ББК 22.161я73
УДК 517(0.75.8)

Швець Валерій Тимофійович
Математичні методи та моделі.
Одеса. Видавництво ВМВ, 2016 - 348 с.

Навчальний посібник присвячений викладенню основних методів математичної фізики, що широко використовуються при розв'язанні великої кількості практичних інженерних задач. В ньому широко використовуються спеціальні функції. Вони розглядаються з різних точок зору, а саме: як розв'язки звичайних лінійних диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами, як власні функції лінійних самоспряжених операторів, як базиси у відповідних функційних просторах. Крім того, у навчальному посібнику викладені теорія узагальнених рядів Фур'є та такі популярні методи розв'язку звичайних диференційних рівнянь та межових задач для рівнянь з частинними похідними як метод степеневих рядів та метод поділу змінних. Можливості перерахованих методів демонструються на розв'язанні великої кількості класичних задач математичної фізики, теорії теплопровідності та квантової механіки.

Розрахований на аспірантів та студентів технічних вузів

Автор:
доктор фіз.-мат. наук, проф. В. Т. Швець
Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, проф., зав. каф. теоретичної фізики Одеського національного університету ім. І. І. Мечнікова В. М. Адамян;
доктор фіз.-мат. наук, проф., зав. каф. теоретичної механіки Одеської національної морської академії С. В. Козицький;
доктор техн. наук, проф., зав. каф. вищої математики Одеської національної академії харчових технологій В. Х. Кирилов

**В.Т. Швець**

# Математичні методи та моделі

**Одеса 2016**

## Зміст

## Передмова

Цей навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій, що на протязі багатьох років читався автором для аспірантів Одеської державної академії холоду. Значна частина матеріалу використовувалась і у курсі лекцій для студентів. Поява посібника викликана тим, що у навчальному процесі на протязі останніх років стала відчуватись гостра нестача підручників з практично всіх розділів вищої математики. Особливо це стосується тих з них, що взагалі не вивчаються на молодших курсах технічних вузів у традиційних курсах вищої математики. Звичайно вони викладаються у вигляді окремих спецкурсів, або складових частин деяких технічних дисциплін. Зазначимо, що банк підручників для української вищої школи взагалі знаходиться у початковій стадії формування і ніша, пов'язана із спеціальними функціями та їх використанням у математичній фізиці, є незаповненою.

В основу розгляду покладені звичайні лінійні однорідні диференційні рівняння із змінними коефіцієнтами. Для них формулюються два типи межових задач. Перший тип розглядає особливі точки диференційного рівняння як межові точки області (комплексної площини), де відшукуються розв'язки рівняння. Перебираючи всі можливі варіанти поведінки розв'язків рівняння в околі цих точок, ми одержуємо можливість знайти всі його лінійно незалежні розв'язки. Другий тип межових задач пов'язаний з розглядом задачі Штурма-Ліувіля з межовими умовами на дійсній осі першого, другого та третього родів, власними функціями якої є багато спеціальних функцій. Такий підхід дозволяє у загальному вигляді проаналізувати властивості багатьох спеціальних функцій математичної фізики.

Велика увага автор приділяє використанню спеціальних функцій для розв'язання значної кількості межових задач математичної фізики у найбільш вживаних популярних криволінійних системах координат.

# Глава 1

## Метод степеневих рядів

Використання степеневих рядів Тейлора, Лорана, Пюізьо є одним з основних методів розв'язання звичайних лінійних однорідних рівнянь із змінними коефіцієнтами. У випадках, коли коефіцієнти є степеневими функціями, цей метод є основним. Він може ефективно застосовуватись і у більш складних ситуаціях. Центральну роль при застосуванні методу грають особливі точки рівняння, що є обов'язково особливими точками хоча б одного з лінійно незалежних розв'язків. Перебираючи різні варіанти щодо характеру цих особливих точок, ми одержуємо можливість знайти всі ненульові лінійно незалежні частинні розв'язки для довільних значень одного або декількох коефіцієнтів рівняння, якщо такі розв'язки існують. Ми можемо знайти і можливі значення самих коефіцієнтів рівняння, для яких такі ненульові розв'язки існують. Перевага методу степеневих рядів полягає саме у тому, що характер особливої точки найбільш очевидним чином пов'язаний саме з структурою степеневого ряду, побудованого в околі цієї точки. Степеневий ряд містить два характерні параметри - це найменше та найбільше значення індексу сумування. Саме ці значення і визначаються характером особливих точок. Вірне і обернене твердження: характер особливих точок визначається цими значеннями.

### 1.1.Класифікація особливих точок диференційних рівнянь

Звичайне лінійне однорідне диференційне рівняння із змінними коефіцієнтами можна записати так

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n} + K_{n-1}(z)\frac{d^{n-1} f(z)}{dz^{n-1}} + ... + K_0(z) f(z) = 0 \quad .$$

Тут $f(z)$ - невідома функція, $K_0(z),...,K_{n-1}(z)$ - коефіцієнти рівняння. Для більшої загальності ми вважатимемо всі аргументи комплексними. Для переходу до дійсної змінної досить замість $z$ покласти $x = \operatorname{Re} z$.

Головним фактором, що впливає на структуру розв'язку, є наявність у коефіцієнтів рівняння особливих точок. Ці особливі точки можуть бути внутрішніми, межовими і зовнішніми точками щодо області, де шукається розв'язок рівняння. Якщо всі коефіцієнти рівняння є аналітичними функціями в точці $z_0$, то ця точка називається звичайною точкою диференційного рівняння. Інакше вона називається особливою точкою рівняння.

**Ряд Тейлора.** Існує тісний зв'язок між особливими точками коефіцієнтів диференційного рівняння і особливими точками його розв'язків. Він полягає у тому, що всі особливі точки коефіцієнтів є і особливими точками хоча б одного з лінійно незалежних розв'язків. Інших особливих точок у розв'язків немає. Аналітичність всіх коефіцієнтів у даній області тягне за собою аналітичність всіх розв'язків у цій області. Наведемо класифікацію особливих точок аналітичних функцій. Найпростіше ізольовані особливі точки класифікувати за виглядом степеневого ряду для аналітичних функцій в їх околі. Розглянемо спочатку однозначні аналітичні функції. В околі звичайної точки $z_0$ степеневий ряд для них може мати вигляд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Він може мати і інший вигляд при умові, що найменше та найбільше значення індексу сумування будуть невід'ємними. Його коефіцієнти безпосередньо визначаються функцією $f(z)$. Цей зв'язок існує як у диференційній, так і інтегральній формах. У першому разі

$$c_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n f(z_0)}{dz^n},\ n\ge 0 .$$

Для отримання цієї формули досить $n$-раз продиференціювати ряд Тейлора і перейти до межі $z\to z_0$. Існування похідної довільного порядку у функції $f(z)$ випливає з її аналітичності. У другому разі використовується інтегральне представлення похідної аналітичної функції

$$\frac{d^n f(z_0)}{dz^n}=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z_0-z)^{n+1}} .$$

Тут $\gamma$ - довільний замкнений контур, що охоплює точку $z_0$ і всередині якого відсутні інші особливі точки. Тоді

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z_0-z)^{n+1}},\ n\ge 0.$$

Розглянутий ряд називається рядом Тейлора Природно, що він не містить розбіжних доданків в околі точки $z_0$. Якщо перші $m$ коефіцієнтів ряду дорівнюють нулю, то точка $z_0$ є нулем $m$-го порядку. Областю збіжності ряду Тейлора є круг з центром у точці $z_0$ і радіусом, що дорівнює відстані від точки $z_0$ до найближчої особливої точки $z_1$ функції $f(z)$. Радіус збіжності можна визначати і через коефіцієнти ряду Тейлора.

Найпростішим типом ізольованої особливої точки є усувна особлива точка. Їй відповідає наступна поведінка функції. Межа функції у цій точки існує, а в самій точці значення функції невизначене або відрізняється від межового. *Приклад:* $f(z)=\sin(z)/z$. *Межа цієї функції* $\lim_{z\to 0} f(z)=1$, *а значення цієх функції у точці* $z=0$ *невизначене.* Звичайно розгляд подібної функції замінюється розглядом аналітичної функції, для якої зазначена точка не є особливою. Звідси і назва – усувна особлива точка. У наведеному прикладі замість функції $f(z)=\sin(z)/z$ слід розглянути додатково довизначену в усувній особливій точці функцію

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(z)}{z}, & z\ne 0\\ 1, & z=0\end{cases} .$$

**Ряд Лорана.** У кільці, внутрішній радіус якого дорівнює відстані від точки $z_0$ до найближчої особливої точки $z_1$, а зовнішній - від точки $z_0$ до наступної по віддалі від неї особливої точки $z_2$, аналітична функція $f(z)$ знову може бути представлена збіжним степеневим рядом, але це вже буде ряд Лорана. Ряд може мати вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n .$$

Ряд Лорана може мати і інший вигляд при умові, що найменше значення індексу сумування буде від'ємним і нескінченим, а найбільше - скінченим. Коефіцієнти цього ряду тез безпосередньо визначаються функцією $f(z)$. Цей зв'язок має лише інтегральну форму:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z_0-z)^{n+1}}\ ,\ \ n=-m,-m+1,...,\infty\ .$$

Отже, кожна пара сусідніх за відстанню від точки $z_0$ особливих точок виділяє кільце, де ряд Лорана для функції $f(z)$ збіжний. Сукупність всіх ізольованих особливих точок аналітичної функції покриває комплексну площину системою концентричних кілець з центром у точці $z_0$, у кожному з яких ряд Лорана збігається і розбігається лише на їх межах.

Якщо ж точка $z_0$ є ізольованою особливою точкою аналітичної функції $f(z)$, то степеневий ряд для цієї функції є рядом Лорана вже у безпосередньому околі точки $z_0$. За наведеного вигляду ряду Лорана, вона є полюсом порядку $m$. В її околі найбільш швидко розбіжний член ряду Лорана має від'ємний степінь $m$. Тоді областю збіжності ряду Лорана є кільце з центром у точці $z_0$ із довільним як завгодно малим внутрішнім радіусом. Зовнішнім радіусом є відстань від точки $z_0$ до найближчої особливої точки $z_1$.

Якщо в околі ізольованої особливої точки, що не є нескінченно віддаленою, степеневий ряд має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n ,$$

то ця точка називається полюсом нескінченного порядку або суттєво особливою точкою. Степеневий ряд у цьому випадку теж називається рядом Лорана. Він містить нескінченно багато розбіжних членів.

**Ряд Пюізьо.** Інших особливих точок, відмінних від полюсів скінченого і нескінченого порядків, у однозначних аналітичних функцій бути не може. У багатозначних аналітичних функцій є ще один тип особливих точок, що називаються точками галуження. Це точки спільні для всіх гілок даної багатозначної функції. Степеневий ряд для багатозначної аналітичної функції в околі точки галуження може мати вигляд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n/k}(z-z_0)^{n/k}.$$

Ця точка називається точкою галуження $k$-го порядку ($k$ може бути як скінченим, так і нескінченим натуральним числом відповідно до того, чи дана багатозначна функція еквівалентна скінченій або нескінченій кількості однозначних аналітичних функцій), а степеневий ряд називається рядом Пюїзьо. Даний ряд, очевидно, не містить розбіжних доданків. Областю його збіжності є круг з центром в особливій точці і радіусом, що дорівнює відстані від цієї точки до найближчої до неї особливої точки функції $f(z)$. Для кожної окремої гілки багатозначної аналітичної функції зазначений круг містить розріз вздовж довільного радіуса цього кола. Довільність цього розрізу безпосередньо пов'язана з довільністю вибору області означення для функції $\arg(z)$. При перетині розрізу і відбувається перехід однієї гілки багатозначної аналітичної функції в іншу. Різновидів ряду Пюїзьо стільки, скільки різновидів рядів Тейлора і Лорана разом узятих, оскільки зовнішня відміна першого від останніх лише у наявності дробового показника степеню та індексу у коефіцієнтів.

Якщо в околі ізольованої особливої точки ряд Пюїзьо має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} c_{n/k}(z-z_0)^{n/k},$$

то ця точка є алгебраїчною точкою галуження, тобто вона одночасно є полюсом порядку $m$ і точкою галуження порядку $k$.

Якщо в околі ізольованої особливої точки ряд Пюїзьо має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n/k}(z-z_0)^{n/k},$$

то ця точка називається трансцендентною точкою галуження, тобто вона, одночасно, є суттєво особливою і точкою галуження порядку $k$.

Якщо ізольована особлива точка одночасно є суттєво особливою і точкою галуження нескінченного порядку, то така точка називається логарифмічною точкою галуження.

**Нескінченно віддалена точка.** Розглянемо тепер як особливу - нескінченно віддалену точку. Околом такої точки є зовнішня частина круга довільного скінченого радіуса з центром у початку координат. У випадку, коли ізольованою особливою точкою є нескінченно віддалена точка, визначення її характеру має певні особливості. Так, якщо нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$, то ряд Лорана в її околі має вигляд:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n.$$

Тут $m$ є показником степеню найбільш швидко розбіжного члена ряду при наближенні до нескінченно віддаленої точки.

Якщо нескінченно віддалена точка є суттєво особливою, то ряд Лорана має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n .$$

Цей ряд містить нескінченну кількість розбіжних доданків в околі нескінченно віддаленої точки

Якщо нескінченно віддалена точка є алгебраїчною точкою галуження, то ряд Пюізьо має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_{n/k} z^{n/k} .$$

Якщо нескінченно віддалена точка є трансцендентною точкою галуження, то ряд Пюізьо має вигляд:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n/k} z^{n/k} .$$

Із збігу особливих точок у коефіцієнтів рівняння і його розв'язків не випливає збіг характеру особливих точок для коефіцієнтів і розв'язків. Ця обставина дозволяє задавати характер особливості розв'язку як межову умову задачі. Як вже зазначалось вище, саме окремі особливі точки ділять комплексну площину на області, у кожній з яких розв'язок є однозначною аналітичною функцією. Яку б область ми не розглядали, у неї завжди є границя, навіть якщо цією областю є вся комплексна площина. В останньому випадку границею є одна точка - нескінченно віддалена точка. Задати межову умову у цьому випадку, це задати характер особливості розв'язку у цій точці. При цьому слід нагадати, що однозначна аналітична функція завжди має особливі точки. Якщо такі точки відсутні у скінченій частині комплексної площини, то особливою точкою є нескінченно віддалена точка. Якщо і остання є звичайною точкою функції, то така функція є сталою величиною .

Якщо коефіцієнти рівняння є аналітичними функціями скрізь, за виключенням скінченої кількості особливих точок , то в околі будь-якої точки області, де шукається розв'язок рівняння, останній можна представити у вигляді відповідного степеневого ряду. В околі звичайної точки рівняння його розв'язок можна представити у вигляді ряду Тейлора. В околі особливої точки його розв'язок можна представити або у вигляді ряду Лорана, або у вигляді ряду Пюізьо.

Роль нескінченно віддаленої точки тут проявляється у тому, що, за означенням, околом нескінченно віддаленої точки є зовнішня частина круга довільного радіуса, що містить у собі початок координат. Розвиваючи розв'язок рівняння у відповідний степеневий ряд в околі довільної точки такого кругу, ми враховуємо інформацію про поведінку функції всередині круга. Узгоджуючи структуру цього степеневого ряду з характером нескінченно віддаленої особливої точки, ми додатково впливаємо на структуру степеневого ряду, враховуючи його поведінку за межами круга. Перебираючи всі варіанти поведінки розв'язку у нескінченно віддаленій точці, ми перебираємо тим самим всі варіанти можливих розв'язків рівняння. Аналогічну роль у багатьох випадках може відігравати і початок координат.

Зазначені рекомендації не носять обов'язкового характеру. Завжди можна використовувати лише найбільш загальний ряд Пюізьо. При цьому, характер рівняння та межових умов сам визначить остаточну структуру розв'язку. Слід просто враховувати ту обставину, що чим ближче характер вихідного ряду до остаточного результату, тим швидше він знаходиться.

Якщо в області, де шукається розв'язок рівняння особливі точки відсутні, або є лише одна особлива точка, то розв'язок визначається одним степеневим рядом. В іншому випадку, в околі кожної особливої точки розв'язок визначатиметься своїм конкретним рядом.

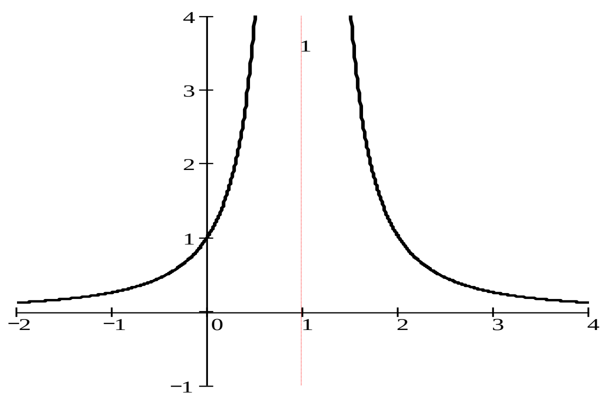
## 1.2.Поведінка аналітичних функцій в околі особливих точок

**Полюси скінченого порядку.** Найпростішим типом особливих точок є полюси скінченого порядку. У безпосередньому околі полюса $m$ аналітичну функцію можна представити у вигляді:

$$f(z)=A/(z-z_0)^m$$

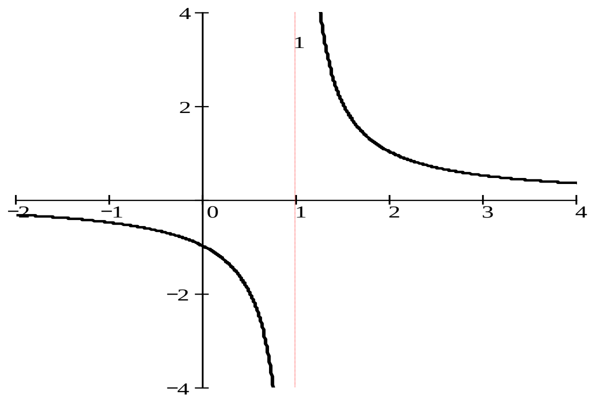
У самій точці вважається, що $f(z_0)=\infty$. Тут $A$ - довільна стала. Якщо полюс лежить на дійсній осі, то у полюсі парного порядку функція має нескінчені ліву і праву межі, що збігаються за знаком (дивися у випадку дійсної змінної наступний малюнок):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty;$$




**Малюнок 1.***Полюс парного порядку*

у полюсі непарного порядку, що лежить на дійсній осі, ліва і права межі є нескінченими але відрізняються знаками. В залежності від знаку сталої $A$ (дивися у випадку дійсної змінної наступний малюнок):




**Малюнок 2.** *Полюс непарного порядку*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=-\infty,$$

або

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty.$$

З точки зору теорії функцій комплексної змінної точки $x=\infty$, $x=-\infty$ є однією нескінченно віддаленою точкою $z=\infty$.

**Суттєво особливі точки (полюси нескінченного порядку).** У суттєво особливих точках функція не має певного значення. В залежності від способу прямування до такої особливої точки ми можемо одержати будь-яке значення функції або її похідних у самій точці. Покажемо це на конкретному прикладі.

***Приклад 1.*** *Нехай*

$$f(z)=\sin\left(1/z\right).$$

$z=0$ *є суттєво особливою точкою даної аналітичної функції. Знайдемо межове значення функції у зазначеній точці, обравши в якості послідовності, збіжної до точки* $z=0$, *наступну:*

$$\frac{1}{z_n}=n\pi \quad \text{або} \quad z_n=\frac{1}{n\pi}, \quad n=1,2,\ldots\ .$$

*Для кожного такого значення аргументу*

$$f(z_n)=0,$$

*а тому*

$$\lim_{z_n\to 0} f(z)=0\ .$$

*Знайдемо тепер межове значення функції у зазначеній точці обравши в якості послідовності, збіжної до точки* $z=0$ *наступну:*

$$\frac{1}{z_n}=\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \textit{або} \quad z_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}, \quad n=1,2,\dots .$$

*Для кожного такого значення аргументу*

$$f(z_n)=1,$$

*а тому*

$$\lim_{z_n\to 0} f(z)=1 .$$

*Знайдемо межове значення функції у зазначеній точці, обравши в якості послідовності, збіжної до точки* $z=0$, *таку:*

$$\frac{1}{z_n}=-\frac{\pi}{2}+2n\pi \quad \textit{або} \quad z_n=1/(-\pi/2+2n\pi), \quad n=1,2,\dots .$$

*Для кожного такого значення аргументу*

$$f(z_n)=-1,$$

*а тому*

$$\lim_{z_n\to 0} f(z)=-1 .$$

*Цей процес можна продовжувати необмежено. Для кожної наступної послідовності ми отримає інше межове значення функції у точці* $z=0$.

**Точки галуження.** Кожна багатозначна функція еквівалентна певній скінченій або нескінченій сукупності однозначних функцій які називаються її гілками. Розглянемо наприклад наступну степеневу функцію

$$f(z)=z^{1/m}.$$

Очевидно, що для натуральних $m$ ця функція є $m$ значною і еквівалентна наступним $m$ однозначним функція:

$$f_1(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)+2\pi}{m}\right],$$

$$f_2(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)+4\pi}{m}\right],$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$f_m(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)}{m}\right].$$

Областю означення кожної функції є вся комплексна площина. Єдиною точкою у скінченій частині комплексної площини, де значення всіх гілок збігаються, є початок координат. Тут

$$f_1(0)=f_2(0)=\ldots=f_m(0)=0.$$

Ще однією такою точкою є нескінченно віддалена точка. В усіх інших точках комплексної площини

$$f_1(z)\neq f_2(z)\neq\ldots\neq f_m(z).$$

Зазначені спільна для всіх гілок точки і називається точками галуження $m$ -го порядку. Розглянемо детальніше особливу точку $z=0$. Ми бачимо, що як багатозначна функція, так і всі її гілки визначені у цій точці, але похідна у цій точці для кожної з зазначених функцій не існує. Тобто всі зазначені функції у цій точці є неаналітичними. Це виправдовує статус точки галуження як особливої точки багатозначних аналітичних функцій. Характерною властивістю точки галуження є те, що при її обході за замкненим контуром одна гілка багатозначної функції переходить в іншу. Дійсно, при повному обході початку координат у додатному напряму аргумент кожної гілки змінюється на $2\pi$. У висліді:

$$f_1(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)+2\pi+2\pi}{m}\right]=f_2(z),$$

$$f_2(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)+2\pi+4\pi}{m}\right]=f_3(z),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$$f_m(z)=|z|^{1/m}\exp\left[i\frac{\arg(z)+2\pi}{m}\right]=f_1(z).$$

Крім розглянутих особливих точок можуть бути і деякі їх сполучення, перераховані у попередньому параграфі. Крім степеневих функцій з нецілими показниками степеню, серед основних елементарних функцій багатозначними (нескінченно значними) функціями є обернені тригонометричні, гіперболічні та показникова (логарифм) функції. В останньому випадку

$$\mathrm{Ln}(z)=\ln(z)+i2\pi n,\ n\in Z\ .$$

Тут

$$\ln(z)=\ln|z|+i\arg(z)$$

головне значення логарифму, $z=0$ та $z=\infty$ є для логарифма точками галуження нескінченого порядку і, одночасно суттєво особливими точками. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції виражаються через логарифм наступним чином

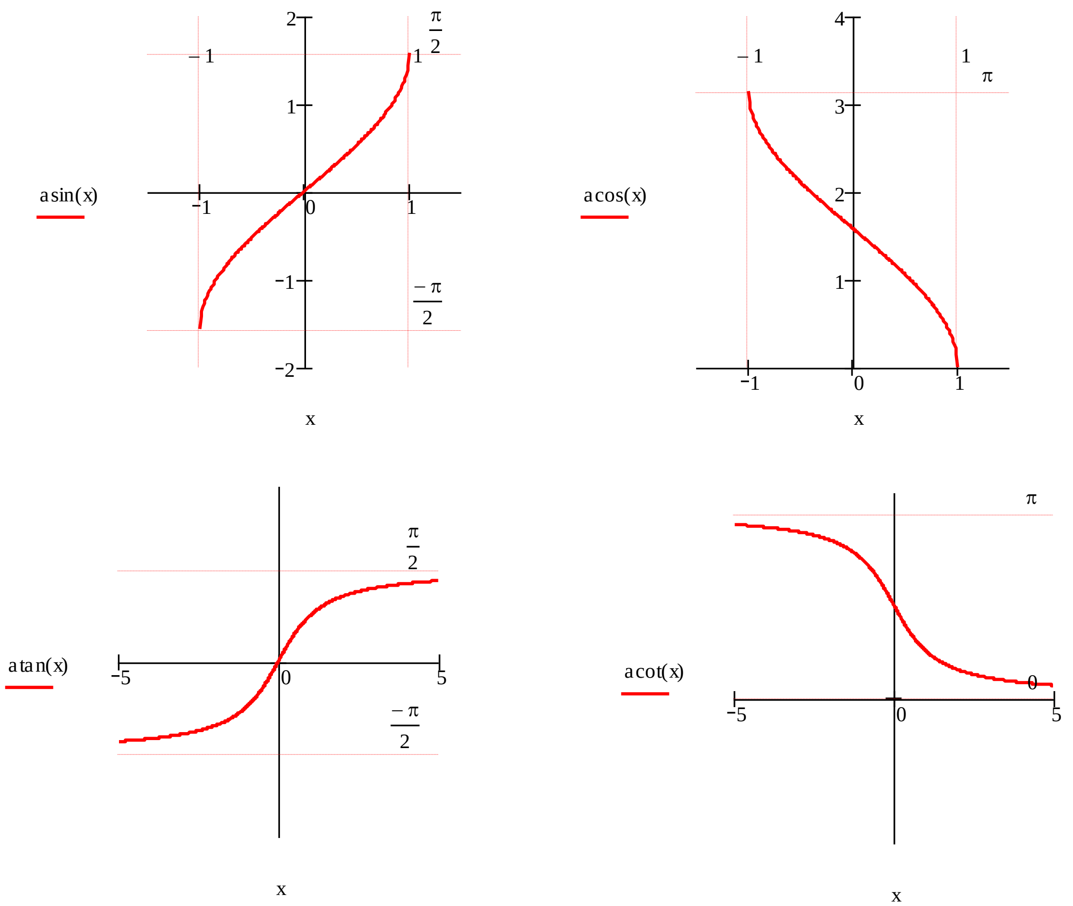
$$\mathrm{Arcsin}(z)=-i\,\mathrm{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\ \mathrm{Arccos}(z)=-i\,\mathrm{Ln}\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arcsinh}(z)=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),\ \mathrm{Arccosh}(z)=\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

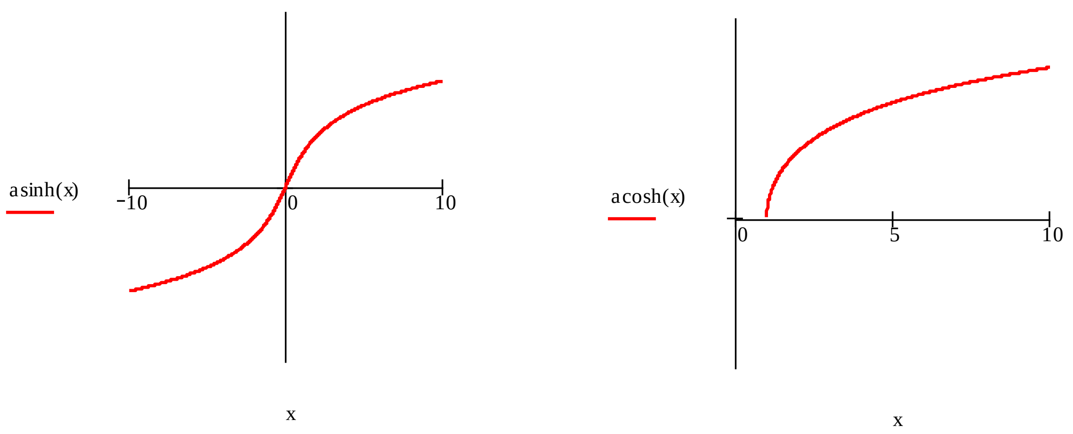
$$\mathrm{Arctan}(z)=-i\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),\ \mathrm{Arccot}(z)=-i\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{iz-1}{iz+1}\right),$$

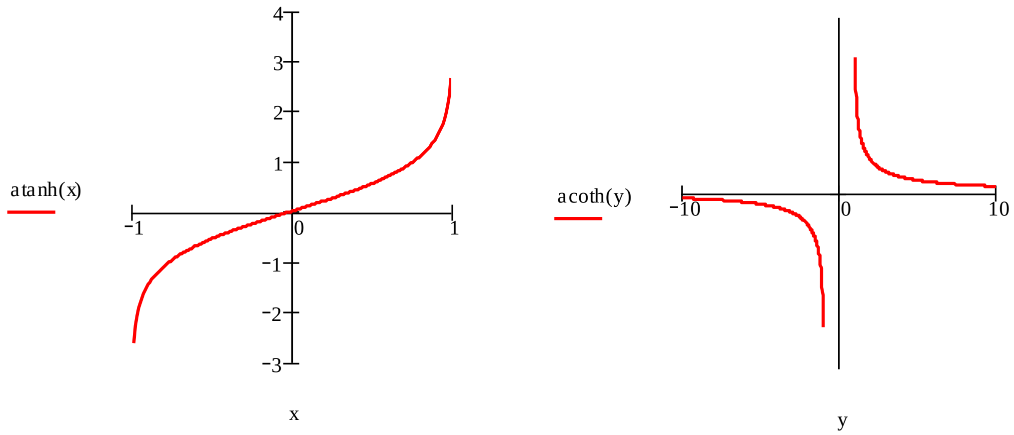
$$\operatorname{Arctanh}(z)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\quad \operatorname{Arccoth}(z)=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Нижче наведені графіки їх головних значень для дійсних аргументів:




**Малюнок 3.** *Обернені тригонометричні функції:* $\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\arctan(z)$, $\operatorname{arccot}(z)$






**Малюнок 4.** *Обернені гіперболічні функції:* $\operatorname{arcsinh}(z)$, $\operatorname{arccosh}(z)$, $\operatorname{arctanh}(z)$, $\operatorname{arccoth}(z)$

## 1.3.Тригонометричні, гіперболічні та показникова функції

Можна запропонувати наступну класифікацію функцій. Елементарні функції - це функції, що є розв'язками звичайних лінійних однорідних диференційних рівнянь з сталими коефіцієнтами, або найпростіших однорідних звичайних диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами (степенева функція). Спеціальні функції - це функції, що є розв'язками більш складних звичайних лінійних однорідних диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Надалі ми проілюструємо це твердження на ряді прикладів. При цьому, нам доведеться зіткнутись ще з однією обставиною. Зазначені рівняння далеко не завжди мають ненульові розв'язки. Для існування останніх інколи доводиться спеціальним чином підбирати коефіцієнти цих рівнянь. Найчастіше в якості такого коефіцієнту вибирається коефіцієнт при невідомій функції. Значення коефіцієнтів однорідного диференційного рівняння, для яких існують його ненульові розв'язки, називаються власними числами цього рівняння, а відповідні ненульові розв'язки - власними функціями. Розглянемо наступне лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

$$\boxed{\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \lambda f(z) = 0} .$$

і будемо шукати його можливі розв'язки на всій комплексній площині. З метою демонстрації основних моментів методу степеневих рядів, скористаємося саме ним, а не одним з більш простих методів, придатних до розв’язання звичайних лінійних диференційних рівнянь із сталими коефіцієнтами. При цьому, нескінченно віддалену точку можна вважати єдиною граничною точкою області, у якій шукається розв'язок. Вона може бути також єдиною особливою точкою розв'язку. В залежності від припущень щодо її характеру, ми одержимо той чи інший розв'язок рівняння. Тобто роль специфічної межової умови для розв'язку рівняння відіграє характер його особливості у нескінченно віддаленій точці.

Поділивши для $\lambda \neq 0$ обидві частини рівняння на $\lambda$ і, перейшовши до нової змінної $\sqrt{\lambda} z$, надалі, для простоти, ми знову будемо позначати її літерою $z$, рівняння можна спростити, надавши йому вигляду

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + f(z) = 0 \ .$$

Коефіцієнти цього рівняння є сталими величинами, а отже не мають особливих точок у комплексній площині. Тому розв'язок цього рівняння можна представити у вигляді ряду Тейлора, збіжного на всій комплексній площині, за виключенням, можливо, нескінченно віддаленої точки. Оскільки у даному випадку на комплексній площині відсутня виділена точка, то зручно покласти $z_0 = 0$. Отже,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ .$$

Цей ряд відповідає нескінченно віддаленій точці як суттєво особливій, а початок координат він трактує як звичайну точку розв'язку. Підставивши ряд у рівняння, матимемо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0 \ .$$

У першій сумі два перші доданки дорівнюють нулю через наявність множника $n(n-1)$, тому зручно починати сумування з значення індексу сумування рівного 2. Цю суму можна переписати таким чином, щоб вона містила лише $z^n$. Для цього, спочатку перейдемо до нового індексу сумування $m = n-2$, а потім повернемо йому стару назву $n$. Крім того, оскільки межі сумування для обох сум збігаються, їх доцільно об'єднати в одну. Рівняння набере вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n] z^n = 0 \ .$$

Оскільки степеневі функції $z^n$ є лінійно незалежними, то їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише у випадку, коли всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю, тобто

$$(n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n = 0, \quad 0 \le n < \infty.$$

У висліді ми отримали нескінчену однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Тейлора

$$\begin{gathered} 2! c_2 + c_0 = 0, \\ 3! c_3 + c_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)(n+2) c_{n+2} + c_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Ця система має досить специфічний вигляд, оскільки кожне її рівняння пов'язує між собою лише два коефіцієнти ряду, тому інша назва цієї системи - рекурентне співвідношення для коефіцієнтів.

Розглянемо тепер різні типи межових умов у нескінченно віддаленій точці. Нехай нескінченно віддалена точка є суттєво особливою для розв'язку рівняння. У цьому випадку всі коефіцієнти ряду Тейлора відмінні від нуля (це і є означенням нескінченно віддаленої точки як суттєво особливої) і отримана нами система лінійних алгебраїчних рівнянь буде мати нескінченний порядок. З неї безпосередньо випливає, що всі парні коефіцієнти системи визначаються через коефіцієнт $c_0$, а саме

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} c_0 \ .$$

Всі ж непарні коефіцієнти визначаються через коефіцієнт $c_1$, а саме

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} c_1 .$$

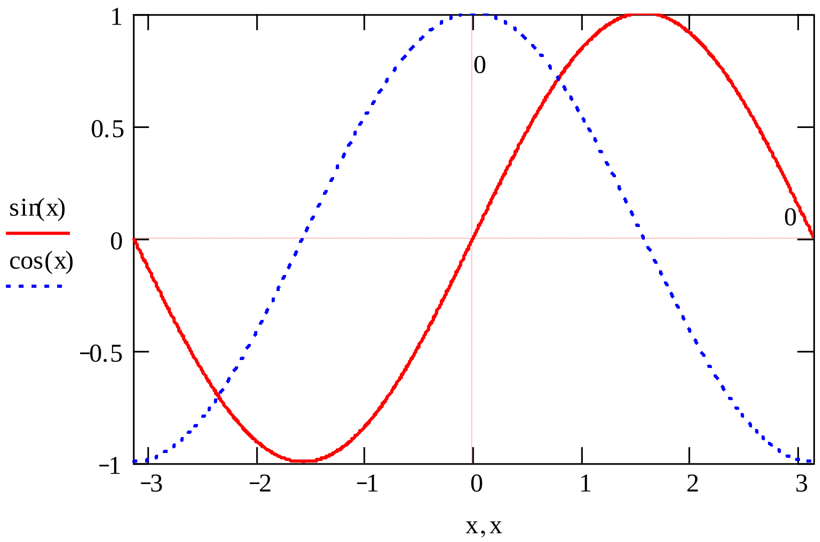
Тоді розв'язок рівняння можна представити у вигляді наступної суми парного та непарного відносно $z$ доданків

$$f(z) = c_0 \cos(z) + c_1 \sin(z).$$

Ці доданки, за означенням, з точністю до довільних множників є тригонометричними косинусом і синусом відповідно:

$$\boxed{\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}}, \qquad \boxed{\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}.$$

Для дійсних значень аргументів їх графіки наведені далі на малюнку




**Малюнок 5.** *Тригонометричні синус та косинус дійсного аргументу*

Повертаючись у вихідному рівнянні до старої змінної, матимемо

$$\boxed{f(\lambda, z) = c_0 \cos(\sqrt{\lambda} z) + c_1 \sin(\sqrt{\lambda} z)}.$$

Ця сума, одночасно, є лінійною комбінацією двох лінійно незалежних функцій, а отже і загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного диференційного рівняння другого порядку. Єдиним обмеженням на можливі значення $\lambda$ у цьому випадку є початкове припущення про те, що $\lambda \neq 0$. Нехай тепер $\lambda = 0$. Тоді вихідне рівняння має вигляд

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2}=0,$$

з очевидними двома лінійно незалежними розвозками $1$ і $z$, та загальним розв'язком у вигляді лінійної функції

$$f(z)=c_0+c_1 z.$$

Цей розв'язок відповідає ситуації, коли нескінченно віддалена точка є полюсом першого порядку. Інші типи межових умов сумісні лише з нульовими розв'язками рівняння. Виключенням є тривіальна умова, коли нескінченно віддалена точка є звичайною точкою розв'язку, тоді

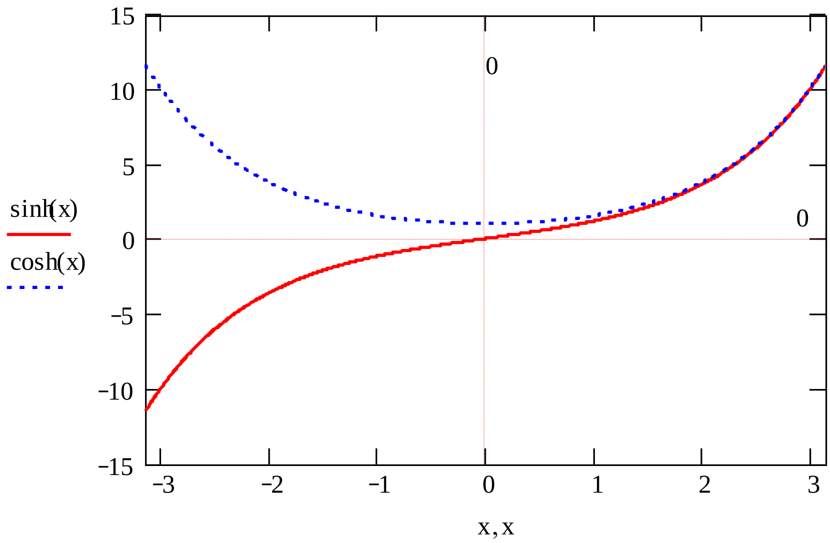
$$f(z)=c_0.$$

Отже, спектр власних чисел є неперервним. При цьому дійсним додатним власним числам ($\lambda>0$) відповідають тригонометричні функції, нульовому власному числу ($\lambda=0$) - лінійна функція, дійсним від'ємним власним числам ($\lambda<0$) - гіперболічні функції. Останнє можна показати врахувавши, що для від'ємних власних чисел $\sqrt{\lambda}=\sqrt{-|\lambda|}=i\sqrt{|\lambda|}$, та скориставшись відомим зв'язком між тригонометричними та гіперболічними функціями:

$$\boxed{\cos(i\sqrt{|\lambda|}z)=\cosh(\sqrt{|\lambda|}z)},\qquad \boxed{\sin(i\sqrt{|\lambda|}z)=i\sinh(\sqrt{|\lambda|}z)},$$

Отже, в останньому випадку розв'язок рівняння матиме вигляд

$$f(\lambda,z)=c_0\cosh(\sqrt{|\lambda|}z)+c_1\sinh(\sqrt{|\lambda|}z)\ .$$




**Малюнок 6.** *Гіперболічні синус та косинус дійсного аргументу*

Ряди Тейлора для гіперболічних синуса та косинуса мають вигляд

$$\boxed{\cosh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}},\qquad \boxed{\sinh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}}.$$

Принагідно наведемо степеневий ряд, що визначає показникову функцію

$$\boxed{\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n}.$$

Цей ряд може бути отриманим безпосереднім розвиненням показникової функції у ряд Тейлора. Виділивши у правій частині з суми окремо парні і окремо непарні доданки і порівнюючи їх з наведеними вище рядами для гіперболічних функцій, одержимо зв'язок між показниковою функцією і гіперболічними функціями

$$\boxed{\exp(z)=\cosh(z)+\sinh(z)}.$$

Тут саму процедуру можна виконати і для розвинення

$$\exp(iz)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^n.$$

Тоді матимемо наступний зв'язок між показниковою та тригонометричними функціями

$$\exp(iz)=\cos(z)+i\sin(z).$$

Зв'язок між показниковою функцією і тригонометричними та гіперболічними функціями можна представити і так:

$$\boxed{\cos(z)=\frac{1}{2}[\exp(iz)+\exp(-iz)]},\quad \boxed{\sin(z)=\frac{1}{2i}[\exp(iz)-\exp(-iz)]},$$

$$\boxed{\cosh(z)=\frac{1}{2}[\exp(z)+\exp(-z)]},\quad \boxed{\sinh(z)=\frac{1}{2}[\exp(z)-\exp(-z)]}.$$

Наведені формули називаються формулами Ейлера. Оскільки між всіма зазначеними функціями існує лінійний зв'язок, то і показникова функція, так само як і інші функції, є безпосереднім розв'язком того самого рівняння. Тобто, загальний розв'язок рівняння можна представити і так

$$f(\lambda,z)=A\exp(i\sqrt{\lambda}z)+B\exp(-i\sqrt{\lambda}z)$$

для $\lambda>0$ і у вигляді

$$f(\lambda,z)=A\exp(\sqrt{\lambda}z)+B\exp(-\sqrt{\lambda}z)$$

для $\lambda<0$. Тут

$$A=\frac{1}{2}(c_0-ic_1),\ B=\frac{1}{2}(c_0+ic_1).$$

Комплексним власним числам теж відповідають показникові власні функції, або комбінації тригонометричних та гіперболічних функцій.

Оскільки звичайне лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку мають лише два лінійно незалежні розв’язки, і для всіх можливих дійсних значень власних чисел ми їх вже знайшли, то решту типів межових умов можна не розглядати. Так само можна розглянути випадок комплексних власних чисел. Загальний розв'язок рівняння у цьому разі буде комбінацією вже отриманих нами розв'язків. Можна було б з самого початку шукати розв'язок рівняння в околі початку координат у вигляді ряду Лорана, але тоді всі коефіцієнти ряду при від’ємних степенях  виявились би рівними нулю і ми знову отримали б вже наведений вище результат.

## 1.4.Степенева та логарифмічна функції

Розглянемо наступне лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$z^2 \frac{d^2 f(z)}{dz^2} + az \frac{df(z)}{dz} + \lambda f(z) = 0$$

і шукатимемо його можливі розв'язки на всій комплексній площині. Тут $a$ довільна стала. Серед рівнянь із змінними коефіцієнтами це рівняння є найпростішим. Розглянемо його розв'язок для $a = 1$. Такого типу рівняння виникає при розв'язанні широкого кола межових задач у полярній або циліндричній системах координат. Рівняння має одну особливу точку – початок координат. Це стає очевидною, якщо всі члени рівняння поділити на коефіцієнт при другій похідній. Як і раніше, нескінченно віддалену точку зручно вважати межовою точкою для області, де шукається розв'язок. Іншою межовою точкою є початок координат. В залежності від припущень щодо їх характеру, ми одержимо той чи інший розв'язок рівняння.

Нехай нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$, а початок координат - суттєво особливою точкою. Розв'язок рівняння зручно представити рядом Лорана в околі початку координат та, одночасно, в околі нескінченно віддаленої точки. Цей ряд збіжний на всій комплексній площині, за виключенням, можливо, лише початку координат та нескінченно віддаленої точки. Отже,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n .$$

Тут $c_n = 0$ для $n > m$ у повній відповідності до означення полюсу порядку $m$ у нескінченно віддаленій точці. З тої самої причини $c_m \neq 0$ . Підставивши цей ряд у рівняння, матимемо

$$\sum_{n=-\infty}^{m} n(n-1) c_n z^n + \sum_{n=-\infty}^{m} n c_n z^n + \lambda \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n = 0,$$

Оскільки межі сумування всіх сум збігаються, їх доцільно об'єднати в одну. У висліді рівняння набере вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{m} [n^2 + \lambda] \ c_n z^n = 0 .$$

Оскільки степеневі функції $z^n$ є лінійно незалежними, то з умови рівності нулю їх лінійної комбінації випливає рівність нулю всіх коефіцієнтів цієї лінійної комбінації, а саме

$$[n^2 + \lambda] c_n = 0, \quad n = -\infty, \ldots 0, \ldots, m .$$

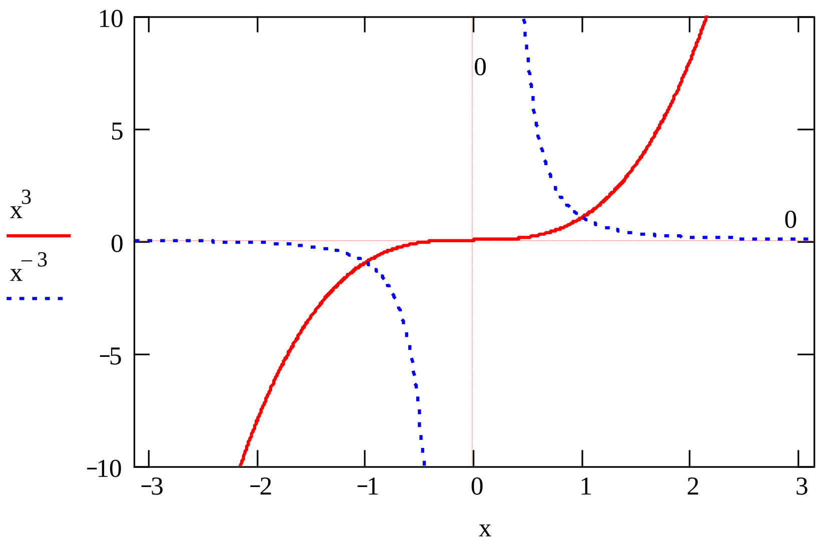
Всі рівняння системи є незалежними і не дозволяють встановити зв’язок між коефіцієнтами $c_n$. Оскільки $c_m \neq 0$, інакше полюс у нескінченно віддаленій точці буде мати менший порядок ніж $m$, то $m^2 + \lambda = 0$. Звідси відповідне власне число рівняння набуває значення:

$$\boxed{\lambda_m = -m^2}, \quad m \in N \ .$$

Це власне число гарантує відмінність від нуля і коефіцієнту $c_m$, і коефіцієнту $c_{-m}$. Решта коефіцієнтів дорівнює нулю, оскільки підстановка отриманого власного числа у систему робить відмінними від нуля множники при всіх $c_n$ для $n = -\infty, \ldots, m-1$ ($n \neq -m$), а отже такі $c_n = 0$. Сукупність всіх можливих межових умов у нескінченно віддаленій точці типу полюсу породжує і нескінченний дискретний спектр власних чисел рівняння типу вже наведених вище значень $\lambda_m$ для довільних додатних $m$. Відповідна власному числу $\lambda_m$ власна функція є лінійною комбінацією двох степеневих функцій з додатним і від'ємним показниками степеню:

$$\boxed{f_m(z) = c_m z^m + c_{-m} z^{-m}}, \quad m \in N$$

і є єдиним розв'язком рівняння для даного $\lambda_m$. Фактично, ми знайшли загальний розв'язок рівняння. Він складається з частинних розв'язків, що прямують до нуля або при наближенні до нескінченно віддаленої точки, або до нуля. Зауважимо, що початок координат для отриманого розв'язку виявився полюсом того ж порядку, що і нескінченно віддалена точка. Отже, при розв'язанні рівняння невірне початкове припущення про те, що початок координат є суттєво особливою точкою, було автоматично відкориговане. Таке коригування завжди відбувається, якщо початкове припущення має більш загальний характер, ніж вірний результат. Симетрія отриманого розв'язку дозволяє без додаткового обговорення розширити набір можливих значень $m$ за рахунок $m = -1, -2, \ldots$.




**Малюнок 7.** *Степеневі функції з непарними показниками степеню*

Нехай тепер нескінченно віддалена точка є звичайною точкою розв'язку. Симетрія задачі вимагає, щоб і початок координат був при цьому звичайною точкою розв'язку. Це можливе лише у разі, коли всі коефіцієнти відповідного степеневого ряду, крім $c_0$, дорівнюють нулю. Тоді, для $m=0$, ми одержимо лише один частинний розв'язок рівний $1$.

Інші межові умови, що впливають на вигляд ряду Лорана, приводять до власних функцій, яким є степеневі функції або з додатними, або від'ємними показниками степеню. Так, припущення про те, що початок координат є звичайною точкою розв'язку, а нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$, приводить до наступних власних функцій:

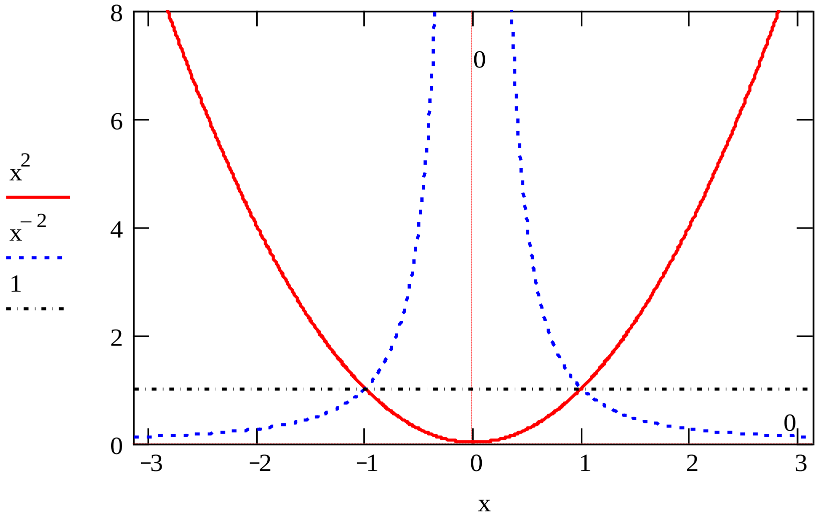
$$f_m(z)=z^m,\quad m=0,1,2,\ldots$$

Припущення ж про те, що початок координат є полюсом порядку $m$ розв'язку, а нескінченно віддалена точка є його звичайною точкою, приводить до наступних власних функцій:

$$f_m(z)=z^m,\quad m=-1,-2,\ldots.$$

Випадок, коли нескінченно віддалена точка є одночасно полюсом порядку $m$ та точкою розгалуження $k$ порядку вимагає для знаходження розв'язків використання ряду Пюізьо і породжує наступне власне число:

$$\lambda_{m/k}=\left(\frac{m}{k}\right)^2,\ m=1,2,\ldots,\quad k=1,2,\ldots$$




**Малюнок 8.** *Степеневі функції з парними показниками степеню*

з відповідною йому власною функцією:

$$f_{m/k}(z)=c_{m/k}z^{m/k}+c_{-m/k}z^{-m/k}.$$

Сукупність межових умов такого типу для різних $m$ та $k$ породжує нескінченний дискретний спектр власних чисел, що складається з квадратів раціональних чисел, та власних функцій, якими є степеневі функції з раціональними показниками степеню. Очевидно, що отриманий результат може бути узагальненим на випадок

$m=-1,-2,\ldots,\ k=-1,-2,\ldots$ і дає лише один розв'язок для нульового власного числа.

Таким чином, для всіх розглянутих межових умов, вихідне рівняння має своїми розв’язками лише різні степеневі функції.

Становить особливий інтерес випадок, коли нескінченно віддалена точка є логарифмічною особливою точкою. При цьому логарифмічною особливою точкою буде і початок координат. Тоді власними функціями знову є степеневі функції, але з довільними дійсними показниками степеню. Крім того, для нульового власного числа, у додаток до вже відомого нам розв'язку рівного $1$, з'являється і новий, лінійно незалежний від нього розв'язок, $\ln(z)$. У цьому легко переконатись безпосередньою підстановкою. Отже, власна функція, що відповідає нульовому власному числу, є

$$\boxed{f_0(z)=A+B\ln(z)}.$$

Вона є лінійною комбінацією двох лінійно незалежних розв'язків $1$ і $\ln(z)$. Перший з них ми отримували і у всіх попередніх випадках. Другий є принципово новим, оскільки він розбігається і при наближенні до нескінченно віддаленої точки, і при наближенні до нуля.

**Приклад 2.** *Нехай $a=2$. Таке рівняння виникає при розв'язанні широкого кола межових задач у сферичній системі координат. Вихідне рівняння набере тепер вигляду*

$$z^2\frac{d^2f(z)}{dz^2}+2z\frac{df(z)}{dz}+\lambda f(z)=0.$$

*Не дивлячись на велику схожість цього рівняння з попереднім, його розв'язки мають певні особливості, тому ми його розглянемо не меньш детально ніж попереднє.*

***Розв'язання.*** *Будемо шукати можливі розв'язки на всій комплексній площині. Нехай нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$, а початок координат суттєво особливою точкою. Тоді розв'язок рівняння зручно представити у вигляді ряду Лорана в околі початку координат. Цей ряд збіжний на всій комплексній площині, за виключенням, можливо, лише початку координат та нескінченно віддаленої точки. Отже,*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m}c_n z^n\ .$$

*При цьому $c_n=0$ для $n>m$ у повній відповідності до означення полюсу порядку $m$ у нескінченно віддаленій точці. З тої самої причини $c_m\neq 0$. Підставивши цей ряд у рівняння, матимемо:*

$$\sum_{n=-\infty}^{m}n(n-1)c_n z^n+2\sum_{n=-\infty}^{m}nc_n z^n+\lambda\sum_{n=-\infty}^{m}c_n z^n=0,$$

*Оскільки межі сумування для всіх сум збігаються, їх доцільно об'єднати в одну. У висліді рівняння набере вигляду*

$$\sum_{n=-\infty}^{m}[n(n+1)+\lambda]c_n z^n=0\ .$$

*В силу лінійної незалежності степеневих функцій* $z^n$ *ми одержуємо наступну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Лорана, а саме*

$$[n(n+1)+\lambda]c_n = 0, \quad n = -\infty, 1, \ldots, m .$$

*Всі рівняння системи незалежні і не дозволяють встановити зв'язок між коефіцієнтами* $c_n$*. Оскільки* $c_m \neq 0$*, інакше полюс у нескінченно віддаленій точці матиме менший порядок за* $m$*, то* $m(m+1)+\lambda = 0$*. Звідси відповідне власне число рівняння набуває значення:*

$$\lambda_m = -m(m+1). \qquad m = 0,1,2,\ldots \ .$$

*Це власне число гарантує відмінність від нуля не лише коефіцієнта ряду Лорана* $c_m$*, але і коефіцієнту* $c_{-m-1}$*, оскільки множником перед ним теж буде вираз* $m(m+1)+\lambda = 0$*. Решта коефіцієнтів дорівнює нулю, оскільки підстановка отриманого власного числа у систему робить відмінними від нуля множники при всіх* $c_n$ *для* $n = -\infty, \ldots, m-1$ *(*$n \neq -m-1$*), а отже такі* $c_n = 0$*. Сукупність можливих межових умов у нескінченно віддаленій точці типу полюсу породжує дискретний спектр власних чисел рівняння типу вже наведених вище значень* $\lambda_m$ *для довільних невід'ємних* $m$*. Відповідна власному числу* $\lambda_m$ *власна функція є лінійною комбінацією двох степеневих функцій з додатним і від'ємним цілим показником степеню*

$$f_m(z) = c_m z^m + c_{-m-1} z^{-m-1}, \quad m = 1,2,\ldots$$

*і є єдиним можливим розв'язком рівняння для даного* $\lambda_m$*. Фактично, ми знайшли загальний розв'язок вихідного рівняння.*

*Нехай нескінченно віддалена точка є суттєво особливою, а початок координат - полюсом порядку* $m$*. Тоді розв'язок рівняння зручно представити в околі початку координат у вигляді дещо іншого ряду Лорана. Цей ряд збіжний на всій комплексній площині, за виключенням, можливо, лише початку координат та нескінченно віддаленої точки. Отже,*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^n .$$

*Розв'язок рівняння отримується аналогічно попередньому і*

$$f_m(z) = c_m z^m + c_{-m-1} z^{-m-1}, \quad m = -1,-2,\ldots$$

*Випадку, коли початок координат та нескінченно віддалена точка є звичайними точками розв'язку* $m = 0,-1$*, відповідає розв'язок*

$$f_0(z) = c_0 + c_{-1} z^{-1} ,$$

*що також є лінійною комбінацією двох лінійно незалежних розв'язків. Очевидно, наведений розв'язок відповідає власним числам* $\lambda_0 = \lambda_{-1} = 0$*. Отже, загальний результат такий:*

$$f_m(z) = c_m z^m + c_{-m-1} z^{-m-1}, \qquad m = -1,-2,0,1,2,\ldots \ .$$

*Решта варіантів межових умов розглядається аналогічно. Вони реалізують випадки, коли показники степеню є раціональними або дійсними числами. На відміну від рівняння, розглянутого на початку параграфа, це рівняння не містить розв'язків, відмінних від степеневих функцій. Подібним чином розв'язується рівняння і для довільних* $a$.

