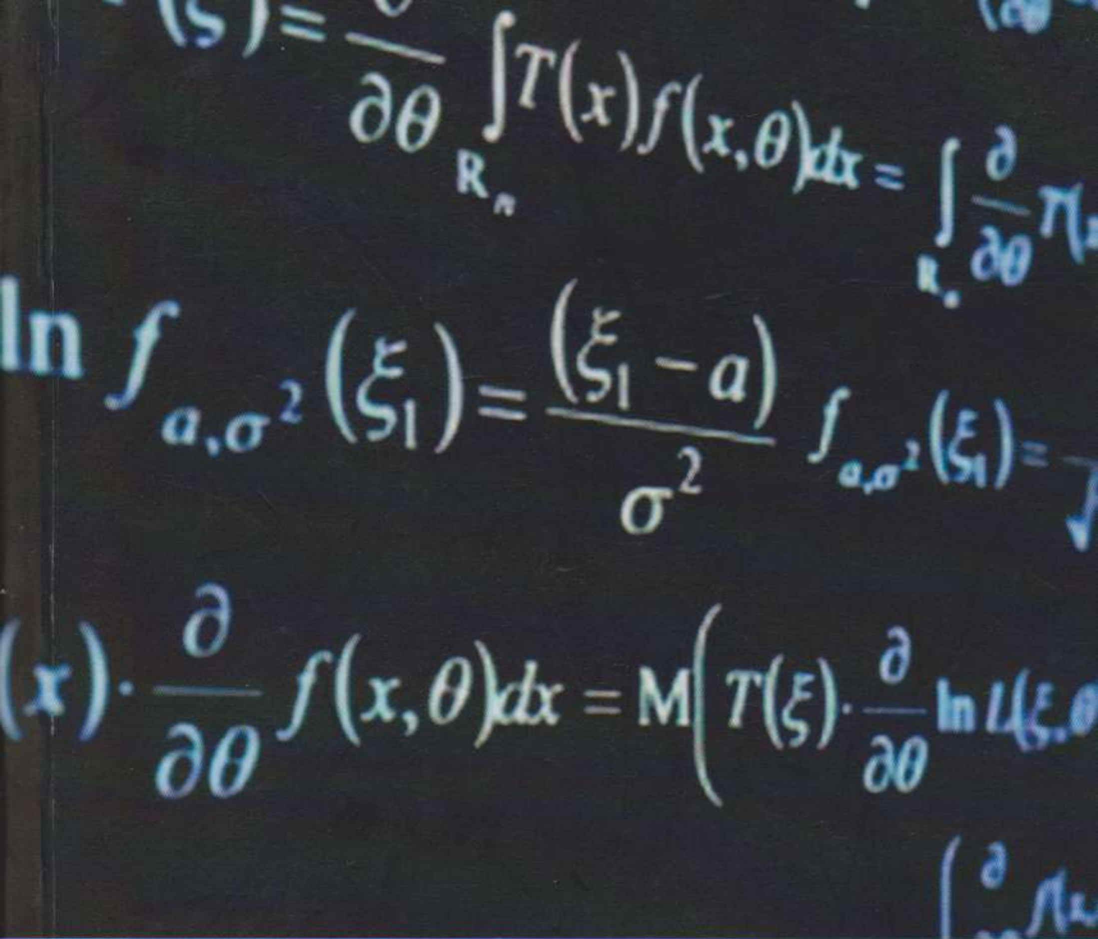


Dr. Kadir, M.Pd

Fungsi Peubah Kompleks

UIN JAKARTA PRESS

Dr. K a d i r, M.Pd.

FUNGSI PEUBAH KOMPLEKS

UIN PRESS

FUNGSI PEUBAH KOMPLEKS

Penulis:
Dr. Kadir, M.Pd.

Layout & Tataletak:
Yusuf Soepriatna.

Desain Cover:
Ahmad Anwar

Cetakan:
Pertama, Februari 2016

Ukuran:
14,5 x 21 Cm----- vi + 200 Halaman

ISBN:
978-602-346-028-1

Diterbitkan oleh:
UIN JAKARTA PRESS

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah S.W.T., yang telah mencurahan rahmat dan karunia, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku ini. Kehadiran buku diilhami oleh hasil diskusi, refleksi dan diskursus tentang sistem bilangan, sifat-sifat, teorema dan definisi fungsi peubah kompleks dalam perkuliahan. Suatu hal yang unik berkaitan dengan teori fungsi peubah kompleks adalah pembahasan dan eksplorasinya menjangkau seluruh sistem bilangan real bahkan merupakan pengembangan mutahir dari seluruh sistem bilangan. Pemunculan bilangan imajiner atau bilangan khayal dalam teori fungsi peubah kompleks memberikan distingsih yang paling signifikan dari seluruh sistem bilangan yang pernah ada sebelumnya. Khususnya dalam bidang kalkulus, maka analisis kompleks merupakan pengembagan lebih lanjut tentang teori limit, kekontinuan, diferensial, dan integral.

Dari aspek ilmu terapan, fungsi peubah kompleks membantu para insinyur, fisikawan, matematikawan, dan ahli ilmu pengetahuan lainnya memperjelas suatu masalah dan menemukan suatu solusi yang menakjubkan, misalnya jawaban atas masalah aliran panas, mekanika, elektrodinamika, dan banyak lagi masalah.

Setiap bab dari buku ini dimulai dengan eksplanasi yang jelas dari definisi, teorema dan contoh yang lengkap serta penyelesaian soal-soal dan latihan. Pada setiap akhir bab diberikan peta konsep yang menggambarkan keterkaitan antara konsep dan sekaligus menjadi ringkasan perkuliahan.

Terima kasih penulis sampaikan kepada semua pihak, terutama rekan-rekan dosen dan mahasiswa yang telah memberikan masukan yang kontruktif, baik dalam diskusi-diskusi maupun dalam interaksi perkuliahan yang turut memperkaya isi buku ini. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat (LP2M) Universitas Islam Negeri Syarif Hidayatullah Jakarta yang telah bersedia mendanai penulisan dan penerbitan buku ini.

Dalam penyuntingan buku ini, penulis menyadari bahwa isi buku ini masih jauh dari sempurnah, untuk itulah penulis memohonkan saran dan kritik yang sifatnya membangun demi penyempurnaan buku ini. Kiranya karya ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa dalam rangka mengembangkan kompetensi matematika guna meningkatkan daya saing generasi bangsa. Amien.

Jakarta, 26 Oktober 2015

Dr. Kadir, M.Pd.

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Ketersediaan buku ajar, yang relevan dengan Silabus dan Rencana Pembelajaran Semester yang digunakan dalam perkuliahan, khususnya mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks masih sangat terbatas. Buku-buku Fungsi Peubah Kompleks yang beredar, materinya bersifat umum dan kadang-kadang terlalu luas hingga cakupan materinya menjangkau jenjang strata S2. Sehingga jika dosen tidak cermat dalam memilih materi dari buku yang bersangkutan dan menggunakan hanya sesuai alur materi dari buku tersebut mengakibatkan mahasiswa kesulitan mamahami materi sehingga tujuan perkuliahan yang telah ditetapkan berpotensi untuk tidak dapat tercapai. Disamping itu isi buku yang beredar sifatnya standar untuk mahasiswa yang belajar Fungsi Peubah Kompleks di berbagai jurusan terutama pada ilmu-ilmu terapan, maka isu-isu kontektual dalam pendidikan matematika terutama terapan Fungsi Peubah Kompleks pada jenjang strata satu program studi pendidikan matematika belum terakomodir secara baik dalam buku tersebut.

Kondisi ini di atas akan menghambat pencapaian kompetensi yang dituntut dari mahasiswa pada perkuliahan Fungsi Peubah Kompleks termasuk upaya mahasiswa untuk mendapatkan pengetahuan yang benar dan menyeluruh tentang konsep-konsep penting yang relevan dengan perkuliahan Fungsi Peubah Kompleks.

Buku ini diharapkan dapat membantu mahasiswa meningkatkan kompetensi mahasiswa, khususnya kompetensi paedagogik dan profesional yang relevan dan kontekstual dengan mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks. Disamping itu isi dari buku ini diharapkan dapat menfasilitasi berkembangnya softskill seperti berpikir kritis, kreatif, analitik, metakognitif, kerja sama, tanggung jawab, dan obyektif melalui latihan dan kegiatan matematika dalam mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks.

B. Tujuan

Tujuan umum yang ingin dicapai dari mata kuliah ini adalah agar mahasiswa:

(1) Mampu membuktikan teorema yang berkaitan dengan sifat-sifat bilangan kompleks, limit dan kekontinuan, serta turunan dan integral bilangan kompleks yang berorientasi kepada kecakapan hidup (*life skills*).

(2) Menguasai materi, struktur, konsep, dan pola pikir keilmuan matematika terkait pengertian bilangan kompleks, fungsi kompleks, transformasi, dan fungsi elementer, limit dan kekontinuan fungsi kompleks, fungsi-fungsi yang dapat diturunkan dengan menggunakan persamaan Cauchy-Reaman, sifat-sifat analitik dan menyeluruh fungsi f(z) sederhana, pengintegralan fungsi kompleks, konsep kontur, garis domain, teorema Cauchy- Goursat, rumus integral Cauchy, dan barisan deret kompleks beserta sifat-sifatnya.

(*Soft skills/Karakter: Memiliki etos kerja, empati, kritis, logis, tanggung jawab, kerja sama, percaya diri, dan rasa bangga sebagai calon guru matematika*)

Tujuan khusus yang ingin dicapai dari mata kuliah ini adalah mahasiswa mampu:

(1) Melakukan operasi dasar bilangan kompleks
(2) Menyajikan bilangan kompleks secara analitik dan grafik
(3) Menyajikan bilangan kompleks dengan vektor posisi
(4) Menyatakan bilangan kompleks ke dalam bentuk kutub
(5) Menyatakan bilangan kompleks ke dalam bentuk eksponen
(6) Menentukan nilai mutlak dari suatu penjumlahan operasi perkalian
(7) Menghitung hasil perkalian bilangan kompleks dengan menggunakan Dalil De'Moivre
(8) Menghitung hasil pembagian bilangan kompleks dengan menggunakan Dalil De'Moivre
(9) Menentukan akar pangkat ke-n bilangan kompleks
(10) Menentukan akar-akar persamaan suku banyak bilangan kompleks
(11) Menentukan hasil kali titik bilangan kompleks
(12) Menentukan hasil kali silang bilangan kompleks
(13) Menentukan hasil transformasi dari suatu fungsi kompleks
(14) Membuktikan sifat-sifat fungsi elementer
(15) Membuktikan nilai suatu limit dengan pendekatan δ dan ε.
(16) Menghitung limit dengan menggunakan teorema limit
(17) Memeriksa kekontinuan suatu limit dengan menerapkan tiga syarat suatu fungsi kontinu
(18) Menentukan turunan suatu fungsi f(z) dengan menggunakan definisi: $\mathbf{f'(z)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$.
(19) Menjelaskan fungsi analitik
(20) Membuktikan turunan fungsi elementer bilangan kompleks

(21) Memeriksa apakah bagian real dan khayal suatu fungsi memenuhi persamaan Cauchy Reamann
(22) Menunjukan apakah suatu fungsi merupakan suatu fungsi harmonik
(23) Menentukan fungsi harmonik sekawan dari fungsi yang diberikan
(24) Menentukan turunan fungsi eksponen dan logaritma
(25) Menentukan turunan fungsi (trigonometri, hyperbolik, dan invers dari fungsi tersebut)
(26) Menentukan turunan fungsi dengan aturan pendiferensialan.
(27) Menentukan turunan fungsi implisit
(28) Menghitung limit dengan menggunakan aturan L'hospital
(29) Membuktikan integral dari fungsi-fungsi khusus.
(30) Menghitung integral garis (kontur) sepanjang kurva yang diberikan
(31) Menghitung integral fungsi khusus dengan metode subtitusi
(32) Menghitung integral parsial
(33) Menghitung integral fungsi f(z) pada kurva tertutup sederhana C dengan menggunakan rumus integral Cauchy I, II, & III.
(34) Memeriksa kekonvergenan suatu deret.
(35) Menyelesaikan masalah berkaitan dengan derat pangkat, Deret Taylor, Deret Maclaurin, Deret Lauran dan Integral Residu.

C. Ruang Lingkup

Mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks merupakan mata kuliah keahlian bagi mahasiswa jurusan Matematika. Mata kuliah ini, disamping merupakan pengembangan lebih lanjut dari mata kuliah Kalkulus juga berguna pengembangan ilmu sains (Fisika, Kimia) secara interdisipliner. Dengan demikian mata kuliah Fungsi Peubah Kompleks dapat memperkuat pengembangan pendidikan Sains dan Matematika di FITK. Materi pokok yang dibahas dalam mata kuliah ini meliputi: Pendahuluan, sistem bilangan real, sistem bilangan kompleks, operasi bilangan kompleks, nilai mutlak, aksiomatik bilangan kompleks, bidang kompleks, bentuk kutub bilangan kompleks, teorema De'moivre, akar bilangan kompleks, rumus Euler, persamaan suku banyak, hasil kali titik dan silang, koordinat sekawan, himpunan titik, fungsi invers, transformasi, fungsi elementer, limit dan teorema limit, kekontinuan dan teorema kekontinuan, limit barisan, turunan, fungsi analitik, persamaan Cauchy-Reaman, fungsi harmonik, tafsiran geometri dari turunan, deferensial, turunan fungsi elementer, turunan tingkat tinggi, dalil L'Hospital, integral garis kompleks, integral garis real, Teorema Cauchy- Goursat, integral tak tentu, rumus integral Cauchy dan teoremanya, dan barisan deret kompleks beserta sifat-sifatnya.

D. Isi Buku

Isi atau materi yang diuraikan dalam buku meliputi:

1. Bilangan Kompleks

Bagian ini, menjelaskan tentang definisi bilangan kompleks, operasi dan aksioma bilangan kompleks, nilai mutlak berikut teoremanya, penyajian bilangan kompleks dalam koodinat kartesius dan kutub sebagai pengantar lahirnya Terema De'Moivre dan terapannya dalam menentukan perkalian pembagian, dan akar bilangan kompleks, persamaan suku banyak, himpunan dan tempat kedudukan. Hasil kali titik dan hasil kali silang dan terapannya dalam menghitung luas jajar genjang. Pada akhir bab diberikan ringkasan dalam bentuk peta konsep juga latihan dan problem solving untuk mengembangkan kemampuan berpikir matematis.

2. Fungsi Kompleks

Bagian ini, berisi overview tentang fungsi bernilai tunggal dan banyak pada kalkulus, transformasi dari sistem real ke sistem kompleks, fungsi kontinu, fungsi elementer meliputi: fungsi aljabar, eksponen, trigonometri, hiperboliki, logaritma, invers fungsi trigonometri serta sifat-sifat dan penggunaannya.

3. Limit dan Kekontinuan

Uraian pada bagian ini memuat, pengertian limit secara intuitif dan definisi klasik, teorema limit dan pembuktian eksistensi limit, kekontinuan, pemeriksaan kekontinuan suatu fungsi, pemeriksaan tentang limit barisan.

4. Pendiferensialan Kompleks

Uraian bagian ini berisi differensial kompleks, yang dimulai dari: mendefinisikan turunan, memeriksa ke-analitikan suatu, penerapan Persamaan Cauchy Reaman, pemeriksaan fungsi harmonik, pembuktian 30 buah turunan fungsi elementer, turunan berantai, penerapan rumus L'Hospital untuk turunan, dan turunan fungsi implisit.

5. Pengintegralan Kompleks

Bagian ini menguraikan: pembuktikan integral dari fungsi-fungsi khusus, integral garis (kontur) sepanjang kurva yang diberikan, integral fungsi khusus dengan metode subtitusi, integral parsial, integral fungsi f(z) pada kurva tertutup sederhana C dengan menggunakan rumus integral Cauchy I, Cauchy II, atau Cauchy III.

6. Rumus Integral

Uraian rumus integral berisi konsep dan teorema-teorema berkaitan dengan rumus, meliputi penggunaan rumus integral Cauchy I, Cauchy II, atau Cauchy III.

7. Barisan dan Deret Kompleks

Bagian ini menguraikan barisan konvergen dan divergen, uji konvergensi pada deret kompleks, deret pangkat dan fungsi analitik, bentuk umum deret Laurent, dan integral Residu.

BAB II
BILANGAN KOMPLEKS

A. Sistem Bilangan Kompleks

Untuk memperlihatkan kedudukan atau konstelasi bilangan kompleks dalam sistem bilangan, secara umum diperlihatkan macam-macam bilangan berikut.

1) Bilangan Asli (A) = (1, 2, 3, ……..). Jika a dan b bilangan asli, maka a+b, a.b, (a)(b) atau ab juga merupakan bilangan asli.
2) Bilangan Cacah (C) = (0, 1, 2, 3, 4,…………).
3) Bilangan Bulat (B) = (..-3, 2, 1, 0, 1, 2, 3…)
4) Bilangan Rasional (Q) = (a/b, $b \neq 0$, $a,b \in R$).
5) Bilangan Irasional (IR) = (….$\sqrt{2}$, 3, π, 127, 2,134,…..).
6) Bilangan Real (R) = (..-2, -1, 0, 1/2 ,$\sqrt{5}$….).
7) Bilangan Imajiner (Im) = (… $\sqrt{-5}$, $2i$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2}$, ..)
8) Bilangan Kompleks (Z) = ($a+bi$; $a,b \in R$).

Secara historis, munculnya konsep bilangan kompleks pada abad ke-16, yaitu ketika para ahli matematika dihadapkan pada masalah perpangkatan suku banyak (polinomial). Dalam proses penyelesaian masalah tersebut, ternyata terdapat penyelesaian akar-akar dari polinomial yang tidak terdefinsi dalam sistem bilangan real. Misalkan kita ingin mencari penyelesaian dalam sistem atau nilai bilangan real yang memenuhi persamaan $x^2 + 1 = 0$ atau $x^2 + 2x + 5 = 0$, maka tidak ada bilangan real x yang memenuhi masing-masing persaman tersebut. Untuk memberi solusi atau penyelesaian atas persamaan tersebut diperkenalkan sistem bilangan kompleks. Dalam perkembangan selanjutnya, himpunan bilangan kompleks mampu mengekspresikan seluruh akar-akar polinomial.

1. Definisi Bilangan Kompleks

Definisi 2.1

Suatu bilangan kompleks dinyatakan sebagai bilangan yang berbentuk (x + iy) dimana x dan y bilangan real dan i, yang dinamakan satuan khayal (*imaginary unit*) bersifat $i^2 = -1$.

Suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat juga didefinisikan sebagai pasangan terurut dua bilangan real x dan y yang ditulis dengan $z = (x, \ y)$. Jika $z = x + iy = (x, \ y)$ maka x dinamakan bagian real dari z dinyatakan dengan Re (z) dan y dinamakan bagian khayal dari z dan dinyatakan dengan Im (z) dimana $x \in$ R dan $y \in$ Im. Lambang z yang membuat bilangan kompleks disebut variabel kompleks. Pasangan terurut (x, 0) diidentifikasikan sebagai dengan real x, yaitu (x, 0) = x. Selanjutnya pasangan terurut (0, y) dinamakan bilangan imajiner sejati. Sehingga lambang imajiner **i** dapat dituliskan sebagai pasangan terurut (0, 1), yaitu i = (0, 1).

Contoh 2.1

Diberikan bilangan kompleks $z_1 = 2 + 0{,}8i$ dan $z_2 = ½ - 7i$, maka Re (z_1) = 2 dan Im (z_1) = 0,8, serta Re (z_2) = ½ dan Im (z_2) = -7.

Bilangan real adalah himpunan bagian dari bilangan kompleks, maka setiap bilangan real dapat dinyatakan sebagai kompleks dengan bagian Im (z) = 0. Misalnya bilangan 3, 7, π, $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan sebagai: (3 + 0i), (7 + 0i), (π + 0i), ($\sqrt{2}$ + 0i).

Selanjutnya bilangan imajiner juga himpunan bagian dari bilangan kompleks dengan bagian Re (z) = 0, misalnya $\sqrt{5}i$ dapat dinyatakan sebagai $(0 + \sqrt{5}i)$. Bilangan kompleks seperti ini dinamakan bilangan khayal sejati.

Definisi 2.2

Dua bilangan kompleks $(x_1 + iy_1)$ dan $(x_2 + iy_2)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

Contoh 2.2

Tentukan nilai bilangan real x dan y sehingga:

$$\mathbf{3x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i \equiv x - iy + y + ix + 2 - 3i}$$

Solusi:

Dapat dibentuk persamaan identik

$3x - 3iy + 4ix - 2y - 5 - 10i \equiv (x + y + 2) - (y - x + 3)i$

$(3x - 2y - 5) - (3y - 4x + 10)i \equiv (x + y + 2) - (y - x + 3)i$

Sehingga diperoleh:

$3x - 2y - 5 = x + y + 2$ dan	$3y - 4x + 10 = y - x + 3$
$\Leftrightarrow 3x - 2y - x - y = 5 + 2$	$\Leftrightarrow -4x + 3y - y + x = 3 - 10$
$\Leftrightarrow 2x - 3y = 7$ ....(i)	$\Leftrightarrow -3x + 2y = -7$ ....(ii)

Melalui proses eliminasi atau subtitusi dari persamaan (i) dan (ii), diperoleh nilai $x = 7/5$ dan $y = -7/5$.

2. Bilangan Kompleks Sekawan

Definisi 2.3

Jika bilangan kompleks $z = x + iy$, maka sekawan (*konjugate*) dinamakan kawan dari bilangan kompleks z dan didefinisikan sebagai $\bar{z} = x - iy$.

Contoh 2.3

Kawan dari z = 6 + 8i adalah $\bar{z}$ = 6 – 8i, begitupula kawan dari z = 5 – 3i, adalah $\bar{z}$ = 5 + 3i.

Teorema 2.1:

Jika z, z_1, dan z_2 bilangan kompleks maka berlaku:

1) $\bar{\bar{z}} = z$
2) $z + \bar{z} = 2 \text{ Re } (z)$
3) $z - \bar{z} = 2i \text{ Im } (z)$
4) $z\bar{z} = (\text{Re } (z))^2 + (\text{Im } (z))^2$
5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
6) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
7) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
8) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$

Bukti:

Misalkan $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, maka kompleks sekawannya $\bar{z} = x - iy$, $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$, $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$.

1) $\bar{\bar{z}} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z$
2) $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \text{ Re } (z)$
3) $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2yi = 2i \text{ Im } (z)$
4) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = (\text{Re } (z))^2 + (\text{Im } (z))^2$
5) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i}$
$= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)$
$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$
6) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i}$
$= (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)i = (x_1 - y_1 i) - (x_2 - y_2 i)$
$= \overline{z_1} - \overline{z_2}$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)}} = \overline{\left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2 + y^2}\right) i}$

$$= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2 + y^2}\right) i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{(x_1 + y_1 i)}}{\overline{(x_2 + y_2 i)}} = \frac{(x_1 - y_1 i)}{(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 - y_1 i)}{(x_2 - y_2 i)}\, x\, \frac{(x_2 + y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)}$$

$$= \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} - \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2 + y^2}\right) i = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

B. Operasi Dasar Bilangan Kompleks

Sebagaimana operasi pada sistem bilangan real, operasi dasar bilangan kompleks juga meliputi operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Misalkan 2 bilangan kompleks: $z_1 = (x_1 + iy_1)$ dan $z_2 = (x_2 + iy_2)$.

Penjumlahan:

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$

Contoh 2.4: (2 + 3i) + (3 + 5i) = (2 + 3) + (3 + 5)i = 5 + 8i

Pengurangan:

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

Contoh 2.5: (5 + 2i) - (3 + 8i) = (5 - 3) + (2 - 8)i = 2 - 6i

Perkalian:

$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2 y_1i + y_1 y_2i^2$

$= (x_1x_2 - y_1 y_2) + (x_1y_2 + x_2 y_1)i$

Contoh 2.6:

(6 + 5i) (3 + 8i) = (6x3 – 5x8) + (6x8+ 5x3)i = -12 + 63i

Pembagian:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}=\frac{x_1+y_1i}{x_2+y_2i}x\frac{x_2-y_2i}{x_2-y_2i}$$

$$=\frac{x_1x_2+x_2y_1i-x_1y_2i-y_1y_2i^2}{y_1^2-y_2^2i^2};\ i^2=-1,\ z_2\neq 0.$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+(x_2y_1-x_1y_2)i}{y_1^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}+\frac{(x_2y_1-x_1y_2)}{y_1^2+y_2^2}i$$

Contoh 2.7:

$$\frac{4+5i}{2+3i}=\frac{4+5i}{2+3i}\text{x}\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{4\text{x}2+5\text{x}3}{2^2+3^2}+\frac{2\text{x}5-4\text{x}3}{2^2+3^2}i=\frac{23}{13}-\frac{2}{13}i$$

(Pembagian menggunakan prinsip perkalian dengan bilangan kompleks sekawan dari penyebut yang bernilai satu)

Teorema 2.2:

Jika z_1, z_2, dan z_3 adalah anggota bilangan kompleks Z, maka berlaku sifat-sifat **Field** sebagai berikut:

1. $z_1 + z_2 \in Z$ dan $z_1z_2 \in Z$, $\forall\ z_1, z_2 \in Z$	Ketertutupan
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1z_2 = z_2\, z_1$, $\forall\ z_1, z_2 \in Z$	Komutatif
3. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in Z$ dan $(z_1\, z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2\, z_3)$, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in Z$	Asosiatif
4. $z_1\,(z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1z_3$, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in Z$	Distributif
5. $\exists\ 0 \in Z$, sehingga $z+0 = 0+z = z$, $\forall\ z \in Z$	Identitas penjumlahan
6. $\exists\ 1 \in Z$, sehingga $z_1.1 = 1.\ z_1 = z_1$, $\forall\ z_1 \in Z$	Identitas perkalian
7. $\forall\ z = x + iy$, $\exists$, $-z = -x - iy$, sehingga $z + (-z) = 0$,	Inves penjumlahan

8. $\forall$ z = x + iy, $\exists$, $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, i \in Z$ Inves perkalian , sehingga z z^{-1} = 1.

Bukti teorema 2.2 nomor 2, 7, dan 8 sebagai berikut.

(2) Buktikan $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \;\; \forall\, z_1, z_2 \in Z$

Misalkan $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ maka:

$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, selanjutnya

$z_2 + z_1 = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

Jadi $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(7) Buktikan $\forall$ z = x + iy, $\exists$, -z = -x – iy, sehingga z + (-z) = 0

Misalkan $z_1 = (x_1, y_1)$, $\exists$ $z_2 = (x, y)$ sedemikian hingga

$z_1 + z_2 = 0$

$\Leftrightarrow (x_1, y_1) + (x, y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow (x_1 + x, y_1 + y) = (0, 0)$

$\Leftrightarrow x_1 + x = 0$ dan $y_1 + y = 0$

$\Leftrightarrow x = -x_1$ dan $y = -y_1$

Jadi $z_2 = (-x_1, -y_1)$ atau ditulis -z = (-x, -y) = -x – iy.

(8) Buktikan $\forall$ z = x + iy, $\exists$, $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{-y}{x^2+y^2}\, i \in Z$

sehingga z z^{-1} = 1.

Misalkan u = (1, 0) maka $\forall$ z = (x, y) $\neq$ 0, $\exists$ $z_2 = (x_1, y_2)$ sedemikian hingga z z_2 = u.

$\Leftrightarrow z\, z_2 = (x, y)(x_1, y_1) = (1, 0)$

$\Leftrightarrow z\, z_2 = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1 y) = (1, 0)$

$\Leftrightarrow xx_1 - yy_1 = 1$ dan $xy_1 + yx_1 = 0$

$$\begin{cases} xx_1 - yy_1 = 1 \\ yx_1 + xy_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{x}{x^2+y^2}, \text{ dan } y_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

Terlihat bahwa $x^2 + y^2 \neq 0$ dan $z_2 = (x_1, y_2) \neq 0$ atau $z_2 = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i$ ditulis $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i$.

Teorema 2.3:

Untuk setiap bilangan real *a* dan *b* berlaku sifat-sifat:

1) $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$
2) $(a, 0)\,(b, 0) = (ab, 0)$
3) $\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right)$ jika $b \neq 0$
4) $(a, 0) = |a|$

Teorema di atas memperlihatkan bahwa bilangan-bilangan kompleks yang berbentuk $(a, 0)$ mempunyai sifat-sifat yang sama dengan real *a*. Hal ini berarti kita dapat memperlakukan bilangan kompleks $(a, 0)$ = bilangan real *a*. Sebagaimana telah dibahas pada contoh 2.1 bahwa himpunan bilangan real merupakan himpunan bagian dari suatu bilangan kompleks, khususnya bilangan kompleks 0 = (0, 0), 1 = (1, 0) dan i = (0, 1). Sifat ini dibuktikan dengan teorema berikut.

Teorema 2.4:

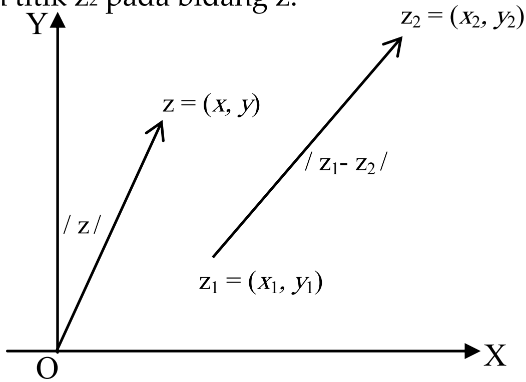
1) $i^2 = -1$,
2) Jika x dan y bilangan real maka $x + iy = (x, y)$

Bukti:

1) $i^2 = (0, 1)\,(0, 1) = (0 - 1) + (0 + 0)\,i = -1 + 0 = (-1, 0) = -1$
2) $x + iy = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0) = (x, 0) + (0 - 0, 0 + y)$
   $= (x, 0) + (0, y) = (x, y)$.

C. Nilai mutlak dan sifat-sifat nilai mutlak

Nilai mutlak atau modulus suatu dari bilangan kompleks z = x + iy = (x, y) didefinisikan sebagai bilangan real non-negatif $+\sqrt{x^2+y^2}$ ditulis $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$. Tafsiran secara geometri untuk $|z| = |x+iy|$, menyatakan panjang vektor (x, y) yaitu jarak dari titik asal **o** terhadap titik z = (x, y). Akibat dari definisi tersebut, jika $z_1 = (x_1, y_1)$ dan $z_2 = (x_2, y_2)$ maka $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$, menyatakan jarak antara titik z_1 dan titik z_2 pada bidang z.



Gambar 2.1 Representasi $|z|$ dan $|z_1 - z_2|$

Selanjutnya jika $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ dan $|z_1 - z_2| = |r| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ dengan r bilangan real positif dapat dinyatakan sebagai lingkaran berpusat di titik z_1 berjari-jari r. Begitupula jika $|z_1 - z_2| < |r|$ menyatakan daerah di dalam lingkaran yang berpusat titik z_1 berjari-jari r.

Contoh 2.8:

Jika diberikan bilangan kompleks $z_1 = 3 + 4i$ dan $z_2 = 9 + 12i$, maka tentukan $|z_1|$ dan $|z_1 - z_2|$.

Jawab: $|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, dan

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(3-9)^2 + (4-12)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10.$$

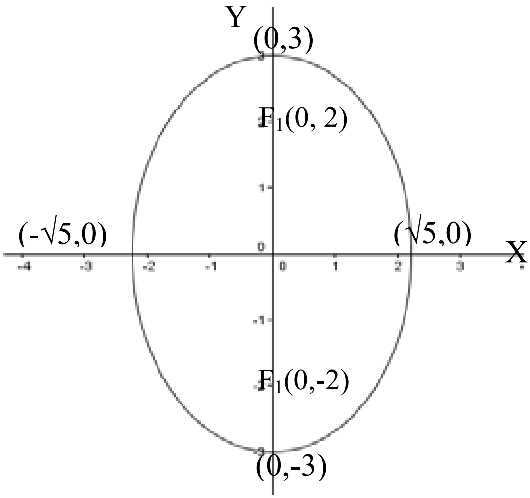
Contoh 2.9:

Tentukan dan gambarkan grafik irisan kerucut yang dinyatakan dengan persamaan $|z+2i| + |z-2i| = 6$.

Jawab: Misalkan $z = x + iy$

$$|z+2i| + |z-2i| = 6$$
$$|(x+iy)+2i| + |(x+iy)-2i| = 6$$
$$|x+(y+2)i| + |x+(y-2)i| = 6$$
$$\sqrt{x^2+(y+2)^2} + \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 6$$
$$\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2$$
$$x^2+(y+2)^2 = (36 - 12\sqrt{x^2+(y-2)^2} + (x^2+(y-2)^2)$$
$$x^2+y^2+4y+4 = 36 - 12\sqrt{x^2+(y-2)^2} + x^2+y^2-4y+4$$
$$12\sqrt{x^2+(y-2)^2} = -8y+36 \text{ (dibagi 4)}$$
$$\left(3\sqrt{x^2+(y-2)^2}\right)^2 = (-2y+9)^2$$
$$9(x^2+(y-2)^2) = 4y^2-36y+81$$
$$9(x^2+y^2-4y+4) = 4y^2-36y+81$$
$$9x^2+9y^2-36y+36 = 4y^2-36y+81$$
$$9x^2+9y^2-36y-4y^2+36y = 81-36 = 45$$
$$9x^2+5y^2 = 45 \text{ (kedua ruas dibagi 45)}$$

Sehingga diperoleh persamaan: $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$. Dengan demikian persamaan $|z+2i| + |z-2i| = 6$, merepresentasikan daerah di dalam elips dengan pusat (0,0), panjang sumbu utama 6, puncak a = $\pm\sqrt{5}$ atau $\{(\sqrt{5},0)$ dan $(-\sqrt{5},0)\}$ dan b = ± 3 atau $\{(0,3)$ dan $(0,-3)\}$, titik fokus c = $\pm\sqrt{b^2-a^2} = \pm\sqrt{9-5}$ $= \pm\sqrt{4} = \pm 2$ atau F_1 (0, 2) dan F_2 (0, -2).



Gambar 2.2 Representasi $|z+2i|+|z-2i|=6$

Teorema 2.5:

Jika z, z_1, dan z_2 bilangan kompleks maka berlaku:

1) $|z|^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$
2) $|z| = |\bar{z}|$
3) $|z|^2 = z\bar{z}$
4) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$
5) $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$
6) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, jika $z_2 \neq 0$

8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

9) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

10) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

<u>Bukti:</u>

Misalkan z = x + iy, maka

1) $|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$

2) $\bar{z} = x - iy$, maka $|\bar{z}| = (\sqrt{x^2 + (-y)^2})^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

3) $|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = z\bar{z}$

4) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| = |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$

5) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\mathrm{Im}(z)| \geq \mathrm{Im}(z)$

6) $|z_1 z_2| = |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| = |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)|$

$$= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}.\sqrt{(x_2^2 + y_2^2)} = |z_1||z_2|$$

Cara lain

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 . \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$= (z_1 \overline{z_1}).(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Jadi $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, jika $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right|^2 = \left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)\left(\overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}}\right) = \left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)\left(\overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}}\right)$$

$$= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{(z_1 \overline{z_1})}{(z_2 \overline{z_2})} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

8) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}$$

Catatan:

$$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1 . \overline{z_2}| = 2|z_1||\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

9) Ambil $z_1 = (z_1 - z_2) + z_2$, gunakan pembuktian 8)

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

10) Ambil $z_1 = (z_1 + z_2) - z_2$, gunakan pembuktian 8)

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2|$$

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$

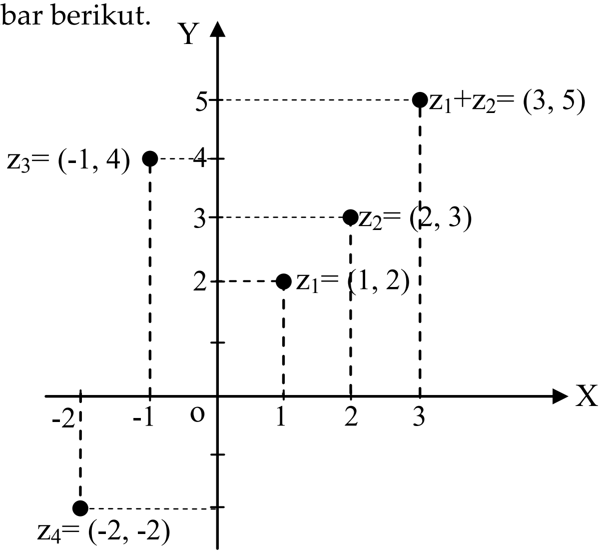
$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

D. Penyajian Bilangan Kompleks

1. Koordinat Kartesius

Menurut definisi bahwa bilangan kompleks z = x + iy dapat dinyatakan secara geometri sebagai suatu titik (x, y) pada bidang Cartesian. Hal ini berarti terdapat korespondensi antara bilangan kompleks dengan satu dan hanya satu titik pada bidang Cartesian dan sebaliknya. Sumbu x pada bidang Cartesian merepresentasikan sumbu real dan sumbu y dinamakan sumbu imajiner dengan satuan i. Representasi bilangan kompleks z ditunjukkan dengan titik z. Bidang Cartesian ini biasa disebut bidang kompleks atau bidang **Argand.**

Misalkan z_1= 1+2i = (1, 2), z_2= 2+3i = (2, 3), z_3= -1+4i = (-1, 4), z_4= -2-2i = (-2, -2) dan z_1+z_2 = (3, 5), disajikan pada gambar berikut.

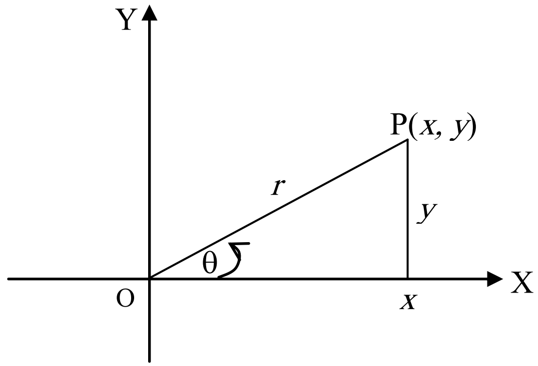


Gambar 2.3: Bidang Kompleks

Dari gambar 2.3, panjang z_1z_2 ditentukan sebagai jarak (modulus) dari titik z_1 ke titik z_2, yang dinyatakan dengan $|z_1 - z_2| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

2. Koordinat Kutub (Polar)

Jika P adalah suatu titik di bidang kompleks yang diasosiasikan dengan bilangan kmpleks (x, y) atau x + iy, maka x = r cos θ dan y = r sin θ, sebagaimana di sajikan pada gambar 2.4.



Gambar 2.4 Koordinat Kutub

Dimana, $r = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dinamakan modulus atau nilai mutlak dari z = x + iy dan θ dinamakan amplitude atau argument dari z = x + iy adalah sudut antara garis OP dengan sumbu x positif. Untuk x = r cosθ dan y = r sinθ mengakibatkan z = x + iy = r cos θ + i r sin θ = r (cos θ +isin θ) yang dinamakan bentuk kutub bilangan kompleks, r dan θ dinamakan koordinat kutub. Apabila penulisan (cos θ +isin θ) disingkat menjadi **cis θ**, maka bilangan kompleks z dapat dituliskan sebagai **z = r cis θ.**

Akibat lain, jika **z = r cis θ = r (cos θ + i sin θ),** maka

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}.$$

Contoh 2.10:

Nyatakan bilangan kompleks berikut ini di dalam bentuk kutub:

(a) $z = 1 + i$ (b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

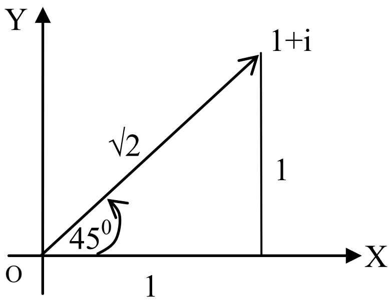
Jawab:

(a) Dari bilangan kompleks $z = 1 + i$ ditentukan modulus dan θ sebagai berikut.

$r = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ dan $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$, sehingga $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dengan demikian $z = 1 + i$ dapat dituliskan sebagai

$$z = \sqrt{2}\,\text{Cis}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos 45^0 + i\,\sin 45^0\right)$$

Secara grafik koordinat kutub bilangan $z = 1 + i$, disajikan:



Gambar 2.5 Koordinat Kutub $z = 1 + i$

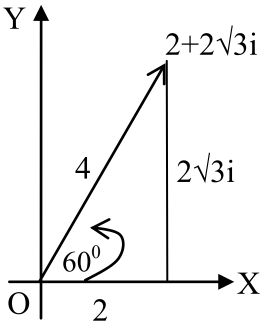
(b) Dari bilangan kompleks $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ ditentukan modulus dan θ sebagai berikut.

