Б. В. Пальцев

Сферические функции

УДК 517.586

Данное пособие посвящено изложению основ теории сферических функций и предназначено для студентов, изучающих соответствующий раздел курса уравнений математической физики. Избранная схема изложения основывается на использовании элементарных свойств оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере и связи собственных функций этого оператора — сферических функций с шаровыми функциями — однородными гармоническими многочленами. Для исследования поведения решений уравнения Лежандра в окрестностях особых точек привлекаются факты из аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с правильными особенностями. В заключение дано применение сферических функций к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа в областях в $\mathbb{R}^3$, обладающих сферической симметрией.

В дальнейшем будем обозначать:
$C^k(\Omega)$, где $k \geqslant 0$ — целое, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, — пространство функций непрерывных в Ω вместе со всеми своими частными производными до k-го порядка включительно;
$C^k(\overline{\Omega})$, $k \geqslant 0$ — целое, — подпространство пространства $C^k(\Omega)$, состоящее из функций, которые вместе со всеми своими производными до k-го порядка допускают продолжения в замыкание $\overline{\Omega}$ области Ω как непрерывные на $\overline{\Omega}$ функции;
$C(\Omega) = C^0(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega}) = C^0(\overline{\Omega})$ — пространства непрерывных функций на Ω и $\overline{\Omega}$ соответственно.

Функция $u(x) \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющая в области Ω уравнению Лапласа $\Delta u(x) = 0$, называется *гармонической* в Ω.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{gathered} \Delta u(x) = 0, \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ u|_\Gamma = u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega \text{ — граница } \Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где Ω — область в $\mathbb{R}^3$, обладающая круговой симметрией:
либо шар $\Omega = \{x : |x| < R\}$,
либо внешность шара $\Omega = \{x : |x| > r\}$,
либо шаровой слой $\Omega = \{x : r < |x| < R\}$,
$u_0(x) \in C(\Gamma)$, где $C(\Gamma)$ — пространство непрерывных функций на Γ, а, если необходимо, и достаточно гладкая заданная на Γ функция.

Оказывается, что для решения и этой задачи можно развить метод Фурье. При этом возникают новые специальные функции — так называемые сферические функции.

§ 1. Оператор Лапласа в сферической системе

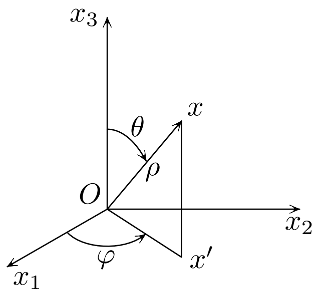

Рис. 1

Естественно перейти в задаче (1) к сферической системе координат ρ,θ,φ:
$\rho = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,
θ — угол между осью Ox_3 и вектором x, отсчитываемый от оси Ox_3,
φ — угол между осью Ox_1 и проекцией x' вектора x на плоскость $x_3 = 0$, отсчитываемый от оси Ox_1.

При этом

$$\begin{gathered} x_1 = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = \rho\cos\theta, \\ \rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{gathered} \tag{2}$$

(при $\rho = 0$ θ и φ не определяются однозначно).

Выведем уравнение Лапласа в сферической системе координат. Поскольку

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u,$$

то для этого следует получить выражения в сферической системе для $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div} \overrightarrow{F}$, где u — скалярное, а $\overrightarrow{F}$ — векторное поля в Ω.

Если $u(x) = u(x_1,x_2,x_3)$ — некоторая функция в Ω, то через $\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)$ будем обозначать выражение функции $u(x)$ в сферической системе

$$\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi) = u(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta). \tag{3}$$

Итак, нам нужно получить выражение $\widehat{\Delta u}(\rho,\theta,\varphi)$ через $\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)$.

1°. Обозначим через $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ортонормированный базис исходной декартовой системы Ox_1,x_2,x_3. Пусть

$$\overrightarrow{F} = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3 \tag{4}$$

— некоторое векторное поле в Ω ($\vec{F} = \vec{F}(x)$ — вектор-функция на Ω), $\{F^1,F^2,F^3\}$ — координаты $\vec{F}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

Каждой точке $x \in \Omega$, $x \neq 0$, со сферическими координатами (ρ,θ,φ) поставим в соответствие подвижный ортонормированный репер $\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$ (тройку взаимно ортогональных единичных векторов):

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_\rho = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \quad \left(= \frac{\partial x}{\partial \rho}\right),\\
&\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \quad \left(= \frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right),\\
&\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \quad \left(= \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Легко видеть, что эти векторы — единичные касательные векторы соответственно к координатным линиям

$$\theta,\varphi = \mathrm{const}\,, \qquad \rho,\varphi = \mathrm{const}\,, \qquad \rho,\theta = \mathrm{const}\,.$$

Разложим вектор $\vec{F}$ по ортонормированному базису (5)

$$\vec{F} = F^\rho\vec{e}_\rho + F^\theta\vec{e}_\theta + F^\varphi\vec{e}_\varphi, \tag{6}$$

$\{F^\rho,F^\theta,F^\varphi\}$ — координаты $\vec{F}$ в базисе (5) или, как мы их будем называть, координаты вектора $\vec{F}$ в сферической системе. В силу ортонормированности репера (5)

$$\begin{aligned}
&F^\rho = (\vec{F},\vec{e}_\rho) = \widehat{F}^1\sin\theta\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\theta\sin\varphi + \widehat{F}^3\cos\theta,\\
&F^\theta = (\vec{F},\vec{e}_\rho) = \widehat{F}^1\cos\theta\cos\varphi + \widehat{F}^2\cos\theta\sin\varphi - \widehat{F}^3\sin\theta,\\
&F^\varphi = (\vec{F},\vec{e}_\rho) = -\widehat{F}^1\sin\varphi + \widehat{F}^2\cos\varphi,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\widehat{F}^k$ — декартовы координаты F^k, выраженные как скалярные функции в сферической системе.

2°. Получим выражение координат вектора $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $u \in C^1(\Omega)$, в сферической системе. Дифференцируя (3) последовательно по ρ, θ и φ, имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho} &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}} \sin\theta\cos\varphi + \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \sin\theta\sin\varphi + \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_3}} \cos\theta, \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta} &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}} \cos\theta\cos\varphi + \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \cos\theta\sin\varphi - \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_3}} \sin\theta, \\
\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi} &= -\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}} \sin\varphi + \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}} \cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Поскольку $\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}$ — координаты ∇u в декартовой системе, в силу (7) получаем

$$
(\nabla u)^\rho = \widehat{\frac{\partial u}{\partial \rho}}, \quad (\nabla u)^\theta = \frac{1}{\rho}\widehat{\frac{\partial u}{\partial \theta}}, \quad (\nabla u)^\varphi = \frac{1}{\rho\sin\theta}\widehat{\frac{\partial u}{\partial \varphi}}. \tag{9}
$$

3°. Пусть теперь $\vec{F}$ — гладкое векторное поле в Ω. Получим выражение $\widehat{\operatorname{div}\vec{F}}$ в сферической системе, т.е. выражение этой функции через F^ρ, F^θ, F^φ. Для этого сначала выразим $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}$, $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$ и $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_3}}$, где u — произвольная гладкая функция в Ω, через $\widehat{\frac{\partial u}{\partial \rho}}$, $\widehat{\frac{\partial u}{\partial \rho}}$ и $\widehat{\frac{\partial u}{\partial \rho}}$. Это легко сделать, рассматривая соотношения (8) как систему линейных уравнений относительно величин $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}}$, $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}}$, $\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_3}}$. Учитывая то, что матрица такой системы — ортогональная матрица, а обратная к ортогональной матрице является транспонированная к ней, получаем

$$
\begin{aligned}
\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_1}} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho}\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}\cos\theta\cos\varphi - \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}\sin\varphi,\\
\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_2}} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho}\sin\theta\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}\cos\theta\sin\varphi + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \varphi}\cos\varphi,\\
\widehat{\frac{\partial u}{\partial x_3}} &= \frac{\partial \widehat{u}}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial \theta}\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Используя эти выражения, мы получаем (выполняя на последней стадии суммирование по столбцам и тождественные преобразования)

$$
\begin{aligned}
\widehat{\operatorname{div}\,\vec{F}} &= \widehat{\frac{\partial F^1}{\partial x_1}} + \widehat{\frac{\partial F^2}{\partial x_2}} + \widehat{\frac{\partial F^3}{\partial x_3}} =\\
&= \frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \rho}\sin\theta\cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \theta}\cos\theta\cos\varphi - \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \widehat{F}^1}{\partial \varphi}\sin\varphi +\\
&\quad + \frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \rho}\sin\theta\sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \theta}\cos\theta\sin\varphi + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial \widehat{F}^2}{\partial \varphi}\cos\varphi +\\
&\quad + \frac{\partial \widehat{F}^3}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{F}^3}{\partial \theta}\sin\theta =\\
&= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\widehat{F}^1\sin\theta\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\theta\sin\varphi + \widehat{F}^3\cos\theta\right) +\\
&\quad + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\widehat{F}^1\cos\theta\cos\varphi + \widehat{F}^2\cos\theta\sin\varphi - \widehat{F}^3\sin\theta\right) +\\
&\quad + \frac{1}{\rho}\left(\widehat{F}^1\sin\theta\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\theta\sin\varphi + \widehat{F}^3\cos\theta\right) +\\
&\quad + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(-\widehat{F}^1\sin\varphi + \widehat{F}^2\cos\varphi\right) +\\
&\quad + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\widehat{F}^1\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\varphi\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{F^\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \\ + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\widehat{F}^1\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\varphi\right).$$

Остаётся последнее слагаемое здесь выразить через F^ρ, F^θ и F^φ. Для этого обратимся к соотношениям (7). Умножим первое из них на $\sin\theta$, второе — на $\cos\theta$, сложим их. В результате получим

$$\widehat{F}^1\cos\varphi + \widehat{F}^2\sin\varphi = F^\rho\sin\theta + F^\theta\cos\theta.$$

Используя это соотношение, окончательно получаем

$$\widehat{\operatorname{div}\vec{F}} = \frac{\partial F^\rho}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho}F^\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho}\operatorname{ctg}\theta F^\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} = \\ = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 F^\rho) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F^\theta) + \frac{\partial F^\varphi}{\partial\varphi}\right]. \qquad (10)$$

Это и есть выражение дивергенции векторного поля $\vec{F}$ в сферической системе координат.

4°. Теперь уже легко выписать выражение оператора Лапласа в сферической системе. Используя (10), тождество $\widehat{\Delta u} = \widehat{\operatorname{div}(\nabla u)}$ и (9), находим

$$\widehat{\Delta u} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\big(\rho^2(\nabla u)^\rho\big) + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta(\nabla u)^\theta\Big) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\nabla u)^\varphi\right] = \\ = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial\varphi^2}\right] = \\ = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{u}, \qquad (11)$$

где мы обозначили

$$\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{u} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial\varphi^2}. \qquad (12)$$

Итак, в сферической системе оператор Лапласа представляет собой сумму оператора 2-го порядка по радиальной переменной $\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)$ и оператора 2-го порядка по угловым переменным $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$, поделённого на ρ^2. Оператор $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ называют оператором Лапласа–Бельтрами на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$.

§ 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на сфере и его свойства. Сферические и шаровые функции

Обозначим через $S_1 = \{x : |x| = 1\}$ — единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат.

