Zamislimo sada da za operatore $A, B : V \to V$, $\dim V < \infty$, vrijedi $AB = I$. Tada su oba operatora regularna i vrijedi $A = B^{-1}$, a onda i $A^{-1} = B$. (Korisno je ovu tvrdnju usporediti sa *zadatkom 10* u 3. poglavlju.)

Zaista, iz $AB = I$ slijedi da je B injekcija. Prema *korolaru 5.1.13* B je zato regularan pa postoji B^{-1}. Ako sad na relaciju $AB = I$ djelujemo s desne strane s B^{-1}, dobivamo $A = B^{-1}$.

Uočimo da je u dokazu opet bilo presudno da je $\dim V < \infty$. Ako je $\dim V = \infty$ tvrdnja ne vrijedi; protuprimjer i ovdje predstavljaju operatori S i T lijevog i desnog pomaka na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ iz *primjera 5.1.3*. Naime, očito je $TS = I$, a već smo vidjeli da ni S, ni T nisu bijekcije.

Vratimo se izomorfizmima, tj. bijektivnim linearnim operatorima $A : V \to W$ između različitih prostora. Svaki izomorfizam na izvjestan način identificira ove prostore i omogućuje da informacije iz jednoga "vjerno" prenesemo u drugi. Naime, izomorfizmi čuvaju nezavisnost, dimenzije i sve linearne informacije. Na primjer, nije teško vidjeti da, ako je $A : V \to W$ izomorfizam, za svaki konačan skup vektora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ u V vrijedi $\dim [\{Av_1, \ldots, Av_m\}] = \dim [\{v_1, \ldots, v_m\}]$. (Usp. *zadatak 5.* Spomenimo usput da će se ova informacija pokazati korisnom kod proučavanja matričnih zapisa linearnih operatora.)

Imamo li, dakle, vektorske prostore nad istim poljem jednakih dimenzija, ti se prostori u apstraktnom smislu mogu smatrati jednakima. U tom smislu su vrlo ilustrativni primjeri $\mathbb{F}^n \simeq M_{n1}(\mathbb{F})$, odnosno, općenitije, $M_{mn} \simeq M_{nm}$. Izomorfni prostori bi se, dakle, mogli shvaćati kao različite konkretne realizacije jednog te istog sadržaja. Pritom bismo za standardne modele, tj. reprezentante odgovarajućih klasa ekvivalencije međusobno izomorfnih prostora mogli uzeti prostore $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$.

Razmišljajući na taj način mogli bismo doći na pomisao da napustimo razmatranje općih vektorskih prostora i usredotočimo se samo na $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. No takva bi ideja bila loša zbog barem dva razloga.

Prvo, kad imamo neki prostor V, $\dim V = n$, mi nemamo (a priori) izomorfizam $A : V \to \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$; dakle, morali bismo ga konstruirati. Kad se malo razmisli i uzmu u obzir *propozicije 5.1.5* i *5.1.14*, to zapravo znači da bismo morali fiksirati jednu bazu u V. No, tada bismo, od tog trenutka nadalje, o toj bazi bili ovisni. Svi rezultati koji bi bili dobiveni u $\mathbb{R}^n$ (odnosno u $\mathbb{C}^n$) i "povučeni natrag" u V bili bi izraženi u toj, fiksiranoj bazi. Ovo se pokazuje vrlo nepraktičnim; kasnije ćemo vidjeti da je upravo mogućnost promjene baze važna okolnost, odnosno ideja u rješavanju mnogih problema.

Drugo, razni vektorski prostori imaju i neka druga korisna svojstva, a za njihove elemente su možda uvedeni neki koncepti koji u $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$ nisu uobičajeni ili nemaju smisla. "Pretvaranjem" prostora V u $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) svaka bi se intuicija mogla izgubiti, a pojmovi i koncepti prisutni u V, a nevezani za linearnu strukturu, mogli bi postati neprirodni i nepraktični. Na primjer: ako bismo prostor $M_n(\mathbb{R})$ poistovjetili s $\mathbb{R}^{n^2}$, determinanta, rang, produkt, inverz i drugi pojmovi iz algebre matrica postali bi apsurdno zamršeni i neprirodni koncepti u prostoru uređenih n^2-torki realnih brojeva.

5.2. **Prostor linearnih operatora.**

Kad su V i W vektorski prostori nad istim poljem možemo promatrati skup $L(V, W)$ svih linearnih operatora s V u W. Taj je skup uvijek neprazan; npr. nuloperator je jedan njegov element. Štoviše, $L(V, W)$ je zapravo vrlo bogat; to nam jamči *propozicija 5.1.5.*

Sad želimo i u $L(V, W)$ uvesti strukturu vektorskog prostora.

Definicija 5.2.1. Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za $A, B \in L(V, W)$ definira se $A+B : V \to W$ s $(A+B)x = Ax+Bx$. Nadalje, za $A \in L(V, W)$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, definira se $\alpha A : V \to W$ s $(\alpha A)x = \alpha Ax$.

Ovako uvedene operacije nazivaju se zbrajanje po točkama i množenje skalarima po točkama. Uz njih uređena trojka $(L(V, W), +, \cdot)$ postaje kandidat za vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Teorem 5.2.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je i $L(V, W)$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Prvi posao je dokazati da je $+$ iz prethodne definicije zaista binarna operacija na $L(V, W)$. To znači da trebamo dokazati da je preslikavanje $A + B : V \to W$ linearno. No to je gotovo očito: $(A + B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay + \alpha Bx + \beta By = \alpha(Ax + Bx) + \beta(Ay + By) = \alpha(A + B)x + \beta(A + B)y \Rightarrow A + B \in L(V, W)$.

Sasvim analogno se vidi da je i $\alpha A \in L(V, W)$, tj. da je i αA linearan operator.

Sad se direktnom provjerom pokaže da ove operacije imaju sva potrebna svojstva iz definicije vektorskog prostora. "Nulvektor" je ovdje nuloperator, a operator suprotan operatoru A je $-A$ koji djeluje prema pravilu $(-A)x = -(Ax)$. Kako je provjera svih uvjeta iz *definicije 2.1.2* sasvim rutinska, detalje izostavljamo. $\square$

Teorem 5.2.3. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Tada je $\dim L(V, W) = \dim V \cdot \dim W$.*

Dokaz. Označimo $\dim V = n$, $\dim W = m$, i fiksirajmo u oba prostora po jednu bazu; neka je $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V, a $\{f_1, \dots, f_m\}$ baza za W. Definirat ćemo nm operatora iz $L(V, W)$ i pokazati da će oni činiti bazu prostora $L(V,W)$. Za $1 \leq j \leq n$ i $1 \leq i \leq m$ definirajmo operatore $E_{ij} \in L(V,W)$ primjenom *propozicije 5.1.5*: $E_{ij}e_k = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & k \neq j \\ f_i, & k = j \end{array} \right.$, dakle, $E_{ij}e_k = \delta_{jk}f_i$, $k = 1, \ldots, n$. Dokazat ćemo da je skup $\{E_{ij} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m\}$ baza za $L(V,W)$. Provjerimo prvo linearnu nezavisnost:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij} = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij})(e_k) = 0, \forall k \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij}e_k = 0, \forall k \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik}f_i = 0, \forall k \Rightarrow \lambda_{ik} = 0, \forall i,k.$$

Da bismo dokazali kako je skup $\{E_{ij} : 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m\}$ sustav izvodnica za $L(V,W)$ fiksirajmo proizvoljan $T \in L(V,W)$. Želimo T prikazati u obliku $T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij}$. Zbog *napomene 5.1.4* za ovu jednakost je nužno i dovoljno da ta dva operatora jednako djeluju na (nekoj) bazi od V. Trebamo, dakle, odrediti skalare λ_{ij} takve da vrijedi $Te_k = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij})e_k$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Pritom za $1 \leq k \leq n$ istim računom kao u prvom dijelu dokaza nalazimo $(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}E_{ij})e_k = \sum_{i=1}^{m}\lambda_{ik}f_i$. S druge strane, kako je operator T zadan, vektori Te_k su nam poznati: pišimo $Te_k = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}f_i$, $\forall k = 1, \ldots, n$. Sada je jasno da treba uzeti $\lambda_{ik} = \alpha_{ik}$, $\forall i,k$. □

Razmotrimo još specijalan slučaj $V = W$. Ovdje ćemo umjesto $L(V,V)$ pisati $L(V)$. Naravno, ako je $\dim V = n$, onda je $\dim L(V) = n^2$.

Prostor $L(V)$ ima i dodatnu strukturu. U *propoziciji 5.1.15* vidjeli smo da je kompozicija dvaju linearnih operatora opet linearan operator (kad god je ta kompozicija definirana). Tako uočavamo da je komponiranje operatora još jedna binarna operacija na $L(V)$. Često umjesto $A \circ B$ jednostavno pišemo AB, a obično i govorimo da se radi o množenju operatora.

Propozicija 5.2.4. *Neka je V vektorski prostor. Skup $L(V)$ je asocijativna algebra s jedinicom, tj. vrijedi:*

(1) *$L(V)$ je vektorski prostor;*
(2) *$A(BC) = (AB)C$, $\forall A,B,C \in L(V)$;*
(3) *$A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$, $\forall A,B,C \in L(V)$;*
(4) *$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in F$, $\forall A,B \in L(V)$;*
(5) *$\exists I \in L(V)$ takav da je $AI = IA = A$, $\forall A \in L(V)$.*

Dokaz. Tvrdnja (1) već je dokazana, a tvrdnje (2) i (5) su opće činjenice. Preostale dvije tvrdnje dokazuju se rutinskom provjerom. □

Primijetimo da istu tvrdnju za prostor M_n poznajemo iz *korolara 3.1.7*. Štoviše, algebre M_n i $L(V)$ su jednakodimenzionalne te, prema *propoziciji 5.1.17*, predstavljaju izomorfne vektorske prostore. No u ovom slučaju htjeli bismo i više od običnog izomorfizma vektorskih prostora. Željeli bismo konstruirati izomorfizam vektorskih prostora $\Phi : L(V) \rightarrow M_n$ koji bi bio usklađen i s operacijom množenja, tj. zadovoljavao i $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$, za sve $A, B \in L(V)$. Takav izomorfizam (koji se onda, logično, naziva izomorfizam algebri) uspostavit ćemo u *korolaru 5.4.13*.

5.3. **Dualni prostor.**

Algebra operatora $L(V)$ opisana na kraju prethodne točke predstavlja specijalan slučaj prostora $L(V, W)$. Ovdje nas zanima jedan drugi specijalan slučaj: za zadani prostor V nad poljem $\mathbb{F}$ željeli bismo podrobnije proučiti prostor $L(V, \mathbb{F})$, pri čemu je polje $\mathbb{F}$ shvaćeno kao vektorski prostor nad samim sobom.

Želimo, dakle, promatrati linearne operatore $f : V \to \mathbb{F}$. Takvi operatori također su važni i prirodno se pojavljuju. Primjer linearnog operatora koji poprima vrijednosti u polju je trag kvadratnih matrica: $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$.

Definicija 5.3.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Vektorski prostor $L(V, \mathbb{F})$ zove se dualni prostor prostora V, označava se s V^*, a njegovi elementi - linearni operatori s V u $\mathbb{F}$ - nazivaju se linearni funkcionali.

Često se kratko kaže samo funkcional. Sve što je općenito rečeno o linearnim operatorima vrijedi, naravno, i za linearne funkcionale. Radi budućeg citiranja zabilježit ćemo ovdje samo dvije tvrdnje koje su specijalni slučajevi teorema o rangu i defektu, odnosno teorema o dimenziji prostora operatora.

Propozicija 5.3.2. *Neka je V vektorski prostor, $\dim V = n < \infty$, te neka je $f \in V^*$, $f \neq 0$. Tada je $r(f) = 1$ i $d(f) = n - 1$.*

Propozicija 5.3.3. *Neka je V vektorski prostor te neka je $\dim V = n < \infty$. Tada je $\dim V^* = n$.*

Ovdje je korisno ponoviti konstrukciju iz dokaza *teorema 5.2.3* (no odmah istaknimo: *propozicija 5.3.3* je, kao specijalan slučaj tog teorema, već dokazana.)

Neka je, dakle, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ proizvoljna baza prostora V. Odaberimo i bazu za $\mathbb{F}$ - no ne proizvoljnu, nego najjednostavniju: $\{1\}$. Sad nam trebaju operatori (ovdje ih zovemo funkcionalima) E_{ij}. Primijetimo da smo u dokazu *teorema 5.2.3* imali $i = 1, 2, \dots, m = \dim W$. Kako ovdje dimenzija kodomene iznosi 1, jedina vrijednost indeksa i bit će $i = 1$, a to onda znači da nam taj indeks ni ne treba. Funkcionale E_{1j} koje sada dobivamo konstrukcijom iz dokaza *teorema 5.2.3* možemo označiti s e_j^*, $j = 1, \dots, n$. Vrijedi $e_j^*(e_k) = \begin{cases} 0, & k \neq j \\ 1, & k = j \end{cases}$, dakle $e_j^*(e_k) = \delta_{jk}$, $\forall j, k = 1, \dots, n$. Sad znamo da je skup $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ baza dualnog prostora V^*. Ta se baza zove dualna u odnosu na bazu $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Primjer 5.3.4. Odredimo opći oblik linearnih funkcionala na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Prvo uočimo: ako odaberemo proizvoljne konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, onda je s $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ definiran jedan linearan funkcional na $\mathbb{R}^n$. Pokazat ćemo da je to opći oblik linearnih funkcionala na $\mathbb{R}^n$.

Fiksirajmo kanonsku bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u $\mathbb{R}^n$. Ako je zadan funkcional $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, a time i brojevi $f(e_1) = \alpha_1, \ldots, f(e_n) = \alpha_n$, onda odmah slijedi $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$.

Prethodni račun ujedno pokazuje da zapravo vrijedi $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$.

Napomena 5.3.5. Kad je riječ o dualnoj bazi onda su oznake $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ uobičajene. Međutim, ne bi bilo dobro govoriti da je (u nekom apsolutnom smislu) vektor e_1^* dualan vektoru e_1, vektor e_2^* dualan vektoru e_2, itd. Naime, ako bismo tako pridruživali funkcionale vektorima, onda bismo izgubili informaciju o kontekstu (tj. o bazi kao cjelini), a ta je informacija ovdje važna, kako pokazuje sljedeći primjer.

U $\mathbb{R}^2$ pogledajmo kanonsku bazu $\{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ i njoj dualnu bazu $\{e_1^*, e_2^*\}$. Znamo da je $e_1^*(e_1) = 1$ i $e_1^*(e_2) = 0$; dakle je $e_1^*(x_1, x_2) = x_1$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Za usporedbu, pogledajmo sada bazu $\{e_1, a\}$, $e_1 = (1, 0), a = (1, -1)$ i njoj dualnu bazu $\{e_1^*, a^*\}$. Ovdje je $e_1^*(e_1) = 1$ i $e_1^*(a) = 0$, a odavde, za $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, imamo $e_1^*(x_1, x_2) = e_1^*((x_1 + x_2)e_1 - x_2 a) = x_1 + x_2$. Dualni funkcional e_1^* sada se razlikuje od onoga iz prethodne situacije; međutim, to i mora biti tako jer je e_1^* definiran svojim djelovanjem na *oba* vektora baze.

Vratimo se tvrdnji *propozicije 5.3.3.* Kako je $\dim V = \dim V^* = n$, prema *propoziciji 5.1.17*, ovi su prostori izomorfni. Izomorfizam je sad lako konstruirati: uzme se bilo koja baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za V, njoj dualna baza $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ za V^* i primjenom *propozicije 5.1.5* definira se operator $A : V \to V^*$ s $Ae_j = e_j^*$, $j = 1, \ldots, n$. *Propozicija 5.1.14* jamči da je to izomorfizam.

Problem je, međutim, u tome što za definiranje ovog izomorfizma moramo unaprijed odabrati i fiksirati neku bazu u V. Već smo istaknuli da to u praksi nerado činimo. Htjeli bismo zato naći neki izomorfizam $V \to V^*$ koji bi bio zadan prirodno, možda nekom formulom, a svakako neovisno o prethodnom izboru baze u V. Međutim, pokazuje se da to nije moguće.

U ovom trenutku je korisno primijetiti da možemo gledati i dualni prostor dualnog prostora, $(V^*)^* = V^{**}$. Često se prostor V^{**} naziva drugi dual ili bidual prostora V. Elemente biduala nije sasvim lako zamišljati jer je riječ o funkcionalima koji linearne funkcionale definirane na V preslikavaju u polje.

Olakotnu okolnost ovdje predstavljaju dvije činjenice. Prvo, $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$ pa su svi ovi prostori međusobno izomorfni. Drugo, postoji jednostavan način kojim možemo konstruirati elemente iz V^{**}. To činimo na sljedeći način: uzmimo i fiksirajmo $x \in V$ te definirajmo funkciju $\hat{x} : V^* \to \mathbb{F}$ s $\hat{x}(f) = f(x)$. Tvrdimo da je preslikavanje $\hat{x}$ linearno, tj. $\hat{x} \in V^{**}$. Zaista, $\hat{x}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) =$ (po definiciji operacija u $L(V, W)$, specijalno u V^*) $= \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \hat{x}(f) + \beta \hat{x}(g)$.

Dakle, za proizvoljan $x \in V$, preslikavanje $\hat{x}$ pripada prostoru V^{**}. U sljedećem teoremu pokazujemo da se na ovaj način dobivaju *svi* elementi biduala. Dio argumentacije iz dokaza teorema izdvojit ćemo u sljedeću lemu.

Lema 5.3.6. *Neka je V vektorski prostor, $\dim V = n < \infty$, te neka je $x \in V$ takav da vrijedi $f(x) = 0$, $\forall f \in V^*$. Tada je $x = 0$.*

Dokaz. Uzmimo bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ za V i njoj dualnu bazu $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$. Ako je $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ onda, prema pretpostavci, za svaki j, $1 \leq j \leq n$, imamo $0 = e_j(x) = \alpha_j$. Dakle, $x = 0$. $\square$

Teorem 5.3.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Preslikavanje $\phi : V \to V^{**}$ definirano s $\phi(x) = \hat{x}$ je izomorfizam vektorskih prostora.*

Dokaz. Već smo vidjeli da je preslikavanje ϕ dobro definirano, tj. da je $\phi(x) = \hat{x}$ zaista element prostora V^{**}. Dokažimo da je i linearno; u stvari treba vidjeti da su $\phi(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y)\hat{}$ i $\alpha\phi(x) + \beta\phi(y) = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y}$ jednake funkcije. To je, međutim, sasvim jednostavno; te dvije funkcije djeluju jednako na svakom funkcionalu $f \in V^*$ upravo zato što je f linearan. Naime, $(\alpha x + \beta y)\hat{}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, a s druge strane je $(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y})(f) = \alpha\hat{x}(f) + \beta\hat{y}(f) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Da bismo dokazali da je ϕ monomorfizam, treba vidjeti da je $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$. Uzmimo zato $x \in \operatorname{Ker}\phi$. Tada je $\phi(x) = \hat{x} = 0 \in V^{**}$. To znači da je $\hat{x}(f) = f(x) = 0$, $\forall f \in V^*$. Prethodna lema sad pokazuje da je $x = 0$.

Kako je $\dim V = \dim V^{**} < \infty$, tvrdnja teorema sad slijedi izravno iz *korolara 5.1.13.* $\square$

Izomorfizam ϕ iz prethodnog teorema zove se prirodni ili kanonski izomorfizam prostora V i njegova biduala. Ponekad se taj izomorfizam koristi kao identifikacija ovih dvaju prostora u smislu da vektore x iz prostora V poistovjećujemo s njihovim slikama $\phi(x)$ u bidualu. Tipičan primjer primjene ove identifikacije je ilustriran u *napomeni 5.3.10.*

Definicija 5.3.8. Neka je V vektorski prostor i M potprostor od V. Skup $M^0 = \{f \in V^* : f(x) = 0, \forall x \in M\} \subseteq V^*$ zove se anihilator potprostora M.

Propozicija 5.3.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i M potprostor od V. Tada je anihilator M^0 potprostora M potprostor dualnog prostora V^* i vrijedi $\dim M^0 = \dim V - \dim M$.*

Dokaz. Uzmimo $f, g \in M^0$ i proizvoljne skalare α i β. Treba provjeriti da je $\alpha f + \beta g \in M^0$. Neka je $x \in M$ proizvoljno odabran. Tada je, po definiciji operacija u dualnom prostoru, $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$.

Da dokažemo drugu tvrdnju, pretpostavimo da je M netrivijalan (inače je i tvrdnja trivijalna), odaberimo bazu $\{b_1, \ldots, b_k\}$ za M i nadopunimo je do baze $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ prostora V. U ovako uspostavljenim oznakama sada moramo dokazati da je $\dim M^0 = n - k$.

Neka je $\{b_1^*, \ldots, b_k^*, b_{k+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ dualna baza. Sada tvrdimo da je skup $\{b_{k+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ baza anihilatora M^0. Uočimo odmah da će ova tvrdnja kompletirati dokaz propozicije.

Prije svega, očito je $b_j^* \in M^0$, za svaki $j = k+1, \ldots, n$. Nadalje, skup $\{b_{k+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ je, kao podskup baze, linearno nezavisan. Preostaje samo dokazati da je to i sustav izvodnica za M^0. Da to utvrdimo, uzmimo proizvoljan $f \in M^0$ i odmah ga napišimo u obliku $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^*$. Međutim, kako je $f \in M^0$, za sve $j = 1, 2, \ldots, k$, imamo $0 = f(b_j) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^*)(b_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^*(b_j) = \alpha_j$ pa je zato $f = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i b_i^*$. $\square$

Napomena 5.3.10. Uzmimo opet da je $M \leq V$ i $\dim M = k$, $\dim V = n$. Pogledajmo $M^{00} = (M^0)^0 = \{\varphi \in V^{**} : \varphi(f) = 0, \forall f \in M^0\}$.

Tvrdimo da vrijedi $M^{00} = M$, pri čemu ovu jednakost treba razumjeti u smislu identifikacije prostora V i njegova biduala V^{**} putem kanonskog izomorfizma ϕ iz *teorema 5.3.7*. Tvrdimo, dakle, da vrijedi $M^{00} = \phi(M)$. Kako je ϕ izomorfizam, vrijedi $\dim \phi(M) = \dim M = k$ (usp. *zadatak 5*). S druge strane, dvostrukom primjenom prethodne propozicije dobivamo $\dim M^{00} = n - \dim M^0 = n - (n-k) = k$. Zaključujemo da su dimenzije potprostora M^{00} i $\phi(M)$ jednake, pa je za željenu jednakost $M^{00} = \phi(M)$ dovoljno pokazati da vrijedi $M^{00} \supseteq \phi(M)$.

Uzmimo proizvoljan $x \in M$ i pogledajmo $\hat{x} \in \phi(M)$. Treba vidjeti da je $\hat{x} \in M^{00}$, tj. da vrijedi $\hat{x}(f) = 0, \forall f \in M^0$. No, to je jasno: po definiciji preslikavanja $\hat{x}$ imamo $\hat{x}(f) = f(x) = 0$ jer je $x \in M$ i $f \in M^0$.

Napomena 5.3.11. Neka je $A \in L(V, W)$. Dualni operator $A^* \in L(W^*, V^*)$ je definiran formulom $A^* f = fA$. Uočimo najprije da je, za $f^* \in W^*$, zaista $A^* f = fA \in V^*$ jer je fA, kao kompozicija dvaju linearnih preslikavanja, linearno. Štoviše, i A^* je linearan operator. Nadalje, možemo promatrati i preslikavanje $L(V, W) \to L(W^*, V^*)$ definirano s $A \mapsto A^*$. Lako se vidi da je to izomorfizam vektorskih prostora. Također, vrijedi $(AB)^* = B^* A^*$ kad god se A i B mogu komponirati. Dokazi svih navedenih tvrdnji su ostavljeni za vježbu (*zadatak 27, 28*).

