Matematyka Dyskretna 2

MiNI

12 września 2012

Spis treści

1 Ścieżka i cykl Eulera

Definicja 1. Ścieżką Eulera w grafie G nazywamy ścieżkę $v_0e_1v_1e_2\dots e_nv_n$ taką że każda krawędź występuje na niej tylko raz

Definicja 2 (Obwód Eulera)**.**
Jeżeli w danej $v_0 = v_n$ to ścieżkę nazywamy ścieżką zamkniętą lub obwodem Eulera

Definicja 3 (Cykl Eulera)**.**
Jeżeli wierzchołki w obwodem Eulera się nie powtarzają to taki obwód nazywamy cyklem Eulera.

Lemat 1. *Jeżeli G jest grafem takim że $\delta(G) \geqslant 2$ to G posiada cykl*

Dowód. Rozważmy najdłuższą drogę (wierzchołki się nie powtarzają) $v_0e_1v_1\dots e_kv_k$ oraz niech $\deg v_0 \geqslant \delta(G) \geqslant 2$. Niech sąsiad $v_0 \neq v_1$ nazywa się a. $a \notin \{v_2,\dots,v_k\}$ bo gdyby należał do ścieżki to $av_0v_1\dots v_k$ byłaby dłuższa niż $v_0\dots v_k$ wbrew założeniu. Czyli $a \in \{v_2,\dots,v_k\}$ czyli $a = v_i$.
Mamy cykl! □

Twierdzenie 1 (Eulera)**.**
Graf spójny ma obwód Eulera $\Leftrightarrow$ wszystkie wierzchołki mają parzyste stopnie

Dowód. $\Rightarrow$
Przemierzając obwód Eulera wchodzimy i wychodzimy do każdego wierzchołka tyle samo razy za każdym razem inną krawędzią. Ponieważ każda krawędź leży w obwodzie Eulera to każdy wierzchołek jest parzystego stopnia □

Dowód. $\Leftarrow$ *nie wprost*
Przypuśćmy że twierdzenie nie jest prawdziwe. Ze wszystkich kontrprzykładów weźmy ten który ma najmniej krawędzi, nazwijmy go G. To znaczy G jest spójny, wszystkie wierzchołki ma parzystego stopnia a nie ma obwodu Eulera. To znaczy że $|G| > 1$[1] oraz żaden wierzchołek nie jest stopnia 0 lub 1, każdy jest co stopnia co najmniej 2. Czyli z lematu 1 G ma cykl, a cykl $\subset$ obwód. Weźmy najdłuższy obwód w G i nazwijmy C. $E(C) \neq E(G)$ bo w przeciwnym przypadku C byłby obwodem Eulera w G.
Rozważmy $G - E(C)$ zawiera jakieś krawędzie. Zastanówmy się nad parzystością stopni $G - E(C)$. W $G - E(C)$ każdy wierzchołek jest parzystego stopnia. czyli każda składowa o nieparzystym zbiorze krawędzi[2] $G - E(C)$ nie jest kontrprzykładem (G był najmniejszy) zatem ma obwód Eulera C'.
Istnieje wierzchołek $x \in V(C) \cap V(C')$ bo w przeciwnym przypadku G nie byłby spójny.
Obwód $xCxC'x$ jest dłuższy niż C, a G maił być najdłuższy (o większej liczbie krawędzi). Sprzeczność z definicją C. □

1.1 Algorytm znajdowania obwodu Eulera w grafie

Lemat 2. *Jeżeli graf G jest spójny i ma wszystkie wierzchołki parzystego stopnia, to nie ma mostu*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie.
Niech $e = xy$ będzie mostem w G. $G - e$ ma dokładnie dwie składowe G_x, G_y. W G_x wszystkie wierzchołki oprócz X są parzystego stopnia. Sprzeczność z zasadą, że suma stopni w grafie jest parzysta (suma stopni jest dwa razy większa od liczby krawędzi) □

Algorytm 1 (Algorytm Fleury'ego)**.**

1. Wybieram wierzchołek startowy v_0, $w = v_0$
2. Załóżmy, że skonstruowaliśmy już ścieżkę $w = v_0e_1v_1\dots e_iv_i$ wybieram krawędź e_{i+1} taką że
   (a) $e_{i+1} \in E(G) \setminus \{e_1,\dots,e_i\}$
   (b) e_{i+1} jest incydentna z v_i
   (c) o ile to możliwe e_{i+1} nie jest mostem w $G_i = G - \{e_1,\dots,e_i\}$
3. STOP kiedy krok 2 nie może się wykonać

Twierdzenie 2. *Jeżeli G ma obwód Eulera to algorytm Fleury'ego znajdzie taki obwód*

[1] graf o jednym wierzchołku ma obwód Eulera
[2] $G - E(C)$ nie musi być grafem spójnym

Dowód. $w_n = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n$ ścieżka skonstruowana przez algorytm Fleury'ego. w_n nie zawiera żadnej krawędzi więcej niż raz. W momencie zatrzymania się algorytmu stopnień v_n w grafie $G - \{e_1, \dots, e_n\}$ jest równy 0.
Jeżeli $v_n = v_0$ to ma nieparzysty stopień, a ma mieć 0. Czyli $v_n = v_0$[3] Czyli $\deg_{G-\{e_1,\dots,e_n\}} v_n$ jest nieparzysty. Sprzeczność bo zero jest parzyste.
Wystarczy pokazać, że $E(w_n) = E(G)$.
Przypuśćmy, że nie jest. $G_n = G - E(w_n)$ ma niepusty zbiór krawędzi.
Niech S - zbiór wierzchołków dodatniego stopnia w G_n.
Niech $\overline{S}$ - zbiór wszystkich wierzchołków zerowego stopnia. $\overline{S} = V(G) - S$
Niech m będzie największym indeksem takim że $V_m \in S$ a $V_{m+1} = e_{m+1}$
Czyli krawędź e_{m+1} jest mostem w $G_m = G - \{e_1, \dots, e_m\}$ bo jest jedyną krawędzią między S i $\overline{S}$. Z punkty 2c wynika że wszystkie krawędzie w G_m o końcu v_m są mostami.
Rozważmy $G_m[S]$, w którym wszystkie wierzchołki są parzystego stopnia a v_m jest końcem mostu. Sprzeczność z lematem 2. □

1.2 Wniosek z twierdzenia Eulera

Twierdzenie 3. *Spójny multigraf G ma ścieżkę Eulera*[4] $\Leftrightarrow$ *G ma co najwyżej 2 wierzchołki nieparzystego stopnia.*

Dowód. $\Rightarrow$
Idąc ścieżką Eulera wchodzimy do każdego wierzchołka być może z wyjątkiem pierwszego i ostatniego tyle samo razy co wychodzimy, zatem każdy wierzchołek (może z wyjątkiem pierwszego i ostatniego) ma parzysty stopień. □

Dowód. $\Leftarrow$

1. Jeśli jest 0 wierzchołków nieparzystego stopnia to z twierdzenia Eulera istnieje obwód Eulera, który jest ścieżką.
2. Nie może być dokładnie jeden wierzchołek nieparzystego stopnia, bo suma stopni musi być parzysta.
3. Jeżeli są 2 takie wierzchołki połączmy je krawędzią. Otrzymujemy multigraf o wszystkich wierzchołkach parzystego stopnia. Z twierdzenia Eulera ma on obwód Eulera. Usuwając uprzednio dodaną krawędź otrzymujemy ścieżkę Eulera.