Определение 1. Через $C^k(S_1)$, $k \geqslant 0$ — целое, обозначим *пространство функций k раз непрерывно дифференцируемых на сфере S_1.*

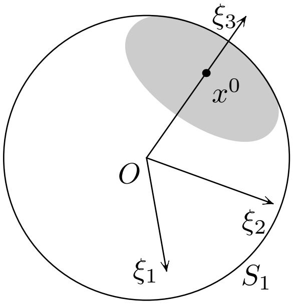

Рис. 2

Это означает следующее. Для любой точки $x^0{=}(x_1^0,x_2^0,x_3^0) \in S_1$ возьмём какую-нибудь декартову систему $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ с началом в точке O, причём такую, что ось $O\xi_3$ направлена по вектору Ox^0. При этом плоскость $\xi_3 = 0$ параллельна касательной плоскости к S_1 в точке x^0. Обозначим $x{=}x(\xi)$ ($x_1{=}x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $x_2{=}x_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, $x_3{=}x_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$) формулы перехода к новой системе ξ и введём в рассмотрение функцию $v^\xi(\xi) = v(x(\xi))$ — выражение функции $v(x)$ в новой декартовой системе ξ. Далее, уравнение в системе ξ куска S_1, проходящего через точку x^0, будет $\xi_3 = \sqrt{1-\xi_1^2+\xi_2^2}$, $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < 1$, где $\xi' = (\xi_1,\xi_2)$. Выразим $v^\xi(\xi)$ только через "касательные" координаты ξ' (являющиеся касательными координатами этого куска S_1) и получим функцию

$$\tilde{v}^\xi \stackrel{\text{def}}{=} v^\xi(\xi_1,\xi_2,\sqrt{1-|\xi'|^2}). \tag{13}$$

Так вот, по определению функция $v(x) \in C^k(S_1)$, если для любой $x^0 \in S_1$ и для любой декартовой системы $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, описанной выше, функция (13) принадлежит пространству $C^k\left(|\xi'| \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Аналогичным образом определяется пространство $C^k(S_\rho)$ на сфере S_ρ радиуса ρ.

<u>З а м е ч а н и е 1.</u> Можно показать, что это определение эквивалентно также следующему. Функция $v(x)$ принадлежит пространству $C^k(S_1)$ тогда и только тогда, когда для любой декартовой системы координат $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)$ с центром в начале координат функция

$$\widehat{v}(\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) = v(\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}, \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}, \cos\tilde{\theta}), \tag{14}$$

где $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\varphi}$ — углы в сферической системе, связанной с декартовой системой $\tilde{x}$, принадлежит пространству $C^k((0,\pi)\times[0,2\pi])$.

Определение 2. *Оператор Лапласа–Бельтрами* Δ'_{S_1} *на единичной сфере* S_1 определим как оператор, переводящий всякую функцию $v(x) \in C^2(S_1)$ в функцию $\Delta'_{S_1}v(x) \in C(S_1)$, выражение которой в сферических координатах даётся формулой

$$\widehat{\Delta'_{S_1}v}(\theta,\varphi) = \widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{v}(\theta,\varphi), \tag{15}$$

где $\widehat{v}(\theta,\varphi)$ определяется по формуле (14), только без “тильд”, $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ — дифференциальный оператор 2-го порядка, определяемый формулой (12).

Здесь мы встречаемся по сути дела с определениями пространств гладких функций на гладком многообразии (в данном случае — на сфере S_1) и дифференциального оператора на таком многообразии.

Хотя выражение оператора $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ оператора Лапласа–Бельтрами $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ в сферической системе и зависит от углов θ и φ, а $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}$ имеет особенности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ ($\sin\theta$, появляющийся в знаменателе, обращается в нуль в этих точках), сам оператор $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ во всех точках сферы S_1 устроен совершенно одинаково. Если мы перейдём к другой сферической системе, связанной с другой декартовой системой $\tilde{x}$ (например, с осью $O\tilde{x}_3$, направленной по старой оси Ox_1), то $\widehat{\Delta}'_{\widetilde{\theta},\widetilde{\varphi}}$ уже не будет иметь особенностей в старых полюсах сферы $(0{,}0, \pm 1)$, соответствующих $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Эту "одинаковую устроенность" оператора $\widehat{\Delta}'_{S_1}$ во всех точках S_1 можно легко уяснить также из формулы

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\widehat{\Delta}'_{S_1}.$$

Оператор Лапласа Δ инвариантен (не изменяет своей формулы) относительно вращений (т.е. при переходе к другой ортогональной системе $\tilde{x}$ с центром в начале координат), оператор $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$ содержит дифференцирования только по радиусу и очевидно инвариантен относительно вращений. Отсюда и оператор $\frac{1}{\rho^2}\Delta'_{S_1}$, а с ним и оператор Δ'_{S_1} инвариантен относительно вращений.

Нетрудно установить (проверьте сами), что оператор Δ'_{S_1} отображает пространство $C^k(S_1)$, $k \geqslant 2$, в пространство $C^{k-2}(S_1)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Оператор* $-\Delta'_{S_1}$ *симметричен и неотрицателен на пространстве* $C^2(S_1)$ *относительно скалярного произведе-*

ния в $L_2(S_1)$:

$$(u,v)_{S_1} = \int_{S_1} u(x)\overline{v(x)}\,ds = \int_0^{\pi} \widehat{u}(\theta,\varphi)\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \qquad (16)$$

а именно, $\forall\, u,v \in C^2(S_1)$

$$\begin{aligned}(-\Delta'_{S_1}u,v)_{S_1} &= (u,-\Delta'_{S_1}v)_{S_1},\\ (-\Delta'_{S_1}u,u)_{S_1} &\geqslant 0.\end{aligned} \qquad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения оператора Δ'_{S_1} для любых $u,v \in C^2(S_1)$ имеем

$$\begin{aligned}(-\Delta'_{S_1}u,v) &= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{\Delta'_{S_1}u}(\theta,\varphi)\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =\\ &= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{u}(\theta,\varphi)\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =\\ &= -\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\,d\theta -\\ &\quad -\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\,d\varphi.\end{aligned} \qquad (18)$$

Покажем, что все функции, которые стоят под знаками интегралов в последнем выражении, на самом деле не имеют особенностей и принадлежат пространству $C([0,\pi]\times[0,2\pi])$ как функции θ и φ. В самом деле, например,

$$\widehat{v}(\theta,\varphi) = v(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi) \in C([0,\pi]\times[0,2\pi])$$

как суперпозиция непрерывных функций. Аналогично для $\widehat{u}(\theta,\varphi)$.

Проверим далее, что функции

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}(\theta,\varphi) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) \qquad (19)$$

принадлежат $C^1([0,\pi]\times[0,2\pi])$. Отсюда будет следовать, что и

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right),\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\in C([0,\pi]\times[0,2\pi]).$$

В силу сделанного выше замечания 1 функция $\widehat{u}(\theta,\varphi)\in$ $\in C^2((0,\pi)\times[0,2\pi])$, а потому

$$\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}(\theta,\varphi),\quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}\in C^1((0,\pi)\times[0,2\pi]).$$

Поэтому остаётся показать, например, что функции (19) принадлежат пространствам

$$C^1\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,2\pi]\right)\quad\text{и}\quad C^1\left(\left[\pi-\frac{\pi}{6},\pi\right]\times[0,2\pi]\right).$$

Проверим, например, первое. В силу определения 1 функция

$$\tilde{u}(x_1,x_2)\overset{\text{def}}{=}u(x_1,x_2,\sqrt{1-x_1-x_2})\in C^2\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

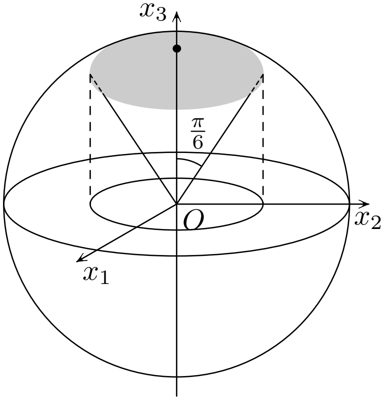

Рис. 3

При этом $u(x_1,x_2,x_3)|_{x\in S_1}=$ $=\tilde{u}(x_1,x_2)$ в окрестности верхнего полюса сферы S_1, описываемой в сферической системе неравенством $\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$. Поэтому имеет место равенство

$$\widehat{u}(\theta,\varphi)=\tilde{u}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi), \tag{20}$$

и эта функция принадлежит $C^2\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,2\pi]\right)$ как суперпозиция функций соответствующей гладкости. Отсюда следует утверждение относительно первой функции (19). Далее, дифференцируя (20) по φ, имеем

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}=\Bigg(-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi+ \\ +\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi\Bigg)\in C^1\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\times[0,2\pi]\right),$$

опять же как линейная комбинация суперпозиций функций соответствующей гладкости. (Отметим, что при $\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$ имеем $0\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\sin\theta\leqslant\frac{1}{2}$). Итак, необходимые утверждения установлены.

Отсюда следует законность использованных расстановок порядков интегрирования в последнем выражении (18). Далее, интегрированием по частям встречающихся там внутренних интегралов имеем

$$\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\,d\theta=\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi}- \\ -\int_0^\pi\sin\theta\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\cdot\overline{\frac{\partial\widehat{v}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}}\,d\theta=-\int_0^\pi\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\theta}\sin\theta\,d\theta,$$

поскольку $\sin 0=\sin\pi=0$, а также

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\,d\varphi=\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\overline{\widehat{v}(\theta,\varphi)}\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}- \\ -\int_0^{2\pi}\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\overline{\frac{\partial\widehat{v}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}}\,d\varphi=-\int_0^{2\pi}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\varphi}\,d\varphi,$$

поскольку в силу 2π-периодичности по φ функций $\tilde{u}(\theta,\varphi)$ и $\widehat{v}(\theta,\varphi)$ имеем $\frac{\partial\widehat{u}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\,\widehat{v}(\theta,\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}=0$. Используя полученные равенства, приходим к выражению

$$(-\Delta'_{S_1}u,v)_{S_1}=\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}\cdot\overline{\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\theta}}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\overline{\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\varphi}}\right)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_{S_1}(\nabla_{S_1}u,\nabla_{S_1}v)\,ds, \tag{21}$$

где вектор $\nabla_{S_1}u$ лежит в касательной плоскости к S_1 (в каждой точке S_1) и представляет собой градиент функции u (заданной на S_1) вдоль сферы S_1: координаты вектора $\nabla_{S_1}u$ в сферической системе суть $\left(0,\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\theta}\ ,\dfrac{1}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\varphi}\right)$.

Из формулы (21) вытекает сразу неотрицательность оператора $-\Delta'_{S_1}$:

$$(-\Delta'_{S_1}u,u)_{S_1}=\int_{S_1}|\nabla_{S_1}u|^2\,ds\geqslant 0. \tag{22}$$

Из этой же формулы (21) легко получаем и симметричность оператора $-\Delta'_{S_1}$. А именно, меняя местами функции u и v в (21) и переходя к комплексному сопряжению, получаем

$$(u,-\Delta'_{S_1}v)_{S_1}=\overline{(-\Delta'_{S_1}v,u)_{S_1}}=\int_{S_1}\overline{(-\nabla_{S_1}v,\nabla_{S_1}u)_{S_1}}\,ds=$$

$$=\int_{S_1}(\nabla_{S_1}u,\nabla_{S_1}v)\,ds=(-\Delta'_{S_1}u,v)_{S_1}.$$

Итак, лемма 1 установлена.