## 1.5.Функції та поліноми Ерміта

Розглянемо рівняння Ерміта

$$\boxed{\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - 2z\frac{df(z)}{dz} + \lambda f(z) = 0}$$

і шукатимемо його можливі розв'язки у всій комплексній площині за виключенням нескінченно віддаленої точки. Ця точка грає роль межової, а характер її особливості - роль відповідної межової умови. Жоден з коефіцієнтів рівняння не має особливостей у комплексній площині, за виключенням нескінченно віддаленої точки. Отже, розв'язок рівняння слід шукати у вигляді ряду Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ .$$

Після підстановки цього ряду у рівняння одержимо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0 \ .$$

У першій сумі перейдемо до нового індексу сумування $m = n - 2$, а потім повернемо йому стару назву $n$. Оскільки межі сумування всіх сум збігаються, їх доцільно об'єднати в одну. У висліді

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n-\lambda)c_n] z^n = 0 \ .$$

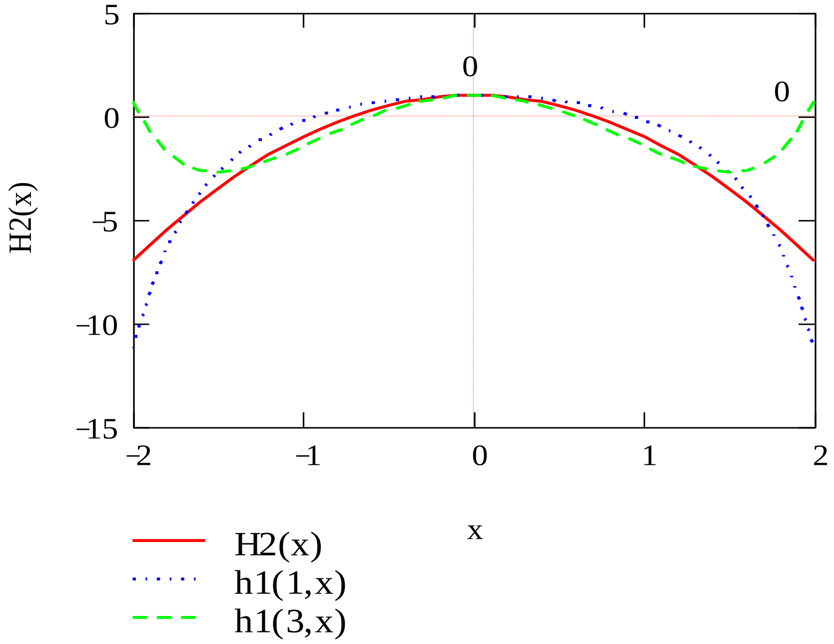
Прирівнюючи нулю коефіцієнти при степеневих функціях, одержимо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} - (2n-\lambda)c_n = 0, \quad 0 \le n < \infty \ .$$

Якщо нескінченно віддалена точка суттєво особлива, то система рівнянь є нескінченною, а її розв'язок є лінійною комбінацією двох спеціальних трансцендентних функцій, а саме: парної та непарної функцій Ерміта

$$\boxed{f(\lambda, z) = c_0 he(\lambda, z) + c_1 ho(\lambda, z)} \ .$$

Цей розв'язок, одночасно, є загальним розв'язком рівняння Ерміта для довільних $\lambda$. Таким чином, для заданої межової умови спектр власних чисел є неперервним. Здавалося, інші варіанти поведінки розв'язку у нескінченно віддаленій точці можна було б і не розглядати. Але, у випадку




**Малюнок 9**. *Парні функції Ерміта для значень $\lambda$, близьких до $2$, та поліном Ерміта другого степеню*

$\lambda_m = 2m$, характер розв'язку змінюється і, як буде показано далі, одна з функцій Ерміта перетвориться у поліном Ерміта. Тут

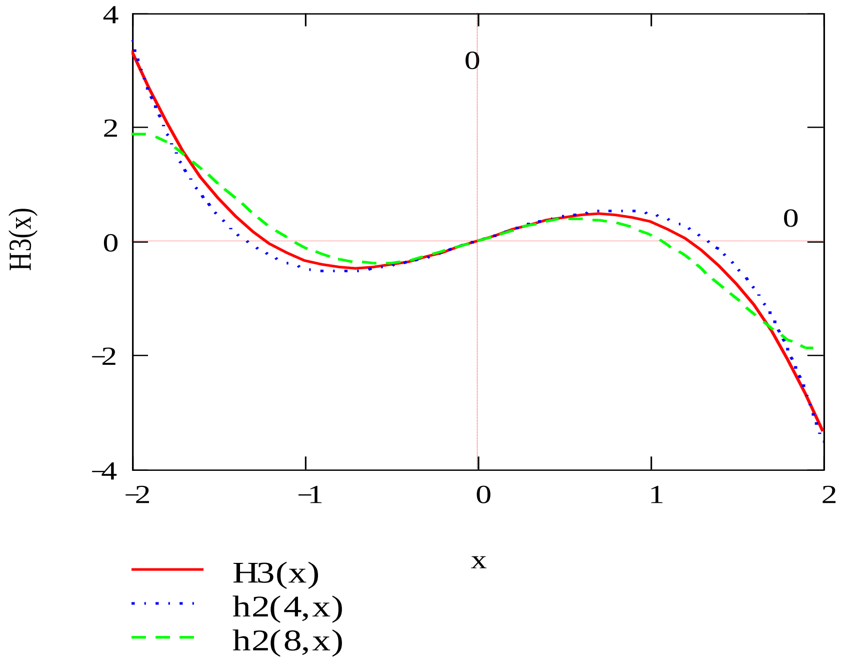
$$\boxed{he(\lambda, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \prod_{m=0}^{n-1} (\lambda - 4m)},$$

$$\boxed{ho(\lambda, z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \prod_{m=0}^{n-1} (\lambda - 4m - 1)}.$$

Для великих значень $n$ співвідношення між коефіцієнтами набере особливо простого вигляду, а саме: $c_{n+2} - 2c_n / n = 0$, що відповідає степеневому розвиненню функції $\exp(z^2)$. Саме таку поведінку в околі нескінченно віддаленої точки мають функції Ерміта.

Нехай тепер нескінченно віддалена точка є полюсом порядку m. Тоді, відповідно до означення полюса, ряд Тейлора матиме вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n$$




**Малюнок 10.** *Непарні функції Ерміта для значень* $\lambda$*, близьких до* $3$*, та поліном Ерміта третього степеню*

Отже, система лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки коефіцієнти $c_{m+1}$, $c_{m+2}$,… дорівнюють нулю, буде скінченою:

$$2c_2+\lambda c_0=0 \quad \text{(для парного m)},$$

$$3\cdot 2c_3-(2-\lambda)c_1=0 \quad \text{(для непарного m)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n-1)nc_n-(2n-4-\lambda)c_{n-2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(m-1)mc_m-(2m-4-\lambda)c_{m-2}=0,$$

$$(2m-\lambda)c_m=0\ .$$

У свою чергу, $c_0,\ c_1,\ldots,c_m\neq 0$. Тому з останнього рівняння системи випливає, що

$$\boxed{\lambda_m=2m}\ .$$

Отже, ми відразу знаходимо власне число рівняння Ерміта для даної межової умови або спектр власних чисел рівняння Ерміта для даного класу межових умов. Таким чином, власні числа рівняння Ерміта безпосередньо пов'язані з порядком полюса у нескінченно віддаленій точці. Видно, що спектр у даному разі є дискретним дійсним та невід'ємним і розв'язок системи є поліномом, степінь якого збігається з порядком полюса у нескінченно віддаленій точці. Цей поліном називається поліномом Ерміта.

Якщо нескінченно віддалена точка є полюсом парного порядку, то розв'язок рівняння Ерміта матиме вигляд

$$f_n(z)=c_0H_n(z),$$

де, для $n>0$,

$$\boxed{H_n(z)=n!\sum_{m=0}^{n/2}\frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!}(2z)^{n-2m}}$$

-поліноми Ерміта парного степеня. Очевидно, що кожний з них визначений з точністю до довільного сталого множника. Поліном Ерміта степеню $n$ звичайно нормується таким чином, щоб коефіцієнт при старшому степеню $z$ був $2^n$. Тоді всі коефіцієнти поліному будуть цілими числами. Для непарного $n>1$

$$f_n(z)=c_1H_n(z),$$

де

$$\boxed{H_n(z)=n!\sum_{m=0}^{(n-1)/2}\frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!}(2z)^{n-2m}}$$

- поліноми Ерміта непарного степеня.

Для $n=1$ $f_1(z)=c_1z$, звідки, згідно до зазначеної вище процедури нормування,

$$H_1(z)=2z$$

Поліноми Ерміта мають інтегральне представлення і представлення у вигляді похідної відповідного порядку. В останньому випадку

$$\boxed{H_n(z)=(-1)^n\exp(z^2)\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2)}.$$

Перші декілька поліномів Ерміта мають вигляд:

$$H_2(z)=4z^2-2,$$

$$H_3(z)=8z^3-12z$$

$$H_4(z)=16z^4-48z^2+12,$$

$$H_5(z)=32z^5-160z^3+120z,$$

$$H_6(z)=64z^6-480z^4+720z^2-120.$$

$$H_7(z)=128z^7-1344z^5+3360z^3-1680z.$$

Випадок, коли нескінченно віддалена точка є звичайною точкою розв'язку рівняння Ерміта, зводиться до одного тривіального рівняння

$$\lambda c_0=0,$$

яке дає одне власне число $\lambda=0$ і одну власну функцію $f_0(z)=c_0$. З урахуванням нормування, розв'язок має вигляд

$$H_0(z)=1.$$

Для довільного власного числа рівняння Ерміта $\lambda_n = 2n$ відповідний поліном Ерміта є лише одним з двох лінійно незалежних розв'язків рівняння. Іншим розв'язком є функція Ерміта. Вона збігається з однією з двох, наведених вище, функцій Ерміта так. Як тільки $\lambda$ збігається з одним з зазначених вище власних чисел рівняння Ерміта, одна з функцій Ерміта перетворюється у поліном Ерміта, а друга залишається трансцендентною функцією. У цьому разі загальний розв'язок матиме вигляд

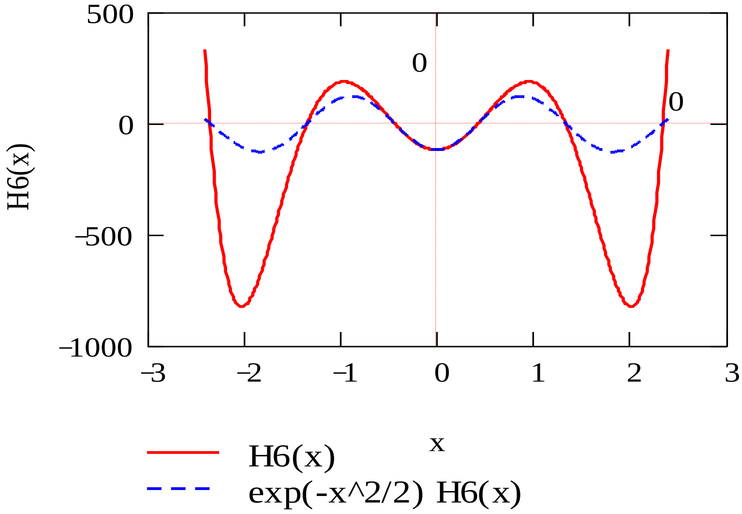
$$\boxed{f_n(z) = aH_n(z) + bh_n(z)}.$$

Якщо у поліном Ерміта перетворюється парна функція Ерміта, то

$$h_n(z) = ho(2n, z).$$

Якщо у поліном Ерміта перетворюється непарна функція Ерміта, то

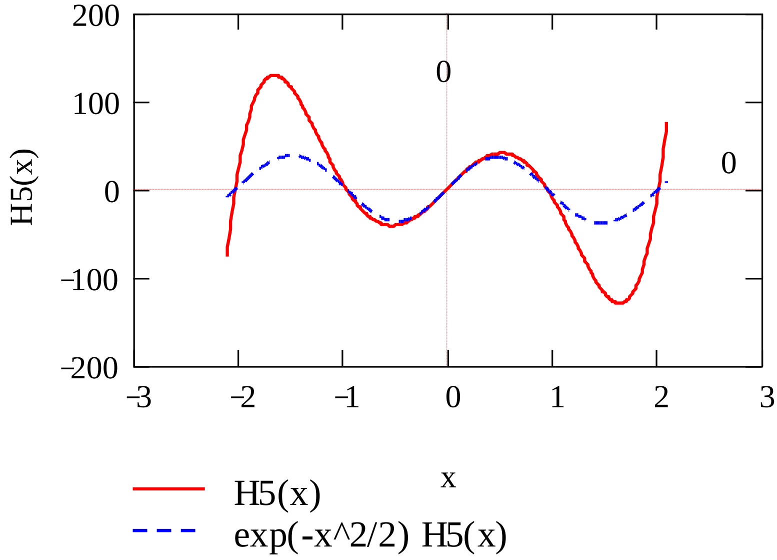
$$h_n(z) = he(2n, z).$$




**Малюнок 11**. *Поліном Ерміта шостого степеню*

Загальний розв'язок рівняння Ерміта є однозначною аналітичною функцією на всій комплексній площині, за виключенням нескінченно віддаленої точки. При переході до дійсної змінної цей розв'язок залишається визначеним на всій дійсній осі.

Ми не розглядаємо інші межові умови у нескінченно віддаленій точці, оскільки вони не дають нових лінійно незалежних розв'язків.




**Малюнок 12**. *Поліном Ерміта п'ятого степеню*.

## 1.6.Функції та поліноми Лагера

Рівняння Лагера має вигляд

$$\boxed{z\frac{d^2 f(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{df(z)}{dz}+lf(z)=0}.$$

Воно має єдину особливу точка у початку координат, яка є полюсом першого порядку. Зовнішньою границею області, де шукається розв'язок рівняння, знову є нескінченно віддалена точка. В якості внутрішньої межі можна взяти початок координат. Припустимо, що і початок координат, і нескінченно віддалена точка є суттєво особливими. Тоді розв'язок рівняння доцільно представити наступним рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

або рядом Пюізьо. Почнемо з першого. Областю збіжності цього ряду буде вся комплексна площина, за виключенням нескінченно віддаленої точки і початку координат. Підстановка ряду у рівняння надає йому вигляду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-1}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_n(z^{n-1}-z^n)+\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n=0$$

або

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 c_n z^{n-1}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda-n)c_n z^n=0$$

Після об'єднання всіх сум в одну матимемо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(n+1)^2 c_{n+1}+(\lambda-n)c_n]z^n=0 .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $z$, одержимо наступну нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n-1)^2 c_{-n+1}+(\lambda+n)c_{-n}=0 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(\lambda+1)c_{-1}=0,$$

$$c_1+\lambda c_0=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n+1)^2 c_{n+1}+(\lambda-n)c_n=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

З наведеної системи видно, що для довільних $\lambda$ та цілих значень $n$ одне з рівнянь має вигляд:

$$(\lambda+1)c_{-1}=0.$$

З нього випливає, що $c_{-1}=0$, а отже дорівнює нулю і решта коефіцієнтів з від'ємними значеннями індексів $c_{-2}, c_{-3}, \ldots, c_{-n}, \ldots$. Таким чином, якщо нескінченно віддалена точка є суттєво особливою, то початок координат може бути лише звичайною точкою розв'язку рівняння Лагера. Тобто, як вже зазначалось вище, особлива точка коефіцієнтів рівняння не завжди є особливою для кожного з його лінійно незалежних розв'язків. На перший погляд винятком є випадок $\lambda=-1$. Для такого $\lambda$ ланцюжок рівнянь розривається. Тоді коефіцієнти ряду з додатними значеннями індексу, як і у попередньому випадку, визначаються через коефіцієнт $c_0$. Коефіцієнти ряду з від'ємними значеннями індексу визначаються через коефіцієнт $c_{-1}$. Довільне рівняння, що пов'язує такі коефіцієнти, має вигляд

$$(n+1)c_{-n+1}+c_{-n}=0$$

і кожний наступний коефіцієнт ряду є більшим від попереднього. Це означає, що ряд розбігається у кожній точці комплексної площини. Це протирічить умові про наявність у розв'язка лише двох особливих точок - початку координат і нескінченно віддаленої точки. Отже, і для $\lambda=-1$ коефіцієнти ряду з від'ємними значеннями індексу дорівнюють нулю.

Якщо ж нескінченно віддалена точка є суттєво особливою, то всі коефіцієнти ряду Лорана, а фактично ряду Тейлора, відмінні від нуля, починаючи з $c_0$. При цьому

$$f(\lambda,z)=c_0 L(\lambda,z),$$

де

$$\boxed{L(\lambda,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{(n!)^2}\prod_{m=0}^{n-1}(\lambda-m)}$$

- функція Лагера (функція Лагера першого роду). Жодних обмежень на власні числа рівняння Лагера тут нема. Для такої межової умови спектр власних чисел рівняння буде неперервним. Для $\lambda_m = m$ характер розв’язку змінюється і трансцендентна функція Лагера переходить у поліном Лагера.

Нехай тепер нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів ряду Лорана буде скінченою і матиме вигляд:

$$c_1 + \lambda c_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n+1)^2 c_{n+1} + (\lambda - n)c_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

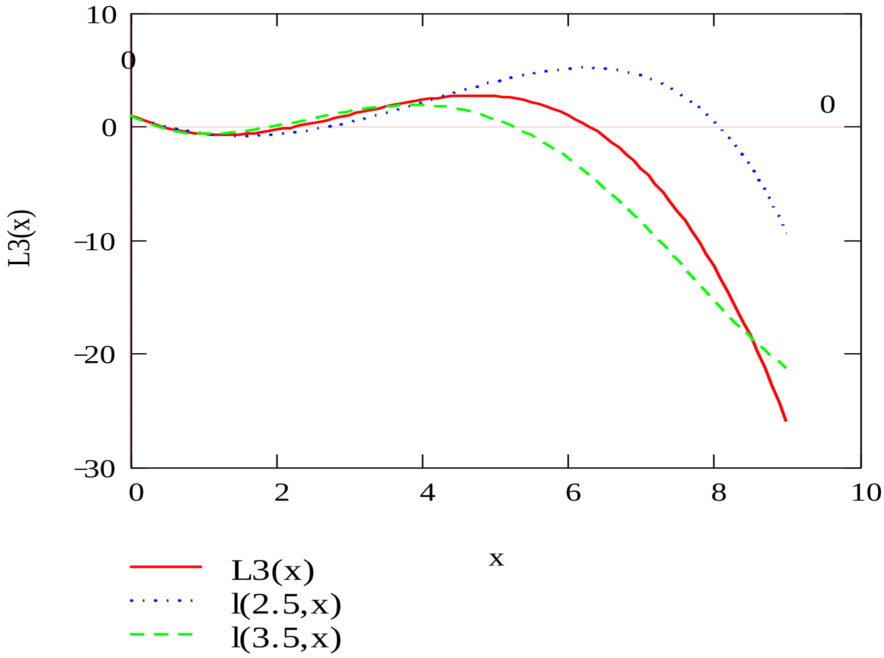
$$(\lambda - m)c_m = 0.$$

Ця система має ненульовий розв'язок лише у випадку, коли коефіцієнт останнього рівняння дорівнює нулю, тобто

$$\boxed{\lambda_m = m}.$$

Власними функціями, що відповідають цим власним числам, будуть поліноми Лагера, а розв'язок рівняння Лагера матиме вигляд

$$f_m(z) = c_0 L_m(z) .$$




**Малюнок 13.** *Функція Лагера першого роду для значень $\lambda$, близьких до 3, та поліном Лагера третього степеня*

Оскільки поліноми Лагера теж визначені з точністю до довільного множника. Звичайно поліноми Лагера нормуються за допомогою умови $L_m(0)=m!$. Тоді

$$\boxed{L_m(z)=(m!)^2\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(n!)^2(m-n)!}z^n}.$$

Як і поліноми Ерміта, поліноми Лагера мають інтегральне представлення та представлення за допомогою похідної. В останньому разі

$$\boxed{L_m(z)=\exp(z)\frac{d^m}{dz^m}z^m\exp(-z)}.$$

Декілька перших поліномів Лагера мають вигляд:

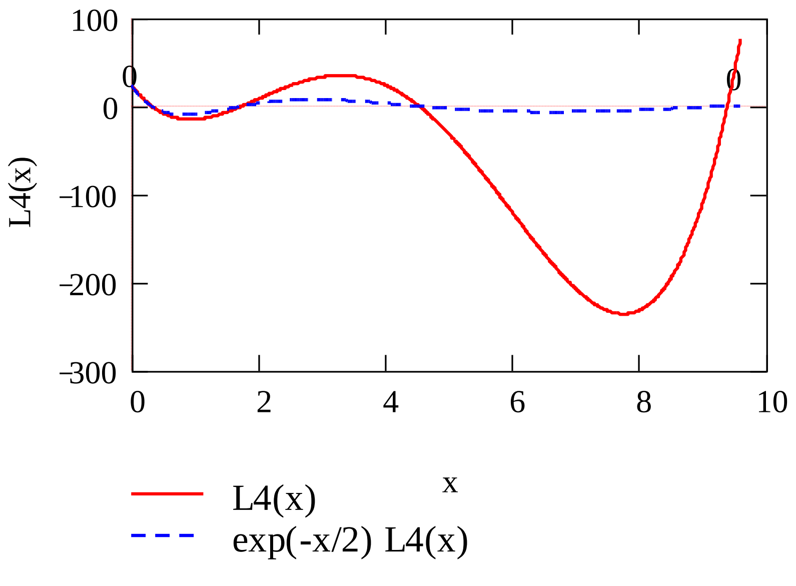
$$L_1(z)=-z+1,$$

$$L_2(z)=z^2-4z+2,$$

$$L_3(z)=-z^3+9z^2-18z+6,$$

$$L_4(z)=z^4-16z^3+72z^2-97z+24,$$

$$L_5(z)=-z^5+25z^4-200z^3+600z^2-600z+120.$$




**Малюнок 14.** *Поліном Лагера четвертого степеню*

Відмінно від поліномів Ерміта, поліноми Лагера не є ні парними, ні непарними.

Нарешті розглянемо випадок, коли нескінченно віддалена точка є звичайною точкою розв'язку. Тоді система алгебраїчних рівнянь зведеться до єдиного рівняння $\lambda c_0=0$ з власним значенням $\lambda=0$ та власною функцією $f_0(z)=c_0$. Остання відповідає поліному Лагера

$$L_0(z)=1.$$

При знаходженні розв'язку рівняння Лагера, у вигляді ряду Лорана з будь - якими іншими варіантами межових умов, ми не одержимо нових розв'язків. Спробуємо знайти лінійно незалежний розв'язок цього рівняння, що називається функцією Лагера другого роду, використовуючи ряд Пюізьо

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n/k} z^{n/k}.$$

Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження коефіцієнтів ряду матиме вигляд:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n/k-1)^2 c_{-n/k+1}+(\lambda+n/k)c_{-n/k}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(1-1/k)c_{-1/k+1}+(\lambda+1/k)c_{-1/k}=0,$$

$$c_1+\lambda c_0=0,$$

$$(1/k+1)^2 c_{1/k+1}+(\lambda-1/k)c_{1/k}=0\ ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n/k+1)^2 c_{n/k+1}+(\lambda-n/k)c_{n/k}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Тепер ланцюжок рівнянь для коефіцієнтів ніде не переривається. Всі коефіцієнти як при додатних, так і від'ємних степенях $z$, будуть відмінними від нуля. Крім того, наведена система рівнянь не може мати ненульові розв'язки, якщо порядок точки розгалуження $k$ є скінченим. Для доведення цього твердження розглянемо довільне рівняння системи

$$(n/k-1)^2 c_{-n/k+1}+(\lambda+n/k)c_{-n/k}=0.$$

Для великих $n$ і скінчених $k$ воно набере вигляду

$$c_{-n/k}=(n/k)c_{-n/k+1}$$

і кожний наступний коефіцієнт ряду буде більшим за попередній. Це знову ж таки означає, що ряд розбігається у кожній точці комплексної площини, що протирічить наявності у розв'язка лише двох, зазначених вище особливих точок. Отже, можливий лише варіант, коли всі $c_{-n/k}=0$. Таким чином, $k$ не може бути скінченим, а повинно прямувати до нескінченності так, щоб $n/k$ було сталою величиною. У цьому разі обидва доданки відповідного рівняння будуть одного порядку величини і жоден з коефіцієнтів не дорівнюватиме нулю. У висліді нескінченно віддалена точка має бути суттєво особливою точкою і точкою розгалуження нескінченного порядку, тобто логарифмічною особливою точкою. Оскільки обхід нескінченно віддаленої точки за замкненим контуром одночасно є аналогічним обходом початку координат, тільки у протилежному напрямку, то останній теж повинен бути точкою розгалуження нескінченного порядку. Функцією, для якої початок координат і нескінченно віддалена точка є полюсами нескінченого порядку і, одночасно, точками розгалуження нескінченого порядку, є $\ln(z)$. Звідси і назва відповідної особливої точки. Отже, другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Лагера повинен містити доданок з множником $\ln(z)$. Для знаходження розв'язку, що має логарифмічну особливу точку безпосереднє використання методу степеневих рядів не ефективне. Доцільніше перейти від невідомої функції $f(z)$ до нової невідомої функції $f(z)=\alpha(z)\ln(z)$, де функція $\alpha(z)$ вже не має логарифмічних особливостей у початку координат та нескінченно віддаленій точці. Можна наперед сказати, що рівняння для функції $\alpha(z)$, отримане після підстановки у рівняння Лагера функції $\alpha(z)\ln(z)$ буде складнішим, ніж вихідне рівняння Лагера. Спростити це рівняння можна ввівши дві нові невідомі функції $\alpha(z)$ і $\beta(z)$ замість однієї за формулою

$$f(z)=\alpha(z)\ln(z)+\beta(z)\ .$$

При цьому зайву невідому функцію $\beta(z)$ можна підібрати таким чином, щоб рівняння для функції $\alpha(z)$ було максимально простим, наприклад, збігатиметься з рівнянням Лагера. Виконаємо запропоновану підстановку. Тоді вихідне рівняння стане таким

$$\left[z\frac{d^2\alpha(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\alpha(z)}{dz}+\lambda\alpha(z)\right]\ln(z)+$$

$$+z\frac{d^2\beta(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\beta(z)}{dz}+\lambda\beta(z)=$$

$$=-2z\frac{d\alpha(z)}{dz}-\frac{1-z}{z}\alpha(z)\ .$$

Якщо функцію $\beta(z)$ обрати таким чином, щоб вона задовольняла неоднорідному рівнянню Лагера

$$z\frac{d^2\beta(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\beta(z)}{dz}+\lambda\beta(z)=$$

$$=-2z\frac{d\alpha(z)}{dz}-\frac{1-z}{z}\alpha(z)\ ,$$

то функція $\alpha(z)$ буде задовольняти досить простому рівнянню

$$\left[z\frac{d^2\alpha(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\alpha(z)}{dz}+\lambda\alpha(z)\right]\ln(z)=0,$$

яке в усій комплексній площині, крім початку координат і нескінченно віддаленої точки, а також точки $z=1$, еквівалентне рівнянню Лагера

$$z\frac{d^2\alpha(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\alpha(z)}{dz}+\lambda\alpha(z)=0\ .$$

Розв'язком цього рівняння, що не має логарифмічних особливостей, буде функція Лагера першого роду $L(\lambda, z)$ тобто другим лінійно незалежний розв'язком рівняння Лагера - функцією Лагера другого роду - буде

$$\boxed{l(\lambda,z)=\ln(z)L(\lambda,z)+\beta(z)}\,.$$

Її підстановка у друге рівняння надає йому більш конкретного вигляду

$$z\frac{d^2\beta(z)}{dz^2}+(1-z)\frac{d\beta(z)}{dz}+\lambda\beta(z)=$$

$$=-2z\frac{dL(\lambda,z)}{dz}-\frac{1-z}{z}L(\lambda,z)$$

Не вдаючись у деталі розв'язання неоднорідних звичайних диференційних рівнянь, про це буде мова у наступних главах, наведемо остаточний результат для $\lambda_m = m$. Він має наступний вигляд

$$\beta_m(z)=(1+2m)z+\frac{(1+m-3m^2)}{4}z^2+\ldots\,.$$

Звідси видно, що розв'язок дійсно розбігається в околі початку координат та нескінченно віддаленої точки і має там логарифмічні особливі точки. Отже, загальний розв'язок рівняння рівняння Лагера, матиме вигляд

$$\boxed{f_m(z)=aL_m(z)+bl_m(z)}\,.$$

Важливою рисою функції Лагера другого роду є те, що вона має логарифмічну особливість у нулі і є нескінченно значною аналітичною функцією комплексного аргументу. При наявності зазначеної точки розгалуження, однозначну функцію можна одержати тільки заборонивши обхід початку координат за замкненим колом. Для цього достатньо виконати розріз у комплексній площині вздовж довільної прямої, що виходить з початку координат. Доцільно в якості такої прямої обрати дійсну від'ємну піввісь.

Поряд з поліномами Лагера, дуже часто використовуються узагальнені поліноми Лагера. Вони задовольняють наступному диференційному рівнянню

$$\boxed{z\frac{d^2L_n{}^s(z)}{dz^2}+(s+1-z)\frac{dL_n{}^s(z)}{dz}+\left(c-\frac{s+1}{2}\right)L_n{}^s(z)=0}$$

і є його єдиними скінченими і неперервними розв’язками. Їх можна, аналогічно попередньому, представити наступним степеневим рядом:

$$\boxed{L_n{}^s(z)=n!\sum_{m=0}^{n-k}(-1)^{n-s}\,\tilde{N}_m{}^n\,\frac{z^{n-s-m}}{(n-s-m)!}}\,,$$

а також у диференційній формі

$$\boxed{L_n{}^s(z)=\frac{1}{n!}z^{-s}\exp(z)\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{n+s}\exp(-z)\right]}\,.$$

Перші декілька узагальнених поліномів Лагера мають вигляд:

$$L_0^{\,s}(z)=1,\; L_1^{\,s}(z)=1+s-z,\ldots\,.$$

Власними числа задачі для поліномів Лагера є наступні числа

$$\boxed{\chi_n=\mathrm{n}+(\mathrm{s}+1)/2}\,.$$

### 1.7.Функції та поліноми Лежандра

Рівняння Лежандра має вигляд:

$$\boxed{(1\text{-}z^2)\frac{d^2 f(z)}{dz^2}\text{-}2z\frac{df(z)}{dz}+lf(z)=0}$$

Воно має дві особливі точки у комплексній площині: $z_1=-1,\; z_2=1$, що є полюсами першого порядку. Наявність таких особливих точок вже не дозволяє представити всі розв'язки рівняння у вигляді одного степеневого ряду у всій комплексній площині. Зазначені особливі точки є межовими у прямому сенсі цього слова, оскільки ділять комплексну площу на дві області. Одна з них є внутрішньою частиною круга одиничного радіуса з центром у початку координат. Друга - зовнішньою частиною цього круга. Це теж круг, але з центром у нескінченно віддаленій точці. У висліді збіжних степеневих рядів має бути два: по одному для кожної області. Перший має бути збіжним у всіх внутрішніх точках круга одиничного радіуса з центром у початку координат і розбіжним у всіх зовнішніх точках щодо цієї області, включаючи і нескінченно віддалену точку. Другий ряд має бути збіжним в усіх точках, зовнішніх щодо круга одиничного радіуса, і розбіжним у всіх внутрішніх точках цього кола, включаючи і початок координат. Розглянемо знаходження цих двох степеневих рядів як дві окремі задачі. Почнемо з більш простої, тобто пошуку збіжного степеневого ряду в околі початку координат. Оскільки початок координат є звичайною точкою рівняння, то розв'язок в околі зазначеної точки будемо шукати у вигляді ряду Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\,.$$

Цей же ряд можна розглядати і як ряд Лорана, побудований в околі нескінченно віддаленої точки. В останньому випадку внутрішній радіус кільця дорівнює відстані від нескінченно віддаленої точки до кола одиничного радіуса з центром у початку координат. Почнемо з випадку, коли нескінченно віддалена точка є суттєво особливою. Після підстановки останнього співвідношення в рівняння Лежандра, одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n z^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n z^n-2\sum_{n=0}^{\infty}nc_n z^n+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=0\,.$$

Після об'єднання всіх сум в одну, рівняння набере вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)c_{n+2}+\left[\lambda-n(n+1)\right]c_n\right\}z^n=0\,.$$

Звідки виникає наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів ряду:

$$2c_2+\lambda c_0=0,$$

$$2\cdot 3c_3+(\lambda-2)c_1=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2}+(\lambda-n(n+1))c_n=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

З характеру цієї системи випливає, що всі коефіцієнти ряду визначаються лише через два коефіцієнти $c_0$ і $c_1$. При цьому, всі парні коефіцієнти визначаються через коефіцієнт $c_0$, всі непарні коефіцієнти - через коефіцієнт $c_1$. Отже, у випадку, коли нескінченно віддалена точка є суттєво особливою, розв'язок рівняння, і одночасно його загальний розв'язок у внутрішній частини круга одиничного радіуса, має вигляд

$$\boxed{f(\lambda,z)=c_0 Qe(\lambda,z)+c_1 Qo(\lambda,z)},$$

де

$$\boxed{Qe(\lambda,z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\prod_{m=0}^{n-1}\left[\lambda-2m\left(2m+1\right)\right]},$$

$$\boxed{Qo(\lambda,z)=z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\prod_{m=0}^{n-1}\left[\lambda-\left(2m+1\right)\left(2m+2\right)\right]}$$

- парна та непарна функції Лежандра відповідно. Спектр власних чисел у розглянутому випадку є неперервним. Власними числами $\lambda$ рівняння є довільні дійсні числа.

Для $\lambda_m=m(m+1)$ характер розв'язку змінюється. При цьому, як буде показано далі, трансцендентні функції Лежандра стають поліномами Лежандра. Такі власні числа відповідають припущенню, що нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$. Тоді ряд Лорана має вигляд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{m}c_n z^n$$

і ми одержимо наступну скінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів ряду Лорана:

$$2c_2+\lambda c_0=0,$$

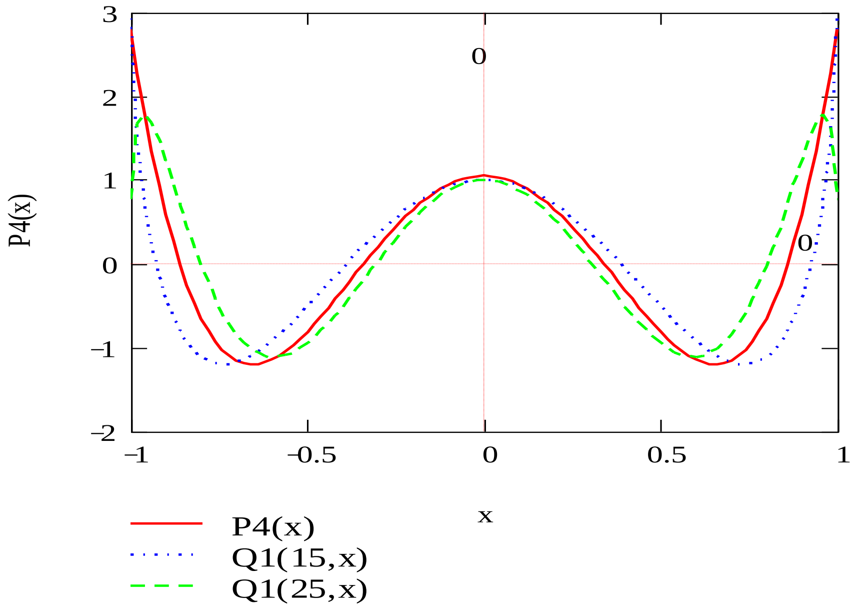
$$2\cdot 3c_3+(\lambda-2)c_1=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$(n+1)(n+2)c_{n+2}+(\lambda-n(n+1))c_n=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$(\lambda-m(m+1))c_m=0 .$$




**Малюнок 15.** *Парні функції Лежандра для значень* $\lambda_m$ *, близьких до* $4$ *та поліном Лежандра четвертого степеню*

Ненульовий розв'язок цієї системи можливий лише у разі, коли всі його коефіцієнти, включаючи $c_m$, відмінні від нуля. У висліді з останнього рівняння одержимо такий спектр власних значень рівняння Лежандра, породжений всією сукупністю межових умов даного типу

$$\boxed{\lambda_m = m(m+1)}.$$

Цей спектр є дійсним, дискретним та додатним. Розв'язок рівняння Лежандра для парного m має вигляд

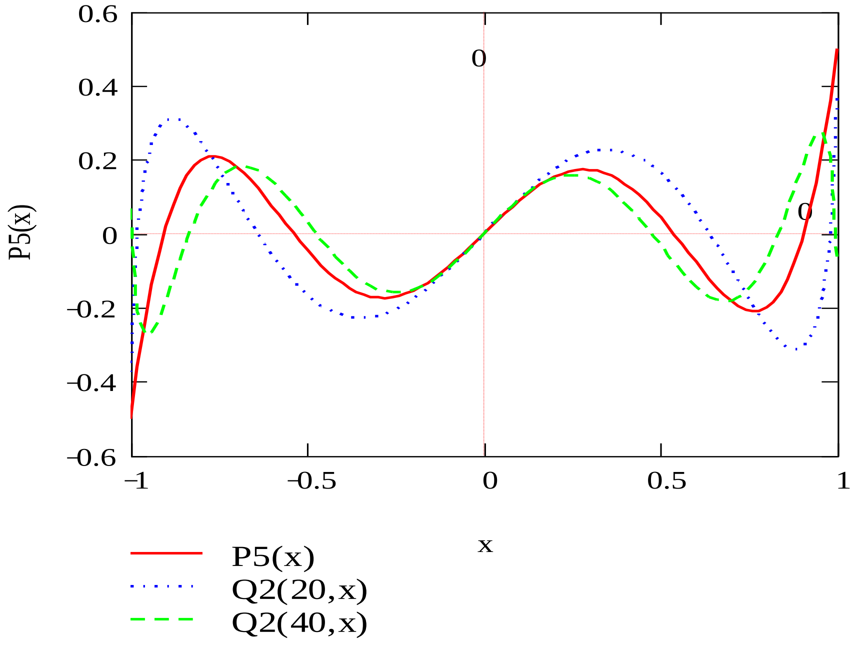
$$f_m(z) = c_0 P_m(z),$$

де, для $m > 0$ ,

$$\boxed{P_{2m}(z) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} z^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left[ m(2m+1) - (2k-1)(k-1) \right]}$$

- поліноми Лежандра парного степеню.

Кожний з них визначений з точністю до довільного сталого множника. Звичайно коефіцієнти поліномів Лежандра вибирають так, щоб $P_m(1) = 1$.




**Малюнок 16.** *Непарні функції Лежандра для значень* $\lambda_m$ *, близьких до* $5$ *та поліном Лежандра п'ятого степеню*

Для непарного m

$$f_m(z)=c_1 P_m(z),$$

де, для $m>1$,

$$\boxed{P_{2m+1}(z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left[m(2m+1)-k(2k-1)\right]}$$

-поліноми Лежандра непарного степеню. Для $m=1$

$$f_1(z)=c_1 z.$$

Отже,

$$P_1(z)=z.$$

Нехай тепер нескінченно віддалена точка є звичайною точкою рівняння, тоді $m=0$ і ми маємо одне рівняння

$$\lambda c_0=0,$$

звідки власне число $\lambda=0$, а власна функція $f_0(z)=c_0$, тобто

$$P_0(z)=1.$$

Наступні декілька поліномів Лежандра мають вигляд:

$$P_2(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1),\qquad P_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z),$$

$$P_4(z)=\frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3), \qquad P_5(z)=\frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z),$$

$$P_6(z)=\frac{1}{16}(231z^6-315z^4+105z^2-5).$$

Можливе і інше представлення поліномів Лежандра:

$$\boxed{P_m(z)=\frac{1}{2^m m!}\frac{d^m}{dz^m}(1-z^2)^m}.$$

Проста межова умова у нескінченно віддаленій точці типу полюсу дає нам лише один з двох лінійно незалежних розв'язків рівняння Лежандра. Для отримання другого лінійно незалежного розв'язку рівняння для цього ж власного числа, необхідно знову повернутись до загального розв'язку рівняння Лежандра для довільних $\lambda$. Як тільки $\lambda$ стає рівним одному з зазначених власних чисел рівняння Лежандра, одна з функцій Лежандра перетворюється у поліном Лежандра, а друга залишається трансцендентною функцією і для таких $\lambda_m$. Інші варіанти межових умов не дають нових розв'язків в околі початку координат.

Отже, у крузі $|z|<1$ загальний розв'язок матиме вигляд

$$\boxed{f_m(z)=aP_m(z)+bQ_m(z)}.$$

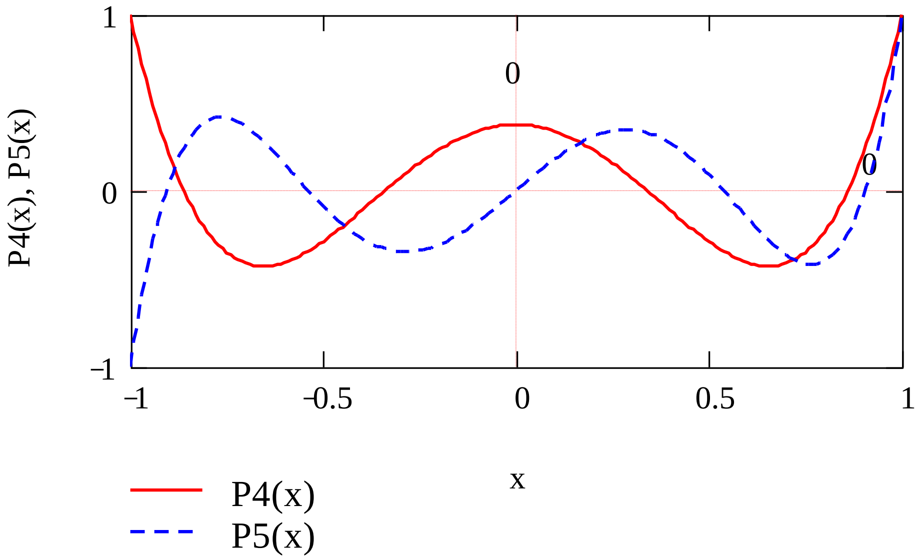
Якщо поліномом Лежандра стає парна функція Лежандра, то

$$Q_m(z)=Qo[m(m+1),z].$$

Якщо поліномом Лежандра стає непарна функція, то

$$Q_m(z)=Qe[m(m+1),z].$$

Тут $Q_m(z)$ - функція Лежандру. Ця функція, як і слід було очікувати, не має особливостей у внутрішній частині кола одиничного радіуса. Її детальне дослідження показує, що у точках $z=\pm1$ вона має логарифмічні розбіжності, а далі ряд, що її представляє, розбігається у всіх точках поза цим колом. При цьому, очевидно, поліноми Лежандра мають скінченні значення як всередині зазначеного кола, так і на самому колі, а також і у всіх інших точках комплексної площини, крім нескінченно віддаленої.




**Малюнок 17**. *Поліноми Лежандра четвертого та п'ятого степенів*

Отже, один з двох лінійно незалежних розв'язків, скінчений у всіх точках комплексної площини, за виключенням нескінченно віддаленої точки, ми знайшли - це поліноми Лежандра. Другий лінійно незалежний розв'язок, знайдений нами, ми представили степеневим рядом, збіжним лише всередині кола одиничного радіуса.

Спробуємо тепер знайти степеневий ряд, збіжний поза колом одиничного радіуса, тобто в колі з центром у нескінченно віддаленій точці. Візьмемо, наприклад, такий варіант межових умов, коли нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $m$ . Тоді ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки матиме вигляд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n .$$

Коефіцієнти цього ряду можна одержати аналогічно попереднім випадках з відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Цей ряд буде збіжним скрізь поза колом одиничного радіуса та нескінченно віддаленої точки. На самому колі він буде мати логарифмічні особливості у точках $z=\pm 1$. Сума цього радіуса є знову, вже обговорювана вище, функція Лежандра. Ми не наводимо цей ряд, тому що, наскільки нам відомо, він не знайшов широкого використання.

Другий лінійно незалежний розв'язок доцільно знайти у вигляді, придатному для використання у всій комплексній площині. Для цього представимо розв'язок рівняння Лежандра степеневим рядом в околі точки $z=\pm 1$. Аналогічно випадку рівняння Лагера, переконаємося, що у випадку, коли нескінченно віддалена точка є полюсом скінченого порядку, особливі точки рівняння $z=\pm 1$ не можуть бути полюсами або точками розгалуження скінченого порядку. Ненульовий розв'язок існує лише тоді, коли ці точки є його логарифмічними особливими точками.

Подібно до випадку рівняння Лагера, другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Лежандра можна шукати у вигляді

$$f_m(z)=\alpha_m(z)\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\beta_m(z)\ .$$

Тут $\alpha_m(z)$ і $\beta_m(z)$ - дві нові невідомі функції, що не містять особливостей у точках $z=\pm 1$. При цьому зайву невідому функцію $\beta_m(z)$ знову можна підібрати таким чином, щоб рівняння для функції $\alpha_m(z)$ було максимально простим, наприклад, співпадало з рівнянням Лежандра. Виконаємо запропоновану підстановку. Тоді вихідне рівняння стане таким

$$\left[\left(1-z^2\right)\frac{d^2\alpha_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\alpha_m(z)}{dz}+\lambda_m\alpha_m(z)\right]\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+$$

$$+\left(1-z^2\right)\frac{d^2\beta_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\beta_m(z)}{dz}+\lambda_{m\beta_m}(z)=-4\frac{d\alpha_m(z)}{dz}\ .$$

Якщо функцію $\beta_m(z)$ обрати таким чином, щоб вона задовольняла неоднорідному рівнянню Лежандра

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\beta_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\beta_m(z)}{dz}+\lambda\beta_m(z)=-4\frac{d\alpha_m(z)}{dz},$$

то функція $\alpha_m(z)$ буде задовольняти досить простому рівнянню

$$\left[\left(1-z^2\right)\frac{d^2\alpha_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\alpha_m(z)}{dz}+\lambda\alpha_m(z)\right]\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=0,$$

яке у всій комплексній площини, крім початку координат і нескінченно віддаленої точки, а також точок $z=\pm 1$, еквівалентне рівнянню Лежандра

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\alpha_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\alpha_m(z)}{dz}+\lambda\alpha_m(z)=0\ .$$

Розв'язком цього рівняння, що не має логарифмічних особливостей, буде поліном Лежандра $P_m(z)$, тобто другим лінійно незалежним розв'язком рівняння Лежандра - функцією Лежандра - буде

$$Q_m(z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)P_m(z)+\beta_m(z)\ .$$

Звичайно його записують дещо інакше

$$\boxed{Q_m(z)=\frac{1}{2}P_m(z)\ln\left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)+q_m(z)}\ .$$

Останній вираз відрізняється від попереднього лише множником $1/4$, $q_m(z)=\beta_m(z)/4$. Він визначений у всій комплексній площині, крім нескінченно віддаленої точки, де має полюс порядку $m$, та точок $z=\pm 1$, у яких має логарифмічні особливості.

Друге рівняння системи матиме вигляд

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\beta_m(z)}{dz^2}-2z\frac{d\beta_m(z)}{dz}+\lambda_m\beta_m(z)=-4\frac{dP_m(z)}{dz}$$

Розв'язуючи це неоднорідне диференційне рівняння Лежандра, одержуємо

$$q_m(z)=-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}P_{n-1}(z)P_{m-n}(z).$$

Ще раз зазначимо, що якщо розвинути цей вираз в околі початку координат у ряд Тейлора, то він збігатиметься з вже отриманим нами рядом для функцій Лежандра. Перші декілька функцій Лежандра такі:

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right),\qquad Q_1(z)=\frac{z}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-1,$$

$$Q_2(z)=\frac{1}{2}P_2(z)\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-\frac{3z}{2}.$$

Зазначимо, що функція Лежандра має логарифмічні особливості у точках $z=\pm 1$ для довільних значень $\lambda$. Загальний розв'язок при наявності цих особливих точок розгалуження буде однозначною функцією тільки при неможливості їх обходу за замкненим колом. Звичайно для цього у комплексній площині роблять розріз, що з’єднує 0 і точки $z=\pm 1$. Значення поліномів Лежандра, в силу їх однозначності, будуть збігатись на верхній і нижній сторонах розрізу. Значення функцій Лежандра, в силу багатозначності логарифма, будуть відрізнятись. При цьому

$$\boxed{\mathrm{Q}_\mathrm{m}(\mathrm{x}\pm\mathrm{i}\delta)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_\mathrm{m}(\mathrm{x})\left[\ln\left(\frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}}\right)\mp\mathrm{i}\pi\right]+\mathrm{q}_\mathrm{m}(\mathrm{x})}.$$

Для $x\in\left(-1,1\right)$ на дійсній осі в якості функцій Лежандра звичайно беруться

$$Q_m(x)=\frac{1}{2}\left[Q_m(x+i\delta)+Q_m(x-i\delta)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}P_m(x)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+q_m(x).$$

Степінь полінома Лежандра можна розглядати не тільки як ціле, але і як довільне комплексне число. В останньому випадку поліном Лежандра називають функцією Лежандра першого роду, а функцію Лежандра – функцією Лежандра другого роду.

Крім функцій Лежандра, широке застосування мають приєднані функції Лежандра. Вони є розв'язками диференційного рівняння

$$\boxed{(1-z^2)\frac{d^2f(z)}{dz^2}-2z\frac{df(z)}{dz}+\left(l-\frac{n^2}{1-z^2}\right)f(z)=0}$$

Для $\lambda_n=n(n+1)$, $\nu^2=m^2$

$$f_{nm}(z)=a_{nm}P_n^{\ m}(z)+b_{nm}Q_n^{\ m}(z),$$

де

$$\boxed{P_n^{\ m}(z)=P_n^{\ -m}(z)=\left(\sqrt{1-z^2}\right)^m\frac{d^m}{dz^m}P_n(z)}$$

- приєднані поліноми Лежандра,

$$\boxed{Q_n^{\ m}(z)=(-1)^m(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z)}$$

- приєднані функції Лежандра. Між поліномами Лежандру та приєднаними функціями Лежандра існує наступний зв'язок:

$$\boxed{Q_n^{\ m}(z)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right]-\frac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)},$$

який свідчить, що приєднані функції Лежандра мають логарифмічні особливості у точках $z=\pm1$. Для $m=0$ приєднані поліноми Лежандра збігаються з поліномами Лежандра, а приєднані функції Лежандра - з функціями Лежандра. Перші декілька приєднаних функцій Лежандра такі:

$$Q_1^{\ 1}(z)=\sqrt{z^2-1}\left[\frac{z}{z^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right],$$

$$Q_2^{\ 1}(z)=\sqrt{z^2-1}\left[\frac{3z^2-2}{z^2-1}-\frac{3}{2}z\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right],$$

$$Q_2^{\ 2}(z)=\frac{3}{2}\left(z^2-1\right)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)-\frac{3z^3-5z}{z^2-1}.$$

Для довільних значень $\lambda$, $\nu^2$ лінійно незалежними розв'язками будуть лише приєднані функції Лежандра.

Загальний розв'язок рівняння Лежандра може бути представленим у вигляді лінійної комбінації приєднаних поліномів та функцій Лежандра не лише на проміжку $[-1,1]$, де приєднані поліноми Лежандра є ортогональними, але й на довільному проміжку дійсної осі, або довільній області комплексної площини. У цьому випадку приєднані поліноми Лежандра вже не будуть ортогональними.

### 1.8.Функції Беселя

Рівняння Беселя має вигляд

$$\boxed{z^2\frac{d^2f(z)}{dz^2}+z\frac{df(z)}{dz}+(\lambda z^2\text{-}n^2)f(z)=0}\,.$$

Воно містить відразу два параметри $\lambda$ і $\nu^2$, що забезпечують існування ненульових розв'язків рівняння при тих, чи інших межових умовах. Тобто, певні значення цих параметрів породжують двопараметричний спектр власних чисел рівняння Беселя.

Якщо $\lambda\neq 0$, то перейшовши до нової змінної $\sqrt{\lambda}z$, надалі ми будемо позначати її тою самою літерою $z$, рівняння можна дещо спростити, надавши йому вигляду

$$\boxed{z^2\frac{d^2f(z)}{dz^2}+z\frac{df(z)}{dz}+(z^2\text{-}n^2)f(z)=0}\,.$$

З двох коефіцієнтів рівняння, що відіграють у подальшому роль його власних чисел, чутливим до поведінки розв’язку у нескінченно віддаленій точці буде лише коефіцієнт $\nu^2$.

Рівняння Беселя має єдину особливу точку у початку координат. Як і раніше, граничною точкою області, у якій шукається розв'язок рівняння Беселя, буде нескінченно віддалена точка. В якості другої межової точки можна взяти початок координат.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння або у вигляді ряду Лорана, або у вигляді ряду Пюізьо. Такий підхід дозволить розглянути у нескінченно віддаленій точці, та у початку координат, весь спектр можливих межових умов, а саме випадки, коли зазначені точки є звичайними точками, полюсами скінченого порядку, суттєво особливими, алгебраїчними та трансцендентними точками розгалуження.

Почнемо розгляд з першої з зазначених двох можливостей, яка відповідає суттєво особливим точкам у початку координат і у нескінченності. Після підстановки ряду у рівняння Беселя, одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n(n-1)c_n z^n+\sum_{n=-\infty}^{\infty} nc_n z^n+\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{n+2}-\nu^2\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n=0\,.$$

Об'єднуючи всі суми, маємо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[(n^2-\nu^2)c_n+c_{n-2}]z^n=0\,.$$

Звідки шукана система лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів ряду Лорана має вигляд:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n^2-\nu^2)c_{-n}+c_{-n-2}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(1-\nu^2)c_{-1}+c_{-3}=0,$$

$$\nu^2c_0+c_{-2}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$(n^2 - \nu^2)c_n + c_{n-2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Тут, для зручності, ми перейшли до невід'ємних цілих значень $n$. Ця система рівнянь складається з двох ланцюжків рівнянь: окремо для коефіцієнтів з парними номерами і окремо для коефіцієнтів з непарними номерами. Вона має ту особливість, що якщо один з коефіцієнтів $c_k = 0$, то всі коефіцієнти відповідного ланцюжка рівнянь, для яких $n < k$, теж дорівнюють нулю. Структура другого ланцюжка рівнянь залишається при цьому незмінною. Покажемо, що коефіцієнти другого ланцюжка просто дорівнюють нулю. Для цього розглянемо довільне рівняння ланцюжка

$$(n^2 - \nu^2)c_{-n} + c_{-n-2} = 0 .$$

Звідси видно, що завжди існує такий номер $n$, починаючи з якого кожний наступний коефіцієнт $c_{-n-2}$ буде більшим за попередній коефіцієнт $c_{-n}$, а отже, ряд буде розбіжним у кожній точці комплексної площини. Це протирічить наявності у розв'язка лише двох особливих точок у початку координат та у нескінченності.

На основі вище сказаного, можна зробити і більш загальний висновок про те, що якщо жодний з двох ланцюжків рівнянь ніде не переривається, то нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь і, відповідно, рівняння Беселя мають лише нульовий розв'язок.

Викладена вище ситуація реалізується якраз у випадку, коли $\nu = \pm m$ є цілим числом, а нескінченно віддалена точка, та початок координат, є суттєво особливими. Тоді всі парні коефіцієнти ряду Лорана, якщо $m$ є парним, і непарні, якщо $m$ є непарним, з номерами $n < |m|$ будуть дорівнювати нулю, оскільки у цьому випадку одне з рівнянь системи має вигляд $c_{m-2} = 0$. Решта коефіцієнтів, що входить до цього ж ланцюжка рівнянь, будуть відмінними від нуля. При цьому систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$[n^2 - m^2]c_n + c_{n-2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$[(m+2)^2 - m^2]c_{m+2} + c_m = 0,$$

$$[(m+2)^2 - m^2]c_{-m-2} + c_{-m-4} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$[n^2 - m^2]c_{-n} + c_{-n-2} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Для довільного $m$ розв'язок рівняння Беселя або має вигляд

$$f_m(z) = c_m J_m(,z),$$

або

$$f_{-m}(z)=c_{-m}J_{-m}(,z).$$

Якби початок координат був звичайною точкою, то мав би місце лише перший розв'язок. У випадку, якби початок координат був суттєво особливою точкою, а нескінченно віддалена точка звичайною точкою, то ми отримали б лише другий розв'язок. Насправді ці розв'язки однакові, оскільки для цілих $m$,

$$\boxed{J_{-m}(z)=(-1)^m J_m(z)}\,.$$

Тут

$$\boxed{J_m(z)=z^m\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(m+2n)^2-m^2}\right]},$$

- функція Беселя з цілого порядку $m$, яка, очевидно, є трансцендентною.

Таким чином, спектр власних чисел $\nu$ у випадку, коли нескінченно віддалена точка і початок координат є суттєво особливими, є дискретним. Він складається з нуля і всіх натуральних чисел. Від'ємні числа не призводять до нових лінійно незалежних розв'язків. Повертаючись до старої змінної, одержуємо

$$f_m(\lambda,z)=c_m J_m(\sqrt{\lambda}z)\ .$$

Крім зазначеної вище умови $\lambda\neq 0$ , немає жодних інших обмежень на власні числа $\lambda$ рівняння Беселя. Випадок $\lambda=0$ вимагає окремого розгляду. Для нього з нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відмінним від нуля буде лише одне рівняння, а саме

$$(n^2-m^2)c_n=0.$$

Це рівняння матиме ненульовий розв'язок лише у випадку, коли $n^2-m^2=0$, тобто $n=\pm m$ і рівняння Беселя має розв'язки у вигляді степеневих функцій

$$f_m(z)=c_m z^m,\quad n\neq 0,$$

та логарифмічної функції

$$f_0(z)=\ln(z),\quad n=0.$$

Це рівняння докладно розглянуте вище. Отже, спектр власних чисел є неперервним.

Очевидно, що знайдений нами розв'язок рівняння Беселя у вигляді функції Беселя порядку $m$ має у початку координат нуль того ж порядку $m$. Для будь-яких інших значень індексу функції (маються на увазі раціональні дроби) $J_m(z)$ і $J_{-m}(z)$ вже будуть лінійно незалежними.

Якщо нескінченно віддалена точка є полюсом порядку $k$, то коефіцієнти ряду Лорана з номерами $n>k$ будуть дорівнювати нулю. Але для цілого $m^2$ коефіцієнти ряду Лорана з номерами $n<m$ теж будуть дорівнювати нулю. Одночасне виконання цих двох умов можливе лише тоді, коли всі коефіцієнти, що входять у даний ланцюжок рівнянь, будуть дорівнювати нулю. Отже, для такої межової умови існує лише нульовий розв'язок. Таким чином, для цілих значень $m^2$ і $\lambda\neq 0$ рівняння Беселя має розв'язки лише у вигляді трансцендентних функцій.

Так само рівняння Беселя має нульовий розв'язок і у випадку, коли нескінченно віддалена точка є звичайною точкою розв'язку.

При розв'язанні рівняння Беселя ми знову з двох лінійно незалежних розв'язків знайшли лише один. Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Беселя (функція Беселя другого порядку або функція Неймана), фактично, шукається аналогічно пошуку другого лінійно незалежного розв'язку для рівняння Лагера і має вигляд

$$\boxed{N_\nu(z)=\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}}$$

(тут права частина замінюється її межовим значенням, якщо індекс функції Неймана є цілим числом). Тобто другий лінійно незалежний розв'язок рівняння Беселя відповідає випадку, коли нескінченно віддалена точка є суттєво особливою і, одночасно, точкою розгалуження нескінченого порядку, тобто логарифмічною особливою точкою. Отже, загальний розв'язок рівняння Беселя для цілочисельного $m^2$ є

$$f_m(\lambda,z)=a_m J_m(\sqrt{\lambda}z)+b_m N_m(\sqrt{\lambda}z).$$

Загальний розв'язок рівняння Беселя можна записати і за допомогою функцій Ганкеля, або функцій Беселя третього роду:

$$f_m(\lambda,z)=aH_m^{(1)}(\sqrt{\lambda}z)+bH_m^{(2)}(\sqrt{\lambda}z),$$

де функції Ганкеля так пов'язані з функціями Беселя і Ноймана:

$$\boxed{H_m^{(1)}(z)=J_m(z)+iN_m(z)},$$

$$\boxed{H_m^{(2)}(z)=J_m(z)-iN_m(z)}.$$

Для рівняння Беселя становить практичний інтерес ще один тип межових умов у нескінченно віддаленій точці. Це випадок, коли ця точка є трансцендентною особливою точкою. Тоді розв'язок рівняння Беселя слід шукати у вигляді ряду Пюізьо.