□

1.3 Problem chińskiego listonosza

Listonosz musi dostarczyć listy do adresatów, czyli przejść przez każdą ulicę w mieście. Jak ma przejść aby pokonać najkrótszą trasę?

1.3.1 Dane

Spójny multigraf G, funkcja wag krawędzi (długość ulic) $w : E(G) \to [0, \infty)$

1.3.2 Problem

Znaleźć trasę, czyli ciąg wierzchołków taki że:

1. każda krawędź występuje w ciągu
2. $\forall i \quad e_i = v_{i-1} v_i$
3. $\sum_{i=1}^{p} w(e_i)$ była minimalna

1.3.3 Rozwiązanie

1. Połączy krawędziami wierzchołki nieparzystych stopni po dwa tak aby suma wag u nowych krawędzi była jak najmniejsza[5]
2. Znajdźmy obwód Eulera w nowym multigrafie

[3] gdyby tak nie było oznaczałoby to że wyszliśmy o jeden raz więcej niż weszliśmy
[4] nie musi się kończyć tam gdzie się zaczęła
[5] algorytm jest skomplikowany

2 Cykle i drogi Hamiltona

Definicja 4 (Droga Hamiltona).
Drogę która zawiera wszystkie wierzchołki grafu G nazywamy drogą Hamiltona

Definicja 5 (Cykl Hamiltona).
Cykl który zawiera wszystkie wierzchołki grafu G nazywamy cyklem Hamiltona

Twierdzenie 4. *Jeżeli G ma cykl Hamiltona to dla każdego $S \subset V(G)$ $\quad \omega(G-S) \leqslant |S|$*

Dowód. Niech C - cykl Hamiltona w G. Zauważmy, że $\omega(C-S) \leqslant |S|$
$\omega(G-S) \leqslant \omega(C-S)$ □

Twierdzenie 5 (Diraca (1952)). *Jeżeli G jest grafem takim że $G \geqslant 3$, $\quad \delta(G) \geqslant \frac{|G|}{2}$ to G ma cykl Hamiltona* EGZAMIN

Dowód. nie wprost
Niech G będzie kontrprzykładem do twierdzenia o maksymalnym zbiorze krawędzi, czyli grafem takim że ma co najmniej 3 wierzchołki $|G| \geqslant 3$, $\quad \delta(G) \geqslant \frac{|G|}{2}$ nie ma cyklu Hamiltona i dodanie dowolnej krawędzi do G powoduje powstanie cyklu Hamiltona[6]. Czyli graf G nie jest grafem pełnym bo graf pełny zawiera cykl Hamiltona.
W G istnieją wierzchołki u i v takie że $uv \notin E(G)$
Z maksymalności G wynika żę u i v są połączone drogą Hamiltona [7] $u = v_0, v_1, \ldots, v_n = v$ - droga
Zdefiniujmy dwa zbiory:

1. $T := \{v_i : \quad v_i v \in E(G)\}$

2. $S := \{v_i : \quad u v_{i+1} \in E(G)\}$

$|S| = \deg u \geqslant \frac{|G|}{2}$
$|T| = \deg v \geqslant \frac{|G|}{2}$
$v \notin S \cup T \Rightarrow |S \cup T| \leqslant |G| - 1$
$$|G| - 1 \geqslant |S \cup T| = \underbrace{\underbrace{|S|}_{\geqslant \frac{|G|}{2}} + \underbrace{|T|}_{\geqslant \frac{|G|}{2}}}_{\geqslant |G|} - |S \cap T| \Rightarrow |S \cap T| \geqslant 1 \Rightarrow S \cap T \neq \emptyset$$
$\exists v_i \ : \ v_i \in S \cap T$ Sprzeczność istnieje cykl Hamiltona $v_1 \ldots v_i v_n \ldots v_{i+1} v_1$ □

2.1 Problem Komiwojażera

2.1.1 Dane

Sieć $S = (G, w) \quad w \ : \ E(G) \to [0, \infty)$

2.1.2 Szukane

cykl Hamiltona o najmniejszej sumie wag krawędzi

Wniosek 1. Problem istnienia cyklu Hamiltona sprowadza się do problemu Komiwojażera
Dane: Czy G ma cykl Hamiltona? Rozwiązanie: Definiujemy $G' = K_{|G|}$
$w(e) = \begin{cases} 1 & e \in E(G) \\ 2 & e \notin E(G) \end{cases}$ G ma cykl Hamiltona $\Leftrightarrow$ istnieje rozwiązanie problemu komiwojażera dla G' w wadze równej $|G|$

Algorytm 2 (Procedura DFS - przeszukiwania drzewa w głąb).
T - drzewo skierowane od wierzchołka v
v - wierzchołek

1. Wypisz v

2. Jeżeli $v1, \ldots, v_p$ są następnikami v w T to wykonaj $DFS(T, v_i)$ dla $i = 1, \ldots, p$

Algorytm 3 (APK (Aproksymacyjne rozwiązanie problemu komiwojażera)).
Algorytm znajduje przybliżone rozwiązanie problemu komiwojażera

1. Wybierz wierzchołek startowy

2. Skonstruuj minimalne drzewo rozpinające T grafu G

3. Wykonaj procedurę $DFS(T, v)$

Twierdzenie 6. *Algorytm APK konstruuje cykl Hamiltona o co najwyżej 2-krotnie większej sumie wag krawędzi w porównaniu z optymalnym o ile jest spełniony warunek trójkąta*[8] EGZAMIN

Dowód.