Ako je $\dim V, \dim W < \infty$, tvrdimo da je $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^*)$. Da to pokažemo, uzmimo bazu $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ za V takvu da je $\{Ae_1, \ldots, Ae_r\}$ baza za $\operatorname{Im} A$ i da je $Ae_{r+1} = 0, \ldots, Ae_n = 0$ (to se može učiniti točno kao u dokazu *teorema o rangu i defektu*). Implicitno smo, dakle, stavili $\mathrm{r}(A) = r$.

Sad za $i = 1, \ldots, r$, označimo $Ae_i = f_i$ i nadopunimo linearno nezavisan skup $\{f_1, \ldots, f_r\}$ do baze $\{f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_m\}$ prostora W. Pogledajmo dualnu bazu $\{f_1^*, \ldots, f_r^*, f_{r+1}^*, \ldots, f_m^*\}$ za W^*. Prema *napomeni 5.1.8*, skup $\{A^* f_1^*, \ldots, A^* f_r^*, A^* f_{r+1}^*, \ldots, A^* f_m^*\}$ je sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A^*$. Međutim, za $j > r$ uočavamo da je $A^* f_j^* = f_j^* A = 0$ jer je slika operatora A sadržana u $[\{f_1, \ldots, f_r\}]$. Zato je, dakle, skup $\{A^* f_1^*, \ldots, A^* f_r^*\}$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A^*$ i dokaz će biti kompletan ako uspijemo pokazati da je taj skup linearno nezavisan.

Zaista, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A^* f_i^* = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i^* A = 0 \Rightarrow (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i^*)A = 0$. Ovim funkcionalom sad djelujemo na vektor e_j za proizvoljan $j = 1, \ldots, r$, pa dobivamo $(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i^*)Ae_j = 0$. U drugu ruku, imamo $(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i^*)Ae_j = (\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i^*)f_j = \alpha_j$, i zato je $\alpha_j = 0$.

5.4. **Matrični zapis linearnog operatora.**

Ovdje ćemo detaljno proučiti postupak pridruživanja matrica vektorima i operatorima. Pokazat će se da je matrični račun uveden u trećem poglavlju pogodno tehničko sredstvo i u proučavanju apstraktnih vektorskih prostora i operatora koji na njima djeluju. U razmatranjima u ovoj točki svi će prostori biti konačnodimenzionalni, a njihove baze ćemo smatrati uređenima. Istaknimo još jednom da poredak vektora u bilo kojoj bazi nekog vektorskog prostora inače nije bitan; to je neposredna posljedica komutativnosti zbrajanja. Ovdje će, međutim, priroda naših razmatranja zahtijevati da u bazama s kojima operiramo unaprijed odaberemo i fiksiramo neki uređaj.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven prikaz oblika $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Sad možemo formirati jednostupčanu matricu $[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ koja se zove matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e.

Propozicija 5.4.1. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Preslikavanje $\varphi : V \to \mathbb{F}^n$, $\varphi(x) = [x]^e$, je izomorfizam.*

Dokaz. Ako je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, onda za $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ vrijedi $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) e_i$. Odavde je $[\lambda x + \mu y]^e = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \lambda[x]^e + \mu[y]^e$, što pokazuje da je φ linearan operator. Očito je $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, pa zaključujemo da je φ monomorfizam. Na kraju, preostaje primijeniti *korolar 5.1.13.* $\square$

Zamislimo sada da je dan operator $A \in L(V, W)$, te da su zadane baze $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ za V, odnosno W. Sjetimo se da je A potpuno određen svojim djelovanjem na bazi: ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo kompletno djelovanje operatora A. Vektore $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo pisati u obliku $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$, $j = 1, \ldots, n$.

Dobivene koeficijente možemo posložiti u matricu kako nalažu njihovi indeksi: $[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Dobivena matrica se zove matrični zapis (prikaz) operatora A u paru baza (e, f). Primijetimo da je j-ti stupac matrice $[A]_e^f$ zapravo $[Ae_j]^f$ (dakle, matrični zapis vektora Ae_j u bazi f), $\forall j = 1, \dots, n$.

Propozicija 5.4.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. Preslikavanje $\Phi : L(V, W) \to M_{mn}(\mathbb{F})$, $\Phi(A) = [A]_e^f$, je izomorfizam.*

Dokaz. Φ je očito linearan operator: ako za $A, B \in L(V, W)$ vrijedi $Ae_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i$ i $Be_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ij} f_i$, onda za $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ imamo $(\lambda A + \mu B)(e_j) = \sum_{i=1}^m (\lambda \alpha_{ij} + \mu \beta_{ij}) f_i$, za sve $j = 1, \dots, n$. Također je jasno da je $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$, što pokazuje da je Φ monomorfizam. Preostaje i ovdje primijeniti *korolar 5.1.13.* $\square$

Oznaka za preslikavanja iz obiju prethodnih propozicija je donekle neprecizna. S obzirom da oba preslikavanja bitno ovise o prethodno odabranim bazama, bilo bi preciznije pisati φ^e, odnosno Φ_e^f. Ipak, sve dok nema opasnosti od zabune, koristit ćemo jednostavnije oznake kao u iskazima prethodnih propozicija.

Primjer 5.4.3. Neka su e i f kanonske baze u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$. Matrični zapis operatora $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $A(x_1, x_2) = (6x_1 - x_2, -2x_1 + x_2, x_1 - 7x_2)$ u ovom paru baza je $[A]_e^f = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$.

Primjer 5.4.4. Neka je $e = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ kanonska baza u prostoru $V^2(0)$. Odredimo matrični zapis operatora rotacije za kut φ, $R_\varphi \in L(V^2(O))$, u paru baza (e, e). (Kako naš operator djeluje na jednom prostoru, očito jedna te ista baza može poslužiti i u domeni i u kodomeni. U ovakvim situacijama se umjesto o matričnom zapisu operatora u paru baza govori o matričnom zapisu operatora u bazi.) Lako se vidi da vrijedi $R_\varphi \vec{i} = \cos\varphi \, \vec{i} + \sin\varphi \, \vec{j}$ i $R_\varphi \vec{j} = -\sin\varphi \, \vec{i} + \cos\varphi \, \vec{j}$. Zato je $[R_\varphi]_e^e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Primjer 5.4.5. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ (već smo konstatirali da se A može shvatiti kao projektor na xy-ravninu). Ako je e kanonska baza u $\mathbb{R}^3$, onda je $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Primjer 5.4.6. Neka je $V = L \dot{+} M$ pri čemu je $\dim L = k$ i $\dim V = n$. Prema *propoziciji 2.3.15* znamo da tada svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven zapis u obliku $x = a+b$, $a \in L, b \in M$. Neka je sada preslikavanje $P : V \to V$ definirano formulom $Px = a$. Nije teško pokazati da je P linearan operator. P se zove projektor na potprostor L u smjeru potprostora M.

Neka je sada $\{e_1, \dots, e_k\}$ baza za L i $e = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ njezino nadopunjenje do baze za V. Tada je, ako matricu projektora P u bazi e pišemo kao blok matricu, $[P]^e_e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pri čemu je jedinična matrica I u lijevom gornjem bloku reda k. Uočimo da je ovaj primjer poopćenje prethodnoga.

Primjer 5.4.7. Pogledajmo operator deriviranja $D \in L(P_n)$, $Dp = p'$ na prostoru polinoma P_n. U P_n uzmimo bazu $b = \{1, t, \frac{1}{2}t^2, \dots, \frac{1}{k!}t^k, \dots, \frac{1}{n!}t^n\}$.

Tada je $[D]^b_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Napomena 5.4.8. Zadržimo oznake iz *propozicije 5.4.2.* Za $A \in L(V, W)$ pišimo $[A]^f_e = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$. Sjetimo se baze $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ prostora $L(V, W)$ koju smo konstruirali u dokazu *teorema 5.2.3.* Lako se vidi da u toj bazi operatoru A pripada rastav $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} E_{ij}$, gdje su α_{ij} upravo matrični koeficijenti iz matrice $[A]^f_e$.

Preslikavanje Φ ima još tri korisna svojstva koja navodimo u sljedeće tri propozicije. Prije svega, važna je okolnost da je pridruživanje matričnih zapisa vektorima i operatorima usklađeno s matričnim množenjem s jedne, i djelovanjem operatora s druge strane.

Propozicija 5.4.9. *Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, neka je $x \in V$ i $A \in L(V, W)$. Tada je $[Ax]^f = [A]^f_e [x]^e$.*

Dokaz. Stavimo $[A]^f_e = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$ i $[x]^e = [\lambda_i] \in M_{n1}$. Sada je $Ax = A(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j A e_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \lambda_j) f_i$. Unutarnja suma je i-ta komponenta u razvoju vektora Ax u bazi f (tj. i-ta komponenta u stupcu $[Ax]^f$); s druge strane, vidimo da je ta unutarnja suma upravo umnožak i-tog retka matrice $[A]^f_e$ i stupca $[x]^e$. $\square$

Na redu je propozicija koja pokazuje da je pridruživanje matričnog zapisa linearnim operatorima također usklađeno s komponiranjem operatora na jednoj, i matričnim množenjem na drugoj strani.

Propozicija 5.4.10. *Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ i $g = \{g_1, \dots, g_l\}$, redom, baze vektorskih prostora V, W i X, neka je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, X)$. Tada za operator $BA \in L(V, X)$ vrijedi $[BA]^g_e = [B]^g_f [A]^f_e$.*

Dokaz. Uočimo najprije da su matrice $[B]_f^g \in M_{lm}$ i $[A]_e^f \in M_{mn}$ ulančane i da je njihov produkt matrica tipa $l \times n$; baš kao i matrica $[BA]_e^g$. Zato tvrdnja ima smisla, a za dokaz samo treba provjeriti da se te dvije matrice podudaraju u svim matričnim koeficijentima.

Neka je $[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$ i $[B]_f^g = [\beta_{ij}] \in M_{lm}$. Tada je, za $1 \leq k \leq n$,
$BA(e_k) = B(Ae_k) = B(\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} f_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} Bf_i = \sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \sum_{j=1}^l \beta_{ji} g_j$
$= \sum_{j=1}^l (\sum_{i=1}^m \beta_{ji}\alpha_{ik}) g_j$.

Po definiciji matričnog zapisa operatora, skalar (tj. iznos sume) u zagradi stoji u j-tom retku i k-tom stupcu matrice $[BA]_e^g$, a očito je taj skalar ujedno i umnožak j-tog retka od $[B]_f^g$ i k-tog stupca od $[A]_e^f$. □

Napomena 5.4.11. Isprva se definicija matričnog množenja uvijek čini kao zamršen i neintuitivan koncept. Sad, nakon prethodnih dviju propozicija, vidimo stvarnu prirodu te definicije. Matrično množenje je, zapravo, i definirano tako kako jest upravo zato da bismo imali pravila računanja kakva su iskazana u prethodnim dvjema propozicijama.

Za zadani operator A koji djeluje na konačnodimenzionalnom prostoru definiran je pojam ranga. S druge strane, možemo promatrati i rang njegovog matričnog zapisa. Sljedeća propozicija tvrdi da se ta dva broja podudaraju, što je još jedna činjenica koja pokazuje da matrični zapis sadrži sve bitne informacije o operatoru.

Propozicija 5.4.12. *Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W, te neka je $A \in L(V, W)$. Tada je $r(A) = r([A]_e^f)$.*

Dokaz. Kako je, prema *napomeni 5.1.8*, skup $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$, to je $\operatorname{Im} A = [\{Ae_1, \dots, Ae_n\}]$ pa je po definiciji $r(A) = \dim(\operatorname{Im} A) = \dim[\{Ae_1, \dots, Ae_n\}]$.

U drugu ruku, stupci matrice $[A]_e^f$ su upravo $[Ae_1]^f, \dots, [Ae_n]^f$. Zato je, po definiciji ranga matrice, $r([A]_e^f) = \dim[\{[Ae_1]^f, \dots, [Ae_n]^f\}]$.

Spomenute dvije linearne ljuske su korespondentni potprostori pri izomorfizmu $\varphi : W \to \mathbb{F}^m$, $\varphi(y) = [y]^f$ iz *propozicije 5.4.1.* Imamo, dakle, $\mathrm{r}(A) = \dim[\{Ae_1, \dots, Ae_n\}]$ i $\mathrm{r}([A]_e^f) = \dim[\{\varphi(Ae_1), \dots, \varphi(Ae_n)\}]$. Kako izomorfizmi čuvaju linearnu nezavisnost (usp. *propoziciju 5.1.10* i *zadatak 5*), navedeni rangovi su jednaki. □

Sve do sada rečeno vrijedi i za operatore iz $L(V)$. Uočimo: kad imamo operator $A \in L(V)$, tada za formiranje njegove matrice nisu potrebne dvije baze jer se domena i kodomena podudaraju (kao u *primjerima 5.4.4, 5.4.5, 5.4.6, 5.4.7*). Ovdje je dovoljna jedna baza $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ prostora V i tada pišemo $[A]_e^e$ te govorimo o matričnom zapisu operatora u bazi e.

Dosad dokazane tvrdnje o matričnom zapisu operatora možemo u ovoj posebnoj situaciji rekapitulirati na sljedeći način: $\Phi : L(V) \to M_n$, $\Phi(A) =$

$[A]_e^e$ je izomorfizam vektorskih prostora koji, zbog *propozicije 5.4.10*, zadovoljava i $\Phi(BA) = \Phi(B)\Phi(A)$, $\forall A, B \in L(V)$. Lako se vidi da ovaj izomorfizam preslikava i jedinični operator u jediničnu matricu: $\Phi(I) = [I]_e^e = I$.

Korolar 5.4.13. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V. Tada je $\Phi : L(V) \to M_n(\mathbb{F})$, $\Phi(A) = [A]_e^e$ izomorfizam algebri.*

I idući korolar predstavlja vrlo korisnu tvrdnju o operatorima koji djeluju na jednom prostoru.

Korolar 5.4.14. *Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V. Operator $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je $[A]_e^e$ regularna matrica.*

Dokaz. Prema *korolaru 5.1.13*, $A \in L(V)$ je regularan ako i samo ako je surjektivan, dakle, ako i samo ako je $r(A) = n$. To je, prema *propoziciji 5.4.12*, ekvivalentno s $r([A]_e^e) = n$, a iz *teorema 3.3.15* znamo da je ovo ekvivalentno regularnosti matrice $[A]_e^e$. $\square$

Time je zaokružen niz najvažnijih činjenica o matričnim zapisima vektora i operatora. Prirodno je, međutim, pitati što se u ovom kontekstu događa ako mijenjamo baze. Preciznije, ako su e' i f' neke druge baze u V, odnosno W, u kojoj su vezi matrice $[x]^e$ i $[x]^{e'}$, te $[A]_e^f$ i $[A]_{e'}^{f'}$?

Teorem 5.4.15. *Neka je $A \in L(V, W)$ i neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ te $f = \{f_1, \dots, f_m\}$, $f' = \{f'_1, \dots, f'_m\}$ po dvije baze prostora V, odnosno W. Neka su operatori $T \in L(W)$ i $S \in L(V)$ definirani na bazama f, odnosno e, s $Tf_i = f'_i$, $i = 1, \dots, m$, i $Se_j = e'_j$, $j = 1, \dots, n$. Tada je $[A]_{e'}^{f'} = ([T]_f^f)^{-1}[A]_e^f[S]_e^e$.*

Prvo uočimo da se ovdje pojavljuju dva pomoćna operatora T i S, odnosno njihove matrice $[T]_f^f$ i $[S]_e^e$. U definiranju ta dva operatora koristili smo *propoziciju 5.1.5*. Dalje, i S i T prevode bazu u bazu - svaki u svom prostoru - pa su prema *propoziciji 5.1.14* oba izomorfizmi, tj. regularni operatori. Sad su prema *korolaru 5.4.14* matrice $[T]_f^f$ i $[S]_e^e$ regularne pa tvrdnja teorema (u kojoj se spominje $([T]_f^f)^{-1}$) ima smisla. Treba uočiti i da su matrice na desnoj strani jednakosti iz tvrdnje teorema zaista ulančane.

Sad primijetimo: kad imamo posla s operatorima iz $L(V)$ onda nam za formiranje matrice nisu potrebne dvije baze. No, mi smijemo, ako baš želimo, uzeti dvije baze te jednu od njih tretirati kao bazu domene, a drugu kao bazu kodomene. U normalnim okolnostima, to nikad ne činimo. Pogotovo ne za operator I jer je $[I]_e^e$ jedinična matrica za svaku bazu e; za razliku od toga, matrica $[I]_{e'}^e$ je znatno kompliciranija. Međutim, upravo promatranje matrice $[I]_{e'}^e$ će se pokazati ključnim trikom u dokazu koji slijedi.

Dokaz teorema 5.4.15. Označimo s I_V i I_W jedinične operatore na prostorima V i W.

Pogledajmo matricu $[I_V]^e_{e'}$: po definiciji matričnog zapisa operatora u paru baza, u njezinom j-tom stupcu su koeficijenti koji pripadaju razvoju vektora $I_V e'_j = e'_j$ u bazi e. Drugim riječima, u j-tom stupcu matrice $[I_V]^e_{e'}$ su koeficijenti koji pripadaju razvoju vektora $Se_j = e'_j$ u bazi e. Zato je $[I_V]^e_{e'} = [S]^e_e$. Sasvim analogno se zaključi da vrijedi i $[I_W]^f_{f'} = [T]^f_f$.

Sam dokaz je sada direktna posljedica *propozicije 5.4.10*: $[T]^f_f[A]^{f'}_{e'} = [I_W]^f_{f'}[A]^{f'}_{e'} = [I_W A]^f_{e'} = [A]^f_{e'} = [AI_V]^f_{e'} = [A]^f_e[I_V]^e_{e'} = [A]^f_e[S]^e_e$. Preostaje pomnožiti dobivenu jednakost $[T]^f_f[A]^{f'}_{e'} = [A]^f_e[S]^e_e$ s lijeve strane s $([T]^f_f)^{-1}$. □

Matrice $[S]^e_e$ i $[T]^f_f$ iz prethodnog dokaza uvedene su kao matrični zapisi nekih regularnih operatora. To naravno nije bilo nužno, mogli smo ih uvesti i direktno.

Konkretno: j-ti stupac matrice $[S]^e_e$ je upravo stupac koeficijenata koji pripadaju vektoru e'_j u bazi e; dakle,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i,\ \forall j = 1, \ldots, n,\ S(e) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1n} \end{bmatrix}.$$

Analogno bismo eksplicitno ispisali i matricu $[T]^f_f$. U iskazu teorema priklonili smo se indirektnom zadavanju matrica $[S]^e_e$ i $[T]^f_f$ iz pragmatičnih razloga. Naime, time što smo te matrice uveli kao matrične zapise regularnih operatora S i T, odmah smo, pozivanjem na *korolar 5.4.14*, mogli ustvrditi da su obje regularne.

Definicija 5.4.16. Matrica $[S]^e_e = [I]^e_{e'}$ zove se matrica prijelaza iz baze e u bazu e'.

Uočimo da je, (ne samo u kontekstu prethodnog dokaza) oznaka $[I]^e_{e'}$ znatno sadržajnija. U svakom slučaju, treba upamtiti da su stupci te matrice koeficijenti koje pripadaju vektorima e'_j u rastavu u bazi e.

Prva u nizu posljedica prethodnog teorema je odgovarajuća formula koja opisuje vezu između $[A]^e_e$ i $[A]^{e'}_{e'}$ za operator A iz $L(V)$. Ovdje je $W = V$ pa u *teoremu 5.4.15* treba uzeti $f = e$ te $f' = e'$. Tako dobivamo:

Korolar 5.4.17. *Neka je $A \in L(V)$, neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V te neka je $[S]^e_e = [I]^e_{e'}$ matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je $[A]^{e'}_{e'} = ([S]^e_e)^{-1}[A]^e_e[S]^e_e$.*

Sada možemo izračunati i inverz matrice prijelaza.

Korolar 5.4.18. *Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $[S]^e_e = [I]^e_{e'}$ matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je $([S]^e_e)^{-1} = ([I]^e_{e'})^{-1}$ matrica prijelaza iz baze e' u bazu e.*

Dokaz. $[I]_{e'}^{e}$ je matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Zamijenimo li uloge baza e i e', zaključujemo da je matrica prijelaza u obrnutom smjeru $[I]_{e}^{e'}$. Treba dokazati da je upravo to inverz za $[I]_{e'}^{e}$. No to sada slijedi direktnom primjenom *propozicije 5.4.10*: $[I]_{e'}^{e}[I]_{e}^{e'} = [I]_{e'}^{e'} = I$. Prema tvrdnji *zadatka 10* iz 3. poglavlja to je dovoljno da se zaključi da su $[I]_{e'}^{e}$ i $[I]_{e}^{e'}$ jedna drugoj inverzne matrice. □

Posljednji u nizu je korolar koji daje relaciju između matričnih prikaza vektora u dvjema različitim bazama.

Korolar 5.4.19. *Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V, neka je $[S]_e^e = [I]_{e'}^{e}$ matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada za svaki vektor x iz V vrijedi $[x]^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[x]^e$.*

Dokaz. S obzirom na prethodni korolar, tvrdnju koju dokazujemo možemo pisati u obliku $[x]^{e'} = [I]_{e}^{e'}[x]^e$. No, ova jednakost je samo specijalan slučaj tvrdnje *propozicije 5.4.9.* □

Primjer 5.4.20. Neka je e kanonska baza u $\mathbb{R}^2$, a $e' = \{e'_1, e'_2\}$, $e'_1 = (2, -1), e'_2 = (-1, 1)$. Neka je operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s $A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ te neka je $x = (1, 1)$. Izračunat ćemo $[Ax]^e$ i $[Ax]^{e'}$.

Najprije imamo $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $[x]^e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pa dobivamo $[Ax]^e = [A]_e^e[x]^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dalje, kako je $[S]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ i $([S]_e^e)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *korolar 5.4.19* povlači $[x]^{e'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Konačno, $[A]_{e'}^{e'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$, pa je $[Ax]^{e'} = [A]_{e'}^{e'}[x]^{e'} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Definicija 5.4.21. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = S^{-1}AS$.

Primijetimo da je sličnost relacija ekvivalencije na skupu $M_n(\mathbb{F})$. Dalje, sličnost je očito specijalan slučaj ekvivalentnosti pa zato slične matrice imaju jednake rangove. Osim toga, slične matrice imaju imaju jednake determinante i jednake tragove (*zadatak 33*).

Uz ovaj novi termin sada možemo parafrazirati *korolar 5.4.17.*

Korolar 5.4.22. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Matrični prikazi operatora A u raznim bazama su slične matrice.*

Na kraju ove točke navedimo još nekoliko napomena. Prva objašnjava postupak koji će se pokazati korisnim u mnogim situacijama.

Napomena 5.4.23. Često se nameće potreba za obratnim postupkom: za danu matricu A trebamo naći linearan operator čiji će matrični zapis u nekom paru baza (ili u nekoj bazi, ako je matrica kvadratna) biti upravo A. Evo kako to možemo učiniti. Neka je zadana matrica $A = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

Uzmimo dva vektorska prostora V i W nad $\mathbb{F}$ tako da je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, zatim neke baze $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ u V i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ u W te uz pomoć *propozicije 5.1.5* definirajmo $\tilde{A} \in L(V, W)$ formulom $\tilde{A}e_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i$, $\forall j = 1, \dots, n$. Jasno je da vrijedi $[\tilde{A}]_e^f = A$.

Još uočimo: ako je polazna matrica A kvadratna onda se može uzeti $W = V$ i $f = e$.

U cijelom ovom postupku malo je toga jednoznačno određeno: tek pripadno polje i dimenzije prostora W i V.

Jedan mogući standardni izbor bi bio uzeti operator množenja sa zadanom matricom A, tj. operator $L_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ zadan formulom $L_A x = Ax$. Direktnom provjerom se vidi da je matrični zapis operatora L_A u kanonskom paru baza prostora M_{n1} i M_{m1} upravo polazna matrica A.