Для простоти конкретизуємо ситуацію. Нехай, наприклад, нескінченно віддалена точка буде суттєво особливою і, одночасно, точкою розгалуження другого порядку. Це можливо лише у випадку значень індексу сумування, кратного $1/2$, тобто індекс приймає такі значення - $\pm 1/2,\ldots,\pm n/2,\ldots$ (тут $n$ - ціле). Тоді систему рівнянь можна одержати з попередньої системи заміною $n$ на $n/2$. Розрив ланцюжка рівнянь відбувається за схемою, аналогічною випадку цілочисельного індексу сумування. Тобто $m=\pm 1/2,\ldots,\pm k/2,\ldots$. Тоді вираз для функції Беселя з напівцілим індексом структурно збігається з виразом, отриманим вище для функції Беселя з цілочисельним індексом. Функції Беселя напівцілого порядку безпосередньо пов'язані з тригонометричними функціями:

$$\boxed{J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{pz}}\sin(z)},\qquad \boxed{J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{pz}}\cos(z)},$$

$$\boxed{N_{1/2}(z) = -\sqrt{\frac{2}{pz}}\cos(z)}, \quad \boxed{N_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}}\sin(z)},$$

Використання функцій Беселя напівцілого порядку дозволяє представити загальний розв'язок рівняння Беселя так (всі попередні варіанти представлення, зрозуміло, залишаються вірними):

$$f_{m/2}(\lambda,z) = a_{m/2}(\lambda)J_{m/2}(\lambda,z) + b_{m/2}(\lambda)J_{-m/2}(\lambda,z).$$

Аналогічним чином можна розглянути функції Беселя і Ноймана з показниками, що визначаються раціональними дробами. Для всіх, розглянутих нами функцій Беселя, можна використати такий спільний вираз

$$\boxed{J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^n}{n!\Gamma(m+n+1)}}.$$

Для функцій Ноймана цілого індексу теж існує подібне представлення:

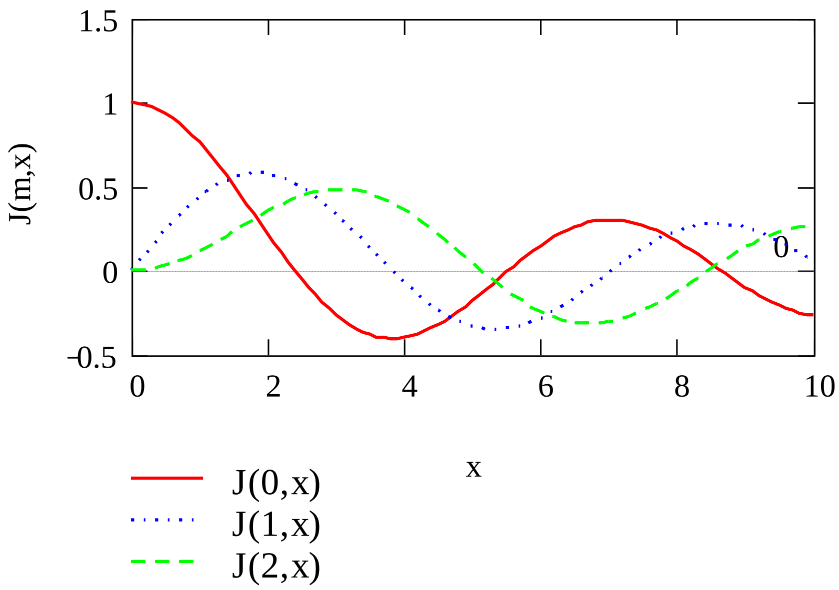
$$\boxed{N_0(z) = \frac{2}{p}\ln\left(\frac{z}{2}\right)J_0(z) - \frac{2}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi(n+1)}{n!^2}\left(-\frac{z}{2}\right)^{2n}}, \quad m=0,$$

$$N_m(z) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m \sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right)J_m(z) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi(n+1)+\Psi(m+n+1)}{n!(m+n)!}\left(-\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

$$m > 0.$$

Зокрема, для малих значень аргументу,



**Малюнок 18**. *Функції Беселя цілого порядку*

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{z}{2}\right), \qquad N_\nu(z)=-\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu.$$

Тут

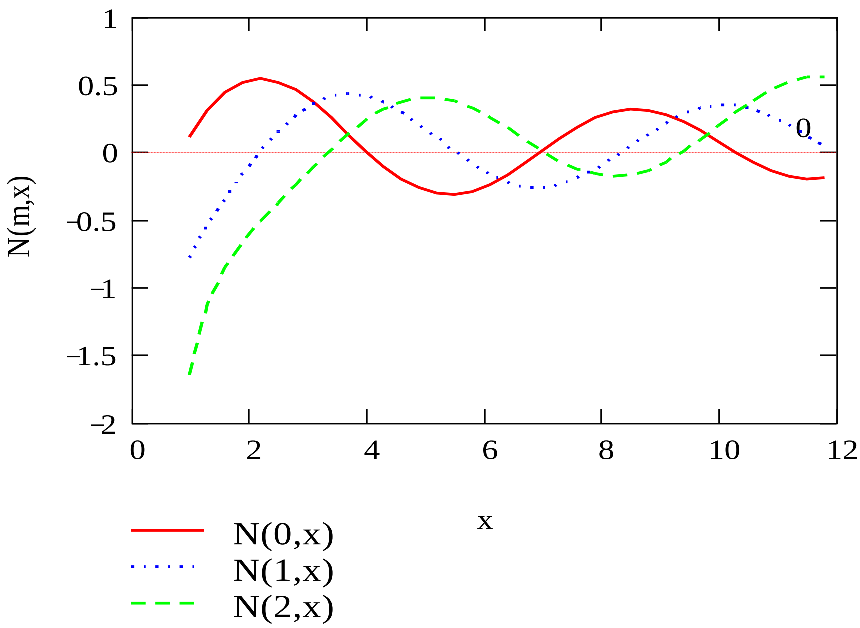
$$\boxed{\Psi(z)=d\ln\left[\Gamma(z)\right]/dz}$$

-псі - функція.

Важливою особливістю функції Ноймана є те, що вона має логарифмічну особливість у нулі і є нескінченно значною аналітичною функцією. Загальний розв'язок при наявності зазначеної точки розгалуження буде однозначною функцією тільки при неможливості обходу початку координат за замкненим колом. Для цього достатньо виконати розріз у комплексній площині вздовж довільної прямої, що виходить з початку координат. Цей розріз зручно виконати вздовж дійсної від'ємної півосі. Інші межові умови не дають ненульових розв'язків.

Існує певна аналогія між тригонометричними функціями і функціями Беселя (Неймана, Ганкеля). Обидва класи складаються з осцилюючих функцій і для дійсних значень аргументів є обмеженими, зокрема:

$$|J_\nu(x)|\le 1,\quad \nu\ge 0, \qquad |J_\nu(x)|\le 1/\sqrt{2},\quad \nu\ge 1.$$




**Малюнок 19.** *Графіки функцій Ноймана цілого порядку*

Але є і багато розбіжностей. Тригонометричні синус і косинус описують коливання з сталою амплітудою, а функції Беселя - затухаючі коливання. Крім того функцій Беселя існує нескінченно багато.

## 1.9.Гіпергеометричні функції

Гіпергеометричне рівняння має вигляд

$$\boxed{z(1-z)\frac{d^2f(z)}{dz^2}+[\gamma+(\alpha+\beta+1)z]\frac{df(z)}{dz}-\alpha\beta f(z)=0}\,.$$

Воно має дві особливі точки у скінченій частині комплексної площини $z=0$ та $z=1$. $\alpha,\beta,\gamma$ - довільні сталі, що, у загальному випадку, можуть приймати довільні комплексні значення. Їх конкретні значення визначаються типом межових умов. Для деяких з них ненульові розв'язки рівняння існують лише для певних значень цих сталих. Розв'язок рівняння доцільно шукати у вигляді двох степеневих рядів, побудованих в околі початку координат та нескінченно віддаленої точки. Почнемо з кола одиничного радіуса з центром у початку координат. Перевіримо з початку, чи існує розв'язок рівняння, для якого початок координат не є особливою точкою, тобто будемо шукати розв'язок у вигляді ряду Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\,.$$

Такому ряду відповідає умова у початку координат, що визначає цю точку як звичайну точку розв'язку, та у мова у нескінченно віддаленій точці, що визначає цю точку як суттєво особливу.

Якщо такий розв'язок не знайдеться, то наступним припущенням буде те, що початок координат є полюсом скінченого або нескінченого порядку розв'язку, тобто шукатимемо розв'язок у вигляді ряду Лорана і т.п.

Після підстановки ряду Тейлора у гіпергеометричне рівняння воно набере вигляду

$$z(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n z^{n-2}+[\gamma+(\alpha+\beta+1)z]\sum_{n=0}^{\infty}nc_n z^{n-1}-$$

$$-\alpha\beta\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=0\,.$$

Це рівняння зручно, після занесення множників під знаки суми і відповідної заміни індексів сумування, записати у наступному вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+1)(n+\gamma)c_{n+1}-[n(n-1)+n(\alpha+\beta+1)+\alpha\beta]c_n\}z^n=0$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)(n+\gamma)c_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)c_n]z^n=0.$$

Оскільки степеневі функції лінійно незалежні, то їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише у випадку, коли всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю, тобто

$$(n+1)(n+\gamma)c_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)c_n=0 \qquad n=0,1,2,\ldots\,.$$

У висліді ми отримали нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. У розгорнутому вигляді вона буде такою:

$$\gamma c_1-\alpha\beta c_0=0\,,$$

$$2(1+\gamma)c_2-(\alpha+1)(\beta+1)c_1=0\,,$$
$$3(2+\gamma)c_3-(\alpha+2)(\beta+2)c_2=0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$
$$(n+1)(n+\gamma)c_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)c_n=0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,.$$

Кожне рівняння цієї системи пов'язує між собою лише два коефіцієнти ряду Тейлора, індекси яких відрізняються між собою на 1. Отже, всі коефіцієнти можуть бути вираженими через коефіцієнт $c_0$ наступним чином

$$c_n=c_0\frac{\gamma}{n!}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}\,.$$

Останній вираз можна записати більш компактно, якщо використати наступну властивість гама - функції

$$\boxed{\Gamma(\alpha+n)=\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}\,.$$

Звідси

$$\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

Ця властивість гама-функції випливає з її означення. Дійсно, оскільки

$$\boxed{\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{t}^{\alpha-1}\exp(-\mathrm{t})\,\mathrm{dt}}\,,$$

то інтегруючи цей вираз частинами, одержуємо

$$\Gamma(\alpha)=-\exp(-t)\frac{t^\alpha}{\alpha}\bigg|_0^\infty+\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty t^\alpha\exp(-t)dt=\frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\,.$$

Продовжуючи інтегрування частинами $n$, ми і одержимо наведене вище співвідношення між різними гама - функціями.

Таким чином, коефіцієнти ряду Тейлора можна записати у вигляді

$$c_n=c_0\frac{\gamma}{n!}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\,.$$

Знайдений нами розв'язок тепер матиме вигляд

$$f(z)=c_0\gamma\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}\,.$$

Отриманий нами вираз буде скінченим, виходячи з властивостей гама - функції, лише у випадку, коли $\gamma\neq 0,-1,-2,\dots$ З системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є видно, що для $\gamma=0$ коефіцієнт ряду $c_0=0$ , а коефіцієнт $c_1 \neq 0$ і всі коефіцієнти ряду Тейлора можуть бути вираженими через коефіцієнт $c_1$. Тобто початок координат буде нулем першого порядку розв'язку. Аналогічно, якщо $\gamma = -1$, то початок координат буде нулем другого порядку розв'язку і т.п. Самі розв'язки можуть бути знайдені у цих випадках аналогічно попередньому. отже межова умова, що полягає в тому, що початок координат є нулем скінченого порядку також дає ненульовий розв'язок гіпергеометричного рівняння.

Знайдений нами розв'язок гіпергеометричного рівняння з точністю до довільної сталої збігається з гіпергеометричною функцією першого роду

$$\boxed{F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{z^n}{n!}}.$$

Степеневий ряд для гіпергеометричної функції збігається абсолютно і рівномірно у крузі одиничного радіуса з центром у початку координат. Існує аналітичне продовження гіпергеометричної функції і у зовнішній частині кола одиничного радіуса з центром у початку координат з розрізом вздовж відрізку дійсної осі $(1,\infty)$.

Ненульовий розв'язок можливий і у тому випадку, коли нескінченно віддалена точка є полюсом скінченого порядку розв'язку. У цьому випадку нескінчена система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Тейлора стає скінченою і розв'язком, замість трансцендентної функції, буде поліном відповідного порядку. Така межова умова сумісна лише з наступними значеннями сталих $\alpha,\beta$: $\alpha = 0,-1,-2,\ldots$ або $\beta = 0,-1,-2,\ldots$

Шість функцій: $F(\alpha \pm 1,\beta,\gamma,z)$, $F(\alpha,\beta \pm 1,\gamma,z)$, $F(\alpha,\beta,\gamma \pm 1,z)$ - називаються суміжними з функцією $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$. Між ними існують наступні залежності:

$$\boxed{\gamma \mathrm{F}(\alpha,\beta-1,\gamma,\mathrm{z}) = (\alpha-\beta)\mathrm{z}\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma+1,\mathrm{z}) = \gamma \mathrm{F}(\alpha-1,\beta,\gamma,\mathrm{z})}.$$

Існує наступна формула диференціювання гіпергеометричної функції

$$\frac{d^n}{dz^n} F(\alpha,\beta,\gamma,z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} F(\alpha+n,\beta+n,\gamma+n,z).$$

Як і багатьох інших випадках, найскладнішу проблему становить пошук другого лінійно незалежного розв'язку гіпергеометричного рівняння. Очевидно для нього початок координат повинен бути особливою точкою, оскільки особлива точка рівняння повинна бути особливою точкою хоча б одного з його розв'язків. Одним з способів розв'язання цієї задачі є використання ряду Пюізьо. Іншим - пошук розв'язку у наступному вигляді

$$f(z) = z^{\rho}(1-z)^{\sigma}\varphi(z),$$

де розв'язок рівняння для функції $\varphi(z)$ вже не буде містити особливості у початку координат. При цьому виявляється, що

$$\varphi(z)=F(\alpha',\beta',\gamma',z).$$

Тут сталі $\alpha',\beta',\gamma',\rho,\sigma$ - лінійним чином пов'язані з сталими $\alpha,\beta,\gamma$. Всього існує 24 розв'язки, що відповідають різним зазначеним лінійним комбінаціям. Один з них буде таким

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma,z)=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(1-\gamma)}z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z).$$

Ця функція називається гіпергеометричною функцією другого роду і має у початку координат точку розгалуження $k$ - го порядку, яка може одночасно бути і полюсом $m$ - го порядку, якщо $\gamma=m/k$ .

Всі елементарні, та багато спеціальних функцій безпосередньо виражаються через гіпергеометричну функцію, а саме:

$$(1+z)^n=F(-n,1,1,-z),$$

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=2zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},z^2\right),$$

$$\ln(1+z)=zF(1,1,2,-z),$$

$$\exp(z)=\lim_{b\to\infty}F(1,b,1,z/b),$$

$$\arcsin(z)=zF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},z^2\right),$$

$$\arctan(z)=zF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2\right),$$

$$\sin(nz)=n\sin(z)F\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2},\frac{3}{2},\sin^2(z)\right),$$

$$\cos(nz)=F\left(\frac{n}{2},\frac{-n}{2},\frac{1}{2},\sin^2(z)\right).$$

# Глава 2.Задача Штурма – Ліувіля

Межові умова у нескінченно віддаленій точці та інших особливих точках диференційного рівняння є природними і зручними у випадку, коли ми шукаємо розв’язок рівняння на всій комплексній площині. Саме ці межові умови дозволяють знайти і загальний розв’язок відповідного рівняння. Останній містить інформацію лише про диференційне рівняння. Не менш важливим є випадок, коли нас цікавить розв’язок рівняння на відрізку дійсної осі. Тут ми змушені задавати межові умови вже на межах відрізку. У такій ситуації ми можемо використати знайдений загальний розв'язок рівняння разом з зазначеними межовими умовами. Аналогічний підхід можливий і до багатовимірної межової задачі.

Велика кількість межових задач математичної фізики має фундаментальну спорідненість. Ця спорідненість дозволяє розглядати їх як частинні випадки більш загальних межових задач. Розгляд останніх дозволяє дослідити властивості розв'язків цілого класу споріднених рівнянь без їх конкретного розв'язку. Однією з найбільш простих і, одночасно, найбільш універсальних і важливих є задача Штурма -Ліувіля.

## 2.1.Одновимірна класична задача Штурма-Ліувіля

Особливий інтерес становить випадок, коли спектр власних чисел диференційних рівнянь стає дискретним і нескінченним. Саме межові умови на кінцях скінченого відрізку перетворюють неперервний спектр власних чисел у дискретний. Типовою задачею, що розглядає саме обговорювану вище ситуацію, є класична задача Штурма -Ліувіля. Вона зводиться до розв'язання наступного звичайного лінійного однорідного диференційного рівняння другого порядку

$$\boxed{\hat{L}f(x)+\lambda\rho(x)f(x)=0},$$

де лінійний оператор $\hat{L}$ має вигляд:

$$\boxed{\hat{L}=\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d}{dx}\right]-q(x)}.$$

Тут $k(x),\ q(x),\ \rho(x)$ - функції, неперервні на проміжку $\lfloor a,b\rfloor$, де шукається розв'язок. Крім того, $k(x)>0,\ q(x)\geq 0,\ \rho(x)>0$. Неперервність функції разом з її першою та другою похідними вимагається і від функції $f(x)$. Останнє означає, що ця функція є елементом лінійного функційного простору $C_2\lfloor a,b\rfloor$.

Елементарні, та багато спеціальних функцій є розв'язками рівнянь, що належать саме до такого типу. Так, для $k(x)=1$, $q(x)=0$, $\rho(x)=1$ ми одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\lambda f(x)=0,$$

розв'язками якого є тригонометричні, гіперболічні та показникові функції.

Для $k(x)=x$, $q(x)=\alpha^2/x$, $\rho(x)=x$ ми одержуємо рівняння Беселя

$$x\frac{d}{dx}\left[x\frac{df(x)}{dx}\right]+(\lambda x^2-\alpha^2)f(x)=0,$$

або

$$x^2\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+x\frac{df(x)}{dx}+(\lambda x^2-\alpha^2)f(x)=0.$$

Для $k(x)=1-x^2$, $q(x)=0$, $\rho(x)=1$ ми одержуємо рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right]+\lambda f(x)=0,$$

або

$$(1-x^2)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+\lambda f(x)=0.$$

Для $k(x)=1-x^2$, $q(x)=\alpha^2/(1-x^2)$, $\rho(x)=1$ ми одержуємо рівняння для приєднаних функцій та поліномів Лежандра.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{1-x^2}\right)f(x)=0,$$

або

$$(1-x^2)\frac{d^2 f(x)}{dx^2}-2x\frac{df(x)}{dx}+\left(\lambda-\frac{\alpha^2}{1-x^2}\right)f(x)=0.$$

Для $k(x)=\exp(-x^2)$, $q(x)=0$, $\rho(x)=\exp(-x^2)$ ми одержуємо рівняння Ерміта

$$\frac{d}{dx}\left[\exp(-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right]+\lambda\exp(-x^2)f(x)=0,$$

або

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2x\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = 0$$

Для $k(x) = x\exp(-x)$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = \exp(-x)$ ми одержуємо рівняння Лагера

$$\frac{d}{dx}\left[x\exp(-x)\frac{df(x)}{dx}\right] + \lambda\exp(-x) f(x) = 0,$$

або

$$x\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (1-x)\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = 0 .$$

Зауважимо, що далеко не всі відомі рівняння належать до типу рівняння Штурма-Ліувіля, Наприклад, рівняння Чебишева, що має вигляд, близький до вигляду рівняння Лежандра

$$(1-x^2)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x\frac{df(x)}{dx} + \lambda f(x) = 0 ,$$

або рівняння для узагальнених функцій та поліномів Лагера

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{df(x)}{dx} + (\lambda - \alpha) f(x) = 0.$$

Рівняння Штурма-Ліувіля дозволяє дослідження властивостей його розв'язків без конкретного їх знаходження. Очевидно, що ці властивості залежать не тільки від рівняння, але і від межових умов на кінцях відрізку, де шукається розв'язок. У класичній задачі Штурма-Ліувіля в якості таких умов беруться однорідні межові умови третього роду, а саме:

$$\gamma_1\frac{df(a)}{dx} + \gamma_2 f(a) = 0, \qquad \gamma_1\frac{df(b)}{dx} + \gamma_2 f(b) = 0,$$

де $\gamma_1, \gamma_2$ - довільні сталі.

Нагадаємо, що межові умови першого та другого родів є частинними випадками межових умов третього роду. Перші мають вигляд

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0.$$

Їм відповідає випадок, коли $\gamma_1 = 0$. Другі мають вигляд

$$\frac{df(a)}{dx} = 0, \qquad \frac{df(b)}{dx} = 0,$$

їм відповідає випадок, коли $\gamma_2 = 0$

При наявності межових умов задача Штурма-Ліувіля матиме ненульові розв'язки лише за певних значень коефіцієнта $\lambda$ рівняння Штурма-Ліувіля. Такі значення цього коефіцієнта називаються власними числами задачі Штурма-Ліувіля, а відповідні їм ненульові розв'язки - власними функціями цієї задачі.

Для наведених вище межових умов, та умов, яким задовольняють коефіцієнти рівняння Штурма–Ліувіля, вірні наступні теореми.

**Теорема 1.** Існує нескінченна (злічена) множина власних чисел $\{\lambda_n\}$, $n=1,2,\ldots$ та власних функцій $\{f_n\}$ задачі Штурма-Ліувіля.

**Теорема 2** (теорема про розкладність). Довільна функція $\Phi(x)$, неперервна на проміжку $\lfloor a,b \rfloor$ разом з своєю першою похідною, може бути розкладена в ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма–Ліувіля. Цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на $\lfloor a,b \rfloor$.

Останнє означає, що власні функції задачі Штурма-Ліувіля утворюють базис відповідного лінійного функційного простору, і

$$\boxed{\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n=\frac{1}{\|f_n\|^2}\int_a^b \Phi(x)\rho(x)f_n(x)dx \quad .$$

Тут для квадрату норми елементів базису використане позначення

$$\|f_n\|^2=\int_a^b \rho(x)f_n^{\,2}(x)dx \ .$$

## 2.2.Самоспряженість одновимірної задачі Штурма –Ліувіля

Перш за все, наведемо декілька означень.

**Спряжені оператори.** Розглянемо диференційний оператор досить загального вигляду, частинним випадком якого є оператор задачі Штурма-Ліувіля

$$\boxed{\overset{?}{L}u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu}.$$

Тут функція $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ є неперервною за всіма аргументами разом з першими та другими похідними. У загальному випадку вона комплексна. Комплексними можуть бути і коефіцієнти:

$$a=a(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad b=b(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad c=c(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

За означенням, оператор, спряжений до наведеного, має вигляд

$$\boxed{\hat{L}^{+} v=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(a_{ij}^{*}v)}{\partial x_i\,\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(b_i^{*}v)}{\partial x_i}+c^{*}v}\ .$$

Властивості функцій $v(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ і $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ аналогічні.

Для спряжених операторів має місце наступне співвідношення:

$$v^{*}\hat{L}u-u\hat{L}^{+}{}^{*}v^{*}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}.$$

Тут у правій частині виразу міститься багатовимірна дивергенція функції

$$P_i=v^{*}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}-u\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(a_{ij}v^{*})}{\partial x_j}+2b_i uv^{*}.$$

Інтегруючи передостанню рівність частинами, ми одержимо найбільш загальний варіант формули Остроградського[1], що пов'язує об'ємний та поверхневий інтеграли:

$$\boxed{\int_V\ldots\int(v^{*}\hat{L}u-u\hat{L}^{+}{}^{*}v^{*})dV=\int_S\ldots\int\sum_{i=1}^{n}P_i\cos(e_i x_i)dS}\ .$$

Тут $V$ - об'єм $n$ - вимірної області, $S$ - площа її поверхні, $e_i$ компонента вектора внутрішньої нормалі до елемента поверхні $dS$ вздовж $i$-ї осі.

**Спряжені межові умови.** Функції $u$ і $v$ можуть задовольняти на поверхні $S$, що обмежує область $V$, різним межовим умовам. Ці умови називаються спряженими, якщо права частина формули Остроградського дорівнює нулю, тобто

$$\int_V\ldots\int(v^{*}\hat{L}u-u\hat{L}^{+}{}^{*}v^{*})dV=0.$$

Спряжені межові умови відповідають лише спряженим операторам, оскільки тільки для останніх і має місце формула Остроградського. Зауважимо, що спряженість операторів є необхідною але не достатньою умовою спряженості межових умов.

**Спряжені межові задачі.** Нехай дані два рівняння:

$$\hat{L}u=f,\qquad \hat{L}^{+}v=g$$

---

[1] Остроградський Михайло Васильович (1801-1862) - геніальний український математик, засновник першої у Російській імперії наукової математичної школи.

з відповідними межовими умовами. Якщо диференційні оператори у лівих частинах цих рівнянь і відповідні межові умови є спряженими, то такі межові задачі теж називаються спряженими.

**Самоспряжені оператори.** Два оператори є самоспряженими, якщо

$$\hat{L} = \hat{L}^{+}.$$

Легко сформулювати деякі достатні умови самоспряженості операторів. Так оператори є самоспряженими, якщо: коефіцієнти $a$ і $b$ є сталими величинами, $a$ є дійсною величиною, $b$ - уявною величиною, коефіцієнт $c$ - дійсною функцією. Остання умова є також і необхідною. Можливі в інші варіанти достатніх умов.

Для самоспряжених операторів формула Остроградського запишеться так

$$\int_V \cdots \int .(v^* \hat{L} u - u \hat{L}^* v^*) dV = \int_S \cdots \int . \sum_{i=1}^{n} P_i \cos(e_i x_i) dS.$$

Тут

$$P_i = v^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v^*}{\partial x_j} + 2 b_i u v^*.$$

**Самоспряжені межові умови.** Для самоспряжених межових умов формула Остроградського має вигляд

$$\int_V \cdots \int .(v^* \hat{L} u - u \hat{L}^* v^*) dV = 0.$$

Ще раз зазначимо, що самоспряжені межові умови можуть відповідати лише самоспряженим операторам, але самоспряженість операторів не гарантує самоспряженість межових умов.

**Самоспряжені межові задачі.** Самоспряженість операторів і межових умов призводить і до самоспряженості відповідних межових задач. З самоспряженості межових задач випливає самоспряженість операторів і межових умов. Таким чином, самоспряженість операторів і межових умов є необхідними і достатніми умовами самоспряженості межових задач.

**Зауваження.** Маючи повний ортонормований набір функцій $\{f_n\}$, ми можемо одержати матричне представлення диференційних операторів, що відповідає даному набору функцій. Окремі матричні елементи оператора мають вигляд

$$L_{nm}=\int_a^b f_n{}^*(x)\,\hat{L}\,f_m(x)dx\,.$$

Мовою матриць, для отримання спряжених матричних елементів нам потрібно виконати над матрицею операції транспонування і комплексне спряження. Зазначені матричні елементи будуть такими

$$L_{mn}{}^*=\int_a^b f_m(x)\,\hat{L}^*\,f_n{}^*(x)dx\ .$$

Самоспряженість оператора, представленого у матричній формі, означає, що відповідна йому матриця не змінюється у висліді виконання двох зазначених операцій:

$$\boxed{\mathrm{L_{nm}}=\mathrm{L_{mn}}^*}\,.$$

Зазначимо, що, фактично, в останньому випадку мова йде про самоспряженість і відповідної межової задачі, а не тільки диференційного оператора окремо, оскільки тут використовуються і властивості оператора, і властивості межових умов. Але, як зазначалось вище, з останньої рівності випливає і умова самоспряженості оператора.

**Теорема 3** (про самоспряженість). Задача Штурма-Ліувіля є самоспряженою задачею.

**Доведення.** У випадку однієї незалежної змінної для перевірки самоспряженості межової задачі із зрозумілих причин не можу бути застосована формула Остроградського. Тут перевірка здійснюється безпосереднім обчисленням відповідних інтегралів. Отже, обчислимо наступні два скалярні добутки (матричні елементи). Для простоти візьмемо дійсні функції, оскільки диференційний оператор є дійсним

$$L_{nm}=\left(f_n,\hat{L}f_m\right)=\int_a^b f_n(x)\hat{L}f_m(x)dx=$$

$$=\int_a^b f_n(x)\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{df_m(x)}{dx}\right]dx-\int_a^b q(x)f_n(x)f_m(x)dx=$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dx}\left[k(x)f_n(x)\frac{df_m(x)}{dx}\right]dx-\int_a^b k(x)\frac{df_n(x)}{dx}\frac{df_m(x)}{dx}dx-$$

$$-\int_a^b q(x)f_n(x)f_m(x)dx=-\int_a^b k(x)\frac{df_n(x)}{dx}\frac{df_m(x)}{dx}dx-$$

$$-\int_a^b q(x) f_n(x) f_m(x) dx + k(b) f_n(b) \frac{df_m(b)}{dx} - k(a) f_n(a) \frac{df_m(a)}{dx},$$

$$L_{mn} = \left( f_m, \hat{L} f_n \right) = \int_a^b f_m(x) \hat{L} f_n(x) dx =$$

$$= -\int_a^b k(x) \frac{df_n(x)}{dx} \frac{df_m(x)}{dx} dx - \int_a^b q(x) f_n(x) f_m(x) dx +$$

$$+ k(b) f_m(b) \frac{df_n(b)}{dx} - k(a) f_m(a) \frac{df_n(a)}{dx}.$$

Вони відрізняються лише останніми двома доданками. Для межових умов першого та другого родів ці доданки дорівнюють нулю. Для межових умов третього роду це не так, але можна показати, що тут відповідні доданки збігаються. Дійсно, для першого скалярного добутку

$$k(a) f_n(a) \frac{df_m(a)}{dx} - k(b) f_n(b) \frac{df_m(b)}{dx} =$$

$$= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left[ k(a) f_n(a) f_m(a) - k(b) f_n(b) f_m(b) \right].$$

Для другого скалярного добутку

$$k(a) f_m(a) \frac{df_n(a)}{dx} - k(b) f_m(b) \frac{df_n(b)}{dx} =$$

$$= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left[ k(a) f_m(a) f_n(a) - k(b) f_m(b) f_n(b) \right].$$

Отже, для межових умов першого, другого та третього родів маємо

$$\boxed{\mathrm{L}_{\mathrm{nm}} = \mathrm{L}_{\mathrm{mn}}},$$

що є умовою самоспряженості задачі Штурма-Ліувіля. Для інших типів межових умов задача може не бути самоспряженою.

**Зауваження.** З отриманих результатів випливає, що

$$\left( f_n, \hat{L} f_n \right) \leq 0.$$

Дійсно, згідно до попереднього,

$$\left( f_n, \hat{L} f_n \right) = -\int_a^b k(x) \left[ \frac{df_n(x)}{dx} \right]^2 dx -$$

$$-\int_a^b q(x)[f_n(x)]^2 dx - k(a)\frac{\gamma_1}{\gamma_2}[f_n(a)]^2,$$

і кожний доданок у правій частині є або від'ємним, якщо відповідний коефіцієнт диференційного рівняння не дорівнює нулю, або нульовим у протилежному випадку.

**Приклад 1.** Довести самоспряженість диференційного оператора $P_x = i\frac{\partial}{\partial x}$ та межової задачі для цього. У квантовій механіці цей оператор відповідає $x$ - компоненті імпульсу.

**Розв'язання.** Зазначений оператор задовольняє достатнім умовам самоспряженості, а отже є самоспряженим.

Для перевірки самоспряженості межової задачі розглянемо систему комплексних функцій з інтегрованим квадратом тобто таких що належать функційному простору $L_2(-\infty,\infty)$. Очевидно, що при прямуванні аргументу до нескінченості, ці функції прямують до нуля. Поведінка функцій у нескінченності і є граничною умовою задачі. Обчислимо наступні матричні елементи:

$$\left(f_n^*, i\frac{\partial}{\partial x} f_m\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x) i\frac{\partial}{\partial x} f_m(x) dx,$$

$$\left(f_m, -i\frac{\partial}{\partial x} f_n^*\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)(-i)\frac{\partial}{\partial x} f_n^*(x) dx =$$

$$= -i f_n^*(x) f_m(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x) i\frac{\partial}{\partial x} f_m(x) dx .$$

Оскільки заінтегрована частина дорівнює нулю, то наведені матричні елементи збігаються, і розглянута межова задача є самоспряженою.

**Приклад 2.** Довести самоспряженість оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

**Розв'язання.** Коефіцієнти при других похідних є дійсними сталими величинами (дорівнюють одиниці). Решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Достатні умови самоспряженості оператора виконані.

**Приклад 3.** Довести самоспряженість диференційного оператора $L_z = i\left( x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right)$. У квантовій механіці цей оператор відповідає $z$-компоненті оператора моменту імпульсу.

**Розв'язання.** Коефіцієнти при перших похідних уявні і не залежать від змінних, за якими ведеться диференціювання. Вони можуть бути винесені за знак похідної у виразі для спряженого оператора. Такий оператор збігається із своїм спряженим, а отже є самоспряженим.

## 2.3.Властивості власних функцій та власних значень

1.Якщо $f_n(x)$ є власною функцією, що відповідає власному числу $\lambda_n$, то $cf_n(x)$ ($c$ - довільна стала) так само є власною функцією, що відповідає тому самому власному числу $\lambda_n$.

2.Якщо $f_{n1}(x)$ та $f_{n2}(x)$ - власні функції, що відповідають власному числу $\lambda_n$, то їх довільна лінійна комбінація $c_1 f_{n1}(x) + c_2 f_{n2}(x)$ так само є власною функцією, що відповідає тому самому власному числу.

3.Власні функції $f_n(x)$ та $f_m(x)$, що відповідають різним власним числам $\lambda_n$ та $\lambda_m$ ($\lambda_n \neq \lambda_m$), ортогональні на проміжку $\lfloor a,b \rfloor$ з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\boxed{\left(\rho \mathrm{f_m}, \mathrm{f_n}\right) = \int_a^b \rho(\mathrm{x})\,\mathrm{f_m}(\mathrm{x})\,\mathrm{f_n}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 0}\,.$$

**Доведення.** За означенням власних функцій та власних чисел:

$$\hat{L} f_n(x) + \lambda_n \rho(x) f_n(x) = 0,$$

$$\hat{L} f_m(x) + \lambda_m \rho(x) f_m(x) = 0.$$

Помножимо перше з цих рівнянь скалярно зліва на $f_m(x)$, а друге на $f_n(x)$ і візьмемо різницю результатів

$$\left( f_m, \hat{L} f_n \right) + \lambda_n \left(\rho f_m, f_n\right) - \left( f_n, \hat{L} f_m \right) - \lambda_m \left(\rho f_n, f_m\right) = 0\,.$$

У силу самоспряженості задачі Штурма-Ліувіля

$$\left( f_m, \hat{L} f_n \right) = \left( f_n, \hat{L} f_m \right)$$

і попереднє рівняння набуває вигляду

$$(\lambda_n - \lambda_m)\left(\rho f_m, f_n\right) = 0.$$

Оскільки, за означенням, $\lambda_n \neq \lambda_m$, то

$$\left(\rho f_m, f_n\right) = 0,$$

що і потрібно було довести.

4.Всі власні числа задачі Штурма-Ліувіля дійсні.

**Доведення.** Припустимо, що $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ - власне число задачі Штурма-Ліувіля, а $f_n(x) = A_n(x) + iB_n(x)$ - власна функція, що відповідає цьому власному числу. Тоді

$$\hat{L}\left[A_n(x) + iB_n(x)\right] + (\alpha_n + i\beta_n)\rho(x)\left[A_n(x) + iB_n(x)\right] = 0,$$

або

$$\hat{L} A_n(x) + \alpha_n \rho(x) A_n(x) + i\left[\hat{L} B_n(x) + \beta_n \rho(x) B_n(x)\right] = 0.$$

Останнє комплексне рівняння рівноцінне двом дійсним рівнянням

$$\hat{L} A_n(x) + \alpha_n \rho(x) A_n(x) = 0,$$

$$\hat{L} B_n(x) + \beta_n \rho(x) B_n(x) = 0.$$

Віднявши від першого рівняння друге, помножене на $i$, матимемо

$$\hat{L} A_n(x) + \alpha_n \rho(x) A_n(x) - i\left[\hat{L} B_n(x) + \beta_n \rho(x) B_n(x)\right] = 0\ ,$$

або

$$\hat{L}\left[A_n(x) - iB_n(x)\right] + (\alpha_n - i\beta_n)\rho(x)\left[A_n(x) - iB_n(x)\right] = 0,$$

тобто $\lambda_n^* = \alpha_n - i\beta_n$ та $f_n^*(x) = A_n(x) - iB_n(x)$ є власним числом та власною функцією тієї самої задачі Штурма-Ліувіля, що і $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$ та $f_n(x) = A_n(x) + iB_n(x)$. Оскільки $\lambda_n^* \neq \lambda_n$, то відповідні власні функції мають бути ортогональними, тобто $\left(\rho f_n^*, f_n\right) = 0$. Але можна показати, що для $\rho(x) > 0$

$$\left(\rho\, f_n^{\,*}, f_n\right) = \left(\rho\, A_n, A_n\right) + \left(\rho\, B_n, B_n\right) > 0.$$

Протиріччя, що виникає, вирішується тільки тоді, коли $\lambda_n^{\,*} = \lambda_n$. Останнє можливе лише для дійсних власних чисел.

5.Всі власні числа задачі Штурма-Ліувіля невід'ємні

**Доведення**. Помножимо рівняння

$$\hat{L}\, f_n(x) + \lambda_n \rho(x) f_n(x) = 0$$

зліва скалярно на $f_n(x)$. У висліді одержимо

$$\left( f_n, \hat{L}\, f_n \right) + \lambda_n \left(\rho\, f_n, f_n\right) = 0,$$

звідки

$$\lambda_n = -\left( f_n, \hat{L}\, f_n \right) / \left(\rho\, f_n, f_n\right).$$

Скалярний добуток у знаменнику завжди додатний, а у чисельнику, згідно з зауваженням до теореми 3, недодатний, отже

$$\lambda_n \geq 0.$$

**Зауваження 1.** Для першої межової задачі $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ і жодний її ненульовий розв'язок, в силу його неперервності, не може бути сталою величиною. Відповідно і $df(x)/dx \neq 0$ для довільних значень аргументу. Отже, навіть для $q(x) = 0$

$$\left( f, \hat{L}\, f \right) = -\int_a^b k(x) \left[ \frac{df(x)}{dx} \right]^2 dx < 0.$$

У цьому випадку завжди

$$\lambda = -\left( f, \hat{L}\, f \right) / \left(\rho f, f\right) > 0$$

і $\lambda = 0$ не може бути власним числом задачі Штурма-Ліувіля.

**Зауваження 2.** Для другої межової задачі $df(a)/dx = 0$, $df(b)/dx = 0$, розв'язок $f(x)$ на проміжку $\lfloor a, b \rfloor$ може бути сталою величиною. Відповідно, для такого розв'язку на всьому проміжку може виконуватись рівність $df(x)/dx = 0$. У цьому випадку

$$\left(f,\hat{L}f\right)=-\int_a^b k(x)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2 dx=0$$

і $\lambda=0$ може бути власним числом задачі Штурма-Ліувіля.

**Зауваження 3.** Для третьої межової задачі

$$\left(f,\hat{L}f\right)=-\int_a^b k(x)\left[\frac{df(x)}{dx}\right]^2 dx<0$$

і власне число не може дорівнювати нулю.

6.Якщо функціонал

$$\mu=-(f,\hat{L}f)/(\rho f,f)$$

досягає свого найменшого значення на деякій функції, неперервній разом з своєю першою похідною, то ця функція є власною функцією задачі Штурма-Ліувіля, причому найменшою.

Властивості 1 - 6 вірні для довільної самоспряженої задачі. Якщо коефіцієнт $k(x)$ є неперервним разом з своєю першою похідною, то мають місце також наступні властивості.

7.Якщо для двох різних рівнянь Штурма-Ліувіля $k_1(x)\geq k_2(x)$, а решта коефіцієнтів збігається, то відповідні цим рівнянням власні числа задовольняють аналогічній нерівності $\lambda_n^{(1)}\geq\lambda_n^{(2)}$.

8.Якщо для двох різних рівнянь Штурма-Ліувіля $\rho_1(x)\geq\rho_2(x)$, а решта коефіцієнтів збігається, то відповідні цим рівнянням власні числа задовольняють нерівності $\lambda_n^{(1)}\leq\lambda_n^{(2)}$.

9.Із зменшенням проміжку $\lfloor a,b\rfloor$ власні числа першої межової задачі Штурма-Ліувіля не зменшуються, тобто, якщо $\lfloor a_2,b_2\rfloor\subset\lfloor a_1,b_1\rfloor$, то $\lambda_n^{(1)}\leq\lambda_n^{(2)}$.

10.Всі власні числа одновимірної межової задачі Штурма-Ліувіля є простими (невиродженими).

**Доведення.** Нехай $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є власними функціями одновимірної задачі Штурма-Ліувіля, що відповідають одному і тому ж власному числу $\lambda$. Це означає, що зазначені функції задовольняють одному і тому ж рівнянню

$$\hat{L}f_1(x)+\lambda\rho(x)f_1(x)=0,$$

$$\hat{L} f_2(x)+\lambda\rho(x) f_2(x)=0,$$

та одним і тим же межовим умовам. Візьмемо, наприклад, лівий кінець інтервалу $\lfloor a,b \rfloor$, де шукається розв'язок задачі Штурма-Ліувіля. Тут

$$\gamma_1 \frac{df_1(a)}{dx}+\gamma_2 f_1(a)=0, \qquad \gamma_1 \frac{df_2(a)}{dx}+\gamma_2 f_2(a)=0.$$

Природно припустити, що сталі величини $\gamma_1,\gamma_2$ одночасно не дорівнюють нулю. Якщо останні два рівняння розглянути як систему рівнянь відносно $\gamma_1,\gamma_2$, то в силу її однорідності вона має ненульовий розв'язок лише у випадку, коли визначник з коефіцієнтів цієї системи дорівнює нулю. Отже,

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & \dfrac{df_1(a)}{dx} \\ f_2(a) & \dfrac{df_2(a)}{dx} \end{vmatrix}=0.$$

Але це є визначник Вронського, складений з розв'язків одного і того ж лінійного однорідного диференційного рівняння. Він має ту властивість, що в усіх точках замкненого інтервалу одночасно або дорівнює нулю, або відмінний від нуля. У нашому випадку він дорівнює нулю для $x=a$, тому має дорівнювати нулю і в усіх інших точок інтервалу $\lfloor a,b \rfloor$. Тобто

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \dfrac{df_1(x)}{dx} \\ f_2(x) & \dfrac{df_2(x)}{dx} \end{vmatrix}=0.$$

Але остання умова є умовою лінійної залежності функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, що протирічить початковому припущенню про лінійну незалежність цих функцій. Це означає, що з точністю до довільного сталого множника функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ збігаються.

11.Власні функції задачі Штурма-Ліувіля утворюють повну систему функцій в класі функцій $L_2\lfloor a,b \rfloor$, для як их

$$\int_a^b \rho(x) f_n^{\,2}(x) dx<\infty$$

Повнота означає, що не існує жодної іншої функції, відмінної від власних функцій задачі Штурма-Ліувіля, яка була б ортогональна до них.

## 2.4.Функції Беселя та задача Штурма-Ліувіля

Розглянемо задачу Штурма-Ліувіля для рівняння Беселя:

$$\boxed{x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}+x\frac{df(x)}{dx}+(\lambda x^2-m^2)f(x)=0}$$

з межовими умовами першого та другого родів. Важливим для практики є пошук розв'язку на проміжку $[0,l]$. Надалі ми будемо аналізувати саме його. Не становить принципових труднощів і найбільш загальний випадок проміжку $[a,b]$. Розглянемо межові умови першого роду:

$$f(0)=0, \qquad f(l)=0.$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма -Ліувіля для першої межової задачі, ці власні числа можуть бути лише додатними. Як було показано вище, загальним розв'язком рівняння є

$$f_m(\lambda,x)=a_mJ_m(\sqrt{\lambda}x)+b_mN_m(\sqrt{\lambda}x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$a_mJ_m(0)+b_mN_m(0)=0,$$

$$a_mJ_m(\sqrt{\lambda}l)+b_mN_m(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

Оскільки цей розв'язок має бути обмеженим на кінцях проміжку $[0,l]$, а функція Ноймана має у початку координат особливу точку, то перша межова умова може бути виконана лише у випадку, якщо коефіцієнт $b_n=0$. При цьому друга межова умова набуває вигляду

$$a_mJ_m(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

Оскільки ми шукаємо ненульовий розв'язок рівняння Беселя, то хоча б один з коефіцієнтів цього розв'язку має бути відмінним від нуля. Це можливо лише у випадку, коли

$$J_m(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

Останнє рівняння може розглядатись як рівняння відносно $\lambda$. Його розв'язок можна записати так

$$\boxed{\lambda_{nm}=\left(\frac{\mu_{nm}}{l}\right)^2},$$

де $\mu_{mm}$ є $n$-им нулем функції Беселя $m$ - го порядку. До речі, якщо порівнювати цей результат з аналогічним результатом для першої межової задачі на проміжку $[0,l]$, власними функціями якої є синуси, то її власні числа теж можна записати у вигляді $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2$, де $\mu_m = n\pi$ - нулі синуса Відповідні знайденим власним числам рівняння Беселя, власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_{nm}(x) = J_m(\sqrt{\lambda_{nm}}\, x)}\,.$$

У випадку довільного проміжку $[a,b]$ нам би довелось для знаходження власних чисел розв'язати наступне трансцендентне рівняння

$$\begin{vmatrix} J_m(\sqrt{\lambda}a & N_m(\sqrt{\lambda}a) \\ J_m(\sqrt{\lambda}b) & N_m(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

При цьому, один з коефіцієнтів $a_m, b_m$ має бути вираженим через інший за допомогою однієї з межових умов.

Розглянемо тепер межові умови другого роду:

$$df(0)/dx = 0, \qquad df(l)/dx = 0.$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма -Ліувіля для другої граничноъ задачі, ці власні числа можуть бути лише невід'ємними. Загальний розв'язок має вигляд

$$f_m(\lambda,,x) = a_m J_m(\sqrt{\lambda}x) + b_m N_m(\sqrt{\lambda}x),$$

Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$a_m d\, J_m(0)/dx + b_m d\, N_m(0)/dx = 0,$$

$$a_m d\, J_m(\sqrt{\lambda}l)/dx + b_m d\, N_m(\sqrt{\lambda}l)/dx = 0.$$

Оскільки розв'язок має бути обмеженим на кінцях проміжку $[0,l]$, а функція Ноймана та її похідна мають у початку координат особливу точку, то перша межова умова може бути виконана лише у випадку, якщо коефіцієнт $b_n = 0$. При цьому друга межова умова набуває вигляду

$$a_m d\, J_m(\sqrt{\lambda}l)/dx = 0.$$

Оскільки ми шукаємо ненульовий розв'язок рівняння Беселя, то хоча б один з його коефіцієнтів має бути відмінним від нуля. Це можливо лише у випадку, коли

$$dJ_m(\sqrt{\lambda}l)/dx = 0.$$

Останнє рівняння може розглядатись як рівняння відносно $\lambda$. Його розв'язок можна записати так

$$\boxed{\tilde{\lambda}_{nm} = \left(\frac{\nu_{nm}}{l}\right)^2},$$

де $\nu_{nm}$ є $n$-им нулем похідної функції Беселя $m$ - го порядку. Нулі похідної функції Беселя можна пов'язати з нулями функцій Беселя за допомогою наступних рекурентних співвідношень, які для функцій Беселя цілого порядку ($m$ - ціле) мають вигляд:

$$\boxed{\mathrm{d\,J_m}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x})/\mathrm{dx} = \mathrm{J_{m-1}}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x}) - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{x}}\mathrm{J_m}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x})},$$

$$\boxed{\mathrm{d\,J_m}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x})/\mathrm{dx} = -\mathrm{J_{m+1}}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x}) + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{x}}\mathrm{J_m}(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{x})}.$$

Відповідні цим власним числам власні функції є

$$\boxed{\mathrm{f_{nm}(x)} = \mathrm{J_m}(\sqrt{\tilde{\lambda}_{nm}}\,\mathrm{x})}.$$

У випадку довільного проміжку $[a,b]$, нам би довелось для знаходження власних чисел розв'язати наступне трансцендентне рівняння

$$\begin{vmatrix} dJ_m(\sqrt{\lambda}a/dx & dN_m(\sqrt{\lambda}a)/dx \\ dJ_m(\sqrt{\lambda}b)/dx & dN_m(\sqrt{\lambda}b)/dx \end{vmatrix} = 0.$$

При цьому один з коефіцієнтів $a_m, b_m$ має бути вираженим через інший за допомогою однієї з межових умов. Аналогічним чином можуть бути розглянуті і межові умови третього роду.

## 2.5.Узагальнена одновимірна задача Штурма-Ліувіля

Класична задача Штурма-Ліувіля не дозволяє безпосередньо розглянути випадок неоднорідних межових умов, до якого, зокрема, належать розв'язки у вигляді ортогональних поліномів. Виявляється, що всі розглянуті вище властивості власних чисел і власних функцій зберігаються при розгляді узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. Ця задача складається з рівняння Штурма-Ліувіля

$$\hat{L}\,f(x) + \lambda\rho(x)\,f(x) = 0$$

та наступних узагальнених межових умов третього роду:

$$k(x)\left[\gamma_1 \frac{df(a)}{dx} + \gamma_2 f(a)\right] = 0, \quad k(x)\left[\gamma_1 \frac{df(b)}{dx} + \gamma_2 f(b)\right] = 0.$$

При цьому функція $f(x)$ має бути не тільки неперервною разом з першою та другою похідними, а також мати інтегрований квадрат з вагою $\rho(x)$. Останнє означає, що ця функція одночасно є елементом лінійних функційних просторів $C_2[a,b]$ та $L_2[a,b]$.

Перевіримо самоспряженість узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. Для цього обчислимо наступні два скалярні добутки:

$$\left(f_n, \hat{L} f_m\right) = -\int_a^b k(x) \frac{df_n(x)}{dx} \frac{df_m(x)}{dx} dx -$$

$$-\int_a^b q(x) f_n(x) f_m(x) dx +$$

$$+k(b) f_n(b) \frac{df_m(b)}{dx} - k(a) f_n(a) \frac{df_m(a)}{dx},$$

$$\left(f_m, \hat{L} f_n\right) = -\int_a^b k(x) \frac{df_n(x)}{dx} \frac{df_m(x)}{dx} dx -$$

$$-\int_a^b q(x) f_n(x) f_m(x) dx +$$

$$+k(b) f_m(b) \frac{df_n(b)}{dx} - k(a) f_n(a) \frac{df_m(a)}{dx}.$$

Для узагальнених межових умов третього роду відповідні доданки збігаються. Дійсно, для першого скалярного добутку

$$k(a) f_n(a) \frac{df_m(a)}{dx} - k(b) f_n(b) \frac{df_m(b)}{dx} =$$

$$= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left[k(a) f_n(a) f_m(a) - k(b) f_n(b) f_m(b)\right].$$

Для другого скалярного добутку

$$k(a) f_m(a) \frac{df_n(a)}{dx} - k(b) f_m(b) \frac{df_n(b)}{dx} =$$

$$=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\left[k(a)f_m(a)f_n(a)-k(b)f_m(b)f_n(b)\right].$$

У висліді має місце наступна рівність

$$\left(f_n,\hat{L}\,f_m\right)=\left(f_m,\hat{L}\,f_n\right),$$

яка є умовою самоспряженості задачі.

Елементарні та багато спеціальних функцій є розв'язками саме узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. Розглянемо деякі з них. Так, для $k(x)=1,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$, ми одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\lambda f(x)=0,$$

розв'язками якого є тригонометричні та гіперболічні функції. Для нього класичні та узагальнені межові умови третього роду збігаються.

Для $k(x)=x,\ q(x)=\alpha^2/x,\ \rho(x)=x$ ми одержуємо рівняння Беселя

$$x\frac{d}{dx}\left[x\frac{df(x)}{dx}\right]+(\lambda x^2-\alpha^2)f(x)=0\ .$$

Узагальнені межові умови третього роду для цього рівняння мають вигляд:

$$a\left[\gamma_1\frac{df(a)}{dx}+\gamma_2 f(a)\right]=0,\qquad b\left[\gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)\right]=0.$$

Для рівняння Беселя класичні та узагальнені межові умови третього роду практично теж збігаються.

Розглянемо тепер декілька випадків, коли виконуються лише узагальнені межові умови третього роду.

Для $k(x)=1-x^2,\ q(x)=0,\ \rho(x)=1$ ми одержуємо рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right]+\lambda f(x)=0\ .$$

Узагальнені межові умови третього роду будуть мати для рівняння Лежандра наступний вигляд:

$$(1-a^2)\left[\gamma_1\frac{df(a)}{dx}+\gamma_2 f(a)\right]=0,\ \ (1-b^2)\left[\gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)\right]=0.$$

Ці межові умови автоматично задовольняються для поліномів Лежандру, якщо $a=-1,\ \ b=1$. Це одна з причин, чому проміжок $[-1,1]$ грає для поліномів Лежандра особливу роль. Тільки у цьому частинному випадку задача на пошук власних функцій та власних чисел може бути сформульована як задача Штурма-Ліувіля. Отже, поліноми Лежандру є власними функціями узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. При цьому, у загальному випадку, вони задовольняють неоднорідним класичним межовим умовам першого, другого або третього роду і не можуть розглядатись як власні функції класичної задачі Штурма-Ліувіля. Аналогічна ситуація має місце і для рівняння Лежандра для приєднаних поліномів Лежандру.

Для $k(x)=\exp(-x^2)$, $q(x)=0$, $\rho(x)=\exp(-x^2)$ ми одержуємо рівняння Ерміта

$$\frac{d}{dx}\left[\exp(-x^2)\frac{df(x)}{dx}\right]+\lambda\exp(-x^2)f(x)=0 .$$

Узагальнені межові умови третього роду для цього рівняння, на проміжку $(-\infty,\infty)$, мають вигляд:

$$\lim_{a\to-\infty}\exp(-a^2)\left[\gamma_1\frac{df(a)}{dx}+\gamma_2 f(a)\right]=0,$$

$$\lim_{b\to\infty}\exp(-b^2)\left[\gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)\right]=0.$$

Очевидно, що вони автоматично виконуються лише для поліномів Ерміта і не виконуються для функцій Ерміта. Таким чином, поліноми Ерміта є власними функціями узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. Для будь-якого іншого проміжку, крім проміжку $(-\infty,\infty)$, задача на пошук власних функцій та власних чисел не може бути сформульована як задача Штурма-Ліувіля.

Для $k(x)=x\exp(-x)$, $q(x)=0$, $\rho(x)=\exp(-x)$ ми одержуємо рівняння Лагера

$$\frac{d}{dx}\left[x\exp(-x)\frac{df(x)}{dx}\right]+\lambda\exp(-x)f(x)=0 .$$

Узагальнені межові умови третього роду для цього рівняння на проміжку $[a,\infty)$ мають вигляд:

$$a\exp(-a)\left[\gamma_1\frac{df(a)}{dx}+\gamma_2 f(a)\right]=0,$$

$$\lim_{b\to\infty}b\exp(-b)\left[\gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)\right]=0.$$

Очевидно, що для $a=0$ вони автоматично виконуються для поліномів Лагера і не виконуються для функцій Лагера другого роду. Таким чином, поліноми Лагера є власними функціями узагальненої задачі Штурма-

Ліувіля. Для будь-якого іншого проміжку, крім проміжку $[0,\infty)$, задача на пошук власних функцій та власних чисел не може бути сформульована як задача Штурма-Ліувіля. Очевидно, що поліноми Ерміта та Лагера не можуть розглядатись як власні функції класичної задачі Штурма-Ліувіля.

## 2.6.Тривимірна задача Штурма-Ліувіля

Розглянемо наступне лінійне однорідне диференційне рівняння з частинними похідними

$$\boxed{\hat{\mathrm{L}}\mathrm{f}(\mathbf{r})+\lambda\rho(\mathbf{r})\mathrm{f}(\mathbf{r})=0},$$

де лінійний оператор $\hat{L}$ має вигляд

$$\boxed{\hat{\mathrm{L}}=\mathrm{div}\Big[\mathrm{k}(\mathbf{r})\,\mathrm{grad}\Big]-\mathrm{q}(\mathbf{r})}.$$

Тут $\mathbf{r}$ - тривимірний радіус - вектор, $k(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ є неперервними функціями у трьохвимірній області $D$, у якій шукається розв'язок рівняння. Крім того, $k(\mathbf{r})>0$, $q(\mathbf{r})\geq 0$, $\rho(\mathbf{r})>0$. Неперервність разом з її першими та другими частинними похідними вимагається і від функції $f(\mathbf{r})$. Наведені обмеження на всі ці функції є лише достатніми умовами існування власних чисел і власних функцій задачі Штурма-Ліувіля та їх властивостей. У декартовій системі координат:

$$\boxed{\mathrm{div}\Big[\mathbf{A}(\mathbf{r})\Big]=\frac{\partial \mathrm{A_x}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{A_y}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{A_z}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{z}}},$$

$$\boxed{\mathrm{grad}\Big[\mathrm{f}(\mathbf{r})\Big]=\mathbf{i}\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{x}}+\mathbf{j}\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{y}}+\mathbf{k}\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{z}}}.$$

**Зауваження.** Якщо коефіцієнт рівняння $k(\mathbf{r})$ є сталою величиною, то диференційний оператор суттєво спрощується, оскільки

$$\boxed{\mathrm{div}\Big[\mathrm{grad}\Big]=\Delta},$$

де оператор Лапласа у декартовій системі координат

$$\boxed{\Delta=\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2}+\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}}.$$

Відповідне рівняння Штурма-Ліувіля набере вигляду

$$\boxed{\Delta\mathrm{f}(\mathbf{r})-\mathrm{q}(\mathbf{r})\mathrm{f}(\mathbf{r})+\lambda\rho(\mathbf{r})\mathrm{f}(\mathbf{r})=0}.$$

Якщо при цьому і $q(\mathbf{r})=0$, то розв'язок рівняння Штурма-Ліувіля зводиться до пошуку власних чисел і власних функцій оператора Лапласа, тобто розв'язку рівняння Гельмгольца

$$\boxed{\Delta \mathrm{f}(\mathbf{r})+\lambda\rho(\mathbf{r})\mathrm{f}(\mathbf{r})=0}.$$

Саме до такої задачі дуже часто зводиться розв'язок межової задачі для рівнянь теплопровідності, дифузії, поперечних коливань струни, повздовжніх коливань стрижня і т. і.