T	drzewo rozpinające skonstruowane w algorytmie
H^*	optymalny cykl Hamiltona
H	cykl Hamiltona skonstruowany przez APK

Weźmy $e \in E(H^*)$. $H^* \setminus e$ to ścieżka rozpinająca, czyli drzewo rozpinające.

$$\frac{1}{2}w(H) \leqslant w(T) \leqslant w(H^* \setminus e) \leqslant w(H^*)$$

Procedura DFS przechodzi przez każdą krawędź dwa razy. Gdy komiwojażer przechodził po T to w sumie przeszedł by drogę długości $2w(T)$. Pomijając odwiedzone wcześniej wierzchołki nie zwiększymy sumy wag krawędzi dzięki nierówności trójkąta.

$$w(H) \leqslant 2w(T) \leqslant 2w(H^*)$$

□

3 Grafy dwudzielne

Definicja 6. Graf $G = G(V, E)$ nazywamy grafem dwudzielnym, jeśli istnieją zbiory X, Y takie że $X \cup Y = V$, $X \cap Y = \emptyset$ i $\forall e \in E \quad |e \cap X| = 1$

Definicja 7. Graf dwudzielny G nazywamy dwudzielnym pełnym jeżeli $\forall x \in X\ \forall y \in Y \quad xy \in E$. Jeżeli $|Y| = m$, $|X| = n$ to G nazywamy $K_{n,m}$

Twierdzenie 7. *Graf G jest dwudzielny $\Leftrightarrow$ G nie zawiera nieparzystych cykli*[9] EGZAMIN

Dowód. $\Rightarrow$ G jest dwudzielny. Przypuśćmy że w G jest cykl nieparzystej długości $C \ : \ x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$. Bez straty ogólności zakładamy, że $x_1 \in X \Rightarrow x_2 \in Y \Rightarrow x_2 \in X \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_{2k} \in Y \Rightarrow x_{2k+1} \in X$.
$x_1, x_{2k+1} \in X$ sprzeczność z dwudzielnością G □

Dowód. $\Leftarrow$
G nie zawiera nieparzystych cykli. Pokażemy że jest dwudzielny
$d(x, y)$ – długość krawędzi najkrótszej $x - y$-drogi $(x, y \in V(G))$
Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że G jest spójny, gdyż składowe można rozpatrzyć osobno.

	u	będzie dowolnym wierzchołkiem	
Niech	X	$\{v \in V \ : \ {}^2\vert d(u, v)\}$	czyli $X \cap Y = \emptyset \ \wedge \ X \cup Y = V(G)$
	Y	$\{v \in V \ : \ {}^2\nmid d(u, v)\}$	

Pokażemy, że $\forall e \in E(G) \quad |e \cap X| = 1$
Przypuśćmy, że istnieje krawędź $e = xy$ taka że $e \subset X$[10]
P – najkrótsza $x - u$ droga
Q – najkrótsza $y - u$ droga
Niech v będzie wspólnym wierzchołkiem P i Q najbliżej x. Odcinki dróg P i Q z u do v są takiej samej długości bo w przeciwnym przypadku jedna z nich nie była by najkrótsza. Drogi P i Q mają tę samą parzystość, zatem odcinki dróg P_x, Q_y z v do x i y odpowiednio mają tę samą parzystość i długość.
Zatem cykl xP_xvQ_yyx jest nieparzystej długości. □

Definicja 8. Skojarzenie to graf którego każda składowa ma jedną krawędź.

Definicja 9. G-graf, M-podgraf G nazywamy skojarzeniem doskonałym jeżeli jest skojarzeniem i $V(M) = V(G)$
Takie skojarzenie nie zawsze istnieje

Definicja 10. Skojarzenie M nazywamy

1. maksymalnym – jeśli nie jest zawarte w skojarzeniu o większej liczbie krawędzi

2. maksymalnej liczności – jeśli nie istnieje skojarzenie o większej liczbie krawędzi

---

[6] dodajemy tak długo jak się da
[7] bo $G + uv$ ma cykl Hamiltona to $G = (G + uv) - uv$ ma drogę Hamiltona
[8] $\forall x, y, z \quad w(x, y) + w(y, z) \geqslant w(x, z)$
[9] cykli o nieparzystej długości
[10] analogicznie gdy $e \subset Y$

4 Kolorowanie krawędzi

Definicja 11. k-pokolorowaniem krawędzi grafu G nazywamy funkcję $f : E(G) \to G$ gdzie $|G| = k$

Definicja 12. k-pokolorowanie nazwiemy dobrym, jeśli żadne dwie krawędzie o wspólnym końcu nie mają tego samego koloru.

Wniosek 2. Dobre k-pokolorowanie krawędzie grafu G definiuje podział zbioru $E(G)$ na zbiory $E_1, \ldots, E_k$ takie że G indukowany przez zbiór krawędzie $G[E_i]$ jest skojarzeniem.

Uwaga 1. Dowolny graf G ma dobre $e(G)$-pokolorowanie krawędzi

Uwaga 2. Jeśli G ma dobre k-pokolorowanie i $l \geqslant k$ to G ma dobre l-pokolorowanie

Definicja 13. Indeksem chromatycznym grafu G nazywamy najmniejsze $k \in \mathbb{N}$ takie że istnieje dobre k-pokolorowanie krawędzi G i oznaczamy $\chi'(G)$

Uwaga 3. $\chi'(G)$ jest co najmniej $\geqslant \Delta(G)$

4.1 Problem planu zajęć

4.1.1 Dane

n	– grup studenckich	$X_1, X_2, \ldots, X_n$
m	– nauczycieli	$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$
a_{ij}	– liczba godzin które nauczyciel Y_i ma przeprowadzić grupie X_i	

Ułożyć plan zajęć tak żeby ostatnia godzin kończyła się najwcześniej

4.1.2 Założenia

1. Nie ograniczona liczba sal
2. Żaden nauczyciel nie prowadzi dwóch zajęć jednocześnie
3. żadna grupa nie ma dwóch zajęć jednocześnie

4.1.3 Rozwiązanie

Tworzymy multigraf o zbiorze wierzchołków $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ wierzchołki X_jY_i są połączone krawędziami a_{ij}
Dobre pokolorowanie krawędzi grafu G definiuje plan zajęć.
Jeśli krawędź X_jY_i jest koloru $c \in \{1, \ldots, k\}$ to Y_i na godzinie numer c ma zajęcia z x_j

Przykład 1.