Napomena 5.4.24. Neka je $Ax = b$ proizvoljan sustav linearnih jednadžbi i $Ax = 0$ pridružen homogeni sustav.

Uvedemo li kao u prethodnoj napomeni prostore V i W, operator $\tilde{A}$ i (analognim postupkom) vektor $\tilde{b} \in W$ takav da je $[\tilde{b}]^f = b$, primjenom *propozicija 5.4.1*, *5.4.2* i *5.4.9* rješavanje polaznog sustava svodi se na rješavanje vektorske jednadžbe $\tilde{A}x = \tilde{b}$. To omogućuje alternativni (i zapravo znatno brži i elegantniji) tretman sustava linearnih jednadžbi. Npr. informacija o dimenziji prostora rješenja homogenog sustava dobije se sada kao direktna posljedica *teorema o rangu i defektu*.

Napomena 5.4.25. Neka je $A \in L(V, W)$, neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze za V, odnosno W. Promotrimo $[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$.

Uzmimo sada dualne prostore V^* i W^*, dualni operator $A^* \in L(W^*, V^*)$ i dualne baze $e^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ i $f^* = \{f_1^*, \dots, f_m^*\}$. Neka je $[A^*]_{f^*}^{e^*} = [\beta_{ij}] \in M_{nm}$. Lako se pokaže da u stvari vrijedi $[A^*]_{f^*}^{e^*} = ([A]_e^f)^t$; dakle, ove dvije matrice su međusobno transponirane.

Neka je sada $A \in M_{mn}$ proizvoljna matrica. Uz pomoć *napomene 5.4.23* možemo naći pridruženi operator $\tilde{A}$. Kad na taj operator primijenimo tvrdnju iz prethodnog odlomka, *napomenu 5.3.11* i *propoziciju 5.4.12* zaključujemo: matrica A i transponirana matrica A^t imaju isti rang. Drugim riječima, svaka matrica ima jednak broj linearno nezavisnih redaka i stupaca. Ovo je konceptualni dokaz činjenice (*3.3.3*) koju smo u trećem poglavlju dokazali elementarnim sredstvima. Vidjet ćemo u idućem poglavlju da se isti teorem dokazuje još elegantnije uz pomoć svojstava operatora na unitarnim prostorima.

5.5. **Spektar.**

Neka je $A \in L^2(\mathbb{R}^2)$ operator kojem u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{R}^2$ pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Analiza ovako zadanog operatora nipošto nije teška; tako je uostalom sa svakim operatorom na prostoru $\mathbb{R}^2$ ili na bilo kojem drugom dvodimenzionalnom prostoru. Već smo vidjeli da su sve bitne informacije o operatoru pohranjene u njegovome matričnom zapisu. Primjerice, ovdje vidimo da je $r([A]_e^e) = 1$ pa je, zbog *propozicije 5.4.12*, i $r(A) = 1$. Dakle, A je singularan. Mogli bismo lako odrediti i jezgru ili bilo koji drugi podatak vezan za A. Ipak, sve postaje bitno lakše i jasnije onog trenutka kad shvatimo da matrični zapis operatora A u bazi $b = \{b_1 = (\frac{5}{2}, 1), b_2 = (2, 1)\}$ glasi $[A]_b^b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dakako da je svaki račun s ovom matricom lakši. Štoviše, odavde je odmah jasno da je A zapravo projektor na potprostor $[\{b_1\}]$ u smjeru potprostora $[\{b_2\}]$ (usp. *primjer 5.4.6*).

Ovaj primjer, premda sasvim jednostavan, zorno ilustrira ključnu ideju u proučavanju linearnih operatora na konačnodimenzionalnim prostorima.

Imamo li zadan operator $A \in L(V)$ na nekom konačnodimenzionalnom prostoru V, cilj nam je naći takvu bazu prostora V u kojoj će matrica operatora A biti čim jednostavnija. Koliko jednostavan matrični zapis danog operatora možemo naći, nije unaprijed jasno. Međutim, najjednostavnije bi bilo ako bismo postigli da u nekoj bazi $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ prostora V operatoru A pripada dijagonalna matrica: $[A]_a^a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$. Razlog je evidentan: ukoliko je matrica dijagonalna, njezin rang, determinanta, trag, inverz (ako postoji) ili bilo koji drugi podatak očiti su i bez računa.

Po definiciji matričnog zapisa linearnog operatora odmah vidimo da je dijagonalan matrični zapis u bazi a ekvivalentan sustavu jednakosti: $Aa_1 = \alpha_1 a_1, Aa_2 = \alpha_2 a_2, \dots, Aa_n = \alpha_n a_n$. Dakle, vektori baze a_i, $i = 1, \dots, n$, u ovoj situaciji imaju osobito svojstvo: operator A ih preslikava u njima kolinearne vektore. To nas navodi na ideju da općenito, za dani linearni operator, razmotrimo egzistenciju, metode nalaženja i svojstva takvih vektora.

Definicija 5.5.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V$, $x \neq 0$, takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar (operatora A) i označava sa $\sigma(A)$.

Ponekad se umjesto svojstvena vrijednost kaže i karakteristična vrijednost. U upotrebi je i termin vlastita vrijednost. Zanimljivo je da je u engleskom jeziku uvriježena njemačko-engleska kovanica *eigenvalue*.

Istaknimo odmah da je skalar λ_0 svojstvena vrijednost operatora A tek ako postoji *netrivijalan* vektor x sa svojstvom $Ax = \lambda_0 x$. Ovo ograničenje je zaista nužno jer za svaki skalar λ vrijedi $A0 = \lambda 0$; dakle, za svaki skalar možemo riješiti jednadžbu $Ax = \lambda \cdot x$. Svojstvene vrijednosti su, međutim, samo oni skalari za koje ta jednadžba ima i neko *netrivijalno* rješenje.

Napomena 5.5.2. (a) Vektor x iz navedene definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Treba primijetiti da svojstveni vektor nikako nije jedinstven: ako je x svojstveni vektor pridružen λ_0 onda je i αx svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar α iz $\mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$. Zaista, $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha(\lambda_0 x) = \lambda_0(\alpha x)$. Štoviše, neka svojstvena vrijednost λ_0 operatora A može posjedovati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora. Primjer je jedinični operator I: za njega su svi vektori prostora, osim nulvektora, svojstveni za svojstvenu vrijednost 1 jer vrijedi $Ix = 1 \cdot x$, $\forall x \in V$.

(b) Neka je $V_A(\lambda_0) = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}$. Ovaj skup se naziva svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Uočimo da je $V_A(\lambda_0)$ zaista potprostor jer evidentno vrijedi $V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$.

Primijetimo da je skup $V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\}$ uvijek, za svaki skalar λ, potprostor od V. Svojstvene vrijednosti su, međutim, oni skalari λ_0 za koje je potprostor $V_A(\lambda_0)$ netrivijalan. Kako je $V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$, iz *korolara 5.1.13* zaključujemo: svojstvena vrijednost operatora A je takav skalar λ_0 za koji je operator $A - \lambda_0 I$ singularan.

Posebno, 0 je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako je A singularan i u tom slučaju je svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti 0 zapravo jezgra operatora A.

(c) Ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_0)$ naziva geometrijska kratnost (ili geometrijski multiplicitet) svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$. Iz definicije je jasno da je $d(\lambda_0) \geq 1$.

Pogledajmo sada dva jednostavna primjera. U oba do zaključaka dolazimo jednostavnim geometrijskim argumentima.

Primjer 5.5.3. Operator $A \in L(V^2(O))$ zrcaljenja preko x-osi na prostoru $V^2(O)$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$; naime $A\vec{i} = \vec{i}$ i $A\vec{j} = -\vec{j}$. Geometrijski je očito (u što ćemo se kasnije uvjeriti i formalno) da su to jedine dvije svojstvene vrijednosti ovog operatora.

Idući primjer je još jednostavniji, a pokazuje da linearan operator ne mora imati svojstvenih vrijednosti. Uočimo odmah da to ujedno znači, u skladu s uvodnim razmatranjima, kako svaki operator ne mora dopuštati dijagonalizaciju (tj. ne mora postojati baza u kojoj će matrični zapis operatora biti dijagonalna matrica).

Primjer 5.5.4. Operator $R_\varphi \in L(V^2(O))$ rotacije za kut $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, $\varphi \neq 0, \pi$, nema svojstvenih vrijednosti. Zaista, jednakost $R_\varphi \vec{a} = \lambda_0 \vec{a}$ znači da su vektori $R_\varphi \overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{a}$ kolinearni, a takvih netrivijalnih vektora pri rotaciji za kut $\varphi \neq 0, \pi$ očito nema.

Nakon ovih početnih napomena, sad možemo započeti s traženjem odgovora na dva osnovna pitanja:

- kako za dani operator A odrediti sve svojstvene vrijednosti (ili utvrditi da ih nema),
- kako za svaku svojstvenu vrijednost odrediti pripadni svojstveni potprostor.

Pokazuje se da bitnu ulogu u ovim razmatranjima igra pojam svojstvenog polinoma kvadratne matrice.

Definicija 5.5.5. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni polinom matrice A.

I ovdje se ponekad umjesto svojstveni koriste atributi karakteristični i vlastiti.

Primijetimo da je $k_A(\lambda)$ zaista polinom u varijabli λ s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ i to n-tog stupnja - to slijedi izravno iz definicije determinante. Također iz definicije determinante odmah uočavamo da je vodeći koeficijent tog polinoma $(-1)^n$.

Na primjer, odmah se vidi da za jediničnu matricu n-tog reda imamo $k_I(\lambda) = (1 - \lambda)^n$. Uočimo također da za proizvoljnu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ drugog reda vrijedi $k_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A$.

Propozicija 5.5.6. *Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.*

Dokaz. Uzmimo $A, B \in M_n$ i regularnu matricu $S \in M_n$ takvu da vrijedi $B = S^{-1}AS$. Tada, jer matrica λI komutira sa svakom matricom iz M_n, uz pomoć *Binet-Cauchyjeva teorema* dobivamo: $k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) = \det(S^{-1})\det(A - \lambda I)\det S = \det(A - \lambda I) = k_A(\lambda)$. $\square$

Ova propozicija omogućuje da definiramo i pojam svojstvenog polinoma za linearne operatore $A : V \to V$ kad god je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Naime, odaberemo li neku bazu e za V, možemo formirati matrični zapis operatora A u bazi e i izračunati svojstveni polinom tako dobivene matrice. Kako je u svakoj drugoj bazi matrični zapis tog istog operatora neka matrica slična matrici $[A]_e^e$, prethodna propozicija povlači da svaki matrični zapis operatora A dovodi do istog svojstvenog polinoma. Zato je definicija koja slijedi dobra, tj. neovisna o izboru baze.

Definicija 5.5.7. Neka je V konačnodimenzionalan prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrični zapis operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, k_A, definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$: $k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda)$.

Primjer 5.5.8. U *primjeru 5.4.4* vidjeli smo da operatoru rotacije u kanonskoj bazi e pripada matrica $[R_\varphi]_e^e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Odavde se odmah vidi da je $k_{R_\varphi}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$.

Teorem 5.5.9. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi $k_A(\lambda_0) = 0$.*

Dokaz. Odaberimo neku bazu e za V. Sada imamo sljedeći niz međusobno ekvivalentnih tvrdnji: λ_0 je svojstvena vrijednost za $A \Leftrightarrow \exists x \in V$, $x \neq 0$, $Ax = \lambda_0 x \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\} \Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 5.1.9*) $A - \lambda_0 I$ nije monomorfizam $\Leftrightarrow$ (prema *korolaru 5.1.13*) $A - \lambda_0 I$ nije izomorfizam $\Leftrightarrow$ (prema *korolaru 5.4.14*) $[A - \lambda_0 I]_e^e$ nije regularna matrica $\Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 5.4.2*) $[A]_e^e - \lambda_0 I$ nije regularna matrica $\Leftrightarrow \det([A]_e^e - \lambda_0 I) = 0 \Leftrightarrow k_{[A]_e^e}(\lambda_0) = 0$ tj. $k_A(\lambda_0) = 0$. $\square$

Napomena 5.5.10. U osnovi, *teorem 5.5.9* tvrdi da su svojstvene vrijednosti operatora upravo nultočke njegovog svojstvenog polinoma. Primijetimo, međutim, da je jedna od pretpostavki teorema $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. To konkretno znači da su u realnim prostorima svojstvene vrijednosti samo realne nultočke svojstvenog polinoma. Pogledajmo ponovno primjer rotacije R_φ na $V^2(O)$ za kut $\varphi \neq 0, \pi$: znamo da taj operator nema svojstvenih vrijednosti, a isti zaključak nam daje i prethodni teorem jer svojstveni polinom $k_{R_\varphi}(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi$ nema *realnih* nultočaka za $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Napomena 5.5.11. Ako je $\dim V = n$ i $A \in L(V)$ onda A ima najviše n svojstvenih vrijednosti. Ovo je neposredna posljedica tvrdnje *teorema 5.5.9* jer polinom n-tog stupnja ima najviše n nultočaka.

Napomena 5.5.12. Sve do sada izbor polja u našim razmatranjima nije igrao nikakvu ulogu. *Teorem 5.5.9* očito predstavlja mjesto na kojem se teorija počinje dijeliti na realnu i kompleksnu. S jedne strane, polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno (što znači da svaki polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u polju $\mathbb{C}$), i zato svaki operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednost. Nasuprot tomu, polje $\mathbb{R}$ nije algebarski zatvoreno, tj. ima polinoma s realnim koeficijentima bez realnih nultočaka. Posljedično (usp. zadatak 57), operatori na realnim prostorima ne moraju imati svojstvenih vrijednosti. Operator rotacije je primjer jednog takvog operatora. Kasnije ćemo vidjeti da je ovaj operator u tom smislu tipičan.

Pokažimo sada kako za danu svojstvenu vrijednost λ_0 operatora $A \in L(V)$ računamo svojstvene vektore. Postupak kojim nalazimo cijeli svojstveni potprostor svodi se, putem koordinatizacije, na rješavanje jednoga homogenog sustava linearnih jednadžbi. Evo kako:

Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za V. Sad redom imamo: $Ax = \lambda_0 x \Leftrightarrow (A - \lambda_0 I)x = 0 \Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 5.4.1*) $[(A - \lambda_0 I)x]^e = 0 \Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 5.4.9*) $[A - \lambda_0 I]_e^e \cdot [x]^e = 0 \Leftrightarrow$ (prema *propoziciji 5.4.2*) $([A]_e^e - \lambda_0 I) \cdot [x]^e = 0$.

Ovo pokazuje da smo dobili homogen $n \times n$ sustav linearnih jednadžbi, zapisan u matričnom obliku, čiji prostor rješenja je u bijekciji (koju predstavlja izomorfizam φ iz *propozicije 5.4.1*) sa svojstvenim potprostorom $V_A(\lambda_0)$. Primijetimo da je matrica sustava singularna; naime, $\det([A]_e^e - \lambda_0 I) = 0$ upravo zato što je λ_0 svojstvena vrijednost operatora. Zato je prostor rješenja netrivijalan, tj. dimenzija mu je barem 1. Otprije znamo da tako i mora biti.

Pogledajmo kako opisani postupak izgleda na konkretnom primjeru.

Primjer 5.5.13. Uzmimo operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{R}^3$: $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Odredimo najprije spektar operatora A.

Kako je $[A]_e^e - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$, Laplaceovim razvojem po zadnjem stupcu odmah dobivamo $k_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Dakle je $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

Odredimo sada svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1$. Prema prethodnoj diskusiji trebamo riješiti pripadajući sustav jednadžbi.

$$[A]_e^e - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle je $x_1 = x_2 = x_3$, prostor rješenja je jednodimenzionalan i (jedna) baza mu je vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Slično bismo izračunali da bazu svojstvenog potprostora za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = 2$ čini vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Uočavamo da su obje geometrijske kratnosti (tj. dimenzije svojstvenih potprostora) jednake 1. S druge strane, $\lambda_1 = 1$ je dvostruka, a $\lambda_2 = 2$ samo jednostruka nultočka svojstvenog polinoma. Pokazat će se da je i inače korisno usporediti ove podatke. Uvedimo najprije pojam algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti. Definicija se temelji na činjenici da je svaka svojstvena vrijednost danog operatora nultočka njegovog svojstvenog polinoma.

Definicija 5.5.14. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda_0) \neq 0$, $l \in \mathbb{N}$. Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Teorem 5.5.15. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je $d(\lambda_0) \leq l(\lambda_0)$.*

Dokaz. Označimo algebarsku i geometrijsku kratnost od λ_0 s l, odnosno d. Neka je $\{e_1, \ldots e_d\}$ neka baza svojstvenog potprostora za λ_0. Ovaj nezavisan skup nadopunimo do baze $e = \{e_1, \ldots e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ prostora V. Kako je $Ae_i = \lambda_0 e_i$, $\forall i = 1, \ldots, d$, matrični prikaz operatora A u bazi e možemo pisati kao blok matricu oblika $[A]_e^e = \begin{bmatrix} \lambda_0 I & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$, pri čemu je $\lambda_0 I \in M_d(\mathbb{F})$ i $C \in M_{n-d}(\mathbb{F})$. Sad svojstveni polinom operatora A možemo izračunati i iz ovog matričnog zapisa. Pritom smo u poziciji iskoristiti *lemu 3.2.25.* Dobivamo $k_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^d q(\lambda)$ pri čemu je $q(\lambda)$ neki polinom stupnja $n - d$. S druge strane, po definiciji algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti, imamo $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda_0) \neq 0$. Zato je $(\lambda_0 - \lambda)^d q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$. Uzmimo sada da vrijedi $d > l$. Tada prethodnu jednakost možemo pisati u obliku $p(\lambda) = (-1)^d (\lambda - \lambda_0)^{d-l} q(\lambda)$, a odavde odmah slijedi $p(\lambda_0) = 0$, što je kontradikcija. $\square$

Napomena 5.5.16. Već znamo da za proizvoljan linearan operator općenito nije moguće naći bazu u kojoj bi njegova matrica bila dijagonalna. Osnovna smetnja je nedostatak svojstvenih vrijednosti (jer smo vidjeli da su dijagonalni koeficijenti u dijagonalnom matričnom zapisu zapravo svojstvene vrijednosti operatora). Mogućnost nalaženja baze u kojoj bi dani operator imao dijagonalan matrični zapis još uvijek je, međutim, otvorena za operatore na kompleksnim prostorima, kao i za one operatore na realnim prostorima čiji svojstveni polinomi imaju isključivo realne nultočke.

Prethodni teorem (i *primjer 5.5.13*) pokazuje još jednu moguću zapreku za egzistenciju dijagonalnoga matričnog zapisa danog operatora. Ukoliko je za neku svojstvenu vrijednost λ_0 njezina geometrijska kratnost $d(\lambda_0)$ strogo manja od algebarske kratnosti $l(\lambda_0)$, onda je evidentno nemoguće naći bazu u kojoj bi taj operator imao dijagonalnu matricu. Naime, ako je matrični prikaz operatora dijagonalna matrica, na dijagonali te matrice λ_0 se mora pojaviti točno $l(\lambda_0)$ puta, a to zahtijeva točno $l(\lambda_0)$ nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ_0. To pokazuje da je nužan uvjet dijagonalizacije operatora A jednakost algebarskih i geometrijskih multipliciteta svih njegovih svojstvenih vrijednosti: $d(\lambda) = l(\lambda)$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

Grubo govoreći, prethodna napomena pokazuje da je nepovoljno kad su svojstveni potprostori premali. Dobra je okolnost, međutim, da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima nezavisni.

Propozicija 5.5.17. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$, neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti operatora A te neka su $x_1, \ldots, x_k$ svojstveni vektori pridruženi, redom, svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Tada je skup $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Ako je $k = 1$ onda je skup $\{x_1\}$ nezavisan jer $x_1 \neq 0$. Pretpostavimo da je tvrdnja točna za $k-1$.

Neka je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$. Kad na tu jednakost djelujemo s A dobivamo $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$. Od ove jednakosti oduzmimo početnu jednakost prethodno pomnoženu s λ_k. Dobivamo $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_k)x_i = 0$. Prema pretpostavci indukcije slijedi $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k-1$. Kako su, međutim, svi λ_j međusobno različiti, slijedi $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k-1$. Tako je od početne jednakosti ostalo samo $\alpha_k x_k = 0$, a odavde je i $\alpha_k = 0$. □

U prethodnoj smo propoziciji za svaku svojstvenu vrijednost uzeli samo po jedan svojstveni vektor. Općenito, kako znamo, za neku svojstvenu vrijednost λ_0 imamo $d(\lambda_0)$ nezavisnih svojstvenih vektora. No sada možemo dokazati i odgovarajući, jači rezultat.

Teorem 5.5.18. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, te neka je $e^{(i)} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{d_i}^{(i)}\}$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Tada je unija $\cup_{i=1}^{k} e^{(i)}$ linearno nezavisan skup u V.*

Dokaz. Primijetimo prvo da smo geometrijske kratnosti u iskazu teorema implicitno označili s $d_1, \ldots, d_k$.

Neka je $\sum_{j=1}^{d_1} \alpha_j^{(1)} e_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{d_2} \alpha_j^{(2)} e_j^{(2)} + \ldots + \sum_{j=1}^{d_k} \alpha_j^{(k)} e_j^{(k)} = 0$. Za svaki $i = 1, \ldots, k$, označimo $x_i = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j^{(i)} e_j^{(i)} \in V_A(\lambda_i)$. Očito, ako za svaki i vrijedi $x_i = 0$, dokaz je gotov jer je svaki od skupova $e^{(i)} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots, e_{d_i}^{(i)}\}$ prema pretpostavci nezavisan.

Pretpostavimo stoga da su neki od vektora x_i različiti od 0. Bez smanjenja općenitosti smijemo uzeti da je $x_1, \ldots, x_r \neq 0$, $x_{r+1}, \ldots, x_k = 0$, $r \leq k$. Od početne jednakosti sada nam ostaje samo $x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 0$, a kako su vektori $x_1, \ldots, x_r$, svojstveni vektori (jer su netrivijalni!) za $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respektivno, dospjeli smo u kontradikciju s prethodnom propozicijom. □

Korolar 5.5.19. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake.*

Dokaz. Već smo vidjeli u *napomeni 5.5.16* da je jednakost algebarskih i geometrijskih multipliciteta nužan uvjet dijagonalizacije.

Obratno, jer je prostor kompleksan, svojstveni polinom operatora A je oblika $k_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{l_k}$, gdje je $l_1 + \ldots + l_k = n = \dim V$.

Preostaje primijeniti prethodni teorem: unija baza svojstvenih potprostora je linearno nezavisan skup koji ovdje, zbog pretpostavke o jednakosti algebarskih i geometrijskih kratnosti, ima točno n elemenata i zato čini bazu za V. Jasno je da je u toj bazi matrica operatora A dijagonalna. $\square$

Treba primijetiti da je tvrdnja korolara točna i za operatore na realnom prostoru koji ispunjavaju dodatni uvjet da im se svojstveni polinom može faktorizirati u linearne faktore nad poljem $\mathbb{R}$.

Za operatore na kompleksnim prostorima ovaj preduvjet je automatski ispunjen (jer se njihov svojstveni polinom uvijek može faktorizirati na linearne faktore) i jedina smetnja dijagonalizaciji je eventualni "manjak" svojstvenih vektora. Tipičan primjer operatora koji se ne može dijagonalizirati je $A \in L(V)$ koji u nekoj bazi e prostora V ima matricu $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Primijetimo da za ovu matricu vrijedi $([A]_e^e)^2 = 0$.