У п р а ж н е н и е 1. Пользуясь равенством в (22), установить, что всякая гармоническая на сфере S_1 функция $u(x)$, т.е. функция $u(x)\in C^2(S_1)$, удовлетворяющая на S_1 однородному уравнению Лапласа–Бельтрами $\Delta'_{S_1}u(x)=0\;\forall\,x\in S_1$, является постоянной на S_1.

Как и в алгебре (а также для оператора Лапласа в ограниченной области с однородным граничным условием Дирихле), симметричность и неотрицательность оператора $-\Delta'_{S_1}$ влекут следующие свойства его собственных значений и собственных функций.

Лемма 2. 1°. *Собственные значения (СЗ) оператора* $-\Delta'_{S_1}$ *неотрицательны.*

2°. *Собственные функции (СФ) оператора* $-\Delta'_{S_1}$, *отвечающие различным СЗ, ортогональны относительно скалярного произведения* (16).

Доказательство. 1°. Пусть $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающая СЗ λ:

$$-\Delta'_{S_1} y(x) = \lambda y(x), \quad y(x) \not\equiv 0. \tag{23}$$

Последнее влечёт, что $(y,y)_{S_1} > 0$. Тогда в силу (23) и (22)

$$(-\Delta'_{S_1} y,y)_{S_1} = (\lambda y,y)_{S_1} = \lambda(y,y)_{S_1} \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что и $\lambda \geqslant 0$.

2°. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — две СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающие, соответственно, СЗ λ_1 и λ_2, причём $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда, пользуясь симметричностью $-\Delta'_{S_1}$ и действительностью СЗ λ_1 и λ_2, имеем:

$$\begin{aligned}\lambda_1(y_1,y_2)_{S_1} &= (\lambda_1 y_1,y_2)_{S_1} = (-\Delta'_{S_1} y_1,y_2)_{S_1} = (y_1, -\Delta'_{S_1} y_2)_{S_1} = \\ &= (y_1,\lambda_2 y_2)_{S_1} = \lambda_2(y_1,y_2)_{S_1}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1,y_2)_{S_1} = 0,$$

и, поскольку $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, $(y_1,y_2)_{S_1} = 0$. Лемма установлена.

Следующая лемма является центральной для изложения теории сферических функций, которому мы следуем.

Лемма 3. 1°. *Собственными значениями оператора* $-\Delta'_{S_1}$ *могут быть лишь числа* $\lambda_l = l(l+1)$, *где* $l \geqslant 0$ — *целые. Если* $\lambda = l(l+1)$ — *СЗ, а* $y(x)$ — *соответствующая ему СФ* *оператора* $-\Delta'_{S_1}$, *то функция* $V(x)$, *имеющая в сферической системе координат выражение*

$$\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi) = \rho^l \widehat{y}(\theta,\varphi), \tag{24}$$

где $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ *— выражение в сферической системе на* S_1 *СФ* $y(x)$, *представляет собой однородный гармонический многочлен переменных* $x = (x_1,x_2,x_3)$ *степени* l.

2°. *Обратно, если* $V(x)$ *— ненулевой* ($V(x) \not\equiv 0$) *однородный гармонический многочлен в* $\mathbb{R}^3$ *степени* l, *то его представление* $\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi)$ *в сферической системе имеет вид* (24), *где* $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ *— выражение в сферической системе на* S_1 *функции* $y(x) \in C^\infty(S_1)$, $y(x) \not\equiv 0$, *представляющей собой СФ оператора* $-\Delta'_{S_1}$, *отвечающую СЗ* $\lambda = l(l+1)$.

Доказательство. 1°. Пусть $\lambda \geqslant 0$ — СЗ, $y(x) \in C^2(S_1)$ — отвечающая ему СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$ и $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ — выражение $y(x)$ в сферической системе. Нетрудно видеть, что функция $V(x)$, представление которой в сферической системе имеет вид

$$\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi) = R(\rho)\widehat{y}(\theta,\varphi), \tag{25}$$

где $R(\rho) \in C^2(0,\infty)$, является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, т.е. $V(x) \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ (отметим, что это верно и для любой $y(x) \in C^2(S_1)$). Найдём вид тех $R(\rho)$, при которых функция (25), где $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Подставляя (25) в уравнение Лапласа, записанное в сферической системе, используя (11) и то, что $\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{y}(\theta,\varphi) = -\lambda\widehat{y}(\theta,\varphi)$, приходим к уравнению

$$\left(R''(\rho) + \frac{2}{\rho}R'(\rho) - \frac{\lambda}{\rho^2}R(\rho)\right)\widehat{y}(\theta,\varphi) = 0.$$

Поскольку $\widehat{y}(\theta_0,\varphi_0) \neq 0$ при некоторых θ_0,φ_0, отсюда получаем, что $R(\rho)$ является решением на $(0,\infty)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$R''(\rho) + \frac{2}{\rho}R'(\rho) - \frac{\lambda}{\rho^2}R(\rho) = 0.$$

Это уравнение является уравнением Эйлера, и его решения следует искать в виде $R(\rho) = \rho^{\mu}$. Подставляя такое выражение в (25) и сокращая на $\rho^{\mu-2}$, приходим к следующему уравнению для μ:

$$\mu^2 + \mu - \lambda = 0. \tag{26}$$

Корнями этого уравнения являются значения

$$\mu_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}.$$

Поскольку $\lambda \geqslant 0$, имеем $\sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \geqslant \frac{1}{2}$, а потому

$$\mu_{+} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \geqslant 0, \quad \text{а } \mu_{-} \leqslant -1.$$

Рассмотрим далее только функцию $V(x)$, которая в сферической системе имеет выражение

$$\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi) = \rho^{\mu_+}\widehat{y}(\theta,\varphi). \tag{27}$$

Итак, эта функция является гармонической в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Установим, что $V(x)$ является ограниченной в проколотом шаре $0 < |x| = \rho \leqslant 1$.

В самом деле, т.к. $y(x) \in C(S_1)$ $\bigl(\subset C^2(S_1)\bigr)$, а S_1 — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$, то по теореме Вейерштрасса $y(x)$ ограничена на S_1: $\exists\, M : |y(x)| \leqslant M \ \forall\, x \in S_1$. Поэтому и

$$|\widehat{y}(\theta,\varphi)| \leqslant M, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{28}$$

Так как $\mu_+ \geqslant 0$, $\rho^{\mu_+} \leqslant 1$ при $0 < \rho \leqslant 1$. Отсюда $\left|\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi)\right| \leqslant$ $\leqslant M$, а потому и $|V(x)| \leqslant M$ при $0 < |x| \leqslant 1$.

Воспользуемся теперь теоремой об устранимой особенности для гармонической функции, согласно которой функция, гармоническая в проколотом шаре $0 < |x^0 - x| < R$ в $\mathbb{R}^3$ и являющаяся $o\left(\frac{1}{|x^0 - x|}\right)$ при $x \to x^0$, имеет конечный предел в точке $x = x^0$ и, будучи доопределённой в этой точке своим предельным значением, становится гармонической уже во всём шаре $|x^0 - x| < R$. В нашем случае $V(x)$ гармонична в проколотом шаре $0 < |x| < \infty$ и, в силу ограниченности $V(x)$ в окрестности нуля, $V(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $x \to \infty$. Поэтому $V(x)$ можно так доопределить в точке $x = 0$, что она будет гармонической уже во всём пространстве $\mathbb{R}^3$.

Далее заметим, что $V(x)$ имеет на бесконечности рост не выше степенного: в силу (27) и (28)

$$|V(x)| \leqslant M|x|^{\mu_+} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Применим здесь теорему Лиувилля для гармонических функций в $\mathbb{R}^3$ и получим в результате, что $V(x)$ представляет собой многочлен переменных x_1,x_2,x_3.

Теперь уже нетрудно показать, что число μ_+ в представлении (27) является целым, обозначим его буквой l, а $V(x)$ представляет собой однородный многочлен степени l. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 1. *Пусть $v(t)$ — многочлен одной действительной переменной t и известно, что $v(t) = bt^\mu$, $b \neq 0$, $\forall\, t > 0$.*

Тогда $\mu = l$, $l \geqslant 0$ — целое.

Доказательство. Так как многочлен $v(t) \not\equiv 0$, то $v(t) = \sum_{k=0}^{l} a_k t^k$, где l — целое и $a_l \neq 0$. Сравнивая эти два различных представления для $v(t)$, получим, что

$$\frac{v(t)}{a_l t^\mu} = t^{l-\mu}\left(1+\sum_{k=0}^{l-1}\frac{a_k}{a_l}t^{-(l-k)}\right) = t^{l-\mu}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{b}{a_l}$$

при $t \to \infty$. Это возможно лишь в том случае, когда $l-\mu=0$ и $\dfrac{b}{a_l}=1$. Таким образом, $v(t)=bt^l$.

Перейдём теперь к доказательству сформулированного выше утверждения относительно функции $V(x)$. Представим многочлен $V(x)$ в виде

$$V(x)=\sum_{k=0}^{p}V_k(x),$$

где $V_k(x) = \sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\geqslant 0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k}} C^k_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ — однородные многочлены степени k, $k=0,1,\ldots,p$. Переходя к сферическим координатам, имеем

$$\widehat{V}_k(\rho,\theta,\varphi)=\rho^k\widehat{y}_k(\theta,\varphi) \tag{29}$$

и

$$\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{p}\widehat{y}_k(\theta,\varphi)\rho^k, \tag{30}$$

где $\widehat{y}_k(\theta,\varphi)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции θ и φ.

Обратимся к представлению (27) и сначала воспользуемся предложением 1 для тех точек θ,φ, в которых $\widehat{y}(\theta,\varphi)\neq 0$. Это нам даёт, что $\mu_+ = l$ — целому (одному и тому же для всех таких θ и φ), что $p=l$, что $\widehat{y}_l(\theta,\varphi)=\widehat{y}(\theta,\varphi)$ и что $\widehat{y}_k(\theta,\varphi) = 0$, $k=0,1,\ldots,(l-1)$ во всех тех точках θ,φ, где $\widehat{y}(\theta,\varphi)\neq 0$. Для тех же точек θ,φ, где $\widehat{y}(\theta,\varphi)=0$, сравнивая представления (30) и (27), находим, что все $\widehat{y}_k(\theta,\varphi)$, $k=0,1,\ldots,l$ также равны нулю.

Итак, мы получили, что $\mu_+ = l$, что $p = l$, что $\widehat{y}_k(\theta,\varphi) \equiv 0$, $k = 0,1,\ldots,(l-1)$ для всех θ и φ, а потому и $\widehat{V}_k(\rho,\theta,\varphi) \equiv 0$ и, следовательно, $\widehat{V}_k(x) \equiv 0$, $k = 0,1,\ldots,(l-1)$. Таким образом, $V(x)$ является однородным многочленом степени l, удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Воспользуемся теперь уравнением (26), которому удовлетворяет μ_+. Выражая СЗ λ через μ_+, получим

$$\lambda = \mu_+^2 + \mu_+ = l(l+1), \quad l \geqslant 0 \text{ — целое.}$$

1°. Перейдём теперь к доказательству обратного утверждения леммы 3. Для этого воспользуемся следующим предложением.

Предложение 2. *Пусть $V(x)$ — однородный многочлен степени l. Тогда*

$$\Delta V(x)|_{S_1} = l(l+1)y(x) + \Delta'_{S_1} y(x), \tag{31}$$

где

$$y(x) = V(x)|_{S_1} \tag{32}$$

— функция на S_1, называемая следом многочлена $V(x)$ на S_1.