Трьохвимірне рівняння Штурма-Ліувіля теж дозволяє дослідження властивостей його розв'язків без конкретного їх знаходження. Очевидно, що ці властивості мають залежати не тільки від вигляду рівняння, але і від додаткових умов, яким мають задовольняти їх розв'язки. У класичній задачі Штурма-Ліувіля в якості такої умови на поверхні $S$, що обмежує область $D$, береться однорідна межова умова третього роду, а саме

$$\boxed{\left[\gamma_1(\mathbf{r})\frac{\mathrm{df}(\mathbf{r})}{\mathrm{dn}}+\gamma_2(\mathbf{r})\,\mathrm{f}(\mathbf{r})\right]_{\mathrm{S}}=0},$$

де $\gamma_1,\gamma_2$ - довільні неперервні функції, а похідна береться вздовж зовнішньої нормалі до поверхні.

При наявності межових умов задача Штурма-Ліувіля матиме ненульові розв'язки лише при певних значеннях коефіцієнта $\lambda$ рівняння Штурма-Ліувіля. Такі значення цього коефіцієнта, як і у одновимірному випадку, називаються власними числами задачі Штурма-Ліувіля, а відповідні їм ненульові розв'язки - власними функціями цієї задачі.

При наведених вище межових умовах, та умовах, яким задовольняють коефіцієнти рівняння Штурма – Ліувіля, мають місце наступні теореми, які у більшості випадків просто аналогічні відповідним властивостям власних чисел та функцій одновимірної задачі Штурма-Ліувіля. Тому обмежимося лише їх переліком, полишаючи доведення. Принципово останні абсолютно еквівалентні одновимірному випадку.

**Теорема 1.** Існує нескінченна (злічена) множина власних чисел $\{\lambda_n\}$, $n=1,2,\ldots$ та власних функцій $\{f_n\}$ тривимірної задачі Штурма-Ліувіля.

**Теорема 2** (теорема про розкладність). Довільна функція $\Phi(\mathbf{r})$, неперервна в області $D$ разом з своєю першою похідною, може бути розкладена в ряд Фур'є за власними функціями тривимірної задачі Штурма – Ліувіля. При цьому, цей ряд збігається абсолютно і рівномірно в області $D$. Останнє означає, що власні функції задачі Штурма-Ліувіля утворюють базис відповідного лінійного функціонального простору і

$$\boxed{\Phi(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(\mathbf{r})},$$

де коефіцієнти Фур'є цього ряду

$$c_n=\frac{1}{\|f_n\|^2}\int_D \Phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})f_n(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$

Тут

$$\|f_n\|^2=\int_D \rho(\mathbf{r})f_n^{\;2}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

-квадрат норми елементів базису.

**Теорема 3** (про самоспряженість). Тривимірна задача Штурма-Ліувіля є самоспряженою задачею. Це означає, що має місце рівність:

$$\left(f_n,\hat{L}\,f_m\right)=\left(f_m,\hat{L}\,f_n\right).$$

**Зауваження .** Наведені результати дозволяють зробити висновок, що як і у випадку одновимірної задачі Штурма-Ліувіля, скалярний добуток

$$\left(f_n,\hat{L}\,f_n\right)\le 0.$$

4.Якщо $f_n(\mathbf{r})$ є власною функцією, що відповідає власному числу $\lambda_n$, то $cf_n(\mathbf{r})$ ($c$ - довільна стала) так само є власною функцією, що відповідає тому самому власному числу $\lambda_n$.

5.Якщо $f_{n1}(\mathbf{r})$ та $f_{n2}(\mathbf{r})$ - власні функції, що відповідають власному числу $\lambda_n$, то їх довільна лінійна комбінація $c_1 f_{n1}(\mathbf{r})+c_2 f_{n2}(\mathbf{r})$ теж є власною функцією, що відповідає тому самому власному числу $\lambda_n$.

6.Власні функції $f_n(\mathbf{r})$ та $f_m(\mathbf{x})$, що відповідають різним власним числам $\lambda_n$ та $\lambda_m$, ортогональні в області $D$ з вагою $\rho(\mathbf{r})$, тобто

$$\left(\rho f_m,f_n\right)=\int_D \rho(\mathbf{r})f_m(\mathbf{r})f_n(\mathbf{r})d\mathbf{r}=0\ .$$

7.Всі власні числа тривимірної задачі Штурма-Ліувіля дійсні.

8.Всі власні числа задачі Штурма-Ліувіля невід'ємні

**Зауваження.** Для першої та третьої межової задачі власні числа є додатними. Для другої межової задачі вони є невід'ємними.

9.Якщо функціонал

$$\mu = -(\varphi, \hat{L}\varphi)/(\rho\varphi, \varphi)$$

досягає свого найменшого значення на деякій функції, неперервній разом з першою похідною, то ця функція є власною функцією задачі Штурма-Ліувіля, причому найменшою.

Наступні властивості вірні якщо коефіцієнт рівняння Штурма–Ліувіля $k(\mathbf{r})$ є неперервним разом з своєю першою похідною.

10.Якщо для двох різних рівнянь Штурма-Ліувіля $k_1(\mathbf{r}) \geq k_2(\mathbf{r})$, а решта коефіцієнтів збігаються, то відповідні цим рівнянням власні числа задовольняють аналогічній нерівності $\lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n^{(2)}$.

11.Якщо для двох різних рівнянь Штурма-Ліувіля $\rho_1(\mathbf{r}) \geq \rho_2(\mathbf{r})$, а решта коефіцієнтів збігаються, то відповідні цим рівнянням власні числа задовольняють нерівності $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$.

12.Із зменшенням області $D$ власні числа першої межової задачі Штурма-Ліувіля не зменшуються, тобто, якщо $D_2 \subset D_1$, то $\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(2)}$.

13.Власні числа тривимірної межової задачі Штурма-Ліувіля можуть бути виродженими. У цьому разі одному власному числу відповідає стільки власних функцій, яка кратність виродження даного власного числа.

**Зауваження.** Цей пункт принципово відрізняє одновимірну та будь - яку багатовимірну задачі Штурма-Ліувіля.

## 2.7.Повнота власних функцій задачі Штурма-Ліувіля

Ця властивість власних функцій задачі Штурма-Ліувіля, що лежить в основі теореми про розкладність, є настільки важливою, що ми розглянемо її більш детально. Саме вона робить задачу Штурма-Ліувіля важливим інструментом для введення у розгляд нових базисів у відповідному функційному просторі.

Власні функції межової задачі, що не є задачею Штурма-Ліувіля, не обов'язково утворюють повну систему функцій, а отже, не завжди, можуть служити базисом для розвинення функцій у ряд Фур'є.

**Означення.** Система функцій, попарно ортогональних з вагою $\rho(\mathbf{r})$, тут радіус - вектор може мати довільну розмірність, є повною в області $D$, якщо для довільної функції $f(\mathbf{r})$ з інтегрованим у $D$ квадратом має місце рівність

$$\boxed{\int_D f^2(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\,2}\left\| f_n(\mathbf{r}) \right\|^2},$$

де $C_n$ - коефіцієнти Фур'є функції $f(\mathbf{r})$ за базисом $\{f_n(\mathbf{r})\}$. Отже, яку б задачу Штурма-Ліувіля ми не розв'язали, її власні функції утворюють повний базис у відповідному функційному просторі. Розглянемо декілька прикладів. Перший з них відповідає задачі Штурма-Ліувіля, власними функціями якої є тригонометрична система функцій, а саме

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \lambda f(x) = 0,$$

з межовими умовами першого роду:

$$f(-\pi) = 0, \qquad f(\pi) = 0.$$

Як зазначалось вище, власними функціями цієї задачі є функції:

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n = 1,3,\ldots$$

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n = 2,4\ldots.$$

На основі повноти цієї системи функцій, довільну функцію з інтегрованим квадратом на $[-\pi,\pi]$ можна розкласти у тригонометричний ряд Фур'є.

Розглянемо тепер межову задачу, що мало, на перший погляд, відрізняється від попередньої, а саме ще однією додатковою умовою:

$$f(x) = -f(-x).$$

Ця умова вимагає, щоб всі власні функції були непарними. Саме вона не дозволяє вважати таку задачу класичною задачею Штурма-Ліувіля. Власними функція цієї задачі будуть наступні тригонометричні функції:

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n = 2,4,\ldots,$$

які не утворюють повну систему у просторі функцій з інтегрованим квадратом $L_2[-\pi,\pi]$. Іншими словами, їх недостатньо для розвинення довільної функції з $L_2[-\pi,\pi]$ у тригонометричний ряд Фур'є.

Аналогічна ситуація виникає у випадку, коли додатковою умовою стає умова парності власних функцій:

$$f(x) = f(-x).$$

Тоді власними функціями будуть інші тригонометричні функції:

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}x\right), \quad n = 1,3,\ldots,$$

яких теж замало для побудови ряду Фур'є на проміжку $[-\pi,\pi]$.

При використанні функцій, що не є власними функціями задачі Штурма-Ліувіля, корисною є наступна достатня умова повноти системи власних функцій.

**Означення** Нехай $S_n = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n$ - лінійна комбінація скінченої сукупності функцій з їх нескінченної множини $\{f_n\}$. Якщо довільна неперервна функція $f(\mathbf{r})$ з довільною наперед заданою точністю, у сенсі середньоквадратичного наближення, може бути представлена відповідною скінченою лінійною комбінацією $S_n(\mathbf{r})$, то система функцій $\{f_n\}$ є повною.

Сказане означає, що якщо для довільного $\varepsilon > 0$ можна підібрати таке скінчене $n$, починаючи з якого буде виконуватись наступна умова

$$\int_D \rho(\mathbf{r})[f(\mathbf{r}) - S_n(\mathbf{r})]^2 d\mathbf{r} < \varepsilon,$$

тобто функція і лінійна комбінація скінченої кількості базисних функцій відрізняються як завгодно мало, то система власних функцій буде повною.

Отже властивості повної системи функцій формуються, в основному, за рахунок скінченої підмножини нескінченої множини цих функцій.

З повноти системи функцій випливає наступна важлива теорема.

**Теорема.** Якщо система попарно ортогональних у $D$ функцій є повною, то ряд Фур'є для довільної функції з інтегрованим у $D$ квадратом можна інтегрувати членами.

При цьому відповідний ряд може не збігатись рівномірно, або навіть не збігатись у деяких точках. Останнє означає, що при інтегруванні ряду членами його локальні властивості не грають жодної ролі, якщо він збігається до відповідної функції у середньоквадратичному сенсі, тобто інтегрально.

Відмінність межової задачі від задачі Штурма-Ліувіля приводить до втрати власними числами і власними функціями цієї задачі частини властивостей власних чисел і власних функцій задачі Штурма-Ліувіля. Розглянемо декілька простих прикладів межових задач відмінних від задачі Штурма-Ліувіля.

### 2.8.Приклади задач, що не є задачами Штурма-Ліувіля

**Приклад 1.** Розглянемо наступну межову задачу

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+2\alpha\frac{df(x)}{dz}+\lambda f(x)=0\ ,\ \alpha>0$$

з межовими умовами першого роду:

$$f(a)=0, \qquad f(b)=0.$$

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2+2\alpha k+\lambda=0\ .$$

Його коренями є

$$k_1=-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda}\ , \qquad k_2=-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda}\ .$$

Тепер загальний розв'язок рівняння можна записати так

$$f(x)=A\exp[(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda})x]+B\exp[(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda})x]\ .$$

Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно довільних сталих $A,B$:

$$f(a)=A\exp[(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda})a]+B\exp[(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda})a]=0\ ,$$

$$f(b)=A\exp[(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda})b]+B\exp[(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda})b]=0\ .$$

Оскільки цей розв'язок, за умовою, має бути ненульовим, то хоча б один з його коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише у випадку, коли визначник цієї системи дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \exp[(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda})a] & \exp[(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda})a] \\ \exp[(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\lambda})b] & \exp[(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\lambda})b] \end{vmatrix}=0.$$

Обчислюючи визначник, після очевидного спрощення одержимо

$$\exp(\sqrt{\alpha^2-\lambda}\,a)\exp(-\sqrt{\alpha^2-\lambda}\,b)$$

$$-\exp(-\sqrt{\alpha^2-\lambda}\,a)\exp(\sqrt{\alpha^2-\lambda}\,b)=0.$$

Останнє рівняння у випадку

$$\alpha^2-\lambda>0$$

має лише нульові розв'язки. Тому розглянемо протилежний випадок. Для простоти введемо позначення

$$\sqrt{\alpha^2-\lambda}=i\omega\ ,$$

де

$$\omega=\sqrt{\lambda-\omega^2}\ .$$

Тепер останнє рівняння можна записати так

$$\exp[-i\omega(b-a)]-\exp[i\omega(b-a)]=0\ ,$$

або, використовуючи формулу Ейлера для синуса, у вигляді

$$\sin[\omega(b-a)]=0 .$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$\omega(b-a)=\sqrt{\lambda-\alpha^2}(b-a)=n\pi .$$

Оскільки ліва частина цієї рівності додатна, то додатною має бути і права частина. Це можливо, коли $n=1,2,\ldots$. Випадок $n=0$ розглядається окремо. Отже, одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n=\alpha^2+\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}} .$$

При цьому

$$\omega_n=\frac{n\pi}{b-a} .$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{\mathrm{f_n(x)=exp(}-\alpha\,\mathrm{x)[A_n\cos(}\omega_n\mathrm{x)+B_n\sin(}\omega_n\mathrm{x)]}} ,$$

при цьому один з коефіцієнтів $A, B$ може бути вираженим через інший за допомогою або першої, або другої межових умов, наприклад

$$A_n\cos(\omega_m a)+B_n\sin(\omega_m a)=0 .$$

Звідси

$$B_n=-A_n\cot(\omega_n a) .$$

У випадку $n=0$, що відповідає $\lambda_0=\alpha^2,\ \omega_0=0$ , власна функція повинна була б мати вигляд

$$f_0(x)=A_0\exp(-\alpha x) .$$

Але підставивши її у межові умови

$$f_0(a)=A_0\exp(-\alpha a)=0 ,$$

$$f_0(b)=A_0\exp(-\alpha b)=0 ,$$

легко переконатись, що вони задовольняються лише у випадку, коли

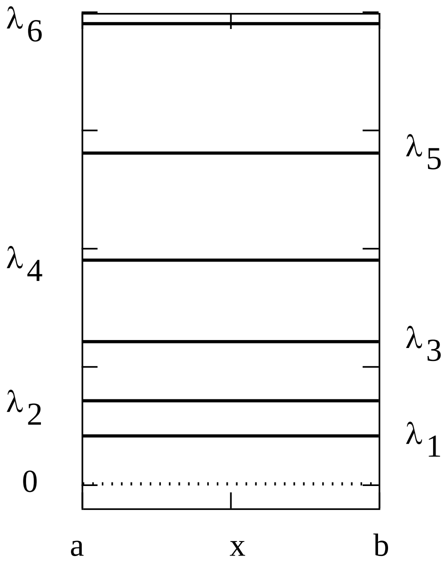
$$A_0=0.$$

Отже, $\lambda_0=\alpha^2$ не є власним числом даної межової задачі.

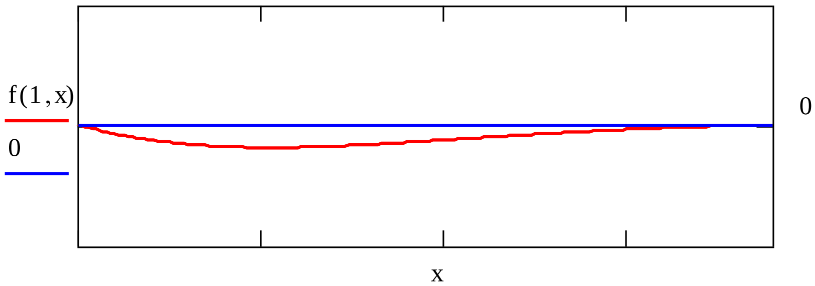
Отримані нами власні числа і власні функції мають більшість властивостей власних функцій і власних чисел задачі Штурма-Ліувіля. При цьому зауважимо, що відсутня така важлива властивість власних функцій як їх ортогональність, що різко зменшує можливість їх використання в якості базису для розвинення інших функцій у ряд Фур'є. Якщо $\alpha\to 0$ , то наша задача переходить у задачу Штурма-Ліувіля. Отже, спектр власних чисел нашої задачі відрізняється від спектру задачі Штурма-Ліувіля зсувом на додатну величину $\alpha^2$.

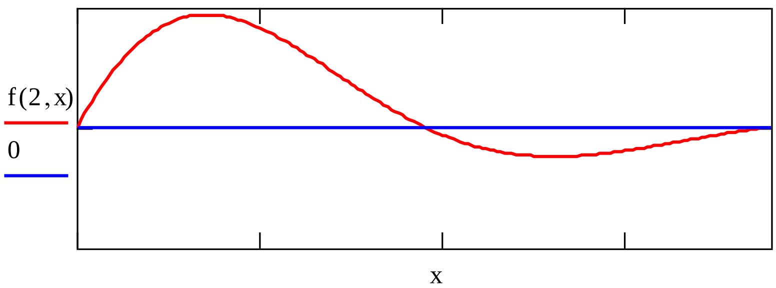
Аналогічно попередньому, можуть бути розглянуті випадки межових умов другого та третього родів.

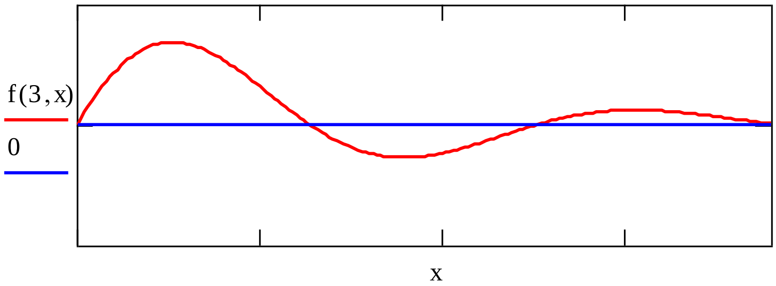
Графіки спектру власних чисел та власних функцій наведені нижче.

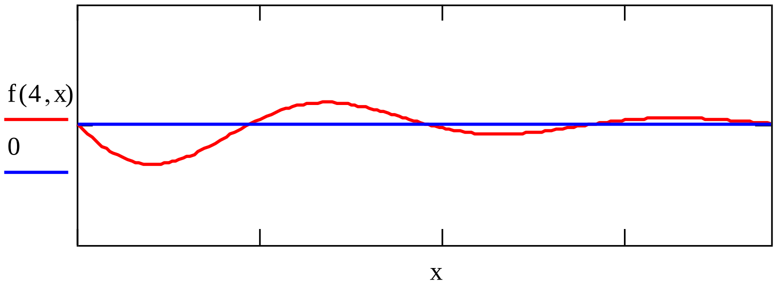



**Малюнок 20.** *Власні числа першої межової задачі*






**Малюнок 21.** *Власні функції першої межової задачі*

**Приклад 2.** Розглянемо наступну межову задачу

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \lambda f(x) = 0\,, \qquad \alpha > 0$$

з межовими умовами першого роду:

$$f(-l) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f(l) = 0.$$

(Кількість межових умов має збігатись з порядком старшої похідної і вони можуть задаватись у довільних точках проміжку, де шукається розв'язок, а не тільки на його кінцях).

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^3 + \lambda = 0\,.$$

Розглянемо послідовно випадки, коли $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ . Для першого з них $\lambda$ можна представити у показниковій формі так

$$\lambda = \lambda \exp(i\,2\pi n)$$

і характеристичне рівняння має такі можливі значення кореня

$$k_n = \sqrt[3]{\lambda} \exp\left(i\,\frac{2}{3}\pi n\right).$$

Надавши $n$ три послідовні значення, наприклад $n = -1{,}0{,}1$, одержимо три різних значення кореня:

$$k_1 = \sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad k_2 = \sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad k_3 = -\sqrt[3]{\lambda} \ .$$

Тепер загальний розв'язок рівняння можна записати так

$$f(x) = A\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right] + B\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right] +$$
$$+C\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}x\right].$$

Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно довільних сталих $A, B, C$:

$$f(0) = A + B + C = 0\,,$$

$$f(l) = A\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] + B\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] +$$
$$+C\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}l\right] = 0\,.$$

$$f(-l) = A\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] + B\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] +$$
$$+C\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}l\right] = 0\,.$$

Умовою існування у системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь ненульового розв'язку, тобто ненульових значень $A, B, C$, є рівність нулю визначника системи. Отже,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] & \exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] & \exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}l\right] \\ \exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] & \exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right] & \exp\left[\sqrt[3]{\lambda}l\right] \end{vmatrix} = 0$$

Обчислюючи визначник, після очевидного спрощення одержимо

$$\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{3}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right]-\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{3}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right]-$$

$$-\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{3}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right]+\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\left(\frac{3}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l\right]+$$

$$+\exp\left[i\sqrt[3]{\lambda}\sqrt{3}l\right]-\exp\left[-i\sqrt[3]{\lambda}\sqrt{3}l\right]=0\ .$$

Використовуючи формулу Ейлера для синуса, маємо

$$-\exp\left[\sqrt[3]{\lambda}\frac{3}{2}l\right]\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)-\exp\left[-\sqrt[3]{\lambda}\frac{3}{2}l\right]\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)+$$

$$+\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\sqrt{3}l\right)=0\ ,$$

або

$$2\cosh\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{3}{2}l\right)\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)-\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\sqrt{3}l\right)=0\ ,$$

або, використовуючи відому тригонометричну формулу,

$$\left[\cosh\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{3}{2}l\right)-\cos\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)\right]\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)=0\ .$$

У випадку $\lambda>0$ нулю може дорівнювати лише синус, отже

$$\sin\left(\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)=0\ .$$

Це можливо лише у випадку

$$\sqrt[3]{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}l=n\pi\ ,\qquad n=1,2,3...$$

Звідси одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n=\frac{8}{3^{3/2}}\frac{n^3\pi^3}{l^3}}\ .$$

Можна показати, що і у випадку $\lambda<0$ спектр власним чисел існує і визначається попередньою формулою. Окремого розгляду вимагає випадок $\lambda=0$. Загальний розв'язок матиме вигляд

$$f(x)=Ax^2+Bx+C\ .$$

Межові умови дають наступні три рівняння відносно коефіцієнтів $A, B, C$ :

$$C = 0,$$
$$Al^2 + Bl = 0,$$
$$Al^2 - Bl = 0 .$$

Ця система має, очевидно, лише нульовий розв'язок. Таким чином, $\lambda = 0$ не є власним числом даної межової задачі.

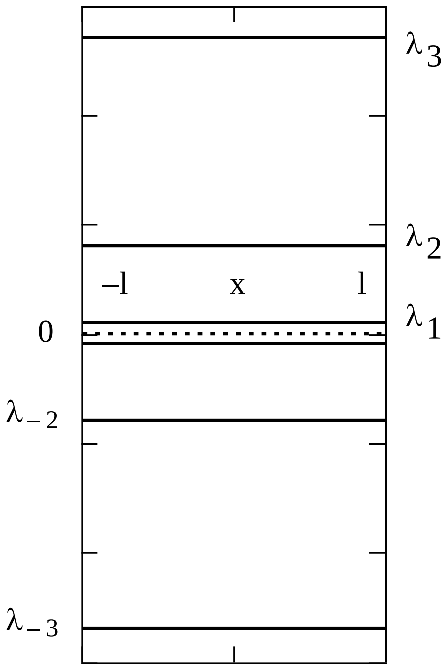
Якщо знайдені власні числа підкласти у загальний розв'язок, а довільні дві з трьох межових умов використати для знаходження зв'язку між коефіцієнтами $A, B, C$ , то відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}, \quad n \in Z .$$

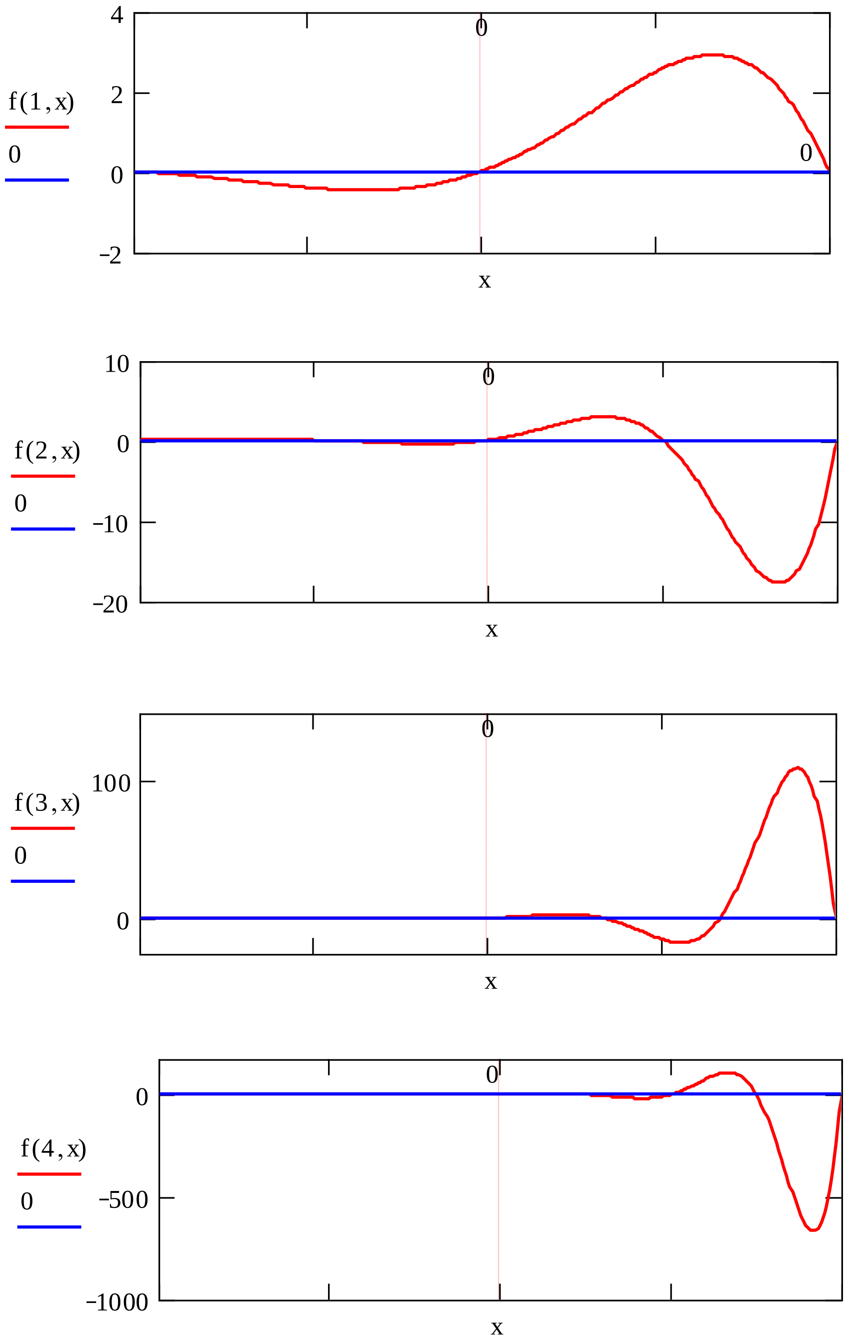
Отримані нами власні числа і власні функції мають багато властивостей власних функцій і власних чисел задачі Штурма-Ліувіля. При цьому відсутня така важлива властивість власних функцій як їх ортогональність. Крім того, власні числа можуть бути не лише додатними, як у задачі Штурма-Ліувіля, але і від'ємними. Нульове власне число відсутнє.

Аналогічно попередньому, можуть бути розглянуті випадки інших межових умов.

Графіки спектру власних чисел та власних функцій наведені нижче.




**Малюнок 22.** *Власні числа першої межової задачі*




**Малюнок 23.** *Власні функції першої межової задачі*

# Глава 3.Ряди Фур'є.

Як було показано вище, елементарні та спеціальні функції є розв’язками звичайних лінійних однорідних диференційних рівнянь з сталими або змінними коефіцієнтами. Ортогональність та повнота цих функцій, яка у багатьох випадках є просто наслідком того, що вони є власними функціями задачі Штурма-Ліувіля, дозволяє розкладати у ряди за ними інші функції. Ця обставина є особливо важливою при розв’язанні звичайних лінійних неоднорідних диференційних рівнянь. Використання таких розвинень є основним методом їх розв’язання і одним з найважливіших застосувань спеціальних функцій у математичній фізиці.

З іншого боку, деякі спеціальні функції (ортогональні поліноми) можуть бути введені безвідносно до диференційних рівнянь, розв’язками яких вони є, а лише шляхом ортогоналізації з тою чи іншою ваговою функцією на тому чи іншому проміжку степеневих функцій.

## 3.1.Тригонометричний ряд Фур'є

Розглянемо $L_2[-\pi,\pi]$ - простір функцій з інтегрованим квадратом на відрізку $[-\pi,\pi]$. У цьому просторі функції:

$$1/\sqrt{2},\quad \sin(nx),\quad \cos(nx),\qquad (n=1,2,\ldots)$$

утворюють повну ортогональну систему функцій, що називається тригонометричною системою функцій. Ортогональність, безпосередньо, перевіряється прямим обчисленням, наприклад, для $n\neq m$:

$$\left(\sin(nx),\sin(mx)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=0,$$

$$\left(\cos(nx),\cos(mx)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=0,$$

$$\left(\sin(nx),\cos(mx)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx=0,$$

$$\left(1/\sqrt{2},\sin(mx)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}(1/\sqrt{2})\cdot\sin(mx)dx=0,$$

$$\left(1/\sqrt{2},\cos(mx)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}(1/\sqrt{2})\cdot\cos(mx)dx=0.$$

Норма кожного елементу системи визначається так:

$$\left\| 1/\sqrt{2} \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1/\sqrt{2}\right)^2 dx = \pi$$

$$\left\| \sin(nx) \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi\,,$$

$$\left\| \cos(nx) \right\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \pi\,.$$

Наведена нами тригонометрична система функцій не є нормованою. Поділивши кожний елемент на його норму, одержимо нормовану тригонометричну систему функцій:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Повнота тригонометричної системи функцій є наслідком того, що вони є власними функціями задачі Штурма-Ліувіля. Взагалі, якщо ми використовуємо в якості базису власні функції задачі Штурма-Ліувіля, то повнота цієї системи функцій нам гарантована. У протилежному випадку вона вимагає окремого дослідження.

Ряд Фур'є для функції $f(x)$, за тригонометричною системою функцій має вигляд

$$\boxed{\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{a}_0}{2} + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left[\mathrm{a_n}\cos(\mathrm{nx}) + \mathrm{b_n}\sin(\mathrm{nx})\right]}\,.$$

Помноживши скалярно останнє розвинення послідовно на всі елементи тригонометричної системи функцій, одержимо наступні вирази для коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, \qquad\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx\,, \qquad n \in N\,.$$

Тригонометричний ряд Фур'є можна записати і у більш симетрично

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right],$$

але у цьому ряді вираз для коефіцієнту $a_0$ буде відрізнятися коефіцієнтом $1/2$ від відповідного виразу попереднього ряду, а саме

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ .$$

Розглянемо $L_2[-l,l]$ - простір функцій з інтегрованим квадратом на відрізку довільної довжини $[-l,l]$. У цьому просторі ортогональну систему функцій утворюють функції

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \ \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (n=1,2,\dots) \ .$$

Відповідно до цього, тригонометричний ряд Фур'є має вигляд

$$\boxed{\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{a_0}}{2} + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\left[\mathrm{a_n}\cos\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{l}}\mathrm{x}\right) + \mathrm{b_n}\sin\left(\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{l}}\mathrm{x}\right)\right]},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \ .$$

Нехай функція $f(x)$ є парною, тобто $f(x) = f(-x)$. Тоді коефіцієнти $b_n = 0$, оскільки вони визначаються через інтеграли від непарних функцій у симетричних межах. У свою чергу:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

оскільки у цьому випадку мова йде про інтеграл від парної функції у симетричних межах. Ряд Фур'є матиме вигляд

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)} \ .$$

Аналогічним чином можна розглянути випадок непарної функції $f(x)$, тобто $f(x) = -f(-x)$. У цьому разі коефіцієнти $a_0, a_n = 0$, оскільки вони визначаються через інтеграли від непарних функцій у симетричних межах. У свою чергу

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

оскільки тут мова йде про інтеграл від парної функції у симетричних межах. Ряд Фур'є при цьому матиме вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}.$$

Розглянемо $L_2[0,l]$ - простір функцій з інтегрованим квадратом на відрізку довільної довжини $[0,l]$. У цьому просторі повну ортогональну систему функцій утворюють окремо функції

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad (n=1,2,\ldots),$$

і окремо функції

$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n=1,2,\ldots .$$

Знайдемо вигляд ряду Фур'є на проміжку $[0,l]$ виходячи з вигляду ряду Фур'є на проміжку $[-l,l]$. Оскільки нас цікавить поведінка функції $f(x)$ лише на проміжку $[0,l]$, то для знаходження зазначеного ряду можемо використати наступний штучний прийом. Довизначимо функцію $f(x)$ на проміжку $[-l,0]$ парним чином, тоді для функції $f(x)$, визначеній тепер уже на проміжку $[-l,l]$, матимуть місце формула

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Довизначимо тепер функцію $f(x)$ на проміжку $[-l,0]$ непарним чином, тоді для функції $f(x)$, визначеній тепер уже на проміжку $[-l,l]$, матимуть місце інші формули:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

де

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Отже, на проміжку $[0,l]$ для однієї і тієї ж функції $f(x)$ ми маємо два різних розвинення, що і доводить їх рівноправність, а, отже, і повноту кожної з зазначених підсистем тригонометричної системи функцій.

Розглянемо $L_2[a,a+2l]$ - простір функцій з інтегрованим квадратом на відрізку $[a,a+2l]$ довільної довжини, що знаходиться на відстані $a$ від початку координат. Зміщення інтервалу на відстані $a$ від початку координат не впливає на ортогональність тригонометричної системи функцій на цьому інтервалі, а отже всі формули залишаються вірними і для зазначеного проміжку. Таким чином

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right]},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\ ,\ n\in Z.$$

## 3.2.Експоненційний ряд Фур'є

Тригонометричний ряд Фур'є можна записати у експоненційному вигляді, якщо використати для цього формули Ейлера:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left[\exp(ix)+\exp(-ix)\right], \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left[\exp(ix)-\exp(-ix)\right].$$

Розвинення може бути отримане при безпосередній підстановці цих формул у тригонометричний ряд Фур'є і має вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)},$$

де

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\ \ n=0,\ \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\ \ (n\geq 1),\quad c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}\ \ (n<1),$$

тобто

$$c_n = c_{-n}{}^*,$$

де зірочка означає комплексне спряження. Крім того, легко довести, що

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(x)\exp\left(-i\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Отже, показникові функції $\exp\left(i\frac{n\pi}{l}x\right)$, де $n \in Z$, теж утворюють повну ортогональну систему функцій у просторі $L_2[a, a+2l]$.

**Зауваження.** Сума тригонометричного ряду Фур'є є періодичною функцією з періодом $2l$. Якщо функція $f(x)$ не є періодичною з таким же періодом, то ряд Фур'є відтворює цю функцію лише на проміжку $[a, a+2l]$. Якщо ж функція $f(x)$ є періодичною з періодом $2l$, то ряд Фур'є відтворює цю функцію на всій дійсній осі.

Розглянемо проміжок $x \in [-l, l]$. Якщо $l \to \infty$, то ряд Фур'є переходить в інтеграл Фур'є. У цьому разі ряд Фур'є можна розглядати як інтегральну суму

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(k_n)\exp(ik_n x)\Delta k_n,$$

де

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad \Delta k_n = \frac{\pi}{l},$$

$$F(k_n) = \int_{-l}^{l} f(x)\exp(-ik_n x)dx.$$

Перейшовши до межі, ми одержимо інтеграл Фур'є

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\exp(ikx)dk},$$

$$\boxed{F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ikx)dx}..$$

Наведені формули відповідають інтегральному перетворенню Фур'є. Достатньою умовою його існування є належність функції $f(x)$ до функційного простору $L_1(-\infty,\infty)$ , тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty .$$

## 3.3.Збіжність ряду Фур'є.

Кожну абсолютно інтегровану на проміжку $[a,a+2l]$ функцію, тобто функцію, приналежну простору $L_1[a,a+2l]$, можна представити на цьому проміжку рядом Фур'є. При цьому виникають питання збіжності ряду та можливості його диференціювання і інтегрування членами. Можна розглядати наступні види збіжностей ряду Фур'є: збіжність у середньому квадратичному, збіжність у даній точці, збіжність всюди та рівномірну збіжність. Нижче будуть сформульовані деякі достатні умови цих збіжностей для тригонометричного ряду Фур'є, але наведені результати матимуть місце і для інших рядів Фур'є, а саме рядів за поліномами Лежандра, Лагера, Ерміта, функціям Беселя і т.і.

**Збіжність ряду Фур'є у середньому квадратичному.** Цей вид збіжності характеризує поведінку ряду Фур'є на всьому проміжку. Послідовність частинних сум тригонометричного ряду Фур'є

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right]$$

збігається на проміжку $[a,a+2l]$ до функції у середньому квадратичному, якщо

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{a+2l} [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0} .$$

Порівняно недавно (L.Karleson, 1966) доведено, що приналежність функції $f(x)$ до простору $L_2[a,a+2l]$ гарантує збіжність її ряду Фур'є на проміжку $[a,a+2l]$ майже скрізь. Тобто функційна послідовність частинних сум тригонометричного ряду Фур'є, яка збігається у середньому квадратичному, збігається майже всюди на проміжку $[a,a+2l]$ до функції $f(x)$, за виключенням, можливо, множини точок з нульовою мірою (нескінчена але злічена множина точок). Отже, приналежність функції до простору $L_2[a,a+2l]$, тобто інтегрованість на проміжку $[a,a+2l]$ квадрату функції, є достатньою умовою збіжності послідовності зазначених частинних сум у середньому квадратичному. При цьому серед усіх тригонометричних багаточленів типу

$$T_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

найкращу апроксимацію функції $f(x)$ дає відповідна частинна сума тригонометричного ряду Фур'є, тобто тригонометричний поліном з коефіцієнтами $\alpha_0 = a_0$, $\alpha_n = a_n$, $\beta_n = b_n$. Крім того, для довільної функції , що належить простору $L_2[a, a+2l]$, має місце рівність Парсеваля

$$\boxed{\int_a^{a+2l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2 + b_n^2\right]}.$$

Ця рівність доводиться піднесенням ряду Фур'є до квадрату та інтегруванням обох його частин і нагадує формулу для квадрата довжини вектора з координатами $a_0$, $a_n, b_n$. Останнє і дозволяє трактувати функцію, як нескінченно вимірний вектор з координатами $a_0$, $a_n, b_n$.

Із збіжності ряду Фур'є у середньому квадратичному не випливають інші, пераховані нами види збіжностей.

**Локальна збіжність ряду Фур'є.** Цей вид збіжності характеризує поведінку ряду Фур'є в окремо взятій точці. Для кожного фіксованого значення аргументу ряд Фур'є є числовим рядом і збіжність цього числового ряду гарантує збіжність ряду Фур'є для зазначеного значення аргументу. Отже, збіжність ряду Фур'є у точці можна перевірити підсумовуванням відповідного числового ряду. Натомість, питання збіжності в точці можна вирішити і виходячи з властивостей функції. При цьому питання не можна вирішити, беручи до уваги або лише локальні властивості функції, або лише її інтегральні властивості. Відомо (P.Du Bois Reymond, 1873), що така локальна характеристика функції, як її неперервність у даній точці, не гарантує збіжності ряду Фур'є у цій точці. Натомість, якщо про функцію відомо лише те, що вона абсолютно інтегрована на відрізку, то її ряд Фур'є може виявитись розбіжним майже всюди на цьому проміжку, або навіть всюди (А. Н. Колмогоров, 1922). Для аналізу локальної збіжності ряду Фур'є потрібна сукупність певних локальних і інтегральних властивостей цієї функції. Існує декілька достатніх умов збіжності тригонометричного ряду Фур'є у даній точці (локальної збіжності). Розглянемо одну з них.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегрована на проміжку $[a, a+2l]$ і для фіксованих $x$ має місце умова Діні, тобто інтеграл

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$$

для деякого $\delta>0$ існує, то частинна сума $f_N(x)$ ряду Фур'є для функції $f(x)$ збігається у даній точці $x$ до функції $f(x)$.

Умова Діні в точці $x$ виконується, якщо функція $f(x)$ у цій точці неперервна і має похідну. Дійсно, у цьому разі чисельник інтегранди можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $t$ . Після інтегрування ряд стає степеневим рядом за степенями $\delta$ . Для малих $\delta$ він збігається, а у межі $\delta\to 0$ його сума навіть прямує до нуля. Отже умова Діні виконана.

Умова Діні в точці $x$ виконується, якщо функція $f(x)$ у цій точці неперервна і має ліву і праву похідні. Дійсно, у цьому разі інтеграл можна розбити на два інтеграли від мінус нескінченості до нуля і від нуля до плюс нескінченості. Чисельник кожної інтегранди можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $t$ . Після інтегрування ряди стають степеневими рядами за степенями $\delta$ . Для малих $\delta$ вони збігаються, а у межі $\delta\to 0$ їх суми прямують до нуля. Отже умова Діні виконана і у цьому разі.

Умова Діні в точці $x$ виконується, якщо функція $f(x)$ у цій точці має розрив першого роду, а також має ліву і праву похідні. У цьому разі математичні викладки аналогічні попереднім.

Із локальної збіжності ряду Фур'є у кожній точці певного проміжку випливають і збіжність у середньому квадратичному та глобальна збіжність на цьому проміжку.

Г**лобальна збіжність ряду Фур'є.** Цей вид збіжності характеризує поведінку ряду Фур'є на всьому проміжку. Одна з достатніх умов збіжності тригонометричного ряду Фур'є відразу на всьому проміжку визначається наступною теоремою Діріхлє. З глобальної збіжності також випливає локальна збіжність та збіжність у середньому квадратичному.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,a+2l]$ і є на ньому кусково неперервною, кусково монотонною та обмеженою, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в усіх точках проміжку.

При цьому, якщо $S(x)$ сума тригонометричного ряду Фур'є функції $f(x)$, то мають місце умови Діріхлє, а саме, в усіх точках, де функція $f(x)$ неперервна,

$$S(x)=f(x),$$

в усіх її точках розриву (першого роду)

$$S(x)=\frac{1}{2}\big[f(x-0)+f(x+0)\big].$$

Легко бачити, що умови Діріхлє випливають з абсолютної інтегрованості функції на проміжку і виконанню в кожній точці цього проміжку умови Діні.

**Рівномірна збіжність ряду Фур'є.** Рівномірна збіжність також характеризує поведінку ряду Фур'є на всьому проміжку. Нагадаємо, що за ознакою Вейєрштраса (Weierstraβ[2]), якщо існує збіжний числовий ряд такий, що всі члени функційного ряду, починаючи з певного номера, менші за абсолютною величиною відповідних членів числового ряду, то функційний ряд рівномірно збігається. Неперервність функції $f(x)$ є лише необхідною умовою рівномірної збіжності тригонометричного ряду Фур’є, оскільки сумою рівномірно збіжного ряду завжди є неперервна функція. Протилежне твердження невірне.

Якщо ряд для функції $f(x)$ рівномірно збігається на заданому проміжку, то для апроксимації цієї функції частинною сумою ряда з наперед заданою точністю завжди достатньо скінченої кількості членів ряду. Наявність, наприклад, точок розриву першого роду порушує рівномірну збіжність ряду Фур'є. Чим ближче до точки розриву, тим більшою кількістю доданків формується сума ряду з наперед заданою точністю. У самій точці розриву їх слід враховувати нескінченно багато. Існує декілька достатніх ознак рівномірної збіжності рядів Фур'є. Розглянемо одну з них.

**Теорема.** Якщо функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a,a+2l]$, а її перша похідна має на цьому проміжку інтегрований квадрат (належить простору $L_2[a,a+2l]$), то тригонометричний ряд Фур'є збігається до цієї функції на всьому проміжку рівномірно.

Очевидно ряд, збіжний рівномірно на проміжку $[a,a+2l]$, збіжний і у середньому квадратичному, і локально у кожній точці проміжку.

Рівномірна збіжність тригонометричного ряду Фур'є є достатньою умовою його інтегрування членами. При цьому інтеграл суми ряду дорівнює сумі інтегралів окремих членів цього ряду.

Разом з тим, рівномірна збіжність ряду Фур'є не є достатньою умовою можливості його по членного диференціювання. Так ряд

$$\sin(x)+\frac{\sin(8x)}{8}+\frac{\sin(27x)}{27}+\dots+\frac{\sin(n^3x)}{n^3}+\dots,$$

оскільки

$$\left|\frac{\sin(n^3x)}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$$

[2] Карл Теодор Вільгельм (31.10.1815 – 19.02.1987) – німецький математик, Член Берлінської академії наук, професор Берлінського університету

для всіх $n \in N$, збігається рівномірно і абсолютно на довільному проміжку $[a, a+2l]$, а його сума є неперервною на цьому проміжку функцією. Ряд же складений з похідних

$$\cos(x)+\cos(8x)+\cos(27x)+\cdots+\cos(n^3)+\cdots$$

збігається не при всіх $x$. Наприклад, при $x=0$ отримаємо ряд $1+1+\cdots+1+\cdots$, який розбігається. Разом з тим, якщо зінтегрувати даний ряд членами, то отримаємо ряд

$$-\cos(x)-\frac{\cos(8x)}{8^2}-\frac{\cos(27x)}{27^2}-\cdots-\frac{\cos(n^3x)}{n^6}-\cdots,$$

який збігається рівномірно і абсолютно на довільному проміжку, оскільки всі його члени за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного числового ярду

$$\left|\frac{\cos(n^3x)}{n^6}\right| \le \frac{1}{n^6}.$$

У дійсності, можливість диференціювання ряду Фур'є членами в кожній точці певного проміжку вимагає від функції її абсолютної неперервності на цьому проміжку.

Зауважимо, що абсолютної неперервності на відрізку випливає рівномірна неперервність і неперервність функції на цьому відрізку. З рівномірної неперервності на відрізку випливає неперервність функції на цьому відрізку. З неперервності функції у кожній точці відрізку інші види неперервності не випливають. Різниця між неперервністю, рівномірною неперервністю і абсолютною неперервністю виникає у разі наявності на межах відрізку, де функція неперервна, особливих точок функції типу полюсів і суттєво особливих точок. У відсутності таких особливих точок всі види неперервності збігаються.

Якщо розглядати ряд Фур'є на проміжку, межовими точками якого також не є особливі точки функції $f(x)$, то різниця між різними видами збіжностей на цьому відрізку зникає.

### 3.4.Ряд Фур'є за функціями Беселя (ряд Беселя)

Як відомо, функції Беселя $J_\nu(\mu_k x)$ довільного порядку $\nu > -1/2$ утворюють повну ортогональну з ваговою функцією

$$\boxed{\rho(\mathrm{x}) = \mathrm{x}}$$

у просторі $L_2[0,l]$ систему функцій, $\mu_k$ - власні числа відповідної задачі Штурма-Ліувіля, $k=0,1,2,\ldots$,

$$\boxed{\int_0^l x J_\nu(\mu_n x) J_\nu(\mu_m x)\,dx = \frac{l^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\mu_n l)\right]^2 \delta_{nm}}\,.$$

Звідси, за допомогою граничного переходу можна знайти

$$\boxed{\alpha\int_0^\infty x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\,dx = \delta(\alpha-\beta)}\,,$$

де $\delta(\alpha-\beta)$ - дельта–функція Дірака (узагальнена функція). Принагідно наведемо і більш загальні формули для функцій Беселя цілого порядку

$$\boxed{\int_0^x x J_m(\alpha x) J_m(\beta x)\,dx = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\begin{bmatrix}\beta J_{m-1}(\beta x) J_m(\alpha x) - \\ -\alpha J_{m-1}(\alpha x) J_m(\beta x)\end{bmatrix}}$$

тут $\alpha^2-\beta^2\neq 0$,

$$\boxed{\int_0^x y\left[J_m(\alpha y)\right]^2 dy = \frac{x^2}{2}\left[\frac{d}{dx}J_m(\alpha x)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(x^2-\frac{m^2}{\alpha^2}\right)\left[J_m(\alpha x)\right]^2}\,,$$

тут $m>-1$.

Ряд Фур'є за функціями Беселя має вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n J_\nu(\mu_{\nu n} x)}\,,$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{2}{l^2\left[J_{\nu+1}(\mu_{\nu n})\right]^2}\int_0^l x f(x) J_\nu\left(\frac{\mu_{\nu n}}{l}x\right)dx.$$

Як було з'ясовано вище, функції Беселя залежать від двох власних чисел відповідної задачі Штурма Ліувіля. Вони утворюють повну ортогональну систему функцій при фіксованому значенні будь-якого з них. Вище ми фіксували порядок функції Беселя і розкладали функції у ряд Фур'є за нулями функції Беселя. Замість порядку зафіксуємо тепер друге власне число - нуль функції Беселя. У цьому випадку ряд Фур'є (також називається рядом Ноймана) за функціями Беселя цілого порядку матиме вигляд

$$\boxed{f(x) = c_0 J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_n(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються наступним контурним інтегралом у комплексній площині:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=a} f(z) N_n(z) dz.$$

Ряд Фур'є (також називається рядомНоймана) за функціями Беселя довільного порядку матиме вигляд:

$$\boxed{f(x) = c_0 J_\nu(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_{\nu+n}(x)}.$$

Існують функції, розвинення яких у ряд Беселя мають особливо важливе значення, а саме:

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[t^n + (-t)^{-n}\right] J_m(x),$$

$$e^{\pm iz\sin(t)} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[J_{2n}(x)\cos(2nt) \pm iJ_{2n-1}(x)\sin((2n-1)t)\right],$$

$$\cos[x\sin(t)] = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2nt),$$

$$\sin[x\sin(t)] = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin((2n-1)t),$$

$$\sin[x\cos(t)] = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} J_{2n-1}(x)\sin((2n-1)t),$$

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+2n)!(m+n-1)!}{n!} J_{2n+m}(x),$$

$$\cos(x) = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - 2J_6(x) + \ldots,$$

$$\sin(x) = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \ldots.$$

Далі ми розглянемо деякі інші базиси у просторі $L_2[a,b]$.

## 3.5.Ряд Фур'є за поліномами Ерміта (ряд Ерміта)

Поліноми Ерміта утворюють повну ортогональну систему функцій з ваговою функцією

$$\boxed{\rho(x)=\exp(-x^2)}$$

у просторі $L_2(-\infty,\infty)$. Умова ортогональності поліномів Ерміта така

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\,H_n(x)\,H_m(x)\,dx=2^n\,n!\sqrt{\pi}\delta_{nm}}\,.$$

Раніше поліноми Ерміта ми отримали як власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувіля, але їх можливо одержати і за допомогою процедури ортогоналізації на проміжку $(-\infty,\infty)$ степеневих функцій $1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots$ з відповідною ваговою функцією. Можна довести, що отримана таким чином система функцій буде єдиною. Ряд Фур'є за поліномами Ерміта можна записати так

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(x)}\,,$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(x)f(x)H_n(x)dx\,.$$

Існує функція розвинення якої у ряд Ерміта має особливо важливе значення, а саме

$$\exp(-t^2+2tx)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^nH_n(x).$$

Ця функція називається твірною для поліномів Ерміта.

## 3.6.Ряд Фур'є за функціями Лагера (ряд Лагера)

Поліноми Лагера утворюють повну ортогональну систему функцій з ваговою функцією

$$\boxed{\rho(x)=\exp(-x)}$$

у просторі $L_2[0,\infty)$

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\infty}\rho(x)\,L_n(x)\,L_m(x)\,dx=(n!)^2\delta_{nm}}\,.$$

Раніше поліноми Лагера ми отримали як власні функції відповідної задачі Штурма–Ліувіля, але їх можна одержати і за допомогою процедури ортогоналізації на проміжку $[0,\infty)$ степеневих функцій $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, з наведеною вище ваговою функцією. Можна довести, що отримана таким чином система функцій буде єдиною. Ряд Фур'є за ними має вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{1}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) f(x) L_n(x) dx .$$

Існує функція розвинення якої у ряд Лагера має важливе значення, а саме

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n L_n(x), \qquad (|t| < 1)$$

Ця функція називається твірною для поліномів Лагера.

Поліноми Лагера є частинним випадком більш загальних функцій, так званих узагальнених поліномів Лагера. Останні задаються так

$$\boxed{L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_m(x)},$$

При цьому,

$$L_n^0(x) = L_m(x).$$

Для кожного конкретного значення $k$ узагальнені поліноми Лагера утворюють повну ортогональну систему функцій у просторі $L_2[0,\infty)$

$$\boxed{\int_0^{\infty} \rho(x) L_n{}^k(x) L_m{}^k(x) dx = \frac{(n!)^3}{(n\text{-}k)!} \delta_{nm}}.$$

Їх можна одержати за допомогою процедури ортогоналізації на проміжку $[0,\infty)$ степеневих функцій $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, з ваговою функцією

$$\boxed{\rho(x) = x^k \exp(-x)}.$$

Можна довести єдиність такої система функцій. Ряд Фур'є за ними має вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n{}^k P_n{}^k(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n{}^k = \frac{(n-k)!}{(n!)^3} \int_{-1}^{1} \rho(x) f(x) L_n{}^k(x) dx.$$

Існує функція, розвинення якої у ряд Лагера має важливе значення, а саме

$$\exp(-xt)(1+t)^m = \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{m-n} t^n L_m{}^{m-n}(x).$$

Ця функція називається твірною для функцій Лагера.

Поряд з поліномами Лагера, дуже часто використовуються так звані приєднані поліноми Лагера. Вони задовольняють наступному диференційному рівнянню

$$\boxed{x \frac{d^2 L_n{}^s(x)}{dx^2} + (s+1-x) \frac{dL_n{}^s(x)}{dx} + \left( \chi - \frac{s+1}{2} \right) L_n{}^s(x) = 0}$$

і є його єдиними скінченими і неперервними розв’язками. Їх можна представити у вигляді наступного степеневого ряду

$$\boxed{L_n{}^s(x) = n! \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^{n-s} C_m{}^n \frac{x^{n-s-m}}{(n-s-m)!}},$$

а також представити у диференційній формі

$$\boxed{L_n{}^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} \exp(x) \frac{d^n}{dx^n} \left[ x^{n+s} \exp(-x) \right]}.$$

Перші декілька узагальнених поліномів Лагера мають вигляд

$$L_0{}^s(x) = 1, \; L_1{}^s(x) = 1 + s - x, \; \dots \; .$$

Узагальнені поліноми Лагера утворюють на проміжку $[0, \infty)$ повну ортогональну систему функцій з вагою

$$\boxed{\rho(x) = x^s \exp(-x)}$$

При цьому

$$\boxed{\int_0^\infty dx\rho(x)L_n^{\ s}(x)L_m^{\ s}(x)=\begin{cases}0, n\neq m, s>-1\\ \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, m=n\end{cases}}.$$

Тут $\Gamma(n+s+1)$ - гама-функція. Власними числами рівняння для узагальнених поліномів Лагера є:

$$\boxed{\chi_n = n+(s+1)/2}.$$

Ряд Фур'є (ряд Лагера) за узагальненими поліномами Лагера принципово не відрізняється від ряду Фур'є за звичайними поліномами Лагера.

### 3.7.Ряд Фур'є за поліномами Лежандра (ряд Лежандра)

Поліноми Лежандра утворюють повну ортогональну систему функцій у просторі $L_2[-1,1]$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}}.$$

Раніше поліноми Лежандра ми отримували як власні функції відповідної задачі Штурма – Ліувіля, але їх можна одержати і за допомогою процедури ортогоналізації на проміжку $[-1,1]$ степеневих функцій $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. Можна довести, що отримана таким чином система функцій буде єдиною. Ряд Фур'є за ними має вигляд

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx.$$

Існує декілька функцій, розвинення яких у ряд Лежандра має особливо велике значення, а саме:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), |t<1| \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n-1} P_n(x), |t>1| \end{cases},$$

$$\frac{1}{t-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Q_n(t)P_n(x).$$

Тут $Q_n(x)$ - функції Лежандра другого роду

$$\frac{2}{\pi\sqrt{1+2xyz-x^2-y^2-z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)P_n(y)P_n(z).$$

Перша з наведених двох функцій називається твірною для поліномів Лежандра, друга - для функцій Лежандра другого роду.

Поліноми Лежандра є частинним випадком більш загальних поліномів, так званих приєднаних поліномів Лежандра. Останні задаються так

$$\boxed{P_n^m(x)=P_n^{-m}(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m \frac{d^m}{dx^m}P_m(x)},$$

де $|m| \le n$. При цьому

$$P_n^0(x)=P_m(x).$$

Декілька перших приєднаних поліномів Лежандра мають вигляд:

$$P_1^1(x)=P_1^{-1}(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad P_1^1[\cos(\theta)]=\sin(\theta),$$

$$P_2^1(x)=P_2^{-1}(x)=3x\sqrt{1-x^2}, \quad P_2^1[\cos(\theta)]=\frac{3}{2}\sin(2\theta),$$

$$P_2^2(x)=P_2^{-2}(x)=3(1-x^2), \quad P_2^2[\cos(\theta)]=\frac{3}{2}[1-\cos(2\theta)] .$$

Для кожного конкретного значення $m$ приєднані поліноми Лежандра утворюють повну ортогональну систему функцій у просторі $L_2[-1,1]$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_n{}^k(x)P_m{}^k(x)dx=\frac{2(n+k)!}{(2n+1)(n-k)!}\delta_{nm}}.$$

Ряд Фур'є має вигляд

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{\ k} P_n^{\ k}(x)},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_n^{\ k}=\frac{(2n+1)(n-k)!}{2(n+k)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_n^{\ k}(x)dx\ .$$

Зв'язок між поліномами Лежандра та приєднаними поліномами Лежандра можна представити і у вигляді так званого правила сум

$$P_n(\cos(\vartheta))=\sum_{k=-n}^{n}\left\{\begin{matrix}\dfrac{(n-|k|)!}{(n+|k|)!}\exp[ik(\varphi_1-\varphi_2)]* \\ *P_n^{\ k}(\cos(\vartheta_1))P_n^{\ k}(\cos(\vartheta_2))\end{matrix}\right\},$$

де

$$\cos(\vartheta)=\cos(\vartheta_1)\cos(\vartheta_2)+\sin(\vartheta_1)\sin(\vartheta_2)\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ .$$

## 3.8.Кратні ряди Фур'є

Нехай функції $\{\psi_n(x)\}$ утворюють повний ортогональний базис у просторі $L_2[a,b]$, а функції $\{\varphi_n(x)\}$ утворюють повний ортогональний базис у просторі $L_2[c,d]$. Позначимо через $L_2[a,b;c,d]$ простір, що є добутком просторів $L_2[a,b]$ та $L_2[c,d]$. Існує наступна теорема.