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
X_1	2	0	1	1	0
X_2	0	1	0	1	0
X_3	0	1	1	1	0
X_4	0	0	0	1	1

	X_1	X_2	X_3	X_4
1	Y_1	Y_2	Y_4	Y_5
2	Y_1	Y_4	Y_2	–
3	Y_3	–	–	Y_4
4	Y_4	–	Y_3	–

Lemat 3. *Niech G będzie grafem spójnym, który nie jest nieparzystym cyklem. Wtedy G ma 2-pokolorowanie krawędzi, takie że każdy wierzchołek stopnia $\geqslant 2$ jest końcem krawędzi w obydwu kolorach.*

Dowód. Przypadek 1. G ma obwód Eulera

1. Jest cyklem oczywiście parzystej długości, kolorujemy krawędzie cyklu na zmianę.
2. G nie jest cyklem zatem G ma wiezchołek v_0 taki że $\deg v_0 \geqslant 4$

Rozważmy obwód Eulera o początku i końcu w v_0, $(v_0 e_1 v_1 \ldots v_m)$

Niech $$\begin{aligned} E_1 &= \{e_i : 2 \nmid i\} \\ E_0 &= \{e_i : 2 \mid i\} \end{aligned}$$

Wchodząc do wierzchołka v_p krawędzią z E_i wychodzimy krawędzią z E_{1-i} $\quad i \in \{0, 1\}$

Uwaga 4. Przez v_0 też tak przechodzimy

□

Przypadek 2. G nie ma obwodu Eulera
N – zbiór wierzchołków nieparzystego stopnia
$\overline{G} = G + \{v\} + \{vx : x \in N\}$[11]

$$\text{Teraz w } \overline{G} \quad \begin{array}{lll} 2 \,|_{\deg_G x} & \text{dla} & x \in N \\ 2 \,|_{\deg_G x} & \text{dla} & x \notin N \\ 2 \,|_{\deg_G v} & \text{bo} & 2 \,|_{|N|} \text{ (zgodnie z lematem o uściskach dłoni)} \end{array}$$

$\overline{G}$ ma obwód Eulera. Idąc po tym obwodzie kolorujemy krawędzie na zmianę tak jak w przypadku 2. Usuwamy krawędzie xv dla $x \in N$. *Wierzchołek* $u \in V(G) \setminus N$ *w* G *ma krawędzie każdego koloru* Obwód Eulera przechodzi przez u dwa razy, zatem ma po dwie krawędzie w każdym kolorze w $\overline{G}$. Czyli przynajmniej po jednej krawędzi w każdym kolorze w G. □

□

Lemat 4. *k-pokolorowanie jest dobre* $\Leftrightarrow \; \forall c \in V(G) \quad l_c(v)$[12] $= \deg_G v$

Definicja 14. k-pokolorowanie $\overline{c}$ krawędzi G jest lepsze niż k-pokolorowanie c krawędzi G jeśli $\sum\limits_{v \in V(G)} l_{\overline{c}}(v) > \sum\limits_{v \in V(G)} l_c$

Definicja 15. k-pokolorowanie krawędzi G jest optymalne jeśli nie istnieje od niego lepsze.

5 Kolorowanie wierzchołków

Definicja 16. k-pokolorowaniem wierzchołków grafu G nazywamy funkcję $c : \; V(G) \to C$, gdzie $|C| = k$

Definicja 17. k-pokolorowanie nazywamy dobrym (właściwy, legalnym) jeżeli każde dwa sąsiednie wierzchołki mają inne kolory

$$\forall x, y \in V \quad xy \in E(G) \Rightarrow c(x) \neq c(y)$$

Definicja 18. Podzbiór $U \subset V(G)$ nazywamy niezależnym jeżeli $\forall x, y \in U \quad xy \notin E(G)$

Definicja 19. Liczba chromatyczna grafu G jest to najmniejsze k, takie że istnieje dobre k-pokolorowanie.
$\chi(C_{2n}) = 2 \quad \chi(C_{2n+1} \quad \chi(K_n) = n \quad \chi(K_{n,m}) = 2 \chi(G) = 1 \Leftrightarrow e(G) = 0 \quad \chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ jest grafem dwudzielnym

Definicja 20. Graf G jest krytyczny jeśli $\chi(G) > \chi(H)$ dla każdego istotnego podgrafu H grafu G

Uwaga 5. Podgraf istotny nie jest całym grafem

Definicja 21. Graf G jest k-krytyczny gdy jest krytyczny i $\chi(G) = k$

Przykład 2. *G jest 3-krytyczny* $\Leftrightarrow$ *G jest nieparzystym cyklem*

Przykład 3. *K_n jest n krytyczny*

Lemat 5. *Jeżeli $\chi(G) = k$ to G zawiera podgraf k-krytyczny*

Dowód. Jeśli G jest krytyczny to OK. W przeciwnym razie istnieje wierzchołek lub krawędź, których usunięcie nie sprawi zmniejszenia liczby chromatycznej. Usuwamy wierzchołki i krawędzie o tej własności. dopóki się da. W wyniku tej operacji otrzymujemy podgraf k-krytyczny. □

Twierdzenie 8. *Jeżeli graf G jest k-krytyczny to* $\delta(G) \geqslant k - 1$

Dowód. Przypuśćmy że tak nie jest
Przypuśćmy, że G jest k-krytyczny i $\delta(G) < k - 1$. Czyli $\exists v \in V(G) \quad \deg_G V \leqslant k - 2$ i krytyczności $\chi(G \setminus v) \leqslant k - 1$
Niech c będzie $k - 1$ pokolorowaniem $G \setminus v$. Rozszerzamy je na wierzchołek v przypisując najmniejszy kolor $\{c(u) : u \in N(v)\}$.
Ponieważ $\{c(u) : u \in N(v)\} \leqslant \deg_G V \leqslant k - 2$ to przypisujemy wierzchołkowi v kolor najwyżej $k - 1$ otrzymujemy pokolorowanie G na $k - 1$ kolorów wbrew $\chi(G) = k$ □

Wniosek 3. Jeśli G jest k-krytyczne to zawiera co najmniej k wierzchołków stopnia co najmniej $k - 1$

Dowód. Niech v będzie wierzchołkiem takim że $\deg_G V = \delta\delta(G)$. Z twierdzenia $\delta(G) \geqslant k - 1$ zatem $|\mathbf{N}[v]| \geqslant k$ i $\forall u \in \mathbf{N}[v] \quad \deg_G u \geqslant k - 1$ [13] □

Wniosek 4. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$ dla dowolnego grafu

[11] łączymy go ze wszystkimi wierzchołkami nieparzystego stopnia z G
[12] liczba kolorów użytych do pokolorowanie krawędzi incydentnych z v
[13] sąsiedztwo domknięte $\mathbf{N} = N(v) \cup \{v\}$

Dowód. Weźmy graf i pokolorujmy jego wierzchołki po koli jak najmniejszym kolorem. Każdy wierzchołek mam $\Delta(G)$ zabronionych kolorów więc robimy kolorów o 1 więcej. □

Twierdzenie 9 (Brooks'a)**.** *Jeżeli graf G jest spójny i różny od K_n i C_{2n+1} dla każdego n to*

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G)$$

Uwaga 6. Liczby $\chi(G)$ i $\Delta(G)$ mogą różnić się dowolnie np. $\chi(K_{n,n}) = 2, \quad \Delta(K_{n,n}) = n$

Uwaga 7. $\chi(G) \geqslant \omega(G)$[14]

Twierdzenie 10 (Descartes-Mycielski)**.** *Dla dowolnej liczny naturalnej k istnieje graf G_k taki że $\chi(G_k) = k$ i G_k nie zawiera trójkąta*