Općenito, za linearan operator (matricu) A kažemo da je nilpotentan (nilpotentna) ako je $A^k = 0$ za neki prirodni eksponent k. Nilpotentni operatori se prirodno pojavljuju. Najpoznatiji primjer je operator deriviranja na prostoru polinoma $D : P_n \to P_n$, $Dp = p'$. Pokazuje se da nilpotentni operatori igraju važnu ulogu u proučavanju strukture proizvoljnog operatora. Štoviše, uz pomoć tzv. Fittingove dekompozicije (u kojoj se proizvoljan operator rastavlja na regularan i nilpotentan dio) dolazi se do općeg teorema koji opisuje strukturu linearnih operatora na konačnodimenzionalnim prostorima.

Napomena 5.5.20. Sva prethodna razmatranja o spektru, svojstvenim vrijednostima, svojstvenim potprostorima, dijagonalizaciji ... proveli smo za linearne operatore na konačnodimenzionalnim prostorima. Često se, međutim, govori o istim pojmovima vezanim za neku matricu bez referiranja na neki određeni operator. Tako se onda govori o spektru matrice ili o dijagonalizaciji kvadratne matrice. Formalna interpretacija se izvodi uz pomoć induciranog operatora iz *napomene 5.4.23.* Podsjetimo se da je za danu matricu $A \in M_n$ operator $L_A \in L(M_{n1})$ definiran s $L_A x = Ax$. Kako u kanonskoj bazi e prostora M_{n1} vrijedi $[L_A]_e^e = A$, to je $k_{L_A} = k_A$ pa se zaista može reći da su svojstvene vrijednosti operatora L_A i matrice A iste. Osim toga, za svaku svojstvenu vrijednost λ operatora L_A i svojstveni vektor x jednakost $L_A x = \lambda x$ glasi $Ax = \lambda x$ pa se i vektor x može smatrati svojstvenim vektorom matrice A.

U praksi, kad računamo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A, operator L_A ne trebamo i ne spominjemo. No prethodna opaska pokazuje da se svi rezultati o spektru i svojstvenim vektorima, iako izrečeni i dokazani za operatore, primjenjuju i na matrice.

Za kraj ovih razmatranja preostalo je rasvijetliti ulogu kompleksnih nultočaka svojstvenog polinoma operatora na realnom prostoru. Za to trebamo uvesti još jedan pojam.

Definicija 5.5.21. Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Kaže se da je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A ako vrijedi $A(M) \subseteq M$, tj. $Ax \in M$, $\forall x \in M$.

Svaki operator ima dva trivijalna invarijantna potprostora; to su $\{0\}$ i V. Naravno, zanimljivi su samo pravi, netrivijalni invarijantni potprostori. Takav je npr. $\operatorname{Im} A \leq V$ za svaki singularan operator A na V. Dalje, uočimo da je svaki svojstven potprostor operatora A ujedno i invarijantan za A. Da obrat ne vrijedi, odmah pokazuje primjer rotacije za neki kut oko z-osi u prostoru $V^3(O)$: za njega je $V^2(O)$ invarijantan, ali ne i svojstven potprostor.

Egzistencija invarijantnih potprostora za dani operator je uvijek korisna informacija. Zamislimo da je netrivijalan potprostor $M \leq V$ invarijantan za $A \in L(V)$, $\dim V = n$, pa odaberimo neku bazu $\{e_1, \dots e_k\}$ za M. Neka je $(e) = \{e_1, \dots e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ neko njezino nadopunjenje do baze cijelog prostora V. Očito je matrični prikaz $[A]_e^e$ operatora A u bazi e gornjetrokutasta blok-matrica oblika $[A]_e^e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, gdje je $A_{11} \in M_k$. Primijetimo i sljedeći koristan kriterij invarijantnosti: ako je dana baza $\{e_1, \dots e_k\}$ nekog potprostora $M \leq V$ onda je M invarijantan za $A \in L(V)$ ako i samo ako je $Ae_i \in M$, $\forall i = 1, \dots, k$. Naime, u jednom smjeru je tvrdnja trivijalna, a za $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in M$ i $Ae_i \in M$, $\forall i = 1, \dots, k$, očito je i $Ax \in M$.

Uzmimo sada matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ i pretpostavimo da je $k_A(\lambda_0) = 0$, $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\beta \neq 0$. Željeli bismo istražiti kakvo značenje za matricu A ima ova kompleksna nultočka svojstvenog polinoma k_A. (Primijetimo da ovdje koristimo pristup spomenut u *napomeni 5.5.20*: polazimo od matrice, te govorimo o njezinom svojstvenom polinomu i njegovoj nultočki.)

Pogledajmo operator $L_A \in M_{n1}(\mathbb{R}^n)$, $L_A x = Ax$. Već smo konstatirali da je u kanonskoj bazi e prostora $M_{n1}(\mathbb{R})$ matrica našeg operatora $[L_A]_e^e$ upravo polazna matrica A. Zato je $k_{L_A} = k_A$. Na ovaj način u razmatranje smo uveli operator na realnom prostoru čiji svojstveni polinom ima kompleksnu nultočku.

Sad primijetimo da naša matrica A može množiti i kompleksne stupce pa zato možemo uvesti i operator $\widetilde{L_A} : M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C})$, $\widetilde{L_A} z = Az$. Jasno je da je matrični prikaz operatora $\widetilde{L_A}$ u kanonskoj bazi prostora $M_{n1}(\mathbb{C})$ točno isti kao matrični prikaz operatora L_A u kanonskoj bazi prostora $M_{n1}(\mathbb{R})$; tj. upravo polazna matrica matrica A. Zato je i svojstveni polinom ostao isti.

Vrijedi, dakle, $k_{\widetilde{L_A}} = k_A$, pa je zato i $k_{\widetilde{L_A}}(\lambda_0) = 0$. Kako je, međutim, $\widetilde{L_A}$ operator na kompleksnom prostoru, zaključujemo da mu je λ_0 svojstvena vrijednost.

Zato postoji stupac $z \in M_{n1}(\mathbb{C})$, $z \neq 0$, takav da je $\widetilde{L_A} z = \lambda_0 z$, tj. $Az = \lambda_0 z$. Pišimo z u obliku $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Sad možemo izjednačiti realne i imaginarne dijelove u prethodnoj jednakosti. Iz $A(x + \mathrm{i}y) = (\alpha +$

$\mathrm{i}\beta)(x+\mathrm{i}y)$ dobivamo
(1) $\quad Ax = \alpha x - \beta y,$
(2) $\quad Ay = \beta x + \alpha y.$
Uočimo da je skup $\{x, y\}$ linearno nezavisan u $M_{n1}(\mathbb{R})$. Zaista, $x \neq 0$: u protivnom bismo iz (1) dobili $\beta y = 0$ i sad bi zbog $\beta \neq 0$ moralo biti $y = 0$, a time i $z = 0$, što je kontradikcija. Sad kad znamo da x nije 0, pretpostavimo da postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je $y = \gamma x$. Slijedilo bi $Ay \overset{(2)}{=} \beta x + \alpha y = \beta x + \alpha\gamma x$, a s druge strane, $Ay = \gamma Ax \overset{(1)}{=} \gamma(\alpha x - \beta y) = \alpha\gamma x - \beta\gamma^2 x$. Uspoređivanjem slijedi $\beta(1+\gamma^2)x = 0$, no to je kontradikcija jer niti jedan faktor nije 0.

Zaključujemo: dobili smo dvodimenzionalan potprostor M od $M_{n1}(\mathbb{R})$ generiran s x i y. Sad jednakosti (1) i (2) pokazuju da je M očito invarijantan za operator L_A. Označimo s R restrikciju našeg operatora na potprostor M, dakle, $R \in L(M)$. Na kraju, nađimo matricu operatora R u bazi $e = \{y, x\}$ od M. Iz jednakosti (1) i (2) vidimo da je $[R]_e^e = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$. Iz ove matrice izlučit ćemo faktor $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Usput primijetimo da možemo pisati $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \cos\varphi$ i $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \sin\varphi$ za neki $\varphi \in \mathbb{R}$. Nakon svega, imamo $[R]_e^e = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.

Rezimirajmo: kompleksna nultočka svojstvenog polinoma matrice A implicira postojanje jednog dvodimenzionalnog potprostora, invarijantnog za A, na kojem A djeluje kao kompozicija jedne homotetije i jedne rotacije. U ovom zaključku poistovjetili smo polaznu matricu A s operatorom L_A (jer, striktno govoreći, samo za operatore možemo govoriti o invarijantnim potprostorima). Jasno je da je ovdje poanta u rotaciji koja je, kako smo vidjeli već na početku razmatranja o spektru, prototip operatora bez svojstvenih vrijednosti. Slobodnije govoreći, izvedeni zaključak možemo izreći i na sljedeći način: svaki operator na realnom prostoru čiji svojstveni polinom ima kompleksnu nultočku djeluje u jednom dvodimenzionalnom "sloju" tog prostora poput rotacije na $V^2(O)$.

Vratimo se svojstvenom polinomu matrice, odnosno operatora.

Najprije, ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ primijetimo da su zbog asocijativnosti množenja dobro definirane potencije A^k, $\forall k \geq 0$: stavljamo $A^0 = I, A^1 = A$ i induktivno $A^{k+1} = AA^k$, $k \in \mathbb{N}$ (usp. *zadatak 2* u 3. poglavlju). Na isti je način dobro definirano potenciranje operatora $A \in L(V)$ na vektorskom prostoru V (kao i proizvoljnog elementa bilo koje druge asocijativne algebre s jedinicom).

Sad, ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ (analogno je za $A \in L(V)$) i ako je dan polinom $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$, onda je dobro definirana matrica $p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i \in M_n(\mathbb{F})$.

Za danu matricu A mogli bismo poželjeti naći polinom p, $p \not\equiv 0$, takav da vrijedi $p(A) = 0$. Zanimljivo je da takav polinom uvijek postoji. Argument je sasvim jednostavan: skup $\{I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$ je očito linearno zavisan u $M_n(\mathbb{F})$, te zato postoji netrivijalan izbor skalara α_i, $i = 0, 1, \ldots, n^2$, takvih da je $\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i A^i = 0$. Ako sada definiramo $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i \lambda^i$, polinom p je očito netrivijalan i zadovoljava $p(A) = 0$.

Sad kad znamo da polinomi koje A poništava postoje, možemo pokušati naći takav polinom čim manjeg stupnja. Sasvim neočekivano, izlazi da je i k_A jedan takav polinom.

Teorem 5.5.22. *(Hamilton-Cayley.) Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada je $k_A(A) = 0$.*

Dokaz. Dokaz se temelji na činjenici (*korolar 3.2.24*) da adjunkta $\widetilde{T}$ kvadratne matrice T zadovoljava jednakost $T\,\widetilde{T} = (\det T)I$.

Neka je $C = A - \lambda I$ i $\det C = k_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda^1 + \alpha_0\lambda^0$. Sada je $C\,\widetilde{C} = A\,\widetilde{C} - \lambda\,\widetilde{C}$ i s druge strane $C\,\widetilde{C} = (\det C)I$. Usporedit ćemo ova dva rezultata. Pritom uočimo: elementi matrice $\widetilde{C}$ su polinomi $n-1$. stupnja pa zato matricu $\widetilde{C}$ možemo napisati i kao polinom $n-1$. stupnja s matričnim koeficijentima. Dobivamo

$$\begin{gathered} \alpha_n\lambda^n I + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} I + \ldots \alpha_1\lambda I + \alpha_0 I \\ = AC_{n-1}\lambda^{n-1} + AC_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + AC_1\lambda + AC_0 \\ -C_{n-1}\lambda^n - C_{n-2}\lambda^{n-1} - \ldots - C_1\lambda^2 - C_0\lambda \end{gathered}$$

pri čemu smo $\widetilde{C}$ shvatili kao polinom u λ s matričnim koeficijentima C_{n-1}, C_{n-2}, ..., C_0. Usporedba odgovarajućih koeficijenata sada daje sljedeći sustav jednakosti:

$$\begin{aligned} \alpha_n I &= -C_{n-1} \\ \alpha_{n-1} I &= AC_{n-1} - C_{n-2} \\ \alpha_{n-2} I &= AC_{n-2} - C_{n-3} \\ &\ldots \\ \alpha_1 I &= AC_1 - C_0 \\ \alpha_0 I &= AC_0. \end{aligned}$$

Ako prvu jednakost pomnožimo s A^n, drugu s A^{n-1}, analogno nastavimo dalje, na kraju posljednju jednakost pomnožimo s $A^0 = I$ i nakon toga sve dobivene jednakosti zbrojimo, izlazi $k_A(A) = 0$. □

Korolar 5.5.23. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je $k_A(A) = 0$.*

Dokaz. Uzmimo neku bazu e za V i matrični zapis $[A]_e^e$. Preostaje primijeniti *korolar 5.4.13* i prethodni teorem. □

U kontekstu *Hamilton-Cayleyeva teorema*, odnosno prethodnog korolara, sad možemo za dani operator pokušati naći polinom s najmanjim mogućim stupnjem koji će A poništiti. To nas dovodi do definicije minimalnog polinoma, ali i izvan okvira naših razmatranja u ovom udžbeniku. Činjenica je da za neke operatore na n-dimenzionalnom prostoru postoje i polinomi stupnja manjeg od n koje će taj operator poništiti. Takav je, na primjer, svaki projektor. Lako se pokazuje da za svaki projektor P vrijedi $P^2 = P$, što znači da za polinom $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ vrijedi $p(P) = 0$.

Uz pomoć minimalnog polinoma moguće je precizno "mjeriti" razliku između algebarske i geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti. Zato je minimalni polinom važan čimbenik u proučavanju strukture danog linearnog operatora.

Na kraju, važno je spomenuti i da se na Hamilton-Cayleyjevom teoremu temelji vrlo jednostavna metoda invertiranja kvadratnih matrica.

Izvest ćemo najprije još jedan kriterij regularnosti kvadratne matrice. Primijetimo da je i iduća propozicija "matrično" orijentirana (usporedite *napomenu 5.5.20*).

Propozicija 5.5.24. *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $k_A(0) \neq 0$.*

Dokaz. Uzmimo, kao u *napomeni 5.4.23*, prostor V i na njemu operator $\tilde{A}$ takav da u nekoj bazi e od V imamo $[\tilde{A}]_e^e = A$. Posebno, sada je $k_{\tilde{A}} = k_A$. Prema *korolaru 5.4.14*, A je regularna matrica ako i samo ako je $\tilde{A}$ regularan operator. Iz *napomene 5.5.2(b)* znamo da je to ako i samo ako 0 nije svojstvena vrijednost za $\tilde{A}$, a to je, prema *teoremu 5.5.9*, ako i samo ako $k_{\tilde{A}}(0) \neq 0$, tj. ako i samo ako $k_A(0) \neq 0$. $\square$

Uzmimo sada matricu $A \in M_n$ i njezin svojstveni polinom $k_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i$. Prema prethodnoj propoziciji sada znamo da je A regularna ako i samo ako je $\alpha_0 \neq 0$.

Pretpostavimo da je tako. *Hamilton-Cayleyjev teorem* nam sada daje $\sum_{i=0}^n \alpha_i A^i = 0$ što možemo pisati kao $\alpha_0 I = -(\sum_{i=1}^n \alpha_i A^i)$, odnosno, nakon izlučivanja faktora A na desnoj strani, kao $\alpha_0 I = -(\sum_{i=1}^n \alpha_i A^{i-1})A$. Konačno, nakon dijeljenja s α_0 dobivamo $I = -\frac{1}{\alpha_0}(\sum_{i=1}^n \alpha_i A^{i-1})A$, a znamo da je to dovoljno da se zaključi kako je $A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0}(\sum_{i=1}^n \alpha_i A^{i-1})$.

Ilustrirajmo prethodni račun primjerom. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Očito je $k_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda - 3$ i, kako je $k_A(0) = -3$, zaključujemo da je A regularna. Kao u prethodnom izvodu sada nalazimo da je $A^{-1} = \frac{1}{3}(-A^2 + A + 3I) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

5.6. **Zadaci.**

1. Provjerite sve tvrdnje navedene u *primjeru 5.1.3* .

2. Neka su $A : V \to W$ i $B : W \to X$ linearni operatori. Pokažite da vrijedi $r(BA) \leq r(A)$ i $r(BA) \leq r(B)$.

3. Dokažite: ako je $A : V \to W$ izomorfizam onda je i inverzno preslikavanje $A^{-1} : W \to V$ linearno preslikavanje, dakle izomorfizam.

4. Neka je $A : V \to W$ linearan operator, neka je $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, linearno nezavisan skup u $\operatorname{Im} A \subseteq W$, te neka su vektori $x_i \in V$ odabrani tako da vrijedi $Ax_i = y_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$. Pokažite da je i skup $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan.

5. Neka je $A : V \to W$ izomorfizam i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ konačan skup vektora u V. Pokažite da tada vrijedi $\dim [\{Av_1, \ldots, Av_m\}] = \dim [\{v_1, \ldots, v_m\}]$. Vrijedi li ista tvrdnja ako pretpostavimo da je A samo monomorfizam?

6. Odredite jezgru i sliku operatora $T \in L(M_2)$ definiranog s $T(X) = XA - AX$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

7. U ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}$ odredite rang i defekt te po jednu bazu jezgre i slike operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, P_2)$ definiranog s $A(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \alpha x_3 + (x_1 + x_2 + 2x_3)t + (\alpha x_1 + x_3)t^2$.

8. Provjerite da je preslikavanje $A : P_3 \to M_2(\mathbb{R})$ definirano s $Ap = \begin{bmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) + p(-1) & p'(1) + p'(-1) \end{bmatrix}$ linearan operator pa mu nađite rang i defekt.

9. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Dokažite da za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r(A) \leq k \leq \dim V$ postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $AB = 0$ i $r(A) + r(B) = k$.

10. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dokažite da skup svih regularnih operatora na V čini grupu s kompozicijom kao binarnom operacijom. (Ponekad se ta grupa označava s $GL(V)$.)

11. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $M \leq V$. Pokažite da postoje linearni operatori $A, B \in L(V)$ takvi da je $\operatorname{Ker} A = M$ i $\operatorname{Im} B = M$. Postoji li operator $C \in L(V)$ sa svojstvom $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Im} C = M$?

12. Neka je M potprostor vektorskog prostora V. Pokažite da je kvocijentno preslikavanje $\pi : V \to V/M$ definirano s $\pi(x) = [x]$ (tj. $\pi(x) = x + M$) linearan operator. (Ovaj (očito surjektivan) operator se često naziva kanonski epimorfizam.)

13. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, te neka je $A : V \to W$ epimorfizam. Dokažite da je tada preslikavanje $A^\natural : V/\operatorname{Ker} A \to W$, $A^\natural([x]) = Ax$ dobro definirano, linearno i bijektivno (dakle, $A^\natural$ je izomorfizam).

14. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $P \in L(V)$ operator sa svojstvom $P^2 = P$. Pokažite da je tada $V = \operatorname{Im} P \dotplus \operatorname{Ker} P$ i da je P projektor na $\operatorname{Im} P$ u smjeru $\operatorname{Ker} P$.

15. Dokažite da je rezultat množenja linearnog operatora skalarom iz *definicije 5.2.1* također linearan operator.

16. Dokažite da je $L(V,W)$ zaista vektorski prostor, tj. da operacije zbrajanja i množenja skalarom na $L(V,W)$ zaista zadovoljavaju sve potrebne uvjete iz *definicije 2.1.2.*

17. Dokažite tvrdnje (4) i (5) *propozicije 5.2.4.*

18. Ispitajte nezavisnost skupa $\{A,B,C\}$ u prostoru $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ ako je $A(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_1-x_2-x_3)$, $B(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,x_1+x_2-x_3)$, $C(x_1,x_2,x_3)=(-x_1-x_2-3x_3,x_1+x_3)$.

19. Neka su e i f kanonske baze u prostorima $\mathbb{R}^2$, odnosno $\mathbb{R}^3$, te neka su $E_{ij}\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ operatori iz dokaza *teorema 5.2.3.* Odredite u ovoj situaciji eksplicitne formule za djelovanje operatora E_{ij}.

20. Pokažite da su preslikavanja $f,g:P_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ definirana s $f(p)=\int_0^1 p(t)dt$, odnosno $g(p)=\int_{-1}^1 p(t)dt$ linearni funkcionali.

21. Za bazu $\{(1,2,1),(1,0,1),(1,0,-1)\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ odredite dualnu bazu.

22. Izvedite opći oblik linearnog operatora $A\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. (Uputa: neka je $\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^m$ i $\{f_1^*,f_2^*,\ldots,f_m^*\}$ pripadna dualna baza. Promatrajte funkcionale f_i^*A na prostoru $\mathbb{R}^n$ i iskoristite *primjer 5.3.4.*)

23. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $\{f_1,\ldots,f_n\}$ baza dualnog prostora V^*. Je li ta baza dualna nekoj bazi prostora V?

24. Provjerite da funkcionali $f_1(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2$, $f_2(x_1,x_2,x_3)=x_2-x_3$, $f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1-x_2+x_3$ čine bazu prostora $(\mathbb{R}^3)^*$, i nađite bazu prostora $\mathbb{R}^3$ kojoj je ona dualna.

25. Dokažite da za potprostore L i M konačnodimenzionalnog prostora V i njihove anihilatore vrijedi $(L+M)^0=L^0\cap M^0$, te $(L\cap M)^0=L^0+M^0$.

26. Neka je S podskup vektorskog prostora V. Anihilator skupa S se definira kao $S^0=\{f\in V^*: f(x)=0,\ \forall x\in S\}$. Dokažite da je S^0 potprostor dualnog prostora V^* te da vrijedi $S^0=[S]^0$.

27. Pokažite da je, za dani operator $A\in L(V,W)$, i njegov dualni operator A^* definiran u *napomeni 5.3.11* linearan. Dalje, pokažite da je preslikavanje $A\mapsto A^*$ izomorfizam prostora $L(V,W)$ i $L(W^*,V^*)$.

28. Pokažite da za bilo koja dva operatora $A,B\in L(V)$ vrijedi $(AB)^*=B^*A^*$.

29. Neka je $A\in L(V,W)$, neka su $e=\{e_1,\ldots,e_n\}$ i $f=\{f_1,\ldots,f_m\}$ baze za Vi W te neka su e^* i f^* dualne baze. Dokažite da je tada $[A^*]_{f^*}^{e^*}=([A]_e^f)^t$.

30. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Pokažite da za svaki linearan funkcional na $L(V)$ postoji jedinstven operator $D\in L(V)$ takav da je $f(A)=\operatorname{tr}(AD)$, $\forall A\in L(V)$.

31. Neka je f linearan funkcional na M_n takav da je $f(AB)=f(BA)$, za sve $A,B\in M_n$, i $f(I)=n$. Pokažite da je tada $f=\operatorname{tr}$.

32. Neka je $A\in L(V)$ regularan operator te neka je e neka baza prostora V. Pokažite da tada vrijedi $[A^{-1}]_e^e=([A]_e^e)^{-1}$.

33. Neka su $A, B \in M_n$ slične matrice. Pokažite da A i B imaju jednake determinante i jednake tragove.

34. Promotrimo elementarne matrice drugog reda: $E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{1,\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_{2,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $E_{2,1,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, $E_{1,2,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pri čemu je $\lambda \neq 0$. Neka su $A_{1,2}$, $A_{1,\lambda}$, $A_{2,\lambda}$, $A_{2,1,\lambda}$ i $A_{1,2,\lambda}$ operatori na prostoru $V^2(O)$ kojima u kanonskoj bazi $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$, redom, pripadaju navedene elementarne matrice. Interpretirajte geometrijski djelovanje ovih operatora.

35. Nađite matricu operatora $T \in L(M_2)$ definiranog s $T(X) = XA - AX$, gdje je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, u kanonskoj bazi prostora M_2.

36. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ u kanonskoj bazi, a zatim i u bazi $\{(1,1,0), (1,1,1), (1,-1,0)\}$, ako je $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_2-x_3, x_3)$.