**Теорема.** Система функцій $\{f_{nm}(x,y)\}=\{\varphi_n(x)\psi_m(y)\}$, що є всіма можливими добутками функцій $\varphi_n(x)$ на функції $\psi_m(y)$ утворює повний ортогональний базис у просторі $L_2[a,b;c,d]$.

Наведена теорема може бути розповсюджена на добуток довільної кількості просторів типу $L_2[a,b]$. Застосуємо цю теорему до деяких конкретних повних ортогональних систем функцій. Розглянемо, наприклад, систему показникових функцій $\left\{\exp\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)\right\}$ у просторі $L_2[a,a+2l]$.

Очевидно, у просторі $L_2[a,a+2l;a,a+2l]$ повною ортогональною системою функцій буде система $\left\{\exp\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\right\}$. Відповідний ряд Фур'є матиме вигляд

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} c_{nm}\exp\left[\frac{\pi}{l}(nx+my)\right]},$$

де коефіцієнти Фур'є

$$c_{nm}=\frac{1}{l^2}\int_a^{a+2l}\int_a^{a+2l} f(x,y)\cos\left[\frac{\pi}{l}(nx+my)\right]dxdy.$$

У трьохвимірному випадку

$$\boxed{f(x,y,z)=\sum_{k,n,m=-\infty}^{\infty} c_{knm}\exp\left[\frac{\pi}{l}(nx+my+kz)\right]},$$

де

$$c_{knm}=\frac{1}{l^3}\int_a^{a+2l}\int_a^{a+2l}\int_a^{a+2l} f(x,y)\cos\left[\frac{\pi}{l}(nx+my+kz)\right]dxdydz.$$

Останній результат зручно записати у векторному вигляді

$$\boxed{f(\mathbf{r})=\sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}\exp(\mathbf{kr})},$$

де введені наступні вектори: $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{k}=\frac{\pi}{l}(n,m,k)$. Коефіцієнти Фур'є мають вигляд

$$c_{\mathbf{k}}=\frac{1}{l^3}\int f(\mathbf{r})\exp(\mathbf{kr})dr.$$

## 3.9.Ряд Фур'є за сферичними функціями

Важливим класом спеціальних функцій, тісно пов’язаних з класичними ортогональними поліномами, є сферичні функції. Вони виникають, наприклад, при розв’язанні рівняння Лапласа у сферичних координатах.

Сферичні функції є комбінацію приєднаних поліномів Лежандра та тригонометричних функцій або показникових функцій, властивості яких ми докладно дослідили раніше. Саме тому ми просто перерахуємо головні властивості сферичних функцій. Таким чином,

$$\boxed{Y_{nm}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}P_n^{\ m}(\cos\theta)\exp(im\varphi)}\,.$$

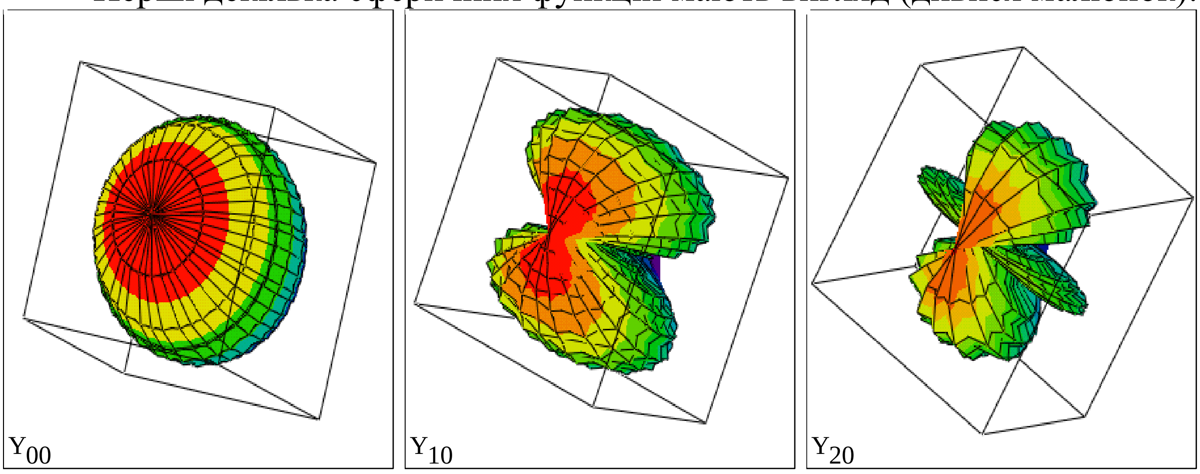
Як випливає з властивостей приєднаних поліномів Лежандра, число різних сферичних функцій $n$ - го порядку дорівнює $2n+1$ ($-n \le m \le n$). Сферичні функції є однозначними та неперервними на поверхні сфери. Вони також є ортонормованими

$$\boxed{\begin{aligned}&\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)Y_{n'm'}{}^{*}(\theta,\varphi)=\\&=\int_0^{\pi}d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi Y_{nm}(\theta,\varphi)Y_{n'm'}{}^{*}(\theta,\varphi)=\delta_{nn'}\delta_{mm'}\end{aligned}}\,.$$

Крім того вони мають наступну властивість симетрії

$$\boxed{Y_{n,-m}(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_{nm}(\theta,\varphi)}\,.$$

Перші декілька сферичних функцій мають вигляд (дивися малюнок):




**Малюнок 24.** *Сферичні функції*

$$Y_{00}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,,\qquad Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)\,,$$

$$Y_{1,\pm1}(\theta,\varphi)=\pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)\exp(\pm i\varphi),$$

$$Y_{20}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left[3\cos^2(\theta)-1\right],$$

$$Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi)=\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3}{16}\cos(\theta)\sin(\theta)\exp(\pm i\varphi),$$

$$Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3}{32}\sin^2(\theta)\exp(\pm 2i\varphi).$$

Сферичні функції є єдиними неперервними, скінченими розв’язками наступного диференційного рівняння

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\\&+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda Y(\theta,\varphi)=0\end{aligned}}.$$

Власні числа цього рівняння $\lambda_n=n(n+1)$. Цікаво, що спектр власних чисел рівняння визначається тільки одним натуральним числом $n$, у той час як власні функції можуть бути перенумерованими лише відповідними комбінаціями двох чисел: натурального $n$ ,та цілого $m$. Ряд Фур’є за сферичними функціями для функції, визначеної на поверхні сфери, має вигляд

$$\boxed{f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nm}Y_{nm}(\theta,\varphi)}.$$

Коефіцієнти Фур’є визначаються так

$$A_{nm}=\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi).$$

Розвинення деяких функцій грають особливо велику роль, зокрема,

$$\boxed{P_n(\cos\theta)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}Y_{nm}(\theta_1,\varphi_1)Y_{nm}^{*}(\theta_2,\varphi_2)}.$$

Тут $\theta$ - кут між двома векторами, орієнтація яких у просторі задається полярними кутами $(\theta_1,\varphi_1)$ та $(\theta_2,\varphi_2)$. Наведене розвинення називається правилом сум для сферичних функцій.

### 3.9.1.Розвинення у ряд Фур'є компонент вектора

Розкладемо у ряд Фур’є за сферичними функціями наступні функції: $k_x$, $k_y$, $k_z$, $k_x{}^2$, $k_y{}^2$, $k_y{}^2$, $k_xk_y$, $k_xk_z$, $k_yk_z$. Тут

$$k_x = k\sin(\theta)\cos(\varphi), \qquad k_y = k\sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$k_z = k\cos(\theta)$$

- компоненти вектора у сферичній системі координат. Необхідність такого розвинення виникає при розгляді різноманітних властивостей неізотропних систем. У даному прикладі не обов'язково використовувати загальні формули для коефіцієнтів ряду. Практично очевидним є наступний результат:

$$k_x = k\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_{1,1}(\theta,\varphi) - Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right],$$

$$k_y = -ik\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left[Y_{1,1}(\theta,\varphi) + Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\right],$$

$$k_z = k\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{10}(\theta,\varphi).$$

Для подальшого зазначимо, що шукані добутки компонент векторів використовуючи формули Ейлера можна представити так:

$$k_x{}^2 = \frac{k^2}{4}\sin^2(\theta)\left[\exp(2i\varphi) + \exp(-2i\varphi) + 2\right],$$

$$k_y{}^2 = -\frac{k^2}{4}\sin^2(\theta)\left[\exp(2i\varphi) + \exp(-2i\varphi) - 2\right],$$

$$k_z{}^2 = k^2\cos^2(\theta),$$

$$k_xk_y = \frac{k^2}{4i}\sin^2(\theta)\left[\exp(2i\varphi) - \exp(-2i\varphi)\right],$$

$$k_xk_z = \frac{k^2}{2}\sin(\theta)\cos(\theta)\left[\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)\right],$$

$$k_y k_z = \frac{k^2}{2i}\sin(\theta)\cos(\theta)\left[\exp(i\varphi)-\exp(-i\varphi)\right].$$

За допомогою наведених вище виразів для сферичних функцій можна одержати наступні співвідношення, що визначають тригонометричні функції та їх комбінації через сферичні функції:

$$\cos^2(\theta)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}Y_{2,0}(\theta,\varphi)+\frac{1}{3}\sqrt{4\pi}Y_{0,0}(\theta,\varphi),$$

$$\sin^2(\theta)=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}Y_{2,0}(\theta,\varphi)+\frac{2}{3}\sqrt{4\pi}Y_{0,0}(\theta,\varphi),$$

$$\cos(\theta)\sin(\theta)\exp(\pm i\varphi)=\pm\frac{16\sqrt{2\pi}}{3}Y_{2,\pm1}(\theta,\varphi),$$

$$\sin^2(\theta)\exp(\pm 2i\varphi)=\frac{32}{3}\sqrt{2\pi}Y_{2,\pm2}(\theta,\varphi).$$

Наявність таких співвідношень дозволяє уникнути знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є за сферичними функціями шляхом обчислення відповідних інтегралів. У висліді:

$$k_x{}^2=\frac{\sqrt{4\pi}}{3}k^2\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{1}{5}}Y_{2,0}(\theta,\varphi)+Y_{0,0}(\theta,\varphi)+\\ +4\sqrt{2}Y_{22}(\theta,\varphi)+4\sqrt{2}Y_{2,-2}(\theta,\varphi)\end{bmatrix},$$

$$k_y{}^2=\frac{\sqrt{4\pi}}{3}k^2\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{1}{5}}Y_{2,0}(\theta,\varphi)+Y_{0,0}(\theta,\varphi)-\\ -4\sqrt{2}Y_{22}(\theta,\varphi)-4\sqrt{2}Y_{2,-2}(\theta,\varphi)\end{bmatrix},$$

$$k_z{}^2=\frac{\sqrt{4\pi}}{3}k^2\left[\sqrt{\frac{4}{5}}Y_{2,0}(\theta,\varphi)+Y_{0,0}(\theta,\varphi)\right],$$

$$k_x k_y=\frac{8\sqrt{2\pi}k^2}{3i}\left[Y_{22}(\theta,\varphi)-Y_{2,-2}(\theta,\varphi)\right],$$

$$k_x k_z=\frac{8\sqrt{2\pi}k^2}{3}\left[Y_{21}(\theta,\varphi)-Y_{2,-1}(\theta,\varphi)\right],$$

$$k_y k_z = \frac{8\sqrt{2\pi}k^2}{3i}\left[Y_{21}(\theta,\varphi)+Y_{2,-1}(\theta,\varphi)\right].$$

### 3.9.2. Сферичні функції та багатократні інтеграли

Нехай потрібно обчислити наступний шестикратний інтеграл, підінтегральна функція якого має певні властивості симетрії

$$I=\int d\Omega_1\int d\Omega_2\int d\Omega_3 f\left(\left|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2\right|,\left|\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3\right|,\left|\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1\right|\right)..$$

Тут інтегрування виконується за трьома тілесними кутами. Видно, що підінтегральна функція залежить не від кожного з трьох векторів окремо, а від модулів різниць всіх можливих пар векторів. Ця обставина, як буде показано вище, дозволяє суттєво зменшити кратність інтегрування. Розкладемо підінтегральну функцію у потрійний ряд за поліномами Лежандра

$$f\left(\left|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2\right|,\left|\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3\right|,\left|\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1\right|\right)=$$
$$=\sum_{n,m,l}F_{nml}(k_1,k_2,k_3)\,P_n(\cos\theta_{12})\,P_m(\cos\theta_{23})\,P_l(\cos\theta_{31})$$

Тут введені позначення: $P_n\left[\cos(\mathbf{k}_i\,^\wedge\,\mathbf{k}_j)\right]=P_n(\cos\theta_{ij})$. Коефіцієнт Фур'є цієї функції має вигляд

$$F_{nml}(k_1,k_2,k_3)=\frac{(2n+1)(2m+1)(2l+1)}{8}*$$
$$*\int_0^\pi d\theta_{12}\sin(\theta_{12})\int_0^\pi d\theta_{23}\sin(\theta_{23})\int_0^\pi d\theta_{31}\sin(\theta_{31})*$$
$$*f\left(\left|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2\right|,\left|\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3\right|,\left|\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1\right|\right)P_n(\cos\theta_{12})\,P_m(\cos\theta_{23})\,P_l(\cos\theta_{31}).$$

Після підстановки ряду Фур'є у шуканий інтеграл одержимо

$$I=\sum_{n,m,l}F_{nml}(k_1,k_2,k_3)\int d\Omega_1\int d\Omega_2\int d\Omega_3\,*.$$
$$*\,P_n(\cos\theta_{12})\,P_m(\cos\theta_{23})\,P_l(\cos\theta_{31}).$$

Для подальшого обчислення отриманого інтегралу використаємо правило сум для сферичних функцій. У висліді інтеграл набере вигляду

$$I=\sum_{n,m,l}F_{nml}(k_1,k_2,k_3)*$$

$$*\frac{4\pi}{2n+1}\frac{4\pi}{2m+1}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{n'=-n}^{n}\sum_{m'=-m}^{m}\sum_{l'=-l}^{l}*$$

$$*\int d\Omega_1 Y_{nn'}(\theta_1,\varphi_1)Y_{ll'}{}^*(\theta_1,\varphi_1)*$$

$$*\int d\Omega_2 Y_{nn'}{}^*(\theta_2,\varphi_2)Y_{mm'}(\theta_2,\varphi_2)*$$

$$*\int d\Omega_3 Y_{mm'}{}^*(\theta_3,\varphi_3)Y_{ll'}(\theta_3,\varphi_3)\,.$$

Очевидно, що внутрішні інтеграли є скалярними добутками сферичних функцій і в силу їх ортонормованості дорівнюють добуткам відповідних символів Кронекера. У висліді  шуканий інтеграл вдалося звести до потрійного інтегралу і однієї суми

$$\boxed{I=\sum_n\frac{(4\pi)^3}{(2n+1)^2}F_{nnn}(k_1,k_2,k_3)}\,.$$

### 3.9.3.Сферичні функції та інтеграли з дельта - функціями

Обчислимо інтеграл за сферичним кутом від добутку дельта-функцій

$$I=\int d\Omega\delta(k^2-\left|\mathbf{k}+\mathbf{q_1}\right|^2+\omega_1)\delta(k^2-\left|\mathbf{k}+\mathbf{q}_2\right|^2+\omega_2)\,.$$

Перетворимо інтеграл до вигляду

$$I=\int d\Omega\;\delta(2kq_1\cos(\theta_1)+q_1{}^2-\omega_1)\;\delta(2kq_2\cos(\theta_2)+q_2{}^2-\omega_2)\,.$$

Розкладемо кожну з дельта-функцій у ряд за поліномами Лежандра

$$\delta(2kq\cos(\theta)+q^2-\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(k,q,\omega)P_n(\cos(\theta))\,.$$

Тут коефіцієнти Фур’є

$$a_n(k,q,\omega)=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}dxP_n(x)\;\delta(2kq\cos(\theta)+q^2-\omega)\;.$$

Після підстановки цього розвинення під знак інтегралу одержимо

$$I=4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}a_n(k,q_1,\omega_1)\,a_n(k,q_2,\omega_2)P_n(\cos(\theta_{12})).$$

Тут використано правило сум для сферичних функцій при обчисленні інтегралу від добутку поліномів Лежандра

$$\int d\Omega P_n(\cos(\theta_1))P_m(\cos(\theta_2))=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{4\pi}{2m+1}*$$

$$*\sum_{l=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m}Y_{nl}{}^{*}(\theta_1,\varphi_1)Y_{mk}(\theta_2,\varphi_2)\int d\Omega Y_{nl}(\theta,\varphi)Y_{mk}{}^{*}(\theta,\varphi)\ ,$$

$\theta_{12}$ - кут між векторами. Інтеграл у правій частині є інтегралом ортогональності для сферичних функцій. Після його обчислення одна з сум зникає, а та, що залишається, є правилом сум для сферичних функцій.

Інтеграл, що визначає коефіцієнти Фур’є, оскільки він містить дельта-функцію, може бути обчисленим до кінця

$$a_n(k,q,\omega)=\frac{2n+1}{4kq}P_n\left(\frac{\omega-q^2}{2kq}\right)\Theta\left[k-\left|\frac{q}{2}-\frac{\omega}{2q}\right|\right].$$

Поява тета - функції у правій частині обумовлена тією обставиною, що під знаком інтегралу $-1<x<1$. У вислідi $\left|\frac{q}{2}-\frac{\omega}{2q}\right|<k<\left|\frac{q}{2}-\frac{\omega}{2q}\right|$ і

$$I=\frac{\pi}{4k^2q_1q_2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n\left[\cos\left(\frac{\omega_1-q_1{}^2}{2kq_1}\right)\right]P_n\left[\cos\left(\frac{\omega_2-q_2{}^2}{2kq_2}\right)\right]*$$

$$*P_n\left[\cos\left(\theta_{12}\right)\right]\Theta\left[k-\left|\frac{q_1}{2}-\frac{\omega_1}{2q_1}\right|\right]\Theta\left[k-\left|\frac{q_2}{2}-\frac{\omega_2}{2q_2}\right|\right].$$

Використавши одне з правил сум для поліномів Лежандра, ми можемо обчислити і останню суму. Отже,

$$I=\frac{1}{2k^2q_1q_2}\Theta\left[k-\left|\frac{q_1}{2}-\frac{\omega_1}{2q_1}\right|\right]\Theta\left[k-\left|\frac{q_2}{2}-\frac{\omega_2}{2q_2}\right|\right]*$$

$$
*\frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\omega_1-q_1{}^2}{2kq_1}\right)\left(\frac{\omega_2-q_2{}^2}{2kq_2}\right)\cos(\theta_{12})- -\left(\frac{\omega_1-q_1{}^2}{2kq_1}\right)^2-\left(\frac{\omega_2-q_2{}^2}{2kq_2}\right)^2-}}.
$$

## Глава 4.Рівняння Гельмгольца

До рівняння Гельмгольца приводиться  багато різноманітних задач математичної фізики. Це задачі практично з усіх областей фізики та техніки: рівняння теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Шредінгера і таке інше. Рівняння Гельмгольца має вигляд

$$
\boxed{\Delta u(\mathbf{r})+\lambda u(\mathbf{r})=0}\,.
$$

Тут $u(\mathbf{r})$ - довільна фізична характеристика: температура, потенціал електричне поля, компонента потенціалу магнітного поля, хвильова функція квантовомеханічної системи і т. і. в точці простору з радіус - вектором $\mathbf{r}$. Рівняння Гельмгольца разом з однорідними межовими умовами першого, другого, або третього роду, утворюють задачу Штурма - Ліувілля. Саме тому рівняння Гельмгольца має ненульові розв'язки навіть для однорідних межових умов. Цим воно істотно відрізняється від рівняння Лапласа, не дивлячись на їх зовнішню схожість. Надалі ми будемо розглядати лише однорідні межові умови. У випадку неоднорідних межових умов, характер розв'язків рівняння Гельмгольца мало відрізняється від таких же для рівняння Лапласа. Крім того ми обмежимося розглядом лише внутрішніх задач.

Важливим є випадок, коли область, де шукається розв'язок рівняння Гельмгольца, має ту чи іншу симетрію. Це приводить до того, що невідома функція, крім умов першого, другого або третього родів на межі області, задовольняє ще певній кількості умов, зумовлених саме симетрією області. Ці умова формально виходить за межі стандартного набору межових умов задачі Штурма-Ліувіля. Разом з тим, зазначені додаткові  умови  зберігають всі властивості власних чисел і власних функцій задачі Штурма-Ліувіля, додаючи до них лише певні нові умови симетрії. Саме ці умови приводить до виродження спектру власних чисел, що знову ж таки узгоджується з властивостями власних чисел багатовимірних задач Штурма-

Ліувіля. Тому і при наявності таких додаткових умов за задачею зберігається назва задачі Штурма-Ліувіля. Всі задачі для рівняння Гельмгольца з однорідними межовими умовами, розглянуті у цій главі, будуть належати саме до таких задач.

## 4.1.Одновимірне рівняння Гельмгольца

Ми детально розглянемо цю задачу, оскільки одновимірне рівняння Гельмгольца з відповідними межовими умовами часто виникає при розв'язанні великої кількості більш складних межових задач.

### 4.1.1. $x \in [a.b]$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувіля для рівняння, розв'язками якого є тригонометричні та гіперболічні функції

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2} + \lambda f(x) = 0$$

з межовими умовами першого, другого та третього родів.

*Почнемо розгляд з межових умов першого роду:*

$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0.$$

Як було показано вище, загальний розв'язок рівняння у тригонометричній формі можна записати так

$$f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)\ .$$

Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно довільних сталих $A, B$:

$$f(a) = A\cos(\sqrt{\lambda}a) + B\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

$$f(b) = A\cos(\sqrt{\lambda}b) + B\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

Оскільки ми шукаємо ненульовий розв'язок, то хоча б один з його коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише у випадку, коли визначник отриманої системи рівнянь дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}a & \sin(\sqrt{\lambda}a) \\ \cos(\sqrt{\lambda}b & \sin(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

$$\cos(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}b) - \sin(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}b) = 0,$$

або, якщо використати відому тригонометричну формулу

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta),$$

вираз набере вигляду:

$$\sin[\sqrt{\lambda}(b-a)]=0.$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$\sqrt{\lambda}(b-a)=n\pi.$$

Оскільки ліва частина цієї рівності додатна, то додатною має бути і права частина. Це можливо, коли $n\in N$. Отже, одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}},\ n\in N$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x)=A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)},$$

при цьому один з коефіцієнтів $A,B$ може бути вираженим через інший за допомогою або першої, або другої межових умов, наприклад,

$$A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}a)+B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}a)=0 .$$

Звідси

$$A_n=-B_n\tan(\sqrt{\lambda_n}a) .$$

Легко довести, що $\lambda=0$ не є власним числом даної задачі. У випадку $n=0$, що відповідає $\lambda=0$, загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$f(x)=Ax+B .$$

Підстановка його у межові умови дає наступний результат:

$$f(a)=Aa+B=0,$$

$$f(b)=Ab+B=0.$$

Визначник цієї однорідної системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь у загальному випадку не дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}=a-b\neq 0,$$

отже система має лише нульовий розв'язок, тобто $f(x)=0$ . Відповідно до цього, $\lambda=0$ не є власним числом першої межової задачі. Цей же результат випливає і з загальної теорії задачі Штурма-Ліувіля.

*Розглянемо тепер межові умови другого роду:*

$$df(a)/dx=0, \qquad df(b)/dx=0 .$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувіля, для другої межової задачі, власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для $\lambda>0$ загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

для $\lambda = 0$

$$f(x) = C + Dx\ .$$

Розглянемо спочатку випадок $\lambda > 0$. Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$df(a)/dx = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

$$.\ df(b)/dx = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b) = 0.$$

Оскільки розв'язок за умовою ненульовий, то хоча б один з його коефіцієнтів має бути відмінним від нуля. Це можливо лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} -\sin(\sqrt{\lambda}a & \cos(\sqrt{\lambda}a) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}b & \cos(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

$$\sqrt{\lambda}[\cos(\sqrt{\lambda}b)\sin(\sqrt{\lambda}a) - \sin(\sqrt{\lambda}b)\cos(\sqrt{\lambda}a)] = 0\ ,$$

або

$$\sqrt{\lambda}\sin[\sqrt{\lambda}(b-a)] = 0\ .$$

Останнє можливе лише при умові, що

$$\sqrt{\lambda}(b-a) = n\pi,$$

де, для $\lambda > 0$, $n = 1,2,\ldots$. Звідки і одержуємо спектр власних чисел, що збігається з попереднім. Оскільки у другої межової задачі є і нульове власне число, тому зразу запишемо загальний результат

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}},\ n = 0,1,2,\ldots\ .$$

Відповідні власні функції матимуть подібний вигляд

$$\boxed{f_n(x) = A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)},$$

але зв'язок між коефіцієнтами $A, B$ буде дещо іншим, оскільки іншими є межові умови, з яких випливає цей зв'язок. Дійсно,

$$-A_n\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}a) + B_n\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}a) = 0\ .$$

Звідси

$$A_n = B_n\sqrt{\lambda_n}\cot(\sqrt{\lambda_n}a)\ .$$

Нехай тепер $\lambda = 0$. Підстановка загального розв'язку рівняння в обидві межові умови дає одне співвідношення

$$D = 0.$$

Таким чином, для власного числа $\lambda=0$ власною функцією є

$$f_0(x)=C.$$

*Розглянемо нарешті випадок межових умов третього роду:*

$$\alpha_1\frac{df(a)}{dx}-\beta_1 f(a)=0,\quad \alpha_2\frac{df(b)}{dx}+\beta_2 f(b)=0.$$

Оскільки дана задача належить до задач Штурма-Ліувіля, то власні числа цієї задачі не можуть бути від`ємними Розглянемо спочатку випадок додатних власних чисел $\lambda>0$, які завжди існують. Після підстановки загального розв'язку у ці межові умови, вони наберуть вигляду:

$$\begin{gathered}A[\beta_1\cos(\sqrt{\lambda}a)+\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a)]+\\+B[\beta_1\sin(\sqrt{\lambda}a)-\alpha_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a)]=0,\\A[\beta_2\cos(\sqrt{\lambda}b)-\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b)]+\\+B[\beta_2\sin(\sqrt{\lambda}b)+\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b)]=0.\end{gathered}$$

Аналогічно попередньому, власні числа знаходяться з рівняння:

$$\begin{vmatrix}\beta_1\cos(\sqrt{\lambda}a)+ & \beta_1\sin(\sqrt{\lambda}a)- \\ +\alpha_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}a) & -\alpha_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a) \\ \beta_2\cos(\sqrt{\lambda}b)- & \beta_2\sin(\sqrt{\lambda}b)+ \\ -\alpha_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}b) & +\alpha_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}b)\end{vmatrix}=0.$$

Після розкриття визначника, рівнянню можна надати вигляд

$$\begin{gathered}(\beta_1\beta_2-\lambda\alpha_1\alpha_2)\sin[\sqrt{\lambda}(b-a)]+\\+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\sqrt{\lambda}\cos[\sqrt{\lambda}(b-a)]=0.\end{gathered}$$

Власні числа даної задачі є розв`язками цього трансцендентного рівняння. Останнє, на відміну від межових задач першого і другого роду, можна розв`язати лише чисельно. Власні функції цієї задачі мають вигляд

$$f_n(x)=A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x),$$

де зв`язок між коефіцієнтами $A_n, B_n$ визначається будь-якою з двох межових умов.

Розглянемо тепер випадок $\lambda=0$. Підстановка загального розв'язку рівняння $f(x)=C+Dx$ в обидві межові умови дає наступну систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $C$ і $D$:

$$C(\alpha_1-\beta_1 a)+\beta_1 D=0,$$
$$C(\alpha_2+\beta_2 b)+\beta_2 D=0\ .$$

Її визначник

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-\beta_1 a & \beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 b & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

очевидно відмінний від нуля, що можливо лише за умові, що система має лише нульові розв'язки, тобто $C=D=0$. Таким чином, $\lambda=0$ не є власним числом даної межової задачі. Цей же результат випливає і з загальної теорії задачі Штурма-Ліувіля.

Власні функції третьої межової задачі матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x)=A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}\ ,$$

де зв'язок між коефіцієнтами $A,B$ отримується зо допомогою будь-якої з межових умов, наприклад,

$$A_n[\beta_1\cos(\sqrt{\lambda_n}a)+\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}a)]+$$
$$+B_n[\beta_1\sin(\sqrt{\lambda_n}a)-\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}a)]=0,$$

Звідси

$$A_n=-B_n\frac{\beta_1\sin(\sqrt{\lambda_n}a)-\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}a)}{\beta_1\cos(\sqrt{\lambda_n}a)+\alpha_1\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}a)}\ .$$

Характерною рисою власних функцій всіх розглянутих у параграфі межових задач є те, що вони не є ні парними, ні непарними. Такими вони залишаються і у разі інших проміжків, розглянутих нижче.

### **4.1.2.** $x\in[0.l]$

Розглянемо задачу Штурман - Ліувіля для рівняння

$$\frac{d^2f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0$$

для проміжку, однією з границь якого є початок координат, з межовими умовами першого, другого та третього родів.

*Почнемо розгляд з межових умов першого роду:*

$$f(0)=0,\qquad f(l)=0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння для $\lambda>0$ має вигляд

$$f(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержимо:

$$f(0)=A=0,$$
$$f(l)=B\sin(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

Ця система рівнянь є значно простішою за аналогічну систему у випадку довільного проміжку і дозволяє безпосередньо знайти з першого рівняння одну з довільних сталих $A=0$, а з другого - спектр власних чисел. Дійсно, оскільки $B\neq 0$, інакше ми мали б лише нульовий розв'язок, то

$$\sin(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

У висліді одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \qquad n\in N$$

що збігається з спектром першої межової задачі для довільного проміжку. Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}\,.$$

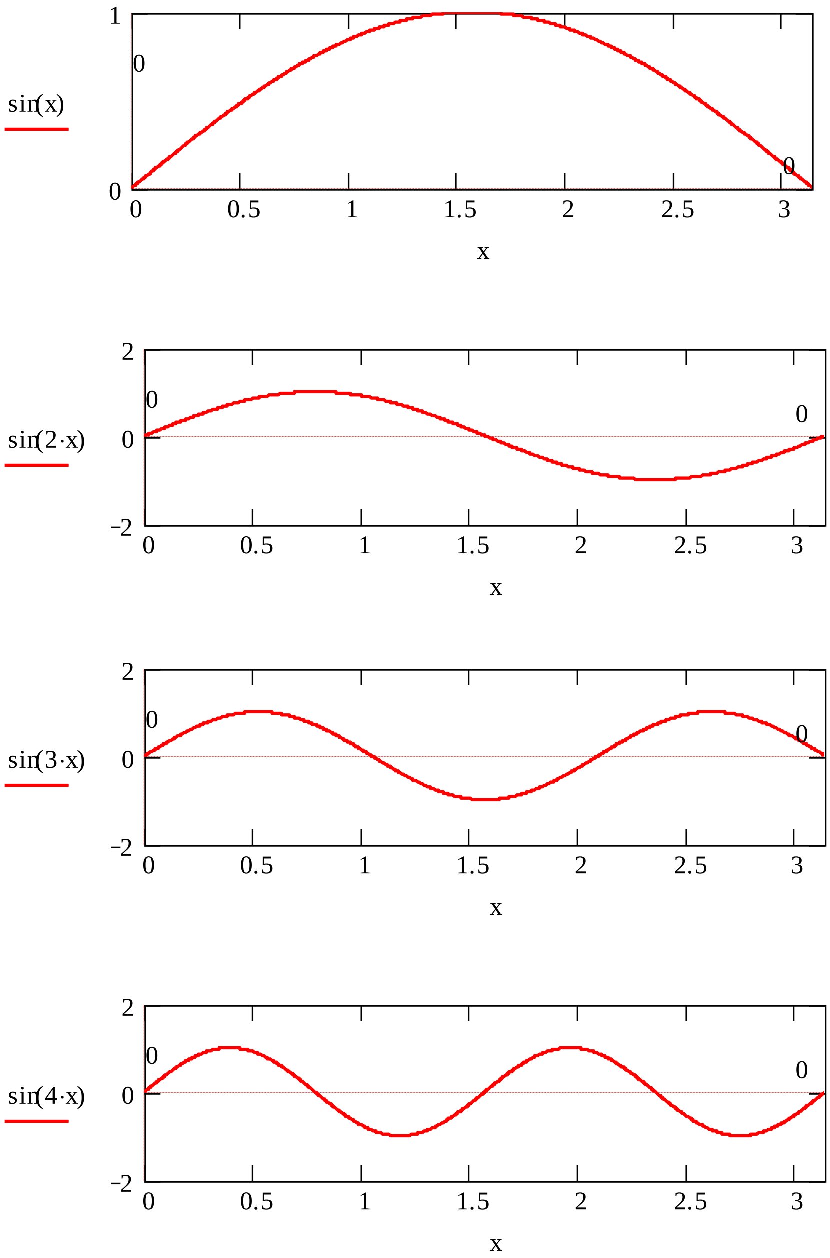
Оскільки власні функції задачі Штурма-Ліувіля визначені з точністю до довільного множника, то, для простоти, ми поклали його рівним одиниці. Характерною ознакою цих власних функцій є те, що всі вони непарні.

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувіля для другої межової задачі, ці власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для $\lambda>0$ загальний розв'язок має вигляд

$$f(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

для $\lambda=0$

$$f(x)=C+Dx\,.$$




**Малюнок 25.** *Власні функції першої межової задачі для* $x \in [0.\pi]$

*Розглянемо тепер межові умови другого роду:*

$$df(0)/dx = 0, \qquad df(l)/dx = 0 \ .$$

Візьмемо спочатку випадок $\lambda > 0$. Після підстановки розв'язку у межові умови, одержимо:

$$df(0)/dx = B = 0,$$

$$.\ df(l)/dx = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Ця система рівнянь теж значно простіша за аналогічну систему у випадку довільного проміжку і дозволяє безпосередньо знайти з першого рівняння одну з довільних сталих $B=0$, з другого рівняння - спектр власних чисел. Дійсно, оскільки $A\neq 0$, інакше ми мали б лише нульовий розв'язок, то

$$\sin(\sqrt{\lambda}l)=0.$$

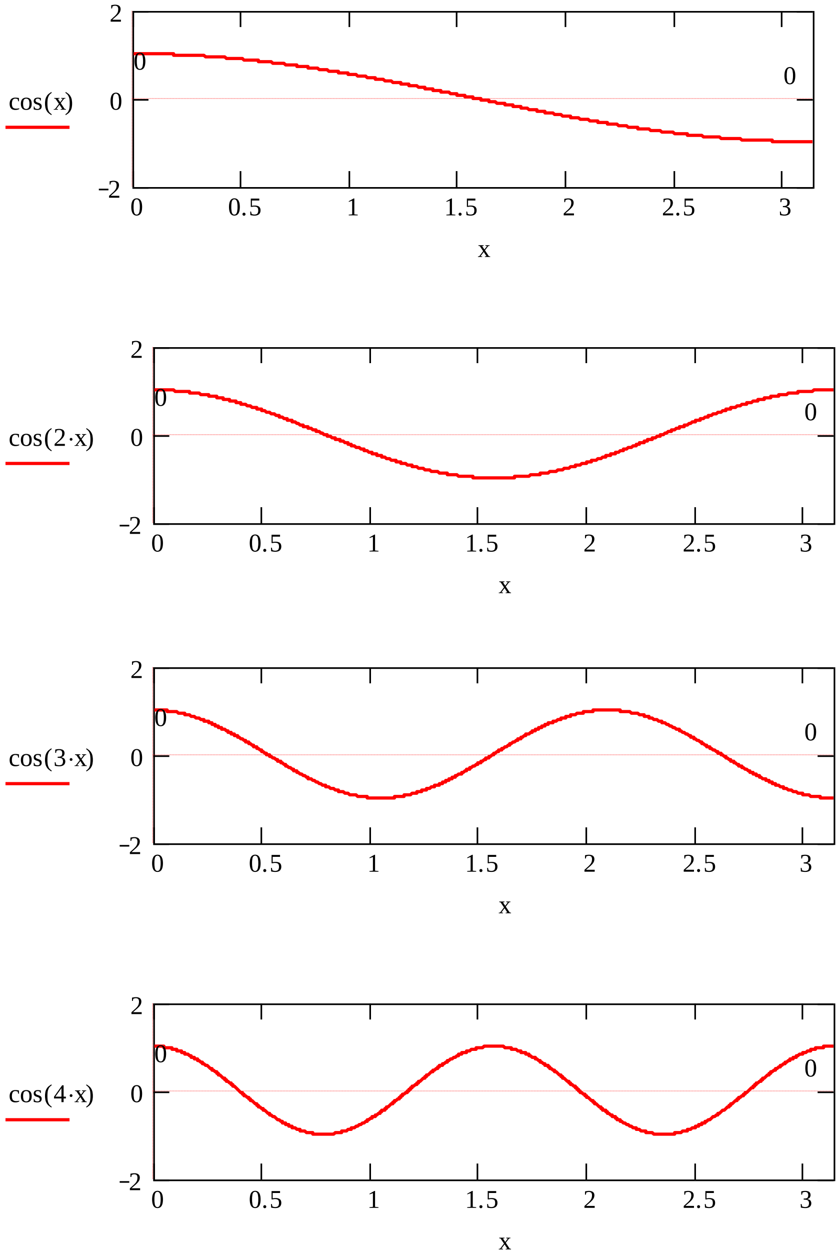
Звідси

$$\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}},\quad n=0,1,2,\ldots$$

Тут присутнє $n=0$, оскільки таке його значення відповідає $\lambda=0$, що для другої межової задачі Штурман - Ліувіля є власним числом. У висліді ми одержуємо спектр власних чисел, що збігається з спектром першої межової задачі для довільного проміжку, крім власного числа $\lambda=0$. Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x)=\cos(\sqrt{\lambda_n}x)}.$$

Характерною їх ознакою є те, що всі вони парні.




**Малюнок 26.** *Власні функції другої межової задачі для* $x\in[0.\pi]$

### 4.1.3. $x\in[-l.l]$

У зазначеному випадку задача Штурма-Ліувіля має вигляд

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0$$

з межовими умовами першого, другого та третього родів.

*Почнемо розгляд з межових умов першого роду:*

$$f(-l)=0, \qquad f(l)=0.$$

Як було показано вище, загальний розв'язок цього рівняння для $\lambda > 0$ є

$$f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Після підстановки розв'язку у межові умови, одержуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $A, B$:

$$f(-l) = A\cos(\sqrt{\lambda}l) - B\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$f(l) = A\cos(\sqrt{\lambda}l) + B\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Оскільки цей розв'язок за умовою є ненульовим, то хоча б один з його довільних коефіцієнтів повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише за умові, що визначник матриці системи однорідних рівнян дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}l) & -\sin(\sqrt{\lambda}l) \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, маємо

$$\cos(\sqrt{\lambda}l)\sin(\sqrt{\lambda}l) = \sin(2\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Останнє можливе лише при умові, що

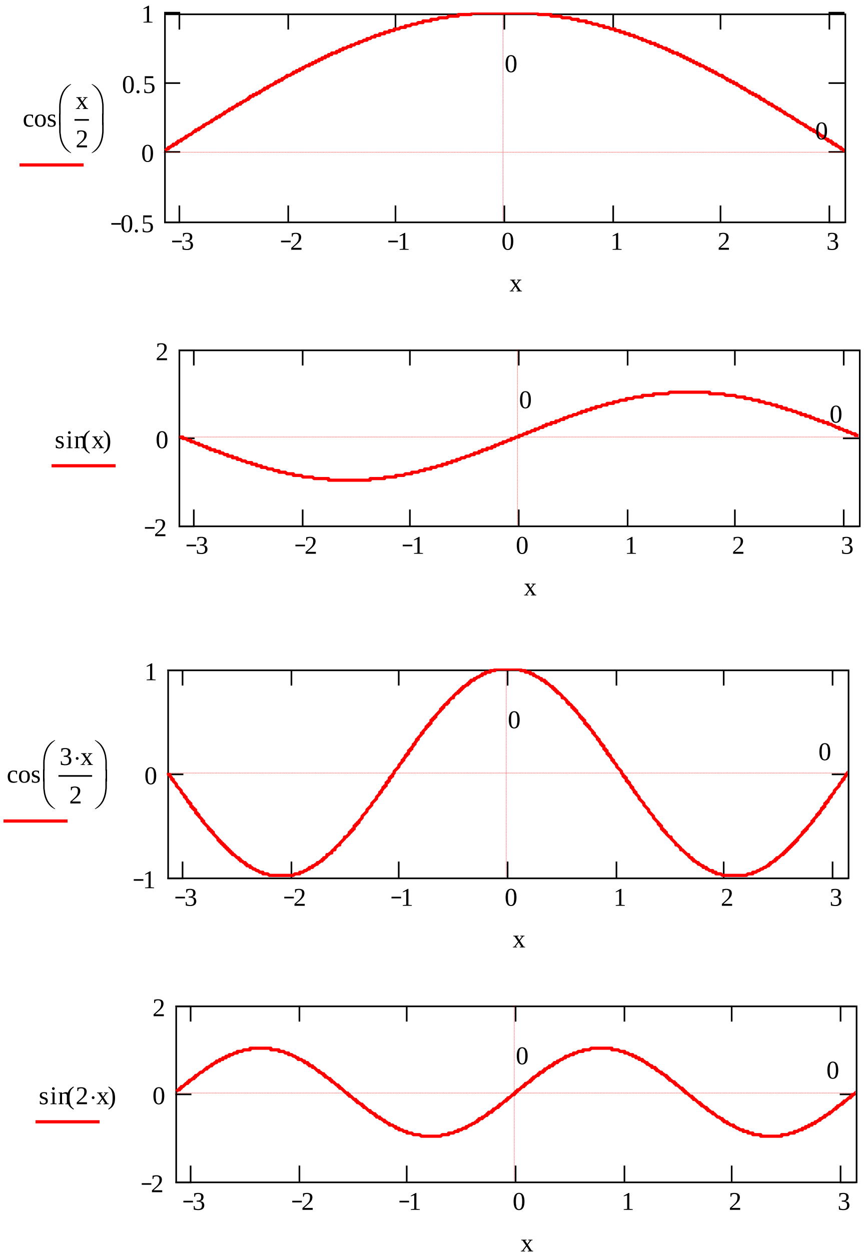
$$2\sqrt{\lambda}l = n\pi, \quad n \in N .$$

Тут відсутнє $n = 0$, оскільки таке його значення відповідає $\lambda = 0$, але перша межова задача таке власне число відсутнє. У висліді одержуємо наступний спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4l^2}}, \quad n \in N .$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{f_n(x) = A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}x) + B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x)} .$$




**Малюнок 27.***Власні функції першої межової задачі для* $x \in [-\pi, \pi]$

При цьому один з коефіцієнтів $A, B$ може виразити через інший, використавши будь-яку з межових умов, наприклад,

$$A_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Якщо $n$ - парне, то це рівняння має вигляд

$$A_n = 0,$$

і власними функціями будуть непарні функції

$$\boxed{f_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)}\,.$$

Якщо ж $n$ - непарне, то це рівняння має вигляд

$$B_n = 0,$$

і власними функціями будуть парні функції

$$\boxed{f_n(x) = \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)}\,.$$

Отже, у випадку симетричного проміжку, власними функціями будуть окремо парні і окремо непарні власні функції.

*Розглянемо тепер межові умови другого роду:*

$$df(-l)/dx = 0, \qquad df(l)/dx = 0\ .$$

Відповідно до загальних властивостей власних чисел задачі Штурма-Ліувіля для другої межової задачі, ці власні числа можуть бути лише невід'ємними. При цьому для $\lambda > 0$ загальний розв'язок має вигляд

$$f(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Для $\lambda = 0$

$$f(x) = C + Dx\,.$$

Розглянемо спочатку випадок $\lambda > 0$. Після підстановки цього розв'язку у межові умови, одержуємо:

$$df(\lambda,-l)/dx = A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

$$.\ df(\lambda,l)/dx = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Оскільки цей розв'язок за умовою є ненульовим, то хоча б один з коефіцієнтів цього розв'язку повинен бути відмінним від нуля. Це можливо лише у випадку, коли визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} \sin(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}l) & \cos(\sqrt{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюючи цей визначник, одержуємо

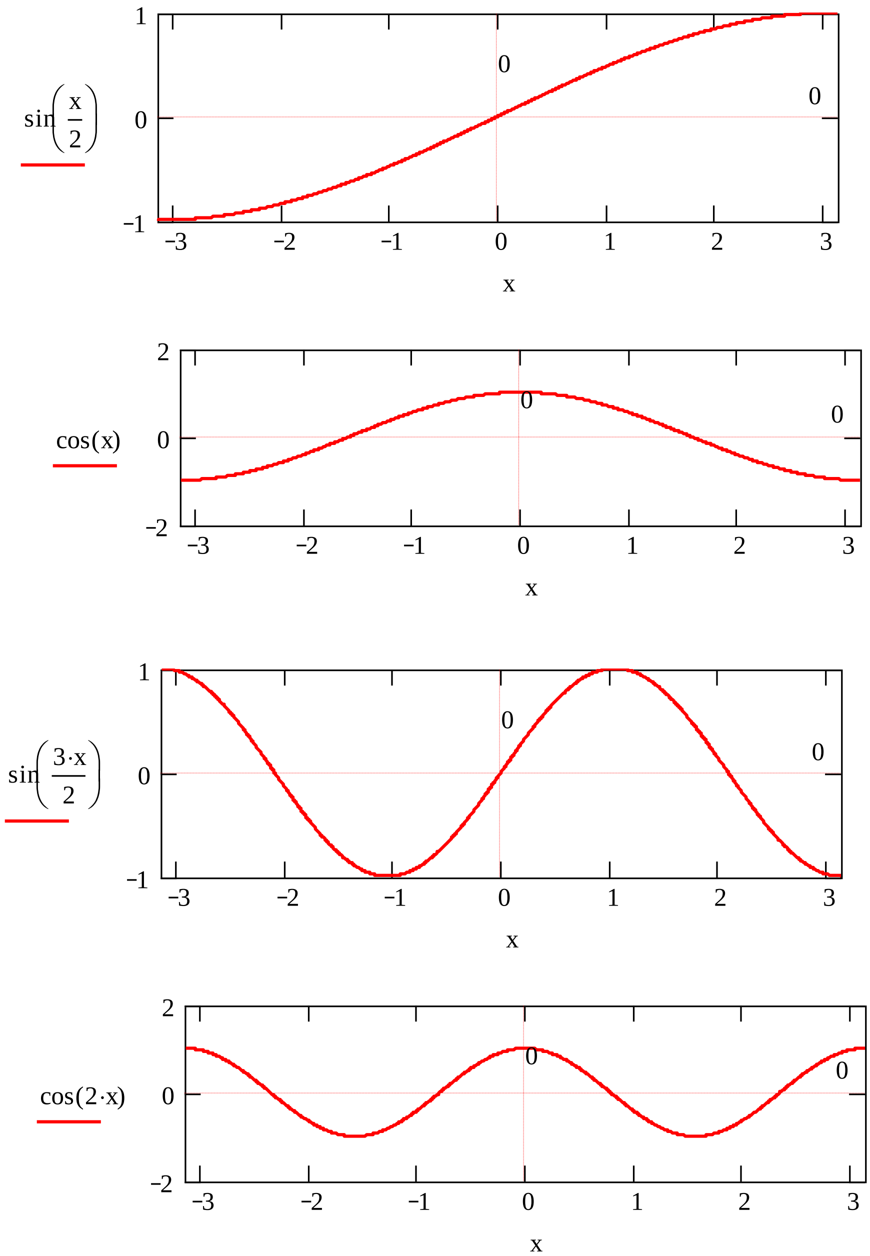
$$\cos(\sqrt{\lambda}b)\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0$$

або

$$\sin(2\sqrt{\lambda}l) = 0$$

Звідки знаходимо спектр власних чисел

$$\boxed{\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4l^2}}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$




**Малюнок 28.** *Власні функції другої межової задачі для* $x \in [-\pi, \pi]$

Відповідні власні функції матимуть подібний вигляд

$$\boxed{f_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} x) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} x)},$$

але зв'язок між коефіцієнтами $A, B$ буде дещо іншим, а саме

$$B_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Якщо $n$ - парне, то це рівняння має вигляд

$$B_n = 0,$$

і власними функціями будуть парні функції

$$\boxed{f_n(x)=\cos(\sqrt{\lambda_n}x)}\ .$$

Якщо ж $n$ - непарне, то це рівняння має вигляд

$$A_n=0,$$

і власними функціями будуть непарні функції

$$\boxed{f_n(x)=\sin(\sqrt{\lambda_n}x)}\ .$$

Отже, у випадку симетричного проміжку, власними функціями другої межової задачі теж будуть окремо парні, і окремо непарні власні функції. Порядок їх чергування буде зворотним відносно порядку чергування парних і непарних власних функцій першої межової задачі.

### 4.1.4.Циклічні межові умови

Важливе практичне значення має наступне рівняння з циклічними межовими умовами:

$$\boxed{\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0}\ ,$$

$$\boxed{\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)}\ .$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна записати або за допомогою тригонометричних функцій

$$\Phi(\varphi)=C\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)+D\sin(\sqrt{\lambda}\varphi),$$

або за допомогою показникових функцій

$$\Phi(\varphi)=A\exp(i\sqrt{\lambda}\varphi)+B\exp(-i\sqrt{\lambda}\varphi),$$

де $A=(C-iD)/2,\ A=(C+iD)/2$. Останній варіант є більш симетричним і надалі ми надамо йому перевагу.

Сукупність відповідного диференційного рівняння та циклічної межової умови вже не утворюють класичну задачу Штурма-Ліувіля з причини невідповідності останній саме межової умови. Циклічна межова умова виконуватиметься лише у разі, якщо $\lambda\geq 0$, точніше

$$\boxed{\lambda_n=n^2}\ ,\quad n=0,1,2,...\ ,$$

що легко перевіряється безпосередньою підстановкою. Останнє співвідношення і визначає спектр власних чисел задачі, який, очевидно, є дискретним, дійсним, невід'ємним, як і у разі задачі Штурма-Ліувіля. Власні функції цієї задачі мають вигляд

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\exp(in\varphi)+B_n\exp(-in\varphi), \quad n=0,1,2,... .$$

Вони мають бути дійсними, оскільки дійсним є рівняння і межова умова. Дійсність власних функцій вимагає виконання наступної умови

$$\Phi_n(\varphi)=\Phi_n^*(\varphi) ,$$

або

$$A_n\exp(in\varphi)+B_n\exp(-in\varphi)=A_n^*\exp(-in\varphi)+B_n^*\exp(in\varphi) .$$

Останнє мждливе лише у разі, якщо $A_n=B_n^*$ ($B_n=A_n^*$). При цьому, на відміну від власних функцій задачі Штурма-Ліувіля для цього ж диференційного рівняння з межовими умовами першого, другого або третього родів, кожному власному числу $\lambda_n$ відповідають дві, а не одна, лінійно незалежні власні функції:

$$\phi_n(\varphi)=\exp(in\varphi) , \quad \psi_n(\varphi)=\exp(-in\varphi), \; n=0,1,2,... .$$

Тобто, спектр власних чисел задачі подвійно вироджений. Виключення становить лише власне число $\lambda=0$. Сукупність цих власних функцій утворює повну і ортогональну систему функцій, наприклад, у просторі $L_2[0,2\pi]$ .

Оскільки $\psi_n(\varphi)=\phi_{-n}(\varphi)$, то замість наведеного набору власних функцій можна розглядати і такий:

$$\phi_n(\varphi)=\exp(in\varphi) , \; n\in Z ,$$

або

$$\boxed{\Phi_n(\varphi)=\exp(in\varphi)} , \; n\in Z ,$$

який так само є повним і ортогональним у просторі $L_2[0,2\pi]$. Дійсно, у першому разі розвинення довільної функції $f(x)\in L_2[0,2\pi]$ в ряд Фур`є має вигляд

$$f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\exp(in\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\exp(-in\varphi) .$$

У другому разі

$$f(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\exp(in\varphi) ,$$

де $C_n=A_n$ для $n\geq 0$ і $C_n=B_n$ для $n<0$. Тотожність обох розвинень очевидна.

## 4.2. Двовимірні декартові координати

Розглянемо випадок, коли область, де шукається розв'язок рівняння, має прямокутну форму. Для зручності, виберемо початок координат в одній з вершин прямокутника, а осі координат направимо вздовж його суміжних сторін. У цьому разі $0 \le x \le l,\ 0 \le y \le h$.

Однорідні межові умови першого роду мають вигляд:

$$u(0,y)=0, \qquad u(l,y)=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad u(x,h)=0.$$

У декартових координатах рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0}\,.$$

Розв'яжемо рівняння методом поділу змінних. Для цього будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

Після підстановки останнього виразу у рівняння і поділу обох його частин на це же вираз, воно набере вигляду

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\lambda=0.$$

Відділивши один з доданків, матимемо

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}-\lambda=-\mu.$$

Це рівняння еквівалентне системі звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\mu X(x)=0,$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+(\lambda-\mu)Y(y)=0.$$

Процедура поділу змінних в однорідних межових умовах носить елементарний характер і приводить до наступного результату

$$X(0)=X(l)=Y(0)=Y(h)=0.$$

У висліді ми привели задачу Штурма-Ліувіля для рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними до двох окремих задач Штурма-Ліувіля для звичайних диференційних рівнянь. Загальний розв'язок першого рівняння системи, має вигляд

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\mu}x)+B\sin(\sqrt{\mu}x).$$

Межові умови першого роду дозволяють записати власні числа і власні функції у наступному вигляді:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \qquad n \in N\ .$$

Аналогічний вигляд мають власні числа і власні функції другої задачі Штурма-Ліувіля:

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right),$$

$$\lambda_{nm}{}^2 - \mu_n{}^2 = \frac{m^2\pi^2}{h^2}, \qquad m \in N\,.$$

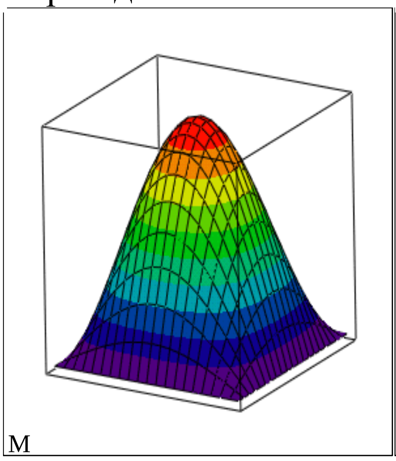
Тепер можна знайти власні числа вихідної задачі Штурма-Ліувіля

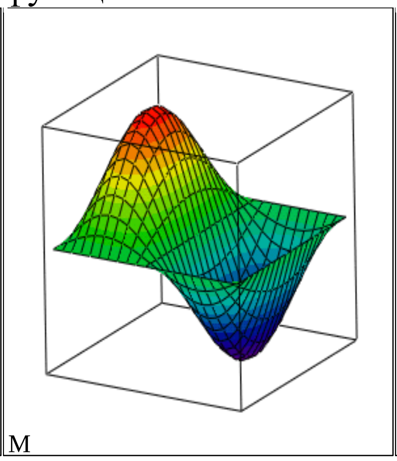
$$\boxed{\lambda_{nm}{}^2 = \pi^2\left[\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2}\right]}, \qquad n,m \in N\ .$$

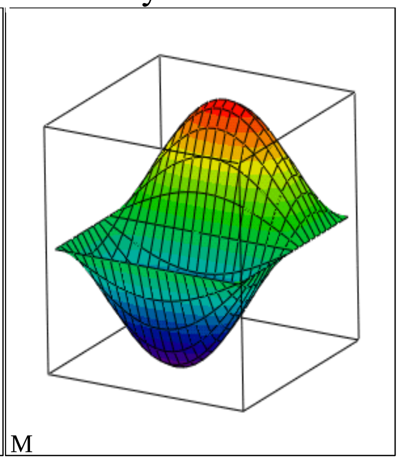
Як бачимо, вони є невиродженими. У висліді ми одержимо набір частинних розв'язків, що є власними функціями вихідної задачі Штурма-Ліувіля

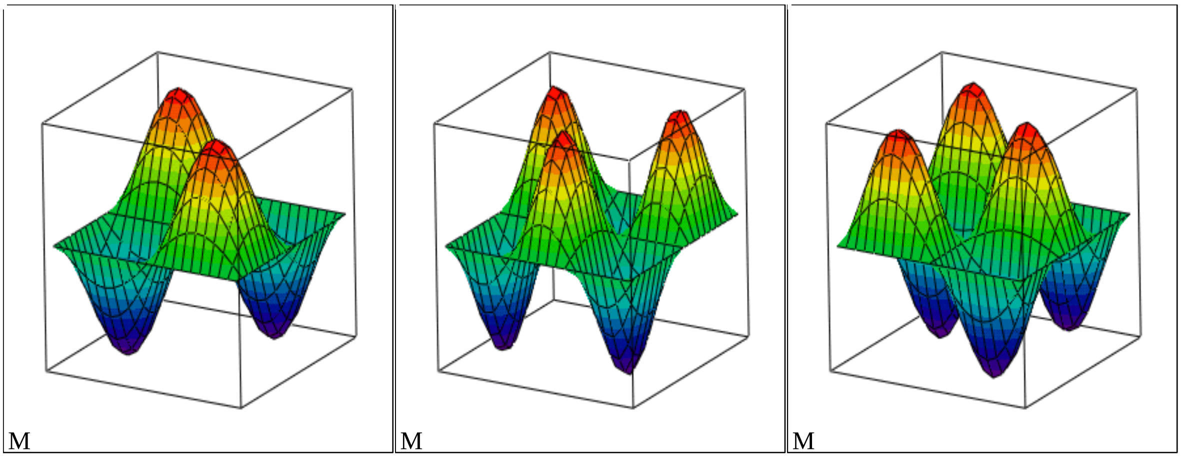
$$\boxed{u_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)}\,.$$

На цьому етапі розв'язання задачі можна вважати завершеним. Перші декілька власних функцій можна побачити на наступних малюнках.