Dowód. Nie wprost
Niech $G_k = (V_k, E_k)$ gdzie $V_k = \{v_1, \ldots, v_k\}$ będzie grafem bez trójkątów takim że $\chi(G_k) = k$
Definiujemy $G_{k+1} : V_{k+1} = \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_k, v\}$
$E(G_{k+1}) = E(G_k) \cup \{v_i u_j : \ v_i v_j \in E(G_k)\} \cup \{u_i v : \ i = \{1, \ldots, n\}\}$ G_k nie ma trójkątów więc dowodzimy indukcyjnie po k. Zakładamy, że G_{k-1} nie ma trójkątów. Przypuśćmy, że $\Delta\{x, y, z\}$
$|\{x, y, z\} \cap \{u_1, \ldots, u_n\}| \leqslant 1$ czyli $v \notin \{x, y, z\}$ z założenia indukcyjnego $\{x, y, z\} \not\subset \{v_1, \ldots, v_n\}$
Pozostaje jedyna możliwość $\begin{matrix} x \in & \{u_1, \ldots, u_n\} \\ y, z \in & \{v_1, \ldots, v_n\} \end{matrix}$. Przyjmujemy, że $\begin{matrix} x = u_i \\ y = v_j \\ z = v_k \end{matrix}$
u_i, v_j, v_k tworzą trójkąt wbrew założeniu indukcyjnemu. Sprzeczność.
Teraz pokażemy, że $\chi(G_k) = k$
Założenie indukcyjne: $\chi(G_{k-1} = k - 1$
Teza: $\chi(G_k) = k$
Rozważmy graf G_k $\;V(G) = \{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_k, v\}$. Załóżmy, że $G_k[\{v_1, \ldots, v_n\}]$ jest izomorficzny G_{k-1}. Z założenia indukcyjnego istnieje (k-1)-pokolorowanie $G_k[\{v_1, \ldots, v_n\}]$ nazwijmy je $C^{\#}$
Definiujemy k-pokolorowanie G_k

$$C(x) = \begin{cases} C^{\#} & \text{jeśli } x \in \{v_1, \ldots, v_n\} \\ C(v_i) & \text{jeśli } x = u_i \\ k & \text{jeśli } x = v \end{cases}$$

Pokazaliśmy, że $\chi(G_k) \leqslant k$. Przypuśćmy, że istnieje (k-1)-pokolorowanie grafu $G_K k + 1$, nazwijmy je ξ. Zauważmy że żaden z wierzchołków $u_1, \ldots, u_n$ nie jest pokolorowany kolorem $\xi(v)$.
Definiujemy nowe pokolorowanie grafu indukowanego V czyli $G_k[\{v_1, \ldots, v_n\} \cong G_{k-1}$ $\quad \phi(v_i) = \begin{cases} \xi(v_i) & \text{jeśli } \xi(v_i) \neq \xi(v) \\ \xi(u_i) & \text{jeśli } \xi(v_i) = \xi(v) \end{cases}$
Pokolorowanie ξ jest dobrym (k-2)-pokolorowaniem wbrew założeniu indukcyjnemu. Sprzeczność □

Problem 1. Fabryka produkuje n substancji chemicznych $v_1 m \ldots, v_n$. Niektóre nie powinny być przechowywane w tych samych magazynach. Ile potrzebujemy najmniej magazynów, aby każda substancja była w jakimś magazynie ale z żadną substancją z którą nie powinna być?

Rozwiązaniem jest liczba chromatyczna następującego grafu: $\begin{array}{l} V = \{v_1, \ldots, v_n\} \\ E = \{v_i v_j : \ \text{substancje } v_i v_j \text{ nie powinny być razem w magazynie}\} \end{array}$

6 (Multi)Grafy planarne (płaskie)

Definicja 22. Grafem planarnym (płaskim) nazywamy graf który można narysować na płaszczyźnie tak, aby krawędzie przecinały się jedynie w wierzchołkach.

Twierdzenie 11. *Graf można narysować na płaszczyźnie $\Leftrightarrow$ można go narysować na sferze*

Definicja 23. Reprezentacją płaską multigrafu planarnego nazywamy rysunek grafu
Reprezentacja multigrafu planarnego dzieli płaszczyznę na obszary nazywane regionami

Definicja 24. Mówimy że region f jest incydentny z krawędzią e, jeżeli e leży w całości na brzegu f

Uwaga 8. Jeżeli krawędź jest mostem to jest incydentna z jednym regionem, w przeciwnym przypadku z dwoma regionami

Definicja 25 (Graf dualny)**.**

- Wierzchołkom w $G*$ odpowiadają regiony czyli $V(G*) = F(G)$.
- $f * g*$ jest krawędzią w $G*$ jeśli regiony f i g mają wspólną krawędź na brzegu
- $f * g*$ łączymy tyloma krawędziami ile f i g mają wspólnych w G

Definicja 26. G – reprezentacja płaska grafu
Definiujemy graf dualny $G*$:

- $V(G*) = F(G)$
- para $f*, g*$ jest krawędzią w $G*$ o krotności p jeśli brzegi f, g mają wspólnych p krawędzi

[14] $\omega(G)$ = rozmiar największej kliki (podzbiór wierzchołków grafu pełnego)

6.1 Własności grafów dualnych

- Dwie różne reprezentacje płaskie tego samego grafu mogą mieć nieizomorficzne grafy dualne
- Jeśli G jest reprezentacją płaską grafu planarnego $G*$ to też jest płaski
- $|G*| = \Phi(G)$
- $e(G*) = e(G)$
- $\forall f \in F(G) \quad \deg_{G*} f* = \deg_G f$

Twierdzenie 12. *Niech G będzie reprezentacją płaską. Wtedy*

$$\sum_{f \in F(G)} \deg_G f = 2e(G)$$

Dowód. $\sum_{f\in F(G)} \deg_G f = \sum_{f\in F(G)} \deg_{G*} f^* = \sum_{f^*\in V(G^*)} \deg_{G*} f* = 2e(G^*) = 2e(G)$ □

Twierdzenie 13 (Eulera 1750)**.** *Jeśli G^* jest reprezentacją płaską grafu spójnego G to $|G| - e(G) + \Phi(G) = 2$* Wzór Eulera

Dowód. Indukcja po $\Phi(G)$
$\Phi(G) = 1$ w G nie ma cyklu i jest spójny (jest drzewem) więc $e(G) = |G| - 1$
$\Phi(G) = k > 1$ zakładamy że wzór Eulera jest spełniony dla wszystkich G' takich że $\Phi(G') \leqslant k - 1$
W G powstaje cykl (np. krawędzie tworzące brzeg pewnej łamanej). e to krawędź w C która nie jest mostem więc leży na brzegu dokładnie dwóch ścian f_1, f_2 Usuwamy e z G. Dostajemy reprezentację płaską H jakiegoś grafu H.
$|H| = |G| \quad \Phi(H) = \Phi(G) - 1 \quad \Phi(H) \leqslant k - 1$ czyli wzór Eulera jest spełniony dla H
$|G| - e(G) + \Phi(G) = |H| - e(H) - 1 + \Phi(H) + 1 = 2$ □