$r = \left|\,2 + 2\sqrt{3}i\,\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$, dan argumen:

$\tan\theta = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \text{arc}\tan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, sehingga:

$$z = 4\,\text{Cis}\,\frac{\pi}{3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\cos 60^0 + i\,\sin 60^0\right)$$

Secara grafik koordinat kutub $z = 2 + 2\sqrt{3}i$, disajikan:



Gambar 2.6 Koordinat Kutub, $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

a. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Kutub Bilangan Kompleks

Misalkan bilangan dua bilangan kompleks:

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *dan*

$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

(i) $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

(ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

Bukti :

(i) $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\sin\theta_1 + i\sin\theta_2\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\cos\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

terbukti.

$$(ii)\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

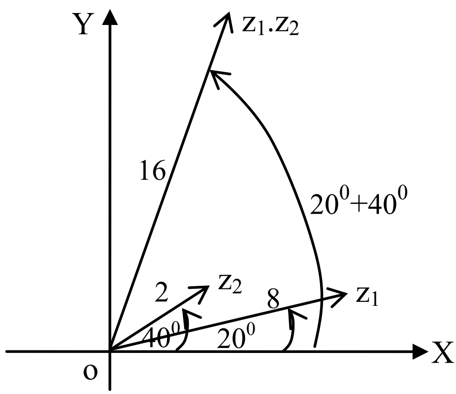
Contoh 2.11:

Jika $z_1 = 8\ (\cos 20^0 + i \sin 20^0) = 8\ cis\ 20^0$ dan

$z_2 = 2(\cos 40^0 + \ i \sin 40^0) = 2\ cis\ 40^0$

$$\begin{aligned} z_1 . z_2 &= (8\ cis\ 20^0)(2\ cis\ 40^0) \\ &= 16\ cis\ 60^0 \\ &= 16(\cos 60^0 + \ i \sin 60^0) \\ &= 16\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 8 + 8\sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Secara grafik $z_1.z_2$ disajikan pada gambar 2.7:



Gambar 2.7: Grafik $z_1.z_2$

Contoh 2.12:

Jika $z_1 = 16(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$ & $z_2 = 4(\cos 120^0 + i \sin 120^0)$

tentukan $\dfrac{z_1}{z_2}$?

<u>Jawab</u> :

$z_1 = 16(\cos 180^0 + i \sin 180^0) = 16\,\mathrm{Cis}\,180^0$

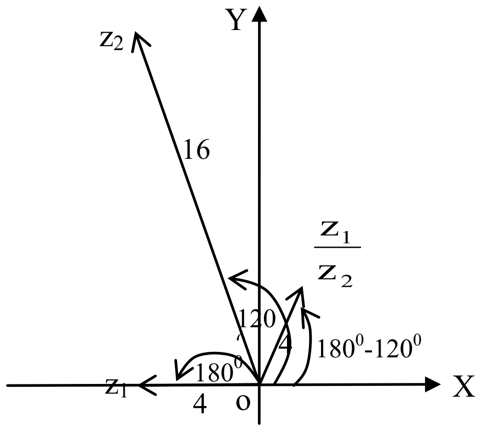
$z_2 = 4(\cos 120^0 + i \sin 120^0) = 4 \text{Cis} 120^0$, maka :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{16 \text{Cis} 180^0}{4 \text{Cis} 120^0} = \frac{16}{4} \text{Cis}(180^0 - 120^0) = 4 \text{Cis} 60^0$$

$$= 4\{\cos 60^0 + i \sin 60^0\}$$

$$= 4\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$\frac{z_1}{z_2} = 2 + 2\sqrt{3}i$. Sehingga secara grafik $\frac{z_1}{z_2}$:



Gambar 2.8: Grafik $\frac{z_1}{z_2}$

b. Pemangkatan Bilangan Kompleks (Dalil De'Moivre)

Berdasakan (i) perkalian pada bagian **a** di atas dapat diperluas sebanyak perkalian bilangan kompleks 'n' kali, yaitu

$$z_1 . z_2 . ... z_n = r_1 . r_2 ... r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_n)]$$

Andaikan $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots\ldots = z_n = z$, perkalian bilangan kompleks sebanyak n kali maka

$$z.z\ldots z = r.r.r[\cos(\theta+\theta+\cdots+\theta) + i\sin(\theta+\theta+\cdots+\theta)]$$
$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$
$$\boldsymbol{z^n = r^n\, cis\,(n\theta)}$$

Bentuk terakhir dari perpangkatan bilangan kompleks ini seringkali dinamakan Terema **De'Moivre**.

Contoh 2.13:

Diberikan bilangan kompleks $z = 2(\cos 50^0 + i\sin 50^0)$, tentukan z^6.

Jawab:

$$z^6 = \left\{2(\cos 50^0 + i\sin 50^0)\right\}^6 = \left\{2\,\mathrm{Cis}\,50^0\right\}^6 = 2^6\,\mathrm{Cis}\,(6.50^0)$$
$$= 64\,\mathrm{Cis}\,300^0 = 64\left\{\cos 300^0 + i\sin 300^0\right\}$$
$$= 64\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right\} = 32 - 32\sqrt{3}\,i$$

Contoh 2.14:

Tentukan $(2+2i)^7$

Jawab: Misalkan z = 2+2i

$r = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, dan argumen diperoleh melalui $\tan\theta = \frac{2}{2} = 1 \Leftrightarrow \theta = \mathrm{arc\,tan}\,1 = \frac{\pi}{4}$. Sehingga bilangan kompleks $2+2i = 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ maka

$$(2+2i)^7 = \left\{2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]\right\}^7 = 1024\sqrt{2}\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right]$$
$$= 1024\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right] = 1024 - 1024i$$

Contoh 2.15:

Selesaikan soal berikut $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

Jawab: Misalkan $z_1 = 1+\sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ dan

$\theta = arc\tan\frac{\sqrt{3}}{1} = 60^0$ sehingga $z_1 = 2$ cis 60^0, selanjutnya

$z_2 = 1-\sqrt{3}i \rightarrow r = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ dan

$\theta = arc\tan-\frac{\sqrt{3}}{1} = 300^0$ sehingga $z_2 = 2$ cis 300^0

Sehingga $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\dfrac{2\text{ cis }60^0}{2\text{ cis }300^0}\right)^{10} = [\text{cis}\,(60^0-300^0)]^{10}$

$$
\begin{aligned}
&= [\text{cis}\,(-240^0)]^{10}\\
&= 1^{10}\text{cis}\,(10\times -240^0)\\
&= \text{cis}\,(-2400^0)\\
&= \text{cis}\,(-240^0 - 6\times 360^0)\\
&= \text{cis}\,(-240^0)\\
&= \cos(-240^0) + \text{i}\sin(-240^0)\\
&= \cos 240^0 - \text{i}\sin 240^0 = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\text{i}
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Terema **De'Moivre**, bahwa jika $z = r$ Cisθ, maka $z^n = r^n$ Cis $(n\theta)$. Selanjutnya dapat diperlihatkan bahwa untuk $n \in$ Asli, maka $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$. Jika $z =$ **r cis θ** $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

berlaku $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\left\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right\}$, maka

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)} \cdot \frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{(\cos n\theta - i\sin n\theta)}{r^n(\cos^2 n\theta + i\sin^2 n\theta)} = \frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta)$$

$$= \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] = \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

Contoh 2.16:

Hitung $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6}$

Jawab: Misalkan $z = -\sqrt{3}+i$

$r = \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$, dan argumen diperoleh $\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta = \text{arc}\tan\frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ atau $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Sehingga bilangan kompleks $z = -\sqrt{3}+i = 2\left[\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)\right]$

$$(-\sqrt{3}+i)^{-6} = \left\{2\left[\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)\right]\right\}^{-6}$$

$$= 2^{-6}[\cos(-5\pi) + i\sin(-5\pi)]$$

$$= \frac{1}{64}[\cos(5\pi) - i\sin(5\pi)] = \frac{1}{64}[\cos(\pi) - i\sin(\pi)]$$

$$= \frac{1}{64}[-1-0] = -\frac{1}{64}$$

Cara lain gunakan $\theta = -\frac{\pi}{6}$

$$(-\sqrt{3}+i)^{-6} = \left\{2\left[\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right]\right\}^{-6}$$

$$= 2^{-6}\left[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left[\cos\pi - i\sin\pi\right] = \frac{1}{64}\left[-1-0\right] = -\frac{1}{64}$$

Contoh 2.17:

Buktikan bahwa $\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8\cos^2\theta - 4\cos\theta$

<u>Bukti:</u> Menurut Terema **De'Moivre**

$(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$ (gunakan rumus binomial)

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta(i\sin^2\theta) +$

$4\cos\theta(i\sin^3\theta) + (i\sin\theta)^4$

$= \cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin\theta^4$

$= \cos^4\theta + \sin\theta^4 - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$

Karena itu, $i\sin 4\theta = i(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta)$ atau

$\Leftrightarrow \sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Sehingga: $\dfrac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = \dfrac{4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta}{\sin\theta} = 8\cos^2\theta - 4\cos\theta$

c. Bentuk Akar Bilangan Kompleks

Suatu bilangan kompleks w dinamakan akar ke –n dari bilangan kompleks z yaitu $w^n = z$, maka $w = z^{\frac{1}{n}}$. Menurut dalil De'Moivre, jika n bilangan bulat positif, maka:

$$z^{\frac{1}{n}} = (r\,Cis\theta)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\,Cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k=0,1,2,3......n-1$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+k.360^0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+k.360^0}{n}\right)\right]$$

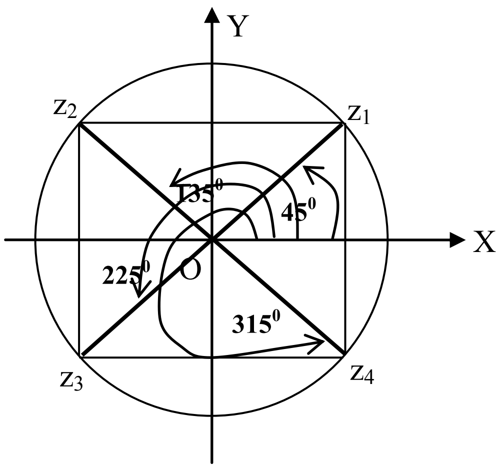
Contoh 2.18:
Diberikan $z^4 = -16$, tentukan semua harga z!
Jawab :

$$z = (-16)^{\frac{1}{4}} = (16)^{\frac{1}{4}} \times (-1)^{\frac{1}{4}} = 2(-1)^{\frac{1}{4}}$$
$$= 2(\text{cis } 180^0)^{\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{180^0 + k.360^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{180^0 + k.360^0}{4}\right)\right]$$
$$= 2[\cos(45^0 + k.90^0) + i\sin(45^0 + k.90^0)]$$

Subtitusi nilai k = 0, 1, 2, dan 3

$$k = 0 \rightarrow z_1 = 2(\cos 45^0 + i\sin 45^0) = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$k = 1 \rightarrow z_2 = 2(\cos 135^0 + i\sin 135^0) = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$$
$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$k = 2 \rightarrow z_3 = 2(\cos 225^0 + i\sin 225^0) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$k = 3 \rightarrow z_4 = 2(\cos 315^0 + i\sin 315^0) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Akar-akar $z^4 = -16$, dapat disajikan sebagai titik-titik sudut suatu segi banyak beraturan sebagai berikut.



Gambar 2.9 Representasi Titik z_1, z_2, z_3, dan z_4

Contoh 2.19:

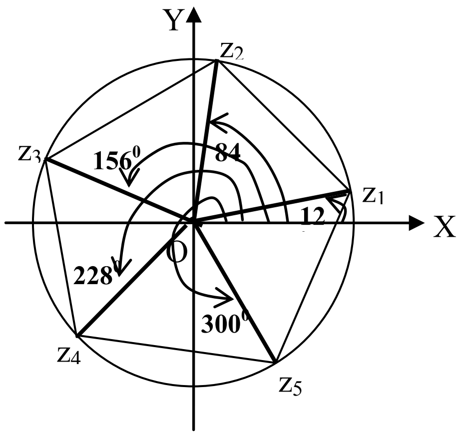
Diberikan $z = 1 + \sqrt{3}i$, tentukan $z^{\frac{1}{5}}$

Jawab: Dari contoh 2.15 telah diperoleh $z = 1 + \sqrt{3}i = 2 \text{ Cis } 60^0$, sehingga:

$$z^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} \left(\frac{60^0 + k.360^0}{5} \right) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + k.72^0), k = 0,1,2,3.4$$

$$\text{untuk } k = 0 \Rightarrow z_1 = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + 0.72^0) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0)$$
$$\text{untuk } k = 1 \Rightarrow z_2 = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + 1.72^0) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (84^0)$$
$$\text{untuk } k = 2 \Rightarrow z_3 = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + 2.72^0) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (156^0)$$
$$\text{untuk } k = 3 \Rightarrow z_4 = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + 3.72^0) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (228^0)$$
$$\text{untuk } k = 4 \Rightarrow z_5 = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (12^0 + 4.72^0) = \sqrt[5]{2} \text{ Cis} (300^0)$$

Nilai-nilai untuk $z^{\frac{1}{5}}$ dari $z = 1 + \sqrt{3}i$, direpresentasikan dalam bentuk titik-titik sudut segi-5 beraturan dengan modulus sebesar $\sqrt[5]{2}$, disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.10 Representasi Titik z_1, z_2, z_3, z_4 dan z_5.

Contoh 2.20:

Tentukan akar kuadrat: $8+4\sqrt{5}i$.

Jawaban:

$$r=\sqrt{8^2+(4\sqrt{5})^2}=\sqrt{64+80}=\sqrt{144}=12.$$

$\cos\theta=\dfrac{8}{12}$ dan $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{5}}{12}$, sehingga dapat ditulis:

$$8+4\sqrt{5}i=12(\cos\theta+i\sin\theta)=12\{\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8+4\sqrt{5}i}=\sqrt{12}\left\{\cos\frac{(\theta+2k\pi)}{2}+i\sin\frac{(\theta+2k\pi)}{2}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8+4\sqrt{5}i}=\sqrt{12}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)\right\}$$

Untuk $k=0$, maka $\sqrt{8+4\sqrt{5}i}=\sqrt{12}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$....(i)

Untuk $k=1$, maka $\sqrt{8+4\sqrt{5}i}=\sqrt{12}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}$....(ii)

Catatan:

Dalam Trigonometri berlaku:

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ dan $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$, sehingga

$\cos\theta=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$ dan $\cos\theta=1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{8}{12}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{20}{12}\right)}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{8}{12}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{\left(\frac{4}{12}\right)}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$$

Karena θ adalah sudut di kuadran pertama, maka $\frac{\theta}{2}$ tetap di kuadran pertama, karena itu $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$ dan $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$.

Dari (i): $\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{12}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$

$$\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{12}\left\{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}i\right\} = \sqrt{10} + \sqrt{2}i, \text{ dan}$$

dari (ii) $\sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{12}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right\}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{12}\left\{-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8+4\sqrt{5}i} = \sqrt{12}\left\{-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}i\right\} = -\sqrt{10} - \sqrt{2}i$$

Jadi akar kuadrat $8+4\sqrt{5}i$ adalah $\sqrt{10}+\sqrt{2}i$ dan $-\sqrt{10}-\sqrt{2}i$.

"Akar Pangkat-n Dari Satuan"

Contoh 2.21:

Tentukan semua akar pangkat-7 dari satuan.

Jawab:

$z^7 = 1 = \text{Cis}\,(k.360) = \cos(k.360^0) + i\sin(k.360^0) = e^{k.360\,i}$

$$z = \cos\left(\frac{k.360^0}{7}\right) + i\sin\left(\frac{k.360^0}{7}\right) = e^{\frac{k.360^0}{5}i},$$

Untuk, k = 0,1,2,3,4,5,6,7

Jadi akar-akarnya adalah:

$$\left(1,\ e^{\frac{.360^0}{7}i}, e^{\frac{720^0}{7}i}, e^{\frac{1080^0}{7}i}, e^{\frac{1440^0}{7}i}, e^{\frac{1800^0}{7}i}, e^{\frac{2160^0}{7}i}\right)$$

d. Bentuk Euler Bilangan Kompleks

Dalam kalkulus dasar pembuktian rumus Euler menggunakan deret Maclaurin untuk Cosθ, Sinθ, dan e^x dengan mengganti x dengan iθ, sebagai berikut:

Deret Maclaurin diyatakan sebagai brikut:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0) \text{ dengan } a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

Menyebabkan $f(x) = e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}........$$

Misalkan $x = i\theta$

$$e^{i\theta} = \frac{(i\theta)^0}{0!} + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}........$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!}.....\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!}.....\right)$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, yang dinamakan sebagai Rumus Euler. Rumus ini mengaitkan bentuk pangkat bilangan dasar "e" dan bentuk kutub bilangan kompleks.

Sehingga bentuk Euler bilangan kompleks adalah $e^{i\theta} = \text{Cis}\,\theta$. Selanjutnya, jika z = x + iy maka:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x\text{Cis}\,y = e^x(\cos y + i\sin y)\ .$$

Dengan demikian penyajian bilangan kompleks z dalam bentuk rumus Euler dapat ditempuh melalui proses berikut.

(i) $z = x + yi \rightarrow \theta = arc\frac{y}{x}$ dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) $z = r\ cis\ \theta$

(iii) $z = r\ e^{i\theta}$

Selanjutnya jika $z_1 = r_1\, e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$, maka berlaku:

(i) $z_1 z_2 = (r_1\, e^{i\theta_1})(r_2\, e^{i\theta_2}) = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

(ii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(r_1\, e^{i\theta_1})}{(r_2\, e^{i\theta_2})} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Penulisan $z = r e^{i\theta}$ adalah bentuk eksponen dari bilangan kompleks z dan sebagai implikasinya bilangan kompleks sekawan dari z adalah:

$$\bar{z} = r(\cos\ \theta - i \sin \theta) = r\{\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)\} = r\, e^{-i\theta}$$

Contoh 2.22:

Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk polar dan eksponen.

a) $2 - 2i$ b) $-2\sqrt{3} - 2i$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2}$

Jawab:

a) $z = 2 - 2i$

$$r = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1 \Leftrightarrow \theta = \text{arc tan}(-1) = 315^0,\ \text{z di kuadran empat}$$

Sehingga $z = 2\sqrt{2}\, \text{Cis}\, 315^0 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{7}{4}\pi i}$

b) $z = -2\sqrt{3} - 2i$

$$r = \left| -2\sqrt{3} - 2i \right| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4,$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \text{arc tan}\,(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 210^0,$$

z di kuadran tiga, sehingga $z = 4\,\text{Cis}\,210^0 = 4\,e^{\frac{7}{6}\pi i}$

c) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2}$

$$r = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}\,,$$

$$\tan\theta = \frac{-3/2}{\sqrt{3}/2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \theta = \text{arc tan}\,(-\sqrt{3}) = 300^0,$$

z di kuadran 4, sehingga $z = \sqrt{3}\,\text{Cis}\,300^0 = \sqrt{3}\,e^{\frac{5}{3}\pi i}$

Contoh 2.23:

Sederhanakan!

a) $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)$ b) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)}$ c) $\dfrac{(-2+2\sqrt{3}i)}{(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i)}$

<u>Jawab:</u>

a) $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) = (2e^{60i})(2e^{300i}) = 4e^{(60+300)i} = 4e^{360i}$

$$= 4\,\text{Cis}\,360 = 4(\cos 360 + i\sin 360) = 4$$

b) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)} = \dfrac{2e^{60i}}{2e^{300i}} = e^{(60-300)i} = e^{-240i}$

$$\cos(-240) + i\sin(-240) = \cos(240) - i\sin(240) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

c) $\dfrac{(-2+2\sqrt{3}i)}{(\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i)} = \dfrac{4e^{120i}}{3e^{30i}} = \dfrac{4}{3}e^{(120-30)i} = \dfrac{4}{3}e^{90i}$

$\dfrac{4}{3}e^{90i} = \dfrac{4}{3}\text{Cis }90 = \dfrac{4}{3}(\cos 90 + i\sin 90) = \dfrac{4}{3}$.

Contoh 2.24:

Tunjukkan bahwa:

(a) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ dan $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(c) $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

Jawab:

(a) Menurut rumus Euler

(i) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, (ii) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

(a) Kurangkan (i) dan (ii)

$$\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \underline{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta} \; - \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \end{array}$$

, Sehingga, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(b) Jumlahkan (i) dan (ii)

$$\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \underline{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta} \; + \\ e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \end{array}$$

, Sehingga, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

(c) $\sin^3\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \dfrac{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3}{8i^3}$

$$= -\frac{1}{8i}\left\{(e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right\}$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta})$$

$$= -\frac{1}{8i}(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - \frac{1}{8i}(-3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta})$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta})}{2i} + \frac{3}{4}\frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i}$$

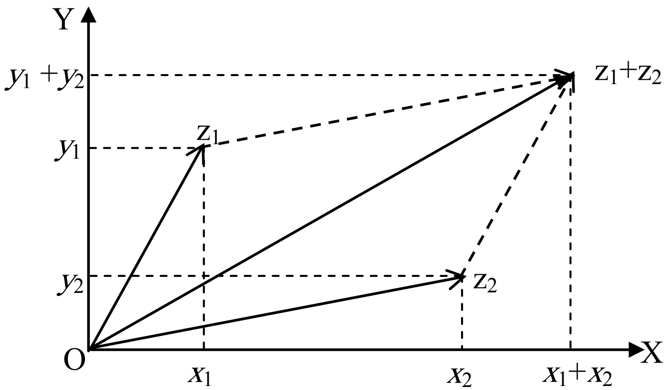
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right) = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$$

3. Tafsiran Vektor Bilangan Kompleks

Penyajian bilangan kompleks $z = x + yi$ pada bidang Cartesian sebagai pasangan terurut (x, y) menyatakan vektor dengan titik pangkal O dan ujungnya di suatu titik (x, y). Dengan demikian bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat dipandang sebagai vektor (x, y).

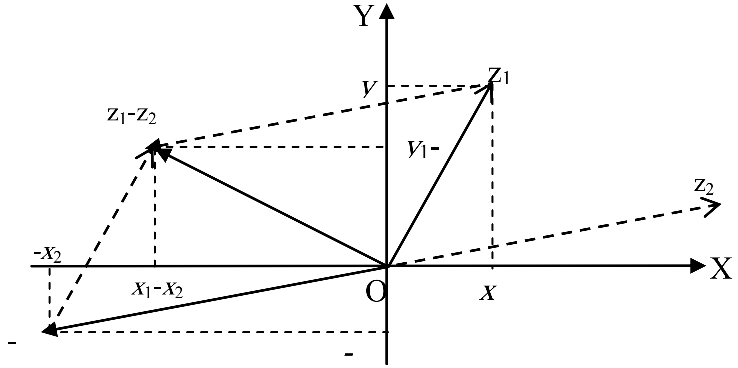
a. Penjumlahan dan pengurangan vektor

Penjmlahan bilangan kompleks diasosiasikan dengan hukum jajaran genjang untuk penjumlahan dan pengurangan vektor. Gambar berikut memperlihatkan arti vektor dari bilangan kompleks z_1, z_2, z_1+z_2 dan $z_1- z_2$.



Gambar 2.11: Grafik z_1, z_2, z_1+z_2

Dengan menerapkan definisi: $z_1-z_2 = z_1+(-z_2)$, maka secara grafik z_1-z_2 disajikan sebagai berikut.



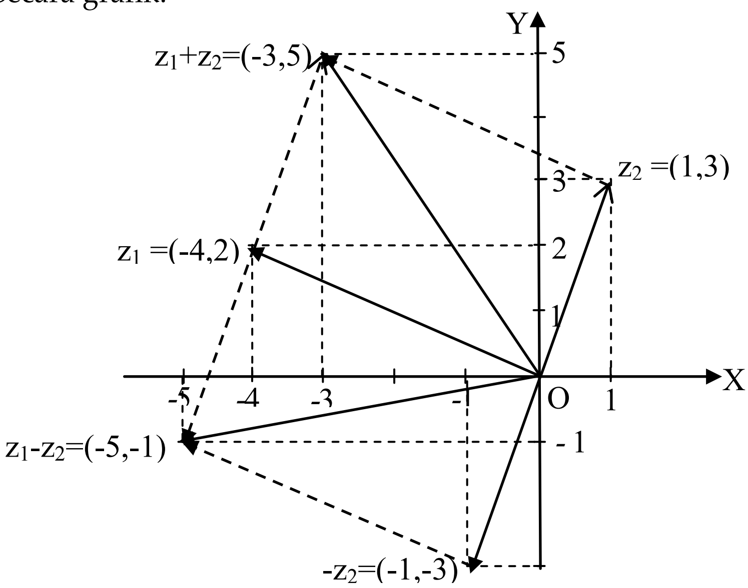
Gambar 2.12: Grafik z_1, $-z_2$, $z_1 - z_2$

Contoh 2.25: Diketahui bilangan kompleks $z_1 = -4+2i$, $z_2 = 1+3i$. gambarkan bilangan kompleks z_1, z_2, z_1+z_2 dan $z_1 - z_2$.

Jawab: Secara analitis:

$z_1+z_2=(-4+2i)+(1+3i)=-3+5i$ dan $z_1-z_2=(-4+2i)-(1+3i)=-5-i$.

Secara grafik:



Gambar 2.13: Grafik z_1, z_2, $-z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$

Contoh 2.26:

Diketahui bilangan kompleks z_1 = 4+4i, z_2 = 2+4i, z_3 = -5-3i, dan z4 = -1+6i, gambarkan bilangan kompleks $z_1+z_2+z_3+z_4$.

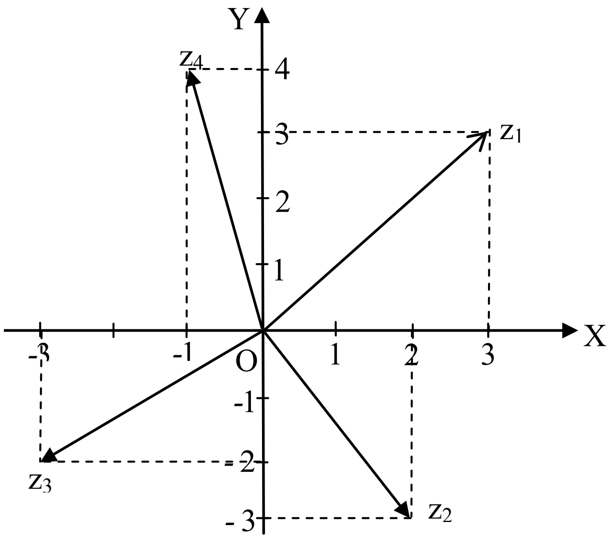
<u>Jawab:</u>

Secara analitis:

$z_1+z_2+z_3+z_4$ = (3+3i)+(2-3i)+(-3-2i)+(-1+4i) = 1+2i

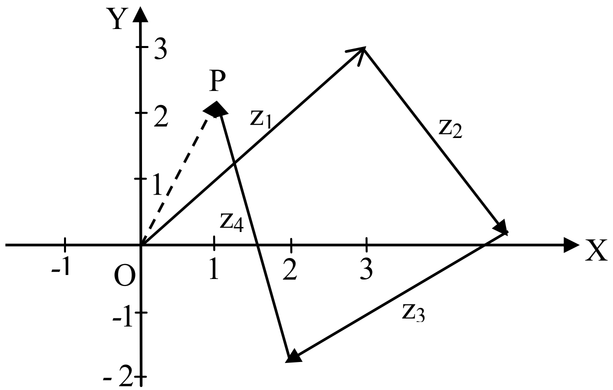
Secara grafik:

Dengan menggunakan metode poligon, pada titik ujung z_1 lukislah vektor z_2, ujung vektor z_2 lukislah vektor z_3, dan pada ujung vektor z_3, lukislah vektor z_4.



Gambar 2.14: Grafik titik z_1, z_2, z_3, dan z_4

Sehingga $z_1+z_2+z_3+z_4$ = 1+2i, ditunjukkan oleh vektor **OP** yang dinamakan *resultan*, menyatakan vektor dengan titik pangkal z_1 dan titik ujung (terminal) z_4.

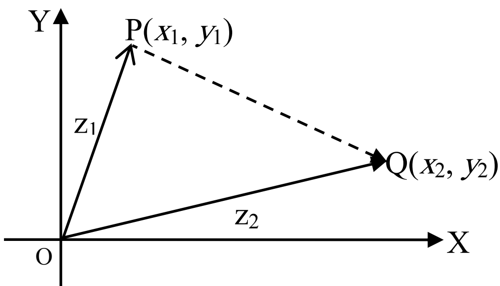


Gambar 2.15: Grafik $z_1+z_2+z_3+z_4$

b. Norma Vektor

Apabila bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat dipandang sebagai vektor (x, y), maka panjang vektor z dinamakan norma **z** dan dinyatakan dengan $|z|$. Sebagaimana pembahasan entang nilai mutlak bilangan kompleks, norma **z** adalah nilai mutlak dari bilangan kompleks **z**, pada ruang dimensi-2 yaitu $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tafsiran geometri $|z| = |x + iy|$, menyatakan panjang vektor (x, y) yaitu jarak dari titik asal **o** terhadap titik ujung, z = (x, y).

Misalkan vektor posisi $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ berturut-turut dinyatakan oleh z_1 dan z_2, sebagaimana gambar berikut.



Gambar 2.16 Vektor posisi P dan Q

Dari gambar 2.3, diperoleh bahwa **OP** + **PQ** = **OQ**, atau **PQ = OQ-OP =** $z_1 - z_2$ =(x_1+ iy_1)- (x_2+ iy_2) = (x_2 - x_1)+ i(y_2- y_1). Sehingga jarak antara P dan Q pada dimensi-2 diberikan oleh jarak P dan Q, yaitu $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Jika vektor, P($x_1$, y_1, z_1) dan Q (x_2, y_2, z_2) pada dimensi-3, maka jarak P dan Q, $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

c. Hasil Kali Titik dan Silang

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ dua bilangan kompleks, maka hasil kali titik (*dot product*) dari z_1 dan z_2 dilakukan dengan cara:

(i) $z_1 \circ z_2 = |z_1||z_2| \cos\theta$ (definisi)

(ii) $z_1 \circ z_2 = \operatorname{Re}\left\{\overline{z_1}\, z_2\right\}$

(iii) $z_1 \circ z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$

(iv) $z_1 \circ z_2 = \frac{1}{2}\left\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\right\}$

Selanjutnya kasil kali silang (*cross product*)) dari z_1 dan z_2 didefinisikan sebagai:

(i) $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \sin\theta$ (definisi)

(ii) $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}\left\{\overline{z_1}\, z_2\right\}$

(iii) $z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$

(iv) $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2i}\left\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\right\}$

Contoh 2.27:

Tentukan hasil kali titik dan hasil kali silang bilangan kompleks berikut: $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 1 + 2i$.

Jawab:

(i) $z_1 \circ z_2 = \operatorname{Re}\left\{\overline{z_1}\, z_2\right\}$

$$= \text{Re}\,(2 + 4i - 3i - 6i^2)$$
$$= \text{Re}\left(2 + i - \left(6(-1)\right)\right) = \text{Re}\,(2 + 6 + i)$$
$$= \text{Re}\,(8 + i) = 8$$

(ii) $z_1 \circ z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$
$$= (2.1 + 3.2) = 2 + 6 = 8$$

(iii) $z_1 \circ z_2 = \dfrac{1}{2}\left\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\right\}$
$$= \tfrac{1}{2}\left((2 - 3i)(1 + 2i) + (2 + 3i)(1 - 2i)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left((8 + i) + (2 - 4i + 3i - 6i^2)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left((8 + i) + \left(2 - i - 6(-1)\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left((8 + i) + (8 - i)\right) = \tfrac{1}{2}(16) = 8$$

Selanjutnya kasil kali silang (*cross product*)) z_1 dan z_2 :

(i) $z_1 \times z_2 = \text{Im}\left\{\overline{z_1}\, z_2\right\}$
$$z_1 \times z_2 = \text{Im}\,\{\overline{z_1} z_2\} = \text{Im}\left((2 - 3i)(1 + 2i)\right)$$
$$= \text{Im}\,(2 + 4i - 3i - 6i^2) = \text{Im}(8 + i) = 1$$

(ii) $z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$
$$= (2.2 - 3.1) = (4 - 3) = 1$$

(iii) $z_1 \times z_2 = \dfrac{1}{2i}\left\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\right\}$
$$= \frac{1}{2i}\{(2-3i)(1+2i) - (2+3i)(1-2i)\}$$
$$= \tfrac{1}{2i}\left((2 + 4i - 3i - 6i^2) - (2 - 4i + 3i - 6i^2)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2i}\left((8 + i) + \left(2 - i - 6(-1)\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{2i}\left((8 + i) - (8 - i)\right) = \tfrac{1}{2i}(2i) =$$
$$1$$

4. Persamaan Suku Banyak

Suatu persamaan suku banyak berbentuk :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

dimana $a_0 \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ bilangan kompleks yang diketahui dan n bilangan bulat positif yang dinamakan derajat persamaan.

Suatu teorema penting yang disebut teorema dasar aljabar menyatakan bahwa setiap persamaan suku banyak berbentuk $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ mempunyai paling sedikit satu akar kompleks. Dari sini kita dapat menunjukkan bahwa persamaan suku banyak kenyataannya memiliki n akar kompleks, beberapa atau semuanya mungkin identik.

Jika $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah n buah akarnya, dapat ditulis sebagai: $a_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots\ldots\ldots(z - z_n) = 0$, yang dinamakan bentuk pemfaktoran suku banyak.

Contoh 2.28:

Sederhanakan:

(i) $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$,

(ii) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$

Jawab:

(i) $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$

$z = 1$	1	-1	-1	0	6	-4
		1	-1	-2	-2	4
$z = 1$	**1**	**-1**	**-2**	**-2**	**4**	**0**
		1	0	-2	-4	
$z = 2$	**1**	**0**	**-2**	**-4**	0	
		2	4	4		
	1	**2**	**2**	0		

Sehingga persamaan suku banyak menjadi:

$$(z-1)^2(z-2)(z^2+2z+2)=0$$

Selanjutnya untuk persamaan: $z^2+2z+2=0$

$$z_{4,5}=\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$$

$$z_1=z_2=1,\ z_3=2,\ z_4=-1+i,\ z_5=-1-i$$

Jadi himpunan penyelesaian: $\{1,\ 1,\ 2, -1+i,\ -1-i\}$

(ii) $z^2+(2i-3)z+5-i=0$

$$z_{1,2}=\frac{-(2i-3)\pm\sqrt{(2i-3)^2-4(5-i)}}{2}$$

$$=\frac{-2i+3\pm\sqrt{-12i+5-20+4i)}}{2}=\frac{(-2i+3)\pm\sqrt{-15-8i}}{2}$$

catatan : $\sqrt{-15-8i}=\ -1+4i$ atau $1-4i$ (pilih salah satu)

$$z_1=\frac{-2i+3-1+4i}{2}=\frac{2i+2}{2}=1+i$$

$$z_2=\frac{-2i+3+1-4i}{2}=\frac{-6i+4}{2}=2-3i$$

E. Penyelesaian Soal dan Latihan

1. Jika $z_1 = 5 + 2i$ dan $z_2 = 3 - 2i$, maka tentukan: Re(z_1), Im (z_1), $\overline{z_1+z_2}$, $\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}$, $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)$, $2z_1+3z_3$, $7z_1-3z_3+2$.
2. Tentukan nilai *a* dan *b*, jika diketahui:
   $(2a + b) + (a - b)i = (2 + 3i)^2 + (4 + 5i)$
3. Tentukan nilai bilangan real x dan y sehingga:
   $3x-2iy + ix-2y-8i-3 \equiv x - iy + y + ix + 2 - 5i$
4. Jika $z = x + yi$ dan $w = 5iz - 2z^2$, tentukan $|w|^2$ dalam suku-suku dari *x* dan *y*.

5. Jika $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2i$, hitunglah setiap bentuk berikut.

a. $\left|\frac{Z_1 + Z_2 + 1}{Z_1 - Z_2 + 1}\right|$ b. $(Z_3 - \overline{Z_3})^5$ c. $|Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2|$

d. $|2z_1 + 3z_2|$ e. $|2z_1 - 3z_2 + z_3|$ f. $|\bar{z}_1 + 3z_2 - 4z_3|$

Jawab:

a. $\left|\frac{Z_1 + Z_2 + 1}{Z_1 - Z_2 + 1}\right| = \left|\frac{(1 - i) + (-2 + 4i) + 1}{(1 - i) - (-2 + 4i) + 1}\right|$

$= \left|\frac{1 - i - 2 + 4i + 1}{1 - i + 2 - 4i + 1}\right|$

$= \left|\frac{3i}{4 - 5i}\right| = \frac{|3i|}{|4 - 5i|} = \frac{\sqrt{0^2 + 3^2}}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16 + 25}}$

Jadi, $\left|\frac{Z_1 + Z_2 + 1}{Z_1 - Z_2 + 1}\right| = \frac{3}{\sqrt{41}} \text{ x } \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{41}} = \frac{3}{41}\sqrt{41}\, \frac{3}{41}\sqrt{41}$

b. $(Z_3 - \overline{Z_3})^5 = [(\sqrt{3} - 2i) - (\sqrt{3} + 2i)]^5 = (-4i)^5$

$= (-4)^5 (i)^5 = -1024$ I, Jadi, $(Z_3 - \overline{Z_3})^5 = -1024\, i$

c. $|Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2| = |(1 - i)(-2 - 4i) + (1 + i)(-2 + 4i)|$

$= |(-6 - 2i) + (-6 + 2i)| = |-12|$

$= \sqrt{(-12)^2 + 0^2} = \sqrt{144} = 12.$

Jadi, $|Z_1\overline{Z_2} + \overline{Z_1}Z_2| = 12$

Jawaban d, e, dan f diserahkan kepada pembaca.

6. Tentukan dan nyatakan secara grafik himpunan semua nilai z yang memenuhi:

a. $|z - 3| - |z + 3| = 4$, b. $|z + 3| + |z - 3| = 10$,

c. $\left|\frac{z - 2}{z + 2}\right| = 4.$

Jawab:

Misalkan : $z = x + i\,y$

$|z - 3| - |z + 3| = 4$

$|(x + iy) - 3| - |(x + iy) + 3| = 4$

$|(x - 3) + iy| - |(x + 3) + iy| = 4$

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ - $\sqrt{(x+3)^2+y^2}$ = 4

$\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2 = \left(4+\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2$

$(x-3)^2+y^2 = 16+8\sqrt{(x+3)^2+y^2}+((x+3)^2+y^2)$

$x^2-6x+9+y^2 = 16+8\sqrt{(x+3)^2+y^2}+x^2+6x+9+y^2$

$-8\sqrt{(x+3)^2+y^2} = x^2+\ 6x+9+\ y^2-x^2+\ 6x-9-\ y^2+16$

$-8\sqrt{(x+3)^2+y^2} = 12x+16$ (kedua ruas dibagi 4)

$\left(-2\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2 = (3x+4)^2$

$4((x+3)^2+\ y^2) = 9x^2+\ 24x+16$

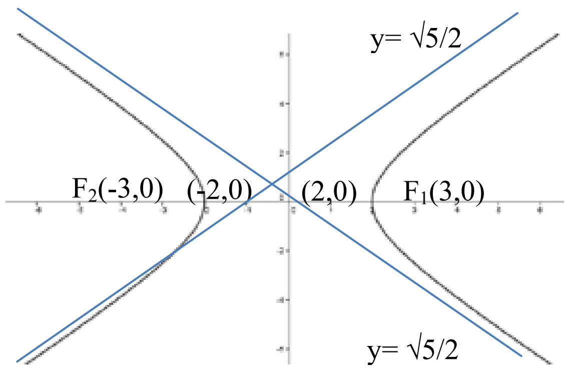
$4(x^2+6x+9+y^2) = 9x^2+\ 24x+16$

$4x^2+24x+36+4y^2 = 9x^2+\ 24x+16$

$4x^2+24x+4y^2-9x^2-\ 24x\ = 16-36$

$-5x^2+4y=-20$ (kedua ruas dibagi -20)

Diperoleh persamaan $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$, yaitu sebuah grafik hiperbola Pusat (0,0), asimtot: y = $\pm\ \frac{b}{a}\ x = \pm\ \frac{\sqrt{5}}{2}x$, titik puncak (-2,0) dan (2,0), titik fokus F_1(3,0) dan F_1(-3,0) sebagaimana disajikan pada gambar berikut.



Gambar 2.16: Grafik $|z-3|-|z+3|=4$

7. a) Carilah bentuk polar dari $(1+i)(1+\sqrt{3}i)$

   b) Gunakan hasil dari a) untuk menentukan $\text{Cos}\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ dan $\text{Sin}\left(\frac{7}{12}\pi\right)$ (George Cain, 1999: 1.7)

8. Nyatakan dalam bentuk kutub dan rumus Euler bilangan kompleks:

   a. $-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ b. $-2\sqrt{3}-2i$ c. $-\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i$

   d. $-1+\sqrt{3}i$ e. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ f. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

9. Hitung setiap besaran berikut.

   a. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$ b. $\frac{(8\,\text{Cos}\,60\,\text{Sin}\,60)^4}{(2\,\text{Cos}\,60\,\text{Cos}\,40)^3}$ c. $\frac{(3\,e^{1,5\pi i})}{(4\,e^{-0,25\pi i})}$

   b. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^3\left(\frac{2-2i}{2+2i}\right)^6$ e. $\left(\frac{(2e^{\frac{1}{6}\pi i})(4e^{\frac{-2}{3}\pi i})(8e^{\frac{5}{3}\pi i})1+\sqrt{3}i}{(6e^{\frac{5}{4}\pi i})^4\sqrt{3}+i}\right)^3$

   Jawab:

   a. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$, Misal: $z_1=\sqrt{3}-i$; $z_2=\sqrt{3}+i$

   Untuk $z_1=\sqrt{3}-i$

   $\Leftrightarrow r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

   $\theta=\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=330^0$

   $z_1=\sqrt{3}-i=r\text{ cis }\theta=2\text{ cis }330^0$

   Untuk $z_2=\sqrt{3}+i$

   $\Leftrightarrow r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

   $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^0$

   $z_2=\sqrt{3}+i=r\text{ cis }\theta=2\text{ cis }30^0$, Sehingga, $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$

$$= \left(\frac{2 \text{ cis } 330^0}{2 \text{ cis } 30^0}\right)^4 = (\text{cis } (330^0 - 30^0))^4$$

$$= (\text{cis } 300^0)^4 = \text{cis } 1200^0 = \text{cis } 120^0$$

$$= \cos 120^0 + i \sin 120^0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$$

Jadi, $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \qquad = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}i\right)$

b. Cara 1: $\frac{(8 \operatorname{Cos} 60 \operatorname{Sin} 60)^4}{(2 \operatorname{Cos} 60 \operatorname{Cos} 40)^3} = \frac{\left(4\left(\operatorname{Sin}(60+60) - \operatorname{Sin}(60-60)\right)\right)^4}{\left(\operatorname{Cos}(60+40) + \operatorname{Cos}(60-40)\right)^3}$

$$= \frac{(4(\operatorname{Sin} 120 - \operatorname{Sin} 0))^4}{(\operatorname{Cos} 100 + \operatorname{Cos} 20)^3}$$

$$= \frac{\left(4\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 0\right)\right)^4}{(0{,}766)^3} = \frac{(2\sqrt{3})^4}{(0{,}766)^3}$$

$$= \frac{16.(9)}{0{,}45} = \frac{144}{0{,}45} = 320$$

Cara 2: $\frac{(8 \operatorname{Cos} 60 \operatorname{Sin} 60)^4}{(2 \operatorname{Cos} 60 \operatorname{Cos} 40)^3} = \frac{\left(8\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^4}{\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Cos} 40\right)^3}$

$$= \frac{(2\sqrt{3})^4}{(\operatorname{Cos} 40)^3} = \frac{16.(9)}{(0{,}766)^3} = \frac{144}{0{,}45} = 320$$

c. $\frac{(3e^{1,5\pi i})}{(4e^{-0,25\pi i})} = \frac{3 \text{ cis } (1{,}5\,\pi)}{4 \text{ cis } (-0{,}25\,\pi)} = \frac{3}{4}\,[\text{cis } (1{,}5\,\pi + 0{,}25\,\pi]$

$$= \frac{3}{4}\left[\text{cis}\left(1{,}5\,(180^0) + 0{,}25\,(180^0)\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\,[\text{cis } (270^0 + 45^0)] = \frac{3}{4}\,[\text{cis } 315^0]$$

$$= \frac{3}{4}\,[\cos 315^0 + i \sin 315^0]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right] = \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{3}{8}\sqrt{2}i$$

Jadi, $\frac{(3e^{1,5\pi i})}{(4e^{-0,25\pi i})} = \frac{3\sqrt{2}}{8}(1 - i)$

Jawaban d, dan e, diserahkan kepada pembaca.