**Малюнок 29.**Власні функції $u_{11}(x,y)$, $u_{12}(x,y)$, $u_{21}(x,y)$, $u_{22}(x,y)$, $u_{23}(x,y)$, $u_{32}(x,y)$

## 4.3. Полярні координати

Будемо шукати роз в'язок рівняння Гельмгольца у області, якою є круг радіуса $r_0$. Оскільки, якщо розмістити початок координат у центрі кола, границя круга збігається з однією з координатних ліній полярної системи координат, то саме її і слід використати для розв'язку рівняння.

Полярні координати для внутрішньої частини круга змінюються у наступних межах:

$$r \in [0, r_0], \qquad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На межі кола $r = r_0$ задамо однорідну межову умова першого роду

$$u(r_0, \varphi) = 0.$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі кола, тобто у початку координат. Оскільки ця точка фізично не виділена, то відповідна межова умова просто вимагає, щоб вона була звичайною точкою диференційного рівняння, що, зокрема, означає

$$u(o, \varphi) < \infty.$$

Для азимутального кута межові точки збігаються, очевидно, збігаються, при цьому, і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\varphi = 0$ фізично нічим не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Це означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом

$$u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi).$$

У полярних координатах рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda r^2 u(r,\varphi)=0}\,.$$

У відповідності до методу поділу змінних, шукатимемо частинні розв’язки рівняння у вигляді

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda r^2=0.$$

Це рівняння вже зручне для виділення рівнянь для кожної з функцій $R(r),\Phi(\varphi)$. Його можна записати, наприклад, так

$$-\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda r^2=\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\mu\ .$$

Тут $\mu$ - стала поділу. Звідси одержуємо систему двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\mu,$$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda r^2=\mu.$$

Після раціоналізації система цих рівнянь набере наступного вигляду:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+(\lambda r^2-\mu)R(r)=0,$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\mu\Phi(\varphi)=0.$$

Загальний розв'язок другого рівняння можна записати так

$$\Phi(\varphi)=A\exp(i\sqrt{\mu}\varphi)+B\exp(-i\sqrt{\mu}\varphi).$$

В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Сукупність відповідного диференційного рівняння та останньої межової умови вже не утворюють задачу Штурма-Ліувіля. Ця умова виконуватиметься лише, якщо власними числами задачі будуть наступні подвійно вироджені числа

$$\mu_n=n^2,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots\ .$$

Як уже зазначалось вище, власні функції цього рівняння доцільно обрати у вигляді

$$\Phi_n(\varphi)=\exp(in\varphi), \qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

Межові умови на межі круга і у його центрі після поділу змінних набувають вигляду:

$$R(r_o)=0, \qquad R(o)<\infty.$$

Друге рівняння цієї системи тепер можна записати так

$$\frac{d^2R_n(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_n(r)}{dr}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R(r)=0.$$

Це є рівняння Беселя для функцій Беселя цілого порядку. Воно разом з відповідними межовими умовами утворює узагальнену задачу Штурма-Ліувіля. Здавалося б наявність додаткової межової умови обмежувального характеру, не передбаченої задачею Штурма-Ліувіля, мало б унеможливити межову задачу Штурма-Ліувіля для даного рівняння. Фактично ж, наявність цієї умови гарантує виконання у початку координат узагальненої однорідної межової умови першого роду, якраз і передбаченої набором межових умов для узагальненої задачі Штурма-Ліувіля. Множник в узагальненій межовій умові $k(r)=r$. Звідси $k(0)=0$, що гарантує її виконання.

Загальний розв'язок останнього рівняння можна записати у вигляді

$$R_n(r)=A_nJ_n(\sqrt{\lambda}r)+B_nN_n(\sqrt{\lambda}r), \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

Межова умова обмежувального характеру виділяє з цього розв'язку функції Беселя

$$R_n(r)=A_nJ_n(\sqrt{\lambda}r),$$

оскільки функції Ноймана мають логарифмічну особливість у нулі.

Однорідна межова умова на межі круга

$$A_nJ_n(\sqrt{\lambda}r_0)=0$$

може бути виконана лише у випадку, коли $\sqrt{\lambda_{nm}}r_0$ ($m=0,1,2,\ldots,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$) є $m$ - им нулем функції Беселя $n$ - го порядку. Отже, власними числами цієї задачі, а також і всієї вихідної задачі, є нулі функцій Беселя цілих порядків, а власними функціями - функції Беселя:

$$R_{nm}(r)=J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r).$$

Власними функціями вихідної задачі для рівняння Гельмгольца будуть добутки

$$\boxed{u_{nm}(r,\varphi)=J_n(\sqrt{\lambda_{nm}}r)\exp(in\varphi)}\ .$$

Оскільки власні числа задачі не залежать від знаку $n$ , а додатними і від'ємним його значенням відповідають різні власні функції, то спектр задачі є двічі виродженим для всіх $n$, крім $n=0$.

### 4.4. Еліптичні координати

Розв'яжемо двовимірне рівняння Гельмгольца для області, що має форму еліпса. Оскільки, якщо розмістити початок координат у центрі еліпса, його границя збігається з однією з координатних ліній еліптичної системи координат, то саме цю систему і слід використати для розв'язку рівняння. Її координатними лініями є еліпси та гіперболи, що мають спільні з еліпсом полюси. Еліптичні координати для внутрішньої частини еліпса змінюються у наступних межах:

$$\mu \in [0, \mu_0], \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На межі еліпса $\mu = \mu_0$ задамо однорідну межову умова першого роду

$$u(\mu_0, \theta) = 0.$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі еліпса, тобто на прямій, що з'єднує його фокуси. Оскільки ця ліній фізично нічим не виділена, то відповідна межова умова носить обмежувальний характер

$$u(o, \theta) < \infty.$$

Для азимутального кута, для якого межові точки збігаються, межові умови є умовами періодичності невідомої функції з періодом $2\pi$

$$u(\mu, \theta) = u(\mu, \theta + 2\pi).$$

Ще одна додаткова умова пов'язана з тим, що рівняння симетричне відносно наступної перестановки аргументів:

$$\theta \to i\mu, \quad \mu \to i\theta.$$

В еліптичній системі координат рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\frac{4}{a^2\left[\cosh^2(\mu) - \cos^2(\theta)\right]}\left(\frac{\partial^2 u(\mu,\theta)}{\partial^2 \mu} + \frac{\partial^2 u(\mu,\theta)}{\partial \theta^2}\right) + \lambda u(\mu,\theta) = 0}\ .$$

Будемо шукати частинні розв’язки рівняння у вигляді

$$u(\mu, \theta) = \mathrm{M}(\mu)\Theta(\theta).$$

Зазначена вище симетрія рівняння приводить до того, що обидва множники у правій частині останньої рівності мають однакову симетрію. Вони або обидва парні, або обидва непарні.

Після підстановки останнього добутку у рівняння одержимо

$$\frac{4}{a^2\left[\cosh^2(\mu)-\cos^2(\theta)\right]}\left(\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}\right)+\lambda=0.$$

Це рівняння зручне для виділення рівнянь для кожної з функцій $\mathrm{M}(\mu),\Theta(\theta)$. Його можна записати, наприклад, у вигляді

$$\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}+\frac{1}{4}\lambda a^2\cosh^2(\mu)=$$

$$=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\frac{1}{4}\lambda a^2\cos^2(\theta)=\nu.$$

Тут $\nu$ - стала поділу. Звідси одержуємо наступну систему двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}+\frac{1}{4}\lambda a^2\cosh^2(\mu)=\nu,$$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}-\frac{1}{4}\lambda a^2\cos^2(\theta)=-\nu.$$

Після раціоналізації система рівнянь набере наступного вигляду:

$$\boxed{\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}+\left[\frac{1}{4}\lambda a^2\cosh^2(\mu)-\nu\right]\mathrm{M}(\mu)=0},$$

$$\boxed{\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\left[\nu-\frac{1}{4}\lambda a^2\cos^2(\theta)\right]\Theta(\theta)=0}.$$

Обидва рівняння системи є рівняннями Мат'є, тільки перше для функцій Мат'є уявного аргументу, а друге - дійсного. Після поділу змінних умова періодичності набуває вигляду

$$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi).$$

Ця умова може бути виконана лише для дискретного набору значень $\nu$. Для $\nu=0$ це будуть квадрати довільних цілих чисел. Періодичними розв'язками другого рівняння системи є парні та непарні функції Мат'є:

$$\boxed{Se\left[\lambda,\cos(\theta)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(\lambda)\cos\left[(2n+1)\theta\right]},$$

$$\boxed{So\left[\lambda,\cos(\theta)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(\lambda)\sin\left[(2n+1)\theta\right]}.$$

Коефіцієнти цих розвинень визначаються наступними нескінченними системами лінійних алгебраїчних рівнянь (рекурентними співвідношеннями):

$$(\nu-1)A_1-\frac{1}{8}\lambda a^2(A_1+A_3)=0,$$

для $m\geq 3$:

$$(\nu-m^2)A_m-\frac{1}{8}\lambda a^2(A_{m-2}+A_{m+2})=0,$$

$$(\nu-1)B_1-\frac{1}{8}\lambda a^2(B_1-B_3)=0,$$

$$(\nu-m^2)B_m-\frac{1}{8}\lambda a^2(B_{m-2}+B_{m+2})=0.$$

Умовою наявності у цих систем рівнянь ненульових розв'язків є рівність їх визначника нулю. Ця умова дозволяє знайти власні числа $\nu$ Ненульові розв'язки цієї алгебраїчної системи рівнянь дозволяють одержати власні функції рівняння Мат'є. При цьому звичайно використовують наступні умови нормування для власних векторів:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(\lambda,2m+1)=1,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)B_{2n+1}(\lambda,2m+1)=1.$$

Отже, власні функції рівняння Мат'є можна записати у вигляді:

$$\boxed{Se_{2m+1}\left[\lambda,\cos(\theta)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(\lambda,2m+1)\cos\left[(2n+1)\theta\right]},$$

$$\boxed{So_{2m+1}\left[\lambda,\cos(\theta)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(\lambda,2m+1)\sin\left[(2n+1)\theta\right]}.$$

Зауважимо, що розв'язана межова задача для рівняння Мат'є не є задачею Штурма-Ліувіля, а тому властивості власних чисел та власних функцій цієї задачі відрізняються від відповідних властивостей задачі Штурма-Ліувіля. Зокрема, спектр власних чисел є подвійно виродженим. Кожному власному числу відповідає одночасно парна і непарна функції Мат'є. Але вихідна багатовимірна задача залишається задачею Штурма-Ліувіля.

Власні функції першого рівняння системи можуть бути отримані заміною $\theta \to i\mu$ у вже знайдених власних функціях другого рівняння системи. Отже:

$$\boxed{Se_{2m+1}\left[\lambda,\cosh(\mu)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(\lambda,2m+1)\cosh\left[(2n+1)\mu\right]},$$

$$\boxed{So_{2m+1}\left[\lambda,\cosh(\mu)\right]=i\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(\lambda,2m+1)\sinh\left[(2n+1)\mu\right]}.$$

Крім того, вони мають задовольняти однорідній межовій умові на межі еліпса:

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(\lambda,2m+1)\cosh\left[(2n+1)\mu_0\right]=0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(\lambda,2m+1)\sinh\left[(2n+1)\mu\right]=0.$$

Останні умови дозволяють знайти спектр власних чисел $\lambda_{mk}$ вихідної задачі. Остаточно власні функції вихідної задачі матимуть вигляд:

$$\boxed{u_{mk}(\mu,\theta)=Se_{2m+1}\left[\lambda_{mk},\cosh(\mu)\right]Se_{2m+1}\left[\lambda_{mk},\cos(\theta)\right]},$$

$$\boxed{u_{mk}(\mu,\theta)=So_{2m+1}\left[\lambda_{mk},\cosh(\mu)\right]So_{2m+1}\left[\lambda_{mk},\cos(\theta)\right]}.$$

## 4.5. Двовимірні параболічні координати

Розглянемо у параболічних координатах внутрішню задачу. Нехай область утворюється двома співфокусними та співвісьними протилежно направленими параболами. Цю область у параболічній системі координат можна задати двома способами, або:

$$0\le r\le r_0, \qquad -\rho_0\le\rho\le\rho_0,$$

або:

$$-r_0\le r\le r_0, \qquad 0\le\rho\le\rho_0.$$

Для конкретності зупинимося на другому варіанті. Всі межові умови візьмемо однорідними:

$$u(-r_0,\rho)=0, \qquad u(r_0,\rho)=0, \qquad u(r,\rho_0)=0.$$

Єдина межова умова обмежувального характеру має вигляд

$$u(r,0)<\infty.$$

Для внутрішньої задачі, на відміну від зовнішньої, межова умова обмежувального характеру ніяк не допомагає при знаходженні розв'язку. Принципово важливою є інша умова, пов'язана з симетрією задачі. Її симетрія відносно координат $r$ і $\rho$ приводить до того, що частинні розв'язки повинні мати однакову симетрію за обома цими координатами.

У параболічній системі координат рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\frac{1}{r^2+\rho^2}\left[\frac{\partial^2 u(r,\rho)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u(r,\rho)}{\partial \rho^2}\right]+\lambda u(r,\rho)=0}\,.$$

У відповідності до методу поділу змінних шукатимемо частинні розв’язки у вигляді

$$u(r,\rho)=R(r)\mathrm{P}(\rho).$$

Внаслідок симетрія задачі обидва множники у правій частині мають однакову симетрію. Після підстановки добутку у рівняння одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}+r^2\lambda+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}+\rho^2\lambda=0.$$

Почнемо відділення змінних з азимутальної змінної. Для цього останнє рівняння доцільно привести до вигляду

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}+r^2\lambda=-\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}-\rho^2\lambda=\sqrt{\lambda}\nu\,.$$

Тут для подальшої зручності сталу поділу ми представили у вигляді добутку $\sqrt{\lambda}\nu$, де довільною величиною є лише $\nu$ У висліді система рівнянь розпадається на два звичайні диференційні рівняння:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\left(\lambda r^2-\sqrt{\lambda}\nu\right)R(r)=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}+\left(\lambda\rho^2+\sqrt{\lambda}\nu\right)\mathrm{P}(\rho)=0.$$

Перейшовши до нових незалежних змінних за формулами :

$$r\sqrt[4]{\lambda}\to r,\qquad \rho\sqrt[4]{\lambda}\to\rho,$$

де, для простоти, за новими змінними збережені старі назви, рівнянням можна надати стандартного вигляду рівнянь для функцій параболічного циліндра:

$$\boxed{\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\left(r^2-\nu\right)R(r)=0},$$

$$\boxed{\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}+\left(\rho^2+\nu\right)\mathrm{P}(\rho)=0}.$$

Їх розв'язками є парні (even) та непарні (odd) функції параболічного циліндра. Для другого рівняння це:

$$H_e(\nu,\rho)=1-\frac{1}{2}\nu\rho^2+\frac{1}{24}(\nu^2-2)\rho^4-\frac{1}{120}(\nu^2-14\nu)\rho^6+\ldots,$$

$$H_e(\nu,\rho)=H_e(\nu,-\rho),$$

$$H_o(\nu,\rho)=\rho-\frac{1}{6}\nu\rho^3+\frac{1}{120}(\nu^2-6)\rho^5-\frac{1}{5040}(\nu^3-26\nu)\rho^7+\ldots,$$

$$H_o(\nu,\rho)=-H_o(\nu,-\rho).$$

Ці функції безпосередньо пов'язані з гіпергеометричною функцією:

$$\boxed{H_e(\nu,\rho)=\exp\left(-i\frac{\rho^2}{2}\right)F\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\nu\left|\frac{1}{2}\right|i\rho^2\right)},$$

$$\boxed{H_o(\nu,\rho)=\rho\exp\left(-i\frac{\rho^2}{2}\right)F\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i\nu\left|\frac{3}{2}\right|i\rho^2\right)}.$$

Функції параболічного циліндра тісно пов'язані і з функціями Беселя. Так для нульового власного числа

$$\boxed{H_e(0,\rho)=\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{2\rho}\,J_{1/4}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)}.$$

Загальний розв'язок другого рівняння можна записати у вигляді

$$\mathrm{P}(\rho)=AH_e(\nu,\rho)+BH_o(\nu,\rho).$$

Після поділу змінних межові умови набувають вигляду:

$$\mathrm{P}(-\rho_0)=0, \qquad \mathrm{P}(\rho_0)=0.$$

Підстановка у них загального розв'язку дає наступні два рівняння:

$$AH_e(\nu,-\rho_0)+BH_o(\nu,-\rho_0)=0,$$

$$AH_e(\nu,\rho_0)+BH_o(\nu,\rho_0)=0.$$

Оскільки функції параболічного циліндра є або парними, або непарними, то взявши суму та різницю цих двох рівнянь, ми одержимо наступну систему рівнянь, еквівалентну попередній:

$$2AH_e(\nu,\rho_0)=0,$$
$$2BH_o(\nu,\rho_0)=0.$$

З неї випливає, що спектр власних чисел задачі Штурма-Ліувіля $\nu_n$ складається з нулів парних та непарних функцій параболічного циліндра. Власним числам, що збігаються з нулями парних функцій, відповідають власні функції, якими є парні функції параболічного циліндра. Власним числам, що збігаються з нулями непарних функцій, відповідають непарні функції параболічного циліндра. Отже, власні функції мають вигляд (при цьому ми повернемося до старих змінних):

$$\boxed{\mathrm{P}_n(\rho)=H_e(\nu_n,\rho\sqrt[4]{\lambda})}, \quad n=0,2,4,\ldots,$$

$$\boxed{\mathrm{P}_n(\rho)=H_o(\nu_n,\rho\sqrt[4]{\lambda})}, \quad n=1,3,5,\ldots.$$

Двома лінійно незалежними розв'язками першого рівняння системи теж будуть парні і непарні функції параболічного циліндра. Оскільки перше рівняння може бути отримане з другого заміною знака перед $\lambda$ на протилежний, то зазначеними розв'язками є

$$H_e(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda}),H_o(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda}).$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна записати так

$$R_n(r)=AH_e(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda})+BH_o(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda}).$$

Оскільки симетрія задачі вимагає однакової симетрії для розв'язків обох рівнянь системи, то цей загальний розв'язок буде різним для парних і непарних $n$, а саме:

$$\boxed{R_n(r)=AH_e(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda})}, \quad n=0,2,4,\ldots,$$

$$\boxed{R_n(r)=BH_o(-\nu_n,r\sqrt[4]{\lambda})}, \quad n=1,3,5,\ldots.$$

Однорідна межова умова на поверхні області має вигляд

$$R(r_0)=0.$$

Вона дає наступні рівняння для власних чисел вихідної задачі:

$$H_e(-\nu_n,r_0\sqrt[4]{\lambda})=0, \quad n=0,2,4,\ldots,$$
$$H_o(-\nu_n,r_0\sqrt[4]{\lambda})=0, \quad n=1,3,5,\ldots.$$

Ці власні числа $\lambda_m$, на цей раз уже всієї вихідної задачі, знову будуть безпосередньо пов'язані з нулями парної та непарної функцій параболічного циліндра. При цьому власні функції останньої задачі мають вигляд:

$$R_{nm}(r) = H_e(-\nu_n, r\sqrt[4]{\lambda_m}), \quad n = 0,2,4,\ldots$$

$$R_{nm}(r) = H_o(-\nu_n, r\sqrt[4]{\lambda_m}), \quad n = 1,3,5,\ldots$$

Власні функції всієї задачі тепер можна записати так:

$$\boxed{u_{nm}(r,\rho) = H_e(-\nu_n, r\sqrt[4]{\lambda_m})H_e(\nu_n, \rho\sqrt[4]{\lambda_m})}, \quad n = 0,2,4,\ldots ,$$

$$\boxed{u_{nm}(r,\rho) = H_o(-\nu_n, r\sqrt[4]{\lambda_m})H_o(\nu_n, \rho\sqrt[4]{\lambda_m})}, \quad n = 1,3,5,\ldots .$$

## 4.6. Тривимірні декартові координати

Розглянемо розв'язок рівняння Гельмгольца для тривимірної області у формі паралелепіпеда. Для зручності оберемо початок координат в одній з вершин прямокутника, а осі координат направимо вздовж суміжних ребер паралелепіпеда. Тоді $0 \le x \le l,\ 0 \le y \le h,\ 0 \le z \le s$. Однорідні межові умови першого роду мають вигляд:

$$u(0,y,z) = 0, \qquad u(l,y,z) = 0, \qquad u(x,0,z) = 0,$$

$$u(x,l,z) = 0, \qquad u(x,y,0) = 0, \qquad u(x,y,s) = 0.$$

У декартових координатах рівняння Гельмгольца є таким

$$\frac{\partial^2 u(x.y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x.y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x.y,z)}{\partial z^2} + \lambda u(x.y,z) = 0.$$

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді

$$u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Після підстановки останнього виразу у рівняння і поділу обох його частин на це же вираз, рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + \lambda = 0.$$

Відділивши один з доданків, матимемо

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} - \lambda = -\nu.$$

Тут $\nu$ - стала поділу. Останнє рівняння еквівалентне системі наступних двох диференційних рівнянь, одне з яких вже звичайне:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\nu X(x)=0,$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\lambda=\nu.$$

Відділимо тепер решту змінних, ввівши ще одну сталу поділу $\mu$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}-\lambda+\nu=-\mu,$$

звідки одержуємо вже систему двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\mu Y(y)=0,$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+(\nu+\mu-\lambda)Z(z)=0.$$

Процедура поділу змінних в однорідних межових умовах носить елементарний характер і приводить до наступного результату:

$$X(0)=X(l)=Y(0)=Y(h)=Z(0)=Z(s)=0.$$

Таким чином, задача Штурма-Ліувіля для рівняння з частинними похідними з трьома незалежними змінними звелось до трьох задач Штурма - Ліувіля для звичайних диференційних рівнянь. Власні числа і власні функції цих рівнянь знайдені раніше і мають вигляд:

$$\nu_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\quad \mu_n=\frac{m^2\pi^2}{h^2},\quad \lambda_{nmk}-\mu_n-\nu_m=\frac{k^2\pi^2}{s^2},$$

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\qquad Y_m(y)=\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right),$$

$$Z_k(z)=\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right),\qquad n,m,k\in N\ .$$

Звідси легко записати власні числа та власні функції вихідної задачі.

$$\boxed{u_{nmk}(x,y,z)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right)},$$

$$\boxed{\lambda_{nmk}=\pi^2\left[\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}+\frac{k^2}{s^2}\right]}.$$

## 4.7. Циліндричні координати

Нехай область має форму циліндра з висотою $h$ та радіусом $r_0$, ось $z$ направлена вздовж осі циліндра, а початок координат збігається з центром круга у його основі. Оскільки всі елементи поверхні циліндра збігаються з відповідними координатними поверхнями у циліндричній системі координат, то саме її доцільно обрати для розв'язку рівняння Гельмгольца. Як і раніше візьмемо однорідні межові умови першого роду на поверхні циліндру

$$u(r_0,\varphi,z)=u(r,\varphi,0)=u(r,\varphi,h)=0,$$

та наступну умову обмежувального характеру на його осі

$$u(0,\varphi,z)<\infty.$$

Врахуємо і симетрію області за азимутальним кутом

$$u(r,\varphi,z)=u(r,\varphi+2\pi,z).$$

У циліндричних координатах рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,\varphi,z)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,\varphi,z)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u(r,\varphi,z)}{\partial z^2}+\lambda u(r,\varphi,z)=0}.$$

Перейдемо у ньому до поділу змінних Частинні розв’язки цього рівняння, як і раніше, будемо шукати у вигляді наступного добутку:

$$u(r,\varphi,z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\lambda=0.$$

Цей вираз вже зручний для виділення рівняння для функції $Z(z)$. Для цього його доцільно записати так

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-\nu.$$

Тут $\nu$ - стала поділу. Звідси одержуємо систему двох рівнянь одне з яких вже звичайне:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-\nu,$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda=\nu.$$

Запишемо останнє рівняння у вигляді

$$\frac{1}{R(r)} r \frac{d}{dr}\left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) + (\lambda - \nu) r^2 = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\mu .$$

Тут $\mu$ - ще одна стала поділу. Знову одержимо систему, але звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{1}{R(r)} r \frac{d}{dr}\left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) + (\lambda - \nu) r^2 = \mu ,$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\mu .$$

Остаточно шукану систему рівнянь можна записати так:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \nu Z(z) = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu\Phi(\varphi) = 0,$$

$$a^2 r \frac{d}{dr}\left( r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[ (\lambda - \nu) r^2 - \mu \right] R(r) = 0.$$

Таким чином, ми отримали замість одного рівняння з частинними похідними з трьома незалежними змінними, три звичайні диференційні рівняння. Після поділу змінних межові умови набувають вигляду:

$$R(r_0) = Z(0) = Z(h) = 0, \;\; \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \;\; R(0) < \infty .$$

Власними числами та власними функціями першого рівняння, що разом з відповідними межовими умовами утворює задачу Штурма-Ліувіля неодноразово розглянуту вище, будуть:

$$\nu_n = \frac{n^2 \pi^2}{h^2}, \quad n \in N \;\; ,$$

$$Z_n(z) = \sin\left( \frac{n\pi}{h} z \right).$$

Неодноразово розглядувалось раніше і друге рівняння. Тому теж відразу наведемо остаточний результат для його подвійно виродженого спектру власних чисел та власних функцій:

$$\mu_m = m^2, \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \;\; ,$$

$$\Phi_m(\varphi) = \exp(im\varphi) .$$

З урахуванням останніх двох рівнянь та відповідних їм власних чисел, третє рівняння системи набуває вигляду рівняння Беселя для функцій Беселя цілого порядку

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_{nm}(r)}{dr}\right)+\left[\left(\lambda-\frac{n\pi}{h}\right)r^2-m^2\right]R_{nm}(r)=0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд лінійної комбінації функцій Беселя та Ноймана

$$R_{mn}(r)=A_{mn}J_m\left(\sqrt{\lambda-\frac{n\pi}{h}}r\right)+B_{mn}N_m\left(\sqrt{\lambda-\frac{n\pi}{h}}rr\right)$$

Оскільки функція Неймана має логарифмічну особливість у початку координат, то межова умова $R(0)<\infty$ може бути виконаною лише у випадку, коли коефіцієнт $B_m=0$. Межова умова на боковій поверхні циліндра приводить до рівняння

$$A_{mn}J_m\left(\sqrt{\lambda-\frac{n\pi}{h}}r_0\right)=0.$$

Ненульовому розв'язку рівняння Беселя може відповідати лише випадок $A_m\neq 0$. Це рівняння дозволяє знайти власні числа $\lambda_{mnk}$ і відповідні їм власні функції як останньої, так і вихідної межової задач

$$R_{mk}(r)=J_m\left(\sqrt{\lambda_{mnk}-\frac{n\pi}{h}}r\right),$$

$$\boxed{u_{mnk}(r,\varphi,z)=J_m\left(\sqrt{\omega_{mnk}{}^2-\frac{n\pi}{h}}r\right)\exp(im\varphi)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)}.$$

## 4.8. Сферичні координати

Нехай область, де шукається розв'язок рівняння Гельмгольца має форму кулі радіуса $r_0$, а початок координат збігається з центром сфери. Тоді відповідну межову задачу першого роду з однорідними межовими умовами доцільно розв'язувати у сферичній системі координат. Набір межових умов буде аналогічним випадку циліндра, тому запишемо його без додаткових пояснень:

$$u(r_0,\theta,\varphi)=0, \qquad u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi),$$
$$u(0,\theta,\varphi),u(r,0,\varphi),u(0,\pi,\varphi)<\infty,$$

Рівняння Гельмгольца у сферичних координатах має вигляд

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\\ +\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda u(r,\theta,\varphi)=0\end{gathered}}.$$

Перейдемо тепер до поділу змінних у диференційному рівнянні з частинними похідними. Частинні розв'язки цього рівняння, як і раніше, будемо шукати у вигляді наступного добутку

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)..$$

Після підстановки цього добутку у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda=0\ .$$

Це рівняння зручне для виділення рівнянь для будь-якої з функції $R(r),\Theta(\theta),\Phi(\varphi)$. Тепер його можна записати, наприклад, у вигляді

$$-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda=.$$
$$=\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\nu\ .$$

Тут $\nu$ - стала поділу. Звідси одержуємо наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\theta^2}=-\nu\ ,$$
$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\lambda=\nu\ .$$

З першого рівняння легко знову виділити два, але вже звичайних диференційних рівняння. Для цього введемо ще одну сталу поділу $\mu$

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\nu\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\mu\ ,$$

або

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\nu\sin^2\theta=\mu,$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\mu.$$

Після раціоналізації ця система рівнянь набере наступного вигляду:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\mu\Phi(\varphi)=0,$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left(\nu\sin^2\theta-\mu\right)\Theta(\theta)=0,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu}{r^2}\right)R(r)=0.$$

Легко діляться змінні і у межових умовах. Межова умова на поверхні кулі набуває вигляду

$$R(r_0)=0.$$

З циклічної межової умови випливає, що

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\ .$$

Решта межових умов обмежувального характеру має вигляд

$$R(0),\Theta(0),\Theta(\pi)<\infty.$$

Перейдемо тепер до розв'язку окремих звичайних диференційних рівнянь. Загальний розв'язок першого з рівнянь системи має традиційний вигляд:

$$\nu_m=m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2,\dots\ ,$$

$$\Phi_m(\varphi)=\exp\left(im\varphi\right).$$

У наступному рівнянні перейдемо до нової змінної $x=\cos\theta$. Тоді воно набере вигляду рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta(x)}{dx}\right)+\left(\mu^2-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta(\theta)=0.$$

Це рівняння має особливі точки для $x=\pm 1$, тобто для $\theta=0,\pi$. Розв'язки цього рівняння існують для довільних $\nu$ і ними є функції Лежандра, які мають логарифмічні особливості у зазначених точках. У тому випадку, коли $\mu_n = n(n+1)$, одним з лінійно незалежних розв'язків зазначеного рівняння буде приєднаний поліном Лежандра, який таких особливостей не має. Другим лінійно незалежним розв'язком рівняння буде функція Лежандра. Межові умови для функції $\Theta(\theta)$ виділяють з усіх можливих розв'язків рівняння Лежандра тільки обмежені у точках $\theta=0,\pi$. Такими розв'язками є лише приєднані поліноми Лежандра, а відповідними власними числами можуть бути лише

$$\mu_n = n(n+1), \quad n=0,1,2,\dots \; .$$

Відповідні власні функції є

$$\Theta_{nm}(\theta) = P_n^{\,m}(\cos\theta).$$

Перейдемо тепер до розв'язку третього рівняння системи

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_n(r)}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R_n(r)=0.$$

Це рівняння може бути суттєво спрощеним переходом до нової невідомої функції

$$R(r)=\mathrm{X}(r)/r.$$

Відносно нової функції рівняння набере вигляду

$$\left(\frac{d^2\mathrm{X}_n(r)}{dr^2}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)\mathrm{X}_n(r)=0\;.$$

Рівняння можна спростити ще більше, ще раз перейшовши до нової незалежної змінної

$$x=\sqrt{\lambda}r.$$

Тоді рівняння набере вигляду

$$\left(\frac{d^2\mathrm{X}_n(x)}{dx^2}\right)+\left(1-\frac{n(n+1)}{x^2}\right)\mathrm{X}_n(x)=0.$$

Далі доцільно знову перейти до нової невідомої функції

$$\mathrm{X}_n(x)=x^{1/2}\Gamma_n(x).$$

У висліді ми одержимо рівняння Беселя для функцій Беселя напівцілого порядку:

$$\boxed{\frac{d^2\Gamma_n(x)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\Gamma_n(x)}{dx}+\left(1-\frac{(n+1/2)^2}{x^2}\right)\Gamma_n(x)=0}.$$

Його загальний розв'язок можна записати так

$$\Gamma_n(x)=A_nJ_{n+1/2}(x)+B_nN_{n+1/2}(x),$$

або, повертаючись до попередніх позначень

$$X_n(r)=\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)^{1/2}\left[A_nJ_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)+B_nN_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)\right].$$

Відповідно

$$R_n(r)=\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{r}\right)^{1/2}\left[A_nJ_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)+B_nN_{n+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)\right].$$

Можна ввести у розгляд сферичні функції Беселя першого та другого родів (функції Ноймана):

$$\boxed{j_m(r)=\left(\pi/2r\right)^{1/2}J_{m+1/2}\left(r\right)},$$

$$\boxed{n_m(r)=\left(\pi/2r\right)^{1/2}N_{m+1/2}\left(r\right)},$$

і представити загальний розв'язок рівняння у вигляді лінійної комбінації цих функцій, а саме

$$R_n(r)=A_nj_n\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)+B_nn_n\left(\sqrt{\lambda}\,r\right)$$

Тут для довільних сталих ми залишили старі позначення $A_n, B_n$.

Оскільки функції Беселя другого роду розбіжні у початку координат, а відповідна межова умова вимагає обмеженості розв'язку у цій точці, то коефіцієнт $B_n=0$. Друга межова умова, задана на поверхні сфери, дозволяє знайти спектр власних чисел рівняння Беселя $\lambda_{nk}$ і, одночасно, спектр власних чисел вихідної задачі, а саме:

$$A_nj_n\left(\sqrt{\lambda}\,r_0\right)=0.$$

Ненульовий розв'язок рівняння можливий лише у випадку, коли $A_n\neq 0$. Цим власним числам відповідають власні функції рівняння Беселя:

$$R_{nk}(r)=j_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\,r\right),$$

а також власні функції вихідної задачі:

$$u_{nmk}(r)=j_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\,r\right)P_n^{\,m}(\cos\theta)\exp\left(im\varphi\right),$$

або

$$u_{nmk}(r)=\left(\pi/2r\right)^{1/2}J_{m+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\,r\right)P_n^{\,m}(\cos\theta)\exp\left(im\varphi\right).$$

Останній результат можна виразити і через сферичні функції, а саме

$$\boxed{u_{nmk}(r)=j_n\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\,r\right)Y_{nm}(\theta,\varphi)}\,,$$

або

$$\boxed{u_{nmk}(r)=\left(\pi/2r\right)^{1/2}J_{m+1/2}\left(\sqrt{\lambda_{nk}}\,r\right)Y_{nm}(\theta,\varphi)}\,.$$

## 4.9. Розвинення плоскої хвилі на парціальні хвилі

Важливе практичне значення, зокрема у квантовомеханічній теорії розсіювання, має задача розвинення плоскої хвилі на парціальні. З фізичної точки зору у цьому параграфі йтитиметься про опис поведінки вільного електрона. У цьому випадку рівняння Шредінгера збігається з рівнянням Гельмгольца. Оскільки парціальні хвилі описуються окремими сферичними функціями, то розвинення плоскої хвилі на парціальні хвилі еквівалентне її розвиненню у ряд Фур’є за сферичними функціями. Кожна з сферичних функцій опису є елементарну сферичну хвилю, центром якої є початок координат. Не дивлячись на формальну простоту викладеного алгоритму його практичну реалізацію доцільно здійснювати порівнюючи розв’язки рівняння Шредінгера для вільного електрона у декартовій та сферичній системах координат.

**Декартові координати.** Рівняння Шредінгера для вільного електрона можна записати так

$$\Delta U(\mathbf{r})+k^2U(\mathbf{r})=0\,,$$

де у декартових координатах

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Для вільного електрона енергія $E$ є додатною величиною, тому додатною величиною є і

$$k^2=2mE/\hbar^2\,,$$

де $m$ – маса електрона, $\hbar$ – стала Планка. Якщо $U(\mathbf{r})$ – хвильова функція електрона, то густину потоку електронів, яка дорівнює кількості електронів, що перетинають одиничну площадку за одиницю часу в околі точки $\mathbf{r}$, за означенням має вигляд

$$\mathbf{j}(\mathbf{r})=\frac{\hbar}{2mi}\Big[U^{*}(\mathbf{r})\nabla U(\mathbf{r})-U(\mathbf{r})\nabla U^{*}(\mathbf{r})\Big],$$

де у декартових координатах оператор набла має вигляд

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Оскільки нашою метою є знаходження зв’язку рівняння Шредінгера, що описує розповсюдження (розсіювання) електрона, то межову умову до рівняння доцільно сформувати за допомогою густини потоку електронів, а саме:

$$\lim_{x\to-\infty} j_x(\mathbf{r})=\lim_{x\to\infty} j_x(\mathbf{r})=0,$$

$$\lim_{y\to-\infty} j_y(\mathbf{r})=\lim_{y\to\infty} j_y(\mathbf{r})=0,$$

$$\lim_{z\to-\infty} j_z(\mathbf{r})=\lim_{z\to\infty} j_z(\mathbf{r})=v,\ v>0,$$

де $v$ – швидкість електрона. Ці межові умови означають, що електрон розповсюджується вздовж осі $z$ у додатному напрямку. Зауважимо, що умова нормування, яка є граничною умовою рівняння Шредінгера при пошуці його власних чисел і власних функцій, тут замінена умовою нормування густини потоку.

Шукатимемо розв’язок рівняння методом поділу змінних. У цьому випадку його частинні розв’язки доцільно шукати у вигляді

$$U(x,y,z)=\mathrm{X}(x)\mathrm{Y}(y)Z(z).$$

Підстановка цього виразу у рівняння надає йому вигляду

$$\frac{1}{\mathrm{X}(x)}\frac{\partial^2\mathrm{X}(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{\mathrm{Y}(y)}\frac{\partial^2\mathrm{Y}(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{\mathrm{Z}(z)}\frac{\partial^2\mathrm{Z}(z)}{\partial z^2}+k^2=0,$$

придатного для поступового відділення змінних. У висліді такого відділення замість одного рівняння з частинними похідними ми одержимо систему трьох звичайних диференційних рівнянь:

$$\mathrm{X}''(x)+k_x^2\mathrm{X}(x)=0,$$

$$\mathrm{Y}''(y)+k_y^2\mathrm{Y}(y)=0,$$

$$\mathrm{Z}''(z)+k_z^2\mathrm{Z}(z)=0,$$

де

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2.$$

Їх загальні розв’язки можна записати у вигляді:

$$\mathrm{X}(x)=A_x\exp(ik_xx)+B_x\exp(-ik_xx),$$

$$\mathrm{Y}(y)=A_y\exp(ik_y y)+B_y\exp(-ik_y y)\ ,$$

$$\mathrm{Z}(z)=A_z\exp(ik_z z)+B_z\exp(-ik_z z)\ .$$

Підстановка знайденої функції $U(x,y,z)$ у першу пару межових умов дає наступний результат

$$\lim_{y\to\pm\infty} j_x(\mathbf{r})=\frac{\hbar k_x}{m},\qquad \lim_{y\to\pm\infty} f_x(\mathbf{r})=0\ ,$$

$$f_x(\mathbf{r})=A_x^2-B_x^2+A_xB_x\left[\exp\left(2ik_x x\right)-\exp\left(-2ik_x x\right)\right]\times$$

$$\times\mathrm{Y}(y)\mathrm{Y}^*(y)Z(z)Z^*(z).$$

Останнє можливо лише при умові, що

$$k_x=0,$$

і

$$A_x=B_x.$$

У висліді

$$\mathrm{X}(x)=2A_x.$$

Аналогічно доходимо до висновку, що і

$$k_y=0,$$

$$A_y=B_y.$$

При цьому

$$\mathrm{Y}(y)=2A_y.$$

Третя пара межових умов дає дещо інший результат

$$\lim_{z\to\pm\infty} j_z(\mathbf{r})=\frac{\hbar k_z}{m},\qquad \lim_{z\to\pm\infty} f_z(z)=v,$$

$$f_z(\mathbf{r})=A_z^2-B_z^2+A_zB_z\left[\exp\left(2ik_z z\right)-\exp\left(-2ik_z z\right)\right]\times$$

$$\times\mathrm{X}(x)\mathrm{X}^*(x)\mathrm{Y}(y)\mathrm{Y}^*(y).$$

Тут вже $k_z\neq 0$. Враховуючи, що $k_x=k_y=0$ маємо, що

$$k_z=k.$$

Крім того за означенням хвильового вектора електрона $k_z=k$

$$\frac{\hbar k}{m} = v.$$

З третьої пари межових умов випливає, що шукана границя функції $f_z(z)$ існує лише у випадку, коли $A_z = 0$ або $B_z = 0$, тобто функція $f_z(z)$ є сталою величиною. У першому випадку

$$-4A_x A_y B_z = 1$$

і шуканий розв'язок рівняння Шредінгера має вигляд

$$U(\mathbf{r}) = -\exp(-ikz).$$

У другому випадку

$$4A_x A_y A_z = 1$$

і шуканий розв'язок має вигляд

$$\boxed{U(\mathbf{r}) = \exp(ikz)}.$$

В обох випадках отримані хвильові функції описують рух електрона у додатному напрямку осі $z$. Звичайно перевага надається останньому варіанту запису. Традиційно фізичний сенс плоскої хвилі пояснюють постулюючи отриманий нами результат і безпосередньо підстановкою переконуючись, що він задовольняє рівнянню Шредінгера і відповідним межовим умовам.

Вектор $\mathbf{k}$ визначає розповсюдження плоскої хвилі. Якщо він розташований довільно щодо осей координат, тобто $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, то хвилі можна записати так

$$U(\mathbf{r}) = \exp(ik_x x) \cdot \exp(ik_y x) \cdot \exp(ik_z x) = \exp(i\mathbf{kr}).$$

**Сферичні координати.** У сферичній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Розв'язок рівняння Шредінгера шукатимемо методом поділу змінних, виходячи з наступної форми його частинних розв'язків

$$U(r,\ \theta,\ \varphi) = R(r)F(\theta,\ \varphi).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{1}{F(\theta,\ \varphi)}\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F(\theta,\ \varphi)}{\partial \theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{F(\theta,\,\varphi)}\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 F(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+k^2=0.$$

Останнє рівняння еквівалентне наступній системі диференційних рівнянь:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+(r^2k^2-\lambda)+R(r)=0,$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 F(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda F(\theta,\varphi)=0.$$

Складність структури густини потоку у сферичній системі координат відповідним чином ускладнює і структуру межових умов. Всього їх має бути шість – по дві на кожну незалежну змінну. Простий вихід з ситуації полягає у тому, що три з них можна замінити на універсальні межові умови скінченості розв’язку:

$$U(0,\theta,\varphi),\,U(r,0,\varphi),\,U(r,\pi,\varphi)<\infty,$$

очевидні для довільної фізичної задачі у сферичній системі координат. Ще дві можна замінити умовою циклічності

$$U(r,\theta,\varphi)=U(r,\theta,\varphi+2\pi),$$

оскільки поворот системи на азимутальний кут $2\pi$ не міняє орієнтації системи у просторі. Шосту межову умову можна взагалі не використовувати. П’ять межових умов дозволяють доволі суттєво конкретизувати загальний розв’язок системи. Довільні сталі, що в ньому залишаться, оскільки ми не використали повного набору межових умов, можна знайти з інших міркувань.

Межові умови, що стосуються кутових змінних, дозволяють знайти власні функції й власні числа другого рівняння системи. Ними є сферичні функції $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, а

$$\lambda=l(l+1),\,l=0,\;1,\;2...$$

Тепер перше рівняння системи матиме вигляд

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dR(r)}{dr}\right]+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R(r)=0.$$

Двома його лінійно незалежними розв’язками є сферичні функції Беселя першого та другого родів $j_l(kr),\,n_l(kr)$. Тепер загальний розв’язок рівняння можна записати так

$$R_l(r)=\left[A_l\,j_l(kr)+B_l n_l(kr)\right]/kr.$$

Оскільки для $r \to 0$ $n_l(kr) \to \infty$, то межова умова у початку координат $n(0,\theta,\varphi) < \infty$ може бути виконана лише для $B_l = 0$. Тепер загальний розв'язок вихідного рівняння матиме вигляд

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{e} A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Сталі $A_{lm}$ знайдемо з порівняння двох розв'язків, отриманих у декартовій та сферичній системах координат, тобто з умови

$$\exp\left[ikr\cos(\theta)\right] = \frac{1}{kr} \sum_{l,m} A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\theta,\varphi).$$

Для зручності в якості полярної осі ми вибрали вектор $\mathbf{k}$, тому $\mathbf{kr} = kr\cos(\theta)$.

Оскільки ліва частина рівності не залежить від кута $\varphi$, то можна відповідним чином спростити і праву частину цієї рівності. Дійсно

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m[\cos(\theta)] \exp(im\varphi),$$

де $P_l^m[\cos(\theta)]$ – приєднані поліноми Лежандра. Інтегруючи обидві частини рівності за $\varphi$ одержимо

$$\exp\left[ikr\cos(\theta)\right] = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} B_l j_l(kr) P_l[\cos(\theta)].$$

Тут

$$B_l = A_{l0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}}, \; P_l[\cos(\theta)] = P_l^0[\cos(\theta)].$$

Використовуючи умову ортогональності поліномів Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}$$

можна одержати загальний вираз для сталих $B_l$

$$B_l = \frac{2l+1}{2} \frac{kr}{j_l(kr)} \int_{-1}^{1} \exp(ikrx) P_l(x) dx.$$

Оскільки ліва частина цієї рівності не залежить від $kr$, то від $kr$ не повинна залежати і права частина. Це дозволяє нам обрати $kr$ довільним чином. Оберемо його так, щоб інтеграл легко обчислювався. Це можливо для $kr \to \infty$. Тоді

$$j_l(kr) = \sin\left(kr - \frac{i\pi}{2}\right),$$

$$\int_{-1}^{1} \exp(ikrx) P_l(x) dx = i^l \frac{2}{kr} \sin\left(kr - \frac{i\pi}{2}\right).$$

У висліді

$$B_l = i^l (2l+1).$$

Остаточний результат буде таким

$$\boxed{\exp(i\mathbf{kr}) = \frac{1}{kr} \sum_{e=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l\left[\cos(\theta)\right]}.$$

Оскільки

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l\left[\cos(\theta)\right] = \mathrm{Y}_{l,0}(\theta,\varphi),$$

то отриманий результат можна виразити і через сферичні функції

$$\exp(i\mathbf{kr}) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l j_l(kr) \mathrm{Y}_{l,0}(\theta,\varphi).$$

Фактично ми представили плоску хвилю як результат інтерференції нескінченної кількості сферичних хвиль з центром у початку координат.

## 4.10. Неоднорідне рівняння Гельмгольца

Неоднорідне рівняння Гельмгольца має вигляд

$$\boxed{\Delta u(\mathbf{r}) + \lambda u(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})}.$$

Нехай нам відомі власні функції та власні числа однорідного рівняння Гельмгольца з однорідними межовими умовами першого, другого, або третього родів: $u_n(\mathbf{r})$, та $\lambda_n$ ($\Delta u_n(\mathbf{r}) + \lambda_n u_n(\mathbf{r}) = 0$). Розкладемо розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца та його вільний член у ряд Фур'є за власними функціями однорідної задачі:

$$u(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty}a_n u_n(\mathbf{r}), \qquad a_n=\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}u_n(\mathbf{r})u(\mathbf{r}),$$

$$\rho(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n u_n(\mathbf{r}), \qquad \rho_n=\frac{1}{\|u_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}u_n(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}).$$

Підставимо наведені розвинення у неоднорідне рівняння Гельмгольца

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n(\lambda-\lambda_n)-\rho_n\right]u_n(\mathbf{r})=0.$$

Лінійна незалежність власних функції вимагає рівності нулю всіх коефіцієнтів цієї лінійної комбінації. Отже, ми одержуємо наступну нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$a_n(\lambda-\lambda_n)=\rho_n, \qquad n=0,1,2,\ldots\ .$$

Звідси

$$a_n=\frac{\rho_n}{\lambda-\lambda_n}.$$

Отже,

$$u(\mathbf{r})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_n}{\lambda-\lambda_n}u_n(\mathbf{r})\ .$$

Таким чином, розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца досить простим і універсальним чином визначається через власні функції і власні значення однорідного рівняння Гельмгольца.

## 4.11. Задачі для самостійної роботи

### Варіант 1

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0\ ,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$f(a)=0, \qquad f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x \in (0,l),\ y \in (0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y} = 0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} + \lambda u(x,y,z) = 0 \ ,$$

$$x \in (0,l),\ y \in (0,h),\ z \in (0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z} = 0.$$

## Варіант 2

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2} + \lambda f(x) = 0,\ x \in (a,b)\ ,$$

$$f(a) = 0, \qquad \frac{df(b)}{dx} = 0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \lambda u(x,y) = 0\ ,$$

$$x \in (0,l),\ y \in (0,h),$$

$$u(0,y) = 0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y} = 0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} + \lambda u(x,y,z) = 0 \ ,$$

$$x \in (0,l),\ y \in (0,h),\ z \in (0,s),$$

$$u(0,y,z)=0,\qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

**Варіант 3**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$\frac{df(a)}{dx}=0,\qquad f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

**Варіант 4**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$\frac{df(a)}{dx}=0,\qquad \frac{df(b)}{dx}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0,z)=0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

**Варіант 5**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$\gamma_1\frac{df(a)}{dx}-\gamma_2 f(a)=0,\quad \gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,$$

$$u(x,h,z)=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

**Варіант 6**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$\gamma_1\frac{df(a)}{dx}+\gamma_2 f(a)=0,\qquad \gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0,\qquad u(x,y,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

**Варіант 7**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b)\ ,$$

$$\gamma_1\frac{df(a)}{dx}-\gamma_2 f(a)=0,\qquad f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad u(l,y)=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0, \qquad u(x,y,s)=0.$$

## Варіант 8

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(a,b) ,$$

$$f(a)=0, \qquad \gamma_1\frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad u(x,h)=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0, \quad u(l,y,z)=0, \quad u(x,0,z)=0, \quad u(x,h,z)=0,$$

$$u(x,y,0)=0, \quad u(x,y,s)=0.$$

**Варіант 9**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0, \; x\in(a,b) \; ,$$

$$\frac{df(a)}{dx}=0, \quad \gamma_1 \frac{df(b)}{dx}+\gamma_2 f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0 \; ,$$

$$x\in(0,l), \; y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0, \quad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \quad u(x,0)=0, \quad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0 \; ,$$

$$x\in(0,l), \; y\in(0,h), \; z\in(0,s),$$

$$u(0,y,z)=0, \quad \frac{\partial u(l,y,z)}{\partial x}=0, \quad u(x,0,z)=0, \quad u(x,h,z)=0,$$

$$u(x,y,0)=0, \quad u(x,y,s)=0.$$

**Варіант 10**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0, \; x\in(a,b) \; ,$$

$$\gamma_1 \frac{df(a)}{dx}-\gamma_2 f(a)=0, \quad \frac{df(b)}{dx}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0 \; ,$$

$$x\in(0,l), \; y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$u(0,y,z)=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h,z)=0,$$

$$u(x,y,0)=0,\qquad u(x,y,s)=0.$$

**Варіант 11**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0\ ,\ x\in(0,b)\ ,$$

$$f(0)=0,\qquad f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$u(0,y,z)=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad u(x,0,z)=0,\qquad \frac{\partial u(x,h,z)}{\partial y}=0,$$

$$u(x,y,0)=0,\qquad u(x,y,s)=0.$$

**Варіант 12**

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(0,b)\ ,$$

$$f(0)=0,\quad \frac{df(b)}{dx}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad u(x,h)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$u(0,y,z)=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad u(x,0,z)=0,\qquad u(x,h,z)=0,$$

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z}=0,\qquad u(x,y,s)=0.$$

## Варіант 13

**1.**Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(0,b)\ ,$$

$$\frac{df(0)}{dx}=0,\quad f(b)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad u(x,h)=0.$$

3.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$u(0,y,z)=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad u(x,0,z)=0,\qquad u(x,h,z)=0,$$

$$u(x,y,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

## Варіант 14

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(0,b) ,$$

$$\frac{df(0)}{dx}=0,\qquad \frac{df(b)}{dx}=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+\lambda u(x,y)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}+\lambda u(x,y,z)=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),\ z\in(0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y,z)=0,\qquad u(x,0,z)=0,\qquad u(x,h,z)=0,$$

$$u(x,y,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z}=0.$$

## Варіант 15

1.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{d^2 f(x)}{dz^2}+\lambda f(x)=0,\ x\in(0,b) ,$$

$$\gamma_1 \frac{df(0)}{dx} - \gamma_2 f(0) = 0, \quad \gamma_1 \frac{df(b)}{dx} + \gamma_2 f(b) = 0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \lambda u(x,y) = 0 \ ,$$

$$x \in (0,l), \ y \in (0,h),$$

$$u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y} = 0.$$

2.Знайти власні числа і власні функції задачі

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} + \lambda u(x,y,z) = 0 \ ,$$

$$x \in (0,l), \ y \in (0,h), \ z \in (0,s),$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} = 0, \quad u(l,y,z) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0,z)}{\partial y} = 0, \quad u(x,h,z) = 0,$$

$$u(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,y,s)}{\partial z} = 0.$$

# Глава 5. Рівняння Лапласа

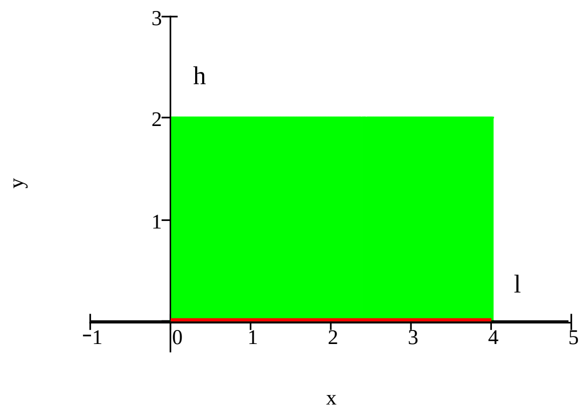
До двовимірного рівняння Лапласа приводиться багато різноманітних задач математичної фізики, що описують стаціонарні процеси. Більшість рівнянь математичної фізики містять оператор Лапласа як основний компонент. Рівняння Лапласа є найпростішим рівнянням такого типу, оскільки містить лише оператора Лапласа. Воно має вигляд

$$\boxed{\Delta u(\mathbf{r})=0}\,.$$

Тут $u(\mathbf{r})$ - довільна фізична характеристика: температура, потенціал електричного поля, компонента потенціалу магнітного поля і т. і. в точці з радіус - вектором $\mathbf{r}$, $\Delta$ - оператор Лапласа.

## 5.1.Двовимірні декартові координати

Розглянемо випадок, коли область, де шукається розв'язок рівняння, є двовимірною і має форму прямокутника. Для зручності, оберемо початок координат в одній з вершин прямокутника, а осі координат направимо вздовж його суміжних сторін. Тоді $0\le x\le l,\ 0\le y\le h$.




**Малюнок 1.***Область, де шукається розв'язок рівняння Лапласа*

У декартовій системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}}\,.$$

Розглянемо декілька варіантів межових умов.

**Найпростіший варіант. В**ізьмемо однорідні межові умови першого роду на трьох сторонах прямокутника, наприклад,

$$u(0,y)=0\ , \qquad 0\le y\le h\ ,$$
$$u(l,y)=0\ , \qquad 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=0\ , \qquad 0\le x\le l$$

і неоднорідну межову умову першого роду на четвертій стороні

$$u(x,h)=\nu(x)\ . \qquad 0\le x\le l\ .$$

Очевидно, що для однорідних на всіх сторонах прямокутника межових умов ми одержимо лише нульовий розв'язок задачі. Далі розглянемо і найбільш загальний варіант межових умов першого роду, що неоднорідні на всіх сторонах прямокутника.

У декартових координатах рівняння Лапласа має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ .$$

Розв'яжемо рівняння методом поділу змінних. Для цього будемо шукати ненульові частинні розв'язки, що задовольняють рівнянню і парі однорідних межових умов, у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї незалежної змінної

$$u(x,y)=X(x)Y(y).$$

Знайшовши усі зазначені лінійно незалежні частинні розв'язки, ми зможемо одержати загальний розв'язок рівняння у вигляді їх лінійної комбінації. Довільні сталі - коефіцієнти цієї лінійної комбінації - далі можуть бути знайдені з решти межових умов, з яких щонайменше одна має бути неоднорідною. Очевидно, що множники у правій частині останньої рівності тотожно не повинні дорівнювати нулю. Після підстановки останнього виразу у рівняння і поділу обох його частин на цей же вираз, рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0.$$

Залишивши у лівій частині один з доданків, матимемо

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=-\lambda\ .$$

Тут $\lambda$ - довільна стала (стала розділення). Ми маємо право змінити наше рівняння подвійною рівністю, оскільки надали рівнянню такий вигляд, що ліва його частина залежить лише від незалежної змінної $x$, а права - лише від незалежної змінної $y$. Дві функції, що залежать від різних змінних, можуть дорівнювати одна одній лише тоді, коли кожна з них є сталою величиною. Останнє рівняння еквівалентне системі двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\lambda X(x)=0,$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}-\lambda Y(y)=0.$$

Отже, у рівнянні змінні поділились. Процедура поділу змінних в однорідних межових умовах носить елементарний характер і приводить до наступного результату

$$X(0)=X(l)=0.$$

Розв'язання системи двох незалежних рівнянь доцільно починати з того з них, яке разом з відповідними межовими умовами утворює задачу Штурма-Ліувіля. Таким рівнянням є перше. Його загальним розв'язком є

$$X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Межові умови першого роду дозволяють записати власні числа і власні функції так:

$$\boxed{\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}}, \quad n\in N,$$

$$\boxed{X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}.$$

Після підстановки власних чисел першої задачі у друге рівняння, воно набере вигляду

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2}-\lambda_n Y_n(y)=0.$$

Оскільки у другій парі межових умов змінні не діляться, то відносно другого диференційного рівняння системи можна говорити лише про його загальний розв'язок. Останній має вигляд

$$Y_n(y)=C_n\cos\left(\sqrt{-\lambda_n}\,y\right)+D_n\sin\left(\sqrt{-\lambda_n}\,y\right).$$

Оскільки між тригонометричними та гіперболічними функціями існує наступний зв'язок:

$$\boxed{\cos(iy)=\cosh(y)}, \qquad \boxed{\sin(iy)=i\sinh(y)},$$

то загальний розв'язок можна виразити і через гіперболічні функції

$$Y_n(y)=C_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right).$$

Тут ми включили уявну одиницю у другий коефіцієнт лінійної комбінації, для простоти не змінивши його позначення, оскільки він все одно є довільною сталою.