Доказательство. Аналогично (29) для $\widehat{V}(\rho,\theta,\varphi)$ — выражения $V(x)$ в сферической системе — имеет место представление вида (24), где $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ — выражение $y(x)$ в сферической системе. Тогда, используя (11), получаем

$$\widehat{\Delta V}(\rho,\theta,\varphi)|_{\rho=1} = \left[\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{d}{d\rho}\rho^l\right)\widehat{y}(\theta,\varphi) + \frac{\rho^l}{\rho^2}\widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{y}(\theta,\varphi)\right]\Bigg|_{\rho=1} =$$
$$= l(l+1)\widehat{y}(\theta,\varphi) + \widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi}\widehat{y}(\theta,\varphi).$$

Отсюда, с использованием определения 2 и (32), получаем (31).

Итак, если $V(x)$ — ненулевой однородный гармонический многочлен степени l, то в силу (31) и выполнения уравнения

$\Delta V(x) = 0$ получаем, что для функции (32)

$$-\Delta'_{S_1} y(x) = l(l+1)y(x), \quad x \in S_1, \tag{33}$$

причём $y(x) \not\equiv 0$ на S_1 (в противном случае в силу (24) $V(x) \equiv \equiv 0$). Таким образом $y(x)$ является собственной функцией оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающей собственному значению $\lambda = l(l+1)$. Лемма 3 полностью доказана.

СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$ и называют сферическими функциями.

Определение 3. Всякую собственную функцию $y(x)$ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающую собственному значению $\lambda = l(l+1)$, $l \geqslant 0$ — целое, будем называть *сферической функцией веса* l. Обычно сферической функцией называют также и выражение $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ функции $y(x)$ в сферической системе.

Лемма 3 по сути дела и даёт описание множества сферических функций. А именно, имеем следующее

Следствие 1. *Множество всех сферических функций веса l представляет собой совокупность следов на S_1 всех ненулевых однородных гармонических многочленов в $\mathbb{R}^3$ степени l.*

Определение 4. Пусть $y(x)$ — сферическая функция веса l. Однородный гармонический многочлен, имеющий в сферической системе выражение (24), называют *шаровой функцией*, порождённой $y(x)$.

§ 3. Подсчёт максимального числа линейно независимых сферических функций веса l

Поскольку формула (24) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между сферическими функциями веса l и шаровыми функциями степени l, то максимальное число линейно независимых сферических функций веса l

совпадает с максимальным числом линейно независимых однородных гармонических многочленов степени l. Займёмся подсчётом последнего числа.

Заметим, что множество P_l всех однородных многочленов степени l, т.е. многочленов вида

$$\begin{gathered} p(x) = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \\ \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \end{gathered} \tag{34}$$

образует линейное пространство. Множество H_l всех однородных многочленов $p(x)$ степени l, удовлетворяющих уравнению $\Delta p(x) = 0$, в силу линейности оператора Лапласа, представляет собой линейное подпространство пространства P_l. H_l является нуль-пространством оператора Лапласа, рассматриваемого на пространстве P_l.

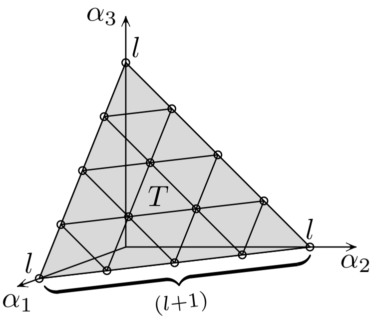

Рис. 4

Подсчитаем сначала размерность $\dim P_l$ пространства P_l. Так как в силу (34) всякий многочлен из P_l является линейной комбинацией одночленов

$$\begin{gathered} x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \geqslant 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l, \end{gathered}$$

а совокупность этих одночленов линейно независима, то размерность P_l равна числу различных таких одночленов, т.е. числу всевозможных точек $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ в $\mathbb{R}^3$ с целочисленными координатами $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \geqslant 0$, лежащими на плоскости $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = l$, а точнее в замкнутом треугольнике T, лежащем в этой плоскости и изображённом на рис. 4. Нетрудно подсчитать количество таких точек:

$$\dim P_l = (l+1) + l + \ldots + 1 = \frac{(l+1)(l+2)}{2}\,. \qquad (35)$$

Далее установим следующее утверждение.

Предложение 3. *Оператор Лапласа Δ отображает пространство P_l на всё пространство P_{l-2} (в случае $l = 0{,}1$ пространство P_{l-2} состоит только из одной нулевой функции и его размерность равна нулю).*

Доказательство. Нужно показать, что для любого однородного многочлена $q(x)$ степени $m \geqslant 0$ найдётся такой однородный многочлен $p(x)$ степени $(m+2)$, что

$$\Delta p(x) = q(x). \qquad (36)$$

1°. В случае, когда $m = 0$, т.е. $q(x) = c_0 = \mathrm{const}$, $p(x) = \frac{c_0}{2}\,x_1^2$ удовлетворяет (36) и для $l-2 = 0$ предложение 3 справедливо.

2°. Предложение 3 справедливо и для случая, когда $q(x)$ является однородным многочленом только одной переменной. Например, если $q(x) = c_m x_1^m$, то многочлен $p(x) = \frac{c_m}{(m+1)(m+2)}\,x_1^{m+2}$ очевидно удовлетворяет (36). Заметим, что при этом $p(x)$ — однородный многочлен также только одной переменной x_1.

3°. Установим далее справедливость предложения 3 для случая, когда $q(x)$ является однородным многочленом только двух переменных. Будем доказывать это индукцией по степени многочлена $q(x)$. Итак предположим, что (36) уже установлено для всех однородных многочленов степени m двух каких-либо переменных, например, x_1 и x_2, и что при этом $p(x)$ — однородный многочлен степени $m+2$ опять тех же двух переменных. Для $m = 0$ мы уже установили, что это верно. Докажем справедливость такого утверждения для произвольного однородного многочлена $q(x)$ степени $m+1$ и переменных x_1 и x_2: $q(x) = q(x_1,x_2)$.

Производная $\dfrac{\partial}{\partial x_1} q(x_1,x_2)$ является однородным многочленом 2-х переменных x_1 и x_2 степени m. Поэтому в силу предположения индукции найдётся такой однородный многочлен $r(x_1,x_2)$ степени $(m+2)$, что

$$\Delta r(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1,x_2). \tag{37}$$

Введём для однородных многочленов операцию J_1 интегрирования по переменной x_1: если $p(x) = \sum_{|\alpha|=l} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ — однородный многочлен степени l, то

$$J_1 p(x) = \sum_{|\alpha|=l} \frac{c_\alpha}{(\alpha_1+1)} x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

— однородный многочлен степени $(l+1)$. Очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} J_1 p(x) \equiv p(x)$$

для любого однородного многочлена $p(x)$.

Образуем далее многочлен $p_1(x_1,x_2) = J_1 r(x_1,x_2)$ — однородный, степени $(m+3)$. Он зависит только от x_1 иx_2. Тогда в силу (37)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta p_1(x_1,x_2) - q(x_1,x_2)) = \Delta \frac{\partial}{\partial x_1} J_1 r(x_1,x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1,x_2) =$$
$$= \Delta r(x_1,x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} q(x_1,x_2) \equiv 0.$$

Поэтому однородный многочлен $(\Delta p_1(x_1,x_2) - q(x_1,x_2))$ на самом деле является однородным многочленом только одной переменной x_2 степени $(m+1)$:

$$\Delta p_1(x_1,x_2) - q(x_1,x_2) = \varphi(x_2). \tag{38}$$

В силу установленного в пункте 2° для $\varphi(x_2)$ найдётся такой однородный многочлен $p_2(x_2)$ только переменной x_2 степени $(m+3)$, что $\Delta p_2(x_2) = \varphi(x_2)$. Используя это в (38), находим в результате, что однородный многочлен $p(x_1,x_2) = = p_1(x_1,x_2) - p_2(x_2)$ удовлетворяет (36). Действительно,

$$\Delta p(x_1,x_2) = \Delta p_1(x_1,x_2) - \Delta p_2(x_2) = \\ = \Delta p_1(x_1,x_2) - \varphi(x_2) = q(x_1,x_2).$$

Итак, утверждение пункта 3° доказано.

4°. Общий случай, когда $q(x)$ — многочлен 3-х переменных устанавливается точно так же индукцией по степени многочлена $q(x)$ с использованием уже доказанного утверждения в пункте 3° для многочленов $q(x)$ только двух переменных. При этом многочлены r и p_1 будут многочленами 3-х переменных, а многочлены φ и p_2 — многочленами 2-х переменных x_2 и x_3. Итак, предложение 3 доказано.

Подсчёт размерности пространства H_l однородных гармонических многочленов степени l произведём с использованием полученных утверждений и следующей леммы, известной из курса линейной алгебры, доказательство которой приведём для полноты изложения.

Лемма 4. *Пусть A — линейное отображение линейного пространства E размерности n на всё линейное пространство F размерности $m \leqslant n$. Тогда размерность нуль-пространства (ядра) N отображения A (т.е. подпространства элементов из E, которые A переводит в $0 \in F$) равна $n - m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в F какой-либо базис $f_1,\ldots,f_m$. Так как $AE = F$, найдутся такие элементы

$e_1, \ldots, e_m$, что $Ae_k = f_k$, $k = 1, \ldots, m$. Нетрудно видеть, что система векторов $e_1, \ldots, e_m$ также линейно независимая система.

Дополним систему $e_1, \ldots, e_m$ элементами $e_{m+1}, \ldots, e_n$ из E до базиса в E. Матрица $\mathcal{A}$ отображения A в базисах $e_1, \ldots, e_n$ в пространстве E и $f_1, \ldots, f_m$ в пространстве F имеет вид $\mathcal{A} = \|E, *\|$, где E — единичная матрица размеров $m \times m$, $*$ — некоторая матрица размеров $m \times (n-m)$. Нуль-пространство N оператора A состоит из тех и только тех векторов $x \in E$, координатные столбцы которых $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ удовлетворяют системе $\mathcal{A}\xi = 0$, где $0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ раз}})^{\mathrm{T}}$. Поскольку ранг матрицы $\mathcal{A}$ равен m (т.к. $\det E = 1$), то размерность пространства решений системы $\mathcal{A}\xi = 0$, а вместе с ней и размерность нуль-пространства N равны $(n - m)$. Лемма 4 доказана.

Итак, применим эту лемму к нахождению размерности пространства H_l однородных гармонических многочленов степени l. Оператор Лапласа Δ представляет собой линейное отображение пространства P_l на всё пространство P_{l-2}, а H_l является нуль-пространством такого оператора. Поэтому в силу леммы 4 и (35) размерность $\dim H_l$ пространства H_l равна

$$\dim H_l = \dim P_l - \dim P_{l-2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)l}{2} = 2l + 1.$$

Итак, установлено следующее утверждение.

Лемма 5. *Максимальное число линейно независимых сферических функций веса l равно в точности $(2l + 1)$. Всякое число $\lambda = l(l + 1)$, где $l \geqslant 0$ — целое, является СЗ оператора $-\Delta'_{S_1}$.*

Таким образом, в принципе мы уже получили описание СЗ и СФ оператора Лапласа–Бельтрами. Перейдём теперь к получению выражений сферических функций в сферической системе.