37. Odredite neku bazu za jezgru, te defekt i rang operatora $A \in L(\mathbb{R}^4)$ kojem u kanonskoj bazi e pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

38. Dokažite da je $A \in L(\mathbb{R}^3)$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2-x_3, x_2+7x_3, -x_3)$ regularan operator i odredite $[A^{-1}]_e^e$ ako je e kanonska baza prostora $\mathbb{R}^3$.

39. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ kojem u kanonskoj bazi e pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}$.

40. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ kojem u bazi $a = \{(1,1,-1), (1,-1,0), (-1,0,0)\}$ pripada matrica $[A]_a^a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

41. Dokažite da svaki linearan operator na realnom prostoru neparne dimenzije ima bar jednu svojstvenu vrijednost.

42. Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora A. Pokažite da $v_1 + v_2$ ne može biti svojstven vektor za A. Postoje li skalari α_1 i α_2 takvi da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ svojstven vektor za A?

43. Neka je $V_A(\lambda_0)$ svojstveni potprostor operatora $A \in L(V)$ pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Pokažite da je $V_A(\lambda_0)$ invarijantan potprostor za svaki operator $B \in L(V)$ koji komutira s A.

44. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Za operator $A \in L(V)$ definirajmo operator $\mathsf{L}_A : L(V) \to L(V)$ formulom $\mathsf{L}_A(B) = AB$. Pokažite da je $\sigma(\mathsf{L}_A) = \sigma(A)$.

45. Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor. Dokažite da za svaki operator $A \in L(V)$ postoji baza b za V takva da je $[A]_b^b$ gornjetrokutasta matrica.

46. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Dokažite da ne postoji pravi potprostor od V invarijantan za sve operatore iz $L(V)$ (u tom smislu se kaže da je $L(V)$ ireducibilna familija operatora).

47. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ operator takav da vrijedi $AB = BA, \forall B \in L(V)$. Dokažite da tada postoji skalar α takav da je $A = \alpha I$. (Uputa: pokažite da A ima bar jednu svojstvenu vrijednost i promatrajte odgovarajući svojstveni potprostor.)

48. Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $A \in L(V)$. Pokažite da je tada λ^k svojstvena vrijednost operatora A^k, $\forall k \in \mathbb{N}$. Pokažite još da tvrdnja vrijedi i za sve $k \in \mathbb{Z}$ uz uvjet da je A regularan.

49. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ operator ranga 1. Pokažite da postoji polinom p drugog stupnja takav da je $p(A) = 0$.

50. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadajuće svojstvene potprostore operatora transponiranja $T \in L(M_2)$, $T(A) = A^t$.

51. Invertirajte pomoću svojstvenog polinoma matricu $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

52. Dokažite da je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definiran s $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$ regularan, odredite mu matrični prikaz u kanonskoj bazi, odredite pomoću svojstvenog polinoma inverz matrice $[A]_e^e$ te odredite formulu prema kojoj djeluje inverzni operator A^{-1}.

53. Neka operatoru $A \in L(\mathbb{C}^2)$ u kanonskoj bazi e prostora $\mathbb{C}^2$ pripada matrica $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & 2 \end{bmatrix}$. Odredite a ako je poznato da je 0 svojstvena vrijednost operatora A. Može li se A dijagonalizirati? Ako može, odredite bazu prostora $\mathbb{C}^2$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

54. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ odredite parametre a i b ako je poznato da je A singularna te da njezine svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 2.

55. Dokažite da za operatore A, B na konačnodimenzionalnom prostoru V vrijedi $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

56. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ matrice takve da postoji $T \in GL(n, \mathbb{C})$ takva da vrijedi $B = T^{-1}AT$. Dokažite da tada postoji i $S \in GL(n, \mathbb{R})$ takva da vrijedi $B = S^{-1}AS$.

57. Neka je p polinom n-tog stupnja, $n \in \mathbb{N}$, s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Pokažite da postoji vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, i operator $A \in L(V)$ takav da je $k_A = p$.

6. Unitarni prostori

Promotrimo prostor V^3 klasa orijentiranih dužina u E^3, opisan u dodatku na kraju 2. poglavlja. U V^3 je kut između netrivijalnih vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ definiran kao neorijentiran kut $\measuredangle OAB$ koji pripada segmentu $[0, \pi]$. Taj kut označavamo simbolom $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Po definiciji je, dakle, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{a})$. Treba primijetiti da definicija kuta između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zahtijeva da za oba vektora najprije nađemo reprezentante s početkom u istoj točki O. Iz definicije ekvivalencije orijentiranih dužina je jasno da kut ne ovisi o izboru točke O. Uočimo također da su netrivijalni vektori kolinearni ako i samo ako im je kut 0 ili π, ovisno o tome jesu li jednake ili suprotne orijentacije.

Sada se, uz ovako uveden pojam kuta, u V^3 definira skalarni produkt $\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}), & \text{ako je } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}. \end{cases}$$

Primijetimo da je skalarni produkt operacija množenja vektora u kojoj je rezultat skalar; otuda i ime. Običaj je, kao i kod množenja brojeva, da se znak množenja izostavlja pa se skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kraće označava s $\vec{a}\,\vec{b}$. Također, umjesto $\vec{a}\,\vec{a}$ pišemo $\vec{a}^2$. Uočimo usput da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. U idućem teoremu navodimo osnovna svojstva skalarnog produkta na prostoru V^3.

Teorem A. *Skalarno množenje na V^3 ima sljedeća svojstva:*

(1) $\vec{a}^2 \geq 0$, $\forall \vec{a} \in V^3$;
(2) $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$;
(3) $(\alpha \vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\,\vec{b})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$;
(4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$;
(5) $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^3$.

Dokaz. Sve tvrdnje, osim (4), su očite. Tvrdnja (4) dokazuje se računom u kojemu bitnu ulogu igra sljedeća lema.

Lema. *Za sve $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ vrijedi $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b}$ i $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\,\vec{b}$.*

Dokaz. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, obje tvrdnje su očite. Pretpostavimo zato da vektori nisu kolinearni. Ako stavimo $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{BC}]$, onda je $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = [\overrightarrow{AC}]$. Uočimo da za kut φ kod vrha B u trokutu ABC vrijedi $\varphi = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Sada iz kosinusovog poučka u trokutu ABC dobivamo: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi - \varphi) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\,\vec{b}$.

Slično se dokazuje i druga tvrdnja. □

Dokaz tvrdnje (4) iz teorema A. U dokazu ćemo prešutno koristiti komutativnost skalarnog množenja (to je svojstvo (5) iz teorema). Uz to, u računu koji slijedi nekoliko puta ćemo iskoristiti lemu: $4(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = 4\vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) = (2\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}))^2 - 4\vec{c}^2 - (\vec{a}+\vec{b})^2 = (2\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b}))^2 - 4\vec{c}^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 = ((\vec{a}+\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c}))^2 + ((\vec{a}+\vec{c})-(\vec{b}+\vec{c}))^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 = 2(\vec{a}+\vec{c})^2 + 2(\vec{b}+\vec{c})^2 - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 4\vec{c}^2 = 4\vec{a}\vec{c} + 4\vec{b}\vec{c}$. Preostaje podijeliti s 4 početni i završni izraz u ovom nizu jednakosti. □

Fiksirajmo sada pravokutni koordinatni sustav u E^3 i označimo s $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektore čiji su reprezentanti, redom, jedinične orijentirane dužine u smjeru pozitivnih dijelova koordinatnih osi. Znamo da je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ baza prostora V^3. (Uočimo da ovdje koristimo uobičajeni dogovor prema kojem se s $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ označavaju i vektori i orijentirane dužine koje te vektore reprezentiraju.)

Iz definicije skalarnog produkta je odmah jasno da je $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ (jer modul sva tri vektora iznosi 1), i $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$ (jer su ovi vektori međusobno okomiti). S obzirom da se inače kaže da je vektor čiji modul iznosi 1 normiran, prethodne jednakosti možemo kratko rekapitulirati tako da kažemo kako je skup $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormiran. Jer je taj skup ujedno i baza prostora V^3, još se kaže da je riječ o ortonormiranoj bazi.

U toj, kanonskoj bazi prostora V^3 svaki vektor $\vec{a}$ ima prikaz oblika $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ gdje su $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Sada je lagano izvesti formulu za skalarni produkt vektora ukoliko su oba dana svojim zapisom u kanonskoj bazi. Naime, sve što trebamo je pozvati se na distributivnost i kvaziasocijativnost skalarnog množenja (to su svojstva (3) i (4) iz *teorema A*) i iskoristiti "tablicu množenja" vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Teorem B. *Neka su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dani svojim zapisom u kanonskoj bazi prostora V^3: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Tada je $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

Iz ovog teorema slijedi važna nejednakost u skupu realnih brojeva.

Teorem C. *(Cauchy-Schwarzova nejednakost.) Neka su (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) proizvoljne uređene trojke realnih brojeva. Tada je $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$.*

Dokaz. Promotrimo vektore $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ i $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ i primijetimo da je, zbog $|\cos\varphi| \leq 1$, $\forall\varphi \in \mathbb{R}$, $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| = |\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}||\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$. □

Vidimo, dakle, da je vektorski prostor V^3 snabdjeven još jednom operacijom - skalarnim produktom - koja na izvjestan način nadograđuje linearnu strukturu. Važno je uočiti da je skalarni produkt potpuno usklađen sa zbrajanjem i množenjem skalarima u V^3 (to pokazuju svojstva (3) i (4) iz *teorema A*), a istodobno nosi i dodatne geometrijske informacije poput modula ($|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2}$) ili okomitosti (jer $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$).

U daljnje detalje svojstava skalarnog množenja u prostoru V^3 ovdje nećemo ulaziti (a zainteresiranog čitatelja upućujemo na [4] gdje je provedena kompletna diskusija o prostoru V^3 i operacijama s vektorima). Umjesto toga, kao i prije, željeli bismo istražiti mogućnost uvođenja skalarnog produkta i u druge, apstraktne vektorske prostore. Kao i u izgradnji opće teorije vektorskih prostora, i ovdje ćemo iskoristiti prostor V^3 kao prototip te ćemo i u apstraktnom kontekstu nastojati slijediti intuiciju utemeljenu na geometrijskoj prirodi skalarnog množenja u V^3.

6.1. **Ortogonalnost.**

Skalarno množenje u V^3 izrijekom je definirano u terminima modula i kuta dvaju vektora. Da bismo uveli skalarni produkt u apstraktan vektorski prostor gdje pojmovi poput modula i kuta nisu a priori definirani, očito je potrebno promijeniti rakurs: umjesto "kopiranja" definicije, definicionim uvjetima apstraktnog skalarnog množenja ovdje ćemo proglasiti svojstva skalarnog produkta u V^3 koja smo utvrdili u *teoremu A*. U prvom redu treba primijetiti da je skalarno množenje u V^3 preslikavanje $\cdot : V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$; stoga će skalarni produkt na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ biti preslikavanje $V \times V \to \mathbb{F}$.

Definicija 6.1.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalarni produkt na V je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V$;
(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in V$;
(4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$;
(5) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in V$.

Uočimo prvo običaj da se u apstraktnim prostorima produkt dvaju vektora x i y označava simbolom $\langle x, y \rangle$ umjesto tradicionalnim $x \cdot y$. U istom duhu, i terminologija odstupa od klasične. Ovdje se svojstva (3) i (4) zovu aditivnost i homogenost na prvom argumentu (a ne, kao u V^3, distributivnost i kvaziasocijativnost).

Slično je i s posljednjim svojstvom. Prije svega, treba primijetiti da skalarni produkt poprima vrijednosti u polju nad kojim je dani vektorski prostor izgrađen; ako je, dakle, prostor kompleksan, zadnje svojstvo kaže da su skalarni umnošci $\langle x, y \rangle$ i $\langle y, x \rangle$ međusobno konjugirani kompleksni brojevi. Ako je pak prostor realan, skalarni umnožak bilo koja dva vektora je realan broj pa kompleksno konjugiranje nema efekta i ovo svojstvo u realnim prostorima glasi $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. Stoga se u realnim prostorima svojstvo (5) naziva simetričnost, a u kompleksnim prostorima hermitska simetričnost.

I u nastavku ćemo se pridržavati konvencije primijenjene u iskazu tog svojstva u prethodnoj definiciji. Bez obzira na to je li prostor realan ili kompleksan, uvijek kad budemo mijenjali poredak faktora u skalarnom produktu primijenit ćemo kompleksno konjugiranje kao da radimo u kompleksnom prostoru. Time se ne čini greška niti se prejudicira polje: ako je prostor u kojem radimo realan, skalarni produkt je po definiciji realna funkcija i kompleksno konjugiranje primijenjeno na realan broj $\langle y, x\rangle$ nema efekta. Na ovaj način ćemo sve naše tvrdnje iskazivati i dokazivati, gdje god to bude moguće, istovremeno i za realne i za kompleksne vektorske prostore.

Napomena 6.1.2. (a) Očito, svojstva (3) i (4) iz definicije skalarnog produkta povlače $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1\langle x_1, y\rangle + \alpha_2\langle x_2, y\rangle$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}, \forall x_1, x_2, y \in V$. Indukcijom se sada lako dokazuje da vrijedi i $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, y\rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x_i, y \in V$. Kaže se zato da je skalarno množenje linearno u prvom argumentu.

(b) Svojstva (3) i (4), a također i prethodna opaska, reflektiraju se i na drugi argument preko svojstva (5). Očito vrijedi $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$, $\forall x, y_1, y_2 \in V$, $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$ i $\langle x, \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\langle x, y_i\rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall x, y_i \in V$. Kako skalari s drugog argumenta izlaze kompleksno konjugirani, kaže se da je skalarno množenje antilinearno u drugom argumentu. Naravno, ako je prostor V realan, skalarni produkt je linearan u obje varijable.

(c) $\langle x, 0\rangle = \langle x, y - y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0$, $\forall x \in V$. Jasno je da vrijedi i $\langle 0, y\rangle = 0$, $\forall y \in V$.

(d) Uočimo da i u kompleksnom slučaju, premda su vrijednosti skalarnog produkta općenito kompleksni brojevi, uvjet (1) iz definicije zahtijeva da produkt $\langle x, x\rangle$ bude realan, čak ne-negativan, za sve vektore x.

Definicija 6.1.3. Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor.

Primjer 6.1.4. 1. V^3 je unitaran prostor.

2. U $\mathbb{R}^n$ skalarni produkt je definiran s $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Ova formula kojom je zadan skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ zapravo je inspirirana prethodnim *teoremom B*.

3. U $\mathbb{C}^n$ skalarni produkt je definiran s $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

4. U $M_n(\mathbb{F})$ skalarni produkt je definiran s $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^* A)$, pri čemu je matrica B^* hermitski adjungirana matrici B. Podsjetimo se da se za kompleksnu matricu $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ definira $B^* = [x_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, $x_{ij} = \overline{b_{ji}}$. Primijetimo i ovdje da se za realne matrice hermitsko adjungiranje svodi na transponiranje: ako je $B \in M_n(\mathbb{R})$ onda je $B^* = B^t$.

5. U $\mathbb{R}^2$ definirajmo $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = 3x_1 y_1 + 4x_2 y_2$. Lako je pokazati da je ovo preslikavanje skalarni produkt. Ovdje nije bitno $n = 2$, i nisu bitni faktori 3 i 4. Jasno je da analogne primjere imamo i u $\mathbb{R}^n$ s bilo kojim izborom strogo pozitivnih koeficijenata. Primjer pokazuje da nije sasvim korektno govoriti o unitarnom prostoru V jer na istom prostoru može biti (i uvijek ima!) više različitih skalarnih produkata. Ipak, mi ćemo govoriti o unitarnim prostorima $\mathbb{F}^n$ i $M_n(\mathbb{F})$, a kad god tako činimo podrazumijevamo standardne skalarne produkte na tim prostorima opisane u prethodnim primjerima 2, 3 i 4.

6. U prostoru realnih polinoma čiji stupanje je manji ili jednak n, $P_n(\mathbb{R})$, skalarni produkt je definiran s $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$. I ovdje postoje druge mogućnosti; na primjer, $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt$ je još jedan skalarni produkt na istom prostoru.

7. U $C([0,1])$ jedan skalarni produkt je definiran formulom $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Ovaj nam primjer neće biti važan jer promatramo samo konačnodimenzionalne prostore, no istaknimo da je skalarni produkt jednako važan koncept i u proučavanju beskonačnodimenzionalnih prostora.

U svim izloženim primjerima lako se utvrđuje da navedena preslikavanja zaista zadovoljavaju svojstva skalarnog produkta iz *definicije 6.1.1*, pa je provjera ostavljena za vježbu (*zadatak 1*).

Vidjeli smo u *teoremu C*, razmatrajući na početku ovog poglavlja skalarni produkt na V^3, da vrijedi Cauchy-Schwarzova nejednakost. To je bila neposredna posljedica definicije i činjenice da za svaki φ vrijedi $|\cos\varphi| \leq 1$. Zanimljivo je da ista nejednakost vrijedi i općenito.

Teorem 6.1.5. *(Cauchy-Schwarzova nejednakost.) Neka je V unitaran prostor. Tada je $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ za sve x,y iz V. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.*

Dokaz. Primijetimo da nismo specificirali polje. U dokazu ćemo postupiti kako je navedeno u komentaru iza definicije skalarnog produkta. Operirat ćemo sa skalarnim produktom kao da je antilinearan na drugom argumentu, tj. kao da je prostor kompleksan. Ako se zapravo radi o realnom slučaju, time ne činimo pogrešku jer se kompleksno konjugiranje koje se u računu pojavljuje odnosi na realne skalare pa ni nema efekta.

Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, nema se što dokazivati. Uzmimo zato da su x i y netrivijalni vektori. Neka je λ bilo koji skalar. Tada je

$$0 \leq \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle - \lambda\langle y,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle.$$

Uvrstimo sada $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ - to smijemo jer $y \neq 0$, pa zato i $\langle y,y\rangle \neq 0$:

$$0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,x\rangle - \frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle x,y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\frac{\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,y\rangle.$$

Nejednakost ima smisla unatoč tomu što je skalarni produkt na kompleksnom prostoru kompleksna funkcija. To je direktna posljedica prvog uvjeta iz definicije skalarnog produkta. Nadalje, uočimo da se zadnja dva izraza dokidaju. Kad još pomnožimo nejednakost s $\langle y, y\rangle$, dobivamo

$$0 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle,$$

odnosno

$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Ako je $y = \alpha x$ za neki skalar α, očito se dobije jednakost. Ako vrijedi jednakost, onda upravo provedeni račun pokazuje da je $y = \lambda x$. $\square$

Nejednakost koju smo upravo dokazali je korisna tehnička pomoć pri računanju u unitarnim prostorima. No, na konceptualnom nivou, njezine posljedice su puno dublje. Da to objasnimo, podsjetimo se da za sve $\overrightarrow{v} \in V^3$ vrijedi $|\overrightarrow{v}|^2 = \overrightarrow{v}^2$. To nas navodi na ideju da, poopćujući ovu formulu, i u apstraktnom vektorskom prostoru uvedemo koncept modula, odnosno "duljine" vektora. Naravno, pritom se nadamo da će i ovaj apstraktno uveden pojam duljine imati neka razumna svojstva koja intuitivno očekujemo kad razmišljamo u duljini. To je zaista tako i u tom se kontekstu prethodno dokazana nejednakost pokazuje važnom.

Definicija 6.1.6. Neka je V unitaran prostor. Norma na V je funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definirana s $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Prvo uočimo da je norma dobro definirana jer je u svakom unitarnom prostoru, realnom ili kompleksnom, $\langle x, x\rangle \geq 0$. Dalje, uz pomoć norme, Cauchy-Schwarzovu nejednakost možemo pisati u obliku $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. Normu nekog vektora iz unitarnog prostora zamišljat ćemo kao duljinu tog vektora. Da je to razumno, pokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 6.1.7. *Norma na unitarnom prostoru V ima sljedeća svojstva:*

(1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$;
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V$;
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V$.

Dokaz. Jedino netrivijalno svojstvo je (4) koje se inače naziva nejednakost trokuta. No, ta se nejednakost dokazuje direktnom primjenom *teorema 6.1.5*: $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$. $\square$

Napomena 6.1.8. (a) Norma na svakom unitarnom prostoru V zadovoljava tzv. relaciju paralelograma: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, $\forall x, y \in V$. Ova jednakost je izravna posljedica definicije norme i skalarnog produkta. Interpretacija i opravdanje naziva ove jednakosti očiti su u unitarnom prostoru V^3 gdje se zbrajanje izvodi po zakonu paralelograma pa su stoga $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$ i $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$ duljine dijagonala paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{x}$ i $\overrightarrow{y}$.

(b) Svaka funkcija na vektorskom prostoru sa svojstvima iz *propozicije 6.1.7* naziva se norma. U našoj situaciji norma je zadana prirodno (kao i u V^3), iz skalarnog produkta. Kad god imamo normu $\|\cdot\|$ na vektorskom prostoru V, smisleno je definirati i preslikavanje $d : V \times V \to \mathbb{R}$ formulom $d(x,y) = \|x - y\|$. Sad se vidi da je prirodno ovakvo preslikavanje shvaćati kao razdaljinsku funkciju ili metriku na V, tj. kao funkciju koja mjeri udaljenost elemenata x i y. Zaista, $d(x,y)$ ima sva razumna svojstva koja intuitivno očekujemo. Vrijedi, naime,

(1) $d(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in V$;
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(3) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in V$;
(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in V$.

Sva navedena svojstva slijede direktno iz svojstava norme pomoću koje je naša metrika definirana. U drugu ruku, sva uočena svojstva metrike su logična i očekivana, pa u tom smislu daju uporište našem razumijevanju ove funkcije kao mjere udaljenosti elemenata prostora V.

Razmatranja koja se temelje na prisutnosti metrike prelaze okvir ovog udžbenika. No, istaknimo još jednom da skalarni produkt prirodno omogućuje (na prethodno opisan način) uvođenje metrike u svaki unitaran prostor.

Napomena 6.1.9. Korisno je zabilježiti i sljedeću direktnu posljedicu definicije skalarnog produkta. Vidjeli smo kako se pomoću skalarnog produkta u proizvoljnom unitarnom prostoru V definira norma. Zanimljivo je da se skalarni produkt u V može rekonstruirati iz tako uvedene norme. Naime, za sve x, y iz V vrijedi sljedeća polarizacijska formula:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle$$

ako je prostor realan, odnosno

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle - \frac{1}{4}\langle x-y, x-y\rangle + \frac{i}{4}\langle x+iy, x+iy\rangle - \frac{i}{4}\langle x-iy, x-iy\rangle$$

ako je prostor kompleksan. U oba slučaja formule slijede izravno iz definicionih svojstava skalarnog produkta pa verifikaciju prepuštamo čitatelju.

Definicija 6.1.10. Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$ normiran ako je $\|x\| = 1$.

Normirani vektori su, dakle, vektori jedinične duljine. U tom smislu se često umjesto normiran kaže jedinični vektor. Primijetimo da je za svaki $x \neq 0$, vektor $\frac{1}{\|x\|}x$ normiran.

Slično kao što smo u apstraktan unitaran prostor uveli pojam duljine vektora, možemo uvesti i pojam okomitosti. Sjetimo se da je u V^3 skalarni produkt dvaju vektora jednak 0 ako i samo ako su ti vektori okomiti. To izravno motivira sljedeću definiciju.

Definicija 6.1.11. Neka je V unitaran prostor. Kaže se da su vektori x, y iz V međusobno okomiti ili ortogonalni (oznaka: $x \perp y$) ako je $\langle x, y\rangle = 0$. Konačan skup vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortogonalan ako je $e_i \perp e_j$, $\forall i \neq j$. Skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Analogno se definira pojam ortogonalnosti za beskonačne podskupove unitarnih prostora. No ubrzo ćemo vidjeti da su u konačnodimenzionalnim prostorima ortogonalni skupovi nužno konačni.