Wniosek 5. Graf G – planarny graf prosty. Wtedy $e(G) \leqslant 3|G| - 6$

Wniosek 6. Graf G – planarny graf prosty. Wtedy $\delta(G) \leqslant 5$

Definicja 27. Pod-podziałem krawędzi xy w grafie G nazywamy operację polegającą ma zastępowaniu krawędzi xy dwoma krawędziami xz i zy przy czym z jest wierzchołkiem nie należącym do $V(G)$

Definicja 28. Graf H nazywamy pod-podziałem grafu G jeśli H można otrzymać z G przez ciąg podziałów krawędzi

Twierdzenie 14 (Kuratowski 1930)**.** *G jest planarny $\Leftrightarrow$ G nie zawiera pod-podziałów grafu K_5 lub $K_{3,3}$*

Dowód. $\Rightarrow$
Jeżeli G zawiera pod-podział K_5 lub $K_{3,3}$ to G nie jest planarny to pod-podziałby K_5 lub $K_{3,3}$ nie są planarne □

Dowód. $\Leftarrow$
... Wierzchołek minimalnego stopnia umieszczamy na stosie i usuwamy z grafu, aż usuniemy wszystkie wierzchołki. Zdejmujemy wierzchołki ze stosu i kolorujemy najmniejszym kolorem niepowodującym konfliktów. Z wniosku 6 w momencie usuwania wierzchołka to ten wierzchołek ma stopień $\leqslant 5$. Zatem gdy chcemy pokolorować wierzchołek to pokolorowanych jest $\leqslant 5$ jego sąsiadów. □

Twierdzenie 15. *Jeżeli G jest grafem planarnym to $\chi(G) \leqslant 5$*

Dowód. Przypuśćmy że istnieje kontrprzykład, czyli graf planarny G taki że $\chi(G) > 5$
Wyrzucamy wierzchołki z G aż otrzymamy graf H o liczbie chromatycznej 6. Oczywiście H jest planarny. Niech F będzie 6-krytycznym planarnym podgrafem grafu H. Z wniosku 6 $\delta(F) \leqslant 5$. F jest 6-krytyczny więc $\delta(F) \geqslant 6 - 1 = 5$ stąd $\delta(F) = 5$. Niech X będzie wierzchołkiem z F stopnia 5. F jest 6-krytyczny, więc $\chi(F - x) = 5$. Kolorujemy $F - x$ kolorami $c_1, \ldots, c_5$. Wszyscy sąsiedzi x mają różne kolory bo w przeciwnym przypadku można by pokolorować x jednym z kolorów $c_1, \ldots, c_5$ i wtedy F byłby pokolorowany na 5 kolorów. Sprzeczność.
Możemy tak nazwać kolory że v_1 ma kolor c_1, v_2 — c_2, $\ldots x$ ma kolor c_5. Dla $i, h \in \{1, \ldots, 5\}, j \neq i$Niech F_{ij} będzie podgrafem indukowanym przez wierzchołki o kolorach c_i oraz c_j. v_i i v_j należą do tej samej składowej grafu F_{ij} bo w przeciwnym przypadku można by w składowej F_{ij} zawierającej v_i zamienić kolory $c_i c_j$, otrzymalibyśmy dobre pokolorowanie $F - x$ na 5 kolorów takie że sąsiedzi x są w 4 kolorach więc można by pokolorować H na 5 kolorów. Sprzeczność
Istnieje droga $P_{2,4}$ łącząca v_2 z v_4 w F_{24} (wierzchołki tej drogi mają kolory c_2 i c_4) Analogicznie istnieje droga P_{13} z v_1 do v_3 w F_{13} złożona z wierzchołków w kolorach c_1i c_3. Niech $c = xv_2P_{24}v_4x \quad v_1$ Droga P_{13} może przeciąć cykl C w wierzchołku, bo G jest planarny. To jest niemożliwe, bo z jednej strony ten wierzchołek należy do c czyli ma kolor c_2 lub c_4 a z drugiej strony należy do P_{13} czyli ma kolor c_1 lub c_3. Sprzeczność. □

6.2 Skojarzenia grafów

Definicja 29. Podgraf M grafu G nazywamy skojarzeniem jeśli każda składowa M jest izomorficzna z K_2

Definicja 30. Zbiór wierzchołków $C \subset V(G)$ nazywamy wierzchołkowym połączeniem G jeśli każda krawędź G jest incydentna z wierzchołkiem z C.

Definicja 31. Drogę zaczynającą się z wierzchołka $x \in A$ który nie należy do żadnej krawędzi zM składający się na przemian z krawędzi należących do $E - E(M)$ i $E(M)$ nazywamy drogą naprzemienną względem M

Definicja 32. Drogę naprzemienną względem M zawierającą się w wierzchołku z A nazywamy nienasyconą względem M jeśli jej koniec należy do B i nie należy do żadnej krawędzi z M.

Definicja 33. G - graf, $C \subset V(G)$ jest wierzchołkowym pokryciem grafu G jeżeli każda krawędź ma przynajmniej jeden koniec w C

Twierdzenie 16 (Koniga)**.** *Rozmiar największego skojarzenia w grafie dwudzielnym jest równy liczbie wierzchołków w najmniejszym wierzchołkowym pokryciu.*

Dowód. Niech $m(G)$ – rozmiar najliczniejszego skojarzenia
$c(G)$ – liczność majmniejszego pokrycia

1. Dowodzimy że $m(G) \leqslant c(G)$
   Niech M – skojarzenie rozmiaru $m(G)$. Aby pokryć wszystkie krawędzie z M (bo żaden wierzchołek nie należy do więcej niż jednej krawędzi).