§ 4. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра

Пусть $y(x)$ — сферическая функция веса l, $l \geqslant 0$ — целое, а $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ — её выражение в сферической системе. $y(x) \in C^\infty(S_1)$ как след гармонического многочлена и, кроме того, $y(x)$ — СФ оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающая СЗ $\lambda = l(l{+}1)$. Поэтому $\widehat{y}(\theta,\varphi) \in \in C^\infty([0,\pi] \times [0,2\pi])$, заведомо ограниченная функция, $\widehat{y}(\theta,\varphi) \not\equiv \equiv 0$, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\widehat{y}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\widehat{y}}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\widehat{y} = 0, \qquad 0 < \theta < \pi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{39}$$

Нам достаточно найти $(2l+1)$ линейно независимых функций, удовлетворяющих этим условиям. Будем искать каждую такую функцию методом разделения переменных в виде

$$\widehat{y}(\theta,\varphi) = z(\theta)e^{im\varphi}, \quad m \text{ — целое.} \tag{40}$$

В силу бесконечной дифференцируемости $\widehat{y}(\theta,\varphi)$ функция $z(\theta)$ также обязана принадлежать $C^\infty([0,2\pi])$. Подставляя (40) в (39) и сокращая на $e^{im\varphi} \neq 0$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta z'(\theta))' - \left(\frac{m^2}{\sin^2\theta} - l(l+1)\right)z(\theta) = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \tag{41}$$

где $z(\theta) \not\equiv 0$, $z(\theta) \in C^\infty([0,\pi])$.

В этом уравнении удобно сделать замену независимой переменной

$$t = \cos\theta, \quad z(\theta) = P(\cos\theta), \quad -1 < t < 1, \tag{42}$$

которая преобразует уравнение (41) к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left((1-t^2)\frac{dP}{dt}\right)-\left(\frac{m^2}{1-t^2}-l(l+1)\right)P(t)=0, \quad -1<t<1, \tag{43}$$

причём $P(t)\in C^\infty((-1,1))$ и ограниченная на $(-1,1)$ функция, $P(t)\not\equiv 0$. Уравнение (43) называется *уравнением Лежандра.*

Итак, перейдём к нахождению таких решений уравнения (43). Умножив это уравнение на $(1-t^2)$, преобразуем его к форме

$$(t^2-1)^2P''+2t(t^2-1)P'-[m^2+l(l+1)(t^2-1)]P=0. \tag{44}$$

Существует аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой имеется раздел, посвящённый аналитической теории линейных уравнений с правильными особыми точками, см., например, книги [4] или [5] из списка литературы, приведённого в конце данного пособия. По этой теории, если в окрестности некоторой точки c линейное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$(t-c)^2y''+(t-c)a(t)y'+b(t)y=0, \tag{45}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — некоторые функции t, аналитические в некоторой окрестности точки $c:|t-c|<\delta$, т.е. функции, которые представимы в этой окрестности степенными рядами

$$a(t)=a_0+a_1(t-c)+\ldots+a_k(t-c)^k+\ldots,$$
$$b(t)=b_0+b_1(t-c)+\ldots+b_k(t-c)^k+\ldots,$$

то точку c называют правильной особой точкой уравнения (44). В этом случае уравнение (45) (поскольку $a(t)\sim a_0$, $b(t)\sim b_0$ при $(t-c)$ малых) похоже в малой окрестности точки c на уравнение Эйлера

$$(t-c)^2\tilde{y}''+a_0(t-c)\tilde{y}'+b_0\tilde{y}=0. \tag{46}$$

Решения последнего уравнения, как известно, следует искать в виде $\tilde{y} = (t-c)^\nu$. Подставляя такую функцию в уравнение (46) и сокращая на $(t-c)^\nu$, приходим к следующему характеристическому уравнению для определения показателя ν:

$$\nu(\nu-1) + a_0\nu + b_0 = 0. \tag{47}$$

Это квадратное уравнение имеет два корня ν_1 и ν_2. Занумеруем их так, чтобы $\operatorname{Re}\nu_1 \geqslant \operatorname{Re}\nu_2$. Оказывается, что так же, как и для уравнения Бесселя (для которого точка 0 является правильной особой точкой), для корня ν_1 можно всегда найти решение уравнения (45) вида

$$y_1(t) = (t-c)^{\nu_1}\left[\overset{1}{\gamma}_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\overset{1}{\gamma}_k(t-c)^k\right], \quad \overset{1}{\gamma}_0 \neq 0. \tag{48}$$

При этом $\overset{1}{\gamma}_0$ можно взять произвольным, коэффициенты $\overset{1}{\gamma}_k$, $k \geqslant 1$, определяются тогда уже однозначно, и степенной ряд в представлении $y_1(t)$ сходится в некоторой достаточно малой окрестности точки c.

Что касается решения $y_2(t)$, отвечающего второму корню ν_2 характеристического уравнения (47), то тут ситуация несколько более сложная. Если $\nu_1 - \nu_2 \neq$ целому, то существует и второе решение $y_2(t)$ уравнения вида (48), но с ν_1 и $\overset{1}{\gamma}_k$ заменёнными, соответственно, на ν_2 и $\overset{2}{\gamma}_k$, и потому в этом случае $y_2(t) \sim \overset{2}{\gamma}_0(t-c)^{\nu_2}$ в окрестности точки c. Если же $\nu_1 - \nu_2 =$ $=$ целому $\neq 0$, то оказывается также существует решение $y_2(t)$ уравнения (45), которое имеет поведение $y_2(t) \sim \overset{2}{\gamma}_0(t-c)^{\nu_2}$ при $t \to c$. В случае же, когда $\nu_1 = \nu_2$, второе решение уравнения (45) линейно независимое с $y_1(t)$, имеет уже в малой окрестности точки c такое поведение: $y_2(t) \sim \overset{2}{\gamma}_0(t-c)^{\nu_1}\ln(t-c)$.

Обратимся к уравнению Лежандра в форме (44). У этого уравнения две особые точки $t = +1$ и $t = -1$, поскольку коэффициент при P'' обращается в нуль только в этих точках. Эти особые точки являются правильными. Проверим это, например, для точки $t = 1$.

Разделим уравнение (44) на функцию $(t+1)^2$, которая не обращается в нуль в окрестности исследуемой точки $t = 1$. Уравнение приобретает вид

$$(t-1)^2 P'' + (t-1)\frac{2t}{t+1}P' - \left(\frac{m^2}{(t+1)^2} + l(l+1)\frac{t-1}{t+1}\right)P(t) = 0, \tag{49}$$

т.е. становится вида (44) с $c = 1$ и с

$$a(t) = \frac{2t}{t+1}\,, \qquad b(t) = -\left(\frac{m^2}{(t+1)^2} + l(l+1)\frac{t-1}{t+1}\right).$$

Нетрудно видеть, что $a(t)$ и $b(t)$ — регулярные функции переменной t (рассматриваемой уже как комплексная переменная) в круге $|t-1| < 2$. Поэтому эти функции допускают разложения в этом круге в ряды Тейлора

$$a(t) = a(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (t-1)^k,$$
$$b(t) = b(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^{(k)}(1)}{k!}(t-1)^k = -\frac{m^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (t-1)^k,$$

и, следовательно, и для действительных t в окрестности $|t - 1| < 2$. Итак, точка $t = 1$ является правильной.

Поэтому согласно сформулированной выше теории уравнение (49) при t, близких к 1, становится похожим на уравнение эйлеровского типа

$$(t-1)^2\tilde{P}'' + (t-1)\tilde{P}' - \frac{m^2}{4}\tilde{P} = 0. \tag{50}$$

Решение последнего уравнения ищем в виде $\tilde{P} = (t-1)^\nu$. И, как и выше для ν, получаем квадратное уравнение для ν:

$$\nu(\nu-1) + \nu - \frac{m^2}{4} = \nu^2 - \frac{m^2}{4} = 0.$$

Это уравнение имеет два корня ν_1 и ν_2, $\operatorname{Re}\nu_1 \geqslant \operatorname{Re}\nu_2$:

$$\nu_1 = \frac{|m|}{2}\,, \qquad \nu_2 = -\frac{|m|}{2}\,.$$

При этом, как это следует из сказанного выше, тогда всякое ограниченное в окрестности точки $t = 1$ решение уравнения (49) имеет вид

$$P(t) = (1-t)^{\frac{|m|}{2}} Q_+(t), \tag{51}$$

где функция $Q_+(t)$ аналитическая, а потому и бесконечно дифференцируемая функция в окрестности точки $t = 1$. Действительно, одно нетривиальное решение уравнения (49) согласно этой формуле имеет (51), а другое решение, линейно независимое с этим имеет поведение $P_2(t) = \overset{2}{\gamma}_0(1-t)^{-\frac{|m|}{2}}$ при $m \neq 0$ и $P_2(t) = \overset{2}{\gamma}_0 \ln(1-t)$ при $m = 0$, а потому это второе решение неограничено в окрестности точки $t = 1$.

Нетрудно видеть, что уравнение (49) таким же образом устроено и в окрестности точки $t = -1$, причём значения ν_1 и ν_2 для этой точки оказываются в точности теми же, что и выше. Следовательно, всякое решение уравнения (49), ограниченное в окрестности точки $t = -1$, необходимо имеет вид

$$P(t) = (1+t)^{\frac{|m|}{2}} Q_-(t),$$

где $Q_-(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция в некоторой окрестности точки $t = -1$.

Отсюда уже следует, что если $P(t)$ — решение уравнения Лежандра (44), отвечающее сферической функции вида (40), то функция

$$Q(t) = (1-t^2)^{-\frac{|m|}{2}} P(t)$$

обязана принадлежать пространству $C^\infty([-1,+1])$. В самом деле, в окрестностях точек $t=\pm 1$ $\quad Q(t)=(1\pm t)^{-\frac{|m|}{2}}Q_\pm(t)$ бесконечно дифференцируемая, поскольку таковыми являются в этих окрестностях функции $Q_\pm(t)$ и $(1\pm t)^{-\frac{|m|}{2}}$. Во внутренних же точках интервала $(-1,1):Q(t)\in C^\infty((-1,1))$ поскольку $P(t)$ и $(1-t^2)^{-\frac{|m|}{2}}$ принадлежат $C^\infty((-1,1))$.

Таким образом, мы приходим в итоге к заключению, что ограниченное на $[-1,+1]$ решение $P(t)$ уравнения Лежандра (43) следует искать в виде

$$P(t)=(1-t^2)^{\frac{|m|}{2}}Q(t), \tag{52}$$

где $Q(t)\in C^\infty([-1,+1])$.

Выполняя замену (52) в уравнении (43), приходим к следующему уравнению для функции $Q(t)$:

$$(1-t^2)Q''-2(|m|+1)tQ'+[l(l+1)-|m|(|m|+1)]Q=0. \tag{53}$$

Требуется найти нетривиальное решение $Q(t)$ этого уравнения, принадлежащее $C^\infty([-1,1])$. Установим, что такими решениями будут некоторые многочлены, и найдём их.

Для этого рассмотрим несколько более общее семейство уравнений, включающее уравнения (53), зависящее от действительного параметра n:

$$(1-t^2)S''-2(n+1)tS'+[l(l+1)-n(n+1)]S=0. \tag{54}$$

При $n=|m|$ уравнение (54) совпадает с уравнением (53). Последнее семейство уравнений обладает следующими важными для нас свойствами.

Лемма 6. 1°. *Если* $S(t)$ *— решение уравнения* (54), *то* $S'(t)$ *является решением уравнения вида* (54) *с* n, *заменённым на* $(n+1)$.

2°. *При* $n = -l$ *решением уравнения* (54) *является многочлен*

$$W(t) = (1 - t^2)^l. \tag{55}$$

Доказательство. 1°. Если $S(t)$ — решение уравнения (54), то дифференцируя его (как тождество), получим

$$(1-t^2)(S')''-2t(S')'-2(n+1)t(S')'-2(n+1)S'+[l(l+1)-n(n+1)]S' =$$
$$= (1 - t^2)(S')'' - 2(n + 2)(S')' + [l(l + 1) - (n + 1)(n + 2)]S' = 0,$$

и первое утверждение леммы установлено.