10. Tentukan semua nilai dari:

a. $\left(\sqrt{3} - i\right)^{1/5}$ b. $(2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$ c. $(4 - 4i)^{1/5}$

b. d. $(-64i)^{1/6}$ e. $(2\sqrt{3} - 2i)^{-6}$ f. $x^{12} - 9 = 0$

Jawab:

a. Misalkan: z = $\sqrt{3} - i \Leftrightarrow$ r = $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ dan

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 330^0$, Sehingga:

$z^{1/5} = [r \text{ cis } \theta]^{1/5} = \left(\sqrt{3} - i\right)^{1/5}$

$= 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{5}\right)\right]$

$= 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos(66^0 + k.72^0) + i\sin(66^0 + k.72^0)\right]$

$k = 0 \Leftrightarrow z_1 = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos 66^0 + i\sin 66^0\right]$

$k = 1 \Leftrightarrow z_2 = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos 138^0 + i\sin 138^0\right]$

$k = 2 \Leftrightarrow z_3 = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos 210^0 + i\sin 210^0\right]$

$k = 3 \Leftrightarrow z_4 = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos 282^0 + i\sin 282^0\right]$

$k = 4 \Leftrightarrow z_5 = 2^{\frac{1}{5}}\left[\cos 354^0 + i\sin 354^0\right]$

Jawaban b, c, d, e, f diserahkan kepada pembaca.

11. Tentukan setiap akar yang diberikan berikut ini dan gambarkan letaknya pada bidang kompleks.

    a. Akar pangkat 4 dari 16,
    b. $(-16\sqrt{3} + 16\sqrt{2}i)^{\frac{1}{5}}$
    c. Akar pangkat 6 dari -27i
    d. $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{\frac{1}{6}}$

12. Selesaikan persamaan (a) $z^3 + 27 = 0$, (b) $z^2 - \sqrt{3}i = -1$.

13. Tentukan akar kuadrat dari:

    a. $5 - 12i$,
    b. $2\sqrt{3} - 2i$,
    c. $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$,

Jawab:

a. Misalkan: z = 5 – 12i

r = $\sqrt{(5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$, dan

$\text{Cos } \theta = \frac{5}{13}$; $\text{Sin } \theta = -\frac{12}{13}$; $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{12}{5}\right) = 292^0$

Sehingga z = 5 – 12i = r (Cos θ + i Sin θ), karena itu

$z^{1/2} = [r(\text{Cos } \theta + i \text{ Sin } \theta)]^{1/2}$ atau

$$\sqrt{Z} = \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

(i) $k = 0 \Leftrightarrow Z_1 = \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$ .....(i)

(ii) $k = 1 \Leftrightarrow Z_2 = \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)\right]$....(ii)

$$= \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$$

$$= \sqrt{13}\left[-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \text{ atau}$$

$$Z_2 = -\sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Karena (5–12i) berada di kuadran IV, dan $\frac{\theta}{2} = \frac{292^0}{2} = 146^0$, maka (5–12i) mundur ke kuadran II, selanjutnya:

Untuk, $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{13-5}{13\ (2)}} = \sqrt{\frac{8}{13\ (2)}}$

$$= \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Untuk, $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{13+5}{13\ (2)}}$

$$= -\sqrt{\frac{18}{13\ (2)}} = -\sqrt{\frac{9}{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Dari (i) $Z_1 = \sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$Z_1 = \sqrt{13}\left[-\frac{3}{\sqrt{13}} + i\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right] = -3 + 2i$, juga

Dari (ii) $Z_2 = -\sqrt{13}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$Z_2 = -\sqrt{13}\left[-\frac{3}{\sqrt{13}} + i\frac{2}{\sqrt{13}}\right] = -(-3 + 2i) = 3 - 2i$

Jadi akar kuadrat (5 – 12i) adalah (–3 + 2i) dan (3 – 2i).

Jawaban b dan c diserahkan kepada pembaca.

14. Tentukan semua akar dari $(1 + z)^6 = (1 - z)^6$.

15. Tentukan semua akar dari fungsi polinomial berikut.
    (i) $z^4 + z^2 + 1 = 0$,
    (ii) $z^4 - 4z^3 - z^2 + 16z - 12 = 0$,
    (iii) $z^5 + 4z^4 - 4z^3 - 34z^2 - 45z - 18 = 0$,

16. Tentukan sisa pembagian dari ($x^{10} + x^5 + 1$) dengan ($x^2 + 2$).
17. Tunjukkan bahwa (1 + i) adalah akar dari $x^3 - 2x + 4 = 0$.
18. Buktikan bahwa (p + qi) dan (p – qi) adalah akar dari persamaan kuardrat $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, dan $c \in$ R.
19. Buktikan bahwa luas jajar genjang dengan sisi z_1 dan z_2 adalah $|z_1 \times z_2|$. (No. 41, Murray R. Spiegel, 1991: 24).
20. Buktikan bahwa luas segitiga yang titik-titik sudutnya terletak di A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3) adalah $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$.

    (No. 42, Murray R. Spiegel, 1991: 24)

F. Peta Konsep

Peta konsep pada bab II ini, menjelaskan pengertian bilangan kompleks melalui pemetaan konsep yang mengasosiasikan: sistem bilangan kompleks, definisi, operasi dasar bilangan kompleks, nilai mutlak berikut teoremanya, daerah irisan kerucut, penyajian bilangan kompleks dalam bentuk koodinat Cartesian dan koordinat kutub sebagai pengantar lahirnya Terema De'Moivre pada terapannya dalam menentukan perkalian, pembagian, dan akar bilangan kompleks, tafsiran vektor bilangan kompleks, norma bilangan kompleks, hasil kali titik dan hasil kali silang, serta persamaan suku banyak. Peta konsep pengertian bilangan kompleks disajikan pada diagram berikut.

Bilangan Kompleks

(1) Sistem Bilangan Kompleks

- Definisi 2.1: "Suatu bilangan kompleks dinyatakan sebagai bilangan yang berbentuk (x + iy) dimana x dan y bilangan real dan i, yang dinamakan satuan khayal (imaginary unit) bersifat $i^2 = -1$".
- Definisi 2.2:
  Kesamaan bil.kom
  Dua bilangan kompleks (x1 + iy1) dan (x2 + iy2) dikatakan sama jika dan hanya jika x1 = x2 dan y1 = y2.
- Definisi 2.3:
  Bil.kompleks sekawan
  $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$
- Teorema 2.1:
  Sifat kesamaan. Bil kompleks

(2) Operasi Dasar Bil Kompleks

- Penjumlahan:
  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- Pengurangan:
  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
- Perkalian:
  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$
- Pembagian:
  $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{y_1^2 + y_2^2} + \dfrac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{y_1^2 + y_2^2} i$
- Teorema 2.2:
  Sifat Field bil. Kompleks

(3)

Nilai Mutlak: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- Asosiasi nilai mutlak dan daerah irisan kerucut
  $|z + ai| + |z - ai| = b$
- Teorema 2.5:
  Sifat-sifat nilai mutlak

(4) Penyajian Kompleks

- Koordinat Cartesius (x,y)
- Koordinat Kutub (r Cis θ)
  - ❖ $z_1.z_2 = r_1 r_2 \text{ Cis } (\theta_1 + \theta_2)$
  - ❖ $z_1/z_2 = r_1/r_2 \text{ Cis } (\theta_1 - \theta_2)$
  - ❖ $z^n = r^n \text{ Cis } (n\theta)$
  - ❖ $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \text{ Cis } \left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$
- Bentuk Euler: $e^{i\theta} = \text{Cis}\,\theta$
- Tafsiran Vektor Bil.Kompleks
  - ❖ Penjumlahan: $z_1 + z_2$
  - ❖ Pengurangan: $z_1 - z_2$
  - ❖ Norma Vektor: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - ❖ Dot Product:
    (i) $z_1 \circ z_2 = \text{Re}\{\overline{z_1}\, z_2\}$
    (ii) $z_1 \circ z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$
    (iii) $z_1 \circ z_2 = \dfrac{1}{2}\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\}$
  - ❖ Cross Product
    (i) $z_1 \times z_2 = \text{Im}\{\overline{z_1}\, z_2\}$
    (ii) $z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$
    (iii) $z_1 \times z_2 = \dfrac{1}{2i}\{\overline{z_1}\, z_2 + z_1 \overline{z_2}\}$
- Persamaan Suku Banyak

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Gambar 2.17. Peta Konsep Bilangan Kompleks

BAB III
FUNGSI KOMPLEKS

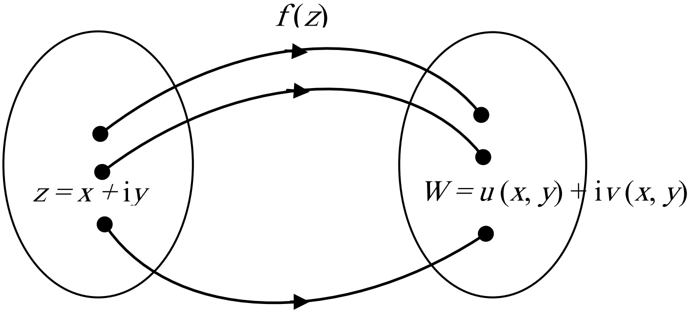
A. Pengertian Fungsi Kompleks

Pembahasan mengenai fungsi kompleks terkait dengan bidang kompleks. Himpunan bilangan kompleks z adalah koleksi titik-titik pada bidang z dengan operasi beserta sifat-sifatnya, fungsi kompleks dapat diturunkan pada domain tertentu pada bidang z tersebut.

Definisi 3.1

Misalkan D himpunan titik pada bidang z dan fungsi f pada D adalah aturan yang menetapkan setiap z di dalam D dengan suatu bilangan kompleks W yang dinamakan nilai fungsi f di z, dituliskan sebagai $W = f(z)$.

Dari definisi 3.1 di atas, menunjukkan bahwa z adalah peubah kompleks (*complex variable*) dan D adalah domain dari fungsi f. Sedangkan W juga adalah bilangan kompleks yang dapat dituliskan sebagai $W = f(z) = u + iv$. Jika $u= u(x, y)$ dan $v= v(x, y)$ fungsi-fungsi berharga real dari peubah x dan y maka $u(x, y) + iv(x, y)$ merupakan fungsi dari peubah kompleks, sehingga $f(z)$ dapat dituliskan sebagai $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Perhatikan pemetaan fungsi kompleks berikut.



Domain fungsi Range fungsi

Gambar 3.1: Pemetaan fungsi kompleks

Domain dari f dinyatakan dengan Df dan f(z) disebut nilai dari fungsi f atau peta/bayangan dari z oleh f. Sedangkan Range dari f, dinyatakan dengan Rf, yaitu himpunan setiap z anggota D.

Contoh 3.1:

Diberikan fungsi-fungsi berikut.

a) $w = z^2$

b) $w = z^2 - 2z + 3$

c) $w = z^{-3} + z^{-2}$

d) $w = \dfrac{2z+3}{z^2+1}$

Contoh a) dan b) adalah fungsi dengan domain seluruh titik pada bidang z. Sedangkan c) adalah fungsi dengan domain seluruh titik pada bidang z, kecuali $z \neq 0$, begitupula contoh d), adalah fungsi dengan domain seluruh titik pada bidang z, kecuali $z = \pm i$.

Definisi 3.2

Misalkan fungsi f dengan domain Df dan fungsi g dengan domain Dg, maka fungsi komposisi f dan g ditulis g(f(z)) ada jika Rf $\cap$ Dg = $\neq \varnothing$.

Contoh 3.2:

Diberikan fungsi f(z) = 3z+2i dan g (z) = z^2 + 2z +2 + 3i, tentukan g(f(z)), dan f(g(z)).

Jawab:

(i) Rf $\cap$ Dg = $\neq \varnothing$ maka

$$g(f(z)) = g(3z+2i) = (3z+2i)^2 + 2(3z+2i) + 2 + 3i$$
$$= 9z^2 + (12i + 6)z + 7i - 2$$

(ii) Rg $\cap$ Df = $\neq \varnothing$ maka

$$f(g(z)) = g(z^2 + 2z + 2 + 3i) = 3(z^2 + 2z + 2 + 3i) + 2i$$
$$= 3z^2 + 6z + 11i + 6$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa g(f(z)) $\neq$ f(g(z)) atau komposisi dua fungsi tidak komutatif.

B. Fungsi Bernilai Tungal dan Banyak

Jika hanya satu nilai w dikaitkan pada setiap nilai z, kita mengatakan bahwa w adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari z atau f(z) bernilai tunggal. Jika lebih dari satu nilai w dikaitkan pada setiap nilai z, kita mengatakan bahwa w adalah suatu fungsi bernilai banyak dari z.

Contoh 3.3:

(i) $w = z^2$ untuk setiap bilangan kompleks Z, maka terdapat hanya satu nilai dari w. Misalkan diambil z = 2 dan z = - 2 maka nilai w adalah:

$$\begin{cases} \text{untuk } z = 2 \Rightarrow w = z^2 = 2^2 = 4 \\ \text{untuk } z = -2 \Rightarrow w = z^2 = (-2)^2 = 4 \end{cases}$$

Dengan kedua nilai z tersebut memberikan nilai w yang sama, sehingga w disebut **fungsi bernilai tunggal**.

(ii) $w = \pm\sqrt{z}$ untuk setiap bilangan kompleks Z, maka terdapat beberapa nilai dari w. Misalkan diambil untuk z = 2 dan z = - 2 maka nilai w adalah:

$$\begin{cases} \text{untuk } z = 2 \Rightarrow w = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{2}\text{, sehingga diperoleh :} \\ w = \sqrt{2} \text{ dan } w = -\sqrt{2}. \\ \text{untuk } z = -2 \Rightarrow w = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{-2}\text{, sehingga diperoleh :} \\ w = 2i \text{ dan } w = -2i. \end{cases}$$

Dengan kedua nilai z tersebut memberikan beberapa nilai w yang berbeda, sehingga w disebut **fungsi bernilai banyak**.

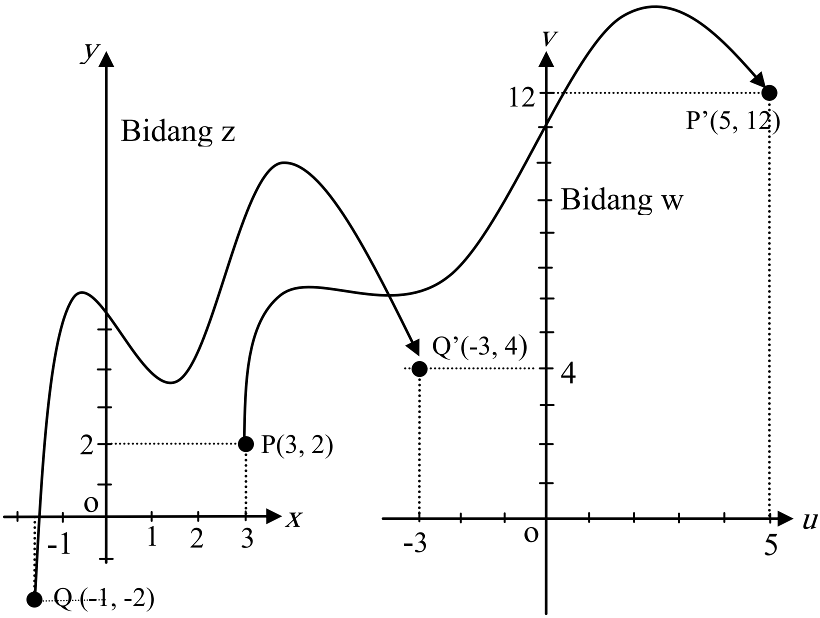
C. Transformasi

Jika $w = u + iv$ adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$ maka dapat ditulis sebagai $w = u + iv = f(x + iy) = f(z)$.

Sehingga $w = f(z) = u + iv$, dimana $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ adalah suatu transformasi dari suatu titik (x, y) yang diberikan pada bidang z yang diasosiasikan ke suatu titik (u, v) pada bidang w.

Contoh 3.4:

Misalkan $w = z^2$, untuk bilangan kompleks $z = x + iy$ maka $w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, yang terdiri dari fungsi $u = u(x, y) = (x^2 - y^2)$ dan $v = v(x, y) = 2xy$. Sebagai ilustrasi, untuk titik P(3, 2) pada bidang z maka $u = u(x, y) = (x^2 - y^2) = 3^2 - 2^2 = 5$, dan $v = v(x, y) = 2.3.2 = 12$, sehingga titik P'(5, 12) terletak pada bidang w. Begitupula titik Q (-1, -2) di bidang z menjadi Q'(-3, 4) di bidang w. Secara visual transformasi titik P ke P′ dan Q ke Q′, diperlihatkan pada grafik berikut.



Gambar 3.2: Transformasi titik P dan Q ke P′ dan Q′

Dari contoh 3.4 terlihat bahwa:

(i) Jika $z = x + iy$ maka:

$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$,

berarti $u = (x^2 - y^2)$ dan $v = 2xy$.

(ii) Jika z = r cis α maka:

$$
\begin{aligned}
f(z) = z^2 &= (\text{r cis } \alpha)^2 \\
&= (\text{r} (\cos\alpha + \text{i} \sin\alpha))^2 \\
&= \text{r}^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \text{i}\,(2\sin\alpha \cos\alpha) \\
&= \text{r}^2(\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha) + \text{i}\,(2\sin\alpha \cos\alpha) \\
&= \text{r}^2(2\cos^2\alpha - 1) + \text{i}\,(2\sin\alpha \cos\alpha) \\
&= \text{r}^2(2\cos^2\alpha - 1) + \text{i}\,(\sin 2\alpha)
\end{aligned}
$$

berarti $u = r^2(2\cos^2\alpha - 1)$ dan $v = \sin 2\alpha$

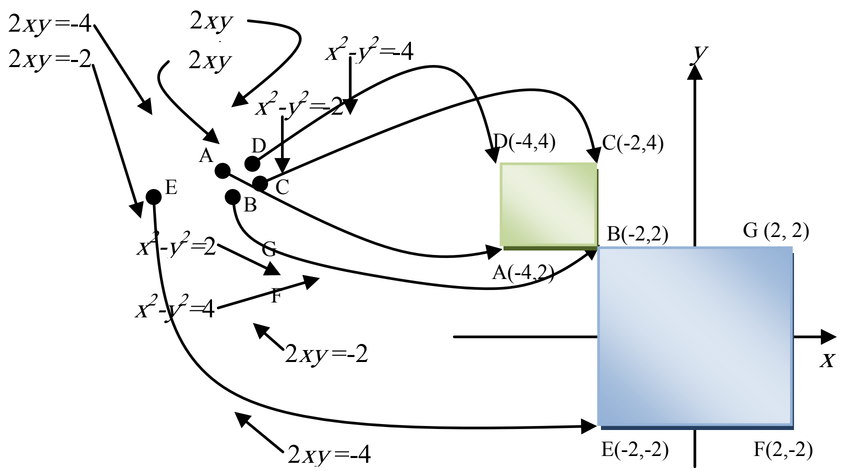
Contoh 3.5: (No. 4, Murray R. Spiegel, 1991: 47).

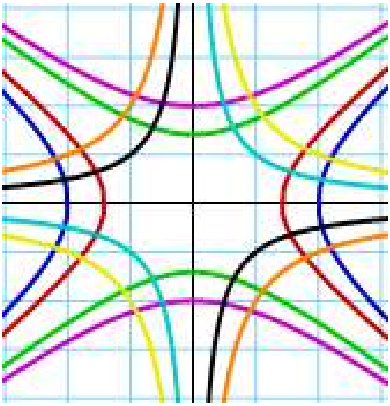
Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta real, tentukan himpunan semua titik di bidang z yang dipetakan ke dalam garis (a) $u = c_1$, (b) $v = c_2$ dalam bidang w oleh fungsi pemetaan w = z^2. Berikan ilustrasinya dengan melihat kasus c_1 = 2, 4, -2, -4 dan c_2 = 2, 4, -2, -4.

Jawab:

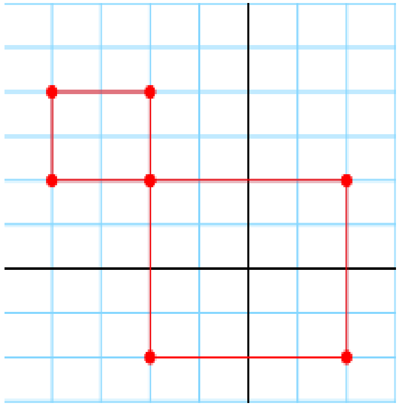
Dari contoh 3.4 telah diperoleh bahwa $w = x^2 - y^2 + 2xyi$, sehingga $u = (x^2 - y^2)$ dan $v = 2xy$. Maka grafik $u = c_1$ dan $v = c_2$ dalam bidang w berturut-turut dikaitkan dengan hiperbola $x^2 - y^2 = c_1$ dan $2xy = c_2$ dalam bidang z. Dengan demikian bahwa untuk $u = c_1$, terdapat empat buah persamaan hiperbola, yaitu: (i) $x^2 - y^2 = 2$, (ii) $x^2 - y^2 = 4$, (iii) $x^2 - y^2 = -2$, dan (iv) $x^2 - y^2 = -4$. Begitupulan untuk $v = c_2$, diperoleh empat persamaan: (i) $2xy = 2$, (ii) $2xy = 4$, (iii) $2xy = -2$, dan (iv) $2xy = -4$.

Transformasi titik dari bidang z ke bidang w seperti terlihat pada Gambar berikut.





Gambar 3.3: Bidang-z



Gambar 3.4: Bidang-*w*

D. Fungsi Elementer

Fungsi elementer adalah fungsi dasar dalam bilangan kompleks. Fungsi elementer yang akan diperkenalkan meliputi fungsi suku banyak, fungsi rasional aljabar, fungsi eksponen, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, fungsi logaritma, invers fungsi trigonometri, invers fungsi hiperbolik, dan fungsi aljabar dan transenden.

1. Fungsi Suku Banyak

Sebagaimana persamaan suku banyak yang telah dibahas pada bab II. Fungsi suku banyak didefinisikan sebagai polinom :$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = w$, dengan $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ konstanta kompleks dan n bilangan bulat positif yang dinamakan derajat suku banyak $P(z)$.

Transformasi $w = az + b$ disebut transformasi linear. Misalkan diberikan Teorema Deret Geometri, yaitu:

$$S_n = \frac{a(1-r)^n}{1-r^n} = \frac{a_0 z^n \left(1-\frac{1}{z}\right)^n}{1-\frac{1}{z^n}} = \frac{a_0 z^n \left(1-\frac{1}{z}\right)^n}{\frac{z^n-1}{z^n}},$$

catatan: $\frac{z^n-1}{z^n} \approx 1$, maka

$$S_n = a_0 z^n \left(1^n - \cdots z^{\cdots} - \left(\frac{1}{z}\right)^n\right)$$

$$S_n = a_0 z^n - a_0 z^{n\cdots} \ldots + a_0$$

$$S_n = az + b$$

2. Fungsi Rasional Aljabar

Fungsi rasional aljabar didefinisikan sebagai:
$w = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ *dan* $Q(z)$ adalah suku banyak, atau polinom misalkan $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ dan $Q(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ maka $w = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{c_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$, untuk kasus khusus diperoleh $w = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ adalah suatu transformasi linear atau dinamakan transformasi bilinier.

3. Fungsi Eksponen

Misalkan peubah bebas $z = x + yi$, maka $e^z = e^{x+yi}$, oleh deret Maclaurin diperoleh $e^{yi} = \cos y + i \sin y$. Dengan demikian $e^z = e^{x+yi} = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$. Bentuk eksponen ini disebut fungsi eksponen kompleks. Dari fungsi eksponen ini, segera kita melihat bahwa apabila $y = 0$ maka $e^z = e^x$ yang merupakan fungsi eksponen real. Selanjutnya jika $x = 0$ diperoleh $e^z = e^{yi} = \cos y + i \sin y$ yang dikenal sebagai rumus Euler.

Beberapa teorema dapat diturunkan langsung dari sifat-sifat fungsi eksponen.

Teorema 3.1

(a) $e^z \neq 0$

(b) $e^0 = 1$

(c) $e^{z1}\, e^{z2} = e^{z1 + z2}$

(d) $\dfrac{e^{z1}}{e^{z2}} = e^{z1 - z2}$

(e) $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$

(f) $e^{z} = e^{z + 2k\pi i}$, dengan k bilangan bulat

(g) Jika $z = x + iy$, maka $\left|e^{z}\right| = e^{x}$ $\arg(e^{z}) = y$

<u>Bukti teorema no (a)</u>: $e^{z} \neq 0$

Jika $z = x + iy$ dan andaikan $e^{z} = 0$, maka $e^{x} \cos y + i\, e^{x} \sin y = 0$, berarti $e^{x} \cos y = 0$ dan $e^{x} \sin y = 0$. Dari fungsi real telah diketahui bahwa $e^{x} > 0$, maka haruslah $\cos y = 0$ dan $\sin y = 0$. Tidak ada nilai y yang bersamaan memenuhi kedua persamaan tersebut. Berarti tidak ada $e^{z} = 0$. Jadi pengandaian salah, maka yang benar $e^{z} \neq 0$.

<u>Bukti teorema no (b)</u>: $e^{0} = 1$

Berarti jika $z = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dan $y = 0$

$e^{0+0i} = e^{0} (\cos 0 + i \sin 0) = 1\,(1 + 0) = 1$

<u>Bukti teorema no (c)</u>: $e^{z1 + z2} = e^{z1}\, e^{z2}$

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$

$e^{z1} = e^{x1} (\cos y_1 + i \sin y_1)$ dan $e^{z2} = e^{x2} (\cos y_2 + i \sin y_2)$

menurut sifat perkalian dua bilangan kompleks dalam bentuk polar:

$$e^{z_1}e^{z_2} = (e^{x_1+iy_1})(e^{x_2+iy_2})$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1} \operatorname{cis} y_1 \,.\, e^{x_2} \operatorname{cis} y_2$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2} \operatorname{cis}(y_1 + y_2)$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2} \operatorname{cis}(y_1 + y_2)$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{(x_1+x_2)}(\cos(y1 + y2) + i \sin(y1 + y2))$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

<u>Bukti teorema no(d)</u>: (dengan analisis seperti no c)

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1+iy_1}}{e^{x_2+iy_2}} = \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)}$$

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}\,\text{cis}(y_1 - y_2) = e^{x_1-x_2}\,\text{cis}(y_1 - y_2)$$

$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{(x_1-x_2)}(\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)) = e^{z_1 - z_2}$

Bukti teorema no(e): $e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$

Misalkan $z = x + iy$ maka $\bar{z} = x - iy$

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}(\cos(-y) + i\sin(-y))$$
$$= e^{x}(\cos y - i\sin y) = \overline{e^{z}}$$

Bukti teorema no(f): $e^{z} = e^{z+2k\pi i}$, dengan k bilangan bulat

Misalkan $z = x + iy$ maka $e^{z+2k\pi i} = e^{x+(y+2k\pi)i}$

$= e^{x}(\cos(y + 2k\pi) + i\sin(y + 2k\pi))$

$= e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{z}$.

Ini menunjukkan bahwa fungsi e^{z} memiliki periode $2k\pi$.

Bukti teorema no(g):

Jika $z = x + iy$, maka $|e^{z}| = e^{x}$ dan $\alpha = \arg(e^{z}) = y$

Dari bentuk polar bilangan kompleks diketahui bahwa:

$e^{z} = e^{x}(\cos y + i\sin y) = r\,e^{iy}$, maka

$$|e^{z}| = |e^{x}(\cos y + i\sin y)| = |e^{x}||\cos y + i\sin y|$$
$$= |e^{x}|\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^{x}\sqrt{1} = e^{x}e^{x},\ \text{jelas } \arg(e^{z}) = y.$$

Persamaan Eksponen

Contoh 3.6:

Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan (a) $e^{z} = -i$, dan (b) $e^{(3z-1)} = 1$.

Jawab (a): $e^{z} = -i$

Misalkan $z = x + iy$

$e^{x}(\cos y + i\sin y) = -i = 0 - i$, maka

$e^{x}\cos y = 0$ ……….. (i) dan $e^{x}\sin y = -1$ …………….(ii) persamaan (i): $e^x \cos y = 0$ diketahui bahwa $e^x \neq 0$ jadi $\cos y = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat. Selanjutnya $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ disubtitusi ke persamaan (ii), sehingga diperoleh $e^x = -1$ (kedua ruas dikuadratkan) $\Leftrightarrow (e^x)^2 = 1 \Leftrightarrow e^x = \pm 1$, jawaban yang memenuhi adalah $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Selanjutnya untuk $x = 0$ pada (ii) diperoleh:

$\sin y = -1 = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat. Dari dua nilai y yang diperoleh, yang memenuhi $y = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, k bilangan bulat. Sehingga nilai z yang memenuhi persamaan adalah $z = x + yi = 0 + i\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$, k bilangan bulat.

Jawab (b): $e^{(3z-1)} = 1$

Misalkan $z = x + iy \Leftrightarrow 3z - 1 = (3x - 1) + 3yi$

e^{3x-1} Cis $3y = 1 + 0i = e^1 (\cos 0 + i \sin 0)$

$e^{3x-1} (\cos 3y + i \sin 3y) = e^1 (\cos 0 + i \sin 0)$

Dengan menggunakan kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk polar, diperoleh:

$e^{3x-1} = e^1$ ....(i)

$\cos 3y = \cos 0$ dan $\sin 3y = \sin 0$...........(ii)

Dari (i) $e^{3x-1} = e^1 \Leftrightarrow 3x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Dari (ii) $\cos 3y = \cos 0 \Leftrightarrow 3y = 2k\pi \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}k\pi$ dan $\sin 3y = \sin 0, \Leftrightarrow 3y = 2k\pi \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}k\pi$, k bilangan bulat akan memenuhi kedua persamaan tersebut. Maka nilai z yang memenuhi persamaan adalah adalah $z = x + yi = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}k\pi$ i, k bilangan bulat.

4. Fungsi Logaritma

Pembahasan mengenai fungsi logaritma bertujuan untuk mempelajari sebanyak mungkin sifat-sifat logaritma yang kita sudah kenal dengan baik pada sistem bilangan real dan mengembangkannya ke dalam fungsi logaritma kompleks.

Definisi 3.3:

Misalkan bilangan kompleks $z = r\,e^{i\theta}$, dengan r = nilai mutlak z dan θ= argumen z. Fungsi logaritma dengan peubah kompleks z dinyatakan sebaga log z = log (r $e^{i\theta}$) = log r + iθ, r > 0. Jika z real maka log z = ln z = ln r + iθ dengan r > 0.

Berdasarkan sifat-sifat logaritma real yang dimiliki oleh log z, kita mendapatkan bahwa: log z = ln $|z|$ + iθ untuk z $\neq$ 0. Persamaan ini adalah representasi yang sangat baik untuk suatu definisi logaritma bilangan kompleks.

Apabila θ merupakan sudut atau argumen utama dari z, pada kisaran $-2\pi < \theta \le 2\pi$ maka z = r $e^{i(\theta + 2k\pi)}$; dengan k bilangan bulat (0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4........) atau

ln z = ln r + i $(\theta + 2k\pi)$

untuk k = 0 $\Rightarrow$ ln z = ln r + iθ

untuk k = 1 $\Rightarrow$ ln z = ln r + i $(\theta + 2\pi)$

untuk k = 2 $\Rightarrow$ ln z = ln r + i $(\theta + 4\pi)$ dst.

Dengan demikian **ln z** merupakan fungsi yang bernilai banyak, khusus untuk k = 0, maka ln z = ln r + iθ disebut sebagai harga utama dari ln z.

Teorema 3.2:

1) $e^{\ln z} = z$

2) ln e^z = z

3) ln z_1 + ln z_2 = ln (z_1 z_2)

4) ln z_1 - ln z_2 = ln $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$

5) ln z^n = n ln z, n = 0, 1, 2, 3,......

Bukti: 1) dan 2)

1) $e^{\ln z} = z$

Misalkan w = ln z , maka

$e^w = e^{\ln z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r}\, e^{i\theta}$ = r $e^{i\theta}$ = z (karena z = r $e^{i\theta}$)

Jadi e^w = z .... (i)

Misalkan e^z = w maka

ln w = ln e^z = ln $e^{(x+iy)}$ = ln e^x + ln $e^{i(y+2k\pi)}$

= x + i (y + $2k\pi$) = (x + iy) + i $2k\pi$ = z + i $2k\pi$

Untuk k = 0 $\Rightarrow$ ln w = z .... (ii)

Dari (i) diperoleh e^w = z, sedangkan w = ln z, maka $e^{\ln z} = z$.

Dari (ii) ln w = z, sedangkan e^z = w, maka ln e^z = z. Sehingga 1) $e^{\ln z} = z$, dan 2) ln e^z = z (terbukti).

Bukti 3:

Misalkan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

ln z_1 + ln z_2 = ln $r_1 e^{i\theta_1}$ + ln $r_2 e^{i\theta_2}$

= ln r_1 + ln r_2 + ln $e^{i\theta_1}$ + ln $e^{i\theta_2}$

= ln ($r_1 r_2$) + ln ($e^{i\theta_1}$ $e^{i\theta_2}$)

= ln (($r_1 r_2$)($e^{i\theta_1}$ $e^{i\theta_2}$))

= ln (($r_1 e^{i\theta_1}$)($r_2 e^{i\theta_2}$) = ln r_1 + ln r_2 + i($\theta_1 + \theta_2$),

= ln (r_1 . r_2) + i($\theta_1 + \theta_2$) = ln $z_1 z_2$

Silahkan buktikan no. 4 dan 5.

Dengan demikian fungsi logaritma dan fungsi ekponensial merupakan dua fungsi yang saling invers (yang satu merupakan invers dari yang lain).

Contoh 3.7:

Nyatakan logaritma berikut dalam bentuk x + yi

a. log (ei) c. $3^{(3-i)}$

b. log $(2\text{-}2iz)^3$ d. $(2 + 2i)^{1-i}$

<u>Jawab:</u>

c. Misalkan z = ei = 0 + ei, maka $(2 + 2i)^{1-i}$

a. $\theta = \text{arc tan } \frac{e}{0} = \text{ arc tan} \infty = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Jadi log (ei) = ln e + $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$= 1 + $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i$.

b. log $(2\text{-}2iz)^3$ = 3 log (2-2iz), diperoleh $r = 2\sqrt{2},\ \theta = -\frac{\pi}{4}$

$$= 3\ (\ln\ 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\ i) = 3\ \ln\ 2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi\ i$$

c. Gunakan sifat $a^b = e^{b\ \ln a}$, sehingga:

$$3^{(3-i)} = e^{(3-i)\ln 3} = e^{(3-i)(\ln 3 + i.2k\pi)} = e^{3\ln 3 - 2k\pi - i(\ln 3 + 2k\pi)}$$

$$= e^{3\ln 3 - 2k\pi}.e^{-i(\ln 3 + 2k\pi)} = e^{3\ln 3 - 2k\pi}\, cis((-\ln 3 - 2k\pi)i)$$

$$= e^{3\ln 3 - 2k\pi}\left(\cos(-\ln 3 - 2k\pi) + i\sin(-\ln 3 - 2k\pi)\right)$$

d. Gunakan sifat $a^b = e^{b\ \ln a}$, sehingga:

$$(2+2i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\ln(2+2i)} = e^{(1-i)(\ln 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i)}$$

$$= e^{(1-i)(\ln 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i)} = e^{(\frac{\pi}{4} + \ln 2\sqrt{2})}.e^{(\frac{\pi}{4} - \ln 2\sqrt{2})i}$$

$$= e^{\frac{\pi}{4}}.e^{\ln 2\sqrt{2}}\left(cis(\frac{\pi}{4} - \ln 2\sqrt{2})i\right)$$

$$= 2\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos(\frac{\pi}{4} - \ln 2\sqrt{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \ln 2\sqrt{2})\right)$$

Contoh 3.8:

Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan berikut:

a. $\log z = \frac{\pi}{4} i$ b. $\log z = 1 + \pi i$ c. $e^{2z+1} = -3$

Jawab:

a. $\log z = \frac{\pi}{4} i$, misalkan $z = re^{i\theta}$ maka,

$\log z = \ln r + i\theta = 0 + \frac{\pi}{4} i$. Karena itu $\ln r = 0 \Leftrightarrow r = 1$

dan $\theta = \frac{\pi}{4}$. Sehingga untuk $z = re^{i\theta}$,

Jadi $z = 1.\ re^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i$

b. $\log z = 1 + \pi i$ (serupa dengan b)

$\log z = \ln r + i\theta = 1 + \pi i$, diperoleh $\ln r = 1 \Leftrightarrow r = e$,

dan $\theta = \pi$. Jadi $z = re^{i\theta} = e.e^{\pi i} = e\, cis\, \pi\, i$

$z = e(\cos\pi + i\sin\pi) = e(-1+0) = -e.$

c. $e^{2z+1} = -3$, dengan mengambil logaritma kedua ruas:

$\log\left(e^{2z+1}\right) = \log(-3)$, maka $2z + 1 = \ln 3 + (\pi + 2k\pi)\, i$

$z = ½ (\ln 3 - 1 + (\pi + 2k\pi)\, i)$

5. Fungsi Trigonometri

Berdasarkan penurunan rumus Euler diperoleh bahwa $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ dan $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$. Dengan menjumlahkan dan mengurangkan kedua rumus tersebut.

Kurangkan:	Tambahkan:
$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ $-$ $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$ Sehingga: $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ $+$ $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z$ Sehingga: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

Dari proses di atas, diperoleh beberapa definisi fungsi trigonometri berikut.

Definisi 3.4

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Teorema 3.3

Sifat-sifat yang sudah dikenal dalam fungsi trigonometri bilangan real juga berlaku untuk fungsi trogonometri kompleks.