Власні функції першого рівняння системи і загальний розв'язок другого дозволяють записати частинні розв'язки вихідного рівняння у вигляді

$$u_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y).$$

Загальний розв'язок можна представити у вигляді лінійної комбінації всіх наведених частинних розв'язків

$$u(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}u_n(x,y),$$

або

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Для знаходження решти довільних сталих використаємо другу пару межових умов. Перша з них має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=0.$$

Звідси випливає, що $C_n=0$. З урахуванням цього результату, друга межова умова має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\nu(x).$$

Останній вираз є рядом Фур'є для функції $\nu(x)$. Коефіцієнти ряду визначаються формулою

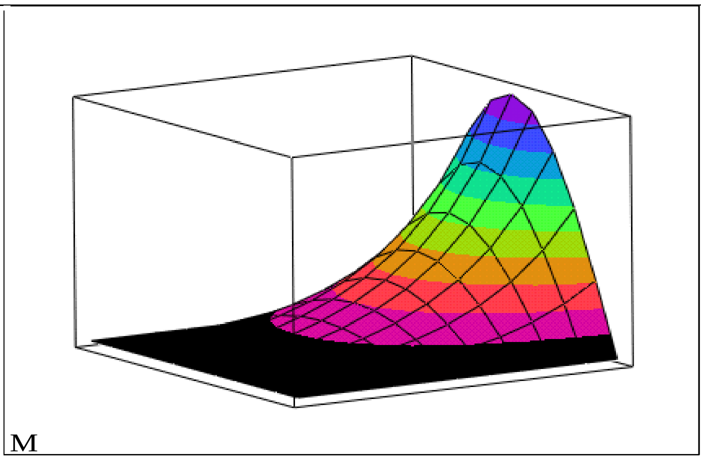
$$\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\nu(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Звідси

$$D_n=\frac{2}{l\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)}\int_0^l\nu(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Остаточний результат для розв'язку буде таким

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}.$$




**Малюнок 2.** *Розв'язок рівняння Лапласа у декартовій системі координат. Неоднорідна межова умова має вигляд* $v(x)=\sin(\pi x)$

**Загальний варіант.** Тепер межові умови першого роду візьмемо у найбільш загальній формі:

$$u(0,y)=\alpha(y), \qquad 0\le y\le h,$$
$$u(l,y)=\beta(y), \qquad 0\le y\le h,$$
$$u(x,0)=\gamma(x), \qquad 0\le x\le l$$
$$u(x,h)=\chi(x), \qquad 0\le x\le l.$$

Всі межові функції тут вважаються неперервними на відповідних відрізках і рівними нулю на їх кінцях. Останнє потрібне для однозначності межових умов і не зменшує ступінь їх загальності.

Оскільки межова задача є лінійною, то її розв'язок можна представити сумою розв'язків декількох допоміжних задач. Кожна з них матиме тільки частину неоднорідних межових умов. Решта їх має бути однорідними. При цьому сукупність всіх допоміжних неоднорідних межових умов в точності дорівнює набору неоднорідних межових умов вихідної задачі. Серед багатьох варіантів такого типу виберемо, наприклад, наступний. Розв'язок задачі $u(x,y)$ представимо у вигляді суми двох функцій $u_1(x,y)$ та $u_2(x,y)$, кожна з яких є розв'язком таких межових задач:

$$u_1(0,y)=\alpha(y), \quad u_1(l,y)=\beta(y), \qquad 0\le y\le h,$$
$$u_1(x,0)=0, \quad u_1(x,h)=0, \qquad 0\le x\le l,$$

та

$$u_2(0,y)=0, \quad u_2(l,y)=0, \qquad 0\le y\le h,$$

$$u_2(x,0)=\gamma(x),.\quad u_2(x,h)=\chi(x),\qquad 0\le x\le l.$$

Можуть бути і інші варіанти. Наприклад, з таким самим успіхом ми можемо розглянути чотири окремі межові задачі першого роду, у кожній з яких межова функція буде відмінною від нуля лише на одній з сторін прямокутника. Розглянемо першу з допоміжних межових задач. Для її розв'язання використаємо розв'язок задачі, що задовольняє другій парі однорідних межових умов, і підберемо коефіцієнти цього розв'язку з умови виконання першої пари вже неоднорідних межових умов:

$$\gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\chi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)+D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

У висліді ми отримали ряди Фур'є для межових функцій. Для коефіцієнтів цих рядів маємо стандартні вирази:

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\gamma(x),$$

$$C_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)+D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\chi(x).$$

Ці дві рівності дають можливість знайти довільні сталі.

Аналогічним чином можна розв'язати і другу межову задачу. Симетрія відносно $x,y$ дозволяє зразу записати другий розв'язок. Таким чином, розв'язки двох допоміжних межових задач мають вигляд:

$$u_1(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[C_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n\cosh\left(\frac{n\pi}{h}x\right)+F_n\sinh\left(\frac{n\pi}{h}x\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right).$$

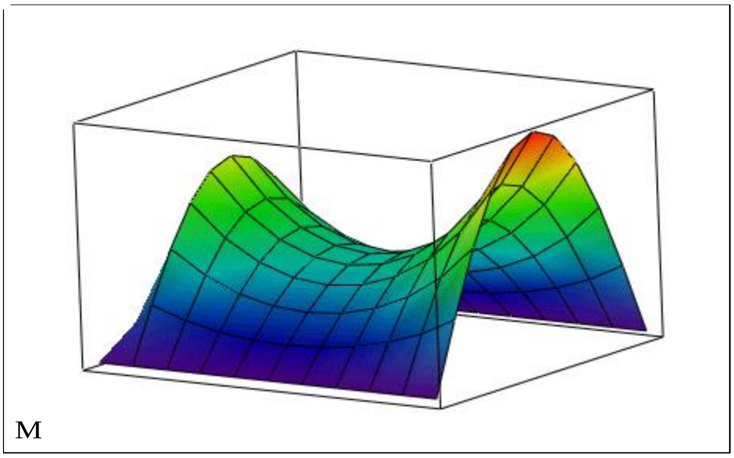
В останньому випадку довільні сталі знаходяться із співвідношень:

$$E_n=\frac{2}{h}\int_0^h dy\ \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\alpha(y),$$

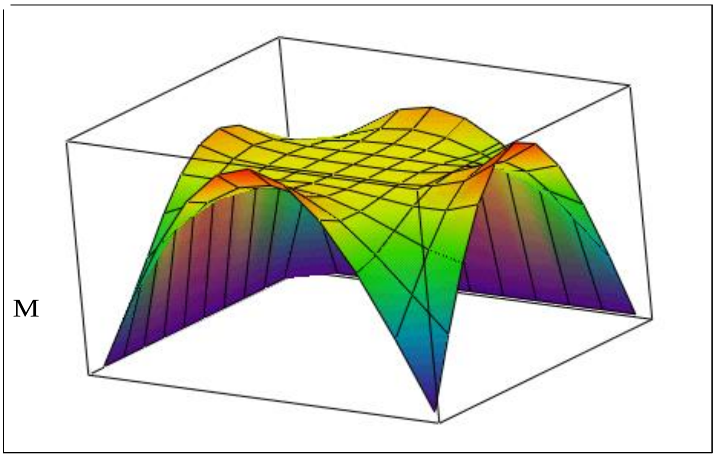
$$E_n \cosh\left(\frac{n\pi}{h}l\right)+F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{h}l\right)=\frac{2}{h}\int_0^h dy\ \sin\left(\frac{n\pi}{h}y\right)\beta(y).$$

Відповідно

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y).$$




**Малюнок 3.** *Розв'язок рівняння Лапласа у декартовій системі координат. Неоднорідні межові умови мають вигляд* $\gamma(x)=\sin(\pi x)$, $\chi(x)=\sin(\pi x)$, $\alpha(y)=0$, $\beta(y)=0$




**Малюнок 4.** *Розв'язок рівняння Лапласа у декартовій системі координат. Неоднорідні межові умови мають вигляд* $\gamma(x)=\sin(\pi x)$, $\chi(x)=\sin(\pi x)$, $\alpha(y)=\sin(\pi y)$, $\beta(y)=\sin(\pi y)$

## 5.2. Полярні координати

Будемо шукати розв'язок рівняння Лапласа в області, якою є круг радіуса $R_0$. Оскільки, якщо розмістити початок координат у центрі круга, то границя круга співпаде з однією з координатних ліній полярної системи координат, то саме цю систему і слід використати для розв'язання рівняння. Зв'язок полярних та декартових координат має вигляд:

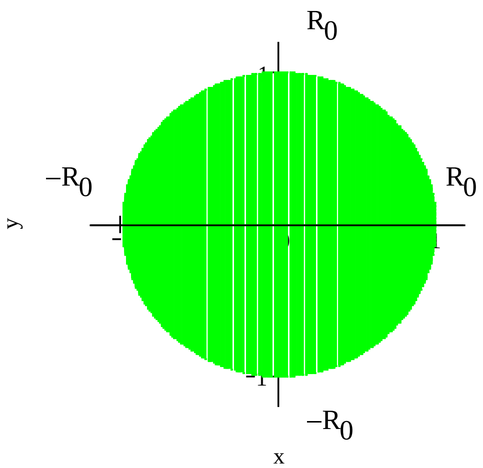
$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi),$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \le r < \infty,$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x), & x \ge 0, y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi, & x \ge 0, y < 0 \end{cases}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Тут $r$ - відстань точки від початку координат, $\varphi$ - кут (азимутальний кут) між додатним напрямком осі абсцис і радіусом вектором цієї точки. Конкретний зв'язок між азимутальним кутом і декартовими координатами залежить від домовленості щодо інтервалу, до якого належить азимутальний кут. Так, наприклад

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x), x \ge 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, x < 0, y \le 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, x < 0, y < 0 \end{cases}, \qquad -\pi \le \varphi < \pi.$$




**Малюнок 5.** *Область, де шукається розв'язок рівняння Лапласа*

У полярній системі координат оператор Лапласа є таким

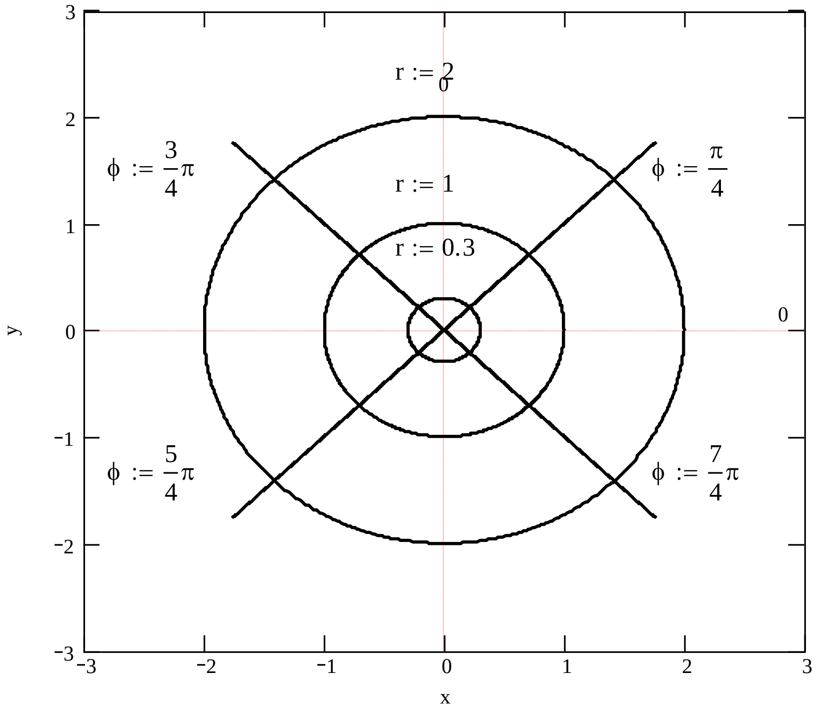
$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}}.$$

Полярні координати змінюються у наступних межах для внутрішньої частини круга:

$$r \subset [0, R_0], \qquad \varphi \subset [0, 2\pi),$$

та

$$r \subset [R_0, \infty), \qquad \varphi \subset [0, 2\pi)$$




**Малюнок 6.** *Координатні лінії полярної системи координат*

для області поза кругом. Межові умови мають бути задані на кожному з кінців інтервалу для кожної змінної. Звичайно розглядають внутрішню і зовнішню задачі для рівняння Лапласа. Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На межі круга $r = R_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(R_0, \varphi) = U(\varphi).$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі круга, тобто у початку координат. Оскільки ця точка фізично не виділена, то відповідна межова умова вимагає, щоб вона була звичайною точкою диференційного рівняння, що, зокрема, означає

$$u(o,\varphi)<\infty.$$

Для зовнішньої задачі межова умова у початку координат замінюється граничною умовою у нескінченно віддаленій точці і має аналогічний вигляд

$$u(\infty,\varphi)<\infty.$$

Наступна межова умова є універсальною як для внутрішньої, так і зовнішньої задач. Для азимутального кута межові точки фізично збігаються, очевидно мають співпасти і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\varphi=0$ фізично нічим не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом

$$u(r,\varphi)=u(r,\varphi+2\pi).$$

Спробуємо привести рівняння Лапласа, яке є диференційним рівнянням з частинними похідними з двома незалежними змінними до системи двох звичайних диференційних рівнянь. Для одного з цих рівнянь сформулюємо межову задачу і знайдемо її власні функції і власні числа. Знайдемо також загальний розв'язок другого рівняння системи. З загального розв'язку другого рівняння і власних функцій першого побудуємо загальний розв'язок вихідного рівняння Лапласа. З межових умов обмежувального характеру у центрі круху або у нескінченості та неоднорідної межової умови на межі кругу знайдемо довільні сталі, що входять у загальний розв'язок. Отже, відповідно до методу поділу змінних, шукатимемо розв’язок у вигляді

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi).$$

Після підстановки у рівняння і поділу на нього останнього, одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0.$$

Отримане рівняння вже зручне для виділення рівняння для кожної з функцій $R(r),\Phi(\varphi)$. Для цього домножимо його на $r$ і запишемо у вигляді рівності двох функцій, перша з яких залежить лише від $r$, друга - лише від $\varphi$. Це можливе лише у випадку, коли кожна з цих функцій насправді є сталою величиною, яку ми позначимо через $\lambda$

$$-\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)=\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\lambda\ .$$

Звідси одержуємо наступну систему двох диференційних рівнянь:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\lambda,$$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)=\lambda .$$

Після раціоналізації система диференційних рівнянь буде такою:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda R(r)=0 \ ,$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0 \ .$$

Загальний розв'язок другого рівняння можна записати у вигляді:

$$\Phi(\varphi)=A\exp(i\sqrt{\lambda}\varphi)+B\exp(-i\sqrt{\lambda}\varphi).$$

Ця форма представлення є найбільш симетричною і надалі саме їй ми надамо перевагу. Розглянемо тепер межові умови. В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду:

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Сукупність відповідного диференційного рівняння та останньої межової умови вже не утворюють задачу Штурма-Ліувіля, хоча більшість властивостей останньої для її власних чисел і власних функцій зберігається. Тому доцільно починати розв'язок системи саме з другого рівняння. Межові умови для нього можуть бути виконані лише для наступних подвійно вироджених власних чисел:

$$\boxed{\lambda_n=n^2}, \qquad n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Як уже зазначалось вище, при обговоренні такої задачі, власні функції рівняння доцільно обрати у вигляді

$$\boxed{\Phi_n(\varphi)=\exp(in\varphi)}, \qquad n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Додатним і від'ємним значенням $n$ тут відповідають різні власні функції але одне і те саме власне число, що і зумовлює його двократне виродження.

У межових умовах у центрі кола, або у нескінченності, змінні знову можуть бути розділені, тобто:

$$R(o)<\infty, \qquad\qquad R(\infty)<\infty.$$

Друге рівняння цієї системи тепер набуває вигляду:

$$r^2\frac{d^2R_n(r)}{dr^2}+r\frac{dR_n(r)}{dr}-n^2R(r)=0.$$

Як було показано нами раніше, власними функціями цього рівняння є степеневі функції. Його загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$R_n(r)=A_n r^n+B_n r^{-n-1},\quad n=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\ .$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа можна записати тепер так

$$\boxed{u(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(A_n r^n+B_n r^{-n-1}\right)\exp(in\varphi)}.$$

Межова умова на межі круга дає наступне співвідношення

$$u_0(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(A_n R_0{}^n+B_n R_0{}^{-n-1}\right)\exp(in\varphi).$$

Як результат, ми отримали ряд Фур'є з коефіцієнтами

$$A_n R_0{}^n+B_n R_0{}^{-n-1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(in\varphi)U(\varphi)\ .$$

Для внутрішньої задачі з умови обмеженості розв'язку у нулі випливає, що $A_n=0$ для $n<0$ і $B_n=0$ для $n\geq 0$, і розв'язок буде містити лише степеневі функції з додатними показниками степеню. Для зовнішньої задачі з умови обмеженості розв'язку у нескінченності випливає, що $A_n=0$ для $n\geq 0$ і $B_n=0$ для $n<0$, і розв'язок міститиме лише степеневі функції з від'ємним показниками степеню.

### 5.3. Еліптичні координати

Розв'яжемо двовимірне рівняння Лапласа для області, що має форму еліпса. Якщо розмістити початок координат у центрі еліпса, то його границя збігається з однією з координатних ліній еліптичної системи координат. Тому саме її і слід використати для розв'язання рівняння. Координатними лініями цієї системи координат є еліпси та гіперболи. Останні мають спільні з еліпсом полюси. Зв'язок між декартовою і еліптичною системами координат можна представити у декількох еквівалентних формах. Одна з них наступна:

$$x=\frac{1}{2}a\cosh(\mu)\cos(\theta),\qquad y=\frac{1}{2}a\sinh(\mu)\sin(\theta),$$

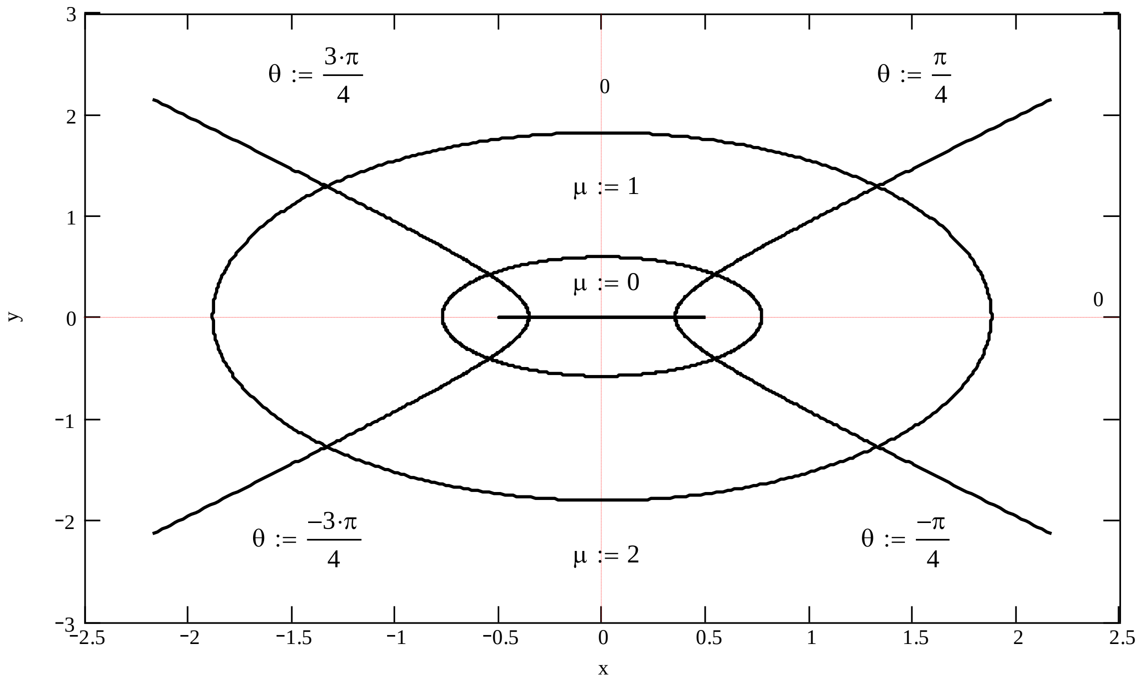
$$0\leq\mu<\infty,\qquad 0\leq\theta<2\pi.$$

Фокуси еліпса розташовані у точках з декартовими координатами $\left(-\frac{1}{2}a,0\right)$, $\left(\frac{1}{2}a,0\right)$. Відстані від них довільної точки визначаються так:

$$r_1 = \frac{1}{2}a\left[\cosh(\mu)+\cos(\theta)\right], \quad r_2 = \frac{1}{2}a\left[\cosh(\mu)-\cos(\theta)\right]$$

відповідно. Аналогічна відстань від початку координат має вигляд

$$r = \frac{1}{2}a\sqrt{\cosh^2(\mu)-\cos^2(\theta)}\,.$$




**Малюнок 7.** *Координатні лінії еліптичної системи координат*

Полюси еліпса, що лежать на осі $x$, симетричні відносно початку координат. Всім точкам еліпса, відповідає стале значення $v$, а всім точкам гіперболи - стале значення $\theta$. Значенням $0 \le \theta \le \pi/2$ відповідають половинки гіпербол, що лежать у першій чверті, значенням $\pi/2 < \theta < \pi$ відповідають половинки гіпербол у другій чверті, значенням $-\pi \le \theta \le -3\pi/2$ відповідають половинки гіпербол у третій чверті, та значенням $\pi/2 < \theta < 0$ відповідають половинки гіпербол у четвертій чверті. Величина $a\cosh(\mu)/2$ є більшою піввіссю еліпса, а величина $a\sinh(\mu)/2$ - його меншою піввіссю. Так само як ми однозначно задавали розміри круга, задаючи його радіус, так само ми однозначно задаємо розміри і форму (ексцентриситет) еліпса, задаючи конкретне значення еліптичної координати $v$.

Коли $a \to 0$, то еліптичні координати переходять у полярні, причому $r = a\cosh(\mu)/2 = a\sinh(\mu)/2$, $\varphi = \theta$ (останнє вірно для першої чверті). Цей же результат ми одержуємо для фіксованих $a$, але великих відстаней ($\nu \to \infty$) від початку координат. У цьому випадку еліпс мало відрізняється від кола з радіусом $r = a\cosh(\mu)/2 = a\sinh(\mu)/2$. Отже, різниця між еліптичними і полярними координатами є істотною лише тоді, коли відстань від початку координат має той же порядок величини, що і відстань між полюсами еліпса. У протилежному граничному випадку, коли $a \to \infty$, еліптичні координати переходять у декартові, причому $x = a\cos(\theta)/2$, $y = a\sinh(\mu)/2$. Цей же результат ми одержуємо для фіксованих $a$ але малих відстанях ($\mu \to 0$) від початку координат. Тут еліпс мало відрізняється від відрізка прямої, що з'єднує його полюси. Отже, різниця між еліптичними і декартовими координатами є істотною лише тоді, коли відстань від початку координат наближається до відстані між полюсами еліпса. Таким чином великим значенням $\nu$ відповідають еліпси, що мало відрізняються від кола. Малим значенням $\nu$ відповідають еліпси, що мало відрізняються від відрізку прямої. Малим значенням $\theta$, або значенням, близьким до $\pi$, відповідають гіперболи, кут між асимптотами яких близький до нуля. Значенням $\theta$, близьким до $\pi/2$, відповідають гіперболи, кут між асимптотами яких близький до розгорнутого кута.

В еліптичній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{4}{a^2\left[\cosh^2(\mu) - \cos^2(\theta)\right]}\left(\frac{\partial^2}{\partial^2\mu} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)}.$$

Еліптичні координати змінюються у наступних межах для внутрішньої частини еліпса:

$$\mu \subset [0, \mu_0], \qquad \theta \subset [0, 2\pi),$$

та

$$\mu \subset [\mu_0, \infty), \qquad \theta \subset [0, 2\pi)$$

для області поза ним.

Розглянемо як внутрішню, так і зовнішню задачі для рівняння Лапласа. Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На межі еліпса $\mu = \mu_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду:

$$u(\mu_0, \theta) = u_0(\theta),$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі еліпса, тобто на прямій, що з'єднує його фокуси. Оскільки точки цієї лінії фізично нічим не виділені, то відповідна межова умова просто вимагає відсутності на ній особливостей, що, зокрема, означає

$$u(o,\theta)<\infty.$$

У випадку зовнішньої задачі цілком фізичною є умова, щоб нескінченно віддалена точка не була особливою точкою розв'язку, тобто

$$u(\infty,\theta)<\infty.$$

Наступна межова умова є універсальною як для внутрішньої, так і зовнішньої задач. Для азимутального кута межові точки фізично збігаються. Збігаються при цьому і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\theta=0$ фізично нічим не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом:

$$u(\mu,\theta)=u(\mu,\theta+2\pi).$$

У відповідності з методом поділу змінних будемо шукати частинні розв’язки у вигляді

$$u(\mu,\theta)=\mathrm{M}(\mu)\Theta(\theta).$$

Після підстановки добутку у рівняння, одержимо

$$\frac{4}{a^2\left[\cosh^2(\mu)-\cos^2(\theta)\right]}\left(\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}\right)=0.$$

Це рівняння зручне для виділення рівнянь для кожної з функцій $\mathrm{M}(\mu),\Theta(\theta)$. Його можна записати так

$$\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\lambda\ .$$

Звідси одержуємо наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{1}{\mathrm{M}(\mu)}\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}=\lambda\ ,$$

$$-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\lambda\ .$$

Після раціоналізації система набере вигляду:

$$\frac{d^2\mathrm{M}(\mu)}{d^2\mu}-\lambda\mathrm{M}(\mu)=0,$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\lambda\Theta(\theta)=0.$$

Розглянемо тепер межові умови. В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi).$$

Загальний розв'язок другого рівняння детально обговорювався вище, тому ми випишемо тут лише власні функції і власні значення задачі, що не є задачею Штурма-Ліувіля, хоча і подібна до неї:

$$\boxed{\Theta_n(\theta) = \exp(in\theta)}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\boxed{\lambda_n = n^2}.$$

Після підстановки цих власних чисел  у перше рівняння системи воно буде схожим на друге рівняння системи

$$\frac{d^2 \mathrm{M}_n(\mu)}{d\mu^2} - n^2 \mathrm{M}_n(\mu) = 0.$$

Його розв'язок можна одержати з розв'язку другого рівняння заміною $\theta \to i\mu$. Отже,

$$\mathrm{M}_n(\mu) = A_n \exp(-n\mu).$$

Набір частинних розв'язків має вигляд

$$u_n(\mu,\theta) = \mathrm{M}_n(\mu)\Theta_n(\theta).$$

Загальний розв'язок можна представити як лінійну комбінацію всіх наведених частинних розв'язків

$$u(\mu,\theta) = \sum_n u_n(\mu,\theta),$$

або

$$u(\mu,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(-n\mu)\exp(in\theta).$$

Межова умова у нескінченно віддаленій точці дотримується, якщо

$$A_n = 0 \ \text{ для } \ n < 0.$$

Тільки тоді сума не міститиме розбіжних доданків. Тепер розв'язок зовнішньої задачі матиме вигляд

$$\boxed{u(\mu,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-n\mu)\exp(in\theta)}.$$

Для визначення $A_n$ використаємо умову на межі еліпса:

$$u_0(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-n\mu_0)\exp(in\theta)$$

У висліді ми отримали експоненційний ряд Фур'є на проміжку $[0,2\pi]$ з коефіцієнтами

$$A_n \exp(-n\mu_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\theta)\exp(in\theta)d\theta .$$

Межова умова у центрі еліпса вимагає, щоб коефіцієнти $A_n=0$ для $n>0$, тобто:

$$\boxed{u(\mu,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{-1} A_n \exp(-n\mu)\exp(in\theta)}.$$

Тут коефіцієнти ряду з $n>0$ не призводять до розбіжностей окремих членів ряду, але зумовлюють розбіжність його суми. Самі коефіцієнти для внутрішньої задачі визначаються аналогічно як і для зовнішньої. Отже, розв'язки зовнішньої та внутрішньої задач збігаються.

## 5.4.Двовимірні параболічні координати

Існує наступний зв'язок між двовимірними декартовою та параболічною системами координат:

$$x=r\rho, \qquad y=\frac{1}{2}(r^2-\rho^2),$$

$$r=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+y}, \qquad \rho=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-y} .$$

Відстань довільної точки від початку координат визначається так

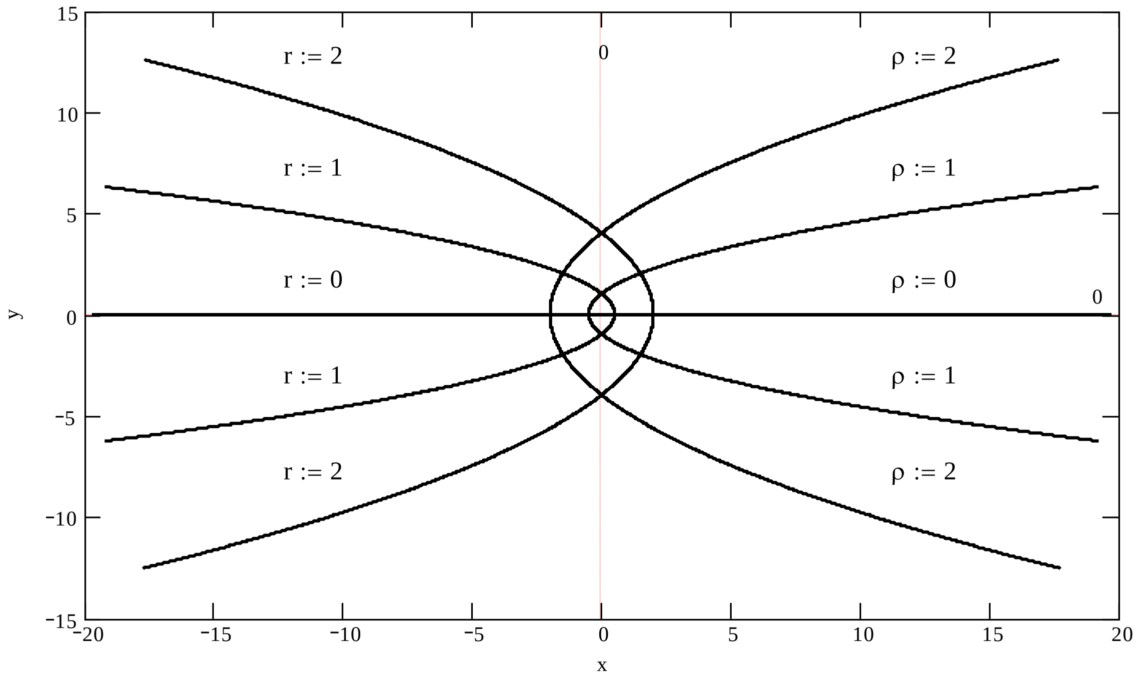
$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}(r^2+\rho^2) .$$

При цьому можливі два варіанти діапазонів змін параболічних координат. Перший такий:

$$0\le r<\infty, \qquad -\infty<\rho<\infty,$$

другий:

$$-\infty<r<\infty, \qquad 0\le\rho<\infty.$$




**Малюнок 8.** *Координатні лінії параболічної системи координат*

Координатними лініями у параболічній системі координат є параболи $r = const$, $\rho = const$, напрямлені протилежне одна одній. Їх спільним фокусом є початок координат, а віссю - вісь $y$. $r = 0$ відповідає від'ємна піввісь $y$, $\rho = 0$ відповідає додатна піввісь $y$.

У параболічній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r^2 + \rho^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\right]}\ .$$

Розглянемо внутрішню задачу. Нехай область утворюється двома співфокусними та співвісьними протилежно направленими параболами. Цю область знову можна задати двома способами, або

$$0 \le r \le r_0, \qquad -\rho_0 \le \rho \le \rho_0,$$

або

$$-r_0 \le r \le r_0, \qquad 0 \le \rho \le \rho_0.$$

Для визначеності зупинимося на другому варіанті. На зовнішній межі області $r = \pm r_0$, $\rho = \rho_0$ задамо межову умову першого роду:

$$u(-r_0, \rho) = \alpha(\rho), \qquad u(r_0, \rho) = \alpha(\rho), \qquad u(r, \rho_0) = \beta(r).$$

Ще одна межова умова обмежувального характеру має вигляд

$$u(r,0) < \infty.$$

Для внутрішньої задачі межова умова обмежувального характеру ніяк не допомагає знаходженню розв'язку. Принципово важливою є інша додаткова умова, пов'язана з симетрією задачі. Симетрія задачі відносно координат $r$ і $\rho$ приводить до того, що частинні розв'язки повинні мати однакову симетрію за обома цими координатами. Як і раніше у подібних випадках, розглянемо дві окремі більш прості межові задачі:

$$u_1(-r_0,\rho)=0, \qquad u_1(r_0,\rho)=0, \qquad u_1(r,\rho_0)=\beta(r),$$

та

$$u_2(r_0,\rho)=\alpha(\rho), \qquad u_2(r,-\rho_0)=0, \qquad u_2(r,\rho_0)=0.$$

Розглянемо другу з запропонованих межових задач. Будемо шукати її частинні розв'язки у вигляді

$$u_1(r,\rho)=R(r)\mathrm{P}(\rho).$$

Нагадаємо, що симетрія задачі вимагає однакової симетрії обох добутків у правій частині останньої рівності. Після підстановки цього добутку у рівняння і поділу останнього на цей же добуток, одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}=0.$$

Почнемо відділення змінних з азимутальної змінної. Для цього останнє рівняння доцільно привести до вигляду

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2}=-\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}=\lambda$$

У висліді рівняння розпадається на систему двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}-\lambda R(r)=0,$$

$$\frac{d^2\mathrm{P}(\rho)}{d\rho^2}+\lambda \mathrm{P}(\rho)=0.$$

В однорідних межових умовах змінні легко діляться. У висліді:

$$\mathrm{P}(-\rho_0)=0, \qquad \mathrm{P}(\rho_0)=0.$$

Друге рівняння отриманої системи, разом з цими межовими умовами, утворює задачу Штурма-Ліувіля, яку ми вже неодноразово розв'язували. Тому наведемо лише її власні числа і власні функції:

$$\boxed{\lambda_m = \frac{n^2\pi^2}{4\rho_0{}^2}}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\boxed{\mathrm{P}_n(\rho) = \sin\left(\frac{n\pi}{2\rho_0}\rho\right)}, \qquad n = 2,4,6,\ldots$$

$$\boxed{\mathrm{P}_n(\rho) = \cos\left(\frac{n\pi}{2\rho_0}\rho\right)}, \qquad n = 1,3,5,\ldots$$

Отже, власні функції є або парними, або непарними. Такими ж мають бути і розв'язки першого рівняння. Парним власним функціям задачі Штурма-Ліувіля мають відповідати парні розв'язки першого рівняння, непарним - непарні. Після підстановки знайдених власних чисел у перше рівняння системи, воно набуває вигляду

$$\frac{d^2R_n(r)}{dr^2} - \lambda_n R_n(r) = 0 .$$

Його загальним розв'язком є

$$R_n(r) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{2\rho_0} r\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2\rho_0} r\right) .$$

Згідно з вище наведеними міркуваннями щодо симетрії цього розв'язку, він має бути або парним, або непарними. Отже:

$$R_n(r) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{2\rho_0} r\right), \qquad n = 2,4,6,\ldots ,$$

$$R_n(r) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi}{2\rho_0} r\right), \qquad n = 1,3,5,\ldots .$$

Тепер можна записати загальний розв'язок внутрішньої задачі так

$$u_1(r,\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cosh\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\rho_0} r\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\rho_0}\rho\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sinh\left[\frac{n\pi}{\rho_0} r\right] \sin\left[\frac{n\pi}{\rho_0}\rho\right].$$

Довільні сталі визначаються з неоднорідної межової умови на межі, що обмежує область

$$\beta(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}\cosh\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\rho_0}r_0\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2\rho_0}\rho\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}\sinh\left[\frac{n\pi}{\rho_0}r_0\right]\sin\left[\frac{n\pi}{\rho_0}\rho\right].$$

Як наслідок, ми отримали тригонометричний ряд Фур'є з коефіцієнтами:

$$B_{2n}\sinh\left[\frac{n\pi}{\rho_0}r_0\right]=\frac{1}{\rho_0}\int_{-\rho_0}^{\rho_0}d\rho\sin\left[\frac{n\pi}{\rho_0}\rho\right]\beta(\rho),$$

$$A_{2n+1}\cosh\left[\frac{n\pi}{\rho_0}r_0\right]=\frac{1}{\rho_0}\int_{-\rho_0}^{\rho_0}d\rho\cos\left[\frac{n\pi}{\rho_0}\rho\right]\beta(\rho).$$

Аналогічним чином розв'язується і друга межова задача. Симетрія вихідної задачі відносно незалежних змінних $r,\rho$ дозволяє відразу записати її розв'язок

$$u_2(r,\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}\cosh\left[\frac{(2n+1)\pi}{2r_0}r\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2r_0}\rho\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}D_{2n}\sinh\left[\frac{n\pi}{r_0}r\right]\sin\left[\frac{n\pi}{r_0}\rho\right],$$

де

$$D_{2n}\sinh\left[\frac{n\pi}{r_0}\rho_0\right]=\frac{1}{r_0}\int_{-r_0}^{r_0}dr\sin\left[\frac{n\pi}{r_0}r\right]\alpha(r),$$

$$C_{2n+1}\cosh\left[\frac{n\pi}{r_0}\rho_0\right]=\frac{1}{r_0}\int_{-r_0}^{r_0}dr\cos\left[\frac{n\pi}{r_0}r\right]\alpha(r).$$

Розв'язок же вихідної межової задачі можна записати тепер так

$$\boxed{u(r,\rho)=u_1(r,\rho)+u_2(r,\rho)}.$$

## 5.5. Біполярні координати

Розв'яжемо двовимірне рівняння Лапласа для області, що має форму двох однакових кругів радіуса $R_0$, розташованих поряд. Для цієї задачі доцільно використати біполярну систему координат. Її координатними лініями $v = const$ є пучки кіл, що охоплюють полюси, які лежать на осі $x$ у точках $\pm a$, а також пучки кіл $\theta = const$, що проходять через ці полюси. $\exp(v) = s_1 / s_2$, де $s_1, s_2$ - відстані від полюсів довільної точки з координатами $(x, y)$. $\theta$ - кут, під яким з точки $(x, y)$ видно відрізок, що з'єднує полюси. Існує такий зв'язок між біполярними та декартовими координатами:

$$x = a\frac{\sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(\theta)}, \qquad y = a\frac{\sin(\theta)}{\cosh(v) - \cos(\theta)},$$

$$\theta = \frac{i}{2}\ln\frac{x^2 + (y - ia)^2}{x^2 + (y - ia)^2}, \qquad v = \frac{1}{2}\ln\frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$-\infty < v < \infty, \qquad 0 \le \theta < 2\pi,$$

$v = const$ - кола з радіусом $R_v = a/\left|\sin(v)\right|$ і центрами у точках $x_0 = \pm a/\tau\alpha\nu\eta(\theta)$, $y_0 = 0$. $\theta = const$ - кола радіусом $R_\theta = a/\left|\sin(\theta)\right|$ і центрами у точках $x_0 = 0$, $y_0 = -a/\tan(\theta)$.

У біполярних координатах оператор Лапласа має вигляд:

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{a^2}\left[\cosh(v) - \cos(\theta)\right]^2\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 v} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)}.$$

Біполярні координати змінюються у наступних межах для внутрішньої частини кругів:

$$v \subset [0, R_0], \qquad \theta \subset [0, 2\pi),$$

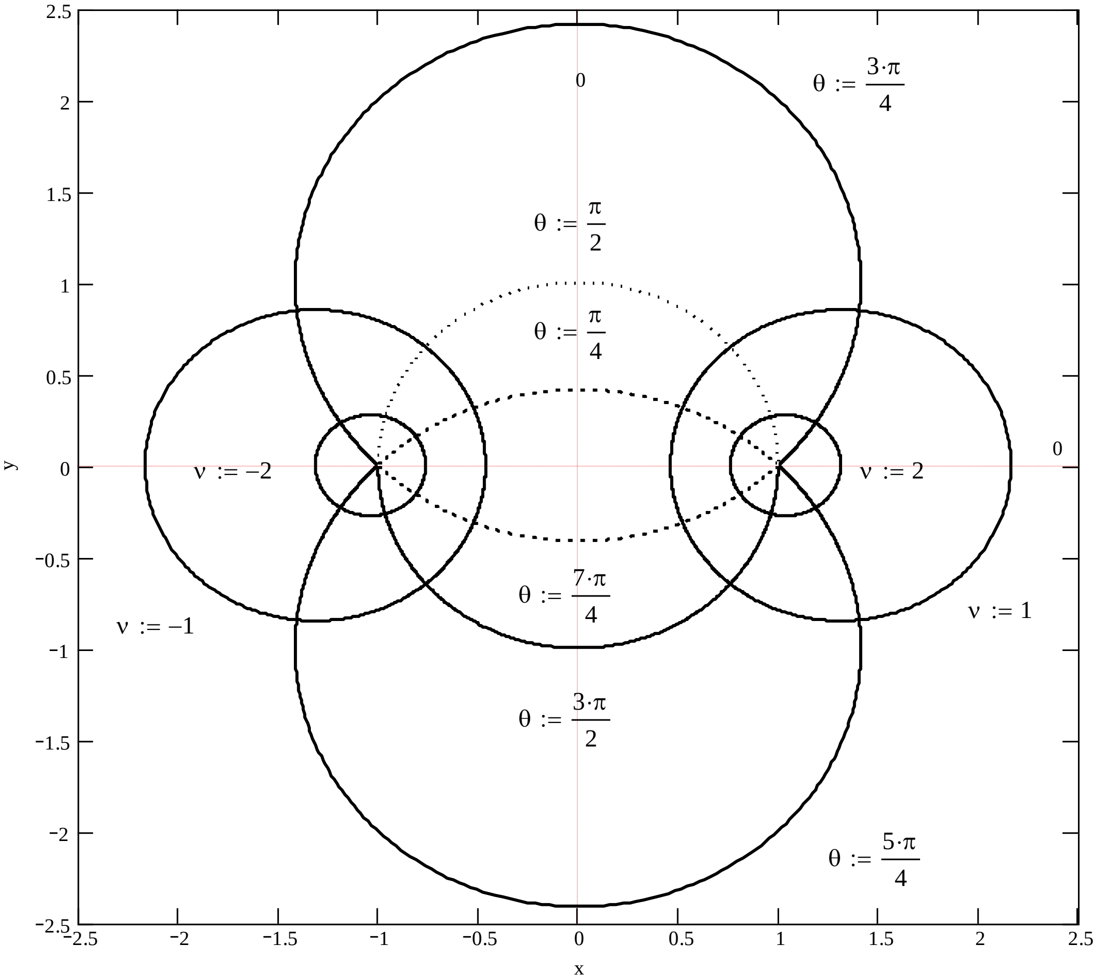
та

$$v \subset [R_0, \infty), \qquad \theta \subset [0, 2\pi)$$

для області поза ними. Межові умови повинні бути задані на кожному з кінців інтервалу (кожній з координатних ліній) для кожної змінної.

Розглянемо як внутрішню, так і зовнішню задачі для рівняння Лапласа. Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На межі кругів $v = R_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(R_0,\theta)=u_0(\theta).$$




**Малюнок 9.** *Координатні лінії біполярної системи координат*

Друга межова умова задається на внутрішній межі кругів, тобто у їх центрах, що мають біполярні координати $\nu=\pm\infty$. Оскільки ці точки фізично нічим не виділені, то відповідна межова умова просто вимагає відсутності на ній особливостей, що, зокрема, означає

$$u(\pm\infty,\theta)<\infty.$$

У випадку зовнішньої задачі цілком фізичною є умова, щоб нескінченно віддалена точка, якій відповідає біполярна координата $\nu=0$, не була особливою точкою розв'язку, тобто

$$u(0,\theta)<\infty.$$

Наступна межова умова є універсальною як для внутрішньої, так і зовнішньої задач. Для кутової змінної у біполярній системі координат межові точки фізично збігаються. Очевидно збігаються при цьому і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\theta=0$ фізично нічим не виділені, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за кутовою змінною

$$u(v,\theta)=u(v,\theta+2\pi).$$

Будемо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$u(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{a^2}\left[\cosh(v)-\cos(\theta)\right]^2\left(\frac{1}{V(v)}\frac{d^2V(v)}{d^2v}+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}\right)=0.$$

Це рівняння зручне для виділення рівняння для кожної з функцій $V(v),\Theta(\theta)$. Тепер його можна записати, наприклад, у вигляді

$$\frac{1}{V(v)}\frac{d^2V(v)}{d^2v}=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\lambda$$

Звідси одержуємо наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{1}{V(v)}\frac{d^2V(v)}{d^2v}=\lambda,$$

$$-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}=\lambda$$

Після раціоналізації система матиме вигляд:

$$\frac{d^2V(v)}{d^2v}-\lambda V(v)=0,$$

$$\frac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+\lambda\Theta(\theta)=0 .$$

Розглянемо тепер межові умови. В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi).$$

Загальний розв'язок другого рівняння детально обговорювався у попередніх задачах, тому ми випишемо тут лише власні функції і власні значення цієї задачі, що не є задачею Штурма-Ліувіля, хоча і близька до неї:

$$\boxed{\Theta_n(\theta)=\exp(in\theta)},\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\boxed{\lambda_n=n^2}.$$

Після підстановки цих власних чисел у перше рівняння маємо

$$\frac{d^2V_n(v)}{dv^2} - n^2V_n(v) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння, фактично нескінченної системи звичайних диференційних рівнянь, зручно записати у вигляді

$$V_n(v) = A_n \exp(nv) + B_n \exp(-nv).$$

Набір частинних розв'язків вихідного рівняння буде таким

$$u_n(v,\theta) = V_n(v)\Theta_n(\theta).$$

Загальний розв'язок можна представити у вигляді лінійної комбінації всіх наведених частинних розв'язків

$$u(v,\theta) = \sum_n u_n(v,\theta),$$

або

$$u(v,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \exp(nv) + B_n \exp(-nv)\right] \exp(in\theta).$$

Цей ряд можна перебудувати наступним чином

$$u(v,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[C_n \exp(|n|v) + D_n \exp(-|n|v)\right] \exp(in\theta),$$

де

$$C_n = \begin{cases} A_n, n>0 \\ 0, n=0 \\ B_n, n<0 \end{cases}, \quad D_n = \begin{cases} B_n, n>0 \\ A_n + B_n, n=0 \\ A_n, n<0 \end{cases}$$

Межова умова у центрах кругів може бути виконана лише для

$$C_n = 0.$$

Тільки тоді сума не міститиме розбіжних доданків. У висліді розв'язок зовнішньої задачі буде таким

$$\boxed{u(v,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp(-|n|v) \exp(in\theta)}.$$

Для визначення коефіцієнтів $D_n$ використаємо межову умову на межі еліпса

$$u_0(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \exp\left(-|n|V_0\right)\exp(in\theta)\ .$$

У висліді ми отримали експоненційний ряд Фур'є на проміжку $[0,2\pi]$ з коефіцієнтами

$$D_n \exp\left(-|n|V_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\theta)\exp\left(in\theta\right)d\theta .$$

Межова умова у нескінченно віддаленій точці вимагає, щоб коефіцієнти $C_n$ забезпечували збіжність відповідного ряду, але не більше того. У будь-якій іншій точці області, де шукається розв'язок, ці коефіцієнти просто повинні дорівнювати нулю, оскільки у протилежному випадку сума доданків з такими коефіцієнтами буде розбігатись, хоча кожний доданок із скінченим номером буде скінченим. Отже, розв'язки зовнішньої та внутрішньої задач збігаються.

Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа у біполярній системі координат, виражений через біполярні координати, має формально такий же вигляд як і розв'язок в еліптичній системі координат, виражений через еліптичні координати. Різниця є лише у тому, що внутрішня і зовнішня задачі міняються місцями. Різниця розв'язків стає очевидною, якщо обидва розв'язки записати у декартовій системі координат.

## 5.6. Тривимірні декартові координати

Розглянемо розв'язок тривимірного рівняння Лапласа для тривимірної області у формі паралелепіпеда. Для зручності оберемо початок координат в одній з вершин паралелепіпеда, а осі координат направимо вздовж його суміжних ребер. У цьому разі: $0 \le x \le l,\ \ 0 \le y \le h,\ \ 0 \le z \le s$. У трьохвимірній декартовій системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}}.$$

В якості межової умови на межі області візьмемо однорідну межову умову першого роду на п'яти гранях паралелепіпеда, наприклад:

$$u(0,y,z)=0, \qquad u(l,y,z)=0, \qquad u(x,0,z)=0,$$
$$u(x,l,z)=0, \qquad u(x,y,0)=0,$$

і неоднорідну межову умову першого роду на шостій грані

$$u(x,y,s)=U(x,y).$$

Очевидно, що якщо межові умови на всіх гранях паралелепіпеда будуть однорідними, то ми одержимо лише нульовий розв'язок задачі.

У декартових координатах рівняння Лапласа має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}=0.$$

Розв'яжемо рівняння методом поділу змінних. Для цього будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді

$$u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)\ .$$

Після підстановки останнього виразу у рівняння і поділу обох його частин на це же вираз, рівняння набере вигляду

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0.$$

Відділивши один з доданків, матимемо (послідовність відділення не має принципового значення)

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-\lambda\,.$$

Останнє рівняння еквівалентне системі наступних диференційних рівнянь, одне з яких вже звичайне:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\lambda X(x)=0,$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=\lambda\,.$$

Відділимо тепер решту змінних

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\lambda=-\mu\,.$$

Звідки одержуємо вже систему двох звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\mu Y(Y)=0,$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+(\lambda+\mu)Z(z)=0.$$

Процедура розділення змінних в однорідних межових умовах носить елементарний характер і приводить до наступного результату

$$X(0)=X(l)=Y(0)=Y(h)=Z(0)=0\,.$$

Загальні розв'язки перших двох рівнянь системи, що з відповідними межовими умовами складають задачі Штурма-Ліувіля, мають вигляд:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$
$$Y(y) = C\cos(\sqrt{\mu}y) + D\sin(\sqrt{\mu}y).$$

Межові умови першого роду дозволяють так записати їх власні числа і власні функції:

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad \mu_n = \frac{m^2\pi^2}{h^2}, \quad n,m = 1,2,\ldots,$$
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right).$$

Після підстановки знайдених власних чисел перших двох задач у третє рівняння матимемо

$$\frac{d^2 Z_{nm}(z)}{dz^2} - \left(\lambda_n + \mu_m\right) Z_{nm}(z) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння, фактично нескінченної системи звичайних диференційних рівнянь, має вигляд

$$Z_{nm}(z) = E_{nm}\cosh\left(\sqrt{(\lambda_n + \mu_m)}y\right) + F_{nm}\sinh\left(\sqrt{(\lambda_n + \mu_m)}y\right).$$

Повертаючись до загального розв'язку вихідного рівняння, одержимо наступний набір частинних розв'язків рівняння

$$u_{mn}(x,y,z) = X_n(x)Y_m(y)Z_{nm}(z).$$

Загальний розв'язок можна представити у вигляді лінійної комбінації всіх наведених частинних розв'язків

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(x,y,z),$$

або

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} E_{nm}\cosh\left(\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{l^2} + \dfrac{m^2}{h^2}}z\right) + \\ + F_{nm}\sinh\left(\pi\sqrt{\dfrac{n^2}{l^2} + \dfrac{m^2}{h^2}}z\right) \end{array} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)$$

.

Для знаходження решти довільних сталих використаємо другу пару межових умов. Перша з них має вигляд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} E_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)=0.$$

Звідси випливає, що

$$E_{nm}=0.$$

З урахуванням цього результату друга межова умова має вигляд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} F_{nm} \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}}s\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)=U(x,y)$$

Вона є подвійним тригонометричним рядом Фур'є для функції $U(x,y)$. Коефіцієнти ряду визначаються формулою

$$F_{nm} \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}}s\right)=$$

$$=\frac{4}{lh}\int_0^l dx\int_0^h dy U(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right).$$

Звідси:

$$F_{nm}=\frac{4}{lh}\frac{1}{\sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}}s\right)}*$$

$$*\int_0^l dx\int_0^h dy U(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right).$$

Остаточний результат для розв'язку буде наступним:

$$\boxed{u(x,y,z)=\sum_{n,m=1}^{\infty} F_{nm} \sinh\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)}.$$

Існує простий приклад, коли трьохвимірне рівняння Лапласа у трьохвимірній декартовій системі координат зводиться до одновимірного.

### 5.6.1.Теплопровідність стінки

Знайдемо температурне поле у стінці, створеній двома паралельними площинами, перпендикулярними осі $x$ . Нехай одна з них перетинає вісь $x$ у точці $x_1$ і має температуру $T_1$, друга - у точці $x_2$ і має температуру $T_2$ .

Процес носить стаціонарний характер, отже рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Лапласа

$$\Delta u(x,y,z)=0 ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Межові умови можна записати як наступні неоднорідні межові умови першого роду.

$$u(x_1,y,z)=T_1,\ \ u(x_2,y,z)=T_2 .$$

Оскільки температури площин є сталими величинами, то температура у середині стінки може залежати лише від відстані між ними

$$u(x,y,z)=u(x) .$$

Отже, рівняння Лапласа у трьохвимірній декартовій системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}=0 .$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(x)=Ax+B ,$$

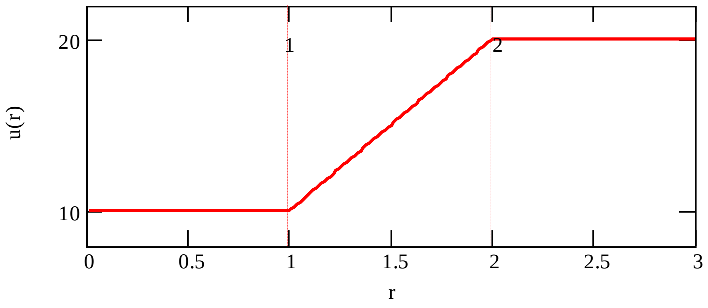
тобто температура стінки змінюється за лінійним законом.

Підстановка розв'язку у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A,B$ . Дійсно:

$$u(x_1)=Ax_1+B=T_1,$$
$$u(x_2)=Ax_2+B=T_2 .$$

Звідси:

$$B=-\frac{x_1T_2-x_2T_1}{x_2-x_1},\ \ A=\frac{T_2-T_1}{x_2-x_1} .$$




**Малюнок 10.**_Температурне поле у стінці, утвореній паралельними площинами_

## 5.1.Циліндричні координати

Розв'яжемо рівняння Лапласа для області, що має форму циліндра радіуса $R_0$ і довжини $L$, або зовнішньої щодо нього області. Якщо розмістити початок координат у центрі однієї з основ циліндра, а вісь $z$ направити вздовж його осі, то всі фрагменти поверхні циліндра співпадуть з координатними поверхнями циліндричної системи координат. Доцільно саме цю систему координат і використати для розв'язання рівняння. У циліндричній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}.$$

Циліндричні координати змінюються у наступних межах для області всередині циліндра:

$$r \subset [0, R_0], \quad \varphi \subset [0, 2\pi), \quad z \subset [0, L],$$

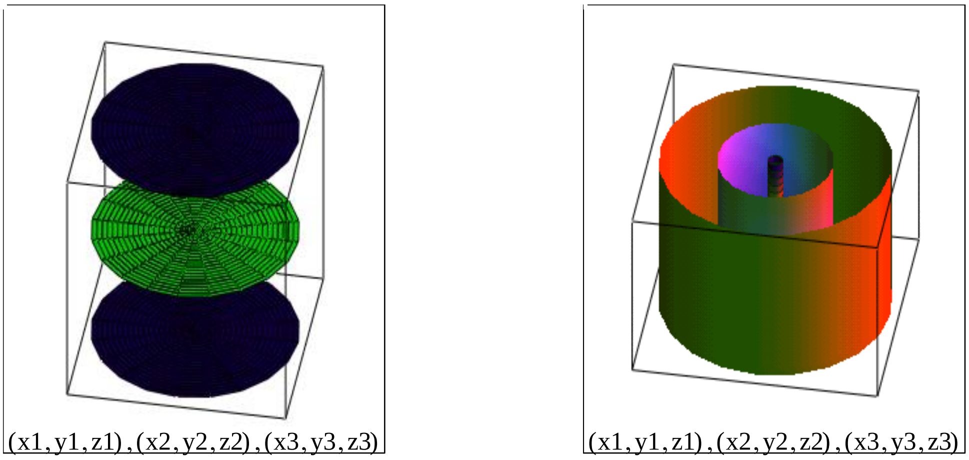
та

$$r \subset [R_0, \infty), \quad \varphi \subset [0, 2\pi), \quad z \subset [0, L]\,.$$

для зовнішньої щодо циліндра області.

Звичайно розглядають внутрішню і зовнішню задачі для рівняння Лапласа. З цих двох задач простішою є внутрішня, яку надалі ми і будемо аналізувати. На боковій поверхні циліндра $r = R_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(R_0, \varphi, z) = U(\varphi, z),$$




**Малюнок 11.** *Координатні поверхні z = const та r = cosnt у циліндричній системі координат*

Другу межову умову задамо на внутрішній межі циліндра, тобто на його осі. Оскільки точки осі фізично нічим не виділені, то відповідна межова умова просто вимагає, щоб ці точки були звичайними точками диференційного рівняння, що, зокрема, означає

$$u(o,\varphi,z)<\infty.$$

Для азимутального кута межові точки фізично збігаються. При цьому збігаються і відповідні значення невідомої функції. Оскільки кут $\varphi=0$ фізично нічим не виділений, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом

$$u(r,\varphi,z)=u(r,\varphi+2\pi,z).$$

На основах циліндра теж задамо межові умови першого роду:

$$u(r,\varphi,0)=v_1(\varphi,z), \qquad u(r,\varphi,z)=v_2(\varphi,z).$$

Одночасне використання неоднорідних межових умов і на боковій поверхні циліндра, і на його основах створює певні складнощі у розв'язанні задачі. Тому спочатку розглянемо лише два частинні випадки: перший - з неоднорідними межовими умовами на боковій поверхні циліндра, на його основах вони однорідні, другий - з неоднорідними межовими умовами на основах циліндра, на боковій поверхні вони однорідні. Розв'язок задачі, коли всі умови неоднорідні, буде сумою зазначених частинних розв'язків.