2. $c(G) \leqslant m(G)$
   Niech M będzie skojarzeniem liczności $m(G)$ skonstruujmy pokrycie C liczności $c(G)$. $G = (A, B, E)$ jest grafem dwudzielnym, $V(G) = A \cup B$.
   Z krawędzi $e \in E(M)$ do C wybierzmy jej koniec należący do B, jeśli jest on końcem naprzemiennej ścieżki względem M, w przeciwnym przypadku do C wybieramy koniec należący do A
   $|C| = |M| = m(G)$

3. Pokażemy że C jest pokryciem
   Niech ab będzie dowolną krawędzią w G, $a \in A,\ b \in B$ jeśli $ab \in E(M)$ to $a \in C$ lub $b \in C$
   jeśli $ab \notin E(M)$: Zauważmy że $\exists e \in E(M) \quad a \in e$ lub $b \in e$.
   Gdyby było inaczej to krawędź ab można by dodać do M otrzymując skojarzenie liczności $m(G) + 1$. Sprzeczność
   Jeżeli $\exists e \in E(M) \quad b \in e$ to $b \in C$ ponieważ $e \in R(N)$ i b jest końcem naprzemiennej ścieżki konkretnie ścieżki ab.
   Jeżeli $b \notin V(M) \ \cap\ \exists e \in E(M) \quad a \in e$ to niech $e = ab'$
   Jeżeli $a \in C$ to ok $\rightarrow$ krawędź ab ma koniec w C
   Jeżeli $a \in C$ to $b' \in C$ i b' jest końcem naprzemiennej ścieżki P

   - Jeśli P przechodzi przez b to b jest końcem pewnej naprzemiennej ścieżki (konkretnie początkowego docinka P – czyli ta ścieżka jest krótsza od P) to znaczy że $b \in C$
   - Jeśli P nie przechodzi przez b to ścieżka P_{ab} jest ścieżką naprzemienną kończącą się w b, a b nie należy do żadnej krawędzi z M

   b jest końcem nienasyconej ścieżki naprzemiennej $P' = ab$. Niech $E(M') = E(M) \div E(P')$ $|M'| = |M| + 1$ sprzeczność z definicją M jako najliczniejszego skojarzenia

□

Twierdzenie 17 (Halla (Wersja grafowa))**.** *Każdą pannę można wydać za mąż za kawalera, którego lubi $\Leftrightarrow$ każdy podzbiór S panien lubi co najmniej (w sumie) $|S|$ kawalerów.*

Dowód. Zaręczamy pary zachłannie, każda kolejna pana zaręcza się z pierwszym wolnym kawalerem, którego lubi o ile taki istnieje. W przeciwnym przypadku urządza przyjęcie zapraszając wszystkich których lubi oni zapraszają swoje narzeczone a one kawalerów których lubią i tak dalej. To znaczy każdy kawaler przychodzi na przyjęcie z narzeczoną (o ile taką ma), a każda panna ze wszystkimi kawalerami których lubi.
Przypuśćmy że na przyjęciu nie ma wolnego kawalera. Niech S oznacza zbiór panien na przyjęciu. Kawalerów na przyjęciu czyli wszystkich lubianych przez panny z S jest $S - 1$ – narzeczeni wszystkich panien oprócz gospodyni. Sprzeczność z założeniem.
Kawaler bez pary tańczy z panną która go zaprosiła, jej narzeczony z panną która go zaprosiła i tak dalej, aż pewien kawaler tańczy z gospodynią. Tańczące pary zrywają swoje zaręczyny o zaręczają się z partnerem od tańca. W ten sposób kolejne panny możemy nareszcie zaręczyć. Gdy już nie ma wolnych panien urządzamy ślub. □

Twierdzenie 18 (Halla 1935)**.** *$G = (X, Y, Z)$ graf dwudzielny.*
Jeśli $\forall S \subset X \quad |N(S)| \geqslant |S|$ to w G istnieje skojarzenie liczności $|X|$ [15]

[15] $N(S) = \{y \in Y :\ \exists x \in X \quad yx \in E\}$

6.3 Systemy reprezentantów

Definicja 34. Niech $(A_1, \ldots, A_m)$ - ciąg podzbiorów zbioru X
Ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ nazywamy systemem różnych reprezentantów ciągu $(A_1, \ldots, A_m)$ jeśli

1. $\forall i \in \{i, \ldots, n\}\ a_i \in A_i$
2. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\ i \neq j \ \Rightarrow\ a_i \neq a_j$

Twierdzenie 19 (Halla (Wersja transwersalowa[16])).
Ciąg zbiorów $(A_1, dots, A_m)$ *ma system różnych reprezentantów* $\Leftrightarrow\ \forall y \in \{1, \ldots, n\}\quad |y| \leqslant |\bigcup_{i \in y} A_i|$

Dowód.
Definiujemy graf dwudzielny $G = (X, Y, E)\quad x = \{A_1, \ldots, A_m\}\ Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ i powiemy że $A_i y_i \in E \Leftrightarrow y_i \in A_i$
Skojarzenie $A_1 y_1 \ldots A_n y_n$ definiuje system różnych reprezentantów z twierdzenia 17 wynika że istnieje skojarzenie $\Leftrightarrow\ S \subset \{A_1, \ldots, A_m\}\quad |N(S)| \geqslant |S| = y$ □

Problem 2. Czy można przydzielić pracę pracownikom, tak aby każda była wykonana przez pracownika który ją umie?
Zakładamy że każda praca jest wykonana przez jednego pracownika i każdy pracownik wykonuje jedną pracę Problem sprowadza się do znalezienia systemu różnych reprezentantów.

6.4 Maksymalny przepływ w sieci

Definicja 35. Parę $S = (G, C)$ gdzie $G = (V, E)$ jest grafem zorientowanym, a $c:\ E \to \mathbb{R}$ (nazywamy funkcją przepustowości) nazywamy siecią.

Definicja 36. Niech s, t będą wyróżnionymi wierzchołkami sieci S. Przepływem z s do t nazywamy dowolną funkcję $f:\ E - to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ taką że:

1. $\forall e \in E \quad f(e) \leqslant c(e)$
2. $D_i Y_e(v) := \sum_{u: vu \in E} f(vu) - \sum_{u: uv \in E} f(uv) = 0$ dla każdego $v \in V \setminus \{s, t\}$

Wielkość $w(f) = D_i Y_f(s)$ nazywamy wartością przepływu

Definicja 37. Przekrojem $P(A)$ odpowiadającym niepustemu zbiorowi $A \subset V$ nazywamy zbiór krawędzi $P(A) = E \cap A \times (V \setminus A)$ (jeden koniec w A a drugi nie)

Definicja 38. Dla dowolnego przepływu f w sieci S definiujemy przepływ przez przekrój $P(A)$ jako $f(A, V \setminus A) = \sum_{e \in P(A)} f(e)$

Lemat 6. *Jeśli* $s \in A$, $t \notin A$ *to dla dowolnego przepływu z* s *do* t

$$w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A)$$

Dowód.

$$w(f) = Div_f(s) = Div_f(s) + 0 = \sum_{v \in A} Div_f(v) = \sum_{v \in A} \left(\sum_{u: uv \in E} f(uv) - \sum_{u: vu \in E} f(vu) \right) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A)$$

□

Definicja 39. Przepustowością przekroju $P(a)$ nazywamy liczbę $c(A, V \setminus A) = \sum_{e \in P(A)} c(e)$