1) $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$
2) $$1 + \tan^2 z = \sec^2 z$$
3) $$1 + \cot^2 z = \csc^2 z$$
4) $\sin(-z) = -\sin z$
5) $\cos(-z) = \cos z$
6) $\tan(-z) = -\tan z$
7) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
8) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$
9) $\tan(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \pm \tan z_1 \tan z_2}$

10) sin 2z = 2 sin z cos z
11) cos 2z = 2cos^{2}z -1 = 1 – 2sin^{2}z

Bukti:

1) Diketahui:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{dan} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}}{-4}\right) + \left(\frac{e^{2iz} + 2e^0 + e^{-2iz}}{4}\right)$$

$$= \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (Terbukti)

2) Diketahui : $\tan z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$, maka

$$1 + \tan^2 z = 1 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}\right)^2$$

$$1+\tan^2 z = 1 + \frac{e^{2iz} - 2e^0 + e^{-2iz}}{-1\left(e^{2iz} + 2e^0 + e^{-2iz}\right)}$$

$$1+\tan^2 z = \frac{e^{2iz} + \ 2 + e^{-2iz}}{\left(e^{2iz} + \ 2 + e^{-2iz}\right)} - \frac{e^{2iz} - \ 2 + e^{-2iz}}{\left(e^{2iz} + \ 2 + e^{-2iz}\right)}$$

$$1+\tan^2 z = \frac{4}{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}} = \left(\frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}\right)^2 = \sec^2 z$$

$\therefore$ terbukti

3) $1+\cot^2 z = \csc^2 z$

$$1+\cot^2 z = 1 + \left(\frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)\left(\frac{i\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)$$

$$1+\cot^2 z = 1 + \left(\frac{-1\left(e^{2iz}+2e^0+e^{-2iz}\right)}{e^{2iz}-2e^0+e^{-2iz}}\right)$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}} - \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}$$

$$= \frac{-4}{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}} = \frac{(2i)^2}{(e^{iz} - e^{-iz})^2}$$

$$= \left(\frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}\right)^2 = \csc^2 z$$

4) $\sin(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{z}}{2i} = \frac{-\left(e^{z} - e^{-iz}\right)}{2i} = -\sin z$

5) $\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-iz}}{2} = \cos z$

6) $\tan(-z) = \frac{e^{i(-z)} - e^{-i(-z)}}{i\left(e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}\right)} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{i\left(e^{-iz} + e^{iz}\right)} = \frac{-\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}$

= tan z

7) $\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \frac{e^{iz_1} . e^{iz_2} - e^{-iz_1} . e^{-iz_2}}{2i}$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)}{2i}$$

$$= \frac{(\cos z_1 \cos z_2 + i\cos z_1 \sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2 + i^2 \sin z_1 \sin z_2)}{2i}$$
$$- \frac{(\cos z_1 \cos z_2 - i\sin z_2 \cos z_1 - i\sin z_1 \cos z_2 + i^2 \sin z_1 \sin z_2)}{2i}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \frac{2i\sin z_2 \cos z_1 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{2i}$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_2 \cos z_1 + \sin z_1 \cos z_2$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

Dengan cara sama untuk:

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \frac{e^{i(z_1 - z_2)} - e^{-i(z_1 - z_2)}}{2i}$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \frac{e^{iz_1}.e^{-iz_2} - e^{-iz_1}.e^{iz_2}}{2i}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2)}{2i}$$
$$= \frac{(\cos z_1 \cos z_2 - i\cos z_1 \sin z_2 + i\sin z_1 \cos z_2 - i^2 \sin z_1 \sin z_2)}{2i}$$
$$- \frac{(\cos z_1 \cos z_2 + i\sin z_2 \cos z_1 - i\sin z_1 \cos z_2 - i^2 \sin z_1 \sin z_2)}{2i}$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \frac{-2i\sin z_2 \cos z_1 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{2i}$$

$$\sin(z_1 - z_2) = -\sin z_2 \cos z_1 + \sin z_1 \cos z_2$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

8) $\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2}$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)}{2}$$

$$= \frac{(\cos z_1\, cosz_2 + i\sin z_2\cos z_1 + i\sin z_1\cos z_2 + i^2\sin z_1\sin z_2)}{2}$$
$$+ \frac{(\cos z_1\cos z_2 - i\sin z_2\cos z_1 - i\sin z_1\cos z_2 + i^2\sin z_1\sin z_2)}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{2\cos z_1\cos z_2 + 2i^2\sin z_1\sin z_2}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$$

Dengan cara sama untuk:

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \frac{e^{iz_1}e^{-iz_2} + e^{-iz_1}e^{iz_2}}{2}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2)}{2}$$

$$= \frac{(\cos z_1\, cosz_2 - i\sin z_2\cos z_1 + i\sin z_1\cos z_2 - i^2\sin z_1\sin z_2)}{2}$$
$$+ \frac{(\cos z_1\cos z_2 + i\sin z_2\cos z_1 - i\sin z_1\cos z_2 - i^2\sin z_1\sin z_2)}{2}$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \frac{2\cos z_1\cos z_2 + 2\sin z_1\sin z_2}{2}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1\sin z_2$$

9) $\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1\tan z_2}$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{i(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)})}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{i(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2})}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)}{i[(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)]}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{2i\cos z_1 \sin z_2 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{i(2\cos z_1 \cos z_2 + 2i\sin z_1\, i\sin z_2)}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{2i(\cos z_1 \sin z_2 + \sin z_1 \cos z_2)}{2i(\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2)}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}$$

Kalikan dengan: $\frac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2}$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\dfrac{\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}{\dfrac{\cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\dfrac{\sin z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} + \dfrac{\cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}{\dfrac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} - \dfrac{\sin z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}$$

$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2}$$

Dengan cara sama untuk:

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{\tan z_1 - \tan z_2}{1 + \tan z_1 \tan z_2}$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{i(e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)})}$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{e^{iz_1}e^{-iz_2} - e^{-iz_1}e^{iz_2}}{i(e^{iz_1}e^{-iz_2} + e^{-iz_1}e^{iz_2})}$$

$$= \frac{(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2)}{i[(\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2)]}$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{-2i\cos z_1 \sin z_2 + 2i\sin z_1 \cos z_2}{i(2\cos z_1 \cos z_2 - 2i\sin z_1\, i\sin z_2)}$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{2i(\sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2)}{2i(\cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2)}$$

Kalikan dengan: $\frac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2}$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{\frac{\sin z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} - \frac{\cos z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}{\frac{\cos z_1 \cos z_2}{\cos z_1 \cos z_2} + \frac{\sin z_1 \sin z_2}{\cos z_1 \cos z_2}}$$

$$\tan(z_1 - z_2) = \frac{\tan z_1 - \tan z_2}{1 + \tan z_1 \tan z_2}$$

Pembuktian 9) dan 10) diserahkan kepada pembaca.

6. Fungsi Hiperbolik

Fungsi hiperbolik diturunkan sebagai kombinasi dari fungsi trigonometri.

Definisi 3.5:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \qquad \coth z == \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Selanjutnya, kita mempelajari hubungan antara fungsi trigonometri dan fungsi hiperbolik melalui pembuktian teorema berikut.

Teorema 3.4:

Hubungan antara fungsi trigonometri dan hiperbolik:

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z, \quad \tan iz = i \tanh z$$
$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z, \quad \tanh iz = i \tan z.$$

Bukti:

1) $\sin iz = i \sinh z$, dengan menerapkan fungsi sinus trigonometri diperoleh:

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z})}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$
$$= -i\left(\frac{e^{-z} - e^{z}}{2}\right) = i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i \sin hz$$

2) $\cos iz = \cosh z$,, dengan menerapkan fungsi kosinus trigonometri diperoleh:

$$\cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^{z})}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \cosh z$$

Bukti lain dapat dilakukan melalui akibat dari teorema 3.4 berikut ini:

Teorema 3.5:

Jika z = x + iy maka:

1) sin z = sin (x+iy) = sin x cosh y+ i cos x sinh y
2) cos z = cos (x+iy) = cos x xosh y - i sin x sinh y
3) sinh z = sinh x cos y + i cosh x sin y
4) cosh z = cosh x cos y + i sinh x sin y

Bukti: 1) sin z = sin(x+iy) = $\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) = \frac{1}{2i}\, e^{-y} e^{ix} - \frac{1}{2i}\, e^{y} e^{-ix}$

$$= \frac{1}{2i} e^{-y}(\cos x + i\, sinx) - \frac{1}{2i} e^{y}(\cos x - i\, sinx)$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})cosx + i.\frac{1}{2i}(e^{-y} + e^{y})\sin x$$
$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\sin x + \frac{1}{2i}.\frac{i}{i}(e^{-y} - e^{y})cosx$$
$$= \sin x\frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) - i\frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y})cosx$$
$$= \mathrm{coshy}\sin \mathrm{x} + \mathrm{i}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y})\mathrm{cosx}$$
$\therefore \sin \mathrm{z} = \sin \mathrm{x}\, \mathrm{coshy} + \mathrm{i}\cos \mathrm{x}\sinh \mathrm{y}$ (terbukti).

<u>Bukti:</u> 2) cosz = cos (x+iy) = $\frac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right)$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right) = \frac{1}{2}\, e^{-y}e^{ix} + \frac{1}{2}\, e^{y}e^{-ix}$$
$$= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\,sinx) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\,sinx)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})cosx + i\frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y})\sin x$$
$$= \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x - i\frac{1}{2}(e^{y} - e^{y})\sin x$$
$\therefore$ $\mathrm{cosz} = \cos \mathrm{x}\cosh \mathrm{y} - \mathrm{i}\sin \mathrm{x}\sinh \mathrm{y}$ (terbukti).

Pada trigonometri berlaku sifat bahwa:
sin z = sin (x+iy) = sin x **cos(iy)** + cos x **sin (iy)** ....(i)
cos z = cos (x+iy) = cos x **cos (iy)** - sin x **sin (iy)**...... (ii)
Akibat dari (i) dan (ii): sin (iy) = i sinh y dan cos (iy) = cosh y. Karena itu juga berlaku untuk: $\sin iz = i\sinh z,$ dan $\cos iz = \cosh z.$

<u>Bukti</u>: 3) sinh z = sinh (x+iy) = $\frac{1}{2}\left(e^{(x+iy)} - e^{(-x-iy)}\right)$
$$=\frac{1}{2}\, e^{x}e^{iy} - \frac{1}{2}\, e^{-x}e^{-iy}$$
$$= \frac{1}{2}e^{x}(\cos y + i\,siny) - \frac{1}{2}e^{-x}(\cos y - i\,siny)$$
$$= \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})cosy + i.\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\sin y$$

$= \sinh \mathrm{x}\cos \mathrm{y} + \mathrm{i}\cosh \mathrm{x}\sin$ y.

Bukti: 4) cosh z = cosh (x+iy) = $\frac{1}{2}\left(e^{(x+iy)}+e^{(-x-iy)}\right)$

$= \frac{1}{2}\, e^{x}e^{iy} + \frac{1}{2}\, e^{-x}e^{-iy}$

$= \frac{1}{2} e^{x}(\cos y + i \sin y) + \frac{1}{2} e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

$= \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\cos y + i.\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) \sin y$

$= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$

Berdasarkan hubungan tersebut dapat diperlihatkan definisi fungsi sinus dan kosinus hiperbolik berikut.

$\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ dan $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

(i) Diketahui: $\sin iz = i \sinh z$, maka $\sinh z = \frac{\sin iz}{i}$ dari fungsi sinus trigonometri diperoleh: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ maka

$\sinh z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^{i^2 z}-e^{-i^2 z}}{2i^2} = \frac{e^{-z}-e^{z}}{-2} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ ∴ terbukti

(ii) Diketahui: $\cos iz = \cosh z$, dari fungsi kosinus trigonometri diperoleh: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ maka $\cosh z =$

$\cos iz = \frac{e^{i^2 z}+e^{-i^2 z}}{2} = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ ∴ terbukti.

Beradasarkan fungsi sinus dan kosinus hiperbolik tersebut menjadi dasar penurunan definisi fungsi hiperbolik lainnya, misalnya tanh z berikut ini.

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$

Diketahui: $\sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$\tanh z = \frac{\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}}{\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$

Teorema 3.6:

Sifat berikut ini berlaku:

a. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ b. $1 - \tanh^2 z = \sec^2 z$

c. $\coth^2 z - 1 = \cosh^2 z$ d. $\sinh(-z) = -\sinh z$

e. $\cosh(-z) = \cosh z$ f. $\tanh(-z) = -\tanh z$

g. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

h. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

i. $\tanh(z_1 \pm z_2) = \dfrac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$

Bukti:

(a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

Diketahui: $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$

Bukti ruas kiri:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(e^{2z}+2+e^{-2z})-(e^{2z}-2+e^{-2z})}{4} = 1.$$

$\therefore$ terbukti

(b) $1 - \tanh^2 z = \sec^2 z$

Bukti ruas kiri:

$$1 - \tanh^2 z = 1 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{e^{2z}+2+e^{-2z}}$$

$$= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}-e^{2z}+2-e^{-2z}}{e^{2z}+2+e^{-2z}}$$

$$= \frac{4}{e^{2z}+2+e^{-2z}} = \left(\frac{2}{e^z+e^{-z}}\right)^2 = \sec^2 z$$

(c) $\coth^2 z - 1 = \operatorname{csch}^2 z$

Bukti ruas kiri:

$$coth^2 z - 1 = (\coth z)(\coth z) - 1$$
$$= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right)\left(\frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}\right) - 1$$
$$= \left(\frac{e^{2z} + e^0 + e^0 + e^{-2z}}{e^{2z} - e^0 - e^0 + e^{-2z}}\right) - 1$$
$$= \left(\frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}\right) - 1$$
$$= \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{e^{2z} - 2 + e^{-2z}} - \frac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}$$
$$= \frac{4}{(e^z - e^{-z})^2} = \left(\frac{2}{e^z - e^{-z}}\right)^2$$
$$karena\ \frac{2}{e^z - e^{-z}} = \operatorname{csch} z, maka$$

$coth^2 z - 1 = csch^2 z$ $\quad\therefore$ terbukti

(d) $\sinh(-z) = -\sinh z$

Diketahui: $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ maka

$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^z}{2} = -\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = -\sinh z \therefore$ terbukti

(f) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

Bukti: $sinh(z_1 + z_2) = \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2}$

$$= \frac{e^{(z_1+z_2)} - e^{-(z_1+z_2)}}{2} \cdot \frac{2}{2} \quad = \frac{2e^{(z_1+z_2)} - 2e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$
$$= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4}$$

Dilakukan manipulasi aljabar pada pembilang:

$e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} =$

$e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} -$

$e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{z_2}$

$$= \frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{z_1}e^{-z_2}-e^{-z_1}e^{z_2}-e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} +$$

$$\frac{e^{z_1}e^{z_2} - e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} - e^{-z_1}e^{-z_2}}{4}$$

$$= \left(\frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2}\right)$$

$$= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \ \sinh z_2 \ \therefore \text{terbukti}$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan:

$sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \ \sinh z_2$

(g) $cosh(z_1 + z_2) = cosh\, z_1\, cosh\, z_2 - sinh\, z_1\, sinh z_2$

Bukti: $\boldsymbol{cosh(z_1 + z_2)} = \frac{e^{(z_1+z_2)}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}$

$$= \frac{e^{(z_1+z_2)}+e^{-(z_1+z_2)}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2e^{(z_1+z_2)}+2e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{e^{(z_1+z_2)} + e^{(z_1+z_2)} + e^{-(z_1+z_2)} + e^{-(z_1+z_2)}}{4}$$

$$= \frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4}$$

Dilakukan manipulasi aljabar pada pembilang:

$$= \left(\frac{e^{z_1}e^{z_2} + e^{z_1}e^{-z_2} + e^{-z_1}e^{z_2} + e^{-z_1}e^{-z_2}}{4}\right) +$$

$$\left(\frac{\mathbf{e^{z1}e^{z2} - e^{z1}e^{-z2} - e^{-z1}e^{z2} + e^{-z1}e^{-z2}}}{\mathbf{4}}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{z_1}+e^{-z_2}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1}-e^{-z_2}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\right)$$

$$= \cosh z_1 \ + \cosh z_2 + \sinh z_1 \ \sinh z_2 \ \therefore \text{terbukti}$$

(i) $\tanh(z_1 + z_2) = \frac{tanh\, z_1+tanh\, z_2}{1+tanh\, z_1\, tanh\, z_2}$

Bukti:

$$= \frac{e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2}}{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}} \cdot \frac{2(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{2(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}$$

$$= \frac{2(e^{z_1+z_2} - e^{-z_1-z_2})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})} : \frac{2(e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}$$

$$= \frac{\dfrac{e^{z_1+z_2}+e^{z_1+z_2}-e^{-z_1-z_2}-e^{-z_1-z_2}+e^{z_1-z_2}-e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}}{\dfrac{e^{z_1+z_2}+e^{z_1+z_2}+e^{-z_1-z_2}+e^{-z_1-z_2}+e^{z_1-z_2}-e^{z_1-z_2}+e^{-z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}}$$

$$= \frac{\dfrac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})+(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}}{1+\dfrac{(e^{z_1}-e^{-z_1})(e^{z_2}-e^{z_2})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})(e^{z_2}+e^{-z_2})}}$$

$$= \frac{\dfrac{(e^{z_1}-e^{-z_1})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})}+\dfrac{(e^{z_2}-e^{-z_2})}{(e^{z_2}+e^{-z_2})}}{1+\dfrac{(e^{z_1}-e^{-z_1})}{(e^{z_1}+e^{-z_1})}\dfrac{(e^{z_2}-e^{-z_2})}{(e^{z_2}+e^{-z_2})}} = \frac{\tanh z_1 + \tanh z_2}{1+\tanh z_1 \tanh z_2}$$

Contoh 3.9:

Nyatakanlah bilangan kompleks berikut dalam bentuk x + iy

a. $\cos\dfrac{\pi}{3}$ b. $\sin\dfrac{\pi}{3}i$

c. $\sinh\,(i+\dfrac{\pi}{6})$ d. $\tan\,(-\dfrac{\pi}{6}i)$

Jawab:

a. $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\,(\dfrac{\pi}{3}+0i) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cosh 0 - i\sin\dfrac{\pi}{3}\sinh 0$

$= \dfrac{1}{2}.1 - i\,.\,\dfrac{1}{2}\sqrt{3}.0 = \dfrac{1}{2}.$

b. $\sin\dfrac{\pi}{3}i = \sin\,(0+\dfrac{\pi}{3}i) = \sin 0\cosh\dfrac{\pi}{3} + i\cos 0\,\sinh\dfrac{\pi}{3}$

$$= 0 \cosh\frac{\pi}{3} + i.1 \sinh \frac{\pi}{3} = i \sinh \frac{\pi}{3}.$$

c. $\sinh\ (i + \frac{\pi}{6}) = \sinh i \cos \frac{\pi}{6} + i \cosh i \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \sinh i \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cosh i \,.\, \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \sinh i + \frac{1}{2} i \cosh i.$$

d. $\tan\ (-\frac{\pi}{6} i) = \dfrac{\sin(-\frac{\pi}{6} i)}{\cos(-\frac{\pi}{6} i)} = \dfrac{-\sin(\frac{\pi}{6} i)}{\cos(\frac{\pi}{6} i)} = \dfrac{-\sinh\frac{\pi}{6}}{\cosh\frac{\pi}{6}} i$

Contoh 3.10:

Tentukan nilai z yang memenuhi persamaan:

a. $\cosh z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin 2z = \cosh 6$

Jawab:

a. Misalkan $z = x + iy$; x, y real

$\cosh z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 0i = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

sehingga diperoleh:

$\cosh x \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ….(i) dan $\sinh x \sin y = 0$ .....(ii).

Dari (ii) jika $\sin y = 0$ maka $y = 0 + k\pi$, subtitusi ke (i)

$\cosh x \cos k\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cosh x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(tidak ada x yang memenuhi, ingat $\cosh x \geq 1$).

Jika $\sinh x = 0$ maka $x = 0$, subtitusi ke (i)

$\cosh 0 \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$

Jadi nilai z yang memenuhi persamaan adalah:

$z = x + yi = 0 + (\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi)\, i = (\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi)\, i.$

b. Misalkan z = x + yi; x, y real

$\sin 2z = \cos 6$

$\Leftrightarrow \sin 2x \cosh 2y + i \cos 2x \sinh 2y = \cosh 6 + 0i$

$\Leftrightarrow \sin 2x \cosh 2y = \cosh 6$ & $\cos 2x \sinh 2y = 0$

Untuk $\cos 2x \sinh 2y = 0$, maka:

Jika $\sinh 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$, subtitusi ke:

$\sin 2x \cosh 0 = \cosh 6 \Leftrightarrow \sin 2x = \cosh 6 > 1$ (tm)

Jika $\cos 2x = 0, \Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi$

Subtitusi ke: $\sin 2x \cosh 2y = \cosh 6$ maka:

$\sin 2\,(\pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi) \cosh 2y = \cosh 6$

$\Leftrightarrow \sin(\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi) \cosh 2y = \cosh 6$

$\Leftrightarrow \pm 1 \cosh 2y = \cosh 6$

untuk $\cosh 2y = \cosh 6 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$(mm)

untuk $-\cosh 2y = \cosh 6 \Leftrightarrow -2y = 6 \Leftrightarrow y = -3$(tm)

Jadi nilai z yang memenuhi persamaan adalah:

$z = x + iy = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi + 3i$, k bulat.

.

7. Invers Fungsi Trigonometri

Invers fungsi trigonometri didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.6:

Invers fungsi trigonometri w = sin z adalah w = $\sin^{-1}$z, dengan syarat bahwa w = $\sin^{-1}$z jika hanya jika z = sin w.

Jika z = sin w maka w = $\sin^{-1}$z dinamakan *invers sinus* dari z atau *arcus sinus* dari z. Dengan cara yang sama kita mendefinisikan invers fungsi trigonometri $\cos^{-1}$, $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$, $\tan^{-1}$, $\cot^{-1}$. Fungsi-fungsi tersebut adalah fungsi bernilai banyak dan direpresentasikan sebagai logaritma natural. Berikut ini definisi invers fungsi trigonometri yang telah dihilangkan konstanta penjumlahan $2k\pi i$, k = 0, ±1, ±2 dari suku-suku logaritmanya.

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) \qquad \csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) \qquad \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

Bukti:

(1) $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$

Misalkan: $z = \sin w$ dan $w = \arcsin z = \sin^{-1} z$, sementara

$\sin w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2i}$

$\Leftrightarrow e^{iw} - 2iz - e^{-iw} = 0$ kalikan dengan e^{iw}, sehingga

$\Leftrightarrow e^{2iw} - 2iz\, e^{iw} - 1 = 0$, dengan formula abc

$\Leftrightarrow e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = \frac{2iz \pm 2\sqrt{1-z^2}}{2} \Leftrightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$

$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$, karena $\pm\sqrt{1-z^2}$ digantikan dengan

$\sqrt{1-z^2}$ sekarang $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}$, maka:

$\Leftrightarrow e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1-z^2}$, atau

$\Leftrightarrow$ $w = 2k\pi + \frac{1}{i}(\ln iz \pm \sqrt{1-z^2})$; k = 0,± 1 , ± 2 , ...

$w = 0$, bilamana $z = 0$, untuk $k = 0$, sehingga:

$w = \frac{1}{i}\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$, karena $w = \sin^{-1} z$ maka

$\sin^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(iz \pm \sqrt{1-z^2})$ (terbukti)

(2) $\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

Misalkan: $z = \cos w$ maka $w = \cos^{-1} z$, sehingga

$z = \cos w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}$

$e^{iw} + e^{-iw} = 2z \Leftrightarrow e^{iw} - 2z - e^{-iw} = 0$ (dikali e^{iw})

$e^{2iw} - 2ize^{iw} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iw} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2-4}}{2}$

$\Leftrightarrow e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$ dipilih $\sqrt{1-z^2}$

$\Leftrightarrow e^{iw} = z + \sqrt{z^2-1}$,

Untuk $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\Leftrightarrow e^{i(w-2k\pi)} = z + \sqrt{z^2-1}$

$w = 2k\pi + \dfrac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$, $w = 0, z = 0$, bila $k = 0$,

$w = \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ (terbukti)

(3) $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$

Misalkan z = tan w maka $w = \tan^{-1} z$, sehingga:

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}$$

$\Leftrightarrow zi\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) = e^{iw} - e^{-iw}$

$\Leftrightarrow zie^{iw} + zie^{-iw} = e^{iw} - e^{-iw}$

$\Leftrightarrow zie^{iw} - e^{iw} = -zie^{-iw} - e^{-iw}$

$\Leftrightarrow e^{iw}(iz - 1) = e^{-iw}(-iz - 1)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{iw}}{e^{-iw}} = \frac{-iz-1}{iz-1}$ maka $e^{2iw} = \frac{-(iz+1)}{iz-1}$

$\Leftrightarrow e^{2i(w-k\pi)} = \frac{iz+1}{1-iz}, w = 0, z = 0, k = 0,$ sehingga:

$w = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ (terbukti)

(4) $\mathbf{\csc^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)}$

Misalkan $w = \csc^{-1} z$, maka

$$z = \csc w = \frac{1}{\sin w} = \frac{1}{\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}} = \frac{2i}{e^{iw} - e^{-iw}}$$

$\Leftrightarrow ze^{iw} - ze^{-iw} = 2i \Leftrightarrow ze^{iw} - ze^{-iw} - 2i = 0$

$\Leftrightarrow ze^{2iw} - z - 2ie^{iw} = 0$

$\Leftrightarrow e^{iw} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4(-z)(z)}}{4} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+4z^2}}{2z}$

$e^{iw} = \frac{i \pm \sqrt{z^2 - 1}}{z}$, untuk $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}, k = 0, \pm 1, \pm 2$

$\Leftrightarrow e^{i(w-2k\pi)} = \frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}$

$w = 2k\pi + \frac{1}{i} \ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right), w = 0, z = 0,$ sehingga:

$w = \csc^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right)$ (terbukti)

(5) $\mathbf{sec^{-1} z = \frac{1}{i} \ln \left(\frac{i+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)}$. Misalkan $\mathbf{w = sec^{-1} z}$, maka

$$z = \sec w = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}} = \frac{2}{e^{iw}+e^{-iw}}$$

$z\left(e^{iw}+e^{-iw}\right) = 2 \Leftrightarrow ze^{iw}+ze^{-iw} = 2$

$\Leftrightarrow ze^{iw}+ze^{-iw}-2 = 0$ (kalikan dengan e^{iw})

$\Leftrightarrow ze^{2iw}-2e^{iw}+z = 0$

$\Leftrightarrow e^{iw} = \frac{2\pm\sqrt{4-4zz}}{2z} \Leftrightarrow e^{iw} = \frac{2\pm\sqrt{4-4z^2}}{2z} \Leftrightarrow e^{iw} = \frac{1\pm\sqrt{1-z^2}}{z}$

untuk $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}, \quad k = 0, \pm1, \pm2$

$\Leftrightarrow e^{i(w-2k\pi)} = \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$

$\Leftrightarrow w = 2k\pi + \frac{1}{i}\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$, $w = 0, z = 0, k = 0$, sehingga:

$w = \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$ (terbukti)

(6) $\mathbf{cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{z+i}{z-i}\right)}$. Misalkan $\mathbf{w = cot^{-1} z}$ maka

$$z = \cot w = \frac{1}{\tan w} = \frac{1}{\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}} = \frac{i\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)}{e^{iw}-e^{-iw}}$$

$\Leftrightarrow z\left(e^{iw}-e^{-iw}\right) = i\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)$

$\Leftrightarrow ze^{iw}-ze^{-iw} = ie^{iw}+ie^{-iw}$

$\Leftrightarrow ze^{iw}-ie^{iw} = ze^{-iw}+ie^{-iw}$

$\Leftrightarrow e^{iw}(z-i) = e^{-iw}(z+i)$

$\Leftrightarrow \frac{e^{iw}}{e^{-iw}} = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow e^{2iw} = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow e^{2i(w-k\pi)} = \frac{z+i}{z-i}$

$\Leftrightarrow w = k\pi + \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, $w = 0, z = 0, k = 0$, sehingga:

$w = \cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$ (terbukti)

Contoh 3.11:
Tentukan nilai $\sin^{-1}$ (-2i).
Jawab:

$$\sin^{-1}(-2i) = \frac{1}{i}\ln(i(-2i) + \sqrt{1-(-2i)^2}$$
$$= \frac{1}{i}\ln(2+\sqrt{1+4} = \frac{1}{i}\ln(2+\sqrt{5})$$
$$= \frac{1}{i}\ln(9+4\sqrt{5}+(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i), k = 0, \pm1, \pm2..,$$

8. Invers Fungsi Hiperbolik

Invers fungsi hiperbolik didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7:
Invers fungsi hiperbolik w = tanh z adalah w = $\tanh^{-1}$z dengan syarat bahwa w = $\tanh^{-1}$ z jika hanya jika z = tanh w.

Jika z = tanh w maka w = $\tanh^{-1}$z dinamakan *invers tangens* dari z atau *arcus tangens* dari z. Dengan cara yang sama kita mendefinisikan invers fungsi hiperbolik $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$, sech^{-1}, $\csc^{-1}$, dan $\cot^{-1}$. Fungsi-fungsi tersebut adalah fungsi bernilai banyak dan direpresentasikan sebagai logaritma natural. Berikut ini definisi invers fungsi hiperbolik dengan logaritma yang telah dihilangkan konstanta penjumlahan 2kπi, k = 0, ±1, ±2….., dari suku-sukunya.

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right) \qquad \text{csch}^{-1} = \ln\frac{\left(1+\sqrt{z^2+1}\right)}{z}$$
$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right) \qquad \text{sech}^{-1} z = \ln\frac{\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)}{z}$$
$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Bukti:

(1) $\mathbf{\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)}$

Misalkan $w = \sinh^{-1} z$ maka z = sinh w

$\Leftrightarrow z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \Leftrightarrow 2z = e^w - e^{-w}$

$\Leftrightarrow e^w - e^{-w} - 2z = 0$ (kalikan dengan e^w)

$\Leftrightarrow e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^w = z \pm \sqrt{z^2+1}$

$\Leftrightarrow e^{(w-2k\pi i)} = z \pm \sqrt{z^2+1}$

$\Leftrightarrow w = 2k\pi i + \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

Untuk $k = 0 \rightarrow w = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

Jadi w = $\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$

(2) $\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$,

Misalkan $w = \cosh^{-1} z$ maka z = cosh w,

$\Leftrightarrow z = \cosh w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$

$\Leftrightarrow 2z = e^w + e^{-w}$ (kalikan dengan e^w)

$\Leftrightarrow e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2+4}}{2} \Leftrightarrow e^w = z + \sqrt{z^2-1}$

$\Leftrightarrow e^{(w-2k\pi i)} = z + \sqrt{z^2-1}$

$\Leftrightarrow w = 2k\pi i + \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$ untuk k = 0, maka

w = $\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

(3) $\operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right)$

Misalkan $w = \operatorname{csch}^{-1} z$, maka z = csch w, sehingga;

$$z = \operatorname{csch} w = \frac{1}{\sinh w} = \frac{2}{e^w - e^{-w}}$$

$$ze^w - ze^{-w} = 2 \quad \Leftrightarrow ze^{2w} - z - 2e^w = 0$$

$$\Leftrightarrow e^w = \frac{2 \pm \sqrt{4+4z^2}}{2z} \quad \Leftrightarrow e^w = \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}$$

$$\Leftrightarrow e^{(w-k\pi i)} = \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \quad \Leftrightarrow w = k\pi i + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)$$

Untuk $k = 0 \Leftrightarrow w = \operatorname{csch}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\right)$

(4) $\operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

Misalkan $w = \operatorname{sech}^{-1} z$, maka $z = \operatorname{sech} w$, sehingga:

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{\cos w} = \frac{2}{e^w + e^{-w}} \Leftrightarrow z(e^w + e^{-w}) = 2$$

$$\Leftrightarrow ze^w + ze^{-w} = 2 \;\Leftrightarrow ze^w + ze^{-w} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ze^{2w} + z - 2e^w = 0$$

$$\Leftrightarrow e^w = \frac{2+\sqrt{4-4z^2}}{2z} \quad \Leftrightarrow e^w = \frac{1 \pm \sqrt{1-z^2}}{z}$$

$$\Leftrightarrow e^{(w-2k\pi i)} = \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} \quad \Leftrightarrow w = 2k\pi i + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

Untuk $k = 0 \Leftrightarrow w = \operatorname{sech}^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

(5) $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Misalkan $w = \tanh^{-1} z$ maka z = tanh w

$$\Leftrightarrow z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$\Leftrightarrow z(e^w + e^{-w}) = e^w - e^{-w}$$

$$\Leftrightarrow ze^w + ze^{-w} = e^w - e^{-w}$$

$$\Leftrightarrow ze^w - e^w = -ze^{-w} - e^{-w}$$

$$\Leftrightarrow e^w(z-1) = e^{-w}(-z-1) \Leftrightarrow \frac{e^w}{e^{-w}} = \frac{-z-1}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{2w} = \frac{-z-1}{-(1-z)} = \frac{z+1}{1-z} \Leftrightarrow e^{2(w-k\pi i)} = \frac{z+1}{1-z}$$

$\Leftrightarrow w = k\pi i + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

untuk $k = 0 \Leftrightarrow w = \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

(6) $\coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

Misalkan $w = \coth^{-1} z$, maka $z = \coth w$, sehingga:

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\cosh w}{\sinh w} = \dfrac{e^w + e^{-w}}{e^w - e^{-w}} \Leftrightarrow z(e^w - e^{-w}) = e^w + e^{-w}$

$\Leftrightarrow ze^w - ze^{-w} = e^w + e^{-w}$

$\Leftrightarrow (z-1)e^w = e^{-w}(z+1) \Leftrightarrow \frac{e^w}{e^{-w}} = \frac{z+1}{z-1}$

$\Leftrightarrow e^{2w} = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow e^{2(w-k\pi i)} = \frac{z+1}{z-1}$

$\Leftrightarrow w = k\pi i + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

untuk $k = 0 \rightarrow w = \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

Contoh 3.12:

Tentukan nilai $\tanh^{-1}(\sqrt{3}i)$.

Jawab:

$\boldsymbol{\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$

$$\boldsymbol{\tanh^{-1}(\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right) = \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{3}i)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2}\ln(1-\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)i\right)}$$

Catatan:

Jika w adalah penyelesaian dari suatu polinom berpangkat n: $P_0(z)\, w^n + P_1(z)\, w^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(z)\, w + P_n(z) = 0$, dimana $P_0(z) \neq 0$, $P_1(z), \ldots, P_n(z)$ adalah suku banyak dalam *z* dengn *n* suatu bilangan bulat positif, maka jika *w* = *f(z)* dinamakan fungsi aljabar dari *z*. Suatu fungsi yang tidak dapat dinyatakan sebagai jawab dari suku banyak dinamakan fungsi transenden. Fungsi logaritma, trigonometri, dan hiperbolik dan fungsi invers adalah cotntoh-contoh yang berkaitan dengan fungsi transenden.

E. Soal Latihan

1. Tentukan nilai fungsi pada tiap-tiap bilangan kompleks berikut.
   a. $f(z) = z^2 - 2z + 3$ pada $z = -i,\ 2+i$
   b. $f(z) = (z - 2)(z + 3)$ pada $z = -2i,\ 1-2i$
   c. $f(z) = e^z$ pada $z = 0,\ 2,\ 1+\pi i$
2. Tunjukkan bahwa persamaan parameter garis bidang z dan persamaan oleh peta $w = z^2$ yang melalui titik P(-2, 1) dan Q (1, -3) adalah $z = 3t - 2 + i(1 - 4t)$ dan $w = 3- 4t - 7t^2 + (-4+22t - 24t^2)i$.
3. (a) Jika $w= f(z)=(z+2)/(2z-1)$, $z \neq 0$, tentukan f(0), f(i), f(1+i)
   (b) Tunjukkan bahwa z adalah fungsi bernilai tunggal dari w.
   Jawab: (a) -2, -i, 1 – i, (b) –i, (2 +i)/3. (No. 50, Murray R. Spiegel, 1991: 66).
4. Nyatakan dalam bentuk u (x, y) + iv (x, y) dan dalam bentuk u (r, α) + iv (r, α) dari fungsi berikut.
   a. $f(z) = z^3 + 2z^2 + z$
   b. $f(z) = 2iz + \text{Im}(2i/z)$
   c. $f(z) = 5 + 2\pi i$
5. Misalkan $w = f(z) = z^2+z+1$.
   a. Nyatakan dalam bentuk $w = u(x, y) + iv(x, y)$
   b. Tentukan nilai-nilai w, kemudian tunjukan secara grafis untuk nilai: (1) $z = 2+i$ (2) $z = 1 - 2i$
6. Jika c_1 dan c_2 adalah konstanta real, tentukan himpunan semua titik di bidang z yang dipetakkan ke dalam garis (a) $u = c_1$ dan (b) $u = c_2$ dalam bidang w oleh fungsi pemetaan $f(z) = z^2+2z+3$.

7. Tuliskan dalam bentuk a + bi, dari fungsi eksponen berikut.
   (a) $e^{i\pi/3}$ (b) $e^{1-i\pi/2}$ (c) $e^{-5\pi i}$ (d) $e^{\ln 3+i\pi/3}$
8. Tentukan semua nilai z sehingga (a) $e^{2z} = 1+2i$, (b) $e^{4z} = 2i$.
9. Tentukan semua nilai z sehingga (a) $(2+2i)^{2i}$, (b) $1^{\sqrt{3}}$.
10. Carilah logaritma setiap bilangan berikut:
    (a) -3i (b) 3 (c) 3 + 3i (d) 6 +8i
11. Tunjukkan bahwa (a) $\ln(-1/2 - 1/2\sqrt{3}i) = (4\pi/3+2k\pi)i$,
    (b) $\ln(z - 1) = ½ \ln((x-1)^3+y^2)+ i \tan^{-1} y/(x-1)$.
    Jawab: (a) $4\pi i/3$ ((No. 67, Murray R. Spiegel, 1991: 74).
12. Carilah semua nilai z yang memenuhi $\log(2z-1) = 2+\pi i$.
13. Carilah semua nilai z yang memenuhi $\log(1 + z) = \pi i$.
14. Tentukan u(x,y) dan v(x,y) dari fungsi berikut:
    a. $f(z) = \cos z$, b. $\sin 2z$ c. $f(z) = z^2e^{2z}$
    ((No. 68, Murray R. Spiegel, 1991: 67).
15. Buktikan bahwa, untuk sembarang z, berlaku bahwa
    (a) $\overline{\sin z} = \sin\bar{z}$ (b) $\overline{\cos z} = \cos\bar{z}$ (c) $\overline{\tan z} = \tan\bar{z}$
16. Buktikan bahwa:
    (a) $\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$ (b) $\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos z)$
17. Gunakan bilangan kompleks untuk menuliskan bilangan berikut dalam bentuk (a+bi).
    a. $\sinh(\pi/2)$ b. $\cosh(2i)$ c. $\sin(1+i)$ d. $\coth(i)$
18. Tentukan nilai z dari persamaan berikut:
    a. $i \sinh 1 = \cos z$ b. $\sinh = i$ c. $\cosh 4 = \sin z$.
19. Tentukan semua nilai dari (a) $\cosh^{-1} 3$, (b) $\cos^{-1} i$.
20. Tentukan semua nilai z (a) $\cosh^{-1} i$, (b) $\sinh^{-z}(\ln(-1))$.

F. Peta Konsep

Fungsi Kompleks

(1) Definisi Fungsi Kompleks

- Definisi 3.1: "Misalkan D himpunan titik pada bidang z dan fungsi f pada D adalah aturan yang menetapkan setiap z di dalam D dengan suatu bilangan kompleks W yang dinamakan nilai fungsi f di z, dituliskan sebagai W = f (z).".
- Definisi 3.2: " Misalkan fungsi domain Df, fungsi g dengan domain Dg, fungsi komposisi f dan g: g(f(z)) ada jika Rf $\cap$ Dg = $\neq \varnothing$".

(2) **Fungsi Bernilai Tungal dan Banyak**

Jika hanya satu nilai w dikaitkan setiap nilai z, dinamakan fungsi bernilai tunggal dari z atau f(z). Jika lebih dari satu nilai w dikaitkan setiap nilaiz, dinamakan fungsi bernilai banyak dari z.

(3) **Transformasi**

Jika $w = u + iv$ adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$ maka dapat ditulis sebagai $w= f(z).= u + iv$

(4) **Fungsi Elementer**

- **Fungsi Suku Banyak**

  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = w$

- **Fungsi Rasional**

  $w = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ *dan* $Q(z)$ adalah suku banyak

- **Fungsi Eksponen**

  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$

- **Fungsi Logaritma**

  Definisi 3.3:
  Jika z real maka log z = ln r + i θ dengan r > 0.

- **Fungsi Trigonometri**

  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ dan $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$

- **Fungsi Hiperbolik**

  $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

  $\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z, \quad \tan iz = i \tanh z$

  $\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z, \quad \tanh iz = i \tan z.$

- **Invers Fungsi Trigonometri**

  $\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \csc^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z}\right)$

  $\cos^{-1} z = \frac{1}{i} \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad \sec^{-1} z = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}\right)$

- **Invers Fungsi Hiperbolik**

  $\sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad \operatorname{csch}^{-1} = \ln \frac{(1 + \sqrt{z^2 + 1})}{z}$

  $\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad \operatorname{sech}^{-1} z = \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - z^2})}{z}$

  $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \quad \coth^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$

Gambar 3.5: Peta Konsep Fungsi Kompleks

BAB IV
LIMIT DAN KEKONTINUAN PEUBAH KOMPLEKS

A. Limit Peubah Kompleks

1. Pengertian Limit

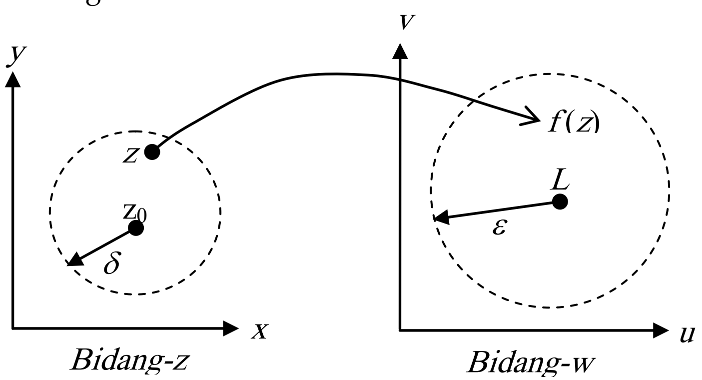
Definisi 4.1:

Suatu fungsi f(z) terdefinisi atau mempunyai limit L untuk z mendekati z_0, kecuali pada $z = z_0$ dituliskan sebagai $\lim_{z\to z0} f(z) = L$.

Jika nilai f(z) mendekati L untuk setiap z mendekati z_0, maka untuk setiap bilangan real positif sangat kecil ε, dapat ditemukan bilangan real positif sangat kecil δ yang bergantung pada ε sedemikian rupa sehingga untuk setiap $z \neq z_0$ di dalam lengkungan $0 < |z - z_0| < \delta$ kecuali pada $z = z_0$, diperoleh $|f(z) - L| < \varepsilon$. Secara simbolik dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = L;\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \to 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon}$$

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.1: Limit

Sebagai contoh awal, perhatikan penerapan definisi limit yang kita kenal dalam Kalkulus berikut ini.

Contoh 4.1

$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, jika $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ni 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

Ambil $|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| < |x-2||x+2| < \delta|x+2|$

$< \delta|(x-2)+4|$; pilih nilai minimun $(1, \delta)$

$$< \delta|1+4| = 5\delta < 5.\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

Contoh 4.2 (No. 23, Murray R. Spiegel, 1991: 56).

(a) Jika $f(z) = z^2$, buktikan bahwa $\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$.

(b) Tentukan $\lim_{z\to z_0} f(z)$, jika $f(z) = \begin{cases} z^2 ; z \neq z_0 \\ 0 ; \ z = z_0 \end{cases}$

Jawab:

(a) Berdasarkan definisi limit

$\lim_{z\to z_0} f(z) = z_0^2$ jika,

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \ \ni 0 < |z - z_0| < \delta$ maka $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, kita harus menghasilkan $\delta > 0$

sehingga $|f(z) - z_0^2| < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$.