2°. Преобразуем уравнение (54) при $n = -l$ к виду

$$(1 - t^2)S'' - 2tS' + 2ltS' + 2lS = ((1 - t^2)S')' + 2l(tS)' = 0.$$

Поэтому решение уравнения первого порядка

$$(1 - t^2)S' + 2ltS = 0$$

будет и решением предыдущего уравнения. Но последнее уравнение легко интегрируется (оно является уравнением с разделяющимися переменными). Одним из решений этого уравнения является функция (55). Лемма 6 установлена.

Применим теперь эту лемму к нахождению решений из $C^\infty([-1,1])$ уравнений (53). Для того, чтобы получить такое решение уравнения (53) при $m = 0$, согласно лемме 6 достаточно l раз продифференцировать многочлен (55), и полученный многочлен будет с точностью до постоянного множителя единственным нетривиальным ограниченным на $[-1,1]$ решением этого уравнения. Вместо такого многочлена берут многочлен

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2 - 1)^l \tag{56}$$

(он — степени l), нормированный условием $P_l(1) = 1$ (проверить последнее самим). Систему многочленов (56) $l = 0,1,2,\ldots$ называют *системой многочленов Лежандра.* Формула (56) носит название формулы Родрига для многочленов Лежандра.

Пользуясь далее пунктом 1° леммы 6, находим, что решением уравнения (53), причём с точностью до постоянного множителя единственным ограниченным на $[-1,1]$ решением при $|m| > 0$ является многочлен

$$\frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_l(t).$$

Отметим, что при $|m| > l$ этот многочлен будет равен тождественно нулю.

Обратимся теперь к замене (52), и мы получаем, что единственным, с точностью до постоянного множителя, нетривиальным ограниченным на $(-1,1)$ решением уравнения Лежандра (43) является функция

$$P_l^{|m|}(t) = (1-t^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dt^{|m|}} P_l(t), \tag{57}$$

где $P_l(t)$ — многочлен Лежандра степени l. При этом такие нетривиальные решения уравнения (43) существуют только для m, удовлетворяющих условию $|m| \leqslant l$. При $|m| > 0$ функции (57) называются *присоединнными функциями Лежандра*. При $m = 0$ $P_l^0(t)$ — многочлены Лежандра.

Обратимся, наконец, к формулам (40) и (42). И мы в результате находим, что при каждом $l \geqslant 0$ — целом система функций

$$\widehat{y}_l^m(\theta,\varphi) = P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \quad -l \leqslant m \leqslant l, \tag{58}$$

представляет собой систему $(2l+1)$ сферических функций веса l. Таким образом, если мы ещё установим, что такая система линейно независимая, то задача будет решена: тогда мы нашли всю систему сферических функций веса l для каждого $l \geqslant 0$ (точнее — их выражений в сферической системе).

Обычно вместо системы (58) используют систему действительных сферических функций (получаемую из системы (58) отделением действительных и мнимых частей):

$$\widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi, & m = 0,\ldots,l, \\ P_l^{|m|}(\cos\theta)\sin|m|\varphi, & m = -1,-2,\ldots,-l. \end{cases} \tag{59}$$

Установим, что эта система при каждом $l \geqslant 0$ является линейно независимой системой $(2l+1)$ сферических функций веса l. Это вытекает из свойства ортогональности системы (59) относительно скалярного произведения (16).

§ 5. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Базисность

Итак, обозначим через

$$Y_l^m(x), \quad x \in S_1, \quad l = 0,1,2,\ldots, \quad -l \leqslant m \leqslant l, \tag{60}$$

систему всех сферических функций, каждая из которых — $Y_l^m(x)$ имеет в сферической системе выражение (59).

Лемма 7. 1°. *Система* (60) *сферических функций является ортогональной системой относительно скалярного произведения* (16).

2°. *Имеют место равенства*

$$(Y_l^m(x),Y_l^m(x))_{S_1} = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2l+1} & \text{при } m = 0, \\ \dfrac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\,\dfrac{2\pi}{2l+1} & \text{при } 1 \leqslant |m| \leqslant l. \end{cases} \tag{61}$$

Доказательство. Установим сначала 1°, а именно, что $(Y_{l_1}^{m_1},Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$ для любых пар (l_1,m_1) и (l_2,m_2) таких, что либо $l_1 \neq l_2$, либо $m_1 \neq m_2$. Если $l_1 \neq l_2$, то поскольку $Y_{l_1}^{m_1}(x)$ и $Y_{l_2}^{m_2}(x)$ — собственные функции оператора $-\Delta'_{S_1}$, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1 = l_1(l_1+1)$ и $\lambda_2 = l_2(l_2+1)$, в силу леммы 2 $(Y_{l_1}^{m_1},Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$.

Пусть далее $l_1 = l_2$, но $m_1 \neq m_2$. Рассмотрим случай $m_1,m_2 \geqslant 0$. Выполняя замену $t = \cos\theta$, получаем для $m_1,m_2 \geqslant 0$

$$(Y_{l_1}^{m_1},Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = \int_0^{2\pi} \cos m_1\varphi \cos m_2\varphi \, d\varphi \times \\ \times \int_0^{\pi} P_{l_1}^{m_1}(\cos\theta) P_{l_2}^{m_2}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} \cos m_1\varphi \cos m_2\varphi \, d\varphi \int_{-1}^{1} P_{l_1}^{m_1}(t) P_{l_2}^{m_2}(t) \, dt. \qquad (62)$$

Поэтому для $m_1,m_2 \geqslant 0$, $m_1 \neq m_2$ $(Y_{l_1}^{m_1},Y_{l_2}^{m_2})_{S_1} = 0$ в силу известного из курса математического анализа свойства ортогональности классической тригонометрической системы $\cos k\varphi$, $k \geqslant 0$, $\sin k\varphi$, $k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{Z}$ на интервале $(0,2\pi)$: $\int_0^{2\pi} \cos m_1\varphi \cos m_2\varphi \, d\varphi = 0$ при $m_1 \neq m_2$. Совершенно аналогично рассматриваются другие возможности для случая $m_1 \neq$ $\neq m_2$. Итак, 1° установлено.

Отметим, что из этого свойства вытекает непосредственно свойство ортогональности систем многочленов Лежандра и присоединённых функций Лежандра на интервале $(-1,1)$.

Лемма 8. *При каждом фиксированном* $m \geqslant 0$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-1}^{1} P_{l_1}^{m}(t) P_{l_2}^{m}(t) \, dt = 0 \quad \textit{для} \quad l_1,l_2 \geqslant m, \quad l_1 \neq l_2. \qquad (63)$$

Доказательство. Обратимся к формуле (62). Поскольку $(Y_{l_1}^{m},Y_{l_2}^{m})_{S_1} = 0$, а $\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi \, d\varphi = \{2\pi$ при $m =$ $= 0$, π при $m > 0\} \neq 0$, получаем (63).

Справедливость утверждения 2° леммы 7 непосредственно вытекает из формулы (62) и её аналога при $m_1 = m_2 < 0$ и нижеследующего утверждения.

Лемма 9. *Для любых целых l и m, $0 \leqslant m \leqslant l$ имеет место равенство*

$$\int_{-1}^{1} (P_l^m(t))^2\,dt = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{(2l+1)}\,. \tag{64}$$

Для доказательства этой формулы удобно воспользоваться рекуррентной формулой для многочленов Лежандра, выражающей $P_{l+1}(t)$ через $P_l(t)$ и $P_{l-1}(t)$. Доказательство такой формулы в свою очередь легко следует из нижеследующего разложения, которое представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 10. *Для любых $\rho : 0 \leqslant \rho < 1$ справедливо разложение*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\rho+\rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)\rho^l, \quad \forall\, t \in [-1,1], \tag{65}$$

причём это разложение допускает почленное дифференцирование по ρ и по t произвольное число раз.

Определение 5. Функцию $(1-2t\rho+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ называют *производящей функцией для многочленов Лежандра.*

Доказательство леммы 10. Функция $\dfrac{1}{|x-y|}$, $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяет уравнению Лапласа по переменным $x \in \mathbb{R}^3$ для $x \neq y$. Положим $y = (0,0,1)$ и выразим $\dfrac{1}{|x-y|}$ как функцию x в сферической системе:

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}\,, \quad \rho = |x|, \quad \theta \in [0,\pi]. \tag{66}$$

Разложим эту функцию при каждом фиксированном θ в ряд Тейлора по степеням ρ. Покажем, что радиус сходимости такого ряда не меньше 1 (на самом деле равен 1).

Для этого воспользуемся ТФКП. Рассмотрим при каждом фиксированном $\theta \in [0,\pi]$ квадратный трёхчлен $\omega(z,\theta) = 1 - 2z\cos\theta + z^2 = (1 - e^{i\theta}z)(1 - e^{-i\theta}z)$, где z — комплексная переменная, $z \in \mathbb{C}$. Как известно, функция

$$h(w) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{-\frac{1}{2}} w^k, \qquad C_k^{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!},$$

представимая степенным рядом в правой части с радиусом сходимости, равным 1, является регулярной ветвью в круге $|w| < 1$ двузначной функции $\left\{1/(1-w)^{\frac{1}{2}}\right\}$, причём такой, что $h(u) = 1/\sqrt{1-u}$ при $0 \leqslant u < 1$, где $\sqrt{1-u}$ — арифметический корень из положительного числа.

Поэтому функция

$$g(z,\theta) = h(e^{i\theta}z) \cdot h(e^{-i\theta}z) \tag{67}$$

является регулярной ветвью в круге $|z| < 1$, при фиксированном θ, двузначной функции $\left\{1/(1-2z\cos\theta+z^2)^{1/2}\right\}$ такой, что $g(\rho,\theta) = 1/\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$ при $0 \leqslant \rho < 1$, последний корень является корнем арифметическим из положительной величины. Действительно, $g(z,\theta)$ регулярна по z при $|z| < 1$, $g^2(z,\theta) = (h(e^{i\theta}z))^2(h(e^{-i\theta}z))^2 = (1-e^{i\theta}z)^{-1}(1-e^{-i\theta}z)^{-1} = (1 - 2z\cos\theta + z^2)^{-1}$ и для $0 \leqslant \rho < 1$ $g(\rho,\theta) = h(e^{i\theta}\rho) \cdot h(e^{-i\theta}\rho) = h(e^{i\theta}\rho) \cdot \overline{h(e^{i\theta}\rho)} = |h(e^{i\theta}\rho)|^2 > 0$ (поскольку коэффициенты Тейлора $C_k^{-\frac{1}{2}}$ функции h действительные).

Из представления (67) следует, что $g(z,\theta)$ имеет непрерывные частные производные по комплексной переменной z и по действительной переменной θ на множестве $\{z : |z| < 1\} \times \{\theta : 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ (в регулярную функцию $h(w)$ подставляются функции, обладающие таким свойством и берётся произведение двух таких суперпозиций).

Воспользуемся теперь следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть $g(z,t)$ — функция, регулярная в круге $|z| < R$ при каждом действительном $t \in [\alpha,\beta]$, сама и все её частные производные по комплексной переменной z и действительной переменной t являются непрерывными функциями z и t на множестве $\{z : |z| < R\} \times \{t : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$. Тогда в разложении этой функции в ряд Тейлора*

$$g(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) z^k, \quad |z| < R, \quad t \in [\alpha,\beta], \tag{68}$$

коэффициенты $a_k(t) \in C^{\infty}([\alpha,\beta])$, и это разложение допускает почленное дифференцирование по z и по t произвольное число раз.