Uočimo da je $0 \perp x$, $\forall x \in V$ - to smo konstatirali u *napomeni 6.1.2(c)*. U tom smislu ortogonalan skup može sadržavati i nulvektor. Drugačije je kad je skup ortonormiran: u njemu su svi vektori netrivijalni jer su jedinične duljine.

Činjenicu da je skup $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormiran možemo elegantno zapisati kao $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \ldots, k$, pri čemu je δ_{ij} Kroneckerov simbol.

U prostoru V^3 su netrivijalni vektori koji su međusobno ortogonalni evidentno linearno nezavisni. Željeli bismo da koncept ortogonalnosti koji smo upravo uveli i u apstraktne unitarne prostore također ima takvo svojstvo. Idući propozicija nam kaže da je zaista tako.

Propozicija 6.1.12. *Neka je V unitaran prostor. Svaki ortogonalan skup $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq V$, $k \in \mathbb{N}$, čiji su svi članovi netrivijalni vektori je linearno nezavisan. Posebno, svaki ortonormiran skup je linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = 0$. Nakon skalarnog množenja s e_j i primjene *napomene 6.1.2(a)* dobivamo $\alpha_j \langle e_j, e_j\rangle = 0$. Kako je $e_j \neq 0$, smijemo dijeliti s $\langle e_j, e_j\rangle$, pa izlazi $\alpha_j = 0$. $\square$

Definicija 6.1.13. Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u unitarnom prostoru V je ortonormirana baza ako je taj skup ujedno i baza za V.

Ortonormiran skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ će biti ortonormirana baza unitarnog prostora V čim je taj skup ujedno i sustav izvodnica za V; to je očita posljedica prethodne propozicije.

Lako je ustanoviti da je u unitarnim prostorima V^3 i $\mathbb{R}^n$ najjednostavnije operirati s ortonormiranim bazama. Primijetimo usput da je kanonska baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ prostora V^3 ortonormirana te da je ortonormirana i kanonska baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ (i u $\mathbb{C}^n$). Pokažimo da su ortonormirane baze vrlo korisne u svakom unitarnom prostoru.

Napomena 6.1.14. Neka je skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V. Svaki vektor iz V dopušta jedinstven prikaz u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. No sada, za razliku od obične baze u nekom običnom vektorskom prostoru, ortonormirana baza "dopušta" da koeficijente vektora x jednostavno i prirodno odredimo: skalarnim množenjem prethodne jednakosti s

e_j odmah dobivamo $\alpha_j = \langle x, e_j\rangle$ za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Vrijedi, dakle,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \ \forall x \in V.$$

Osim toga, i skalarni produkt dvaju vektora možemo jednostavno izraziti pomoću njihovih komponenti u bilo kojoj ortonormirnoj bazi. Zaista, ako je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V, onda za $x, y \in V$ imamo $\langle x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle y, e_j\rangle e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_j\rangle} \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle e_j, y\rangle \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle e_i, y\rangle$.

Podsjetimo se da se u općem vektorskom prostoru nalaženje prikaza nekog vektora u danoj bazi svodi na rješavanje jednog Cramerovog sustava jednadžbi. U tom svjetlu, prethodna napomena pokazuje kako u unitarnom prostoru prisutnost ortonormirane baze znatno olakšava račun. To je dovoljan razlog da se posvetimo pitanju egzistencije ortonormirane baze u općim unitarnim prostorima.

Sljedeći teorem osigurat će egzistenciju ortonormirane baze u svakom konačnodimenzionalnom prostoru. No vidjet ćemo kasnije da su njegove posljedice i dublje.

Teorem 6.1.15. *(Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije.) Neka je dan linearno nezavisan skup* $\{x_1, \ldots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, *u unitarnom prostoru* V. *Tada postoji ortonormiran skup* $\{e_1, \ldots, e_k\}$ *u* V *takav da je* $[\{e_1, \ldots, e_j\}] = [\{x_1, \ldots, x_j\}]$, $\forall j = 1, \ldots, k$.

Dokaz. Konstrukciju skupa $\{e_1, \ldots, e_k\}$ provodimo induktivno. Baza indukcije je lagana: stavi se $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1$ što je dobro definirano jer je $x_1 \neq 0$. Očito su e_1 i x_1 kolinearni pa razapinju isti potprostor.

Pretpostavimo sada da je nađen ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_j\}$ takav da je $[\{e_1, \ldots, e_j\}] = [\{x_1, \ldots, x_j\}]$ i konstruirajmo e_{j+1}.

Najprije uvedimo pomoćni vektor: $f_{j+1} = x_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_i\rangle e_i$. Prvo, izravno iz definicije okomitosti vidi se da je $f_{j+1} \perp e_i$, $\forall i = 1, \ldots, j$. Drugo, vrijedi i $[\{e_1, \ldots, e_j, f_{j+1}\}] = [\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}]$. Da se u ovo uvjerimo, dovoljno je utvrditi da generatori s jedne strane jednakosti pripadaju potprostoru s druge strane, i obratno. Sada je $e_1, \ldots, e_j \in [\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}]$ po pretpostavci indukcije, a $f_{j+1} \in [\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}]$ po definiciji vektora f_{j+1}. Obratno je također jasno (i argumenti su isti); uočimo da je $x_{j+1} = f_{j+1} + \sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1}, e_i\rangle e_i$.

Sada je jasno da skup $\{e_1, \ldots, e_j, f_{j+1}\}$ ima gotovo sva tražena svojstva; tek ne znamo kolika je norma vektora f_{j+1}. No, lako je zaključiti da, za svaki skalar $\lambda \neq 0$, i vektor λf_{j+1} može poslužiti umjesto f_{j+1}. Naime, $\langle f_{j+1}, e_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda f_{j+1}, e_i\rangle = 0$, $\forall i = 1, \ldots, j$, a iz jednakosti $[\{e_1, \ldots, e_j, f_{j+1}\}] = [\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}]$ dobivamo i $[\{e_1, \ldots, e_j, \lambda f_{j+1}\}] = [\{x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}\}]$ za svaki skalar $\lambda \neq 0$.

Preostaje uzeti $\lambda = \|f_{j+1}\|^{-1}$, tj. definirati $e_{j+1} = \frac{1}{\|f_{j+1}\|}f_{j+1}$. Jedini problem može nastati ako je $f_{j+1} = 0$ jer tada je i $\|f_{j+1}\| = 0$, i s tim brojem ne smijemo dijeliti. Međutim, to je nemoguće! Naime, $f_{j+1} = 0$ bi značilo da je $x_{j+1} = \sum_{i=1}^{j}\langle x_{j+1}, e_i\rangle e_i \in [\{e_1, \dots, e_j\}] = [\{x_1, \dots, x_j\}]$, a to se kosi s nezavisnošću polaznog skupa $\{x_1, \dots, x_k\}$. $\square$

Napomena 6.1.16. Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije je zapravo ime dokaza, odnosno konstrukcije, a ne tvrdnje teorema.

Instruktivno je promisliti kako dokaz funkcionira u V^3 (iako se tamo ovaj postupak može sastojati od najviše tri koraka). Zapravo se radi o tome da u svakom koraku od vektora x_{j+1} oduzimamo njegovu ortogonalnu projekciju na sve do tada uzete smjerove. Upravo tako konstrukcija teče i na apstraktnoj razini, u što ćemo se uvjeriti u *napomeni 6.1.23.*

Korolar 6.1.17. *Svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

Dokaz. Uzmimo bazu $\{b_1, \dots, b_n\}$ prostora V i primijenimo Gram-Schmidtov postupak. Kako dobiveni ortonormirani skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ uz ostalo zadovoljava i $[\{e_1, \dots, e_n\}] = [\{b_1, \dots, b_n\}]$, taj je skup i sustav izvodnica za V. $\square$

Primjer 6.1.18. Ortonormirajmo nezavisan skup $\{x_1, x_2, x_3\}$ u $\mathbb{R}^3$ pri čemu je $x_1 = (2,1,2), x_2 = (3,3,0), x_3 = (9,3,3)$. Slijedimo dokaz *teorema 6.1.15.* Prvo imamo $e_1 = \frac{1}{\|x_1\|}x_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)$. Dalje, $f_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 = x_2 - \frac{1}{9}\langle x_2, x_1\rangle x_1 = (3,3,0) - \frac{9}{9}(2,1,2) = (3,3,0) - (2,1,2) = (1,2,-2)$ pa je $e_2 = \frac{1}{\|x_2\|}f_2 = \frac{1}{3}(1,2,-2)$. Konačno, $f_3 = x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2 = x_3 - \frac{1}{9}\langle x_3, x_1\rangle x_1 - \frac{1}{9}\langle x_3, f_2\rangle f_2 = (9,3,3) - \frac{27}{9}(2,1,2) - \frac{9}{9}(1,2,-2) = (2,-2,-1)$ pa je $e_3 = \frac{1}{3}(2,-2-1)$.

Definicija 6.1.19. Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je $M^\perp = \{x \in V : \langle x, v\rangle = 0, \forall v \in M\}$.

Po definiciji je $M^\perp$ samo podskup od V pa je naziv ortogonalni komplement prejudiciran (i bit će opravdan tek *teoremom 6.1.21*). Za sada možemo primijetiti da je uvijek $0 \in M^\perp$ pa je, dakle, uvijek $M^\perp \neq \emptyset$. Također je odmah jasno da vrijedi $V^\perp = \{0\}$ i $\{0\}^\perp = V$.

Propozicija 6.1.20. *Neka je V unitaran prostor i M potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora M je također potprostor od V.*

Dokaz. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $x, y \in M^\perp$, te proizvoljan $v \in M$, imamo $\langle \alpha x + \beta y, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle + \beta\langle y, v\rangle = 0$; dakle, $\alpha x + \beta y \in M^\perp$.

Teorem 6.1.21. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i M potprostor od V. Tada je $M^\perp$ (jedan) direktan komplement od M u V.*

Dokaz. Uzmimo da je M netrivijalan potprostor jer je u slučajevima $M = \{0\}$ i $M = V$ tvrdnja trivijalna. Neka je $\{b_1, \ldots, b_k\}$ baza za M. Proširimo je do baze $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ za V i provedimo Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije. Neka je $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ rezultirajuća baza prostora V.

Kako je svojstvo Gram-Schmidtova postupka $[\{e_1, \ldots e_j\}] = [\{b_1, \ldots b_j\}]$, $\forall j = 1, \ldots, n$, odmah zaključujemo da je $\{e_1, \ldots e_k\}$ ortonormirana baza za M. Sad tvrdimo da je $[\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}] = M^\perp$.

Najprije, $e_j \in M^\perp$ za sve $j \geq k+1$ jer je svaki takav e_j okomit na bazu za M, pa stoga i na čitav M. Kako je $M^\perp$ potprostor te stoga sadrži sve linearne kombinacije svojih elemenata, slijedi $[\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}] \subseteq M^\perp$. Obratno, uzmimo $x \in M^\perp$ i napišimo ga u obliku $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$ (koeficijente u prikazu vektora u ortonormiranoj bazi izračunali smo u *napomeni 6.1.14*). Kako je $x \in M^\perp$, imamo $\langle x, e_i \rangle = 0$, $\forall i = 1, \ldots, k$, pa je $x = \sum_{i=k+1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$.

Ovime smo pokazali da je zaista $M^\perp = [\{e_{k+1}, \ldots e_n\}]$. To odmah povlači $\dim M^\perp = n - k = \dim V - \dim M$. Kako je već iz definicije očito da vrijedi i $M \cap M^\perp = \{0\}$, zaključujemo $V = M \dot{+} M^\perp$. $\square$

Napomena 6.1.22. (a) Važno je primijetiti da prethodni dokaz daje algoritam za efektivno nalaženje ortogonalnog komplementa.

(b) Obično pišemo $V = M \oplus M^\perp$. Kako je $M^\perp$ jednoznačno definiran (za razliku od običnoga direktnog komplementa), ovdje je smislena oznaka $M^\perp = V \ominus M$.

(c) Prethodni dokaz pokazuje da vrijedi $(M^\perp)^\perp = M$. Također vrijedi $(L + M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$ i $(L \cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$.

Napomena 6.1.23. Zadržimo oznake iz dokaza *teorema 6.1.21.* Neka je $P \in L(V)$ projektor na M u smjeru potprostora $M^\perp$ uveden u *primjeru 5.4.6.* U ovoj situaciji se kaže da je P ortogonalni projektor na M. Podsjetimo se da je P definiran s $Px = a$ ako vektoru $x \in V$ pripada rastav $x = a + b$, $a \in M, b \in M^\perp$. Očito je iz dokaza *teorema 6.1.21*: ako je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormirana baza potprostora M, onda je $Px = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$, $\forall x \in V$.

Podsjetimo se sada koraka indukcije u dokazu *Gram-Schmidtova teorema.* Uz pretpostavku da su vektori $e_1, \ldots, e_j$ već konstruirani, definirali smo pomoćni vektor $f_{j+1} = x_{j+1} - \sum_{i=1}^j \langle x_{j+1}, e_i \rangle e_i$. Sad upravo izvedena formula za djelovanje ortogonalnog projektora pokazuje da ovdje zaista od vektora x_{j+1} oduzimamo njegovu ortogonalnu projekciju na potprostor $\{e_1, \ldots, e_j\}$, koji je generiran prethodno konstruiranim vektorima $e_1, \ldots, e_j$.

Gram-Schmidtov teorem ima još jednu važnu posljedicu: to je tzv. QR faktorizacija (dekompozicija) matrica koja je vrlo korisna u primjenama. Radi jednostavnosti, ograničit ćemo se samo na realne matrice.

Podsjetimo se da za svaku matricu $A \in M_{nk}(\mathbb{R})$ prirodno vežemo linearan operator $L_A : M_{k1}(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$. Primijetimo da je potprostor $\operatorname{Ker} L_A \leq$

$M_{k1}(\mathbb{R})$ zapravo prostor rješenja homogenog sustava $Ax = 0$. Uočimo još da je $M_{n1}(\mathbb{R})$ unitaran prostor: skalarni produkt jednostupčanih matrica $x = [x_i]$ i $y = [y_i]$ dan je s $\langle [x_i], [y_i] \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. (Jasno je da ovdje postoji tek formalna pa zato i zanemariva razlika u odnosu na unitaran prostor $\mathbb{R}^n$.)

Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in M_{nk}(\mathbb{R})$. Označimo stupce matrice A s $a_1, \dots, a_k$.

Pretpostavimo prvo da je skup $\{a_1, \dots, a_k\}$ linearno nezavisan, tj. da vrijedi $\mathrm{r}(A) = k$. Podvrgnimo taj skup Gram-Schmidtovu postupku ortogonalizacije. Dobiveni ortonormirani skup označimo s $\{e_1, \dots, e_k\}$ i pišimo $e_j = \begin{bmatrix} e_{1j} \\ e_{2j} \\ \vdots \\ e_{nj} \end{bmatrix}$, $j = 1, \dots, k$. Vrijedi, dakle,

$$\langle e_j, e_l \rangle = \sum_{i=1}^n e_{ij} e_{il} = \delta_{jl}, \ \forall j, l = 1, \dots, k. \tag{1}$$

Osim toga, zbog $[\{a_1, \dots, a_j\}] = [\{e_1, \dots, e_j\}]$, $\forall j = 1, \dots, k$, postoje realni brojevi r_{ij} takvi da vrijedi

$$\begin{array}{lllllllll} a_1 & = & r_{11}e_1 & & & & & & \\ a_2 & = & r_{12}e_1 & + & r_{22}e_2 & & & & \\ a_3 & = & r_{13}e_1 & + & r_{23}e_2 & + & r_{33}e_3 & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_j & = & r_{1j}e_1 & + & r_{2j}e_2 & + & \dots & + & r_{jj}e_j \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_k & = & r_{1k}e_1 & + & r_{2k}e_2 & + & \dots & + & r_{kk}e_k. \end{array} \tag{2}$$

Uvedimo sada matrice $Q = \begin{bmatrix} e_{11} & \dots & e_{1k} \\ e_{21} & \dots & e_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nk} \end{bmatrix} \in M_{nk}(\mathbb{R})$ (uočimo da su stupci matrice Q vektori e_j) i $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$, pri čemu su koeficijenti r_{ij} definirani relacijama (2).

Sad tvrdimo da vrijedi

$$A = QR. \tag{3}$$

Očito je (3) ekvivalentno s $a_{sj} = \sum_{i=1}^{k} e_{si}r_{ij}$, $\forall s = 1,\dots,n$, $\forall j = 1,\dots,k$. Kako je matrica R gornjetrokutasta, ova se jednakost svodi na

$$a_{sj} = \sum_{i=1}^{j} e_{si}r_{ij} = r_{1j}e_{s1} + r_{2j}e_{s2} + \ldots + r_{jj}e_{sj},$$

a ova jednakost je upravo s-ta komponenta j-te jednakosti iz (2).

Jednakost (3) se naziva QR dekompozicija matrice A. Uočimo da stupci matrice Q razapinju isti potprostor kao i stupci matrice A. Nadalje, vrijedi $Q^tQ = I \in M_k(\mathbb{R})$ - to je, naime, upravo relacija (1). Uočimo također da vrijedi $\operatorname{Ker} L_A = \operatorname{Ker} L_R$; tj. homogeni sustavi linearnih jednadžbi $Ax = 0$ i $Rx = 0$ imaju isti prostor rješenja. Zaista, ako je $Rx = 0$, onda je pogotovo $QRx = 0$, tj. $Ax = 0$. Obratno, ako vrijedi $Ax = 0$, onda, jer je $A = QR$, množenjem s lijeva s Q^t dobivamo $Q^tQRx = Rx = 0$.

Nadalje, za $1 \leq j \leq k$, iz (1) odmah dobivamo $QQ^te_j = e_j$. S druge strane, ako uzmemo $x \perp [\{a_1,\dots,a_k\}] = [\{e_1,\dots,e_k\}]$, onda $x \perp e_j$, $\forall j = 1,\dots,k$ povlači $Q^tx = 0$, pa je zato i $QQ^tx = 0$. Odavde slijedi da je $L_{QQ^t} = P$ gdje je P ortogonalni projektor na potprostor $\operatorname{Im} L_A = \operatorname{Im} L_Q = [\{a_1,\dots,a_k\}] = [\{e_1,\dots,e_k\}]$.

QR dekompozicija je korisna pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi. Zamislimo sustav $Ax = b$ gdje je $b \in M_{n1}(\mathbb{R})$ i promotrimo QR dekompoziciju matrice A. Sad dani sustav možemo pisati kao $QRx = b$. Pišimo $Rx = y$ i promotrimo pomoćni sustav $Qy = b$. Taj je trivijalno rješiv; naime, množenjem s Q^t dobivamo $y = Q^tb$. Sad preostaje pronaći sve x za koje vrijedi $Rx = y$, tj. $Rx = Q^tb$. Taj sustav je lako riješiti jer je matrica sustava R trokutasta! U ovom slučaju rješenje je jedinstveno jer je dimenzija prostora rješenja pridruženog homogenog sustava jednaka 0 (broj nepoznanica je k, a pretpostavili smo da rang matrice sustava također iznosi k).

Preostalo je diskusiju provesti u općem slučaju, kad rang matrice A nije nužno jednak k. Pokazuje se da ovdje nema bitnih izmjena u odnosu na slučaj $\mathrm{r}(A) = k$.

Uzmimo da je $\mathrm{r}(A) < k$, tj. da je skup $\{a_1,\dots,a_k\}$ linearno zavisan. Sad Gram-Schmidtov postupak provodimo s malom modifikacijom.

Uzmimo da je $a_1 \neq 0$ (ako bi bilo $a_1 = 0$, uzeli bismo prvi idući a_i koji je različit od nulvektora). Stavimo $e_1 = \frac{1}{\|a_1\|}a_1$ pa očito imamo $a_1 = r_{11}e_1$ gdje je $r_{11} = \|a_1\|$. Ako je a_2 nezavisan s a_1, nastavimo Gram-Schmidtov postupak. Ako je a_2 kolinearan s a_1, ignorirajmo ga, no uočimo da je tada $a_2 = r_{12}e_1$ za neki skalar r_{12}. Osim toga, potražimo prvi idući a_i koji je nekolinearan (nezavisan) s a_1; recimo konkretnosti radi, da je to a_3. Sad kao u standardnom Gram-Schmidtovom postupku pronađemo vektor e_2 takav da je skup $\{e_1, e_2\}$ ortonormiran, te da vrijedi $[\{a_1, a_2, a_3\}] = [\{a_1, a_3\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Postupak nastavimo.

Prethodnu diskusiju možemo rekapitulirati na sljedeći način:

Teorem 6.1.24. *Neka je $A \in M_{nk}(\mathbb{R})$ te neka vrijedi $r(A) = r$. Postoje matrice $Q \in M_{nr}(\mathbb{R})$ čiji su stupci ortonormirani i gornjetrokutasta $R \in M_{rk}(\mathbb{R})$ takve da vrijedi $A = QR$. Pritom, stupci matrice Q čine ortonormiranu bazu za $Im\, L_A$, $Q^tQ = I \in M_r(\mathbb{R})$, L_{QQ^t} je ortogonalni projektor na $Im\, L_A$, $Ker\, L_A = Ker\, L_R$, te vrijedi $r(A) = r(R) = r$.*

Dokaz. Preostalo je samo obrazložiti posljednju tvrdnju. Ako označimo $d = d(L_A) = d(L_R)$, onda vrijedi (jer sustavi $Ax = 0$ i $Rx = 0$ imaju isti broj nepoznanica) $d = k - \mathrm{r}(A) = d - \mathrm{r}(R)$, a odavde je očito $\mathrm{r}(R) = \mathrm{r}(A) = r$. $\square$

Za kraj razmatranja u ovoj točki navedimo nekoliko primjera koji se često pojavljuju u primjenama.

Primjer 6.1.25. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, $M \leq V$ i $x \in V$. Željeli bismo odrediti najbolju aproksimaciju vektora x vektorima iz potprostora M. Najbolju aproksimaciju ovdje interpretiramo uz pomoć metrike $d(x, y) = \|x - y\|$ koja je inducirana normom, odnosno skalarnim produktom na V. Tražimo, dakle, vektor iz M najbliži vektoru x, tj. vektor $a \in M$ takav da bude $\|x - a\| \leq \|x - y\|$, $\forall y \in M$.

Klasična verzija ovog problema glasi: za danu ravninu π i točku T_0 izvan π treba odrediti točku iz π najbližu točki T_0. Rješenje je naravno ortogonalna projekcija točke T_0 na π. Ovo sugerira kako da nađemo rješenje i u apstraktnoj situaciji: poslužit ćemo se ortogonalnim projektorom P na potprostor M iz *napomene 6.1.23.* Ako je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormirana baza za M znamo da operator P djeluje po formuli $Px = \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i$, $x \in V$.

Sad tvrdimo: $\|x - Px\| \leq \|x - y\|$, $\forall y \in M$, s tim da je nejednakost stroga čim je $y \neq Px$.

Da to pokažemo, uzmimo proizvoljan $y \in M$, $y = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$. Sada je:

$$\|x - y\|^2 - \|x - Px\|^2$$

$$= \langle x - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, x - \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \rangle - \langle x - \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i, x - \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle e_i \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{i=1}^k \overline{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle - \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle e_i, x \rangle + \sum_{i=1}^k |\lambda_i|^2$$

$$- \langle x, x \rangle + \sum_{i=1}^k \langle e_i, x \rangle \langle x, e_i \rangle + \sum_{i=1}^k \langle x, e_i \rangle \langle e_i, x \rangle - \sum_{i=1}^k |\langle x, e_i \rangle|^2$$

$$= \sum_{i=1}^k (|\lambda_i|^2 - \overline{\lambda_i} \langle x, e_i \rangle - \lambda_i \langle e_i, x \rangle + |\langle x, e_i \rangle|^2)$$

$$= \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \langle x, e_i \rangle)\overline{(\lambda_i - \langle x, e_i \rangle)} = \sum_{i=1}^k |\lambda_i - \langle x, e_i \rangle|^2 \geq 0.$$

Pritom, ako je $y \neq Px$, onda je bar jedan pribrojnik u zadnjem izrazu netrivijalan i razlika $\|x - y\|^2 - \|x - Px\|^2$ je zato striktno pozitivna.