Definicja 40. Minimalny przekrój między s i t to jest przekrój $P(A)$ taki że $s \in A$, $t \notin A$ o minimalnej przepustowości

Twierdzenie 20 (Forda-Fulkersona). *Wartość każdego przepływu z* s *do* t *nie przekracza przepustowości minimalnego przekroju między* s *i* t*, przy czym istnieje przepływ osiągający tą wartość*

[16] transwersala – system reprezentantów

Dowód. Niech $P(A)$ będzie przekrojem minimalnym

$$w)f{=}f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) \leqslant f(A, V \setminus A) = \sum_{e \in P(A)} f(e) \leqslant \sum_{e \in P(A)} c(e) = c(A, V \setminus A)$$

□

Definicja 41. Krawędź e sieci S jest użyteczna z u do v jeśli $e = uv$ i $f(e) < c(e)$ lub jeśli $e = vu$ i $f(e) > 0$ (jeśli można zwiększyć przepływ)

Definicja 42. Ścieżką rozszerzającą z s do t dla danego przepływu f to ciąg $v_0 e_1 v_1 \ldots e_l v_l$ taki że $v_0 = s,\ v_l = t$ oraz $\forall i \in \{1, \ldots, l\}$ krawędź e_i jest użyteczna z v_{i-1} do v_i względem przepływu f.

Twierdzenie 21. *Następujące warunki są równoważne:*

1. *Przepływ f z s do t jest maksymalny*
2. *Nie istnieje ścieżka rozszerzająca z s do t względem f*
3. $w(f) = c(A, V \setminus A)$ *dla pewnego* $A \subset V \setminus \{t\}$ $\ s \in A$

Dowód.

- $1 \Rightarrow 2$
  Zachodzi ponieważ gdyby istniała ścieżka rozszerzająca względem f to można by było znaleźć większy przepływ, a ten jest już maksymalny

- $2 \Rightarrow 3$
  Zakładamy że nie istnieje ścieżka rozszerzająca z s do t względem f. Niech A będzie zbiorem wierzchołków V takim że istnieje ścieżka rozszerzająca z s do v względem v. Zauważmy że:

  1. $t \notin A$
  2. $e = vu \quad v \in A \wedge u \notin A$ to $f(e) = c(e)$ bo gdyby $f(e) < c(e)$ to istniałaby ścieżka rozszerzająca z s do u i wtedy $u \in A$ wbrew założeniu
  3. $e = uv \quad v \in A \wedge u \notin A$ to $f(e) = 0$ bo gdyby $f(e) > 0$ to $u \in A$ wbrew założeniu

  $$w(f) = \sum_{e \in P(A, V \setminus A)} f(e) - \sum_{e \in P(V \setminus A, A)} f(e) = \sum_{e \in P(A, V \setminus A)} c(e) - 0 = c(A, V \setminus A)$$

- $3 \Rightarrow 1$
  f jest maksymalny bo wartość przepływu nie może przekroczyć żadnej wartości przekroju

□

Problem 3. Dane : $\begin{array}{ll} \text{E} & --\ \textit{zbirniezaleny}, \text{C} \subset P(E) \\ \text{w:}\ \ \text{E} \to [), \infty & --\ \textit{wagielementw}\text{E} \end{array}$. Znaleźć $s \subset C$ takie że

$$\sum_{e \in S} w(e) \text{ jest maksymalne}$$

Algorytm 4.

1. Posortuj elementy zbioru E według wag malejąco $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$
2. Dla $i = 1 \ldots n$
   Jeżeli $S \cup \{e_i\} \in C$ to $S_i = S \cup \{e_i\}$

6.5 Matroidy

Definicja 43. Matroidem nazywamy parę $M = (E, C)$ gdzie E jest zbiorem skończonym a $C \subset Z^E$

1. $\emptyset \in C$ i $\forall A, B \subset E \quad A \subset B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$
2. $\forall A, B \in C \quad |B| = |A| + 1 \Rightarrow \exists e \in B \setminus A \quad A \cup \{e\} \in C$

Zbiory należące do C nazywamy zbiorami niezależnymi

Przykład 4. *E – zbiór skończony, $C = Z^E$*

Przykład 5. *Matroid podziałowy*
E – zbiór skończony, $D_1, \ldots, D_k$ – podział E
$C = \{A \subset E : \quad |A \cap D_i| \leqslant 1\}$

Twierdzenie 22. *Niech $C \subset Z^E$ spełnia warunek 1 wtedy para (E, C) jest matroidem $\Leftrightarrow$ dla dowolnego $D \subset E$ każde dwa maksymalne w D zbiory niezależne są tej samej liczności*

Dowód. $\Rightarrow$ Przypuśćmy że istnieją zbiory niezależne A, B maksymalne w pewnym $D \subset E$ $|B| > |A|$, z

1. $\Rightarrow$ $\exists B' \subset B$ takie że $B' \in C$ $|B'| = |A| + 1$
2. $\Rightarrow$ $\exists e \in B' \setminus A \subset D$ $A \cup \{e\} \in C$

czyli nie jest zbiorem niezależnym maksymalnym w D
$\Leftarrow$ Chcemy pokazać że prawdą jest 2
Rozważmy $A, B \in C$ $|B| = |A| + 1$ $|D + A \cup B$. Przypuśćmy że 2 nie zachodzi, czyli $\forall e \in B' \setminus A$ $A \cup \{e\} \in C \Leftrightarrow$ A jest maksymalnym zbiorem niezależnym. B jest zawarty w pewnym zbiorze niezależnym, maksymalnym w D. $B'| \geqslant |B| > |A|$ sprzeczność z 3 □

Wniosek 7. Wszystkie zbiory niezależne, maksymalne w E matroidu (E, C) mają taką samą liczność

Twierdzenie 23 (Rado-Edmondsa 1971)**.** *Jeśli $M = (E, C)$ jest matroidem, a S jest zbiorem znalezionym przez algorytm zachłanny rozwiązujący problem* **??** *to S jest zbiorem niezależnym o maksymalnej wadze*

Dowód. Na mocy algorytmu **??** S jest niezależny. S jest maksymalny, bo przypuśćmy że istnieje $e \in E$ $S \cup \{e\} \in C$. Element e został odrzucony przez algorytm zatem $S' \cup \{e\} \notin C$ dla pewnego $S' \subset S$ dokładniej S' jest aktualnym zbiorem S w obrocie pętli gdy rozważany był element e

$$S' \cup \{e\} \notin C \Rightarrow S \cup \{e\} \in C$$

Sprzeczność

□

Twierdzenie 24. *Jeżeli $C \subset Z^E$ i (E, C) nie jest matroidem to istnieje funkcja wag taka że algorytm* **??** *zwróci zbiór o mniejszej wadze niż maksymalny*