Доказательство. Как известно из ТФКП, коэффициенты $a_k(t)$ представимы контурными интегралами

$$a_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R_1} \frac{g(\xi,t)}{\xi^{k+1}}\, d\xi, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{69}$$

где R_1 — произвольное, удовлетворяющее неравенству $0 < < R_1 < R$. Поскольку $\dfrac{1}{\xi^{k+1}} \dfrac{\partial^p}{\partial t^p} g(\xi,t) \in C(\{\xi : |\xi| = R_1\} \times \times \{t : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\})$, то дифференцирования под знаком интеграла в представлении (68) законны и $a_k(t)$ дифференцируемы на $[\alpha,\beta]$ произвольное число раз.

Покажем далее, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^p}{dt^p} a_k(t) z^k, \tag{70}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (68) p раз по переменной t, $p \geqslant 0$ — произвольное целое, сходится равномерно по z и t на всяком множестве $\{z : |z| \leqslant r\} \times \times \{t : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $0 < r < R$. В самом деле, для фиксированного $r < R$ возьмём в представлении (69) R_1, удовлетворяющим условию $r < R_1 < R$. На ограниченном замкнутом множестве $\{\xi : |\xi| = R_1\} \times \{t : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ функция $\dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\, g(\xi,t)$ непрерывна, а потому (по теореме Вейерштрасса) ограничена по модулю некоторой постоянной M_p : $\left|\dfrac{\partial^p}{\partial t^p}\, g(\xi,t)\right| \leqslant M_p$, $|\xi| = R_1$, $t \in [\alpha,\beta]$. Поэтому, пользуясь (69), можем оценить:

$$\left|\frac{d^p}{dt^p} a_k(t)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta|=R_1} \frac{\partial^p}{\partial t^p} g(\zeta,t)\frac{1}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M_p}{2\pi R_1^{k+1}}\int_{|\xi|=R_1} ds = \frac{M_p}{R_1^k}\,.$$

Следовательно, члены ряда (70) можем оценить по модулю на множестве $|z| \leqslant r$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ членами числовой последовательности:

$$\left|\frac{d^p}{dt^p} a_k(t) z^k\right| \leqslant M_p \left(\frac{r}{R_1}\right)^k.$$

Поскольку числовой ряд $M_p \sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)^k$ сходится при $r < R_1$, по признаку Вейерштрасса ряд (70) сходится равномерно по z и t при $|z| \leqslant r$, $t \in [\alpha,\beta]$.

Перейдём к окончанию доказательства предложения 4. То, что разложение (68) допускает почленное дифференцирование по z, — хорошо известный результат ТФКП. То, что разложение (68) можно почленно дифференцировать и по t произвольное число раз, следует из хорошо известной теоремы математического анализа, поскольку установлено, что ряды (70) для любого $p \geqslant 0$ сходятся равномерно по $t \in [\alpha,\beta]$ (при каждом фиксированном $z : |z| < R$). Предложение 4 доказано.

Вернёмся к доказательству разложения (65). Разложим функцию (66), которая равна $g(\rho,\theta)$, где $g(z,\theta)$ определена (67), в ряд Тейлора в точке $\rho = 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\theta)\rho^l, \quad 0 \leqslant \rho < 1,$$

где, согласно предложению 4, $a_l(\theta) = C^\infty([0,\pi])$, причём это разложение можно почленно дифференцировать по ρ и θ произвольное число раз. Поскольку функция (66), как функция x, гармоническая в шаре $|x| < 1$, получаем

$$0 \equiv \Delta_x\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{da_l(\theta)}{d\theta}\right) + l(l+1)a_l(\theta)\right]\rho^{l-2}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях ρ, находим, что функции $a_l(\theta) \in C^\infty([0,\pi])$ являются решениями уравнений (41) с $m = 0$. Но тогда, как было доказано выше $a_l(\theta) = c_l P_l(\cos\theta)$, где c_l — некоторые постоянные.

Итак, установлено, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(\cos\theta)\rho^l, \quad 0 \leqslant \rho < 1.$$

Определим коэффициенты c_l подстановкой в последнее соотношение $\theta = 0$. Тогда, используя, что $P_l(1) = 1$, получаем:

$$\frac{1}{1-\rho} = \sum_{l=0}^{\infty} \rho^l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(1)\rho^l = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \rho^l.$$

Отсюда следует, что $c_l = 1 \quad \forall\, l \geqslant 0$, Итак, с подстановкой $t = \cos\theta$ разложение (65) установлено.

Лемма 11. *Для многочленов Лежандра $P_l(t)$ имеет место рекуррентная формула*

$$(l+1)P_{l+1}(t) - (2l+1)tP_l(t) + lP_{l-1}(t) \equiv 0, \quad t \in [-1,1], \quad l \geqslant 0. \tag{71}$$

Доказательство. Дифференцируя по ρ разложение (65), умножая полученное соотношение на $(1 - 2t\rho + \rho^2)$

и пользуясь опять формулой (65), получим тождество

$$(t-\rho)\sum_{l=0}^{\infty} P_l(t)\rho^l = (1-2t\rho+\rho^2)\sum_{l=0}^{\infty} lP_l(t)\rho^{l-1}.$$

Приравнивая в этом соотношении коэффициенты при одинаковых степенях переменной ρ, приходим к формуле (71).

Перейдём к доказательству формулы (64). Начнём со случая $m = 0$ (при этом $P_l^0(t) = P_l(t)$). Выражая по формуле (71) $P_l(t)$ через $P_{l-1}(t)$ и $P_{l-2}(t)$ и пользуясь уже установленной ортогональностью многочленов Лежандра (леммой 8), находим, что

$$\int_{-1}^{1} P_l^2(t)\,dt = \frac{(2l-1)}{l}\int_{-1}^{1} P_l(t)tP_{l-1}(t)\,dt - \\ - \frac{(l-1)}{l}\int_{-1}^{1} P_l(t)P_{l-2}(t)\,dt = \\ = \frac{(2l-1)}{l}\int_{-1}^{1} tP_l(t)P_{l-1}(t)\,dt.$$

Теперь ещё раз воспользуемся формулой (71) и выразим $tP_l(t)$ через $P_{l+1}(t)$ и $P_{l-1}(t)$. Получим

$$\int_{-1}^{1} P_l^2(t)\,dt = \frac{(2l-1)(l+1)}{(2l+1)l}\int_{-1}^{1} P_{l+1}(t)P_{l-1}(t)\,dt + \\ + \frac{(2l-1)}{(2l+1)}\int_{-1}^{1} P_{l-1}^2(t)\,dt = \\ = \frac{(2l-1)}{(2l+1)}\cdot\int_{-1}^{1} P_{l-1}^2(t)\,dt.$$

Наконец, воспользуемся этим рекуррентным соотношением и тем, что $\int_{-1}^{1} P_0^2(t)\,dt = \int_{-1}^{1} dt = 2$. Получим окончательно

$$\int_{-1}^{1} P_l^2(t)\,dt = \frac{(2l-1)}{(2l+1)}\cdot\frac{(2l-3)}{(2l-1)}\cdots\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_0^2(t)\,dt = \frac{2}{2l+1}\,.$$

Установим далее (64) при $m \geqslant 1$ — целом. Используя формулу (57), интегрируя по частям, имеем

$$\int_{-1}^{1} (P_l^m(t))^2\, dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^m P_l^{(m)}(t) P_l^{(m)}(t)\, dt =$$
$$= (1-t^2)^m P_l^{(m-1)}(t) P_l^{(m)}(t)\Big|_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1} P_l^{(m-1)}(t) \left[(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t)\right]' dt. \quad (72)$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю. Выразим $\left[(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t)\right]'$ с помощью уравнения (53) через $P_l^{(m-1)}(t)$.

$P_l^{(m)}(t)$ в силу леммы 6 удовлетворяет уравнению (53). Умножив это уравнение на $(1-t^2)^m$, имеем

$$(1-t^2)^{m+1} P_l^{(m+2)}(t) - (m+1)2t(1-t^2)^m P_l^{(m+1)}(t) =$$
$$= (m^2+m-l^2-l)(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t).$$

Отсюда

$$\left[(1-t^2)^{m+1} P_l^{(m+1)}(t)\right]' = -(l-m)(l+m+1)(1-t^2)^m P_l^{(m)}(t).$$

Заменяя здесь $(m+1)$ на m и подставляя получившееся выражение в (72), приходим к рекуррентной формуле (относительно m):

$$\int_{-1}^{1} (P_l^m(t))^2\, dt = (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^{1} \left(P_l^{m-1}(t)\right)^2 dt.$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{1} (P_l^m(t))^2\,dt = (l+m)(l-m+1)\times(l+m-1)(l-m+2)\times$$

$$\times\ldots\times(l+1)l\int_{-1}^{1} P_l^2(t)\,dt =$$

$$=(l+m)(l-m+1)\ldots(l-m+1)\cdot\frac{2}{(2l+1)} =$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{(2l+1)}\,.$$

Итак, формула (64) установлена. С этой формулой установлена и формула (61).

Линейная независимость при каждом $l \geqslant 0$ системы (60) из $(2l+1)$ сферических функций является непосредственным следствием леммы 7. В самом деле, эта система — ортогональная система функций, скалярные квадраты которых отличны от нуля, а такая система линейно независима. Следовательно, система (60) при фиксированном l — максимальная линейно независимая система сферических функций веса l, система же (60) с $l = 0,1,2,\ldots$ — это линейно независимая система всех сферических функций в $\mathbb{R}^3$ (точнее на $S_1 \subset \mathbb{R}^3$). Оказывается, что эта система является базисом в пространстве функций $L_2(S_1)$. Пространство $L_2(S_1)$ определяется как пространство функций на S_1, каждая из которых измерима по Лебегу на S_1 (мы можем для простоты ограничиться, например, требованием, чтобы функция была кусочно-непрерывна и имела конечное число особых точек) и для каждой из которых конечна норма

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)_{S_1}},$$

где скалярное произведение $(u,v)_{S_1}$ определено (16). А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой $u(x) \in L_2(S_1)$ частичные суммы $\sum_N(x)$ ряда Фурье функции $u(x)$ по сферической системе* (60)

$$\sum\nolimits_N(x) = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=-l}^{l} c_l^m Y_l^m(x), \quad x \in S_1,$$

где

$$c_l^m = \frac{(u, Y_l^m)_{S_1}}{\left(Y_l^m, Y_l^m\right)_{S_1}} \tag{73}$$

— коэффициенты Фурье, сходятся по норме пространства $L_2(S_1)$ к функции $u(x)$, т.е.

$$\int_{S_1} \left| u(x) - \sum\nolimits_N(x) \right|^2 ds \to 0 \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы мы здесь не имеем возможности привести. Результатам о поточечной сходимости рядов Фурье по сферическим функциям, а также по различным свойствам самих сферических функций посвящена специальная литература, см., например, [5].