Primjer 6.1.26. Promotrimo sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$
\begin{array}{ll}
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
(4) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ldots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{array}
$$

Sustav (4) matrično pišemo u obliku $Ax = b$, pri čemu je $b = [b_i] \in M_{m1}$ i $x = [x_i] \in M_{n1}$.

Pretpostavimo dalje da je sustav nerješiv, ali da je $\mathrm{r}(A) = n$, tj. da su svi stupci od A linearno nezavisni. Ova je situacija zapravo vrlo česta u praksi kad koeficijenti sustava dolaze kao rezultat višekratnih samo približno točnih mjerenja.

Označimo li stupce matrice A sa $s_j \in M_{m1}$, $j = 1, \ldots, n$, znamo da je nerješivost sustava ekvivalentna činjenci $b \notin [\{s_1, \ldots, s_n\}] = M \leq M_{m1}$ (usp. dokaz *Kronecker-Capellijeva teorema*). Kako je M_{m1} unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle [x_i], [y_i] \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$, možemo na potprostor M primijeniti diskusiju iz prethodnog primjera.

Uzmimo ortogonalan projektor $P \in L(M_{m1})$ na potprostor M i stavimo $Pb = p$. Kako je $p \in M$, sustav $Ax = p$ sad ima rješenje, i to jedinstveno zbog *korolara 4.2.5.* Označimo to jedinstveno rješenje sa $c = [\gamma_i] \in M_{n1}$; vrijedi, dakle, $Ac = p$.

Sad iz prethodnog primjera znamo da je $\|p - b\| \leq \|y - b\|$, $\forall y \in M$. To znači da je $\|Ac - b\| \leq \|Ax - b\|$, $\forall x \in M_{n1}$ (zaista, za $x \in M_{n1}$, $x = [\lambda_i]$, jasno je da je vektor Ax zapravo jednak linearnoj kombinaciji $\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n$, pa je zato $Ax \in M$).

Kvadrirajmo posljednju nejednakost i napišimo je eksplicitno:

$$
|\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\gamma_j - b_1|^2 + \ldots + |\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\gamma_j - b_m|^2
$$

$$
\leq |\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\lambda_j - b_1|^2 + \ldots + |\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\lambda_j - b_m|^2, \ \forall [\lambda_i] \in M_{n1}.
$$

Ovo pokazuje da se jedinstveni vektor c dobiven kao rješenje sustava $Ax = p = Pb$ može smatrati najboljom aproksimacijom rješenja, tj. najboljim približnim rješenjem nerješivog sustava $Ax = b$ u smislu "metode najmanjih kvadrata": Jednadžbe (4) ne mogu biti simultano zadovoljene niti jednom n-torkom $(x_1, \ldots, x_n)$, ali n-torka $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ čini sumu kvadrata razlika lijevih i desnih strana svih jednadžbi iz (4) minimalnom.

Pokažimo na kraju jedan konkretan primjer "preodređenog" (pa zato nerješivog) sustava na kakav se može primijeniti prethodna diskusija. Zamislimo problem u kojem se pojavljuju dvije veličine a i b za koje se ima razloga vjerovati da su u linearnoj ovisnosti (ili to pokazuje iskustvo, ili neka mjerenja upućuju na to, ili je barem takva naša radna pretpostavka). Traže se dakle realni koeficijenti k i l takvi da bi bila zadovoljena relacija $b = ka + l$.

Sad se izvrši niz nezavisnih promatranja, odnosno mjerenja, i za veličine a i b se dobije niz empirijski utvrđenih podataka: $a_1, b_1,\ a_2, b_2,\ \ldots, a_m, b_m$. Dobivamo, dakle, sustav jednadžbi:

$$\begin{array}{lcccc} ka_1 & + & l & = & b_1 \\ ka_2 & + & l & = & b_2 \\ \ldots & & & & \\ ka_m & + & l & = & b_m \end{array}$$

s nepoznanicama k i l. Naravno, dobiveni sustav je vrlo vjerojatno nekonzistentan i sad smo u uvjetima prethodnog primjera (ako smo izvršili barem tri mjerenja) jer je $m > n = 2$, a rang matrice sustava $A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_m & 1 \end{bmatrix}$ je 2, dakle jednak broju njezinih stupaca.

Zato, kao u prethodnom primjeru, kad već sustav ne možemo riješiti, možemo naći optimalne k i l koji će empirijskim podacima odgovarati najbolje u smislu metode najmanjih kvadrata.

6.2. **Operatori na unitarnim prostorima.**

Načelno, sve što je u petom poglavlju rečeno općenito o linearnim operatorima vrijedi i ovdje. Međutim, operatori na unitarnim prostorima posjeduju dodatna korisna svojstva koja proizlaze iz strukture unitarnog prostora.

Prvi rezultat koji navodimo govori o linearnim funkcionalima. Ma koliko jednostavan, taj je zapravo fundamentalan.

Neka je V unitaran prostor nad $\mathbb{F}$, neka je $a \in V$ proizvoljno odabran i fiksiran vektor iz V. Uočimo da je preslikavanje $f_a : V \to \mathbb{F}$ definirano s $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ linearan funkcional na V - jednostavno zato što je skalarni produkt linearan u prvom argumentu. Ovo nam omogućuje da linearne funkcionale na unitarnim prostorima zadajemo na vrlo jednostavan način. No, bit je u tome da su svi funkcionali na konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima takvi.

Teorem 6.2.1. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na V. Tada postoji jedinstven vektor $a \in V$ takav da je $f = f_a$, tj. $f(x) = \langle x, a\rangle$, $\forall x \in V$.*

Dokaz. Neka je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Tada svaki $x \in V$ prema *napomeni 6.1.14* možemo pisati u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Odavde je $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i\rangle = \langle x, a\rangle$ ako smo za vektor a odabrali $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i$.

Da pokažemo jedinstvenost, zamislimo da je $f(x) = \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle$, $\forall x \in V$. Odavde je $\langle x, a - b\rangle = 0$, $\forall x \in V$, pa posebno i $\langle a - b, a - b\rangle = 0$. Iz drugog uvjeta u definiciji skalarnog produkta slijedi $a - b = 0$. □

Napomena 6.2.2. Kad je V konačnodimenzionalan unitaran prostor onda prethodni teorem uspostavlja prirodni izomorfizam između prostora V i dualnog prostora V^*. Podsjetimo se da to nismo mogli načiniti u općim vektorskim prostorima. Naime, ovdje možemo definirati preslikavanje $\varphi : V \to V^*$ formulom $\varphi(a) = f_a$. Sad *teorem 6.2.1* jamči da je φ bijekcija.

Problem je, međutim, u tome što je ovo preslikavanje u kompleksnom slučaju antilinearno, tj. vrijedi $f_{\lambda a} = \overline{\lambda} f_a$.

Posvetimo se sada operatorima. Kad je riječ o izomorfizmima vektorskih prostora (ili regularnim operatorima) onda je jasno da bismo ovdje željeli imati na raspolaganju operatore koji bi čuvali i unitarnu, a ne samo linearnu strukturu. To nas dovodi do sljedeće definicije.

Definicija 6.2.3. Neka su V i W unitarni prostori takvi da je $\dim V = \dim W$. Kažemo da je $A \in L(V, W)$ unitaran operator ako vrijedi $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$.

Primijetimo da se u navedenoj jednakosti na lijevoj strani pojavljuje skalarni produkt u W, dok desno stoji skalarni produkt u domeni V. Vidjet ćemo u idućem teoremu da unitarni operatori, čuvajući skalarne produkte svih vektora, čuvaju i kompletnu strukturu prostora; otuda i dolazi njihov naziv.

Napomena 6.2.4. (a) Uočimo da je za $A \in L(V, W)$ zahtjev $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, ekvivalentan uvjetu $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in V$. Ovo se svojstvo zove izometričnost. U jednom smjeru je ovaj zaključak trivijalan (naprosto se uzme $x = y$), dok je u drugom, netrivijalnom smjeru to izravna posljedica polarizacijskih formula iz *napomene 6.1.9*.

(b) Svaki operator sa svojstvom $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, je injektivan. Naime, ako je $Ax = 0$, onda zbog $\|Ax\| = \|x\|$ odmah slijedi i $x = 0$.

(c) Svojstvo očuvanja skalarnih produkata, kao i izometričnost smisleno je i za operatore na beskonačnodimenzionalnim prostorima. No i ovdje se ograničavamo na istraživanje operatora na prostorima konačne dimenzije.

(d) I općenito, ako i nije $\dim V = \dim W$, mogli bismo za operatore $A : V \to W$ promatrati zahtjev $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$. Međutim, to ima smisla tek ako je $\dim V \leq \dim W$! Zaista, kako pokazuje prethodna opaska (b), takav operator je nužno injektivan i zato je zbog *teorema o rangu i defektu* $\dim V = r(A) \leq \dim W$.

(e) Ako je $\dim V < \dim W$ operator $A \in L(V, W)$ sa svojstvom $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, se naziva izometrija. Termin unitaran operator je rezerviran za operatore $A \in L(V, W)$ koji zadovoljavaju uvjet $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, a pritom je $\dim V = \dim W$. Primijetimo da su takvi operatori zbog prethodne opaske (b) i *korolara 5.1.13* izomorfizmi.

Sljedeći teorem u osnovi kaže da unitarni operatori prevode ortonormirane baze u ortonormirane baze. Usporedba s *propozicijom 5.1.14* pokazuje da se unitarni operatori zaista mogu smatrati izomorfizmima unitarnih prostora.

Teorem 6.2.5. *Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Sljedeći su uvjeti međusobno ekvivalentni:*

(i) *A je unitaran;*
(ii) *za svaku ortonormiranu bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ od V skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ je ortonormirana baza za V;*
(iii) *postoji ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V takva da je i skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortonormirana baza za V.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Uzmimo proizvoljnu ortonormiranu bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ prostora V. Prema pretpostavci, A čuva sve skalarne produkte, pa posebno za sve $i, j = 1, \ldots, n$, vrijedi $\langle Ab_i, Ab_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$. To pokazuje da je skup $\{Ab_1, \ldots, Ab_n\}$ ortonormiran. Kako pretpostavka da je A unitaran podrazumijeva i da su dimenzije prostora V i W jednake, taj skup je i baza za W.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Pretpostavka odmah pokazuje da vrijedi $\dim V = \dim W$. Preostaje pokazati da operator A čuva skalarne produkte. Uzmimo $x, v \in V$. Prema *napomeni 6.1.14* znamo da je $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$, $y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i \rangle e_i$ i $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$.

S druge strane imamo $\langle Ax, Ay \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle Ae_i, \sum_{j=1}^n \langle y, e_j \rangle Ae_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_j, y \rangle \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$. Primijetimo da posljednja jednakost dolazi iz ortonormiranosti skupa $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$; zato je $\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \delta_{ij}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. □

Teorem koji smo upravo dokazali omogućuje da unitarne operatore konstruiramo na jednostavan način upotrebom *propozicije 5.1.5*. Posebno, uočavamo da unitarnih operatora ima u izobilju. Konkretan primjer unitarnog operatora je operator rotacije R_φ za kut φ na prostoru $V^2(O)$. Najjednostavniji način da utvrdimo kako je ovaj operator zaista unitaran je primjena *napomene 6.2.4(a)*: R_φ je evidentno izometričan.

Osim toga, prethodni teorem pokazuje i da je inverzni operator A^{-1} unitarnog operatora A (inverzni operator zaista postoji zbog *napomene 6.2.4(e)*) također unitaran. To je zato što i A^{-1} ortonormirane baze prevodi u ortonormirane baze - samo u obrnutom smjeru. Uočimo još jedno zanimljivo svojstvo unitarnih operatora.

Propozicija 6.2.6. *Neka su V i W unitarni prostori i $A \in L(V, W)$ unitaran operator. Tada je $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle$, $\forall x \in V, \forall y \in W$.*

Dokaz. Uzmimo proizvoljne x i y i nađimo $v \in V$ takav da je $Av = y$. Odmah uočimo da je tada i $v = A^{-1}y$. Sada je $\langle Ax, y \rangle = \langle Ax, Av \rangle = \langle x, v \rangle = \langle x, A^{-1}y \rangle$. □

Sljedeća propozicija govori o spektru unitarnog operatora. No, primjetimo da i unitarni operatori, unatoč brojnim dobrim svojstvima, mogu biti bez svojstvenih vrijednosti (već znamo da je operator rotacije takav).

Propozicija 6.2.7. *Neka je V unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator s nepraznim spektrom. Sve svojstvene vrijednosti operatora A imaju apsolutnu vrijednost jednaku 1. Svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su okomiti.*

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost od A, neka je x pridruženi svojstveni vektor. Uočimo da je i $e = \frac{1}{\|x\|}x$ svojstveni vektor operatora A pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti λ. Osim toga, e je i normiran. Sada je $\langle Ae, Ae\rangle = \langle e, e\rangle = 1$ s jedne, i $\langle Ae, Ae\rangle = \langle \lambda e, \lambda e\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle e, e\rangle = |\lambda|^2$ s druge strane.

Uzmimo sada različite $\lambda, \mu \in \sigma(A)$ i proizvoljne vektore $x \in V_A(\lambda)$, $y \in V_A(\mu)$. Uočimo da primjenom operatora A^{-1} na jednakost $Ay = \mu y$ dobivamo $y = \mu A^{-1}y$. Već smo dokazali da je $|\mu| = 1$, pa je zato $\mu \neq 0$ te vrijedi $\frac{1}{\mu} = \overline{\mu}$. Zato prethodnu jednakost možemo pisati u obliku $A^{-1}y = \overline{\mu}y$.

Sada je $\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle =$ (sad primjenjujemo prethodnu propoziciju) $= \langle x, A^{-1}y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Dobivenu jednakost možemo prepisati u obliku $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$. Jer je prema pretpostavci $\lambda \neq \mu$, slijedi $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Primijetimo da su, zbog prethodne propozicije, jedine moguće svojstvene vrijednosti unitarnog operatora na realnom unitarnom prostoru brojevi 1 i -1. No, kao što smo već konstatirali, unitaran operator na realnom prostoru ne mora imati svojstvenih vrijednosti. U tom su smislu unitarni operatori na kompleksnim prostorima znatno bolji. Može se pokazati da se svaki unitarni operator A na kompleksnom konačnodimenzionalnom prostoru V može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi prostora V.

Primjer 6.2.8. Opišimo unitarne operatore na dvodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru $V^2(O)$. Pokazat ćemo da je operator rotacije R_φ zapravo tipičan primjer unitarnog operatora na ovom prostoru.

Neka je $S \in L(V^2(O))$ operator zrcaljenja po x-osi. Primijetimo: ako je $e = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ standardna ortonormirana baza u $V^2(O)$ onda je $[S]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Kako operator S očito ortonormiranu bazu e prevodi u ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, -\vec{j}\}$, i on je unitaran.

Uzmimo sad proizvoljan unitaran operator $A \in L(V^2(O))$. Jer je unitaran, preslikava ortonormiranu bazu e u neku drugu ortonormiranu bazu b; stavimo $b = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$ gdje je $\vec{b_1} = A\vec{i}$ i $\vec{b_2} = A\vec{j}$. Baza b je orijentirana pozitivno ili negativno. Ukoliko je njena orijentacija pozitivna, onda postoji jedinstven kut $\varphi \in [0, 2\pi)$ takav da baza e rotacijom za kut φ prelazi u bazu b. To znači da operatori A i R_φ jednako djeluju na bazi e, te su zato, prema *napomeni 5.1.4*, jednaki. Ako je pak baza b negativno orijentirana onda postoji jedinstven kut $\varphi \in [0, 2\pi)$ takav da baza $\{\vec{i}, -\vec{j}\}$ rotacijom za kut φ prelazi u bazu b. Primijetimo da to zapravo znači $A = R_\varphi S$ - jer kompozicija s desne strane jednakosti djeluje na bazi e točno kao operator A. Pišući matrične prikaze u bazi e možemo rekapitulirati: svaki unitaran operator $A \in L(V^2(O))$ u kanonskoj bazi e ima matrični zapis

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ ili } [A]_e^e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

za neki $\varphi \in [0, 2\pi)$.

U nastavku ćemo se ograničiti na promatranje operatora na jednom prostoru. Vratimo se na trenutak *propoziciji 6.2.6*: svaki unitaran operator $A \in L(V)$ spregnut je sa svojim inverznim operatorom $A^{-1} \in L(V)$ jednakošću $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^{-1}y\rangle$, $\forall x, y \in V$. Jedan od fundamentalnih rezultata teorije operatora na konačnodimenzionalnim unitarnim prostorima je činjenica da takav operator-partner postoji za svaki operator $A \in L(V)$.

Teorem 6.2.9. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Postoji jedinstven operator $A^* \in L(V)$ takav da je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ za sve vektore x, y iz V.*

Dokaz. Fiksirajmo $y \in V$ i promotrimo preslikavanje $f_{A,y} : V \to \mathbb{F}$ definirano s $f_{A,y}(x) = \langle Ax, y\rangle$. Očito smo dobili linearan funkcional na V i zato prema *teoremu 6.2.1* postoji jedinstven vektor - označimo ga s A^*y - takav da je $f_{A,y}(x) = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x \in V$. Drugim riječima, dobili smo

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \forall x \in V.$$

Provedemo li ovaj postupak sa svakim $y \in V$ dobivamo i

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \forall x, y \in V.$$

Time smo definirali preslikavanje $A^* : V \to V$, $y \mapsto A^*y$, koje ima traženo svojstvo. Preostaje pokazati da je A^* linearno. No, to sada lako slijedi iz prethodne jednakosti. Uzmimo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ i $y_1, y_2 \in V$, te proizvoljan $x \in V$.

Jasno je da vrijedi $\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\rangle = \langle Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle Ax, y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle Ax, y_2\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x, A^*y_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x, A^*y_2\rangle = \langle x, \lambda_1 A^*y_1 + \lambda_2 A^*y_2\rangle$. Ako ovaj posljednji izraz oduzmemo od početnog, dobivenu jednakost možemo zapisati kao

$$\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^*y_1 - \lambda_2 A^*y_2\rangle = 0.$$

Kako ova jednakost vrijedi za svaki vektor $x \in V$, posebno vrijedi i za $x = A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^*y_1 - \lambda_2 A^*y_2$, a tada drugi uvjet iz definicije skalarnog produkta povlači $A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^*y_1 - \lambda_2 A^*y_2 = 0$.

Da bismo pokazali kako je konstruirani operator jedinstven, zamislimo da je $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, By\rangle$, $\forall x, y \in V$, gdje je B još jedan linearan operator na V. Posebno je $\langle x, A^*y - By\rangle = 0$, $\forall x, y \in V$. Sad je, za proizvoljan y, $A^*y - By$ okomit na sve vektore prostora V. Nužno je zato $A^*y - By = 0$. Jer je y bio proizvoljan, slijedi $A^* = B$. ☐

Definicija 6.2.10. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Operator $A^* \in L(V)$ sa svojstvom $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$, $\forall x, y \in V$, zove se hermitski adjungiran operator operatoru A.

Prema prethodnom teoremu, svaki operator na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru posjeduje hermitski adjungiran operator. Ponekad se taj operator kraće naziva adjungirani operator. Vidjeli smo u *propoziciji 6.2.6* da je adjungirani operator unitarnog operatora upravo njegov inverz. Definiciono svojstvo adjungiranog operatora sugerira da su i inače A i A^* blisko povezani. To se ogleda i u njihovim matričnim prikazima. Sljedeća propozicija otkriva važnost pojma hermitski adjungirane matrice, koji je uveden u *zadatku 16* u 3. poglavlju.

Propozicija 6.2.11. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, te neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza za V. Tada za svaki operator $A \in L(V)$ vrijedi $[A^*]_e^e = ([A]_e^e)^*$.*

Dokaz. Stavimo $[A]_e^e = [\alpha_{ij}]$ i $[A^*]_e^e = [\beta_{ij}]$. Po definiciji hermitski adjungirane matrice, sve što trebamo dokazati je jednakost $\alpha_{ij} = \overline{\beta_{ji}}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$. Po definiciji matričnog zapisa operatora imamo $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$, a prema *napomeni 6.1.14*, vrijedi $\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$. No sada je $\alpha_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle = \langle e_j, A^* e_i \rangle = \overline{\langle A^* e_i, e_j \rangle} =$ (opet prema *napomeni 6.1.14*) $= \overline{\beta_{ji}}$. □

Korolar 6.2.12. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor. Preslikavanje $A \mapsto A^*$ koje svakom operatoru $A \in L(V)$ pridružuje hermitski adjungiran operator $A^* \in L(V)$ ima sljedeća svojstva:*

(1) $(A + B)^* = A^* + B^*$, $\forall A, B \in L(V)$;
(2) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall A \in L(V)$;
(3) $(AB)^* = B^* A^*$, $\forall A, B \in L(V)$;
(4) $(A^*)^* = A$, $\forall A \in L(V)$.

Dokaz. Sve tvrdnje su očigledne posljedice prethodne propozicije - jer to su evidentno osobine hermitskog adjungiranja matrica, a preslikavanje $A \mapsto [A]_e^e$ je, prema *korolaru 5.4.13*, izomorfizam algebri $L(V)$ i M_n.

Alternativno, sve tvrdnje se mogu dobiti i direktno iz definicije hermitski adjungiranog operatora pozivanjem na njegovu jedinstvenost. Demonstrirajmo ovu tehniku na primjeru dokaza za tvrdnju (3).

Neka su x i y proizvoljni vektori iz V. Tada je $\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A^* y \rangle = \langle x, B^* A^* y \rangle$. Kako je adjungirani operator operatora AB jedinstven i kako prethodna jednakost pokazuje da svojstvo tog operatora ima operator $B^* A^*$, to mora biti $(AB)^* = B^* A^*$. □

Propozicija 6.2.13. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Tada je $V = Ker\, A \oplus Im\, A^*$ i $V = Ker\, A^* \oplus Im\, A$. Nadalje, $r(A^*) = r(A)$.*

Dokaz. Za dokaz prve tvrdnje zapravo treba provjeriti da je $(\mathrm{Im}\, A^*)^\perp = \mathrm{Ker}\, A$, a to zaključujemo na sljedeći način: $x \in \mathrm{Ker}\, A$ ako i samo ako je $Ax = 0$ ako i samo ako je $\langle Ax, y \rangle = 0$ za svaki y iz V. Jer je $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$, prethodni zaključak je ekvivalentan s $\langle x, A^* y \rangle = 0$ za sve y iz V, a to upravo znači da je $x \in (\mathrm{Im}\, A^*)^\perp$.

Druga jednakost slijedi primjenom prve jednakosti na operator A^*.

Konačno, primjenom prve tvrdnje i teorema o rangu i defektu slijedi $r(A^*) = \dim V - d(A) = r(A)$. $\square$

Napomena 6.2.14. (a) Primijetimo da iz posljednje tvrdnje prethodne propozicije, uz pomoć *propozicije 6.2.11* opet možemo zaključiti da je u svakoj matrici (ovdje kvadratnoj) jednak broj linearno nezavisnih redaka i stupaca.

(b) Tvrdnja *teorema 6.2.9*, tj. egzistencija hermitski adjungiranog operatora može se dokazati i za operatore $A : V \to W$ između dva različita unitarna prostora nad istim poljem. U tom je slučaju $A^* \in L(W, V)$. I u ovoj situaciji vrijede formule analogne onima iz *propozicija 6.2.11* i *6.2.13*.

Vratimo se unitarnim operatorima. *Propozicija 6.2.6* pokazuje: ako je $A \in L(V)$ unitaran operator, onda je $A^* = A^{-1}$. Lako se vidi da vrijedi i obrat: operator $A \in L(V)$ koji zadovoljava relaciju $A^* = A^{-1}$ nužno je unitaran. Zaista, neka su x i y proizvoljni vektori u V i neka vrijedi $A^* = A^{-1}$. Tada je, posebno, $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^*Ay\rangle = \langle x, A^{-1}Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ i operator A je po definiciji unitaran. Razmotrimo sada pobliže matrični zapis unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi.