Jika $\delta \leq 1$ maka $0 < |z - z_0| < \delta$ mengakibatkan

$|f(z) - z_0^2| = |z^2 - z_0^2| < |z - z_0||z + z_0|$

$|z - z_0||z + z_0| < \delta|z + z_0| = \delta|z - z_0 + 2z_0|$

$< \delta\{|z - z_0| + |2z_0|\} < \delta(1 + 2|z_0|)$

(Ambil δ yang terkecil di antara 1 dan $\varepsilon/(1 + 2|z_0|)$)

Sehingga $|f(z) - z_0^2| < \delta|1 + 2|z_0|| < \varepsilon$, ($\delta = \frac{\varepsilon}{(1+2|z_0|)}$)

(b) Berdasarkan definisi limit $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ berarti bahwa z dekat dengan z_0 tapi berlainan atau kecuali dititik z_0. Sehingga $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0^2$.

Contoh 4.3 (No. 25, Murray R. Spiegel, 1991: 57).

Buktikan bahwa $\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa untuk suatu $\varepsilon > 0$ dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga:

$\left| \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i) \right| < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - i| < \delta$

Untuk $z \neq i$, maka:

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} =$$

$$\frac{[3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i][z - i]}{z - i}$$

$= 3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i$

Untuk suatu $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga:

$[3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i - (4 + 4i)] < \varepsilon$ dimana $0 < |z - i| < \delta$

Jika $\delta \leq 1$, maka $0 < |z - i| < \delta$ mengakibatkan:

$|3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z - 4 + i|$

$= |z - i||3z^2 + (6i - 2)z - 1 - 4i|$

$= |z - i|\,|3(z - i + i)^2 + (6i - 2)(z - i + i) - 1 - 4i|$

$= |z - i||3(z - i)^2 + (12i - 2)(z - i) - 10 - 6i|$

$< \delta\{3|z - i|^2 + |12i - 2||z - i| + |-10 - 6i|\}$

$< \delta\{3 + |12i - 2| + |-10 - 6i|\}$

$< \delta(3 + 12 + 12) = 27\delta < \varepsilon$

Ambil δ yang terkecil diantara 1 dan $\varepsilon/27$, sehingga untuk $\varepsilon > 0$ pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{27}$ maka

$$\left|\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} - (4 + 4i)\right| < 27.\frac{\varepsilon}{27} = \varepsilon.$$

Contoh 4.4

Jika f(z) = z² + 2z, buktikan bahwa $\lim_{z \to i} f(z) = 2i - 1.$

Bukti:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, 0 < |x - L| < \delta \Rightarrow |f(z) - (2i - 1)| < \varepsilon$

$$
\begin{aligned}
|(z^2+2z) - (2i - 1)| &= |(z^2 + 2z - 2i + 1| \\
&= |(z^2 + 1) + (2z - 2i)| \\
&= |(z + i)(z - i) + 2(z - i)| \\
&< |(z - i)||(z + i) + 2| < \delta|(z + i) + 2| \\
&< \delta|(z - i) + 2i + 2| < \delta(1 + 2i + 2) \\
&< \delta(3 + 2i) = \varepsilon \quad (\text{ambil } \delta = \frac{\varepsilon}{3 + 2i})
\end{aligned}
$$

2. Teorema Limit

Teorema 4.1

Jika $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $f(z) = (x, y) + iv(x, y)$ maka $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$ Jika dan hanya jika $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = a$ dan $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = b.$

Bukti:

(a) $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + bi$ artinya $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta \to |f(z) - a - bi| < \varepsilon$

ambil:

$$
\begin{aligned}
|f(z) - a - bi| &= |u(x, y) + i\, v(x, y) - a - bi| \\
&= |(u(x, y) - a) + i(v(x, y) - b)|
\end{aligned}
$$

Sehingga:

$|u(x,y) - a| < |(u(x,y) - a + i(v(x,y) - b)| < \varepsilon$

$|v(x,y) - b| < |(u(x,y) - a + i(v(x,y) - b)| < \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$

Terbukti

(b) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a$, artinya $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$

$0 < |z - z_0| < \delta_1 \to |u(x,y) - a| < \varepsilon_1$ juga

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$, artinya $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni$

$< |z - z_0| < \delta_2 \to |u(x,y) - b| < \varepsilon_2$, maka:

$|f(z) - (a + bi) = |\{u(x,y) - a\} + i\{v(x,y) - b\}|$

$\leq |\, u\,(x,y) - \; a| + |\, v\,(x,y) - \; b\,| \; \leq \dfrac{\varepsilon_1}{2} + \dfrac{\varepsilon_2}{2} \; < \; \varepsilon$

$|\, f(z) - (\, a + b_i\,)\,| < \varepsilon$ atau

Jadi, $\lim_{z\to z_0} f\,(z) = a + \; b_i\,)$ terbukti

Teorema 4.2 (No. 26, Murray R. Spiegel, 1991: 58).
Jika $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada, buktikan bahwa ia tunggal.
Bukti:
Misalkan, $\lim_{z\to z_0} f(z) = l_1$ dan $\lim_{z\to z_0} f(z) = l_2$,
Akan ditunjukkan bahwa $l_1 = l_2$.
Diberikan $\varepsilon > 0$, kita dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga

$|f(z) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$, juga

$|f(z) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$, maka

$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(z) + f(z) - l_2|$

$\leq |l_1 - f(z)| + |f(z) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \varepsilon$

Karena $|l_1 - l_2| < \varepsilon$ positif (bagaimanapun kecilnya) sehingga $|l_1 - l_2|$ haruslah nol, maka $l_1 = l_2$ (Terbukti).

Teorema 4.3 (No. 27, Murray R. Spiegel, 1991: 58).
Jika $\lim_{z \to z_0} g(z) = B \neq 0$, buktikan bahwa terdapat $\delta > 0$ sehingga $|g(z)| > \frac{1}{2}|B|$ untuk $0 < |z - z_0| < \delta$

Bukti:
Karena $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, maka kita dapat menentukan δ sehingga $|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B|$ untuk $0 < |z - z_0| < \delta$.
Misalkan, $B = B - g(z) + g(z)$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} |B| &= |B - g(z) + g(z)| \leq |B - g(z)| + |g(z)| \\ &= |-(g(z) - B)| + |g(z)| < \frac{1}{2}|B| + |g(z)| \end{aligned}$$

Karena $|B| < \frac{1}{2}|B| + |g(z)|$ maka
$|B| - \frac{1}{2}|B| < |g(z)| \Rightarrow |g(z)| > \frac{1}{2}|B|$ (terbukti)

Teorema 4.4
Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ dan $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, maka

1. $\lim_{z \to z_0}(f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z) = A + B$
2. $\lim_{z \to z_0}(f(z) - g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) - \lim_{z \to z_0} g(z) = A - B$
3. $\lim_{z \to z_0}(f(z).g(z)) = \{\lim_{z \to z_0} f(z)\}\{\lim_{z \to z_0} g(z)\} = AB$
4. $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{A}{B}$, B ≠ 0

Bukti:
1. Diketahui:
   $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, jika $|f(z) - A| < \frac{\epsilon}{2}$ bila $0 < |z - z_0| < \delta_1 \ldots (1)$ juga
   $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, jika $|g(z) - B| < \frac{\epsilon}{2}$, bila

$0 < |z - z_0| < \delta_2$.... (2)

Akan ditunjukkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sehingga $|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \varepsilon$, bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$

Kita mempunyai:

$|[f(z) + g(z)] - (A + B)| = |[f(z) - A] + [g(z) - B]|$

$\leq |f(z) - A| + |g(z) - B|$ .....(3)

Menurut hipotesa, diberikan $\varepsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ berdasarkan persamaan (1), (2), dan (3), diperoleh: $|[f(z) + g(z)] - (A + B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$, dipilih δ yang terkecil dari δ_1 dan δ_2, $\min(\delta_1, \delta_2)$. Jadi $\lim_{z \to z_0}(f(z) + g(z)) = A + B$.

2. Bukti 3, diserahkan kepada pembaca
3. Kita mempunyai:

$$|f(z)g(z) - AB| = |f(z)\{g(z) - B\} + B\{f(z) - A\}|$$

$\leq |f(z)||g(z) - B| + |B||f(z) - A|$

$\leq |f(z)||g(z) - B| + (|B| + 1)|f(z) - A|$

.... (4)

Karena $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$, maka dapat ditentukan $\delta_1 > 0$ sehingga $|f(z) - A| < 1$ untuk $0 < |z - z_0| < \delta_1$.

Berdasarkan sifat ketaksamaan 4 diperoleh:

$|f(z) - A| \geq |f(z)| - |A|$, yaitu $1 \geq |f(z)| - |A|$ atau $|f(z)| \leq |A| + 1$, yaitu

$|f(z)| < P$, P konstanta positif.......(5), juga

Karena $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$, $\forall \varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta_2 > 0$ maka $|g(z) - B| < \varepsilon/2P$ untuk $0 < |z - z_0| < \delta_2$......(6).

Karena $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$, maka $\forall\varepsilon > 0$, ditentukan $\delta_3 > 0$ maka $|f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ utk $0 < |z - z_0| < \delta_3$..... (7).

Dengan mensubsitusik persamaan (5), (6), dan (7) ke (4) maka akan diperoleh:

$|f(z)g(z) - AB| < P.\frac{\varepsilon}{2P} + (|B| + 1).\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Untuk $0 < |z - z_0| < \delta$ dimana δ adalah min $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Jadi $|f(z)g(z) - AB| < \varepsilon$ atau $\lim_{z\to z_0}(f(z).g(z)) = AB$.

4. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat ditentukan $\delta > 0$ sehingga:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|Bf(z) - Ag(z)|}{|B||g(z)|} < \varepsilon \text{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Diberikan $\varepsilon > 0$, ditentukan $\delta_1 > 0$ sehingga

$|Bf(z) - Ag(z)| < \frac{1}{2}|B|^2\varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta_1$

Karena $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$, maka kita dapat menentukan $\delta_2 > 0$ sehingga $|g(z)| > \frac{1}{2}|B|$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta_2$

Kemudian, jika δ lebih kecil dari δ_1 dan δ_2 maka dapat dituliskan menjadi:

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|Bf(z) - Ag(z)|}{|B||g(z)|} < \frac{\frac{1}{2}|B|^2\varepsilon}{|B|.\frac{1}{2}|B|} = \varepsilon \text{ bilamana}$$

$0 < |z - z_0| < \delta$

Sehingga $\left|\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon$ atau $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$ (Terbukti)

Contoh 4.5

Hitunglah dengan menggunakan teorema limit berikut.

a. $\lim_{z\to 1}\frac{z-i}{z^2+1}$

b. $\lim\limits_{z\to e^{\pi i/4}}\frac{z^2}{z^4+z+1}$

c. $\lim_{z\to 3-4i}\frac{i\,R(z)^2 - i\,R(z) + Im(z)^2 - 1}{|z|}$

d. $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}$

Jawab:

a. $\lim_{z\to 1}\frac{z-i}{z^2+1} = \frac{\lim\limits_{z\to 1}(z-i)}{\lim\limits_{z\to 1}(z-i).\ \lim\limits_{z\to 1}(z+i)} = \frac{\lim\limits_{z\to 1} 1}{\lim\limits_{z\to 1}(z+i)} = \frac{1}{1+i}$

b. $\lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\frac{z^2}{z^4+z+1} = \frac{\lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\left(\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right)^2}{\lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\left(\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right)^4 + \lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\left(\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)\right) + \lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4} 1}$

$$= \frac{\lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\left(\left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)\right)}{\lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4}\left(e^{\pi i}\right) + \lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4} e^{\frac{\pi i}{4}} + \lim\limits_{z\to e^{\pi i}/_4} 1} = \frac{\operatorname{Cis}\frac{\pi}{2}}{(\operatorname{Cis}\pi)+\left(\operatorname{Cis}\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{(\cos\pi+i\sin\pi)+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)+1}$$

$$= \frac{0+i}{(-1+0)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)+1} = \frac{i}{(-1)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)+1} = \frac{i}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i} \text{ x } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i} = = \frac{2(\sqrt{2}i+\sqrt{2})}{2-(-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(i+1)}{2}$$

c. $\lim_{z\to 3-4i}\frac{i\,R\,(z)^2 - i\,R\,(z) + Im\,(z)^2 - 1}{|z|}$

$$= \lim_{z\to 3-4i}\frac{i\,R\,(x+iy)^2 - i\,R\,(x+iy) + Im\,(x+iy)^2 - 1}{|z|}$$

$$= \lim_{z\to 3-4i}\frac{i\,R(x^2-y^2+2xyi) - i\,x + Im\,(x^2-y^2+2xyi) - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{z\to 3-4i}\frac{i\,(x^2-y^2) - i\,x + 2xy - 1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{z \to 3-4i} \frac{i(x^2-y^2-x)+2xy-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{z \to 3-4i} \left(\frac{(2xy-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{(x^2-y^2-x)i}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{2.3(-4)-1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} + \frac{(3^2-(-4)^2-3)i}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right) = \frac{-25}{5} + \frac{-10}{5}\, i = -5-2i.$$

d. $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^2+1}{z^6+1} = \lim\limits_{z \to i} \frac{(z-i)(z+i)}{(z-i)(z+i)(z^4-z^2+1)}$

$$= \lim_{z \to i} \frac{1}{(z^4-z^2+1)} = \frac{\lim_{z \to i} 1}{\lim_{z \to i}(z^4-z^2+1)}$$

$$= \frac{1}{(i)^4-(i)^2+1} = \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Contoh 4.6

Buktikan bahwa $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ tidak ada

(No. 30, Murray R. Spiegel, 1991: 60).

Bukti:

Jika limit ini ada, maka haruslah tidak bergantung dari caranya z mendekati nol.

(1) Misalkan z → 0 sepanjang sumbu x, maka $y = 0$, diperoleh

$z = x + iy = x$ dan $\bar{z} = x - iy = x$, sehingga:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x-iy)}{(x+iy)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+0}{x+0} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

(2) Misalkan z → 0 sepanjang sumbu y, maka $x = 0$, diperoleh

$z = x + iy = iy$ dan $\bar{z} = x - iy = -iy$,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = = \lim_{y \to 0} -1 = -1$$

Karena kedua cara pendekatan ke nol tidak memberikan jawaban yang sama, maka limit tersebut tidak ada. sehingga $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ tidak ada

B. Kekontinuan Peubah Kompleks

1. Pengertian Kekontinuan

Definisi 4.2

Misalkan *f* (z) terdefinisi dan bernilai tunggal dalam suatu lengkungan dari $z = z_0$ dan pada $z = z_0$ (yaitu lengkungan δ dari z_0). Fungsi *f* (z) dikatakan *kontinu* di $z = z_0$ jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Dengan menggunakan simbol, maka suatu fungsi disebut kontinu di z = z_0 apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta$ maka $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$Suatu fungsi dikatakan kontinu di z = z_0, apabila memenuhi 3 syarat berikut:

(1) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *ada*

(2) $f(z_0)$ *ada, yaitu* $f(z_0)$ *terdefinisi di* z_0

(3) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Contoh 4.7

$$f(z) = \begin{cases} z^2, \ z \neq 0 \\ \\ 0, \ z = z_0 \end{cases}$$

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, tetapi f(z_0) = 0, maka

$\lim_{z \to z_0} f(z) \neq f(z_0)$, berarti f(z) tidak kontinu di z = z_0

Contoh 4.8

Misalkan $f(z) = \frac{z^2+4}{z-2i}$ jika $z \neq 2i$, sedangkan $f(2i) = 5 + 8i$.

a. Buktikan bahwa $\lim_{z \to i} f(z)$ ada dan tentukan nilainya.

b. Apakah $f(z)$ kontinu pada $z = 2i$? Jelaskan.

c. Apakah $f(z)$ kontinu di titik $z \neq 2i$? Jelaskan.

Jawab:

a. $\lim_{z\to i}\frac{z^2+4}{z-2i} = \lim_{z\to i}\frac{(z+2i)(z-2i)}{(z-2i)}$
$= \lim_{z\to i} z + 2i = i + 2i = 3i$

Jadi, $\lim_{z\to i} f(z)$ ada, nilainya yaitu $3i$.

b. (i) $\lim_{z\to 2i}\frac{(z+2i)(z-2i)}{(z-2i)} = \lim_{z\to 2i}\ (z+2i) = 4i$

(ii) $f(2i) = 5 + 8i$

(iii) $\lim_{z\to 2i} f(z) \neq f(2i)$

Jadi, $f(z)$ tidak kontinu pada $z = 2i$

c. (i) $\lim_{z\to 2i}\frac{(z+2i)(z-2i)}{(z-2i)} = \lim_{z\to 2i} z + 2i = 4i$

(ii) $f(z) = z + 2i$ maka $f(2i) = 2i + 2i = 4i$

(iii) $\lim_{z\to 2i} f(z) = f(2i)$

Jadi, $f(z)$ kontinu pada $z \neq 2i$

2. Teorema Kekontinuan

Teorema 4.5

Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi f(z) + g(z), f(z) – g(z), f(z)g(z) dan $\frac{f(z)}{g(z)}$, dengan g(z_0) $\neq$ 0, juga kontinu di z_0. Hasil yang sama juga berlaku untuk kekontinuan pada suatu daerah.

Bukti:

a) Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi f(z) + g(z) juga kontinu di z_0. Syarat f(z) + g(z) kontinu di z_0 adalah

(1) $\lim_{z\to z_0} f(z) + g(z) = A + B$ harus ada

Penjelasan pada pembuktian penjumlahan limit.

(2) f(z_0) + g(z_0) harus ada, yaitu f(z) + g(z) terdefinisi di z_0.

Karena, f(z_0)=A dan g(z_0)=B maka f(z_0) +g(z_0) = A + B

(3) $\lim_{z\to z_0} f(z) + g(z) = A + B$ atau f(z_0) + g(z_0) = A + B

$\lim_{z \to z_0} f(z) + g(z) =$ f(z_0) + g(z_0) maka terbukti f(z) + g(z) kontinu

b) Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi f(z) - g(z) juga kontinu di z_0. Syarat f(z) - g(z) kontinu di z_0 adalah
   (1) $\lim_{z \to z_0} f(z) - g(z) = A - B$ harus ada
   Penjelasan pada pembuktian pengurangan limit.
   (2) f(z_0) - g(z_0) harus ada, yaitu f(z) - g(z) terdefenisi di z_0.
   Karena, f(z_0) = A dan g(z_0)= B maka f(z_0) - g(z_0) = A – B
   (3) $\lim_{z \to z_0} f(z) - g(z) = A - B$, f($z_0$) - g($z_0$) = A - B
   $\lim_{z \to z_0} f(z) - g(z) =$ f(z_0) - g(z_0)
   Jadi terbukti f(z) - g(z) kontinu

c) Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi f(z) + g(z) juga kontinu di z_0. Syarat f(z) + g(z) kontinu di z_0 adalah
   (1) $\lim_{z \to z_0} f(z) . g(z) = A . B$ harus ada
   Penjelasan pada pembuktian perkalian limit.
   (2) f(z_0) . g(z_0) harus ada, yaitu f(z) . g(z) terdefenisi di z_0.
   Karena, f(z_0)=A dan g(z_0)= B maka f(z_0) g(z_0) = A . B
   (3) $\lim_{z \to z_0} f(z) . g(z) = A . B$ atau f(z_0) . g(z_0) = A . B
   $\lim_{z \to z_0} f(z) . g(z) =$ f(z_0) g(z_0) maka
   f(z) . g(z) kontinu

d) Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi $\frac{f(z)}{g(z)}$ juga kontinu di z_0. Syarat $\frac{f(z)}{g(z)}$ kontinu di z_0 adalah:
   (1) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$ harus ada
   Penjelasan pada pembuktian pembagian limit.
   (2) $\frac{f(z)}{g(z)}$ harus ada, yaitu $\frac{f(z)}{g(z)}$ terdefenisi di z_0.
   Karena, f(z_0) = A dan g(z_0)= B maka $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$
   (3) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$ sehingga $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$

maka terbukti $\frac{f(z)}{g(z)}$ kontinu.

Teorema 4.6

Fungsi yang kontinu pada setiap daerah berhingga diantaranya:

a) Semua suku banyak
b) e^z
c) sin z dan cos z

Teorema 4.7

Jika w = f(z) kontinu di z = z_0 dan z = g(ζ) kontinu pada $\zeta = \zeta_0$ dan jika ζ_0 = f (z_0), maka fungsi w = g[f(z)], yang dinamakan fungsi komposisi kontinu di z = z_0. Hal ini kadang-kadang secara singkat diatakan sebagai suatu fungsi kontinu dari fungsi kontinu juga kontinu.

Teorema 4.8

Jika f(z) kontinu dalam suatu daerah tertutup, maka ia terbatas pada daerah tersebut; yaitu terdapat konstanta M sehingga $|f(z)| < M$, untuk semua titik z pada daerah tersebut.

Teorema 4.9

Jika f(z) kontinu dalam suatu daerah, maka bagian real dan khayal dari f(z) juga kontinu dalam daerah tersebut. Teorema ini dapat diungkapkan sebagai berikut:

Jika: (1) f(z) = u(x, y) + iv(x, y)
(2) f(z) terdefinisi pada setiap titik pada domain R
(3) $z_0 = x_0 + y_0 i$ adalah titik di dalam R

Maka fungsi f(z) kontinu di z_0 bila dan hanya bila u(x, y) dan v(x, y) masing-masing kontinu di titik (x_0 , y_0).

Bukti:

Akan dibuktikan $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ bila dan hanya bila

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ dan
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$ sebagaiman ditunjukkan pada pembuktian teorema 4.1 di atas.

C. Penyelesaian Soal dan Latihan

1. Buktikan bahwa $\lim_{z\to 1+i} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1 - \frac{1}{2}i$
2. Buktikan $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B}$, jika $B \neq 0$

   Bukti:

   Untuk setiap $\varepsilon > 0$ kita dapat menentukan $\delta > 0$ sehingga

   $\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(z)-B|}{|B||g(z)|} < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$

   Jika diberikan $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta_1 > 0$ sehingga
   $|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B|^2\varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta_1$

   Karena $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \neq 0$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sehingga
   $|g(z)| > \frac{1}{2}|B|$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta_2$.
   Jika δ lebih kecil dari δ_1 dan δ_2 maka diperoleh:

   $$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(z) - B|}{|B||g(z)|} < \frac{\frac{1}{2}|B|^2\varepsilon}{|B|.\frac{1}{2}|B|} = \varepsilon$$

   bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$ (terbukti)

3. Hitunglah setiap limit berikut ini dengan menggunakan teorema limit
   a. $\lim_{z\to 1+i}(z^2 - 6z + 12)$

   b. $\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(2z+1)}{z^2 - 2z + 4}$

   c. $\lim_{z\to 2e^{\pi i/2}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$

d. $\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

Jawab:

a. $\lim_{z\to1+i}(z^2-6z+12)$

$= \lim_{z\to1+i} z^2 + \lim_{z\to1+i}(-6z) + \lim_{z\to1+i} 12$

$= \left(\lim_{z\to1+i} z\right)\left(\lim_{z\to1+i} z\right) - 6\left(\lim_{z\to1+i} z\right) + \lim_{z\to1+i} 12$

$= (1+i)(1+i) - 6(1+i) + 12 = 6 - 4i.$

b. $\lim_{z\to-2i}\frac{(2z+3)(2z+1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim_{z\to-2i}(2z+3)\ \lim_{z\to-2i}(2z+1)}{\lim_{z\to-2i}(z^2-2z+4)}$

$.= \frac{(3-4i)(1-4i)}{4i} = \frac{-13-16i}{4i} = 4 + \frac{13}{4}i$

c. $\lim_{z\to2e^{\frac{\pi}{2}i}}\frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$

$.= \lim_{z\to2e^{\frac{\pi}{2}i}}\frac{(z+2)\left(z-2e^{\frac{\pi}{2}i}\right)\left(z-2e^{\frac{5\pi}{2}i}\right)}{\left(z-2e^{\frac{\pi}{2}i}\right)\left(z-2e^{\frac{2\pi}{2}i}\right)\left(z-2e^{\frac{5\pi}{2}i}\right)\left(z-2e^{\frac{4\pi}{2}i}\right)}$

$= \lim_{z\to2e^{\frac{\pi}{2}i}}\frac{(z+2)}{\left(z-2e^{\frac{2\pi}{2}i}\right)\left(z-2e^{\frac{4\pi}{2}i}\right)}$

$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}+1}{2\left(e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{2\pi}{2}i}\right)\left(e^{\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{4\pi}{2}i}\right)} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

d. $\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2} = \frac{\lim_{z\to1/2}(2z-3)(4z+i)}{\lim_{z\to1/2}(iz-1)^2}$

$.= \frac{\lim_{z\to\frac{i}{2}}(8z^2+2iz-12z-3i)}{\lim_{z\to\frac{i}{2}}(i^2z^2-2iz+1)}$

$= \frac{2i^2+i^2-6i-3i}{-\frac{i^2}{4}-i^2+1} = \frac{3i^2-9i}{\frac{1}{4}+1+1}$

$$= \frac{4(-3-9i)}{9} = \frac{-4}{3} - 4i$$

4. Hitunglah limit berikut.

   a) $\lim\limits_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} \dfrac{z^2}{(z^4 + z + 1)}$

   b) $\lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z^2 + 4}{(2z^2 + (3 - 4iz) - 6i)}$

   c) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z - \sin z}{z^3}$

   d) $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^2 - 2iz - 1}{(z^4 + 2z^2 + 1)}$

   e) $\lim\limits_{z \to m\pi i} (z - m\pi i) \dfrac{e^z}{\sin z}$

   f) $\lim\limits_{z \to e^{\frac{\pi}{3}i}} (z - e^{\frac{\pi}{3}i}) \dfrac{z}{(z^3 + 1)}$ (Jwb: $\dfrac{1}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$)

   (No. 95, Murray R. Spiegel, 1991: 69).

5. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{\sqrt{z^2 + 3} - 2}{z - 1} = \dfrac{1}{2}$

6. Jika f(z) = $\dfrac{4xy}{x^2 + y^2} - \dfrac{2x^2}{y^2} i$. Buktikan bahwa

   $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ tidak ada.

7. Tunjukkan bahwa jika f(z) = $z^3 + 3z^2 + z$ maka

   $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_0} = 3z_0^{\,2} + 6z_0 + 1$

8. Diberikan fungsi:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - iz + 6}{z - 3i}, & \text{untuk } z \neq 3i \\ 4 + 5i, & \text{untuk } z = 3i \end{cases}$$

a. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 3i} f(z)$ ada dan tentukan nilainya

b. Apakah f(z) kontinue pada $z = 3i$?

9. Diberikan fungsi:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - z + 6}{z - 3i}, & \text{untuk } z \neq 3i \\ 8 + 5i, & \text{untuk } z = 3i \end{cases}$$

a. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 3i} f(z)$ ada dan tentukan nilainya

b. Apakah f(z) kontinue pada $z = 3i$?

10. Diberikan fungsi $f(z) = \dfrac{z^2 + 4}{z^3 + 2z(z - 2iz - 4i)}$, periksa kekontinuan f(z) pada $z = 2i$.

11. Periksa semua titik ketakkontinuan dari fungsi berikut.

a. $f(z) = \dfrac{5z - 6}{z^2 + 2z + 2}$

b. $f(z) = \dfrac{\cosh z}{z^2 + 1}$

c. $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 - 3z + 2}$

d. $f(z) = \dfrac{3z + 8}{z^4 - 81}$

e. $f(z) = \dfrac{z^3 - 1}{z + 1}$

f. $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^3 + 9}$

D. Peta Konsep

(1) Pengertian Limit
Definisi 4.1:
Suatu fungsi f(z) terdefinisi atau mempunyai limit *L* untuk z mendekati z_0, kecuali pada $z - z_0$ dituliskan sebagai $\lim_{z \to z0} f(z) = L.$

$\lim_{z \to z_0} f(z) = L; \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
$\to 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon$

(2) **Terorema Limit**

- Jika
$z_0 = x_0 + iy_0$ dan $f(z) = (x, y) + v(x, y)$ maka
$\lim_{z \to z_0} f(z) = a + b$
Jika dan hanya jika
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a$ dan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b$

- $\lim_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} g(z)$

- $\lim_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = \{\lim_{z \to z_0} f(z)\}\{\lim_{z \to z_0} g(z)\}$

- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)}$, *g(z)* $\neq 0$

Limit Peubah Kompleks

Kekontinuan Peubah Kompleks

(3) Pengertian Kekontinuan
Definisi 4.2
Misalkan *f* (z) terdefinisi dan bernilai tunggal dalam suatu lengkungan dari $z = z_0$ dan pada $z = z_0$ (yaitu lingkungan δ dari z_0). Fungsi *f* (z) dikatakan *kontinu* di $z = z_0$ jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.
suatu fungsi disebut kontinu di z = z_0 apabila $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |z - z_0| < \delta$ dengan syarat:
(1) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *ada*
(2) $f(z_0)$ *ada*,
(3) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

(4) Teorema Kekontinuan
Teorema 4.5
Jika f(z) dan g(z) kontinu di z = z_0, maka fungsi f(z) + g(z), f(z) – g(z), f(z)g(z) dan $\frac{f(z)}{g(z)}$, dengan g(z_0) $\neq$ 0, juga kontinu di z_0.
Teorema 4.7
Jika w = f(z) kontinu di z = z_0 dan z = g(ζ) kontinu pada ζ= ζ_0 dan jika ζ_0 = f (z_0), maka fungsi w = g[f(z)], yang dinamakan fungsi komposisi kontinu di z = z_0.

Gambar 4.2: Peta Konsep Limit dan Kekontinuan

BAB V
PENDIFERENSIALAN PEUBAH KOMPLEKS

A. Definisi Turunan

Pemahaman yang baik tentang limit dan kekontinuan sebagaimana telah dibahas pada bab IV menjadi dasar untuk mempelajari konsep turunan fungsi atau peubah kompleks.

Definisi 5.1

Misalkan fungsi f terdefinisi pada z_0, maka derivatif atau turunan dari f di z_0 didefinisikan sebagai $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

Fungsi f dapat diturunkan di z_0, jika $\Delta z = z - z_0$ atau $z = z_0 + \Delta z$, sehingga bentuk lain dari definisi 5.1 dapat dituliskan sebagai: $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Jika $f'(z_0)$ ada maka dikatakan bahwa fungsi f mempunyai turunan (*differensiable*) di z_0. Representasi/simbol lain dari $f'(z_0)$ adalah $\frac{df}{dz}$ di z_0.

Contoh 5.1

Tentukan turunan dari fungsi berikut:

a. $f(z) = \sin z$ b. $f(z) = \ln z$ c. $f(z) = 3z^2 + 2z + 1$

Jawab:

a. Dengan menggunakan definisi turunan:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sin(z+\Delta z)-\sin(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2z+\Delta z}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}$$

$$= 2\lim_{\Delta z \to 0} \cos\left(z + \frac{\Delta z}{2}\right) . \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta z}{2}\right)}{2.\frac{1}{2}\Delta z}$$

$$= 2\lim_{\Delta z\to 0}\cos\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right).\frac{1}{2}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta z}{\frac{1}{2}\Delta z}$$

$$= 2\lim_{\Delta z\to 0}\cos\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right).\frac{1}{2}.1 = \frac{2}{2}\cos\left(z+\frac{0}{2}\right) = \cos z$$

Jadi turunan dari f(z) = sinz adalah f′(z) = cos z

b. Dengan menggunakan definisi turunan:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\ln(z+\Delta z)-\ln(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\ln\left(\frac{z+\Delta z}{z}\right)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\ln\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)^{\frac{1}{\Delta z}} = \ln\lim_{\Delta z\to 0}\left\{\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)^{\frac{z}{\Delta z}}\right\}^{\frac{\Delta z}{z}.\frac{1}{\Delta z}}$$

$$= \ln\lim_{\Delta z\to 0}\left\{\left(1+\frac{\Delta z}{z}\right)^{\frac{z}{\Delta z}}\right\}^{\frac{1}{z}} = \ln\{e\}^{\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{z}}$$

$$= \ln e^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\ln e = \frac{1}{z}.$$

Jadi turunan dari f(z) = lnz adalah f′(z) = $\frac{1}{z}$.

c. Dengan menggunakan definisi turunan:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{3(z+\Delta z)^2+2(z+\Delta z)+1-(3z^2+2z+1)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{3z^2+6z.\Delta z+\Delta z^2+2z+2\Delta z+1-3z^2-2z-1}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{6z.\Delta z+\Delta z^2+2\Delta z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z(6z+2+\Delta z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}(6z+2+\Delta z) = 6z+2.$$

Jadi turunan f(z) = $3z^2 + 2z + 1$ adalah f ‘(z) = 6z + 2.

Dengan menggunakan definisi dan analisis yang sama dengan contoh 5.1, dapat ditentukan turunan fungsi peubah kompleks lainnya. Hal ini serupa dengan penerapan definisi turunan fungsi pada pembelajaran Kalkulus.

Selanjutnya suatu fungsi yang *differensiable* mengakibatkan fungsi tersebut kontinu, tetapi tidak sebaliknya. Hal ini berarti bahwa kekontinuan suatu fungsi di suatu titik tidak menjamin adanya turunan fungsi dititik itu. Kekontinuan suatu fungsi di suatu titik bukan syarat cukup untuk adanya turunan atau derivatif fungsi dititik itu. Perhatikan penjelasan berikut.

(1) Misalkan $f'(z_0)$ ada, maka:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)}.(z-z_0)$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} \lim_{z\to z_0} (z-z_0)$$

$$= f'(z_0).0 = 0, \text{ sehingga}$$

$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Dengan demikian fungsi f *differensiable* di z_0 mengakibatkan fungsi f kontinu di z_0.

(2) Fungsi f(z) = $|z^2|$ kontinu di semua titik, tetapi derivatif dari fungsi tersebut hanya ada untuk z = 0 saja.

Untuk f(z) = $|z^2|$ = $x^2 + y^2$ maka f(z) = u(x,y)+iv(x,y) atau u(x,y) = $x^2 + y^2$ dan v(x,y) = 0. Oleh karena u(x,y) dan v(x,y) kontinu di semua titik (x,y) maka f(z) juga kontinu di semua titik z, sehingga:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\bar{z}.z-0}{z} = \lim_{z\to z_0} \bar{z} = 0 - 0i = 0.$$

Jadi derivatif f dititik z = 0 ada dan $f'(0) = 0$. Selanjutnya:

Untuk z ≠ 0 maka:

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)}-z\bar{z}}{\Delta z}$$

$= \frac{z\,\bar{z}+z\,\overline{\Delta z}+\Delta z\,\bar{z}+\Delta z\overline{\Delta z}-z\,\bar{z}}{\Delta z} = \frac{z\,\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$

Jadi $f'(z_0)$ ada, maka nilai $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, hal ini bergantung kepada caranya $\Delta z \to 0$ $(\Delta z = \Delta x + i\Delta y)$, yaitu,

Jika $\Delta y = 0$ maka $\Delta z = \Delta x$ dan $\overline{\Delta z} = \Delta x$, sehingga

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{z\,\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z\Delta x +}{\Delta x} + \bar{z} + \Delta x = z + \bar{z} \ldots\ldots (1)$

Jika $\Delta x = 0$ maka $\Delta z = i\Delta y$ dan $\overline{\Delta z} = -i\Delta y$, sehingga

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{z\,\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}$

$= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{z(-i\Delta y)}{i\Delta y} + \bar{z} + i\Delta y = -z + \bar{z} \ldots\ldots (2)$

Jika $f'(z_0)$ ada maka haruslah (1) = (2) $\Leftrightarrow$ $z + \bar{z} = -z + \bar{z}$ atau 2x = -2iy hanya berlaku jika x = y = 0. Dengan demikian $f'(z_0)$ tidak ada untuk (x, y) ≠ 0 atau z ≠ 0. Jadi f(z) = $|z^2|$ tidak mempunyai derivatif untuk z ≠ 0.

Teorema 5.1: Aturan Pendiferensialan

Misalkan fungsi f(z), g(z) dan h(z) diferensiabel untuk setiap titik z dalam daerah D, maka aturan pendiferensialan sebagai berikut.

a. $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) \pm g'(z)$

   Dengan notasi derivatif, maka $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\}$ dapat ditulis sebagai $d\{f(z) \pm g(z)\} = df(z) \pm dg(z)$

   $= f'(z)dz \pm g'(z)dz = \{f'(z) \pm g'(z)\}dz$

b. $\frac{d}{dz}\{c.f(z)\} = c.\frac{d}{dz}f(z) = c.f'(z)$, dimana c konstanta

c. $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$

   $= f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

d. $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z)-f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{\{g(z)\}^2} = \frac{g(z)\,f'(z)-f(z)g'(z)}{\{g(z)\}^2}$, g(z)≠0.

e. Jika w = f(γ) dan γ = g(z), maka turunan fungsi komposisi:

$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\gamma}.\frac{d\gamma}{dz} = f'(\gamma)\frac{d\gamma}{dz} = f'\big(g(z)\big)\frac{d}{dz}g(z)$

$= f'\{g(z)\}g'(z)$, selanjutnya dengan cara yang sama, jika w = f(γ), γ = g(φ) dan φ = h (z) maka $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\gamma}.\frac{d\gamma}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dz}$

f. Jika w = f(γ) maka $\frac{dw}{d\gamma}$ serta γ = f $^{-1}$(w) maka $\frac{d\gamma}{dw}$

Dihubungkan oleh $\frac{dw}{d\gamma} = \frac{1}{\frac{d\gamma}{dw}}$

g. Jika w = g(t) dan z = f(t) dimana t parameter, maka $\frac{dw}{dz} = \frac{dw/dt}{dz/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$.

Bukti:

a. $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)+g(z+\Delta z)-f(z)-g(z)}{\Delta z}$

$= \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} + \lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}$

$= \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z)$ (terbukti)

b. $\frac{d}{dz}\{c.f(z)\} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}c.\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = c.\frac{d}{dz}f(z)$

c. $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\,g(z+\Delta z)-f(z)g(z)}{\Delta z}$

$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)\{g(z+\Delta z)-g(z)\}+g(z)\{f(z+\Delta z)-f(z)\}}{\Delta z}$

$= \lim_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z)\frac{\{g(z+\Delta z)-g(z)\}}{\Delta z} + \lim\limits_{\Delta z\to 0}g(z)\ \frac{\{f(z+\Delta z)-f(z)\}}{\Delta z}$

$= f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$

Bukti d, e, f, dan g diserahkan kepada pembaca.

Contoh 5.2

Gunakan aturan pendiferensialan untuk menentukan turunan setiap fungsi berikut.

a. $(3 + 2i)\, z^2 - 2z + 3$

b. $(5z^2 + 2i)\,(2z - 3i)$

c. $(3z + 2i)\,/(4z - 5i)$

d. $(7iz^2 + 3z + 2)^3$

e. $4 \sin^3(2z^2 + 5z + 2)$

f. $\ln\left(\frac{(3z + 2i)}{(4z - 5i)}\right)$

Jawab:

a. $\frac{d}{dz}((3 + 2i)\, z^2 - 2z + 3)$

$$= \frac{d}{dz}(3 + 2i)z^2 - \frac{d}{dz}(2z) + \frac{d}{dz}(3)$$

$$= (3 + 2i)\frac{d}{dz}(z^2) - 2\frac{d}{dz}(z) + \frac{d}{dz}(3)$$

$$= (3 + 2i)(2z) - 2(1) + (0)$$

$$= (6 + 4i)z - 2$$

b. $\frac{d}{dz}\left((5z^2 + 2i)\left(2z - 3i\right)\right)$

$$= (5z^2 + 2i)\frac{d}{dz}\left(2z - 3i\right) + \left(2z - 3i\right)\frac{d}{dz}(5z^2 + 2i)$$

$$= (5z^2 + 2i)(2) + \left(2z - 3i\right)(10z)$$

$$= 10z^2 + 4i + 20z^2 - 30iz = 30z^2 - 30iz + 4i$$

c. $\frac{d}{dz}\left((3z + 2i)\,/(4z - 5i)\right)$

$$= \frac{(4z - 5i)\frac{d}{dz}(3z + 2i) - (3z + 2i)\frac{d}{dz}(4z - 5i)}{\{(4z - 5i)\}^2}$$

$$= \frac{(4z - 5i)(3) - (3z + 2i)(4)}{\{(2z - 5i)\}^2} = \frac{12z - 15i - 12z - 8i)}{\{(2z - 5i)\}^2}$$

$$= \frac{-23i}{(4z^2 - 20iz + 25)}$$

d. $\frac{d}{dz}(7iz^2 + 3z + 2)^3$

Misalkan w = γ^3 maka $\frac{dw}{d\gamma} = 3\gamma^2$ selanjutnya

$\gamma = (7iz^2 + 3z + 2)$ maka $\frac{d\gamma}{dz} = 14iz + 3$

$$\frac{dw}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dz} = 3\gamma^2 (14iz + 3)$$

$$= (42iz + 9)((7iz^2 + 3z + 2)^2$$

e. $\frac{d}{dz}(4\sin^3(2z^2 + 5z + 2))$,

Misalkan w = $4\gamma^3$ maka $\frac{dw}{d\gamma} = 12\gamma^2$, $\gamma = \sin\varphi$ maka $\frac{d\gamma}{dz} = \cos\varphi$, selanjutnya $\varphi = (2z^2 + 5z + 2)$ maka

$$\frac{d\varphi}{dz} = 4z + 5, \text{dengan penerapan aturan rantai, diperoleh}$$

$$\frac{dw}{dz} = 12\gamma^2 . \cos\varphi . (4z + 5) = (48 + 6)\ \gamma^2 . \cos\varphi$$

$$= (48z + 60)\ \gamma^2 . \cos\varphi = (48z + 60) \sin^2\varphi \cos\varphi$$
$$= (48z + 60) \sin^2(2z^2 + 5z + 2) \cos(2z^2 + 5z + 2)$$

f. $\frac{d}{dz}\left(\ln\frac{(3z + 2i)}{(4z - 5i)}\right)$

Dengan menggunakan cara yang sama pada nomor d, yaitu turunan pangkat dikalikan turunan variabel, dan nomor e, yaitu turunan pangkat dikali turunan sinus dikali turunan sudut. Sehingga $\frac{d}{dz}\left(\ln\frac{(3z + 2i)}{(4z - 5i)}\right)$ diperoleh melalui turunan ln dikali turunan fungsi, sebagai berikut:

$$\frac{d}{dz}\left(\ln\frac{(3z+2i)}{(4z-5i)}\right)=\frac{(4z-5i)}{(3z+2i)}.\left(\frac{-23i}{(4z^2-20iz+25)}\right)$$

B. Persamaan Cauchy-Riemann (C-R)

Pengembangan syarat cukup agar suatu fungsi mempunyai turunan dapat dipelajari melalui teorema berikut. Syarat cukup ini menjamin adanya turunan dan menginformasikan dititik mana turunan dari fungsi tersebut terdefinisikan atau tidak terdefinisikan.