§ 6. Применение сферических функций для решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях со сферической симметрией

Приведём здесь общую формальную схему метода Фурье решения таких задач. Рассмотрим сначала задачу Дирихле в шаровом слое $\Omega = \{x : r < |x| < R\}$ в $\mathbb{R}^3$, $r > 0$, $R < \infty$: найти $u(x)$ в Ω, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega \tag{74}$$

и граничному условию Дирихле

$$u|_{\Gamma_1} = u_1(x), \quad u|_{\Gamma_2} = u_2(x), \tag{75}$$

где $\Gamma_1 = \{x : |x| = r\}$ и $\Gamma_2 = \{x : |x| = R\}$ — внутренняя и внешняя компоненты границы шарового слоя Ω, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — заданные, например, непрерывные функции на Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Обозначим, как и выше, через $\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)$ выражение решения задачи в сферической системе. Разложим (мысленно) $\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)$ при каждом фиксированном ρ в ряд Фурье по системе сферических функций (59):

$$\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \widehat{u}_l^m(\rho) \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi). \tag{76}$$

Подставим формально это разложение в уравнение (74), записанное в сферической системе, и получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\left(\frac{d^2}{d\rho^2} \widehat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \widehat{u}_l^m(\rho) \right) \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{u}_l^m(\rho)}{\rho^2} \widehat{\Delta}'_{\theta,\varphi} \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) \right] =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \widehat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \widehat{u}_l^m(\rho) - \right.$$
$$\left. - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \widehat{u}_l^m(\rho) \right) \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) \equiv 0. \tag{77}$$

Далее, подстановка разложения (76) в граничные условия приводит ещё к двум равенствам

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \widehat{u}_l^m(r) \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) = \widehat{u}_1(r,\theta,\varphi), \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \widehat{u}_l^m(R) \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) = \widehat{u}_2(R,\theta,\varphi), \end{gathered} \tag{78}$$

где $\widehat{u}_1(r,\theta,\varphi)$ и $\widehat{u}_2(R,\theta,\varphi)$ — выражения функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в сферической системе. Разложим функции $\widehat{u}_1(r,\theta,\varphi)$ и $\widehat{u}_2(R,\theta,\varphi)$

(они — функции только θ и φ) в ряды Фурье по сферической системе (59):

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1(r,\theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{1;l}^m \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi), \\ \widehat{u}_2(R,\theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{2;l}^m \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi). \end{aligned} \tag{79}$$

В общем случае коэффициенты Фурье $a_{1;l}^m$ и $a_{2;l}^m$ можно найти по формуле (73). Во всяком случае мы их считаем известными величинами.

Обращаясь к соотношению (77), заключаем (в силу ортогональности сферических функций), что все коэффициенты в нём при сферических гармониках обращаются в нуль при всех $\rho : r < \rho < R$. Кроме того, подставляя разложения (79) ещё и в правые части равенств (78) и приравнивая коэффициенты при одинаковых сферических гармониках, приходим к следующей счётной системе уже несвязанных между собой краевых задач для коэффициентов Фурье $\widehat{u}_l^m(\rho)$:

$$\frac{d}{d\rho^2}\widehat{u}_l^m(\rho) + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\widehat{u}_l^m(\rho) - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\widehat{u}_l^m(\rho) = 0, \quad r < \rho < R, \tag{80}$$

$$\widehat{u}_l^m(r) = a_{1;l}^m, \quad \widehat{u}_l^m(R) = a_{2;l}^m, \quad l = 0,1,2,\ldots, \quad |m| \leqslant l. \tag{81}$$

Каждая такая задача имеет единственное решение. В самом деле, т.к. уравнение (80) — однородное уравнение Эйлера, линейно независимые решения следует искать в виде $\widehat{u}_l^m(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя эту функцию в уравнение, приходим к квадратному уравнению для μ:

$$\mu(\mu+1) - l(l+1) = 0.$$

Последнее уравнение имеет два решения $\mu_1 = l$, $\mu_2 = -(l+1)$. Поэтому

$$\widehat{u}_l^m(\rho) = c_{1;l}^m \rho^l + c_{2;l}^m \rho^{-(l+1)}, \tag{82}$$

где $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$ — некоторые постоянные, которые нужно определить из граничных условий (81). Используя эти граничные условия, приходим для каждого l и каждого m к следующей системе 2-х уравнений для $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$:

$$
\begin{aligned}
r^l c_{1;l}^m + r^{-(l+1)} c_{2;l}^m &= a_{1;l}^m, \\
R^l c_{1;l}^m + R^{-(l+1)} c_{2;l}^m &= a_{2;l}^m.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Определитель этой системы отличен от нуля:

$$
\delta_l = \begin{vmatrix} r^l & r^{-(l+1)} \\ R^l & R^{-(l+1)} \end{vmatrix} = -\frac{R^l}{r^{l+1}}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^{2l+1}\right) < 0,
$$

поскольку $0 < \dfrac{r}{R} < 1$. Решая системы (83), находим постоянные $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$, далее по формуле (82) функции $\widehat{u}_l^m(\rho)$, а затем по формуле (76) и решение задачи Дирихле (74), (75) в шаровом слое.

Перейдём, наконец, к рассмотрению задачи Дирихле ещё в шаре и вне шара.

Задача Дирихле в шаре радиуса $R > 0$

Формулировка задачи изменится следующим образом. В уравнении (74) областью Ω является шар $|x| < R$, а граничные условия (75) заменятся на одно условие

$$
u|_\Gamma = u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega = \{x : |x| = R\}. \tag{84}
$$

Решение u этой задачи, выраженное в сферической системе опять мысленно разлагаем при каждом фиксированном ρ, $0 < \rho < R$, в ряд Фурье (76) по сферическим функциям. Вместо граничных условий (78) с (79) имеем одно граничное условие

$$
\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \widehat{u}_l^m(R)\widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi) = \widehat{u}_0(R,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^m \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi),
$$

где a_l^m — коэффициенты Фурье граничной функции $\widehat{u}_0(R,\theta,\varphi)$ по сферической системе (59).

Действуя как и для случая сферического слоя, приходим для каждого $l = 0,1,2,\ldots$ и каждого $|m| \leqslant l$ к уравнению (80) и одному граничному условию

$$\widehat{u}_l^m(R) = a_l^m. \tag{85}$$

Но общее решение уравнения (80) имеет вид (82) и зависит от двух постоянных $c_{1;l}^m$ и $c_{2;l}^m$. Нужно ещё одно условие на $\widehat{u}_l^m(\rho)$, чтобы однозначно определить эти две постоянные.

Таким вторым условием является условие ограниченности функции $\widehat{u}_l^m(\rho)$ при $\rho \to 0$. Покажем это. Поскольку решение $u(x)$ заведомо принадлежит $C(\overline{\Omega})$, то оно ограничено в Ω (в силу теоремы Вейерштрасса), т.е. существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)| \leqslant M \quad \forall\, \rho,\theta,\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Функции $\widehat{u}_l^m(\rho)$ являются коэффициентами Фурье по сферической системе функций $\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)$ при каждом фиксированном ρ. В силу формулы (73) для коэффициентов Фурье и формулы (16) для скалярного произведения имеем

$$\widehat{u}_l^m(\rho) = \frac{1}{(\widehat{Y}_l^m,\widehat{Y}_l^m)_{S_1}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)\widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta. \tag{86}$$

Но функция $\widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi)$ является ограниченной при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, т.е. $|\widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi)| \leqslant M_l^m$ — некоторая постоянная. Поэтому при всех $\rho : 0 < \rho \leqslant R$ мы можем оценить

$$\begin{aligned} |\widehat{u}_l^m(\rho)| \leqslant M \cdot M_l^m \frac{1}{(\widehat{Y}_l^m,\widehat{Y}_l^m)_{S_1}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \\ = \frac{4\pi M M_l^m}{(\widehat{Y}_l^m,\widehat{Y}_l^m)_{S_1}}\,. \end{aligned} \tag{87}$$

Таким образом, ограниченность $\widehat{u}_l^m(\rho)$ на $(0,R]$ установлена.

Обратимся теперь к формуле (82) для $\widehat{u}_l^m(\rho)$. Если бы коэффициент $c_{2;l}^m$ не обращался бы в нуль, тогда, поскольку $-(l+1) \leqslant -1$, $l \geqslant 0$, мы бы имели, что $\widehat{u}_l^m(\rho) \to \infty$ при $\rho \to 0$, что противоречит только что установленной ограниченности функции $\widehat{u}_l^m(\rho)$. Поэтому

$$\widehat{u}_l^m(\rho) = c_{1;l}^m \rho^l.$$

Подставляя это выражение в граничное условие (85), определяем постоянную $c_{1;l}^m$:

$$c_{1;l}^m = \frac{a_l^m}{R^l}\,.$$

Окончательно приходим к следующему выражению для решения задачи Дирихле в шаре (в сферической системе)

$$\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_l^m \left(\frac{\rho}{R}\right)^l \cdot \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi).$$

Задача Дирихле во внешности шара радиуса $r > 0$

В уравнении (74) областью Ω теперь является множество $\Omega = \{x : |x| > r\}$. При этом ищется решение $u(x)$, стремящееся к нулю на бесконечности

$$u(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty \tag{88}$$

и удовлетворяющее граничному условию

$$u|_\Gamma = u_0(x), \quad \Gamma = \partial\Omega = \{x : |x| = r\}. \tag{89}$$

Совершенно аналогично уже рассмотренным случаям получаем, что решение этой задачи имеет представление (в сферической системе) (76), где коэффициенты $\widehat{u}_l^m(\rho)$ являются решениями на полубесконечном интервале $(r, +\infty)$ уравнений (80) и удовлетворяют граничному условию

$$\widehat{u}_l^m(r) = a_l^m, \tag{90}$$

где a_l^m — коэффициенты Фурье в разложении функции $\widehat{u}_0(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^m \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi)$ по сферической системе (59).

Вторым условием, позволяющим однозначно определить каждую из функций $\widehat{u}_l^m(\rho)$, является условие стремления к нулю на ∞:

$$\widehat{u}_l^m(\rho) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to \infty.$$

В самом деле, используя выражение (86), можем получить оценку, аналогичную (87), с заменой постоянной M на функцию $M(\rho) = \max\limits_{\theta,\varphi} |\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi)|$. В силу условия (88) $M(\rho) \to 0$, а вместе с этим и $|\widehat{u}_l^m(\rho)| \to 0$ при $\rho \to \infty$. Использование этого условия в представлении (82) общего решения уравнения (80) позволяет однозначно определить первый коэффициент: $c_{1;l}^m{=}0$.

Обращаясь к граничному условию (90), однозначно определяем и $c_{2;l}^m$ и в результате приходим к следующей формуле (в сферической системе) для решения внешней задачи Дирихле:

$$\widehat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_l^m \left(\frac{r}{\rho}\right)^{l+1} \widehat{Y}_l^m(\theta,\varphi).$$

Можно показать, что при условии непрерывности граничной функции, которая задаётся, во всех рассматриваемых случаях получающиеся для решения ряды (76) сходятся, причём со всеми производными равномерно во всякой подобласти, которая с замыканием содержится в исходной области Ω, и дают классическое решение задачи Дирихле из $C^\infty(\Omega){\cap}C(\overline{\Omega})$ (с условием (88) в случае внешней задачи).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
3. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. I. Основные операции анализа. – М.: ГИФМЛ, 1963.
4. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
5. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Оператор Лапласа в сферической системе 4
§ 2. Оператор Лапласа–Бельтрами на сфере и его свойства. Сферические и шаровые функции 9
§ 3. Подсчёт максимального числа линейно независимых сферических функций веса l 22
§ 4. Выражение сферических функций в сферической системе координат. Уравнение Лежандра 28
§ 5. Ортогональность сферических функций и функций Лежандра. Производящая функция и рекуррентное соотношение. Базисность 36
§ 6. Применение сферических функций для решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях со сферической симметрией 46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 53