Propozicija 6.2.15. *Neka je $A \in L(V)$ unitaran operator i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Tada za matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A vrijedi $[A]_e^e([A]_e^e)^* = ([A]_e^e)^*[A]_e^e = I$.*

Dokaz. Zbog $A^{-1} = A^*$ vrijedi $AA^* = A^*A = I$ pa primjenom izomorfizma $\psi : A \mapsto [A]_e^e$ iz *korolara 5.4.13* dobivamo $[A]_e^e[A^*]_e^e = [A^*]_e^e[A]_e^e = I$. Preostaje primijeniti *propoziciju 6.2.11*, tj. uvažiti da je $[A^*]_e^e = ([A]_e^e)^*$. $\square$

Još primijetimo: jer unitaran operator ortonormiranu bazu prevodi u ortonormiranu bazu, to je $\langle Ae_j, Ae_k\rangle = \delta_{jk}$, $\forall j, k = 1, \ldots, n$. U terminima matrice $[A]_e^e = [\alpha_{ij}] \in M_n$ (i uz pomoć *napomene 6.1.14*) to znači

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha_{ik}} = \delta_{jk},\ \forall j, k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Uočimo sada da je i inverzni operator $A^{-1} = A^*$ također unitaran pa analogna tvrdnja vrijedi i za stupce njegove matrice. Prema *propoziciji 6.2.11* j-ti stupac matrice $[A^*]_e^e$ je $\begin{bmatrix} \overline{\alpha_{j1}} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_{jn}} \end{bmatrix}$. Odavde dobivamo $\sum_{i=1}^n \overline{\alpha_{ji}}\alpha_{ki} = \delta_{jk}$, $\forall j, k = 1, \ldots, n$, odnosno, ako cijelu jednakost konjugiramo,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\overline{\alpha_{ki}} = \delta_{jk},\ \forall j, k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Ako je prostor V realan, koeficijenti matrice su realni brojevi pa prethodne dvije relacije glase:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk},\ \forall j,k = 1,\ldots,n, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ki} = \delta_{jk},\ \forall j,k = 1,\ldots,n. \tag{8}$$

Tako smo vidjeli da i retci i stupci matrice unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi zadovoljavaju ove relacije okomitosti. U stvari je riječ o tome da su i retci i stupci matrice unitarnog operatora ortonormirani skupovi u prostorima $\mathbb{F}^n$ i $M_{n1}(\mathbb{F})$.

Primijetimo usput da ove prostore prirodno identificiramo putem izomorfizma $U : \mathbb{F}^n \to M_{n1}(\mathbb{F})$, $U(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$. No operator U je očito unitaran pa zapravo predstavlja identifikaciju *unitarnih* (a ne samo vektorskih) prostora $\mathbb{F}^n$ i $M_{n1}(\mathbb{F})$.

Definicija 6.2.16. Kaže se da je kompleksna kvadratna matrica A unitarna ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$. Realna kvadratna matrica A je ortogonalna ako vrijedi $AA^t = A^tA = I$.

Po definiciji, svaka unitarna matrica $A = [\alpha_{ij}]$ zadovoljava relacije (5) i (6), dok za svaku ortogonalnu matricu vrijedi (7) i (8).

Korolar 6.2.17. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Matrica $[A]_e^e$ operatora A u svakoj ortonormiranoj bazi e prostora V je unitarna ako je prostor kompleksan, odnosno ortogonalna ako je prostor realan.*

Korolar 6.2.18. *Produkt dviju unitarnih (ortogonalnih) matrica je također unitarna (ortogonalna) matrica.*

Dokaz. Treba samo primijetiti da je kompozicija dvaju unitarnih operatora također unitaran operator i primijeniti izomorfizam $A \mapsto [A]_e^e$ algebri $L(V)$ i M_n pri čemu je e neka ortonormirana baza prostora V. $\square$

Napomena 6.2.19. Primijetimo da je matrica prijelaza $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$ iz jedne ortonormirane baze e u drugu ortonormiranu bazu e' uvijek unitarna, odnosno ortogonalna. To je zato što je zapravo riječ o matričnom zapisu operatora zadanog sa $S : e_i \mapsto e_i'$, a on je, jer prevodi ortonormiranu bazu u ortonormiranu bazu, unitaran zbog *teorema 6.2.5.* Sada djeluje *korolar 6.2.17.*

Preostalo je još proučiti iznimno važnu klasu operatora: one koji su sami sebi hermitski adjungirani.

Definicija 6.2.20. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Kažemo da je operator A hermitski ako vrijedi $A^* = A$.

Najprije primijetimo da hermitskih operatora ima. Takvi su npr. jedinični i nuloperator. Međutim, važno je uočiti da se hermitski operatori prirodno pojavljuju u mnogim razmatranjima. Zabilježimo jedan jednostavan, ali važan slučaj.

Primjer 6.2.21. Neka je V unitaran prostor, neka je M pravi potprostor od V. Na temelju dekompozicije $V = M \oplus M^\perp$ i jedinstvenog prikaza svakog vektora $x \in V$ u obliku $x = a + b$, $a \in M, b \in M^\perp$, definira se ortogonalni projektor na M, $P : V \to V$, $Px = a$. Operator P već smo susreli u *napomeni 6.1.23.* Pokažimo sada da je P hermitski operator: neka je $y \in V$, $y = c + d$, $c \in M, d \in M^\perp$. Tada je $\langle Px, y\rangle = \langle a, c + d\rangle = \langle a, c\rangle = \langle a + b, c\rangle = \langle x, Py\rangle$.

Zabilježimo i direktnu posljedicu *propozicije 6.2.13.*

Korolar 6.2.22. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada je $V = Ker\, A \oplus Im\, A$.*

Definicija 6.2.23. Kaže se da je kvadratna matrica $A = [\alpha_{ij}] \in M_n$ hermitska ako vrijedi $A^* = A$, tj. $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$.

U slučaju kad je matrica realna pojam hermitske matrice svodi se na pojam simetrične matrice. Sljedeća propozicija je izravna posljedica *korolara 5.4.13* i *propozicije 6.2.11.*

Propozicija 6.2.24. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i neka je $A \in L(V)$. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(i) *A je hermitski operator;*
(ii) *za svaku ortonormiranu bazu b u V matrica $[A]_b^b$ je hermitska;*
(iii) *postoji ortonormirana baza e u V takva da je matrica $[A]_e^e$ hermitska.*

Sljedeća propozicija je jedna od fundamentalnih činjenica u proučavanju hermitskih operatora. Naglasimo da propozicija govori o hermitskim operatorima na kompleksnim prostorima.

Propozicija 6.2.25. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Sve svojstvene vrijednosti operatora A su realni brojevi.*

Dokaz. Uzmimo svojstven vektor x pridružen svojstvenoj vrijednosti λ operatora A. Sada je $\lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. Nakon dijeljenja s $\langle x, x\rangle$, što je različito od 0 jer x je svojstven vektor, dobivamo $\lambda = \overline{\lambda}$. $\square$

Propozicija 6.2.26. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Svojstveni potprostori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima operatora A međusobno su okomiti.*

Dokaz. Uzmimo $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu$ i pripadajuće svojstvene vektore x i y: $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Sada je, prema prethodnoj propoziciji, (čak i ako je prostor kompleksan) $\overline{\mu} = \mu$ pa imamo $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \overline{\mu}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$, a odavde je $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ i zato $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Sada je sve spremno za dokaz ključnog rezultata za hermitske operatore. Najprije slijedi pripremni teorem, no i sam za sebe važan. Uočimo da je odgovarajuća tvrdnja za operatore na kompleksnim prostorima trivijalna.

Teorem 6.2.27. *Neka je V konačnodimenzionalan realan unitaran prostor, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada je spektar operatora A neprazan.*

Dokaz. Uzmimo ortonormiranu bazu b u V i formirajmo matricu $[A]_b^b = [\alpha_{ij}]$. Prema *propoziciji 6.2.24*, matrica $[A]_b^b$ je hermitska (simetrična). Neka je k_A svojstveni polinom operatora A (odnosno, po definiciji, njegovog matričnog zapisa $[A]_b^b$) i neka je $k_A(\lambda) = 0$. Pokazat ćemo da je λ realan broj (čime će biti dokazano i više nego što se u iskazu propozicije tvrdi: pokazat ćemo da su *sve* nultočke svojstvenog polinoma opratora A realne).

Ostatak dokaza se provodi sasvim analogno razmatranjima iz točke 5.5, gdje smo analizirali ulogu kompleksnih nultočki svojstvenih polinoma operatora na realnim prostorima. Promotrimo operator množenja s matricom $[A]_b^b$ na unitarnom prostoru jednostupčanih kompleksnih matrica $L_{[A]_b^b} : M_{n1}(\mathbb{C}) \to M_{n1}(\mathbb{C})$, $L_{[A]_b^b}(\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}) = [A]_b^b \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$.

Dobili smo linearan operator na kompleksnom unitarnom prostoru. Jasno je, međutim, da u standardnoj ortonormiranoj bazi e prostora $M_{n1}(\mathbb{C})$ imamo matrični zapis $[L_{[A]_b^b}]_e^e = [A]_b^b$. Zato je, prema *propoziciji 6.2.24*, operator $L_{[A]_b^b}$ hermitski, a i svojstveni polinom operatora $L_{[A]_b^b}$ je isti kao i svojstveni polinom operatora A. Dakle, λ je nultočka svojstvenog polinoma operatora $L_{[A]_b^b}$ na kompleksnom prostoru $M_{n1}(\mathbb{C})$. Kako je prostor kompleksan, to znači da je λ svojstvena vrijednost operatora $L_{[A]_b^b}$! Propozicija 6.2.25 sada pokazuje da je $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Prethodni teorem je toliko važan u primjenama da se često susreću njegove različite reformulacije. Zabilježimo jednu.

Korolar 6.2.28. *Realna simetrična matrica ima svojstvenu vrijednost.*

Sljedeći teorem može se smatrati glavnim rezultatom za hermitske operatore: svaki hermitski operator dopušta dijagonalizaciju u nekoj ortonormiranoj bazi. Treba uočiti da u formulaciji teorema nema razlike između realnih i kompleksnih prostora.

Teorem 6.2.29. *Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator. Postoji ortonormirana baza e prostora V u kojoj je matrični zapis $[A]_e^e$ operatora A dijagonalna matrica.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati indukcijom po dimenziji prostora. Za $\dim V = 1$ tvrdnja je (na trivijalan način) točna.

Pretpostavimo da je tvrdnja teorema točna za svaki hermitski operator na unitarnim prostorima dimenzije $n-1$. Uzmimo unitaran prostor V takav da je $\dim V = n$ i hermitski operator $A \in L(V)$.

Najprije nađimo jednu svojstvenu vrijednost λ za A - to možemo prema prethodnom teoremu. (Primijetimo ulogu prethodnog teorema. Ako je prostor kompleksan, postojanje svojstvenih vrijednosti je nesporno.) Neka je a jedinični svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Definirajmo $M = [\{a\}] \leq V$. Tada je $V = M \oplus M^{\perp}$ i zato je $\dim M^{\perp} = n - 1$.

Pokažimo da je potprostor $M^{\perp}$ invarijantan za A, tj. da vrijedi $x \in M^{\perp} \Rightarrow Ax \in M^{\perp}$. Zaista, za to je dovoljno vidjeti $\langle a, Ax\rangle = 0$, no $\langle a, Ax\rangle = \langle Aa, x\rangle = \lambda\langle a, x\rangle = 0$ jer smo uzeli $x \in M^{\perp}$.

Označimo s $A_1 : M^{\perp} \to M^{\perp}$ restrikciju operatora A na potprostor $M^{\perp}$. Jasno je da je i taj operator linearan, a jasno je da vrijedi i $\langle A_1x, y\rangle = \langle x, A_1y\rangle$ za sve x i y iz $M^{\perp}$ zato što jednakost $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ vrijedi za sve vektore prostora V.

Nakon svega, vidimo da smo dobili hermitski operator A_1 na unitarnom prostoru $M^{\perp}$ dimenzije $n - 1$. Prema pretpostavci indukcije, postoji ortonormirana baza $\{e_2, \dots, e_n\}$ ovog prostora u kojoj je matrica operatora A_1 dijagonalna; tj. vrijedi $A_1e_i = \lambda_ie_i$, $\forall i = 2, \dots, n$.

Sada je jasno da je $e = \{a, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza prostora V u kojoj se polazni operator A dijagonalizira. $\square$

Ako je dan hermitski operator A na realnom unitarnom prostoru V, onda je, prema *propoziciji 6.2.24*, u svakoj ortonormiranoj bazi e prostora V matrica $[A]_e^e$ simetrična. Sad možemo primijeniti prethodni teorem: postoji druga ortonormirana baza e' prostora V u kojoj će matrica $[A]_{e'}^{e'}$ biti dijagonalna. Uočimo da je prema *napomeni 6.2.19* matrica prijelaza $[S]_e^e = [I]_{e'}^e$ ortogonalna. Odavde dobivamo sljedeći korolar, koji predstavlja često prisutnu klasičnu reformulaciju prethodnog teorema.

Korolar 6.2.30. *Svaka simetrična matrica je ortogonalno slična dijagonalnoj matrici.*

Izlaganje ćemo završiti primjerom koji se temelji na prethodnom teoremu, a igra važnu ulogu u različitim primjenama.

Primjer 6.2.31. Neka su a, b, c realni brojevi pri čemu je $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Preslikavanje $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirano s $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ zove se kvadratna forma s koeficijentima a, b, c.

Koeficijent uz x_1x_2 napisan je u obliku $2b$ iz tehničkih razloga. Naime, ako smo tako postupili, možemo uvesti simetričnu matricu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in$

$M_2(\mathbb{R})$ i onda, koristeći skalarni produkt u $M_{21}(\mathbb{R})$, kvadratnu formu q zapisati u obliku $q(x_1, x_2) = \langle \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rangle$.

Ukoliko sada pogledamo operator $L_A : M_{21} \to M_{21}$, $L_A x = Ax$, kvadratnu formu q možemo interpretirati i vektorski, odnosno operatorski. Sjetimo se da u kanonskoj bazi e prostora M_2 imamo $[L_A]_e^e = A$. Kako je ta baza ortonormirana, a matrični zapis našeg operatora simetrična matrica, zaključujemo iz *propozicije 6.2.24* da je L_A hermitski operator. No sada smo u prilici primijeniti *teorem 6.2.29*: možemo naći ortonormiranu bazu $(a) = \{a_1, a_2\}$ svojstvenih vektora za L_A (odnosno za A) i svojstvene vrijednosti α_1, α_2 tako da je $Aa_1 = \alpha_1 a_1$ i $Aa_2 = \alpha_2 a_2$. To očito povlači da u ovoj bazi forma q poprima znatno jednostavniji oblik: ako je vektor $x \in M_{21}$ napisan u obliku $x = x_1' a_1 + x_2' a_2$, onda je $q(x) = \alpha_1 (x_1')^2 + \alpha_2 (x_2')^2$. U ovoj situaciji, gdje je iščeznuo mješoviti član, kažemo da smo kvadratnu formu dijagonalizirali.

Sve potpuno analogno možemo načiniti i za kvadratne forme od n varijabli; to su preslikavanja $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana pomoću simetrične matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ formulom $q(x) = \langle Ax, x \rangle$, pri čemu smo prešutno uređenu n-torku x shvatili kao stupac.

Kvadratne forme se prirodno pojavljuju u raznim problemima i često su njihova svojstva bitna za rješavanje tih problema (npr. pozitivna definitnost ili indefinitnost). U svim problemima takve vrste od znatne je pomoći postupak dijagonalizacije koji se temelji na *teoremu 6.2.29*. Spomenimo jednu takvu primjenu: klasifikaciju krivulja drugog reda.

Neka su a, b, c, d, e, f realni brojevi pri čemu je $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Treba riješiti jednadžbu drugog stupnja u x_1 i x_2 oblika $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$. Preciznije, treba odrediti skup S svih točaka ravnine čije koordinate zadovoljavaju ovu jednadžbu.

Poznato je da je skup S zapravo jedna krivulja drugog reda. Do njezinog opisa, odnosno standardne jednadžbe najlakše se dolazi dijagonalizacijom pridružene kvadratne forme $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. Pokazuje se da je skup S zapravo (ako zanemarimo neke degenerirane situacije) elipsa ili hiperbola ili parabola, ovisno o tome je li $\det A > 0$ ili $\det A < 0$ ili $\det A = 0$, gdje je A simetrična matrica kvadratne forme q.

Precizna formulacija i izvod ove činjenice može se naći u [5] u točki 2.8. Analognom metodom mogu se klasificirati i plohe drugog reda ([5], točka 3.5).

Daljnja vrlo značajna primjena dijagonalizacije kvadratne forme susreće se u matematičkoj analizi pri određivanju lokalnih ekstrema funkcija više varijabli. Za dovoljno glatke funkcije više varijabli prirodno se u svakoj kritičnoj točki uvodi kvadratna forma zadana drugim derivacijama. Dijagonalizacijom ove forme lako se utvrđuje njezina definitnost, odnosno indefinitnost, a to na kraju odlučuje o naravi dane kritične točke.

6.3. **Zadaci.**

1. Provjerite da su preslikavanja navedena u *primjerima 6.1.4* zaista skalarni produkti.

2. Pokažite da je formulom $\langle p, q\rangle = p(1)q(1) + 2p(0)q(0) + p(-1)q(-1)$ definiran skalarni produkt na $P_2(\mathbb{R})$.

3. Dokažite relaciju paralelograma iz *napomene 6.1.8.*

4. Dokažite polarizacijske formule iz *napomene 6.1.9.*

5. Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza vektorskog prostora V. Dokažite da postoji skalarni produkt na V s obzirom na koji je e ortonormirana baza za V.

6. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte skup $S = \{(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)\}$.

7. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirajte skup $S = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$.

8. Odredite bar jednu ortonormiranu bazu unitarnog prostora $P_3(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

9. Neka su L i M potprostori konačnodimenzionalnog unitarnog prostora V. Dokažite da je $(L + M)^{\perp} = L^{\perp} \cap M^{\perp}$ i $(L \cap M)^{\perp} = L^{\perp} + M^{\perp}$.

10. Za vektore $a = (1, 3, 0, 2), b = (3, 7, -1, 2), c = (2, 4, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ i potprostor $M = [\{a, b, c\}]$ odredite jednu ortonormiranu bazu potprostora $M^{\perp}$.

11. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^n$ zadan je potprostor $M = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_2-x_1 = x_3-x_2 = \ldots = x_n-x_{n-1} = x_1-x_n\}$. Odredite neku ortonormiranu bazu za $M^{\perp}$.

12. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ zadan je potprostor M svojom bazom $\{(1, 1, 2, -1), (1, 0, 0, 2)\}$. Prikažite vektor $x = (1, 1, 1, 1)$ u obliku $x = a + b,\ a \in M, b \in M^{\perp}$.

13. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ odredite najbolju aproksimaciju matrice $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ matricama iz potprostora $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

14. Neka je V unitaran prostor. Pokažite da je preslikavanje $\varphi : V \to V^*$ definirano formulom $\varphi(a) = f_a$ antilinearno, tj. da za sve skalare α, β i vektore a, b vrijedi $\varphi(\alpha a + \beta b) = \overline{\alpha}\varphi(a) + \overline{\beta}\varphi(b)$.

15. U prostoru $P_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ zadan je linearan funkcional $f(p) = p(-1) + p(1)$. Odredite polinom $q \in P_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi $f(p) = \langle p, q\rangle$, $\forall p \in P_2(\mathbb{R})$.

16. Neka za linearan operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V vrijedi $x, y \in V,\ x \perp y \Rightarrow Ax \perp Ay$. Dokažite da tada postoje skalar α i unitaran operator U na V takvi da je $A = \alpha U$.

17. Neka su V i W unitarni prostori nad istim poljem. Dokažite da je za linearan operator $A \in L(V, W)$ svojstvo očuvanja skalarnih produkata $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$, ekvivalentno svojstvu izometričnosti $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in V$.

18. Neka je V unitaran prostor i $A : V \to V$ *preslikavanje* sa svojstvom $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$. Dokažite da je A linearan operator.

19. Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je linearan operator $A(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3, \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3, x_2)$. Provjerite je li operator A unitaran te odredite A^{-1}.

20. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Pokažite da postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj je matrični zapis operatora A gornjetrokutasta matrica.

21. Dokažite da skup svih ortogonalnih matrica čini grupu s obzirom na matrično množenje. (Usp. *korolar 6.2.18.*)

22. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran operator. Ako je potprostor $M \leq V$ invarijantan za A, dokažite da je tada i $M^\perp$ invarijantan za A.

23. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $P \in L(V)$. Dokažite da je operator P ortogonalan projektor na neki potprostor ako i samo ako vrijedi $P^2 = P = P^*$.

24. Neka su V i W konačnodimenzionalni unitarni prostori te neka je $A \in L(V, W)$. Označimo s φ_V i φ_W operatore iz *zadatka 14* koji predstavljaju (u slučaju da su prostori kompleksni antilinearne) izomorfizme prostora V i W i njihovih duala V^* i W^*, respektivno. Pokažite da je dualni operator operatora A definiran u *napomeni 5.3.11* jednak kompoziciji $\varphi_V \circ A^* \circ \varphi_W^{-1}$. (Uočite da A^* ovdje označava hermitski adjungirani operator.)

25. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Dokažite da je tada $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$.

26. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ operator sa svojstvom $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$. Pokažite da je A hermitski operator.

27. Zadan je linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojim prikazom u kanonskoj bazi $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$. Pokažite da je A hermitski operator i nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

28. Zadan je linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojim prikazom u kanonskoj bazi $[A]_e^e = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Pokažite da je A hermitski operator i nađite ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora A dijagonalna.

29. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 2 \\ -6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ odredite ortogonalnu matricu S tako da $S^t AS$ bude dijagonalna.

30. Za linearan operator A na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V kažemo da je pozitivan (što označavamo s $A \geq 0$) ako je A hermitski i zadovoljava nejednakost $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in V$. Pritom se kaže da je A strogo pozitivan (što označavamo s $A > 0$) ako dodatno zadovoljava i uvjet

$\langle Ax, x\rangle > 0$, $\forall x \neq 0$. Dokažite da za svaki pozitivan operator A postoji jedinstven pozitivan operator $B \in L(V)$ takav da vrijedi $B^2 = A$. (Operator B zato se naziva pozitivan drugi korijen iz operatora A.)

31. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor sa skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ te neka je $A \in L(V)$ strogo pozitivan operator. Pokažite da je formulom $[x, y] := \langle Ax, y\rangle$ definiran jedan novi skalarni produkt na V. Obratno, ako je $[\cdot, \cdot]$ neki skalarni produkt na V, onda postoji strogo pozitivan operator na V s obzirom na originalan skalarni produkt takav da vrijedi $[x, y] = \langle Ax, y\rangle$, $\forall x, y \in V$.

Literatura

[1] N. Bakić, A. Milas, Zbirka zadataka iz linearne algebre, PMF-Matematički odjel Sveučilišta u Zagrebu, 1995.
[2] N. Elezović, A. Aglić, Linearna algebra, Element, 1995.
[3] P. R. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, Springer, 1974.
[4] K. Horvatić, Linearna algebra, Golden marketing, 2004.
[5] S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, 1978.
[6] S. Kurepa, Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene, Liber, 1992.
[7] V. Proskurjakov, Problems in linear algebra, Mir, 1985.
[8] G. Strang, Introduction to linear algebra, Cambridge Press, 2003.
[9] T. Tao, Bilješke uz predavanja iz linearne algebre,
http://www.math.ucla.edu/ tao/resource/general/115a.3.02f/