Teorema 5.2

Diketahui fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, apabila berlaku:

1. $u(x, y),\ iv(x, y)$ dan turunan parsial pertama, yaitu $u_x, v_x, u_y,$ dan v_y kontinu pada lingkungan N dari z_0 (Nr (z_0))
2. Pada titik z_0, berlaku $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$.

Maka f '(z) ada dan f '(z) = $u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

<u>Bukti:</u>

Misalkan f(z) = u(x, y) + iv(x, y)

$\Delta f = f(z_0+\Delta z_0) - f(z_0) = \Delta u + i\Delta v$, dimana

$\Delta u = \{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)\}$ dan

$\Delta v = \{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)\}$

Pada kalkulus dua peubah bahwa untuk sembarang titik $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ di N berlaku:

$\Delta u = u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)$

$= u_x\Delta x + u_y\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, dengan α, β mendekati nol bila Δx dan Δy_0 mendekati nol. Begitupula,

$\Delta v = v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)$

$= v_x\Delta x + v_y\Delta y + \varphi\Delta x + \delta\Delta y$, dengan φ, δ mendekati nol bila Δx dan Δy mendekati nol. Sehingga diperoleh persamaan:

$\Delta u = u_x\Delta x - v_x\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ ....(i)

$\Delta v = v_x\Delta x + u_x\Delta y + \varphi\Delta x + \delta\Delta y$ ....(ii), sehingga:

$f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = \{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+ iv(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \}$
$-\{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}$
$= \{u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)\}+$
$\{v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)\}i$
$= \Delta u + i\Delta v$

Dari persamaan (1) dan (2) menghasilkan:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = (u_x + iv_x)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (u_x + iv_x)\frac{\Delta y}{\Delta z}i$$
$$+(\alpha + i\varphi)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\partial)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$
$$= (u_x + iv_x) + (\alpha + i\varphi)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\beta + i\partial)\frac{\Delta y}{\Delta z}\text{...(iii)}$$

Dengan mengambil mengambil $\Delta z \to 0$ maka $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, juga α, β, φ, dan $\delta \to 0$, akibatnya $\alpha + i\varphi \to 0$ dan $\beta + i\partial\delta \to 0$

Karena $|\Delta x| \leq |\Delta z|$ dan $|\Delta y| \leq |\Delta z|$, maka jelaslah:

$\left|\frac{\Delta x}{|\Delta z|}\right| \leq 1$ dan $\left|\frac{\Delta Y}{|\Delta z|}\right| \leq 1$. Sehingga, untuk $\Delta z \to 0$ maka

turunan f pada z_0 adalah $f'(z) = (u_x + iv_x)$. Jadi f'(z) ada.

Teorema berikut mempelajari bahwa jika f'(z) ada, maka formula turunan dari teorema berikut ini dapat diimplementasikan.

Teorema 5.3

Andaikan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$mempunyai turunan di titik $z_0 = (x_0, y_0)$, maka pada titik tersebut turunan f(z), yaitu f '(z) $= u_x + iv_x = v_y - iu_y$ sehingga $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$.

Bukti:
Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mempunyai derivatif di $z_0 = x_0 + iy_0$, yaitu f′(Z0), misalkan $f'(z_0) = a + bi$.

$\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}$

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to (0,0)} \left[\frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x + i\Delta y} \right]$$

Limit, sepanjang sumbu $x \to \Delta y = 0$, sehingga untuk $\Delta z \to (0,0)$ maka $\Delta x \to 0$.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)\}}{\Delta x} = \text{a+bi}$$

$$u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0) = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$$

Sehingga diperoleh persamaan:
$u_x(x_0, y_0) = \mathrm{a}$ dan $v_x(x_0, y_0) = \mathrm{b}$ ……….(i)

Limit, sepanjang sumbu $y \to \Delta x = 0, \Delta z \to 0, \Delta y \to 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\{u(x_0, y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)\} + i\{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\}}{i\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} = \text{a+bi}$$

$$\frac{1}{i}\{u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)\} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$$

$$u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) = -\mathrm{b} + \mathrm{ai}$$

Sehingga diperoleh persamaan:
$v_y(x_0, y_0) = a$ dan $u_y(x_0, y_0) = -\mathrm{b}$ ....(ii)

Dari persamaan (i) dan (ii)
$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$ dan $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$ atau

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(terbukti)}$$

Kedua persamaan terakhir tersebut dinamakan persamaan **Cauchy-Riemann**

Contoh 5.3
Buktikan bahwa fungsi f '(z) ada untuk setiap z dari fungsi berikut:

a. f(z) = iz + 5
b. f(z) = $\mathrm{z}^2 + 5\mathrm{iz} + 3 - \mathrm{i}$.
c. f(z) = e^x Cis y
d. f(z) = e^x Cis (-y)

<u>Bukti:</u>

a. f(z) = iz + 5 = iz + 5 = i (x + iy) + 5 = (5 – y) + i (x), sehingga

   $u_x = 0,\ u_y = -1$ dan $v_x = 1,\ v_y = 0$

   Jadi u_x, u_y, v_x, dan v_y ada dan kontinu di setiap titik (x, y).

   Syarat Cauchy-Riemann (C-R), yaitu:
   $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ juga dipenuhi. Sehingga menurut teorema 5.2, maka f'(z) ada untuk setiap z, yaitu f '(z) = $u_x + iv_x = 0 + i.1 = i$.

b. $\mathrm{f(x,y)} = (x + iy)^2 + 5i(x + iy) + 3 - i$
   $= x^2 - y^2 + 2xiy + 5ix - 5y + 3 - i$
   $= (x^2 - y^2 - 5y + 3) + i(2xy + 5x - 1)$,

   Sehingga diperoleh fungsi:

$u(x,y) = x^2 - y^2 - 5y + 3$ dan $v(x,y) = 2xy + 5x - 1$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 5$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + 5$ dan $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

Jadi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$, dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ ada dan kontinu di setiap titik (x, y).

Memenuhi syarat Cauchy-Riemann (C-R), yaitu:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Jadi f ʻ(z) = $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i(2y + 5) = 2z + 5$.

c. f(z) = e^x Cis y = e^x (cos y + i sin y), maka

   u = e^x cos y dan v = e^x sin y
   $u_x = e^x \cos y$ dan $u_y = - e^x \sin y$
   $v_x = e^x \sin y$ dan $v_y = e^x \cos y$
   Enam fungsi tersebut adalah kontinu di titik (x, y) juga memenuhi C-R: $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$, sehingga:
   f ʻ(z) = $u_x + iv_x = e^x \cos y + i.\, e^x \sin y = e^x Cis y = f(z)$.

d. f(z) = e^x Cis (-y) = e^x (cos y - i sin y), maka
   u = e^x cos y dan v = - e^x sin y
   $u_x = e^x \cos y$ dan $u_y = - e^x \sin y$
   $v_x = - e^x \sin y$ dan $v_y = - e^x \cos y$
   Enam fungsi tersebut adalah kontinu di titik (x, y), namun tidak memenuhi syarat C-R, dalam hal ini: $u_x \neq v_y$ dan $u_y \neq -v_x$, sehingga f’(z) tidak ada pada titik manapun.

Catatan:

1) Kekontinuan fungsi-fungsi u(x, y), v(x, y), u_x(x, y), v_x(x, y), u_y(x, y), v_y(x, y) merupakan syarat cukup adanya turunan, namun secara umum bukanlah termasuk termasuk syarat perlu.
2) Berlakunya syarat Cauchy-Riemann di suatu titik dari suatu fungsi f belum menjamin adanya turunan atau derivatif dititik tersebut.

Contoh 5.4

Diberikan fungsi $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}, & untuk\, z \neq 0 \\ 0 & , untuk\, z = 0 \end{cases}$

Tunjukkan bahwa f(z) kontinu dan memenuhi syarat Cauchy-Riemann di z = 0, tetapi f '(z) tidak ada.

Jawab:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} + \left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) i, untuk\, z \neq 0 \\ 0 \quad , untuk\, z = 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$v(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Untuk (x, y) ≠ (0, 0) $u(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \frac{r^3(cos^3\theta - sin^3\theta)}{r^2}$

$u(x,y) = r(cos^3\theta - sin^3\theta)$

$|u(x,y) \leq r||(cos^3\theta - sin^3\theta)| \leq 2|r| = 2r$, sehingga

$\forall \in > 0, \quad \exists \delta = \frac{r}{2} \ni 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

$\Leftrightarrow |u(x,y) - 0| \leq 2r = \in$. Jadi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$,

Jika $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$ maka $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$,
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $v(x,y)$ kontinu di (0,0) sehingga f(z) kontinu di (0,0) atau di z = 0.

$$u_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{-3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-y^4}{y^4} = -1$$

$$v_x(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4}{y^4} = 1$$

$u_x(0,0) = v_y(0,0)$ dan $u_y(0,0) = -v_x(0,0)$. Jadi syarat C-R berlaku di titik (0, 0). Selanjutnya akan ditentukan turunan f(z) di z = 0, melalui: $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$

(1) Untuk z = x, maka $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^3-0}{x^2+0}\right)+i\left(\frac{x^3+0}{x^2+0}\right)}{x} - 0$

$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = 1 + i$

(2) Untuk y = x, maka $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^3-x^3}{x^2+x^2}\right)+i\left(\frac{x^3+x^3}{x^2+x^2}\right)}{x+iy} - 0$

$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{0+i(x)}{x+ix} = \lim_{x\to 0} \frac{ix}{x+ix} = i\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i.$

Karena (1) dan (2) tidak sama, maka $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z}$ tidak ada.

Sehingga f '(0) tidak ada.

C. Fungsi Analitik

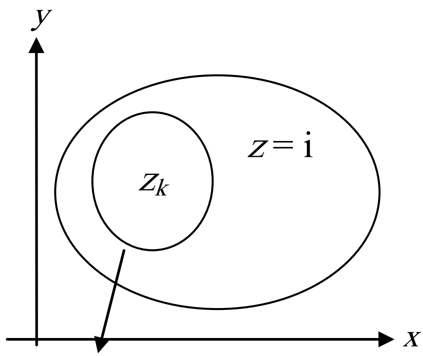
Konsep fungsi analitik sebagai bagian esensial dalam teori fungsi kompleks dan memiliki struktur yang sangat kuat untuk diimplementasikan lebih luas berdasarkan sifat-sifatnya.

Definisi 5.2

Suatu fungsi f(z) dinamakan analitik dalam domain D jika f(z) dapat diturunkan pada setiap titik dari D. Fungsi f(z) analitik di titik z_0 apabila $\exists$ Nr (z_0) sedemikian hingga f '(z_0) ada $\forall z \in$ Nr (z_0). Jadi keanalitikan f(z) di z_0 berarti f(z) mempunyai turunan pada setiap titik di dalam lingkungan dari z_0 termasuk z_0 sendiri.

Contoh 5.5

Fungsi $f(z) = \frac{1}{z-i}$ maka f(z) tidak kontinu di z = i, karena f′(i) tidak ada atau f(z) tidak analitik di z = i. Namun demikian f(z) analitik di suatu titik dalam setiap sekitar z = i, misalnya (z_k).



f '(z) = ada $\forall z \in$ Nr (z_k)

Gambar 5.1: Keanalitikan $f(z) = \frac{1}{z-i}$

Dari definisi 5.2, titik z_0 disebut titik singular dari f(z) apabila f(z) analitik di suatu titik dalam setiap sekitar dari z_0 kecuali di z_0 itu sendiri. Titik z = i pada contoh 5.1 adalah sebuah titik singular. Dengan demikian suatu titik z_0 dinamakan **singularitas** atau **titik singular** bagi fungsi f(z) jika hanya jika f(z) gagal menjadi analitik pada z_0 dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f(z) analitik.

Selanjutnya f(z) analitik di dalam D jika f(z) analitik di setiap titik dalam D. Fungsi yang analitik di seluruh bidang z disebut fungsi menyeluruh (**entire function**). Keanalitikan di z_0 berimplikasi kepada eksistensi f'(z) di z_0. Sebaliknya jika f'(z) eksis atau ada belum tentu f(z) analitik di di z_0.

Contoh 5.6

Fungsi f(z) = $|z^2|$ mempunyai turunan hanya pada z = 0, akibatnya f(z) tidak analitik untuk setiap z pada bidang-z. Hal ini berarti f ′(z) tidak ada di seitap lingkungan titik manapun.

Contoh 5.7

Suatu polinomial: $P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \ldots\ldots + c_nz^n$ adalah fungsi menyeluruh, karena turunan P(z) yaitu P'(z) ada atau terdefinsi pada setiap z pada bidang-z.

Contoh 5.8

Fungsi $f(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + z + 2}{z^2 + 4}$

Adalah hasil bagi dua fungsi menyeluruh, karena fungsi pembilang dan penyebut terdiri dari polinom. F'(z) terdefinisi untuk setiap titik kecuali di z = ± 2i, sehingga pada titik tersebut fungsi f(z) tidak terdefinisikan. Dengan demikian f(z) analitik pada setiap z kecuali di 2i dan -2i.

Suatu fungsi yang terdiri hasilbagi dua fungsi menyeluruh dinamakan fungsi **meromorfik**.

Teorema 5.4

Diketahui fungsi f(z) = u(x, y) + iv(x, y). Andaikan bahwa

1. Fungsi-fungsi u, v dan turunan parsial u_x, v_x, u_y, dan v_y kontinu di setiap titik di dalam lingkungan tertentu N dari (z_0) atau Nr (z_0).
2. Syarat Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ dan $u_y = - v_x$ berlaku pada setiap titik di N.

Maka f(z) analitik pada z_0.

Bukti: Gunakan teorema 5.2 dan definisi 5.2 tentang keanalitikan fungsi.

Contoh 5.9:

Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi berikut ini adalah analitik:

a. $f(z) = 3z^4$ b. $f(z) = \cos 2z$

Jawab:

a. $3z^4 = 3(x+iy)^4 = 3(x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4)$

$$= 3(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + 3i(4xy^3 - 4xy^3)$$

$$= (3x^4 - 18x^2y^2 + 3y^4) + i(12x^3y - 12xy^3)$$

Sehingga diperoleh fungsi:

$u(x,y) = (3x^4 - 18x^2y^2 + 3y^4)$ dan
$v(x,y) = (12x^3y - 12xy^3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12x^3 - 36xy^2 \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -36x^2y + 12y^3$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 36x^2y - 12y^3 \text{ dan } \frac{\partial v}{\partial y} = 12x^3 - 36xy^2$$

Jadi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$, dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ kontinu di setiap titik (x, y).

Ternyata memenuhi syarat Cauchy-Riemann (C-R), yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jadi f(z) = 3z^4 adalah fungsi analitik

b. $f(z) = \cos 2z = \dfrac{e^{2(x+iy)} + e^{-2(x+iy)}}{2}$

$$= \frac{e^{2x} cis2y + e^{-2x} cis(-2y)}{2}$$

$$= \frac{e^{2x}(cos2y + i\ sin2y) + e^{-2x}(cos2y - i\ sin2y)}{2}$$

$$= \frac{(e^{2x} + e^{-2x})\ cos2y + i\ (e^{2x} - e^{-2x})\ sin2y}{2}$$

Sehingga diperoleh fungsi:

$$u(x, y) = \frac{(e^{2x} + e^{-2x})\ cos2y}{2}$$

$$v(x, y) = \frac{(e^{2x} - e^{-2x})\ sin2y}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (e^{2x} - e^{-2x})\ cos2y\ \&\ \frac{\partial u}{\partial y} = (-e^{2x} - e^{-2x})\ sin2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (e^{2x} + e^{-2x})\ sin2y\ \&\ \frac{\partial v}{\partial y} = (e^{2x} - e^{-2x})\ cos2y$$

Jadi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, dan $\frac{\partial v}{\partial y}$ kontinu di setiap titik (x, y).

Ternyata memenuhi syarat Cauchy-Riemann (C-R), yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jadi f(z) = cos 2z adalah fungsi analitik

Teorema 5.5

Andaikan bahwa fungsi f(z) = u(x, y) + iv(x, y) analitik di z_0, maka $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ pada setiap titik pada suatu lingkungan titik z_0.

Bukti: Gunakan teorema 5.3 dan definisi 5.2 tentang keanalitikan fungsi.

Teorema 5.6

Andaikan bahwa Jika f(z) dan g(z) adalah fungsi analitik di dalam D, maka f(z)+g(z), f(z).g(z), f(z) o g(z), $\frac{f(z)}{g(z)}$ asal g(z) ≠ 0 juga merupakan fungsi analitik di dalam D.

Bukti: Gunakan teorema 5.1 dan definisi 5.2 tentang keanalitikan fungsi.

D. Persamaan Laplace dan Fungsi Harmonik

Misalkan fungsi f(z) = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) analitik di dalam D pada bidang-z. Menurut persamaan Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jika masing-masing persamaan diturunkan secara parsial terhadap x dan y, maka diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots\dots (4)$$

Jika (1) + (2) dan (3) + (4), maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Kedua persamaan terakhir ini disebut persamaan **Laplace**. Selanjutnya dengan menggunakan ∇^2 sebagai operator *Laplacian*, maka kedua persamaan dapat ditulis sebagai:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dan} \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

dan mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu dalam D.

Definisi 5.2

Fungsi dimana $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ memenuhi persamaan Laplace di dalam suatu daerah D di dinamakan fungsi harmonik atau harmonik dalam D. Jika komponen real dan dan imajiner dari fungsi analitik f = u + iv merupakan fungsi harmonik maka $u(x, y)$ disebut fungsi harmonik sekawan dari $v(x, y)$ dalam domain D.

Dua fungsi harmonik $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sedemikian hingga $f(z) = u + iv$ disebut harmonik sekawan, jika salah satu diketahui maka yang lain dapat dicari.

Contoh 6.0

(a) Buktikan bahwa $u = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ fungsi harmonik

(b) Tentukan $v(x, y)$ sehingga f(z) = u + iv analitik

Jawab:

(a) Bukti:

$$u = e^{-x}x\sin y - e^{-x}y\cos y$$

Dari Persamaan C-R

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} x\sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} y\cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} x\cos y - e^{-x} \cos y + e^{-x} y\sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x} x\sin y - e^{-x} \sin y - e^{-x} \sin y - e^{-x} y\cos y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x} x\sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} y\cos y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (terbukti sebagai fungsi harmonik)}$$

(b) Ambil $\frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-x} x\sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} y\cos y$

$$\partial v = (-e^{-x} x\sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} y\cos y) dy$$
$$v = \int^{y} (-e^{-x} x\sin y + e^{-x} \sin y + e^{-x} y\cos y) dy + g(x)$$
$$v = e^{-x}[\int (-x\sin y + \sin y + y\cos y)] dy + g(x)$$
$$v = e^{-x}[x\cos y - \cos y + \int y d(\sin y)] dy + g(x)$$
$$v = e^{-x}[x\cos y - \cos y + y\sin y - \int \sin y dy] dy + g(x)$$
$$v = e^{-x}[x\cos y - \cos y + y\sin y + \cos y] + g(x)$$
$$v = e^{-x}[x\cos y + y\sin y] + g(x) \text{ (pers. yang dicari)}$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x} x\cos y + e^{-x} \cos y - e^{-x} y\sin y + g'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Diketahui : $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x} x\cos y - e^{-x} \cos y + e^{-x} y\sin y$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = \int 0\, dx \Leftrightarrow g(x) = c,$$

diperoleh $v = e^{-x}[x\cos y + y\sin y] + c$ sehingga fungsi yang dicari $v(x, y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + c$, yang merupakan fungsi harmonik sekawan dari $u\ (x, y)$.

Contoh 6.1

(a) Buktikan bahwa $v = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 2xy + 3x + 2y$ harmonik

(b) Tentukan fungsi $u\ (x, y)$ sehingga f(z) = u + iv analitik

Jawab:

(a) Dari Persamaan C-R

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x + 2y + 3 = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3y + 2 = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 3 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -3$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \text{ (terbukti sebagai fungsi harmonik)}$$

(b) Ambil $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y + 2$

$$\partial u = (2x - 3y + 2)dx$$

$$u = \int^x (2x - 3y + 2)\, dx + g(y)$$

$$u = x^2 - 3xy + 2x + g(y) \text{ (pers yang dicari)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x + g'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -3x - 2y - 3$$

$$g'(y) = -2y - 3 \Leftrightarrow g(y) = \int^y (-2y - 3)\, dy = -y^2 - 3y$$

Sehingga diperoleh fungsi $u(x, y) = x^2 - 3xy + 2x + g(y)$ atau $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3xy + 2x - 3y$.

E. Turunan Fungsi Elementer

Turunan fungsi elementer diperoleh dari teorema berikut.

Teorema 5.7

1. $\frac{d}{dz}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$
3. $\frac{d}{dz}e^z = e^z$
4. $\frac{d}{dz}a^z = a^z \ln a$
5. $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$
6. $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$
7. $\frac{d}{dz}\tan z = sec^2 z$
8. $\frac{d}{dz}\cot z = -csc^2 z$
9. $\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$
10. $\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$
11. $\frac{d}{dz}log_e z = \frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$
12. $\frac{d}{dz}log_a z = \frac{log_a e}{z}$
13. $\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
14. $\frac{d}{dz}cos^{-1}z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
15. $\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{1}{1+z^2}$
16. $\frac{d}{dz}cot^{-1}z = \frac{-1}{1+z^2}$
17. $\frac{d}{dz}sec^{-1}z = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
18. $\frac{d}{dz}csc^{-1}z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2-1}}$
19. $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$
20. $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$
21. $\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$
22. $\frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$
23. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$
24. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$
25. $\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
26. $\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$
27. $\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$
28. $\frac{d}{dz}\coth^{-1} z = \frac{1}{1-z^2}$
29. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$
30. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$

Bukti nomor 5:

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz}-\left(-ie^{-iz}\right)}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}\sin z = \cos z} \text{ (terbukti)}$$

Bukti nomor 6:

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{ie^{iz}+\left(-ie^{-iz}\right)}{2} = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\sin z$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z} \text{ (terbukti)}$$

Bukti nomor 13:

$$\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(i-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \left(\frac{1}{-z+i\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{i\sqrt{1-z^2}-z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}sin^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Bukti nomor 15:

$$\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{1}{1+z^2}$$

$$\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{1}{2i}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)\left(\frac{i(1-iz)-(1+iz)(-i)}{(1-iz)^2}\right)$$

$$\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{1}{2i}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)\left(\frac{i+z+i-z}{(1-iz)^2}\right) = \left(\frac{1}{1+iz}\right)\left(\frac{1}{1-iz}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}tan^{-1}z = \frac{1}{1+z^2}}$$

Bukti nomor 25:

$$\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \frac{d}{dz}\left(\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \left(\frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}\right)\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \left(\frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{z^2+1}+z}{\sqrt{z^2+1}}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}}$$

Bukti nomor 26:

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \frac{d}{dz}\left(\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\right)$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \left(\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \left(\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}\right)\left(\frac{\sqrt{z^2-1}+z}{\sqrt{z^2-1}}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}}$$

Bukti nomor 30:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1}z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1}z = \frac{d}{dz}\left(\ln\frac{(1+\sqrt{z^2+1})}{z}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \left(\frac{z}{1+\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{z\left(z^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}(z)-\left(1+\sqrt{z^2+1}\right)}{z^2}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \left(\frac{1}{1+\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{z^2-\left(\left(\sqrt{z^2+1}\right)+\left(z^2+1\right)\right)}{z\sqrt{z^2+1}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \left(\frac{1}{1+\sqrt{z^2+1}}\right)\left(\frac{-\left(\sqrt{z^2+1}+1\right)}{z\sqrt{z^2+1}}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{z^2+1}}$$

Contoh 6.2

Tentukan (a) $\frac{d}{dz}\left\{\sin^{-1}(z+3i)\right\}^2$ (b) $\frac{d}{dz}\left(z^{\ln z}\right)$

(c) $\frac{d}{dz}\left\{z\csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)+\sqrt{1-z^2}\right\}$ (d) $\frac{d}{dz}\{(\sin(iz-2))\}^{\tan^{-1}(z+3i)}$

Jawab:

(a) $\frac{d}{dz}\left\{\sin^{-1}(z+3i)\right\}^2 = 2\sin^{-1}(z+3i).\frac{1}{\sqrt{1+(z+3i)^2}}.1$

$$=\frac{2\sin^{-1}(z+3i)}{\sqrt{1+(z+3i)^2}}$$

(b) $\frac{d}{dz}\left(z^{\ln z}\right)$

Misalkan $y = z^{\ln z}$ maka $\ln y = \ln\left(z^{\ln z}\right)$

$\ln y = \ln z.\ln z = \ln^2 z$, sehingga $\frac{1}{y}\,dy = \frac{2\ln z}{z}\,dz$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dz} = \frac{2\ln z}{z} \leftrightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{2y\ln z}{z} = \frac{2z^{\ln z}.\ln z}{z}$$

$$\frac{dy}{dz} = 2z^{\ln z}.z^{-1}.\ln z = 2z^{\ln z-1}.\ln z$$

Jadi, $\frac{d}{dz}\left(z^{\ln z}\right) = 2z^{\ln z - 1}.\ln z$

(c) $\frac{d}{dz}\left\{z\csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \sqrt{1-z^2}\right\}$

$$= \csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + (z).\frac{-1}{{}^{1}\!/_{z}\left(\sqrt{(\frac{1}{z^2})^2 - 1}\right)}.(\frac{-1}{z^2}) + \frac{-2z}{2\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{(\frac{1}{z^2})^2 - 1}\right)} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{z}{\left(\sqrt{1-z^2}\right)} - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \csc^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

(d) $\frac{d}{dz}\{(\sin(iz-2))\}^{\tan^{-1}(z+3i)}$

$$= e^{\tan^{-1}(z+3i)\ln\sin(iz-2)}\frac{d}{dz}\{\tan^{-1}(z+3i)\ln\sin(iz-2)\}$$

$$= e^{\tan^{-1}(z+3i)\ln\sin(iz-2)}\{\frac{1}{z^2+6iz-8}\ln\sin(iz-2) +$$

$$\tan^{-1}(z+3i)\frac{1}{\sin(iz-2)}\cos(iz-2)i\}$$

$$= e^{\tan^{-1}(z+3i)\ln\sin(iz-2)}\{\frac{1}{z^2+6iz-8}\ln\sin(iz-2) +$$

$$\tan^{-1}(z+3i)\cot(iz-2)i\}$$

$$= (\sin(iz-2))^{\tan^{-1}(z+3i)}\{\frac{1}{z^2+6iz-8}\ln\sin(iz-2) +$$

$$\tan^{-1}(z+3i)\cot(iz-2)i\}$$

F. Turunan Tingkat Tinggi

Jika w = f(z) analitik dalam daerah D, maka derivatif f′(z), w′ atau $\frac{dw}{dz}$ juga analitik dalam daerah D tersebut. Selanjunya jika f′(z), w′ atau $\frac{dw}{dz}$ analitik pada daerah tersebut maka derivatifnya f′′(z), w′′ atau $\frac{d^2w}{dz^2}$. Dengan cara yang sama turunan ke-n dari f(z) dapat dinyatakan sebagai $f^{(n)}(z)$, $w^{(n)}$ atau $\frac{d^nw}{dz^n}$ dimana n adalah derajat turunan. Dengan demikian derivatif atau turunan pertama, kedua, ketiga,….. adalah analitik di dalam D. Berikut teorema yang berlaku untuk fungsi peubah kompleks dan tidak perlu berlaku untuk peubah real.

Teorema 5.8

Jika f(z) adalah analitik dalam daerah D, maka f′(z), f′′(z), f′′(z),…….., $f^{(n)}$ (z), juga analitik untuk setiap turunan tingkat tinggi dalam D.

Contoh 6.3

Tentukan turunan kedua dari fungsi berikut.

a. $5 \sin^2 (3z – 2 + i)$ b. $\cosh (2z +1)^2$ c. $\sin^{-1}(\ln z)$

Jawab:

a. Misalkan $f(z) = 5 \sin^2 (3z – 2 + i)$

$f'(z) = 10 \sin (3z – 2 + i) \cos (3z – 2 + i). 3$

$f'(z) = 30 \sin (3z – 2 + i) \cos (3z – 2 + i)$

$f''(z) = 90\{\cos^2 (3z – 2 + i) – \sin^2 (3z – 2 + i) \}$

$f''(z) = 90\{\cos^2 (3z – 2 + i) – 1+ \cos^2 (3z – 2 + i)\}$

$f''(z) = 90\{2\cos^2 (3z – 2 + i) – 1\}$

$f''(z) = 90 \cos (6z – 4 + 2i)$ (ingat $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha – 1$)

b. Misalkan $f(z) = \cosh(2z + 1)^2$

$f'(z) = (8z + 4) \sinh (2z + 1)^2$

$f''(z) = 8 \sinh (2z + 1)^2 + (8z + 4) \cosh (2z + 1)^2.4(2z +1)$

$f''(z) = 8\sinh(2z+1)^2 + 4(2z+1)^2\cosh(2z+1)^2$

c. Misalkan $f(z) = \sin^{-1}(\ln z)$

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 z}}.\frac{1}{z} = \frac{1}{z\sqrt{1+\ln^2 z}} = \left(z\sqrt{1+\ln^2 z}\right)^{-1}$$

$$f''(z) = -\left(z\sqrt{1+\ln^2 z}\right)^{-2}\left\{\sqrt{1+\ln^2 z} + \frac{z}{2}.\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 z}}.\frac{2\ln z}{z}\right\}$$

$$f''(z) = -\left(z\sqrt{1+\ln^2 z}\right)^{-2}\left\{\sqrt{1+\ln^2 z} + \frac{\ln z}{\sqrt{1+\ln^2 z}}\right\}$$

$$f''(z) = -\left(z\sqrt{1+\ln^2 z}\right)^{-2}\left\{\frac{1+\ln^2 z+\ln z}{\sqrt{1+\ln^2 z}}\right\} = \frac{-1-\ln^2 z-\ln z}{z^2\left(1+\ln^2 z\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Contoh 6.4

Tentukan turunan ke-n dari fungsi berikut.

a. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ b. $f(z) = \frac{1}{1+2z}$

Jawab:

a. $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$

$$f'(z) = -(1-z)^{-2}(-1) = 1!(1-z)^{-2}$$

$$f''(z) = -2(1-z)^{-3}(-1)(-1)(-1) = 2!(1-z)^{-3}$$

$$f^{(3)}(z) = -3(1-z)^{-4}\,2!(-1) = 3!(1-z)^{-4}$$

$$f^{(4)}(z) = -4(1-z)^{-5}\,3!(-1) = 4!(1-z)^{-5}$$

$$f^{(n)}(z) = n!(1-z)^{-(n+1)} = \frac{n!}{(1-z)^{(n+1)}}$$

b. $f(z) = \dfrac{1}{1+2z} = (1+2z)^{-1}$

$$f'(z) = -(1+2z)^{-2}(2) = (-1)\,2!\,(1+2z)^{-2}$$
$$f''(z) = -2(1+2z)^{-3}(-1)(2)(2) = (-1)^2\,2!\,2^2(1+2z)^{-3}$$
$$f^{(3)}(z) = -3(1+2z)^{-4}(-1)(-1)(2)(2)(2) = (-1)^3\,3!\,2^3(1+2z)^{-4}$$
$$f^{(4)}(z) = (-1)^4\,4!\,2^4(1+2z)^{-5}$$
$$f^{(n)}(z) = (-1)^n\,n!\,2^n(1+2z)^{-(n+1)} == \frac{(-1)^n\,n!\;2^n}{(1+2z)^{(n+1)}}$$

G. Aturan L'Hospital

Misalkan f(x) dan g(x) analitik dalam suatu daerah yang memuat titik z_0 dan andaikan $f(z_0) = g(z_0)$ tetapi $g'(z_0) \neq 0$, maka $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Bukti:

$$f'(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

Misalkan : $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z) = \Psi$

Untuk $z \to z_0$ dan $\Psi \to 0$

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0) = \Psi(z-z_0)$$
$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \Psi(z-z_0)$$

dengan cara yang sama untuk fungsi $g(z)$:

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \Psi(z-z_0)$$

dimana $f(z_0) = g(z_0) = 0$ sehingga diperoleh:

$$f(z) = f'(z_0)(z-z_0) + \Psi(z-z_0)$$
$$g(z) = g'(z_0)(z-z_0) + \Psi(z-z_0)$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)(z-z_0)+\Psi(z-z_0)}{g'(z_0)(z-z_0)+\Psi(z-z_0)}$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{[f'(z_0)+\Psi](z-z_0)}{[g'(z_0)+\Psi](z-z_0)}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{[f'(z_0)+\Psi]}{[g'(z_0)+\Psi]}$$

Untuk $z \to z_0$ maka $\Psi \to 0$ maka:

$$\therefore \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad \text{(terbukti)}$$

Contoh 6.5

(a) $\displaystyle \operatorname*{Lim}_{z\to i}\frac{z^2+i}{z^6+i}$ (b) $\displaystyle \lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{(2z^2+(1-6i)z-3i)}$

(c) $\displaystyle \lim_{z\to 0}\frac{1-2\cos z}{z^3}$ (d) $\displaystyle \lim_{z\to i}\frac{z^2+iz+2}{(z^4+2z^2+1)}$

Jawab:

(a) $\displaystyle \operatorname*{Lim}_{z\to i}\frac{z^2+i}{z^6+i}=\frac{(i)^2+1}{(i)^6+1}=\frac{-1+1}{(i^2)^3+i}=\frac{-1+1}{-1+1}=0$

Dengan menggunakan aturan L'Hospital:

$$\operatorname*{Lim}_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}=\operatorname*{Lim}_{z\to i}\frac{2z}{6z^5}=\frac{2(i)}{6(i)^5}=\frac{2(i)}{6(i^4)i}==\frac{2(i)}{6(i)}=\frac{1}{3}.$$

(b) $\displaystyle \lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{(2z^2+(1-6i)z-3i)}$

$$\lim_{z\to 3i}\frac{2z}{(4z+1-6i}=\frac{2(3i)}{(4(3i)+1-6i}=\frac{6i}{1+6i}$$

$$\lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{(2z^2+(1-6i)z-3i)}=\frac{36+6i}{37}$$

(c) $\displaystyle \lim_{z\to 0}\frac{1-2\cos z}{z^3}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin z}{3z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2\cos z}{6z}$

$$\lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z}{6} = \frac{-2.0}{6} = 0.$$

(d) $$\lim_{z\to i} \frac{z^2 + iz + 2}{(z^4 + 2z^2 + 1)} = \lim_{z\to i} \frac{2z + i}{(4z^3 + 4z)}$$

$$\lim_{z\to i} \frac{2}{(12z^2 + 4)} = \frac{2}{(-12+4)} = \frac{2}{-8} = \frac{1}{-4}$$

H. Turunan Fungsi Implisit

Misalkan F (z, w) = 0 adalah sebuah fungsi implisit, apabila y = F (z, w) maka turunan fungsi implisit didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial w} dw \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial w} dw = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial z} dz = -\frac{\partial F}{\partial w} dw \Leftrightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial w}}.$$

Contoh 6.6

Diketahui fungsi implisit:

(a) $z^3 + w^3 = 1$ dan (b) $z^2 + 2yw + 2zw = 1$

tentukan $\frac{dw}{dz}$ dan $\frac{d^2 w}{dz^2}$

Jawab:

(a) $F(z, w) = z^3 + w^3 - 1$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial F}{\partial w} = 3w^2, \ \text{maka} \ \frac{dw}{dz} = -\frac{3z^2}{3w^2} = -\frac{z^2}{w^2}$$

Cara lain: Diferensialkan terhadap z dengan memandang *w* sebagai fungsi implisit dari z, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dz}(z^3 + w^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dz}(z^3) + \frac{d}{dz}(w^3) - \frac{d}{dz}(1) = 0$$

$$3z^2 + 3w^2\frac{dw}{dz} - 0 = 0 \Leftrightarrow 3w^2\frac{dw}{dz} = -3z^2 \Leftrightarrow \frac{dw}{dz} = -\frac{z^2}{w^2}$$

Selanjutnya $\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{\left(2zw^2 - 2z^2w.\frac{dw}{dz}\right)}{w^4}$

Dari $z^3 + w^3 = 1$, maka $w^3 = 1 - z^3$ atau $w = \sqrt[3]{(1-z^3)}$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{\left(2z\sqrt[3]{(1-z^3)^2} - 2z^2\sqrt[3]{(1-z^3)}.(-\frac{z^2}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}}\right)}{w^4}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{\left(2z\sqrt[3]{(1-z^3)^2} + 2z^2\sqrt[3]{(1-z^3)}\left(\frac{z^2}{\sqrt[3]{(1-z^3)^2}}\right)\right)}{\sqrt[3]{(1-z^3)}^{\,4}}$$

(b) $\frac{d}{dz}(z^2 + 2yw + 2zw - 1) = 0$ (y konstanta)

$$\Leftrightarrow 2z + 2y\frac{dw}{dz} + 2w + 2z\frac{dw}{dz} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2y + 2z)\frac{dw}{dz} = -(2z + 2w)$$

$\Leftrightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{-(z+w)}{(z+y)}$, Selanjutnya turunan ke-2

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{-(1+\frac{dw}{dz})(z+y) + (1)((z+w)}{(z+y)^2}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{-\left(1-\frac{(z+w)}{(z+y)}\right)(z+y)+(1)(z+w)}{(z+y)^2}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{-\left(\frac{z+y-z-w)}{(z+y)}\right)(z+y)+(z+w)}{(z+y)^2}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{-\left(\frac{y-w)}{(z+y)}\right)(z+y)+(z+w)}{(z+y)^2}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{(w-y)+(z+w)}{(z+y)^2}=\frac{(z-y+2w)}{(z+y)^2}$$

I. Penyelesaian Soal dan Latihan

1. Carilah $f'(z)$ dengan menggunakan definisi dari setiap fungsi berikut:
   a. $f(z)=2z^2+4z-3,$ c. $f(z)=\cos z$
   b. $f(z)=z^3+3z+5,$ d. $f(z)=\tan z$

2. Tentukan $f'(z)$ dari setiap fungsi berikut:
   c. $f(z)=4z^2+5iz-3+i;$ pada $z_0=2$
   d. $f(z)=z^3+2iz-3;$ pada $z_0=-1+i$
3. Dengan menggunakan aturan pendiferensialan, tentukan
   (a) $\frac{d}{dz}(2z+4i)(z-2i)$ (b) $\frac{d}{dz}(2z^2-5i)/(3z-i)$
   (c) $\frac{d}{dz}(2z^3+4z^2i-z+1)^4$ (d) $f(x)=3\sin^3(2z^2+5z+2)$

   Jawaban (a), (b), dan (c) diserahkan kepada pembaca

Jawaban (d): $f(x) = 3\sin^3(2z^2+5z+2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9\sin^2(2z^2+5z+2)(4z^2+5)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= 9(4z^2+5)\sin^2(2z^2+5z+2)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= 9(4z^2+5)\left(1-\cos^2(2z^2+5z+2)\right)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= (36z^2+45)\left(\cos(2z^2+5z+2)-\cos^3(2z^2+5z+2)\right) \end{aligned}$$

4. Buktikan bahwa fungsi f ′(z) ada untuk setiap z dari fungsi:
   a. $f(z) = 2z\,e^{-z}$
   b. $f(z) = 2z^2 + 3iz + 2 - 3i$.
   c. $f(z) = \sin 3z$
   d. $f(z) = e^{2z^2}$

5. Periksa apakah fungsi-fungsi berikut analitik

   a. $f(z) = z^2 + 3iz + 3 + i$
   b. $f(z) = (1 + 3i)\,z^2$
   c. $f(z) = \text{cis}(-2y)$
   d. $f(z) = \sinh 2z$

6. Periksa titik dimana fungsi tidak analitik (titik singular), kemudian carilah turunan disetiap titik lainnya.
   a. $\dfrac{z-2i}{z+4}$
   b. $\dfrac{z^4-2iz^3+z^2+2z-1}{z^2+9}$
   c. $\dfrac{z^2+z}{z^3+z}$
   d. $\dfrac{7z-2i}{z^2+2z+5}$

7. Tunjukkan bahwa komponen real dan imajiner dari setiap fungsi berikut adalah fungsi harmonik. Kemudian carilah fungsi harmonik sekawannya v untuk membentuk fungsi analitik $f = u + iv$.
   a. $u = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$
   b. $u = e^{x^2-y^2}\,\text{Cis}(xy)$
   c. $u = xy$
   d. $u = 3x - 3xy$

8. Diketahui fungsi $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$
   a. Buktikan bahwa fungsi u(x,y) adalah fungsi harmonik,
   b. Carilah fungsi harmonik sekawan u(x,y),
   c. Nyatakan $f(z) = u + iv$ dalam suku-suku dari z.

9. Diketahui fungsi $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy - 3x - 2y$
   a. Buktikan bahwa fungsi v(x,y) adalah fungsi harmonik,
   b. Carilah fungsi harmonik sekawan v(x,y),
   c. Nyatakan $f(z) = u + iv$ dalam suku-suku dari z.

10. Buktikan diferensial berikut.

   a. $\frac{d}{dz}(c) = 0$
   b. $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$
   c. $\frac{d}{dz} e^z = e^z$
   d. $\frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$
   e. $\frac{d}{dz} \cot^{-1} z = \frac{-1}{1+z^2}$
   f. $\frac{d}{dz} \operatorname{sech}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$

   Bukti:

   a. $\frac{d}{dz}(c) = 0$ dimana C adalah sembarang konstanta.

   $f(z) = c$, maka $\frac{d}{dz} f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$

   $\therefore \frac{d}{dz}(c) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c-c}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{0}{\Delta z} = 0$ (terbukti)

   b. $\frac{d}{dz} z^n = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$

   $= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left\{z^n + nz^{n-1}\Delta z + \frac{n(n-1)}{1.2} n-2\,(\Delta z)^2 + \dots + (\Delta z)^n\right\} - z^n}{\Delta z}$

   $= \lim_{\Delta z \to 0} \{nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} z^{n-1} \Delta z + \dots + (\Delta z)^{n-1}\}$

$\therefore \frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$ (terbukti)

c. Misalkan w = $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

maka komponen $u = e^x \cos y$ dan $v = e^x \sin y$.

Sehingga $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan

$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$, memenuhi dalil C-R.

Maka $\frac{\partial w}{\partial z}$ ada, yaitu: $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

$\therefore \frac{\partial}{\partial z} e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$ (terbukti)

d. $\frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{i} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right)$

$\frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{-z(1-z^2)^{\frac{-1}{2}} z-(1+\sqrt{1-z^2})}{z^2}\right)$

$\frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{-z^2-(\sqrt{1-z^2}+1-z^2)}{z^2\sqrt{1-z^2}}\right)$

$\frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{-(\sqrt{1-z^2}+1)}{z\sqrt{1-z^2}}\right) = \frac{1}{i}\left(\frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}\right)$

$\therefore \frac{d}{dz} \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\left(\frac{-1}{zi\sqrt{z^2-1}}\right) = \frac{1}{z\sqrt{z^2-1}}$ (terbukti)

e. $\frac{d}{dz} \cot^{-1} z = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i} \ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right)$

$\frac{d}{dz} \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\left(\frac{(z-i)-(z+i)}{(z-i)^2}\right)$

$\therefore \frac{d}{dz} \cot^{-1} z = -\left(\frac{1}{z+i}\right)\left(\frac{1}{z-i}\right) == \frac{-1}{1+z^2}$ (terbukti)

f. $\frac{d}{dz} \operatorname{sech}^{-1} z = \frac{d}{dz}\left(\ln \frac{(1+\sqrt{1-z^2})}{z}\right)$

$\frac{d}{dz} \operatorname{sech}^{-1} z = \left(\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{-z(1-z^2)^{\frac{-1}{2}}(z)-(1+\sqrt{1-z^2})}{z^2}\right)$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \left(\frac{1}{1+\sqrt{1-z^2}}\right)\left(\frac{-z^2-\left(\left(\sqrt{1-z^2}\right)+1-z^2\right)}{z\sqrt{1-z^2}}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \frac{1}{(1+\sqrt{1-z^2})}\frac{(-\sqrt{1-z^2}+1)}{(z\sqrt{1-z^2})} = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1} z = \frac{-1}{z\sqrt{1-z^2}} \quad \text{(terbukti)}$$

11. Tentukan turunan setiap fungsi berikut.

a. $f(z) = 3\sin^3(2z^2+5z+2)$

b. $f(z) = (z+5i)^{4z-3}$

c. $f(z) = \ln(\tan(2iz-1))$

d. $f(z) = \ln(\tan^{-1}(z^2+1))$

e. $f(z) = \left(\sin^{-1}(2z+3)\right)^2$

f. $f(z) = \tan^{-1}\sqrt{(3z+2i)^{-3}}$

g. $f(z) = \cosh^{-1}(\ln((z^2+3z)$

Jawab (a):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9\sin^2(2z^2+5z+2)(4z^2+5)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= 9(4z^2+5)\sin^2(2z^2+5z+2)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= 9(4z^2+5)\left(1-\cos^2(2z^2+5z+2)\right)\cos(2z^2+5z+2) \\ &= (36z^2+45)\left(\cos(2z^2+5z+2)-\cos^3(2z^2+5z+2)\right) \end{aligned}$$

Jawab (b), (c), (d), (e), (f), dan (g) diserahkan kepada pembaca.

12. Tentukan turunan ke-n dari fungsi berikut.

a. $f(z) = \ln(4z+5)$ b. $f(z) = \frac{1}{1-4z}$

13. Dengan menggunakan aturan L'Hospital, hitunglah

a. $\lim\limits_{z\to m\pi i}(z-m\pi i)\dfrac{e^z}{\sin 2z}$ c. $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sin 3z}{3z}\right)^{\frac{1}{z^2}}$

b. $\lim\limits_{z\to e^{\frac{\pi}{3}i}}(z-e^{\frac{\pi}{3}i})\dfrac{2z}{(z^3+1)}$ d. $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z-\sin 3z}{z^3}$

14. Tentukan $\dfrac{dw}{dz}$ dan $\dfrac{d^2w}{dz^2}$ dari fungsi implisit berikut.

a) $2z^3w-7w-z^2+1=0$
b) $w^3-2w^2z+\text{Sin}3z=0$
c) $w^3-2w^2z+4\ln z=0$

Jawab:

(a) $2z^3w-7w-z^2+1=0$

$$6z^2w+2z^3\frac{dw}{dz}-7\frac{dw}{dz}-2z=0$$
$$\frac{dw}{dz}(2z^3-7)=2z-6z^2w$$
$$\frac{dw}{dz}=\frac{2z-6z^2w}{2z^3-7} \text{ dan } \frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dz}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-6z^2w}{2z^3-7}\right)$$
$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\left(2-12zw-6z^2\frac{dw}{dz}\right)(2z^3-7)-(2z-6z^2w).6z^2}{(2z^3-7)^2}$$
$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\left(2-12zw-6z^2\left(\frac{2z-6z^2w}{2z^3-7}\right)\right)(2z^3-7)-(12z^3-36z^4w).}{(2z^3-7)^2}$$

(b) Solusi diserahkan kepada pembaca

(c) $w^3-3z^2w+4\ln z=0$

$$\Leftrightarrow 3w^2\frac{dw}{dz}-6zw-3z^2\frac{dw}{dz}+\frac{4}{z}=0$$
$$\Leftrightarrow(3w^2-3z^2)\frac{dw}{dz}=6zw-\frac{4}{z}$$

Jadi $\frac{dw}{dz} = \frac{6zw - \frac{4}{z}}{3w^2 - 3z^2} = \frac{6z^2w - 4}{3zw^2 - 3z^3} = \frac{2}{3}\left(\frac{3z^2w - 2}{zw^2 - z^3}\right)$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{6z^2w - 4}{3zw^2 - 3z^3}\right)$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\left(12z + 6z\frac{dw}{dz}\right)(3zw^2 - 3z^3) - \left(3w^2 + 6zw\frac{dw}{dz} - 9z^2\right)(6z^2w - 4)}{(3zw^2 - 3z^3)^2} =$$

$$\frac{\left(12z + 6z\left(\frac{6z^2w - 4}{3zw^2 - 3z^3}\right)\right)(3zw^2 - 3z^3) - \left(3w^2 + 6zw\left(\frac{6z^2w - 4}{3zw^2 - 3z^3}\right) - 9z^2\right)(6z^2w - 4)}{(3zw^2 - 3z^3)^2}$$

J. Peta Konsep

Turunan Peubah Kompleks

(1) **Definisi Turunan**

Misalkan fungsi f terdefinisi pada z_0, maka derivatif dari f di z_0 didefinisikan sebagai

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Differensiable berakibat fungsi kontinu, tetapi tidak sebaliknya.

(2) **Aturan Pendiferensialan**

- $\frac{d}{dz}\{f(z) \pm g(z)\} = \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z) = f'(z) \pm g'(z)$
- $\frac{d}{dz}\{c.f(z)\} = c.\frac{d}{dz}f(z) = c.f'(z)$
- $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$
- $\frac{d}{dz}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\} = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2} = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$
- Jika w = f(γ) dan γ = g(z), ⇔

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\gamma}.\frac{d\gamma}{dz} = f'(\gamma)\frac{d\gamma}{dz} = f'(g(z))\frac{d}{dz}g(z)$$

(3) **Persamaan Cauchy-Riemann**

Teorema: Andaikan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mempunyai turunan di titik $z_0 = (x_0, y_0)$, maka pada titik tersebut turunan f(z) yaitu f '(z) = $u_x + iv_x = v_y - iu_y$ mk

(4) **Fungsi Analitik**

Fungsi f(z) analitik di z_0 jika ∃ Nr (z_0) sedemikian f '(z_0) ada ∀z ∈ Nr (z_0). Jadi keanalitikan f(z) di z_0 berarti f(z) mempunyai turunan di setiap titik dalam lingkungan z_0.

(5) **Persamaan Laplace dan Fungsi Harmonik**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dan} \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Fungsi $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ yang memenuhi persamaan Laplace adl fungsi harmonik.

(6) **Turunan Fungsi Elementer**

Fungsi: Konstan, Eksponen, Trigonometri, Logaritma, Hiperbolik, Invers Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik

(7) **Turunan Tingkat Tinggi**

Jika f(z) analitik dalam D, maka f'(z), f''(z), f''(z),… $f^{(n)}$(z), juga analitik untuk setiap turunan dalam D.

(8) **Aturan L'Hospital**

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(9) **Turunan Fungsi Implisit**

Apabila F (z, w) = 0, maka

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial w}dw = 0$$

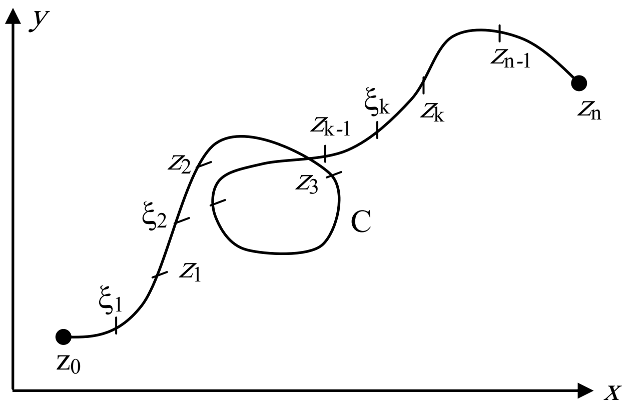
Gambar 5.2: Peta Konsep Turunan Peubah Kompleks

BAB VI
INTEGRAL PEUBAH KOMPLEKS

A. Integral Garis

Definisi integral fungsi kompleks adalah sama dengan definisi integral fungsi real, yaitu dengan mengganti interval pengintegralan dengan suatu lintasan atau lengkungan.

Misalkan fungsi f(z) kontinu disetiap titik pada kurva C. Bagi kurva C atas $z_1 . z_2 . z_3 \ldots z_{n-1} \ldots z_n$ yang dipilih dari sebarang titik pada sepanjang kurva atau lintasan C dari $a = z_0$ sampai dengan $b = z_n$. Pada setiap busur z_1 dan z_2, busur z_2 dan z_3, …….. dan busur z_{k-1} dan z_k pilih masing-masing titik tengah ξ_1, ξ_2, ξ_3,……, ξ_k, sebagaimana ditampilkan pada gambar 6.1.



Gambar 6.1: Lintasan Kurva C

Susunlah jumlah luasan persegi panjang sebagai berikut:

$$s_n = f(\xi_1)(z_1 - z_0) + f(\xi_2)(z_2 - z_1) + \cdots + f(\xi_n)(z_n - z_{n-1})$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}),$$

Ambil $|\Delta z_k| = z_k - z_{k-1}$,sehingga $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta z_k)$

Apabila pembagian (partisi) menjadi membesar tak berhingga (n→ ∞) maka panjang busur terbesar $|\Delta z_k| \to 0$ sehingga Sn mendekati suatu limit yang tidak lagi bergantung dari cara pembagian busurnya, yaitu: $\boldsymbol{s_n = \int_a^b f(z)dz}$. Representasi terakhir ini dinamakan **integral garis kompleks** atau lebih singkat integral garis dari f(z) sepanjang lintasan C

Definisi 6.1

Integral garis pada bidang kompleks dari **a** ke **b** sepanjang lintasan C terhadap fungsi f(z) adalah

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = \lim_{\Delta z_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta z_k)$$

Telah dipelajari bahwa syarat cukup adanya limit di suatu titik dari f(z) adalah bahwa f(z) kontinu pada titik tersebut. Syarat ini juga berlaku untuk menjamin suatu fungsi kompleks dapat dintegralkan (*integrable*). Jadi, jika f(z) analitik pada setiap titik dalam daerah D, dimana C suatu kurva yang terdapat dalam D, maka f(z) *integrable* sepanjang kurva atau lintasan C.

1. Integral Garis Real

Jika A(x, y) dan B(x, y) adalah fungsi kontinu di setiap titik pada kurva C dari peubah real x dan y, maka integral garis real dari $A\,dx + B\,dy$ sepanjang kurva C dinyatakan dengan $\int_c [A(x,y)dx + B(x,y)dy]$ atau $\int_c A\,dx + B\,dy$.

Selanjutnya jika C suatu kurva mulus dan memiliki persamaan

parameter $x = \phi(t), y = \psi(t)$ dimana $t_1 \leq t \leq t_2$ maka derivatif dari $x = \phi(t)$ adalah $dx = \phi'(t)dt$ dan $y = \psi(t)$ adalah $dy = \psi'(t)$, sehingga $\int_c A\,dx + B\,dy$, menjadi:
$\int_{t_1}^{t_2} [A\{\phi(t), \psi(t)\}\phi'(t)dt + B\{\phi(t), \psi(t)\}\psi'(t)dt]$

2. Hubungan Intergral Garis Real dan Kompleks

Teorema 6.1

Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u + iv$ kontinu di setiap titik pada kurva mulus C, maka integral f(z) sepanjang C ada dan direpresentasikan dalam suku-suku integral garis real:

$$\int_c f(z)dz = \int_c (u + iv)(dx + idy)$$
$$\int_c f(z)dz = \int_c (u\,dx - v\,dy) + i\left(\int_c v\,dx + u\,dy\right)$$

Bukti:
Misalkan f (z) = u (x, y) + i v(x, y), ambil $z_k = x_k + iy_k = (x_k, y_k)$ dan $\Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(\Delta z_k) = \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k) + i\,v(x_k, y_k))(\Delta xk + i\Delta yk)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k)(\Delta x_k) - \sum_{k=1}^{n} (v(x_k, y_k)(\Delta y_k)$$

$$+ i\left(\sum_{k=1}^{n} (v(x_k, y_k)(\Delta x_k) + \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k)(\Delta x_k)\right)$$

Ruas kiri dan ruas kanan dicarai limitnya untuk n→ ∞ maka $|\Delta z_k| \to 0$, sehingga diperoleh:

$$\int_c f(z)dz = \int_c u\,dx - \int_c v\,dy + i\left(\int_c v\,dx + u\,dy\right)$$

Tampilan integral garis tersebut dapat diubah menjadi integral tertentu dengan parameter t, yaitu $x = x(t), y = y(t)$, dimana $a \leq t \leq b$ sehingga f (z) = u (x, y) + i v(x, y) menjadi f (z(t)) = u (x(t), y(t)} + i {v (x(t), y(t)} sehingga diperoleh:

$$\int_c f(z)dz = \int_b^a f(z(t))\,d(z(t)) = \int_b^a f(z(t))\,z'(t)dt$$

$$\int_c f(z)dz = \int_b^a (u + iv)(x'(t) + iy'(t))dt$$

Contoh 6.1

Hitunglah $\int_i^{2+5i} (3x + y)\,dx + (2y - x)\,dy$ sepanjang:

a. Kurva y = x^2 + 1
b. Garis lurus yang menghubungkan (0,1) dan (2,5)
c. Garis lurus dari (0,1) ke (0.5), kemudian dari (0,5) ke (2,5)
d. Garis lurus dari (0,1) ke (2,1), kemudian dari (2,1) ke (2,5)

Jawab: $\int_i^{2+5i} (3x + y)\,dx + (2y - x)\,dy = \int_{(0,\,1)}^{(2,\,5)} (3x + y)\,dx + (2y - x)\,dy,$

a. Kurva: $y = x^2+1$ maka $dy = 2x\,dx$, batas $x = 0$ dan $x = 2$.

$$\int_C (3x + y)dx + (2y - x)dy = \int_0^2 (3x + (x^2 + 1))\,dx + (2(x^2 + 1) - x)\,2x\,dx.$$

$$= \int_0^2 (3x + x^2 + 1)\,dx + (2x^2 + 2 - x)\,2x\,dx.$$

$$= \int_0^2 (3x + x^2 + 1)\,dx + (4x^3 + 4x - 2x^2)\,dx.$$

$$= \int_0^2 (4x^3 - x^2 + 7x + 1)\, dx = \left[x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 \right]_0^2$$

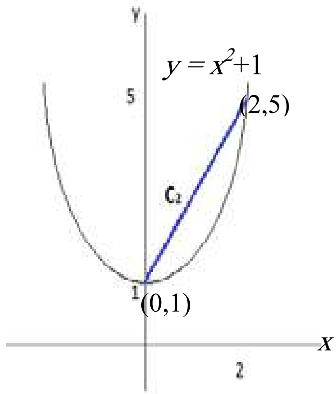
$$= (16 - \frac{8}{3} + 14 + 2) - 0 = \frac{88}{3}$$

b. Persamaan garis yang menghubungkan titik (0,1) dan (2,5):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 1}{5 - 1} = \frac{x - 0}{2 - 0} \rightarrow 2y - 2 = 4x \text{ atau } y = 2x + 1$$

Integral garis dari titik (0,1) dan (2,5) ditunjukkan oleh kurva C2: $y = 2x + 1$, batas $x = 0$ dan $x = 2$.



Dari persamaan y = $2x + 1$, maka $dy = 2\, dx$

$$\int_C (3x + y)\, dx + (2y - x)\, dy = \int_0^2 (3x + (2x+1))\, dx + (2(2x+1) - x) 2\, dx.$$

$$= \int_0^2 (3x + 2x + 1)\, dx + (4x + 2 - x) 2\, dx.$$

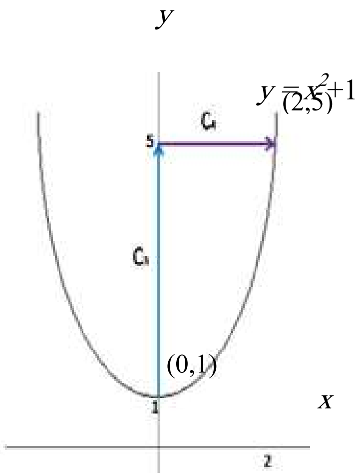
$$= \int_0^2 (3x + 2x + 1)\, dx + (8x + 4 - 2x)\, dx.$$

$$= \int_0^2 (11x+5)\,dx = \left[\frac{11}{2}x^2 + 5x\right]_0^2 = (22+10) - 0 = 32.$$

c. Garis lurus dari (0,1) ke (0,5), kemudian dari (0,5) ke (2,5)

Integral garis dari titik (0,1) dan (0,5) ditunjukkan oleh kurva C3 dan Integral garis dari titik (0,5) dan (2,5) ditunjukkan oleh kurva C4.

(i) Persamaan garis yang menghubungkan titik (0,1) ke (0,5) adalah $x = 0$ (sumbu-y)



Dari persamaan $x = 0$ maka $dx = 0$, batas $x = 1$ & $x = 5$.

$$\int_C (3x + y)\,dx + (2y - x)\,dy = \int_1^5 2y\,dy = \left[\,y^2\,\right]_1^5 = 25 - 1 = 24.$$

(ii) Persamaan garis yang menghubungkan titik (0,5) ke (2,5) adalah $y = 5$ (sejajar sumbu-x)

Dari persaman: $y = 5$, maka $dy = 0$, sehingga:

$$\int_C (3x+y)\,dx+(2y-x)\,dy=\int_0^2 (3x+5)dx.$$

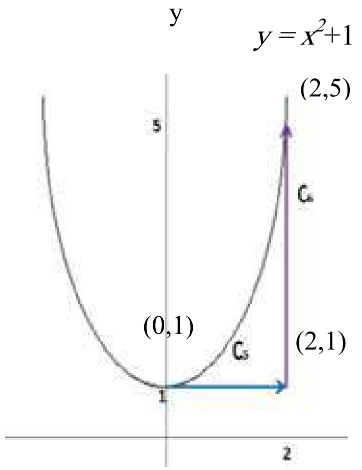
$$=\left[\frac{3}{2}x^2+5x\right]_0^2=(6+10)-0=16.$$

Jadi nilai $\int_C (3x+y)\,dx+(2y-x)\,dy$ sepanjang garis lurus yang menghubungkan titik (0,1) ke (0,5) dan kemudian dari titik (0,5) ke (2,5) adalah 24+16 = 40.

d. Garis lurus dari (0,1) ke (2,1), kemudian dari (2,1) ke (2,5)

Integral garis dari titik (0,1) dan (2,1) ditunjukkan oleh kurva C5 dan Integral garis dari titik (2,1) dan (2,5) ditunjukkan oleh kurva C6.

(i) Persamaan garis yang menghubungkan titik (0,1) ke (2,1) adalah $y = 1$, (sejajar sumbu-x)



Dari persamaan $y = 1$, maka $dy = 0$, batas $x = 0$ dan $x = 2$.

$$\int_C (3x+y)dx+(2y-x)dy=\int_0^2 (3x+1)\,dx.$$

$$=\left[\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^2=(6+2)-0=8.$$

(ii) Persamaan garis yang menghubungkan titik (2,1) ke (2,5) adalah $x = 2$ (sejajar sumbu-y)

Dari persamaan $x = 2$, maka $dx = 0$, sehingga:

$$\int_C (3x+y)dx+(2y-x)dy = \int_1^5 (2y-2)\,dy=$$

$$=\left[y^2-2y\right]_1^5=(25-1)-2(5-1)=24-8=16.$$

Jadi nilai $\int_C (3x+y)dx+(2y-x)dy$ sepanjang garis lurus yang menghubungkan titik (0,1) ke (2,5) dan kemudian dari titik (2,1) ke (2,5) adalah 8+16 = 24.

Contoh 6.2

Hitunglah $\int_{(0,\,3)}^{(2,\,4)} (x^2+2y)\,dx+(3x-y)\,dy$, sepanjang:

a. Parabola $x = 2t$; $y = t^2 + 3$
b. Garis lurus dari (0,3) ke (2,3), kemudian dari (2,3) ke (2,4)
c. Garis lurus dari (0,3) ke (2,4).

Jawab:

a. Dari persamaan parabola: $x = 2t$ maka $x = 2dt$, demikian pula $y = t^2 + 3$, maka $dy = 2tdt$. Batas integrasi, yaitu: batas $x = 0$ dan x

= 2 atau batas y = 3 dan y = 4. Misalkan diambil batas x = 0 dan x = 2, maka dapat ditentukan batas untuk parameter t, yaitu:

(i) untuk $x = 0$ pada $x = 2t \Leftrightarrow t = 0$

(ii)untuk $x = 2$ pada $x = 2t \Leftrightarrow t = 1$

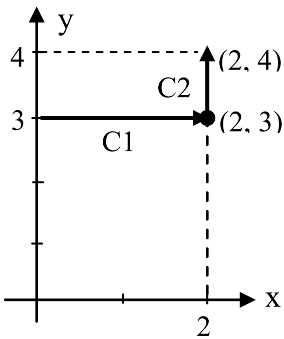
Dengan cara yang sama untuk batas y = 3 dan y = 4 disubtitusi pada $y = t^2 + 3$ akan diperoleh batas sama, yaitu: t = 0 dan t = 1. Sehingga integral pada $x = 2t$; $y = t^2 + 3$:

$$\int_C \left((2t)^2 + 2(t^2+1)\right)2\,dt + \left(3(2t) - t^2 - 1\right)2t\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(-2t^3 + 24t^2 - 6t + 12\right)dt = \left[-\frac{1}{2}t^4 + 8t^3 - 3t^2 + 12t\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\frac{1}{2}(1)^4 + 8(1)^3 - 3(1)^2 + 12(1) - 0 = -\frac{1}{2} + 17 = \frac{33}{2}.$$

b. Garis lurus dari (0,3) ke (2,3), kemudian dari (2,3) ke (2,4)
Persamaan garis melalui titik (0,3) ke (2,3) adalah y = 3. Sedangkan persamaan garis melalui titik (2,3) ke (2,4) adalah x = 2. Perhatikan ilustrasi berikut.



(i) Dari persamaan kurva C1: y = 3 maka dy = 0, dengan batas-batas x = 0 dan x = 2. Sehingga

$$\int_C (x^2+2y)\,dx+(3x-y)\,dy=\int_0^2 (x^2+2y)\,dx+(3x-y).0$$

$$=\int_0^2 (x^2+6)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+6x\right]_{x=0}^{x=2}=\frac{8}{3}+12=\frac{44}{3}.$$

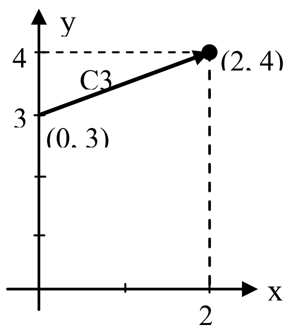
(ii)Dari persamaan kurva C2: x = 2 maka dx = 0 dengan batas-batas y = 3 dan y = 4.

$$\int_C (x^2+2y)\,dx+(3x-y)\,dy=\int_3^4 (x^2+2y).0+(3x-y)\,dy$$

$$=\int_3^4 (6-y)\,dy=\left[6y-\frac{1}{2}y^2\right]_3^4=6(4-3)-\frac{1}{2}(16-9)=\frac{5}{2}.$$

Jadi nilai $\int_{(0,\,3)}^{(2,\,4)} (x^2+2y)\,dx+(3x-y)\,dy,$ sepanjang garis lurus dari (0,3) ke (2,3) dan kemudian dari (2,3) ke (2,4) adalah: $\frac{44}{3}+\frac{5}{2}=\frac{103}{6}.$

c. Persamaan garis lurus melalui (0,3) ke (2,4) adalah: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ atau $\frac{y-3}{4-3}=\frac{x-0}{2-0}\rightarrow\ y=\frac{1}{2}x+3.$ Sehingga persamaan melalui (0,3) ke (2,4) ditunjukkan oleh kurva C3: $y=\frac{1}{2}x+3.$



Selanjutnya dari $y = \frac{1}{2}x + 3$ maka $dy = \frac{1}{2}dx$, dengan batas x = 0 dan x = 2. Sehingga:

$$\int_C (x^2 + 2y)\,dx + (3x - y)\,dy$$

$$= \int_0^2 (x^2 + 2(\frac{1}{2}x + 3))\,dx + (3x - (\frac{1}{2}x + 3))\frac{1}{2}\,dx$$

$$= \int_0^2 (x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{2})dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{3}(2^3) + \frac{9}{8}(2^2) + \frac{9}{2}(2) = \frac{8}{3} + \frac{9}{2} + 9 = \frac{97}{6}.$$

3. Sifat-sifat Integral Garis

Teorema 6.2

Misalkan ***k*** bilangan konstanta sebarang, dan C + k lintasan yang memuat kurva mulu C dan ***k***. Selanjutnya, jika $f(z)$ dan $g(z)$ masing-masing dapat diintegralkan sepanjang kurva *C* , maka:

1. $\int_c (f(z) + g(z))\,dz = \int_c f(z)dz + \int_c g(z)dz$
2. $\int_c kf(z) = k\int_c f(z)dz$ dimana k konstanta
3. $\int_{c+k} f(z)dz = \int_c f(z)dz + \int_k f(z)dz$
4. $\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$
5. $\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$
   dimanaa, b, m adalah pada kurva *C*
6. Jika M suatu bilangan positif sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk setiap z di C dengan panjang busur C adalah L, maka
   $\left[\int_c f(z)dz\right] \leq ML.$

4. Teorema Green, Cauchy- Goursat dan Teorema Morera

Teorema 6.3

Misalkan K(x, y) dan L(x, y) kontinu dan memiliki turunan parsial yang juga kontinu dalam suatu daerah D dan pada lengkungan C, maka menurut **teorema Green** menyatakan

$$\oint_c K\,dx + L\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dxdy$$

Teorema ini berlaku untuk daerah terhubung sederhana dan berganda. Selanjutnya bentuk kompleks teorema Green dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 6.4

Misalkan $F(z, \bar{z})$ fungsi kontinu dan memiliki turunan parsial yang juga kontinu dalam suatu daerah D dan pada lengkungan C, dimana z = x + iy dan $\bar{z}$ = x - iy adalah koordinat kompleks sekawan maka teorema Green dalam bentuk kompleks.

$$\oint_c F(z, \bar{z})dz = 2i \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dA$$

dimana *dA* menyatakan luas daerah *dx dy*

Teorema 6.5 (Cauchy- Goursat)

Misalkan f(z) fungsi analitik pada daerah D yang terhubungan sederhana dan C suatu lengkungan tertutup sederhana di dalam D, maka $\int_c f(z)\,dz = 0.$

Pembuktian teorema ini diperlihatkan dalam dua bagian, yaitu: (1) Cauchy memberikan asumsi bahwa f'(z) kontinu, dan (2) Goursat tanpa asumsi f'(z) kontinu.

Kebalikan dari teorema ini dikemukakan dengan teorema Morera berikut ini.

Teorema 6.6 (Morera)
Misalkan f(z) kontinu dalam suatu daerah tertutup sederhana D, dan andaikan $\int_c f(z)\,dz = 0$, pada setiap titik dari kurva tertutup sederhana C di dalam D, maka f(z) analitik dalam D.

Contoh 6.3
Hitunglah $\int_c f(z)\,dz$, jika:

a) $f(z) = (z^2 + 2z)$, dan C lingkaran $|z| = 1$.
b) $f(z) = \frac{1}{(z-i)}$, dan C lingkaran $|z - i| = 3$ (berlawanan arah jarum jam)
c) $f(z) = cos^2 z$, dan C ½ lingkaran $|z| = \pi$, dari $-\pi i$ ke πi
d) $f(z) = Im(z)$, dan C ½ parabola $y = x^2$, dari 0 sampai 2+2i.
e) $f(z) = \frac{1}{z^3}$, dan C lingkaran $|z| = 1$ (berlawanan arah jarum jam)

Jawab:

a) lingkaran $|z| = 1$ dapat dinyatakan sebagai parameter:
   $z = e^{it}$ dengan $0 \le t \le 2\pi$, sehingga:

$$\int_c (z^2 + 2z)\,dz = \int_c z^2 dz + 2\int_c zdz$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{2it}.ie^{it}dt + 2\int_0^{2\pi} e^{it}.ie^{it}dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{3it}dt + 2i\int_0^{2\pi} e^{2it}dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}e^{3it}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{2}{2}e^{2it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3}(e^{6\pi i} - e^0) + (e^{4\pi i} - e^0)$$

$$= \frac{1}{3}(\cos 6\pi + i\ \sin 6\pi - 1) + (\cos 4\pi + i\ \sin 4\pi - 1)$$

$$= \frac{1}{3}(1 + 0 - 1) + (1 + 0 - 1) = 0$$

Jadi teorema Cauchy- Goursat dapat diterapkan

b) C lingkaran $|z-i| = 3$ (berlawanan arah jarum jam)

$|z-i| = 3$, dapat dinyatakan sebagai parameter:

z(t) = i + 3e^{it} dimana $0 \le t \le 2\pi$ atau $dz = 3i\, e^{it}\, dt$, sehingga

$f(z) = \frac{1}{(z-i)} = \frac{1}{(i + 3e^{it} - i)} = \frac{1}{(3e^{it})} = \frac{1}{3}e^{-it}$ maka

$$\int_c f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} (\tfrac{1}{3}e^{-it}.3\, ie^{it})dt = i\int_0^{2\pi} 1dt$$

$$= i[t]_0^{2\pi} = (2\pi - 0)i = 2\pi i$$

Jadi teorema Cauchy- Goursat tak dapat diterapkan

c) C adalah setengah lingkaran $|z| = \pi$, dari $-\pi i$ ke πi

$f(z) = cos^2 z = \frac{1}{2}(cos2z + 1)$, sehingga:

$$\int_c f(z)\, dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1}{2}(cos2z + 1)dz$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\frac{\sin 2z}{2} + z)\right]_{-\pi i}^{\pi i}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\sin 2\pi i - \sin(-2\pi i)}{2} + (\pi i - (-\pi i))$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2\pi i + 2\pi i) = \left(\frac{1}{2}\sinh 2\pi + \pi\right) i$$

Jadi teorema Cauchy- Goursat tak dapat diterapkan

d) C adalah setengah parabola $y = x^2$, dari 0 sampai 2+4i.

Diketahui $f(z) = Im(z)$, dan misalkan z(t) = t + it^2 maka titik z = 0 sampai z = 2+4i pada C berkaitan dengan t = 0 dan t = 2, atau $0 \le t \le 2$. Dengan demikian f (z(t)) = Im z(t) = t^2, selanjutnya dari z(t) = t + it^2 maka dz = (1 +2it)dt, sehhingga proses integrasi:

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c Im(z)dz = \int_0^2 t^2(1+2it)dt$$

$$= \int_0^2 (t^2 + 2it^3)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{i}{2}t^4\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}(8-0) + \frac{i}{2}(16-0) = \frac{8}{3} + 8i$$

Jadi teorema Cauchy- Goursat tak dapat diterapkan

e) C lingkaran $|z| = 1$ (berlawanan arah jarum jam)
Dapat dinyatakan sebagai parameter: z (t) = e^{it}; $0 \le t \le 2\pi$
sehingga: $f(z) = \frac{1}{z^3} = z^{-3} = e^{-i3t}$ maka

$$\int_c f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{-i3t}.ie^{it})dt = i\int_0^{2\pi} e^{-2it}dt$$

$$\int_c f(z)\,dz = \frac{i}{-2i}\left[e^{-2it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{-2}\left[e^{-2it}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_c f(z)\,dz = \frac{1}{-2}\left[e^{-2it}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{-2}(e^{4\pi i} - e^0)$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 4\pi + i\,sin4\pi - \cos 0 - i\sin 0)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 + 0 - 1 - 0) = 0$$

Jadi teorema Cauchy- Goursat dapat diterapkan

B. Integral Fungsi- Fungsi Khusus

Pada bagian diferensial fungsi kompleks telah dipelajari diferensial fungsi elementer, sebagaimana pada kalkulus elementer berikut ini diberikan integral fungsi-fungsi khusus.

1) $\int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$

2) $\int \frac{dz}{z} = \ln z$

3) $\int e^z dz = e^z$

4) $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a}$

5) $\int \sin z\; dz = -\cos z$

6) $\int \cot z\, dz = \ln \sin z$

7) $\int \cos z\; dz = \sin z$

8) $\int \tan z\, dz = \ln \sec z = -\ln \cos z$

9) $\int \mathrm{Sec}\, z\, dz = \ln\,(\sec z + \tan z) = \ln \tan\left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

10) $\int \mathrm{Csc}\, z\; dz = \ln(\csc z - \cot z) = \ln \tan\left(\frac{z}{2}\right)$

11) $\int sec^2 z\, dz = \tan z$

12) $\int csc^2 z\, dz = -\cot z$

13) $\int \sec z \tan z\; dz = \sec z$

14) $\int \csc z \cot z\; dz = -\csc z$

15) $\int \sinh z\; dz = \cosh z$

16) $\int \cosh z\, dz = \sinh z$

17) $\int \tanh z\, dz = \ln \cosh z$

18) $\int \coth z\, dz = \ln \sinh z$

19) $\int \mathrm{sech}\, z\, dz = \tan^{-1}(\sinh z)$

20) $\int \mathrm{csch}\, z\, dz = -\coth^{-1}(\cosh z)$

21) $\int sech^2 z\, dz = \tanh z$

22) $\int csch^2 z\, dz = -\coth z$

23) $\int \mathrm{sech}\, z \tanh z\; dz = -\mathrm{sech}\, z$

24) $\int \csc z \cot z\; dz = -\mathrm{csch}\, z$

25) $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm a^2}} dz = \ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$

26) $\int \frac{dz}{a^2+z^2} dz = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} \;\; atau \;\; -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{z}{a}$

27) $\int \frac{dz}{z^2-a^2} dz = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

28) $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2-z^2}} dz = \sin^{-1}\frac{z}{a} \;\; atau \;\; \cos^{-1}\frac{z}{a}$

29) $\int \frac{dz}{z\sqrt{a^2 \pm z^2}} dz = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{z}{a\sqrt{a^2 \pm z^2}}\right)$

30) $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}} dz = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z}\ atau\ \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{a}{z}$

31) $\int \sqrt{z^2 \pm a^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{z^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(z + \sqrt{z^2 \pm a^2})$

32) $\int \sqrt{a^2 - z^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$

33) $\int e^{az}\sin bz\ dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2+b^2}$

34) $\int e^{az}\cos bz\ dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2+b^2}$

Pembuktian integral fungsi khusus dapat dilakukan dengan pendiferensialan langsung pada ruas kanan. Prinsip yang digunakan, yakni integral adalah balikan dari turunan.

Beberpa dari integral fungsi-fungsi khusus di atas dibuktikan sebagai berikut.

Bukti:

1. $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} n \neq 1$, karena

$$d\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right) = d\left(\frac{1}{n+1}\ z^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}(n+1)z^{n+1-1} = z^n$$

4. $\int a^z\, dz = \frac{a^z}{\ln a}$, karena

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{a^z}{\ln a}\right) = \left(\frac{1}{\ln a}\right).\frac{d}{dz}(a^z) = \frac{1}{\ln a}a^z.\ln a = a^z$$

8. $\int \cot z\, dz = \ln\sin z$, karena

$$\frac{d}{dz}(\ln\sin z) = \left(\frac{1}{\sin z}\right).d(\sin z) = \frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$$

13. $\int \sec z\tan z\, dx = \sec z$, karena

$$\frac{d}{dz}\sec z = \frac{d}{dz}\frac{1}{\cos z} = \frac{0\cos z + \sin z}{\cos^2 z}$$

$$= \frac{\sin z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos z}\,\frac{\sin z}{\cos z} = \sec z \tan z$$

Cara lain dengan menggunakan $\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\, n \neq 1$

$$\int \sec z \,.\tan z \; dz = \int \frac{1}{\cos z}\,.\frac{\sin z}{\cos z}\; dz$$

$$= \int \frac{\sin z}{\cos^2 z}\, dz = \int \sin z\,.\cos^{-2} z\, dz$$

misal : $u = \cos z$ maka $du = -\sin z \; dz$

$$\int \sin z\,.\cos^{-2} z\, dz = \int -u^{-2}\; du = -\int u^{-2}\; du$$

$$= -[-u^{-1}] + c = -[-cos^{-1} z] + c$$

$$= \frac{1}{\cos z} + c = \sec z \quad (c = 0)$$

15. $\int \sinh z\, dx = \cosh z,$ karena

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \text{sinhz}$$

16. $\int \cosh z\, dx = \text{sinhz},$ karena

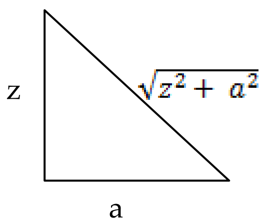
$$\frac{d}{dz}\text{sinhz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{sinhz}$$

Selanjutnya pembuktian nomor berikut ini menggunakan subtitusi trigonometri:

25. $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + a^2}\right)$

Ambil $z = \frac{a}{1}\tan\theta = a\tan\theta$ atau $\tan\theta = \frac{z}{a}$ selanjutnya

$dz = a\, sec^2\theta d\theta$. Secara geometri diperlihatkan:



Untuk $\sqrt{z^2+\ a^2} = \sqrt{(a\tan\theta)^2+\ a^2} = \sqrt{a^2 tan^2\theta+\ a^2}$

$$\sqrt{z^2+\ a^2} = \sqrt{a^2(tan^2\theta+1)} = \sqrt{a^2 sec^2\theta} = a\sec\theta$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} = \int\frac{a\,sec^2\theta\,d\theta}{a\sec\theta} = \int\sec\theta\ d\theta$$

$$= \ln(\sec\theta+\tan\theta)+\ c$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{a}+\frac{z}{a}\right)+c$$

$$= \ln\frac{\sqrt{z^2+a^2}+z}{a}+c$$

$$= \ln\left(z+\sqrt{z^2+\ a^2}\right)-\ln a+c$$

$$= \ln\left(z+\sqrt{z^2+\ a^2}\right)+\ C$$

$\therefore\ \int\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}} =\ \ln\left(z+\sqrt{z^2+\ a^2}\right)$ (terbukti)

26. $\int\frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\left(\tan^{-1}\frac{z}{a}\right)$

Ambil $z = a\tan\theta,\ \tan\theta = \frac{z}{a}$ atau $\theta = \tan^{-1}\frac{z}{a}$, dengan maka $dz = a\sec^2\theta d\theta$.

$$\int\frac{dz}{z^2+a^2} = \int\frac{a\sec^2\theta}{(a\tan\theta)^2+a^2}d\theta = \int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\ d\theta$$

$$= \int\frac{a\sec^2\theta}{a^2(\tan^2\theta+1)}\ d\theta = \int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\ d\theta = \int\frac{1}{a}\ d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\ \theta+\ c = \frac{1}{a}\left(\tan^{-1}\frac{z}{a}\right)+c$$

$\therefore\ \int\frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a}$ (terbukti)

28. $\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + c$

$z = a \sin\theta$

$dz = a\cos\theta\ d\theta$

$\frac{z}{a} = \sin\theta$

$\theta = \sin^{-1}\frac{z}{a}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} &= \int \frac{a\ \cos\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2 - (a\ \sin\theta)^2}} \\
&= \int \frac{a\ \cos\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta}} \\
&= \int \frac{a\ \cos\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2 - (1 - sin^2\theta)}} \\
&= \int \frac{a\ \cos\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2 - cos^2\theta}} \\
&= \int \frac{a\ \cos\theta\ d\theta}{a\ cos\theta} = \int d\theta = \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + c
\end{aligned}$$

$\therefore \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$ (terbukti)

32. $$\int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a}$$

Ambil $z = a\sin\theta$, maka $\theta = \sin^{-1}\frac{z}{a}$

$dz = a\cos\theta\ d\theta$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - z^2} dz &= \int \sqrt{a^2 - (a\sin\theta)^2}.(a\cos\theta\ d\theta) \\
&= \int \sqrt{a^2 - (a^2 sin^2\theta)}.(a\cos\theta\ d\theta) \\
&= \int \sqrt{a^2(1 - sin^2\theta)}\ .\ (a\cos\theta\ d\theta) \\
&= \int \sqrt{a^2\cos^2\theta}\ .\ (a\cos\theta\ d\theta) \\
&= \int a\cos\theta\ (a\cos\theta\ d\theta) \\
&= a^2\int \cos^2\theta\ d\theta = a^2\int\left[\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right] d\theta \\
&= a^2\left[\frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\theta\right] = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta + \frac{a^2}{2}\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{4} \sin 2\theta + \frac{a^2}{2}\theta = \frac{a^2}{2} \sin\theta \cos\theta + \frac{a^2}{2}\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{z}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - z^2}}{a} + \frac{a^2}{2} \cdot \sin^{-1}\frac{z}{a}$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2 - z^2}\,dz = \frac{z}{a}\sqrt{a^2 - z^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a} \quad \text{(terbukti)}$$

Bukti nomor 33 dan 34

$$\int e^{az} \cos bz \; dz = \frac{e^{az}(\,a\cos bz + b\sin bz\,)}{a^2 + b^2}$$

Kita mempunyai: $\int e^{(a+ib)z} = \frac{e^{(a+ib)z}}{a+ib}$

Ruas kiri dan kanan dapat ditulis sebagai

$$\int e^{az}(\cos bz + i \sin bz) = \frac{e^{az}(\cos bz + i\sin bz)}{a+ib}$$

$$\int e^{az}(\cos bz + i \sin bz) = \frac{e^{az}(\cos bz + i\sin bz)}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib}$$

$$= \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz + i(a\sin bz - b\cos bz))}{a^2+b^2}$$

Dengan menyamakan bagian real dan bagian imajiner kedua ruas, diperoleh:

$$\int e^{az} \; \cos bz\, dz = \frac{e^{az}(a\cos bz + b\sin bz)}{a^2+b^2}$$

$$\int e^{az} \; \sin bz\, dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2+b^2} \quad \text{(terbukti)}$$

Contoh 6.4

Hitungn setiap integral berikut dengan rumus integral fungsi integral khusus.

a. $\int \frac{dz}{\sqrt{8z^2-9}}$ b. $\int \frac{dz}{64z^2+8}$ c. $\int \sqrt{27-2z^2}\,dz$

Jawab:

a. $\int \frac{dz}{\sqrt{8z^2-9}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(2\sqrt{2}z)^2-3^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(2\sqrt{2}z)}{\sqrt{(2\sqrt{2}z)^2-3^2}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(2\sqrt{2}z+\sqrt{8z^2-9})$$

b. $\int \frac{dz}{32z^2+8} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{d(4\sqrt{2}z)}{(4\sqrt{2}z)^2+(2\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\left(\frac{1}{2.2\sqrt{2}}\right)\ln\left(\frac{4\sqrt{2}z-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}z+2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{32}\right)\ln\left(\frac{2\sqrt{2}(2z-1)}{2\sqrt{2}(2z+1)}\right) = \left(\frac{1}{32}\right)\ln\left(\frac{2z-1}{2z+1}\right)$$

c. $\int \sqrt{27-2z^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}\,z)^2}\,d(\sqrt{2}\,z)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}\,z}{2}\sqrt{27-2z^2}+\frac{27}{2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\,z}{3\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{z}{2}\sqrt{27-2z^2}+\frac{27}{2\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{9}z\right)$$

1. Integral Subtitusi

Pada bagian B tentang integral fungsi-fungsi khusus, telah dibahas bahwa beberpa pembuktian menggunakan subtitusi fungsi trigonometri. Hal ini dilakukan bila integral tak tentu $\int f(z)dz$ tidak dapat langsung diintegralkan dengan menggunakan rumus-rumus integral dasar, karena itu integral $\int f(z)dz$ perlu diubah ke suatu bentuk dengan jalan mengganti peubah z dengan peubah baru, misalnya u. Pengubahan fungsi tersebut diharapkan dapat lebih memudahkan proses pengintegralan.

Contoh berikut dapat diselesaikan dengan menggunakan subtitusi aljabar dan subtitusi fungsi irasional, serta konsep derivatif (misal: d u^2 = 2u du).

Contoh 6.5

Tentukan setiap integral berikut ini.

1. $\int sin^4 2z \cos 2z\, dz$
2. $\int \cot(2z+5)dz$
3. $\int z\sqrt{5z-9}\, dz$
4. $\int \frac{z^2+1}{z^3+3z+2}dz$
5. $\int z^2 \tanh(4z^3)dz$

Jawab:

1. $\int sin^4 2z \cos 2z\, dz = \frac{1}{2}\int sin^4 2z \cos 2z\, d(2z)$
   $= \frac{1}{2}\int sin^4 2z\, d(\sin 2z) =$
   $\frac{1}{2}.\frac{1}{5}\, sin^5 2z + c =$
   $\frac{1}{10} sin^5 + c.$

2. $\int \cot(2z+5)dz = \frac{1}{2}\int \cot(2z+5)d(2z+5)$
   $$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos(2z+5)}{\sin(2z+5)}\, d(2z+5)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin(2z+5))}{\sin(2z+5)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln[\sin(2z+5)] + c$$

$$= \ln\sqrt{\sin(2z+5)} + c$$

3. $\int z\sqrt{5z-9}\,dz$

Misal: $u = \sqrt{(5z-9)}$ maka $u^2 = 5z - 9$ atau

$$\frac{u^2+9}{5} = z \text{ turunkan ke} - \text{u}, \qquad \frac{2u}{5}du = dz$$

Sehingga:

$$\int z\sqrt{5z-9}\,dz = \int \frac{(u^2+9)}{5}u.\frac{2u}{5}\,du$$

$$= \frac{2}{25}\int(u^4 + 9u^2)du = \frac{2}{25}\left[\frac{1}{5}u^5 + \frac{9}{3}u^3\right] + c$$

$$= \frac{2}{125}u^5 + \frac{18}{75}u^3 + c, \text{ subtitusi } u = \sqrt{(5z-9)}$$

$$= \frac{2}{125}(5z-9)^{\frac{5}{2}} + \frac{6}{25}(5z-9)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{125}\sqrt{(5z-9)^5} + \frac{6}{25}\sqrt{(5z-9)^3} + c$$

4. $\int \frac{z^2+1}{z^3+3z+2}dz$

Misalkan :

$u = z^3 + 3z + 2$

$du = 3z^2 + 3dz = 3(z^2+1)dz$

$\frac{du}{3} = (z^2+1)dz, \qquad$ sehingga:

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \ln u, \text{ subtitusi } u = z^3 + 3z + 2$$

$$\int \frac{z^2+1}{z^3+3z+2}\,dz = \frac{1}{3}\ln(z^3+3z+2)$$

Dengan cara derivatif langsung:

$$\int \frac{z^2+1}{z^3+3z+2}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z^3+3z+2}\,d(z^3+3z+2)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(z^3+3z+2)}{z^3+3z+2} = \frac{1}{3}\ln(z^3+3z+2)$$

$$= \ln \sqrt[3]{z^3+3z+2} + c$$

5. $\int z^2 \tanh(4z^3)\,dz = \frac{1}{12}\int \tanh(4z^3)\, d(4z^3)$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{\sinh(4z^3)}{\cosh(4z^3)}\, d(4z^3)$$

$$= -\frac{1}{12}\int \frac{d[\cosh(4z^3)]}{\cosh(4z^3)}$$

$$= -\frac{1}{12}\ln\cosh(4z^3) + c$$

2. Integral Parsial

Integral parsial adalah intergral yang fungsinya merupakan hasil ganda dari fungsi z dengan diferensial dari fungsi z yang lain.

Andaikan u dan v adalah fungsi dari z maka derivatif dari uv adalah: $d(uv) = u\,dv + v\,du$. Jika kedua ruas diintegralkan

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$
$$\int \boldsymbol{u\,dv} \quad = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$$

Contoh 6.6

Tentukan setiap integral berikut.

1. $\displaystyle\int z\cos 2z\,dz$ 2. $\displaystyle\int z^3 \ln z\,dz$

3. $\displaystyle\int z^2.e^{-z}\,dz$ 4. $\displaystyle\int \frac{z\,sin^{-1}z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$

<u>Jawab:</u>

1. $\int z\cos 2z\,dz \;= \frac{1}{2}\int z\,d(\sin 2z)$
$$= \frac{1}{2}[z\sin 2z - \int \sin 2z\,d(z)] + c$$
$$= \frac{1}{2}[z\sin 2z - \int \sin 2z\,.1dz] + c$$
$$= \frac{1}{2}\left[z\sin 2z + \frac{1}{2}\cos 2z\right] + c$$
$$= \frac{1}{2}z\sin 2z + \frac{1}{4}\cos 2z + c$$

2. $\int z^2 \ln z\,dz \;= \frac{1}{3}\int \ln z\,d(z^3)$
$$= \frac{1}{3}[z^3\ln z - \int z^3 d(\ln z)] + c$$
$$= \frac{1}{3}\left[z^3\ln z - \int \frac{z^3}{z}dz\right] + c$$
$$= \frac{1}{3}z^3\ln z - \frac{1}{9}z^3 + c$$
$$= \frac{1}{9}z^3(3\ln z - 1) + c$$

3. $\int z^2.e^{-z}\,dz = -1\int z^2\,d(e^{-z})$

$$= -1[z^2e^{-z} - \int e^{-z} d(z^2)] + c$$

$$= -1[z^2e^{-z} - \int e^{-z} 2z\, dz] + c$$

$$= -1[z^2e^{-z} + 2\int z\, d(e^{-z})] + c$$

$$= -1[z^2.e^{-z} + 2z\, e^{-z} - 2\int e^{-z}\, d(z)] + c$$

$$= -1[z^2.e^{-z} + 2z\, e^{-z} - 2\int e^{-z}.1\, dz] + c$$

$$= -z^2.e^{-z} - 2z\, e^{-z} - 2\, e^{-z} + c$$

$$= -e^{-z}(z^2 + 2z + 2\,) + c$$

4. $\displaystyle\int \frac{z\, sin^{-1}z}{\sqrt{1-z^2}}\, dz = \int sin^{-1}z\, d(-\sqrt{1-z^2})$

$$= \left(-\sqrt{1-z^2}\right)sin^{-1}z + \int \sqrt{1-z^2}\, d(sin^{-1}z)$$

$$= \left(-\sqrt{1-z^2}\right)sin^{-1}z + \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$$

$$= \left(-\sqrt{1-z^2}\right)sin^{-1}z + \int dz$$

$$= \left(-\sqrt{1-z^2}\right)sin^{-1}z + z + c \text{ atau}$$

$$= \left(-\sqrt{1-z^2}\right)arc \sin z + z + c$$

C. Rumus Integral Cauchy

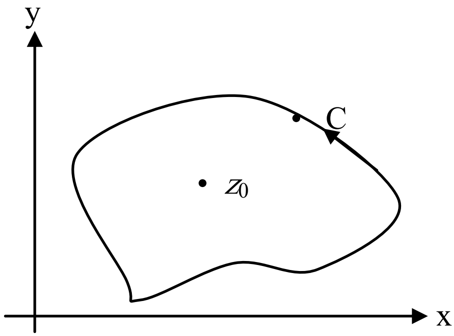
1. Rumus Integral Cauchy I

Teorema 6.7

Misalkan fungsi f (z) analitik di dalam pada suatu kurva tertutup sederhana (interior) C dan pada lengkungan tertutup C tersebut. Jika Zo titik interior dari C, maka

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz \ldots\ldots (i)$$

Dengan pengintegralan mengambil arah positif pada lengkungan tertutup C.



Gambar 6.2: Kurva C dan titik interior z_0

Jika suatu fungsi *f(z)* diketahui berada pada kurva tertutup sederhana *C* maka nilai fungsi dan semua turunannya dapat ditentukan di semua titik di dalam *C* tersebut.

Selanjutnya rumus integral (i) dapat ditulis sebagai:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Contoh 6.7

1. Hitunglah $\int_c \frac{\sin 3z}{z+\frac{\pi}{2}} dz$, jika C adalah lingkaran $|z| = 5$.
2. Hitunglah $\int_c \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$, jika C adalah lingkaran $|z-1| = 4$
3. Hitunglah $\int \frac{z}{(20-z^2)(z+2i)} dz$, jika C lingkaran $|z| = 3$.

<u>Jawab:</u>

1. $\int_c \frac{\sin 3z}{z-(-\frac{\pi}{z})}\, dz$, sehingga dapat ditentukan

$f(z) = \sin 3z$ dan $z_0 = -\frac{\pi}{2}$, maka

$f(z_0) = \sin(3.-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{3}{2}\pi) =-(-1) = 1$

Jadi, $\int_c \frac{\sin 3z}{z-(-\frac{\pi}{z})}\, dz = 2\pi i. f(zo) = 2\pi i. 1 = 2\pi$

2. $\int_c \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$, dengan C lingkaran : $|z-1| = 4$

$|z-1| = 4$ atau $(x-1)^2 + y^2 = 16$, sebuah lingkaran pusat (1, 0) dan jari-jari 4 (titik interior di $|z-1| = 4$)

Ambil: $f(z) = e^{3z}$ dan $z_0 = \pi i$, maka

$f(z_0) = e^{3\pi i} = \text{cis } 3\pi$

Jadi $\int_c \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = 2\pi i. f(z_0) = 2\pi i. \text{cis } 3\pi$

$= 2\pi i(-1+0) = -2\pi i$

3. $\int \frac{z}{(20-z^2)(z+2i)} dz$,

Dengan titik interior di dalam $|z| = 3$.

Ambil: $f(z) = \frac{z}{(20-z^2)}$ dan $z_0 = -2i$ maka

$f(z_0) = \frac{(-2i)}{20-(-2i)^2} = \frac{-2i}{20-(-4)} = \frac{-2i}{24} = \frac{-i}{12}$

$\int \frac{z}{(20-z^2)(z+2i)} dz = 2\pi i . f(z_0)$

$= 2\pi i . (\frac{-i}{12}) = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

2. Rumus Integral Cauchy II

Teorema 6.8

Misalkan $f(z)$ analitik di dalam interior D yang dibatasi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ maka menurut teorema rumus Integral Cauchy II

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz \ldots . - \int_{c_n}\frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

Contoh 6.8

a. $\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz$, jika c lingkaran $|z| = 4$, arah positif

b. $\oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$, dimana C lingkaran, $|z| = 3$.

Jawab:

a. $\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz$

Ambil: $f(z) = \frac{5z+6i+2}{z+2i}$ dan $z_0 = -1$, maka

$f(z_0) = \frac{-5+6i+2}{-1+2i} = \frac{-3+6i}{-1+2i} = \frac{3(-1+2i)}{-1+2i} = 3$, selanjutnya

Ambil: $g(z) = \frac{5z+6i+2}{z+1}$ dan $z_0 = -2i$

$g(z_0) = \frac{-10i+6i+2}{-2i+1} = \frac{-4i+2}{-2i+1} = \frac{2(-2i+1)}{-2i+1} = 2,$

Menurut rumus integral Cauchy II, maka

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz - g(z_0)$

$3 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz - 2$

$5 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz$

Jadi $\oint_c \frac{5z+6i+2}{(z+1)(z+2i)}dz = 10\pi i$

b. $\oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$ (Dengan subtitusi fungsi pecah)

$= \oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-2}dz - \oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1}dz$

(i) Ambil $f(z) = \sin\pi z^2 + \cos\pi z^2$ dan $z_0 = 2$, maka

$$f(z_0) = \sin 4\pi + \cos 4\pi = 1$$

(ii) Ambil $f(z) = \sin\pi z^2 + \cos\pi z^2$ dan $z_0 = 1$, maka

$$f(z_0) = \sin\pi + \cos\pi = -1$$

Sehingga: $\oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$

$$= \oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-2} dz - \oint_c \frac{\sin\pi z^2+\cos\pi z^2}{z-1} dz$$

$$= 2\pi i.(1) - 2\pi i.(-1) = 4\pi i$$

3. Rumus Integral Cauchy III

Teorema 6.9

Jika f (z) analitik pada daerah D, yang memuat kurva tertutup C serta titik interior z_0 dari kurva C, arah lengkungan C positif, maka turunan tingkat tinggi (ke-n) dari f(z), yaitu $f^{(n)}(z_0)$ ada untuk n = 1, 2, 3,….. Adapun nilai turunan tersebut adalah.

a. $f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^2} \Leftrightarrow \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0)$

b. $f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^3} \Leftrightarrow \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0)$

c. $f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^4} \Leftrightarrow \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(z_0)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^{n+1}} \Leftrightarrow \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^n(z_0)$$

Contoh 6.9

a. Hitung $\oint_c \frac{dz}{(z-3)^2 z^3}$, jika C, $|z| = 4$, arah positif

b. $\oint_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$, dimana C adalah lingkaran, $|z| = 3$

c. $\oint_c \frac{e^{2z}}{(3z+2)^4} dz$, dimana C adalah lingkaran, $|z| = 1$.

Jawab:

a. $\oint_c \frac{dz}{(z-3)^2 z^3}$

Ambil: $f(z) = \frac{1}{z^3} \Rightarrow f'(z) = \frac{-3}{z^4}$ dan

$z_0 = 3 \Rightarrow f'(z_0) = \frac{-3}{3^4} = \frac{-3}{81}$ sehingga:

$$\oint_c \frac{dz}{(z-3)^2 z^3} = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0) = 2\pi i\left(\frac{-3}{81}\right) = \frac{-6}{81}\pi i$$

b. $\oint_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$,

Ambil, $f(z) = e^{2z}$; maka $f'(z) = 2e^{2z}$, $f''(z) = 4e^{2z}$, dan

$f'''(z) = 8e^{2z}$, selanjutnya jika $z_0 = -1$, maka

$f'''(z_0) = 8e^{2z_0} = 8e^{-2}$, Sehingga

$$\oint_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(z_0) = \frac{2\pi i}{3!} 8e^{-2} = \frac{16}{6}\pi i e^{-2} = \frac{8}{3}\pi i e^{-2}$$

c. $\oint_c \frac{e^{2z}}{(3z+2)^4} dz = \oint_c \frac{e^{2z}}{\left(3\left(z+\frac{2}{3}\right)\right)^4} dz$

$$= \oint_c \frac{e^{2z}}{3^4\left(z+\frac{2}{3}\right)^4} dz = \frac{1}{3^4}\oint_c \frac{e^{2z}}{(z+\frac{2}{3})^4} dz$$

Ambil: $f(z) = e^{2z} \rightarrow f'''(z) = 8e^{2z}$ dan $z_0 = -\frac{2}{3}$, maka

$f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 8e^{-\frac{4}{3}}$, sehingga:

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(3z+2)^4} dz = \frac{1}{3^4} \int_C \frac{e^{2z}}{\left(z+\frac{2}{3}\right)^4} dz = \frac{1}{3^4} \frac{2\pi i}{3!} . f'''\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3^4} \frac{2\pi i}{3!} . 8e^{-\frac{4}{3}} = \frac{8}{243} \pi i e^{-\frac{4}{3}}$$

D. Penyelesaian Soal dan Latihan

1. Hitunglah $\int_C (x^2 - iy^2) dz$ sepanjang :
   a. Parabola y = $2x^2$ dari (1,1) ke (2,8)
   b. Garis lurus dari (1,1) ke (1,8) dan kemudian dari (1,8) ke (2,8)
   c. Garis lurus dari (1,1) ke (2,8)

   Jawab:

   a. $\int_C (x^2 - iy^2) dz = \int_C (x^2 - iy^2)(dx + idy)$

   $$= \int_C (x^2 - iy^2)dx + (ix^2 + y^2)dy$$

   Dari persamaan parabola: $y = 2x^2$ maka $dy = 4x\, dx$

   $$\int_C (x^2 - iy^2)dx + (ix^2 + y^2)dy = \int_1^2 (x^2 - 4ix^4)dx + (ix^2 + 4x^5)4x dx$$

   $$= \int_1^2 (x^2 - 4ix^4)dx + (4ix^3 + 16x^5)dx = \int_1^2 (6x^5 - 4ix^4 + 4ix^3 + x^2)dx$$

   $$= [\frac{16}{6} x^6 - \frac{4}{5} ix^5 + ix^4 + \frac{1}{3} x^3]_1^2$$

   $$= (\frac{16}{6} 64 - \frac{4}{5} i32 + i16 + \frac{1}{3} 8) - (\frac{16}{6} - \frac{4}{5} i + i + \frac{1}{3})$$

$= \frac{1008}{6} + \frac{7}{3} - \frac{124\,i}{5} + \frac{75\,i}{5} = \frac{511}{3} - \frac{49\,i}{5}.$

b. Garis lurus dari (1,1) ke (1,8) dan kemudian dari (1,8) ke (2,8)

(i) Persamaan garis melalui titik (1,1) ke (1,8) adalah $x = 1$
Dari persamaan: $x = 1$, maka $dx = 0$

$$\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dx + \left(ix^2 + y^2\right)dy = \int_1^8 (i(1)^2 - y^2)\,dy$$

$= [iy + \frac{1}{3}y^3]_1^8 = (8i + \frac{512}{3}) - (i + \frac{1}{3}) = \frac{511}{3} + 7i$

(ii) Persamaan garis melaui titik (1,8) ke (2,8) adalah $y = 8$
Dari persamaan: $y = 8$ maka dy = 0

$$\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dx + \left(ix^2 + y^2\right)dy = \int_1^2 (x^2 - i8^2)\,dy$$

$= [\frac{1}{3}x^3 - i64x]_1^2 = (\frac{8}{3} - 128i) - (\frac{1}{3} - 64i) = \frac{7}{3} - 64i$

Jadi nilai $\int_C (x^2 - iy^2)\,dz$ sepanjang garis lurus yang menghubungkan titik (1,1) ke (1,8) dan kemudian dari titik (1,8)

ke (2,8) adalah $(\frac{511}{3} + 7i) + (\frac{7}{3} - 64i) = \frac{518}{3} - 57i.$

c. Persamaan garis melalui titik (1,1) ke (2,8) adalah $y = 7x - 6$
Dari persamaan: $y = 7x - 6$ maka $dy = 7\,dx$

$$\int_C \left(x^2 - iy^2\right)dx + \left(ix^2 + y^2\right)dy = \int_1^2 \left(x^2 - i(7x-6)^2\right)dx + \left(ix^2 + (7x-6)^2\right)7\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - i\left(49x^2 - 84x + 36\right)\right)dx + \left(ix^2 + \left(49x^2 - 84x + 36\right)\right)7\,dx$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - 49ix^2 + 84ix - 36i\right)dx + (7ix^2 + 343x^2 - 588x + 252)\,dx$$

$$= \int_1^2 (344x^2 - 42ix^2 + 84ix - 588x - 36i + 252)\,dx$$

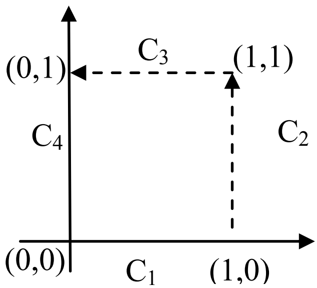
$$= \left[\frac{344}{3}x^3 - 14ix^3 + 42ix^2 - 294x - 36ix + 252x\right]_1^2 = \frac{2282}{3} - 8i$$

2. Hitunglah $\int_c |z|^2\, dz,$ sepanjang suatu bujur sangkar dengan titik-titik sudut (0,0), (1,0), (1,1), (0,1).

   Jawab:

   Ambil $|z| = |x + iy|$ maka $|z|^2 = x^2 + y^2$

   $$\int_c (x^2 + y^2)(dx + idy)$$
   $$= \int_c (x^2 + y^2)dx + i \int_c (x^2 + y^2)$$



   Kurva C_1 : persamaan y = 0, maka dy = 0

   $$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

   Kurva C_2 : persamaan x =1, maka dx = 0

   $$\int_0^1 i(1 + y^2)dy = i\left\{y + \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1\right\} = i\left\{1 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{4}{3}i$$

Kurva C_3 : persamaan y=1, maka dy = 0

$$\int_1^0 (x^2+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + x\Big|_1^0 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

Kurva C_4 : persamaan x = 0, maka dx = 0

$$\int_1^0 iy^2 dy = i\left\{\frac{1}{3}y^3\Big|_1^0\right\} = -\frac{1}{3}i$$

$$\int_c |z|^2 dz = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right) + i\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{3} + i\frac{3}{3} =$$

❖ $-1 + i$

3. Hitunglah $\oint_C (2x - y)dx + (3y + x)\,dy$ sepanjang
   a. Kurva $y = x^2 + 2$
   b. Garis lurus yang menghubungkan (0, 2) dan (2, 6)
   c. Garis lurus dari (0, 2) ke (0, 6), dan dari (0, 6) ke (2, 6)
   d. Garis lurus dari (0, 2) ke (2, 2) dan dari (2, 2) ke (2, 6)

4. Hitunglah $\oint_C (x^2 - iy^2)\,dz$, sepanjang:
   a. Parabola $y = x^2 - 5x + 6$ dari (1, 2) ke (2, 0)
   b. Garis lurus dari (1, 2) ke (1, 6) dan dari (1, 6) ke (2, 0)
   c. Garis lurus dari (1, 2) ke (2, 0)

5. Buktikan $\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

<u>Bukti:</u>

Ambil: $\frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{A}{z+a} + \frac{B}{z-a}$

$$\frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{Az - aA + Bz + Ba}{z^2 - a^2}$$

$$\frac{1}{z^2 - a^2} = \frac{(A + B)z + a(B - A)}{z^2 - a^2}$$

Kesamaan kedua ruas

$A + B = 0 \rightarrow A = -B$

$a(B - A) = 1$, subtitusi $a(B + B) = 1$, maka

$a(2B) = 1$ atau $B = \frac{1}{2a} \rightarrow A = -\frac{1}{2a}$

$$\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dz}{z - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dz}{z + a}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{d(z - a)}{(z - a)} - \frac{1}{2a} \int \frac{d(z + a)}{(z + a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \ln(z - a) - \frac{1}{2a} \ln(z + a) + c$$

$$= \frac{1}{2a} [\ln(z - a) - \ln(z + a)] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{z - a}{z + a}\right) + c \quad \text{(Terbukti)}$$

6. $\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{a} cos^{-1} \frac{a}{z}$

Bukti:

$z = a \sec\theta$, maka $\frac{z}{a} = \sec\theta$

$\Leftrightarrow \frac{z}{a} = \frac{1}{cos\theta} \Leftrightarrow cos\theta = \frac{a}{z} \Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{a}{z}$

dari $z = a \sec\theta$ maka $dz = a \sec\theta \tan\theta \; d\theta$

Sehingga diperoleh:

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}} = \int \frac{a\ \sec\theta \tan\theta}{(a\ \sec\theta)\sqrt{(a\ \sec\theta)^2-a^2}}$$

$$= \int \frac{a\ \sec\theta \tan\theta}{(a\ \sec\theta)\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}$$

$$= \int \frac{\tan\theta\ d\theta}{a\tan\theta} = \int \frac{1}{a} d\theta = \frac{1}{a}\theta$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2-a^2}} = \frac{1}{a}\cos^{-1}\frac{a}{z} \quad \therefore \text{terbukti}$$

7. Hitunglah intergral berikut

a. $\int z\sqrt{2z+5}\,dz$ b. $\int \frac{z^2+2z}{(z^3+3z^2+9)}dz$ c. $\int \sin 5z \cos 5z\ dz$

d. $\int \cot(6z+5)\ dz$ e. $\int sin^3 5z \cos 5z\ dz$

<u>Jawab:</u>

a. $\int z\sqrt{2z+5}\,dz = \left(\frac{u^2-5}{2}\right)u\,.\,u\ du = \frac{u^4-5u^2}{2}du$

$$= \frac{1}{2}[\int u^4\ du - \int 5u^2\ du]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}u^5 du - \frac{5}{3}u^3\right] + c$$

$$= \frac{1}{10}(2z+5)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{6}(2z+5)^{\frac{3}{2}} + c$$

b. $\int \frac{z^2+2z}{(z^3+3z^2+9)}dz = \frac{1}{3}\int \frac{d(z^3+3z^2+9)}{(z^3+3z^2+9)}$

$$= \frac{1}{3}\ln(z^3+3z^2+9) + c$$

$$= \ln\sqrt[3]{z^3+3z^2+9} + c$$

c. $\int \sin 5z \cos 5z\ dz = \frac{1}{5}\int \sin 5z \cos 5z\ d(5z)$

$$= \frac{1}{5}\int \sin 5z\ dz\ d(sin5z)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\sin^2 5z}{2}\right) + c$$

$$= \frac{1}{10}\sin^2 5z + c$$

d. $\int \cot(6z+5)\,dz \ = \frac{1}{6}\int \cot(6z+5)\,d(6z+5)$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{\cos(6z+5)}{\sin(6z+5)}\,d(6z+5)$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d\,[\sin\,(6z+5)]}{[\sin\,(6z+5)]}$$

$$= \frac{1}{6}\ln[\sin(6z+5)] + c$$

$$= \ln\sqrt[6]{\sin(6z+5)} + c$$

e. $\int \sin^3 5z \cos 5z\,dz = \frac{1}{5}\int \sin^3 5z \cos 5z\,d(5z)$

$$= \frac{1}{5}\int \sin^3 5z\,d(\sin 5z)$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}\sin^4 5z\right] + c = \frac{1}{20}\sin^4 5z + c$$

8. Hitunglah:

a. $\int \sqrt{1+\sqrt{3z+1}}\ dz$ b. $\int_0^{\pi+i} z\,\mathrm{Cos}\,3z\ dz$

c. $\int_0^{\pi+i} z\cos 2z\ dz$ d. $\int \frac{dz}{1+2\,Cos\,z}$

(subtitusi u = tan ($\frac{Z}{2}$))

9. Hitunglah intergral parsial berikut,

a. $\int z\ \cos 4z\ dz$ b. $\int z^5 \ln z\,dz$ c. $\int z\ \ln\ z\,dz$

d. $\int e^{az}\sin bz\ dz = \frac{e^{az}(a\sin bz - b\cos bz)}{a^2+b^2}$

e. $\int e^{az} \cos bz \; dz = \dfrac{e^{az}(\, a \cos bz + b \sin bz\,)}{a^2 + b^2}$

<u>Jawab:</u>

a. $\int z \; \cos 4z \; dz = \frac{1}{4} \int z \;\; d(\sin 4z)$

$$= \frac{1}{4} [z \sin 4z - \int \sin 4z \, d(z)] + c$$

$$= \frac{1}{4} [z \sin 4z - \int \sin 4z \,.1.\, dz] + c$$

$$= \frac{1}{4} \left[z \sin 4z + \frac{1}{4} \cos 4z \right] + c$$

$$= \frac{1}{4} \; z \sin 4z + \frac{1}{16} \cos 4z$$

b. $\int z^5 \ln z \, dz = \frac{1}{6} \int \ln z \; d(z^6)$

$$= \frac{1}{6} [z^6 \ln z - \int z^6 \;\; d(\ln z)] + c$$

$$= \frac{1}{6} \left[z^6 \ln z - \int \frac{z^6}{z} \; dz \right] + c$$

$$= \frac{1}{6} \; z^6 \ln z - \frac{1}{36} \; z^6 + c$$

$$= \frac{1}{6} \; z^6 \left[\ln z - \frac{1}{6} \right] + c$$

c. $\int z \; ln \; z \, dz = \frac{1}{2} \int \; ln \; z \; d(z^2)$

$$= \frac{1}{2} [z^2 \ln z - \int z^2 \, d(\ln z)] + c$$

$$= \frac{1}{2} \left[z^2 \ln z - \frac{1}{2} z^2 \right] + c$$

$$= \frac{1}{2} z^2 \ln z - \frac{1}{4} z^2 + c$$

Jawaban (d) dan (e) solusinya diserahkan kepada pembaca.

10. $\int_c \frac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ dimana C lingkaran |z|= 4

Jawab:

Ambil : $\frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)(z^2+\pi^2)}$

$$= \frac{e^z}{(z+\pi i)(z-\pi i)(z+\pi i)(z-\pi i)}$$

Maka $z_0 = -\pi i \; dan \; z_0 = \pi i$

(i) Untuk $z_0 = -\pi i$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$$

$$= \lim_{z\to-\pi i} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{(z+\pi i)^2 \frac{e^z}{(z+\pi i)^2(z-\pi i)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to-\pi i} \frac{1}{(1)!}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z-\pi i)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to-\pi i} \frac{e^z(z-\pi i)^2 - 2(z-\pi i)e^z}{(z-\pi i)^4}$$

$$= \lim_{z\to-\pi i} \frac{e^z(z-\pi i)-2e^z}{(z-\pi i)^3} = \lim_{z\to-\pi i} \frac{e^z(z-\pi i-2)}{(z-\pi i)^3}$$

$$= \frac{e^{-\pi i}(-2\pi i-2)}{(-2\pi i)^3} = \frac{-2cis\pi(\pi i+1)}{8\pi^3 i} = \frac{-2(cos\pi - i\sin\pi)(\pi i+1)}{8\pi^3 i}$$

$$= \frac{2(\pi i+1)}{8\pi^3 i} = \frac{\pi i+1}{4\pi^3 i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i-\pi}{-4\pi^3} = \frac{\pi-i}{4\pi^3}$$

(ii) Untuk $z_0 = \pi i$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$$

$$= \lim_{z\to\pi i} \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left\{(z-\pi i)^2 \frac{e^z}{(z-\pi i)^2(z+\pi i)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to\pi i} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z+\pi i)^2}\right\} = \lim_{z\to\pi i}\left\{\frac{e^z(z+\pi i)^2 - 2(z+\pi i)e^z}{((z+\pi i)^2)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z\to\pi i}\left\{\frac{e^z(z+\pi i)(z+\pi i-2)}{(z+\pi i)^4}\right\} = \lim_{z\to\pi i}\left\{\frac{e^z(z+\pi i-2)}{(z+\pi i)^3}\right\}$$

$$= \frac{e^{\pi i}(\pi i+\pi i-2)}{(\pi i+\pi i)^3} = \frac{cis\,\pi\,(2\pi i-2)}{(2\pi i)^3} = \frac{(\cos\pi+i\sin\pi).2(\pi i-1)}{8\pi^3 i^3}$$

$$= \frac{(-1+0)\,(\pi i-1)}{-4\pi^3 i} = \frac{-\pi i+1}{-4\pi^3 i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{\pi+i}{4\pi^3}$$

Dari (i) dan (ii) maka diperoleh :

$$\oint_c \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(z_0) = 2\pi i\left(\frac{\pi+i}{4\pi^3}+\frac{\pi-i}{4\pi^3}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{2\pi}{4\pi^3}\right) = \frac{i}{\pi}$$

11. Hitung dengan menggunakan rumus integral Cauchy

a. $\oint_C \frac{3z}{(16-z^2)(z-i)}dz$ b. $\oint_C \frac{e^{4z}}{(z+1)^5}dz$

12. Hitung dengan menggunakan rumus integral Cauchy

a. $\oint_C \frac{3z^2}{z^4-1}dz,\ C: |z-1| = 1$ b. $\oint_C \frac{e^{9z}}{(9z+\pi i)^2}dz$

13. Hitung dengan menggunakan rumus integral Cauchy

a. $\oint_C \frac{\sin^4 z}{(z-\frac{1}{6}\pi)^3}dz$ b. $\oint_C \frac{e^{4z}}{(4z+1)^5}dz$

E. Peta Konsep

Integral Peubah Kompleks

(1) **Integral Garis**

Definisi: Integral garis pada bidang kompleks dari **a** ke **b** sepanjang lintasan C terhadap fungsi f(z) adalah

$$\int_c f(z)dz = \int_a^b f(z)dz = \lim_{\Delta z_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\Delta z_k)$$

(2) **Teorema Green dan Cauchy-Goursat**

- **Teorema Green**

$$\oint_c K\,dx + L\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dxdy$$

- $\frac{d}{dz}\{f(z).g(z)\} = f(z)\frac{d}{dz}g(z) + g(z)\frac{d}{dz}f(z)$
- Teorema Green dlm bentuk kompleks $\oint_c F(z,\bar{z})dz = 2i\iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,dA$
- Teorema Cauchy-Goursat

$$\int_c f(z)\,dz = 0.$$

(3) **Sifat Integral Garis**

$$\int_c (f(z)+g(z))\,dz = \int_c f(z)dz + \int_c g(z)dz$$

$$\int_c kf(z) = k\int_c f(z)dz$$

dimana k konstanta

$$\int_{c+k} f(z)dz = \int_c f(z)dz + \int_k f(z)dz$$

$$\int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$$

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz$$

Dimana a, b, m pada kurva C

Jika M suatu bilangan positif sehingga $|f(z)| \le M$ untuk setiap z di C dengan panjang busur C adalah L, maka

$$\left[\int_c f(z)dz\right] \le ML\cdot$$

(4) **Integral Fungsi Khusus**

Fungsi: Konstan, Eksponen, Trigonometri, Logaritma, Hiperbolik, Invers Fungsi

(5) **Integral Subtitusi**

Subtitusi aljabar dan subtitusi fungsi irasional, serta konsep derivatif (misal: d u^2 = 2u du).

(6) **Integral Parsial**

(7) **Rumus Integral** Cauchy

Integral Cauchy 1

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Integral Cauchy 1I

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \ldots . - \int_{c_n} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

Integral Cauchy 1II

$$f^{n}(z_0) = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)$$

Gambar 6.3: Peta Konsep Integral Peubah Kompleks

DAFTAR PUSTAKA

Cain, George. (1999). *Complex Analysis*. Atlanta, Georgia: School of Mathematics Georgia Institute of Technology

Jimmy, Hasugian M. dan Prijono, Agus. (2006). *Menguasai Analisis Kompleks Dalam Matematika Teknik.* Bandung: Rekayasa Sains Bandung.

Paliouras, John D. (1987). *Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*, Alih Bahasa Wibisono Gunawan, Jakarta: Erlangga.

Priestley, H. A. (1993). *Pengantar Analisis Kompleks.* Bandung: ITB.

Sardi, Hidayat. (1993). *Fungsi Kompleks*. Materi Pokok. Jakarta: Universitas Terbuka.

Setiawan, Yudi. (1990). *Bahan Kuliah Variabel Kompleks*. Kendari: Universitas Haluoleo.

Spiegel, Murray R. (1991). *Peubah Kompleks*, alih bahasa Koko Martono, Jakarta: Erlangga.

Stein, Elias M. & Shakarchi, Rami. (2003). *Complex Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

Dr. H. Kadir, M.Pd. adalah dosen Universitas Islam Negeri (UIN) Syarif Hidayatullah Jakarta. Lahir di Sinjai, Sulawesi Selatan 12 Agustus 1967. Ia menyelesaikan Sarjana Pendidikan Matematika dari Universitas Haluoleo (1992). Magister (S2) Pendidikan Matematika diselesaikannya di Universitas Pendidikan Indonesia (UPI) Bandung (2000) dan Doktor (S3) bidang Penelitian dan Evaluasi Pendidikan Matematika dari Universitas Negeri Jakarta (UNJ) tahun 2005.

Disamping sebagai dosen tetap di UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, ia juga sebagai dosen di Program Magister Universitas Muhammadiyah Prof. Dr. Hamka (UHAMKA), Universitas Islam Jakarta (UIJ), Sekolah Tinggi Ilmu Administrasi (STIA) LAN Jakarta, dan dosen pada program Doktor Universitas Negeri Jakarta (UNJ), sejak 2007 sampai sekarang.

Pengalaman kerja antara lain, sebagai Konsultan pada projek: *Asset Management Plan* Dikdas DKI Jakarta (2005), *Master Plan* Pendidikan Provinsi Lampung (2005), *Decentralized Basic Education* 3-USAID (2006-2009), Balitbang Kemenag RI (2008-2012). Tim *ad-hoc* Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) (2006-2007), tim *ad-hoc* Standar Pendidik dan Tenaga Kependidikan Pendidikan Tinggi (2011) dan Standar Penilaian Oleh Pemerintah (2013). Asesor Sertifikasi Guru Rayon 37 Uhamka (2010-ss) dan Asesor Sertifikasi Guru Kelas SD/MI Rayon 9 UIN Jakarta (2009-ss).

Menulis buku Statistika Sosial (2006-2012), Statistika untuk Penelitian Ilmu-Ilmu Sosial (2010), dan Statistika Terapan (2015). Aktif dalam kegiatan workshop dan seminar diantaranya: *Master Teacher Training Program* di La Trobe University Melbourne Australia (2000), peserta *International Statistics Conference* University of Malaya, Malaysia (2005), *Trainer of Core Trainer matematika* DBE-3 USAID–Save The Children Federation (2007-2009), pemakalah pada *International Seminar on Mathematics and Sciense Education* UIN Jakarta (2008) dan *International Conference on Research Implementation dan Education of Mathematics dan Sciense* (ICRIEMS), UNY Yogyakarta (2014). Nara sumber pada workshop evaluasi Pusdiklat Anggaran dan Perbendaharaan dan Pusdiklat Umum Kemenkeu (2013) dan Workshop Pekerti kerja sama UNJ dengan Seskoal dan PLN (2013).

ISBN 978-602-346-028-1