Відповідності до методу поділу змінних, розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(r,\varphi,z)=R(r)\Phi(\varphi)Z(z).$$

Після підстановки добутку у рівняння одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=0.$$

Це рівняння зручне для виділення рівняння для будь-якої з функцій $R(r), \Phi(\varphi), Z(z)$. Тепер його можна записати, наприклад, у вигляді

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=\lambda\ .$$

Звідси одержуємо систему двох рівнянь, перше з яких уже звичайне:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=-\lambda,$$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\lambda r^2.$$

Останнє рівняння знову дозволяє розділення змінних

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda r^2=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\mu.$$

Як наслідок, ми одержуємо систему диференційних рівнянь:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\mu,$$

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda r^2=\mu.$$

Тим самим поділ змінних у рівнянні завершено. Після раціоналізації система звичайних диференційних рівнянь набере вигляду:

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}+\lambda Z(z)=0,$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\mu\Phi(\varphi)=0,$$

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2}+r\frac{dR(r)}{dr}-(\lambda r^2-\mu)R(r)=0.$$

Останнє з рівнянь є рівнянням Беселя.

Змінні легко діляться у межовій умові за азимутальним кутом і

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Загальний розв'язок другого рівняння системи має вигляд

$$\Phi(\varphi)=A\exp(i\sqrt{\mu}\varphi)+B\exp(-i\sqrt{\mu}\varphi).$$

Він узгоджується з наведеною граничною умовою періодичності лише для наступних значень сталої розділення:

$$\mu_n = n^2,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Відповідні власні функції матимуть вигляд:

$$\Phi_n(\varphi) = \exp(in\varphi), \quad n = \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots$$

Решта рівнянь має такі загальні розв'язки:

$$Z(z) = C\cos(\sqrt{\lambda}z) + D\sin(\sqrt{\lambda}z),$$

$$R_n(r) = E_n J_n(\sqrt{i\lambda}r) + F_n N_n(\sqrt{i\lambda}r).$$

Якщо на основах циліндра межові умови є однорідними, то змінні у них легко діляться і вони набувають вигляду:

$$Z(0) = Z(L) = 0.$$

Такі межові умови, як це неодноразово показувалось вище, приводять до межової задачі Штурма-Ліувіля для відповідного диференційного рівняння і наступних власних чисел та власних функцій:

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{L^2}, \quad m = 1,2,\ldots,$$

$$Z_m(z) = \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right).$$

Змінні автоматично діляться і у межовій умові на осі циліндра, що приводить до наступної межової умови для радіальної функції

$$R(o) < \infty,$$

з якою сумісна функція Беселя, але не функція Ноймана. Остання має логарифмічну особливість у початку координат Отже, для внутрішньої задачі власними функціями є

$$R_{nm}(r) = J_n\left(\sqrt{i}\frac{m\pi}{L}r\right).$$

Частинні розв'язки вихідної межової задачі наступні

$$u_{nm}(r,\varphi,z) = R_{nm}(r)\Phi_n(\varphi)Z_m(z).$$

Відповідно, її загальний розв'язок буде таким

$$u_1(r,\varphi,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty} A_{nm}u_{nm}(r,\varphi,z),$$

або

$$\boxed{u_1(r,\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\sqrt{i}\frac{m\pi}{L}r\right)\exp(in\varphi)\sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right)}.$$

Межова умова на боковій поверхні циліндра дозволяє знайти довільні сталі з співвідношення, що є подвійним рядом Фур'є

$$u_0(\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\sqrt{i}\frac{m\pi}{L}R_0\right)\exp(in\varphi)\sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right).$$

Коефіцієнти цього подвійного ряду Фур'є мають стандартний вигляд

$$A_{nm}J_n\left(\sqrt{i}\frac{m\pi}{L}R_0\right)=\frac{1}{\pi L}\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(n\varphi)\int_0^L dz\ \sin\left(\frac{m\pi}{L}z\right)U(\varphi,z)$$

,

У випадку, коли однорідною є межова умова на боковій поверхні циліндра, а на його основах вона неоднорідна, змінні розділяться і у межовій умові на осі циліндра, і у межовій умові на боковій поверхні. При цьому перша з них знову матиме вигляд

$$R(o)<\infty,$$

з якою сумісна функція Беселя, але не функція Ноймана. Отже,

$$R_n(r)=E_nJ_n\left(\sqrt{i\lambda}r\right).$$

Межова умова на боковій поверхні циліндра матиме вигляд

$$R_n(R_0)=0$$

і приводить до наступного рівняння для власних чисел відповідної задачі

$$J_n(\sqrt{i\lambda}R_0)=0.$$

Нехай $\lambda_m$ - отримані таким чином власні числа. Вони мають бути уявними, оскільки їх добуток на уявну одиницю має бути величиною дійсною, оскільки нулі функції Беселя є дійсними. Тоді відповідні їм власні функції матимуть вигляд

$$\boxed{R_{nm}(r)=J_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right)}.$$

Як завжди, ми опускаємо довільний сталий множник при написанні власних функцій однорідної межової задачі.

Тепер можна записати і загальний розв'язок внутрішньої межової задачі для циліндра з даним набором межових умов:

$$u_2(r,\varphi,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}\left[C_m\cos\left(\sqrt{\lambda_m}z\right)+D_m\sin\left(\sqrt{\lambda_m}z\right)\right]*$$
$$*\exp(in\varphi)J_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right).$$

Використання межових умов на основах циліндра дає наступні подвійні ряди Фур'є за тригонометричними функціями і функціями Беселя для функцій, що визначають межові умови:

$$v_1(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}C_{nm}\exp(in\varphi)J_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right),$$

$$v_2(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-1}^{\infty}\left[C_m\cos\left(\sqrt{\lambda_m}L\right)+D_m\sin\left(\sqrt{\lambda_m}L\right)\right]*$$
$$*\exp(in\varphi)J_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right).$$

Коефіцієнти цих рядів мають стандартний вигляд

$$C_{nm}=\frac{1}{\pi}\frac{2}{\left[J_{n+1}\left(\sqrt{i\lambda_m}R_0\right)\right]^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(in\varphi)\int_0^{R_0}drrJ_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right)v_1(r,\varphi)\ ,$$

$$C_m\cos\left(\sqrt{\lambda_m}L\right)+D_m\sin\left(\sqrt{\lambda_m}L\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{\left[J_{n+1}\left(\sqrt{i\lambda_m}R_0\right)\right]^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(in\varphi)\int_0^{R_0}drrJ_n\left(\sqrt{i\lambda_m}r\right)v_2(r,\varphi)\ .$$

Знайшовши коефіцієнти $C_{nm}$ з першого співвідношення і підставивши їх у друге, ми можемо знайти і коефіцієнти $D_{nm}$.

Як уже зазначалось вище, розв'язок внутрішньої задачі для випадку, коли всі межові умови на поверхні циліндра є неоднорідними, визначається наступною сумою:

$$u(r,\varphi,z)=u_1(r,\varphi,z)+u_2(r,\varphi,z)\ .$$

Існує простий приклад, коли трьохвимірне рівняння Лапласа у циліндричній системі координат зводиться до одновимірного.

### 5.7.1.Теплопровідність стінки

Знайдемо температурне поле у стінці, створеній двома концентричними циліндричними поверхнями з радіусами $R_1, R_2$. Внутрішня поверхня має температуру $T_1$, зовнішня - температуру $T_2$ .

Процес носить стаціонарний характер, отже рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Лапласа

$$\Delta u(r,\varphi,z)=0 ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Межові умови можна записати як наступні неоднорідні межові умови першого роду.

$$u(R_1,\varphi,z)=T_1,\ \ u(R_2,\varphi,z)=T_2 .$$

Оскільки температури поверхонь є сталими величинами, не залежать від кутів, то температура у середині стінки може залежати лише від радіальної змінної

$$u(r,\varphi,z)=u(r) .$$

Отже рівняння Лапласа у сферичній системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right)=0$$

або

$$r\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{du(r)}{dr}=0 .$$

Це рівняння є частинним випадком розглянутого вище рівняння

$$r^2\frac{d^2u(r)}{dr^2}+r\frac{du(r)}{dr}+\lambda u(r)=0,$$

яке має власні функції

$$u_n(r)=A_n r^n+B_{-n}r^{-n},\quad n=1,2,\ldots$$

та власні числа

$$\lambda_n=-n^2 .$$

У випадку $\lambda=0$ $n=0$ і загальний розв'язок має вигляд

$$\boxed{u(r)=A+B\ln(r)},$$

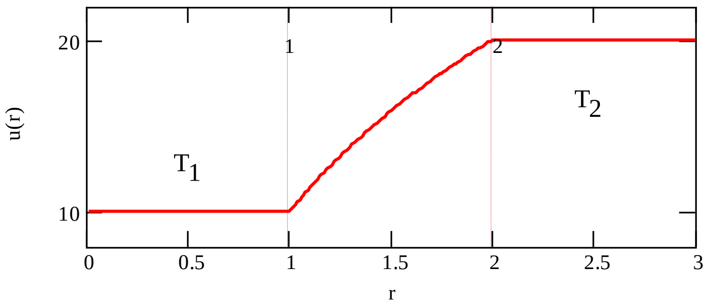
тобто температура стінки змінюється за логарифмічним законом.

Підстановка розв'язку у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A, B$. Дійсно:

$$u(R_1) = A + B\ln(R_1) = T_1,$$
$$u(R_2) = A + B\ln(R_2) = T_2 .$$

Звідси:

$$B = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}, \quad A = -\frac{\ln(R_1)T_2 - \ln(R_2)T_1}{\ln(R_2/R_1)} .$$




**Малюнок 12.** *Температурне поле у стінці, утвореній концентричними циліндричними поверхнями*

## 5.2.Сферичні координати

Розв'яжемо рівняння Лапласа для області, що має форму кулі радіуса $r_0$, або займає весь простір поза нею. Оскільки, якщо розмістити початок координат у центрі кулі, поверхня кулі співпаде з однією з координатних поверхонь сферичної системи координат, то саме цю систему і слід використати для розв'язання рівняння. У сферичній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}} .$$

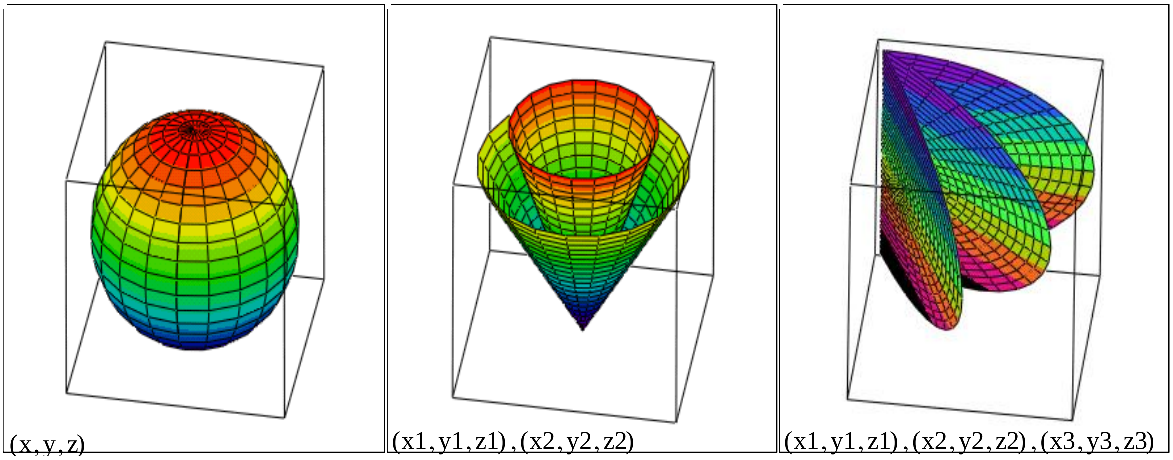
Сферичні координати змінюються у наступних межах:

$$r \subset [0, r_0], \;\; \theta \subset [0, \pi], \;\; \varphi \subset [0, 2\pi),$$

для внутрішньої частини кулі та

$$r \subset [r_0, \infty), \;\; \theta \subset [0, \pi], \;\; \varphi \subset [0, 2\pi)$$

для зовнішньої щодо неї області.




**Малюнок 13.** *Координатні поверхні r = const, θ = const, φ = const у сферичній системі координат*

Розглянемо як внутрішню, так і зовнішню задачі. Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної. На поверхні сфери $r=r_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(r_0,\theta,\varphi)=\psi(\theta,\varphi).$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі кулі, тобто у початку координат. Оскільки ця точка фізично не виділена, то відповідна межова умова просто вимагає, щоб вона була звичайною точкою диференційного рівняння. Це, зокрема, означає, що

$$u(o,\theta,\varphi)<\infty.$$

У випадку зовнішньої задачі, ця умова має аналогічний вигляд

$$u(\infty,\theta,\varphi)<\infty.$$

Всі наступні межові умови є універсальними як для внутрішньої, так і зовнішньої задач. Для азимутального кута межові точки фізично збігаються. Очевидно збігаються і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\varphi=0$ фізично нічим не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом:

$$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi).$$

Межові значення полярного кута теж фізично нічим не виділені, тому відповідні межові умови носять чисто обмежувальний характер:

$$u(r,0,\varphi)<\infty, \qquad\qquad u(r,\infty,\varphi)<\infty.$$

Відповідно до методу поділу змінних розв’язок шукатимемо у вигляді

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0\ .$$

Це рівняння зручне для відділення рівнянь для будь-якої з функцій $R(r),\Theta(\theta),\Phi(\varphi)$. Відділимо, наприклад, рівняння для першої з них

$$-\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\lambda\ .$$

Звідси одержуємо наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-\lambda,$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)=\lambda.$$

Друге з цих рівнянь є вже звичайним. У першому рівнянні поділ змінних можна продовжити. Для цього його доцільно представити так

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\sin(\theta)\frac{d}{d\theta}\left(\sin(\theta)\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\lambda\sin^2(\theta)=$$

$$=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\mu\ .$$

Як наслідок, ми одержимо наступну систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\mu\Phi(\varphi)=0,$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right)+\left(\lambda\sin^2\theta-\mu\right)\Theta(\theta)=0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)-\lambda R(r)=0.$$

Таким чином, поділ змінних у рівнянні завершено. Легко діляться змінні і у межових умовах. З межової умови

$$R(r_0)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=0$$

випливає, що

$$R(r_0)=0.$$

З циклічної межової умови

$$R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=R(r)\Theta(\theta+2\pi)\Phi(\varphi)$$

випливає, що

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\ .$$

Решта межових умов обмежувального характеру приводить до аналогічних умов для введених функцій

$$R(0),\Theta(0),\Theta(\pi)<\infty.$$

Перейдемо тепер до розв'язання окремих диференційних рівнянь. Власні функції та власні числа першого з рівнянь системи мають вигляд:

$$\Phi_m(\varphi)=\exp\left(im\varphi\right).$$

$$\mu_n=m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

У наступному рівнянні перейдемо до нової змінної $x=\cos(\theta)$. Тоді воно набере вигляду рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d\Theta(x)}{dx}\right)+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta(\theta)=0.$$

Це рівняння має особливості для $x=\pm1$ або $\theta=0,\pi$. Розв'язки рівняння існують для довільних $\lambda$ та $m^2$ і ними є приєднані функції Лежандра, що мають логарифмічні особливості у зазначених точках. Для цілих $m^2$ розв'язки існують лише для $\lambda_n=n(n+1)$, $n=0,1,2,\ldots$ Одним з цих лінійно незалежних розв'язків рівняння є приєднаний поліном Лежандра, який таких особливостей не має. Другим лінійно незалежним розв'язком рівняння і у цьому випадку буде функція Лежандра. Вона має логарифмічні особливості у точках $x=\pm 1$ і при $\lambda_n = n(n+1)$. Відповідні межові умови для функції $\Theta(\theta)$ виділяють з двох можливих лінійно незалежних розв’язків рівняння Лежандра тільки обмежений у точках $\theta = 0, \pi$, або $x = \pm 1$. Такими розв’язками є лише приєднані поліноми Лежандра, а власними числами можуть бути лише:

$$\boxed{\lambda_n = n(n+1)}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Відповідні власні функції мають вигляд:

$$\boxed{\Theta_{nm}(\theta) = P_n^{\ m}(\cos\theta)}. \quad -n \le m \le n.$$

За означенням сферичних функцій

$$\boxed{Y_{nm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{\ m}(\cos\theta) \exp(im\varphi)}$$

Отже, сферичні функції є єдиними скінченими у точках $\theta = 0, \pi$ власними функціями наступного рівняння з частинними похідними

$$\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta}\left( \sin(\theta) \frac{\partial Y_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial^2 Y_{nm}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} +$$
$$+ n(n+1)\sin^2(\theta) Y_{nm}(\theta,\varphi) = 0.$$

З рівняння видно, що спектр власних чисел є виродженим з кратністю $m = 2n+1$. Тобто кожному власному числу $\lambda_n = n(n+1)$ відповідають $2n+1$ власні функції: $Y_{n,-n}(\theta,\varphi)$, ..., $Y_{n,n}(\theta,\varphi)$. Рівняння для радіальної функції можна записати у вигляді

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + 2r \frac{dR(r)}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2} R(r) = 0.$$

Як було показано нами раніше, власними функціями цього рівняння є степеневі функції. Його загальний розв'язок можна записати так:

$$R_n(r) = A_n r^n + B_{-n-1} r^{-n-1}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Для внутрішньої задачі, з умови обмеженості розв’язку у нулі випливає, що $B_{-n-1} = 0$, і такими власними функціями можуть бути лише степеневі функції з додатними показниками степеню, тобто:

$$R_n(r)=r^n, \quad n=0,1,2,\ldots.$$

Для зовнішньої задачі з умови обмеженості розв’язку у нескінченності випливає, що $A_n = 0$, і такими власними функціями можуть бути лише степеневі функції з від'ємним показниками степеню:

$$R_n(r)=r^{-n-1}, \ n=0,1,2,\ldots .$$

Отже, частинні розв’язки внутрішньої задачі, що задовольняють всім межовим умовам, крім умови на поверхні кулі, мають вигляд:

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi), \qquad n=0,1,2,\ldots,$$

або

$$u_{nm}(r,\theta,\varphi)=r^{-n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi), \quad n=0,1,2,\ldots .$$

Загальний розв’язок рівняння Лапласа можна записати тепер або у вигляді

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)},$$

або у вигляді

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)}.$$

Коефіцієнти розкладу $G_{nm}$ можуть бути знайдені з межової умови на поверхні кулі:

$$\psi(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r_0{}^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi),$$

$$\psi(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r_0{}^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)$$

Ці рівності є рядами Фур’є за сферичними функціями для заданої функції $\psi(\theta,\varphi)$. Коефіцієнти цих розкладів, при відповідних значеннях індексів, визначаються або із співвідношення

$$\int d\Omega \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)\psi(\theta,\varphi)=G_{nm} r_0{}^n,$$

або із співвідношення

$$\int d\Omega \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)\psi(\theta,\varphi)=G_{nm}r_0^{-n-1}\ .$$

Існує простий приклад, коли трьохвимірне рівняння Лапласа у сферичній системі координат зводиться до одновимірного.

### 5.8.1.Теплопровідність стінки

Знайдемо температурне поле у стінці, утвореній двома сферичними концентричними поверхнями з радіусами $R_1, R_2$. Внутрішня поверхня має температуру $T_1$, зовнішня - температуру $T_2$ .

Процес носить стаціонарний характер, отже рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Лапласа

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=0\ ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Межові умови можна записати як наступні неоднорідні межові умови першого роду:

$$u(R_1,\theta,\varphi)=T_1,\ \ u(R_2,\theta,\varphi)=T_2\ .$$

Оскільки температури поверхонь є сталими величинами, не залежать від кутів, то температура у середині стінки може залежати лише від радіальної змінної

$$u(r,\theta,\varphi)=u(r)\ .$$

Отже рівняння Лапласа у сферичній системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du(r)}{dr}\right)=0\ ,$$

або

$$r^2\frac{d^2u(r)}{dr^2}+2r\frac{du(r)}{dr}=0\ .$$

Це рівняння є частинним випадком вище розглянутого рівняння

$$r^2\frac{d^2u(r)}{dr^2}+2r\frac{du(r)}{dr}+\lambda u(r)=0,$$

яке має власні функції

$$u_n(r)=A_n r^n + B_{-n-1} r^{-n-1}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

та власні числа

$$\lambda_n = n(n+1)\ .$$

У випадку $\lambda = 0$ $n=0$ і загальний розв'язок має вигляд

$$\boxed{u(r)=A+B/r},$$

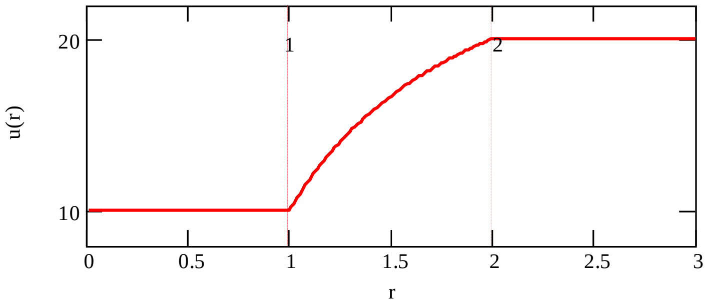
тобто температура стінки змінюється обернено пропорційно відстані від центру сфер.

Підстановка розв'язку у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A, B$. Дійсно

$$u(R_1)=A+B/R_1=T_1,$$
$$u(R_2)=A+B/R_2=T_2\ .$$

Звідси

$$B=-R_1R_2\frac{T_2-T_1}{R_2-R_1},\ A=\frac{R_2T_2-R_1T_1}{R_2-R_1}\ .$$




**Малюнок 14.** *Температурне поле у стінці, утвореній концентричними сферичними поверхнями*

## 5.8.2.Обтікання кулі ідеальною рідиною

Застосуємо результати, отримані у попередньому параграфі, до задачі про обтікання кулі однорідним потоком ідеальної рідини. Нехай потік має швидкість $v_\infty$ і рухається вздовж осі $z$. Знаходження векторної характеристики, тобто швидкості кожної точки простору $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, заповненої потоком, зручно звести до знаходження скалярного потенціалу швидкості $u(\mathbf{r})$. Останній задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0.$$

При цьому між потенціалом швидкості і швидкістю у даній точці простору існує наступний зв'язок

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = grad\lfloor u(\mathbf{r}) \rfloor.$$

Нормальна до поверхні складова швидкість потоку на межі кулі $S$ задовольняє очевидній межовій умові

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S,$$

Тобто ця складова швидкості потоку на поверхні кулі дорівнює нулю. Куля непроникна для потоку. Для потенціалу швидкості ця межова умова є умовою другого роду

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S.$$

Тут похідна береться вздовж зовнішньої нормалі.

Друга межова умова має бути задана у нескінченності. Вона означає, що у нескінченності збурення потоку тілом відсутнє, тобто

$$grad\lfloor u(\mathbf{r}) \rfloor = \mathbf{v}_\infty, \quad \mathbf{r} \to \infty.$$

Оскільки потік направлений вздовж осі $z$, то швидкість у нескінченності у декартовій системі координат має лише одну компоненту $v_z$. У сферичній системі координат проекція цієї компоненти на радіус - вектор точки простору (центр системи координат збігається з центром сфери) дає нам радіальну компоненту швидкості, а на перпендикулярний напрямок - полярну її компоненту:

$$\mathbf{v}_r = v_\infty \cos(\theta), \qquad \mathbf{v}_\theta = -v_\infty \sin(\theta).$$

Сталість швидкості на великій відстані від кулі означає, що потенціал швидкості має при наближенні до нескінченно віддаленої точки зростати як лінійна функція. Тільки у цьому випадку його похідна і буде сталою величиною. Сказане означає, що ми не можемо безпосередньо використати раніше отриманий частинний розв'язок зовнішньої межової задачі для рівняння Лапласа для кулі. Потрібно взяти загальний розв'язок рівняння Лапласа

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left( A_{nm} r^n + \frac{B_{nm}}{r^{n+1}} \right) \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)}.$$

Знайдемо радіальну компоненту швидкості у сферичній системі координат

$$v_r(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta,\varphi),$$

або

$$v_r(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[nA_{nm}r^{n-1}-(n+1)\frac{B_{nm}}{r^{n+2}}\right]\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Якщо цей розв'язок підставити у межову умову у нескінченості, то вона набуває вигляду

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[nA_{nm}r^{n-1}-(n+1)\frac{B_{nm}}{r^{n+2}}\right]\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=v_{\infty}\cos(\theta).$$

Виконавши граничний перехід, одержимо

$$\sum_{m=-1}^{1}A_{1m}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=v_{\infty}\cos(\theta)$$

Оскільки

$$\cos(\theta)=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi),$$

то прирівнюючи коефіцієнти при однакових сферичних функціях матимемо:

$$A_{11}=A_{1-1}=0,\qquad A_{10}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}v_{\infty}.$$

Ця умова може бути виконана лише у випадку, коли всі коефіцієнти $A_{nm}=0$, крім коефіцієнту $A_{10}=0$. Таким чином, після використання межової умови у нескінченності, загальний розв'язок набере вигляду

$$u(r,\theta,\varphi)=A_{00}+v_{\infty}r\cos(\theta)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}B_{nm}r^{-n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Підставимо цей результат у межову умову на поверхні сфери, попередньо перейшовши від виразу для потенціалу до виразу для радіальної компоненти швидкості

$$v_{\infty}\cos(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)B_{nm}r_0^{-n-2}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi),$$

Ми отримали ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є мають вигляд:

$$(n+1)B_{nm}r_0^{-n-2}=v_{\infty}\int d\Omega\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)\cos(\theta).$$

Виражаючи косинус через сферичні функції і враховуючи умову ортогональності сферичних функцій, одержимо

$$G_{10} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} v_\infty r_0^3 .$$

Решта коефіцієнтів ряду Фур'є є нулі. Для потенціалу швидкості маємо

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi) = v_\infty r \left( 1 + \frac{r_0^3}{2r^3} \right) \cos(\theta) + A_{00}} .$$

Довільну сталу, що входить у вираз для потенціалу, можна не писати, що звичайно і робиться, оскільки розв'язок рівняння Лапласа визначений з точністю саме до довільної сталої. Наявність сталої ні на що не впливає, оскільки спостережуваною величиною є не потенціал, а його градієнт.

Тепер можна знайти і компоненти швидкості. Це зручно зробити знову ж у полярній системі координат. Отже,

$$\boxed{v_r = grad_r\big[u(\mathbf{r})\big] = \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta,\varphi) = v_\infty \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \cos(\theta)},$$

$$\boxed{v_\theta = grad_\theta\big[u(\mathbf{r})\big] = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} u(r,\theta,\varphi) = -v_\infty \left( 1 + \frac{r_0^3}{2r^3} \right) \sin(\theta)},$$

$$\boxed{v_\varphi = 0}.$$

Розподіл швидкостей на поверхні кулі має вигляд:

$$v_r = 0,$$

$$v_\theta = -v_\infty \frac{3r_0^3}{2r^3} \sin(\theta),$$

$$v_\varphi = 0.$$

Дотична до поверхні складова швидкості дорівнює нулю у двох точках поверхні, яким відповідає $\theta = 0, \pi$

### 5.8.3.Діелектрична куля в однорідному електричному полі

Нехай куля радіусом $r_0$ з діелектричною проникністю $\mathrm{E}$ знаходиться в однорідному електричному полі з потенціалом

$$u_0(\mathbf{r}) = -E_0 z = -E_0 r\cos(\theta),$$

діелектрична проникність середовища $\varepsilon$. Присутність кулі збурює зовнішнє поле. Нехай його потенціал у середині кулі буде $U(\mathbf{r})$, зовні $u(\mathbf{r})$. Очевидно,

$$U(\mathbf{r}) = u_0 + V(\mathbf{r}),$$

$$u(\mathbf{r}) = u_0 + v(\mathbf{r}),$$

де $V(\mathbf{r})$ - додатковий потенціал, створюваний кулею, $v(\mathbf{r})$ - додатковий потенціал, створюваний середовищем.

Також очевидно, що потенціали як у кулі, так і поза нею задовольняють рівнянню Лапласа

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0., \quad \Delta U(\mathbf{r}) = 0.$$

Оскільки має місце очевидна рівність

$$\Delta u_0 = 0$$

і функція $u_0$.та її перші похідні задовольняють умовам неперервності на межі колі, то рівнянню Лапласа задовольняють і потенціали, створювані середовищем і кулею, тобто

$$\Delta v(\mathbf{r}) = 0., \quad \Delta V(\mathbf{r}) = 0.$$

Очевидно, достатньо розв'язати останні два рівняння.

Межові умови обмежувального характеру мають традиційний вигляд:

$$U(0) < \infty., \quad u(\infty) < \infty.$$

На поверхні сфери потрібно задати межові умови спряження. Для скалярного потенціалу електричного поля вони мають вигляд:

$$V(\mathbf{r}_0) = v(\mathbf{r}_0).,$$

$$\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial n}V(\mathbf{r}_0) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial n}v(\mathbf{r}_0) = (\mathrm{E} - \varepsilon)\frac{\partial}{\partial n}u_0(\mathbf{r}_0) .$$

Тут скрізь мається на увазі зовнішня нормаль до поверхні сфери.

У сферичній системі координат одиничний вектор зовнішньої нормалі та оператор градієнту визначаються так:

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}_r\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_r) + \mathbf{i}_\theta\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_\theta) + \mathbf{i}_\varphi\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_\varphi),$$

$$\boxed{\nabla = \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}},$$

тому зовнішня нормаль у кожній точці , якщо центр сферичної системи координат збігається з центром сфери, завжди направлена вздовж вектора $\mathbf{i}_r$, тобто $\mathbf{n} = \mathbf{i}_r$. Оскільки, за означенням

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}\nabla) u(\mathbf{r}) \;,$$

то, з урахуванням попередньої обставини,

$$\frac{\partial}{\partial n} u(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial r} u(\mathbf{r}).$$

Тепер другу межову умову можна записати так

$$\mathrm{E}\frac{\partial}{\partial r} V(\mathbf{r}_0) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} v(\mathbf{r}_0) = -(\mathrm{E} - \varepsilon)\frac{\partial}{\partial r} u_0(\mathbf{r}_0) \;.$$

Загальний розв'язок усередині сфери, відповідно до вище отриманих результатів, можна записати наступним чином

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} H_{nm} r^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Оскільки всі доданки другої суми розбіжні у початку координат, то відповідна межова умова обмежувального характеру буде виконана лише при умові, що всі $H_{nm} = 0$. Отже,

$$\boxed{V(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)}.$$

Загальний розв'язок зовні сфери, відповідно до вище отриманих результатів, можна записати аналогічним чином

$$v(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} H_{nm} r^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Оскільки всі доданки першої суми, крім $G_{00}$, розбіжні у нескінченно віддаленій точці, то відповідна межова умова обмежувального характеру буде виконана лише при умові, що всі $G_{nm}=0$. Як відомо, скалярний потенціал електричного поля визначений з точністю до довільної сталої, тому, не зменшуючи загальності результату, можна вважати, що

$$\boxed{v(\mathbf{r})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}H_{nm}r^{-n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)}.$$

Перш ніж використати межові умови на поверхні сфери, вільний член другої межової умови теж доцільно представити рядом Фур'є за сферичними функціями

$$\frac{\partial}{\partial r}u_0(\mathbf{r}_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}F_{nm}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Обчисливши похідну у лівій частині, цю рівність можна записати так

$$-E_0\cos(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}F_{nm}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Оскільки, виходячи з означення сферичних функцій,

$$\cos(\theta)=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\mathrm{Y}_{10}(\theta,\varphi),$$

то

$$F_{nm}=-E_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\delta_{n1}\delta_{m0}.$$

Перша межова умова тепер матиме вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}G_{nm}r_0^{\,n}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}H_{nm}r_0^{-n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Ця рівність можлива при умові, що

$$G_{nm}r_0^{\,n}=H_{nm}r_0^{-n-1}..$$

Розглянемо тепер другу межову умову. Відповідно до неї

$$\mathrm{E}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}G_{nm}nr_0^{\,n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)+.$$

$$+\varepsilon\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(n+1)H_{nm}r_0^{-n-2}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=$$

$$=-(\mathrm{E}-\varepsilon)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}F_{nm}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi).$$

Остання рівність теж можлива лише при умові, що

$$\mathrm{E}G_{nm}nr_0^{\,n-1}+\varepsilon(n+1)H_{nm}r_0^{\,-n-2}=-(\mathrm{E}-\varepsilon)F_{nm}.$$

Розв'язуючи разом два рівняння щодо коефіцієнтів, одержимо

$$G_{nm}=-\frac{\mathrm{E}-\varepsilon}{[\mathrm{E}n+\varepsilon(n+1)]r_0^{\,n-1}}F_{nm},$$

або

$$G_{nm}=E_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\frac{\mathrm{E}-\varepsilon}{[\mathrm{E}n+\varepsilon(n+1)]r_0^{\,n-1}}\delta_{n1}\delta_{m0}.$$

Тепер легко знайти і самі поля:

$$V(\mathbf{r})=\frac{\mathrm{E}-\varepsilon}{\mathrm{E}+2\varepsilon}E_0r\cos(\theta),$$

$$v(\mathbf{r})=\frac{\mathrm{E}-\varepsilon}{\mathrm{E}+2\varepsilon}\frac{r_0^{\,3}}{r^3}E_0r\cos(\theta).$$

Відповідно

$$\boxed{U(\mathbf{r})=-\frac{3\varepsilon}{\mathrm{E}+2\varepsilon}E_0r\cos(\theta)},$$

$$\boxed{u(\mathbf{r})=-\left[1-\frac{\mathrm{E}-\varepsilon}{\mathrm{E}+2\varepsilon}\frac{r_0^{\,3}}{r^3}\right]E_0r\cos(\theta)}..$$

З отриманих результатів видно, що, якщо діелектрична проникність кулі у багато разів більша за діелектричну проникність середовища, то скалярний потенціал електричного поля у кулі, за абсолютною величиною, буде значно меншим, ніж у навколишньому середовищі

## 5.3.Витягнуті сфероїдальні координати

Розв'яжемо трьохвимірне рівняння Лапласа для області, що має форму витягнутого сфероїда. Останній утворюється обертанням еліпса вздовж більшої осі. Нехай фокуси сфероїда розташовані у точках з координатами $x,y=0,\quad z=\pm a$. Тоді відстань довільної точки простору з координатами $(x,y,z)$ від полюсів буде визначатись так:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}.$$

Координатними поверхнями сфероїдальної системи координат є сфероїди $r = const$, що мають полюси у вище зазначених точках. Саме тому одна з сфероїдальних координат визначається так:

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2a}, \qquad 1 \le r < \infty.$$

Іншими координатними поверхнями є двополостні гіперболоїди обертання,. фокуси яких збігаються з фокусами сфероїдів $\rho = const$. З цієї причини інша сфероїдальна координата визначається так:

$$\rho = \frac{r_1 - r_2}{2a}, \qquad -1 \le \rho \le 1.$$

Третьою групою координатних поверхонь є площини $\varphi = const$, що проходять через вісь $z$ і утворюють кут $\varphi$ з площиною $x, z$. У висліді третя сфероїдальна координата визначається так:

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Існує наступний зв'язок між декартовими та сфероїдальними координатами:

$$z = ar\rho,$$
$$x = a\sqrt{(r^2-1)(1-\rho^2)}\cos(\varphi),$$
$$y = a\sqrt{(r^2-1)(1-\rho^2)}\sin(\varphi).$$

Величина $ar$ є більшою віссю сфероїда, а величина $a\sqrt{r^2-1}$ - його меншою віссю. Існує зв'язок сфероїдальної системи координат і з сферичною системою координат. Так, якщо $a$ спрямувати до нуля, то сфероїдальні координати перейдуть у сферичні, а саме: $r \to r/a$, $\arccos\rho \to \theta$, $\varphi = \varphi$.

У сфероїдальній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{a^2\left(r^2-\rho^2\right)}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2-1\right)\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{\partial}{\partial \rho}\right] + \\ &+ \frac{r^2-\rho^2}{\left(r^2-1\right)\left(1-\rho^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{aligned}\right\}}.$$

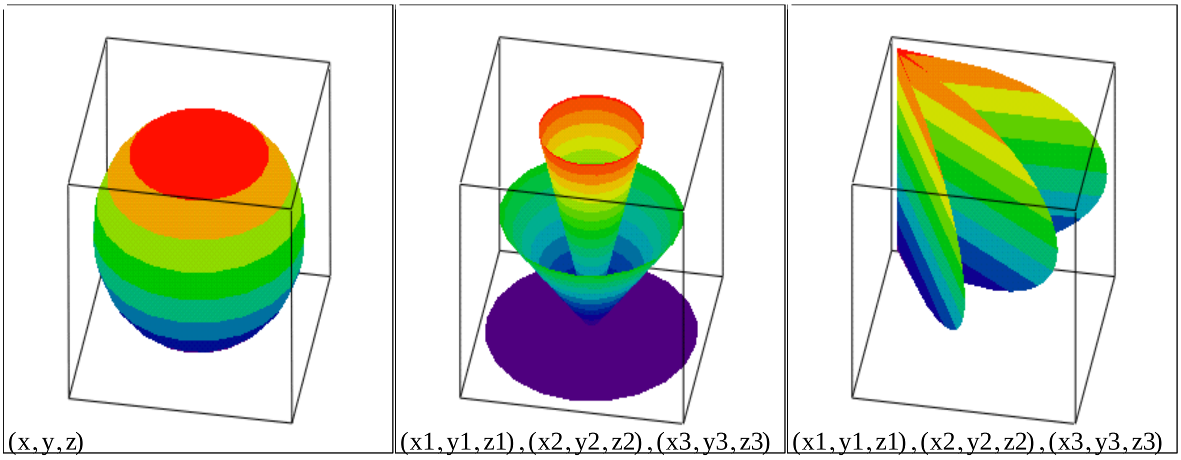
Сфероїдальні координати змінюються у наступних межах для внутрішньої частини сфероїда:

$$1 \le r \le r_0, \qquad -1 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

та

$$r_0 \le r < \infty, \qquad -1 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

для області зовнішньої щодо нього. Полюсам сфероїда відповідають наступні значення сфероїдальних координат: $\rho = \pm 1$, $r = 1$, $\varphi$ - довільне.




**Малюнок 15.** *Координатні поверхні r = const, ρ = const, φ = const у витягнутій сфероїдальній системі координат*

Розглянемо як внутрішню, так і зовнішню задачі. Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної (тут ми вживаємо ті ж назви, що і для сферичної системи координат). На поверхні сфероїда $r = R_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(R_0, \rho, \varphi) = U(\rho, \varphi).$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі сфероїда, тобто на прямій, що з'єднує фокуси сфероїда. Оскільки ця лінія фізично не виділена, то відповідна межова умова просто вимагає відсутності на ній особливостей, що, зокрема, означає

$$u(1, \rho, \varphi) < \infty.$$

У випадку зовнішньої задачі цілком фізичною є умова, щоб нескінченно віддалена точка не була особливою точкою розв'язку, тобто

$$u(\infty, \rho, \varphi) < \infty.$$

Наступні межові умови є універсальними як для внутрішньої, так і зовнішньої задач. Полюси сфероїда, що відповідають межовим значенням полярного кута $\rho = \pm 1$, фізично не виділені і єдиною умовою, що має виконуватись у цих точках, є умова скінченності розв'язку, тобто:

$$u(r, -1, \varphi) < \infty, \qquad u(r, 1, \varphi) < \infty.$$

Для азимутального кута межові точки просто збігаються. Очевидно збігаються і відповідні значення невідомої функції. Оскільки значення $\varphi=0$ фізично не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Сказане означає періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом

$$u(r,\rho,\varphi)=u(r,\rho,\varphi+2\pi).$$

У відповідності з методом поділу змінних, будемо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$u(r,\rho,\varphi)=R(r)\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння, одержимо:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[\left(r^2-1\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{r^2-\rho^2}{\left(r^2-1\right)\left(1-\rho^2\right)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=0.$$

Почнемо відділення змінних з азимутальної змінної. Для цього останнє рівняння доцільно привести до вигляду

$$\frac{1}{R(r)}\frac{\left(r^2-1\right)\left(1-\rho^2\right)}{r^2-\rho^2}\frac{d}{dr}\left[\left(r^2-1\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{\left(r^2-1\right)\left(1-\rho^2\right)}{r^2-\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\lambda.$$

У висліді система рівнянь розпадається на два рівняння, одне з яких уже звичайне:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0,$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[\left(r^2-1\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{1-\rho^2}+\frac{1}{r^2-1}\right]\lambda.$$

В останньому рівнянні змінні також легко поділити, а саме

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left[\left(r^2-1\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]-\frac{\lambda}{r^2-1}=$$
$$=-\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\,\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\frac{\lambda}{1-\rho^2}=\mu .$$

Нарешті ми одержимо ще два звичайні диференційні рівняння:

$$\frac{d}{dr}\left[\left(1-r^2\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]+\mu R(r)-\frac{\lambda}{1-r^2}R(r)=0,$$
$$\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\mu \mathrm{P}(\rho)-\frac{\lambda}{1-\rho^2}\mathrm{P}(\rho)=0.$$

В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Загальний розв'язок другого рівняння детально вже неодноразово обговорювався, тому ми зразу випишемо власні функції і власні значення цієї задачі:

$$\Phi_m(\varphi)=\exp(im\varphi),\qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$
$$\lambda_m=m^2.$$

Після підстановки знайдених власних чисел у наступні два рівняння системи, вони наберуть вигляду:

$$\frac{d}{dr}\left[\left(1-r^2\right)\frac{dR_m(r)}{dr}\right]+\mu R_m(r)-\frac{m^2}{1-r^2}R_m(r)=0,$$
$$\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}_m(\rho)}{d\rho}\right]+\mu \mathrm{P}_m(\rho)-\frac{m^2}{1-\rho^2}\mathrm{P}_m(\rho)=0.$$

Це є ніщо інше як рівняння Лежандра. З вихідних межових умов обмежувального характеру для невідомої функції природно випливають межові умови для розв'язків останніх двох рівнянь:

$$R(1)<\infty,\qquad R(\infty)<\infty,\qquad \mathbf{P(\pm1)<\infty}.$$

Розглянемо спочатку останні дві межові умови. Єдиними розв'язками рівняння Лежандра, що не мають особливостей для $\rho=\pm1$, є приєднані поліноми Лежандра: $\mathrm{P}_n^{\,m}(\rho)$. Це можливо лише для

$$\lambda_n=n(n+1).$$

Важливою є та обставина, що приєднані поліноми Лежандра ортогональні на проміжку $[-1,1]$.

Загальний розв'язок іншого рівняння Лежандра можна записати у вигляді лінійної комбінації приєднаних поліномів та функцій Лежандра

$$R_{nm}(r) = A_{nm} P_n^{\ m}(r) + B_{nm} Q_n^{\ m}(r)\ .$$

Для внутрішньої задачі, оскільки приєднані функції Лежандра мають у цій точці логарифмічну особливість, умова скінченності розв'язку у точці $r = 1$ залишає у ньому тільки перший доданок, тобто

$$\boxed{R_{nm}(r) = P_n^{\ m}(r)}\ .$$

Для зовнішньої задачі, оскільки нескінченно віддалена точка є полюсом для приєднаних поліномів Лежандра, умова скінченності розв'язку у точці $r = \infty$ залишає у ньому тільки другий доданок, тобто

$$\boxed{R_{nm}(r) = Q_n^{\ m}(r)}\ .$$

Для простоти, ми не пишемо довільні сталі множники, оскільки саме з точністю до них ці розв'язки і можуть бути знайдені. Важливим тут є те, що на проміжку $[1,\infty)$ приєднані поліноми Лежандра не є ортогональними.

У висліді шуканими частинними розв'язками є

$$u_{nm}(r,\rho,\varphi) = P_n^{\ m}(r)\mathrm{P}_n^{\ m}(\rho)\exp(im\varphi)$$

для внутрішньої задачі, та

$$u_{nm}(r,\rho,\varphi) = Q_n^{\ m}(r)\mathrm{P}_n^{\ m}(\rho)\exp(im\varphi)$$

для зовнішньої задачі. Загальні розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач мають вигляд:

$$\boxed{u(r,\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m==n}^{n} A_{nm} P_n^{\ m}(r) Y_{nm}(\rho,\varphi)}\ ,$$

$$\boxed{u(r,\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m==n}^{n} B_{nm} Q_n^{\ m}(r) Y_{nm}(\rho,\varphi)}\ .$$

Довільні сталі знаходяться з межової умови на поверхні сфероїда:

$$u_0(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m==n}^{n}A_{nm}P_n{}^m(R_0)Y_{nm}(\rho,\varphi),$$

$$u_0(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m==n}^{n}B_{nm}Q_n{}^m(R_0)Y_{nm}(\rho,\varphi).$$

У висліді ми отримали два ряди Фур'є за сферичними функціями. Коефіцієнти цих ряді можна записати стандартним чином:

$$A_{nm}P_n{}^m(R_0)=\int d\Omega Y_{nm}(\rho,\varphi)u_0(\rho,\varphi),$$

$$B_{nm}Q_n{}^m(R_0)=\int d\Omega Y_{nm}(\rho,\varphi)u_0(\rho,\varphi).$$

## 5.4.Сплюснуті сфероїдальні координати

Розв'яжемо двовимірне рівняння Лапласа для області, що має форму сплюснутого сфероїда. Останній утворюється обертанням еліпсу вздовж меншої осі. Нехай фокуси сфероїда розташовані у точках з координатами $x,y=0,\quad z=\pm a$. Існує наступний зв'язок між декартовими та сфероїдальними координатами:

$$z=ar\rho,$$

$$x=a\sqrt{(r^2+1)(1-\rho^2)}\cos(\varphi),$$

$$y=a\sqrt{(r^2+1)(1-\rho^2)}\sin(\varphi).$$

При цьому

$$0\le r<\infty,\quad -1\le\rho\le1,\quad 0\le\varphi<2\pi.$$

Поверхня $r=0$ є диском радіуса $a$ з центром у початку координат, розташованим у площині $x,y$. Поверхня $\rho=1$ є додатною піввіссю $z$, поверхня $\rho=-1$ - від'ємною піввіссю $z$, а поверхня $\rho=0$ - площиною $x,y$, за виключенням тої її частини, що розташована всередині круга радіуса $a$ з центом у початку координат. Поверхня $r=const$ є сплюснутим сфероїдом, довжина осі обертання якого дорівнює $2ar$, а радіус в екваторіальній площині - $a\sqrt{r^2+1}$. Поверхня $\rho=const$ є однополостним гіперболоїдом обертання, віссю якого є вісь $z$, а твірна асимптотичного конуса нахилена під кутом $\arccos(\rho)$ до цієї осі.

У сплюснутих сфероїдальних координатах оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{a^2\left(r^2+\rho^2\right)}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r^2+1\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{\partial}{\partial \rho}\right]+ \\ +\frac{r^2+\rho^2}{\left(r^2+1\right)\left(1-\rho^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\end{array}\right\}.$$

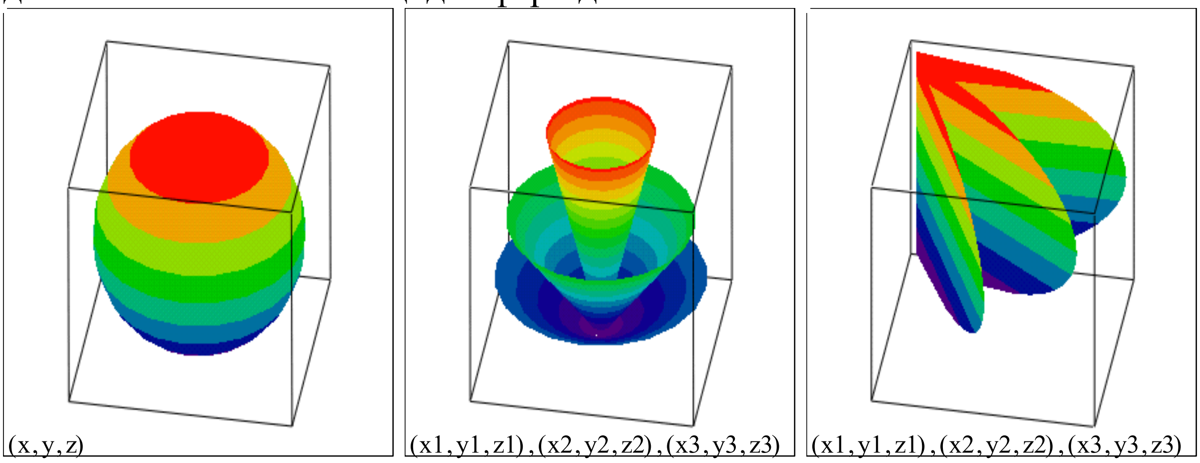
Сплюснуті сфероїдальні координати змінюються у наступних межах для внутрішньої частини сфероїда:

$$0 \le r \le r_0, \qquad -1 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

та

$$r_0 \le r < \infty, \qquad -1 \le \rho \le 1, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

для області зовнішньої щодо сфероїда.




**Малюнок 16.** *Координатні поверхні r = const, ρ = const, φ = const у сплюснутій сфероїдальній системі координат*

Почнемо розгляд межових умов з радіальної змінної На поверхні сфероїда $r = r_0$ задамо, наприклад, межову умова першого роду

$$u(r_0, \rho, \varphi) = U(\rho, \varphi).$$

Друга межова умова задається на внутрішній межі сфероїда, тобто у його центрі. Оскільки ця точка фізично не виділена, то відповідна межова умова вимагає відсутності у ній особливості, що, зокрема, означає

$$u(0, \rho, \varphi) < \infty.$$

У випадку зовнішньої задачі цілком фізичною є умова, щоб нескінченно віддалена точка не була особливою точкою розв'язку, тобто

$$u(\infty, \rho, \varphi) < \infty.$$

Наступні межові умови є універсальними як для внутрішньої, так і зовнішньої задачі. Полюси сфероїда, що відповідають межовим значенням полярного кута $\rho=\pm 1$, фізично не виділені і єдиною умовою, що має виконуватись у цих точках, є умова скінченності розв'язку, тобто:

$$u(r,-1,\varphi)<\infty, \qquad u(r,1,\varphi)<\infty.$$

Для азимутального кута межові точки збігаються. Очевидно, збігаються і значення невідомої функції. Оскільки значення $\varphi=0$ фізично не виділене, то те саме має місце і для довільних значень азимутального кута. Тобто невідома функція є періодичною з періодом $2\pi$ за азимутальним кутом:

$$u(r,\rho,\varphi)=u(r,\rho,\varphi+2\pi).$$

У відповідності з методом поділу змінних будемо шукати частинні розв'язки у вигляді

$$u(r,\rho,\varphi)=R(r)\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi).$$

Після поділу змінних, аналогічно випадку витягнутих сфероїдальних координат, одержимо наступну систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0,$$

$$\frac{d}{dr}\left[\left(1+r^2\right)\frac{dR(r)}{dr}\right]-\mu R(r)-\frac{\lambda}{1+r^2}R(r)=0,$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\mu\mathrm{P}(\rho)-\frac{\lambda}{1-\rho^2}\mathrm{P}(\rho)=0\ .$$

Розглянемо тепер межові умови. В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Загальний розв'язок першого рівняння вже детально обговорювався, тому ми випишемо тут лише власні функції та власні значення цієї задачі,

$$\Phi_m(\varphi)=\exp(im\varphi), \qquad m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

$$\lambda_m=m^2.$$

Після підстановки знайдених власних чисел у наступні два рівняння системи вони наберуть вигляду

$$\frac{d}{dr}\left[\left(1+r^2\right)\frac{dR_m(r)}{dr}\right]-\mu R_m(r)-\frac{m^2}{1+r^2}R_m(r)=0,$$

$$\frac{d}{d\rho}\left[\left(1-\rho^2\right)\frac{d\mathrm{P}_m(\rho)}{d\rho}\right]+\mu\mathrm{P}_m(\rho)-\frac{m^2}{1-\rho^2}\mathrm{P}_m(\rho)=0.$$

Це є рівняння Лежандра. Першому з них задовольняють функції та поліноми Лежандра уявного аргументу, другому - дійсного. Перше з рівнянь не має особливих точок на дійсній осі, друге їх має у точках $\rho=\pm 1$. З вихідних межових умов обмежувального характеру випливають межові умови для розв'язків останніх двох рівнянь:

$$R(0)<\infty, \qquad R(\infty)<\infty\,, \qquad \mathrm{P}(\pm 1)<\infty.$$

Розглянемо спочатку останні дві межові умови. Єдиними розв'язками рівняння Лежандра, що не мають особливостей для $\rho=\pm 1$, є приєднані поліноми Лежандра: $\mathrm{P}_n^{\ m}(\rho)$, що можливо лише для

$$\lambda_n = n(n+1).$$

Важливою є та обставина, що приєднані поліноми Лежандра ортогональні на проміжку $[-1,1]$. Загальний розв'язок іншого рівняння Лежандра можна записати у вигляді лінійної комбінації приєднаних поліномів та функцій Лежандра уявного аргументу:

$$R_{nm}(r)=A_{nm}P_n^{\ m}(ir)+B_{nm}Q_n^{\ m}(ir).$$

Функції Лежандра уявного аргументу не мають особливостей у точках $r=\pm 1$ але, так само як і функції Лежандра дійсного аргументу, є обмеженими у нескінченно віддаленій точці. Тому для зовнішньої задачі, оскільки нескінченно віддалена точка є полюсом для приєднаних поліномів Лежандра і дійсного, і уявного аргументів, умова скінченності розв'язку у нескінченно віддаленій точці $r=\infty$ залишає у ньому тільки другий доданок, тобто

$$\boxed{R_{nm}(r)=Q_n^{\ m}(ir)}\,.$$

Для простоти ми не пишемо довільні сталі множники, оскільки саме з точністю до них ці розв'язки і можуть бути знайдені. Нагадаємо, що на проміжку $[r_0,\infty)$ приєднані поліноми Лежандра не є ортогональними.

Умова скінченності розв'язку у початку координат залишає у загальному розв'язку лише поліноми Лежандра. Отже, розв'язок для внутрішньої задачі має вигляд

$$\boxed{R_{nm}(r)=P_n^{\ m}(ir)}\,.$$

У висліді шукані частинні розв'язки вихідного рівняння є

$$u_{nm}(r,\rho,\varphi)=A_{nm}P_n^{\ m}(ir)\mathrm{P}_n^{\ m}(\rho)\exp(im\varphi)$$

для внутрішньої задачі, та

$$u_{nm}(r,\rho,\varphi)=B_{nm}Q_n^{\ m}(ir)\mathrm{P}_n^{\ m}(\rho)\exp(im\varphi)$$

для зовнішньої задачі. Загальні розв'язки внутрішньої та зовнішньої задач мають тепер вигляд:

$$\boxed{u(r,\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m==n}^{n}A_{nm}P_n^{\ m}(ir)Y_{nm}(\rho,\varphi)}\ ,$$

$$\boxed{u(r,\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m==n}^{n}B_{nm}Q_n^{\ m}(ir)Y_{nm}(\rho,\varphi)}\ .$$

Довільні сталі знаходяться з межової умови на поверхні сфероїда:

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m==n}^{n}A_{nm}P_n^{\ m}(ir_0)Y_{nm}(\rho,\varphi),$$

$$U(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{m==n}^{n}B_{nm}Q_n^{\ m}(ir_0)Y_{nm}(\rho,\varphi)\ .$$

У висліді ми отримали два ряди Фур'є за сферичними функціями. Коефіцієнти цих рядів можна записати стандартним чином:

$$A_{nm}P_n^{\ m}(ir_0)=\int d\Omega Y_{nm}(\rho,\varphi)U(\rho,\varphi)\ ,$$

$$B_{nm}Q_n^{\ m}(ir_0)=\int d\Omega Y_{nm}(\rho,\varphi)U(\rho,\varphi)..$$

## 5.5.Тривимірні параболічні координати

Тривимірна параболічна система координат утворюються обертанням двовимірної параболічної системи координат навколо її осі. Існує наступний зв'язок між декартовою та тривимірною параболічною системами координат:

$$x=r\rho\cos(\varphi),\qquad y=r\rho\sin(\varphi),\quad z=(r^2-\rho^2)/2\ .$$

Відстань довільної точки від початку координат визначається так

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}(r^2+\rho^2)\ .$$

При цьому

$$0\le r<\infty,\qquad 0\le\rho<\infty,\qquad 0\le\varphi<2\pi.$$

Координатними поверхнями є параболоїди $r = const$, $\rho = const$, утворені обертанням парабол довкола осі $z$ і напрямлених протилежно одна одній. Їх спільним фокусом є початок координат. Іншими координатними поверхнями є площини $\varphi = const$, що проходять через вісь $z$. $r = 0$ відповідає від'ємна піввісь $z$, $\rho = 0$ - додатна піввісь $z$.

У параболічній системі координат оператор Лапласа має вигляд

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{r\rho\left(r^2+\rho^2\right)}\left\{\rho\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right] + r\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right] + \frac{r^2+\rho^2}{r\rho}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right\}}.$$

Розглянемо у параболічних координатах внутрішню задачу. Нехай внутрішня область утворюється двома різними параболоїдами:

$$0 \le r \le r_0, \qquad 0 \le \rho \le \rho_0, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

На поверхнях цих параболоїдів $r = r_0$, $\rho = \rho_0$ задамо межові умови першого роду:

$$u(r_0, \rho, \varphi) = \alpha(\rho, \varphi), \qquad u(r, \rho_0, \varphi) = \beta(r, \varphi).$$

Як і раніше, розглянемо дві окремі більш прості межові задачі:

$$u(r_0, \rho, \varphi) = \alpha(\rho, \varphi), \quad u(0, \rho, \varphi) = 0,$$

та

$$v(r, \rho_0, \varphi) = \beta(r, \varphi), \quad u(r, 0, \varphi) = 0.$$

Інші межові умови за координатами $r, \rho$ мають обмежувальний характер, а саме:

$$u(0, \rho, \varphi) < \infty, \qquad u(r, 0, \varphi) < \infty.$$

Для азимутального кута межові умови є умовою періодичність невідомої функції з періодом $2\pi$:

$$u(r, \rho, \varphi) = u(r, \rho, \varphi + 2\pi).$$

Розглянемо першу з запропонованих межових задач. У відповідності з методом поділу змінних, будемо шукати її частинні розв'язки у вигляді

$$u(r, \rho, \varphi) = R(r)\mathrm{P}(\rho)\Phi(\varphi).$$

Після підстановки цього добутку у рівняння одержимо:

$$\frac{1}{R(r)}\rho\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right] + \frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}r\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{r^2+\rho^2}{r\rho}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0.$$

Почнемо відділення змінних з азимутальної змінної. Для цього останнє рівняння доцільно привести до вигляду

$$\frac{1}{R(r)}\frac{r\rho^2}{r^2+\rho^2}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{r^2\rho}{r^2+\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+$$

$$=-\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=\lambda.$$

У висліді система рівнянь розпадеться на два рівняння, одне з яких уже звичайне:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+\lambda\Phi(\varphi)=0,$$

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right]+\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]=\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{\rho^2}\right)\lambda\ .$$

У другому рівнянні змінні також легко поділити, а саме

$$\frac{1}{R(r)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right]-\frac{1}{r^2}\lambda=-\frac{1}{\mathrm{P}(\rho)}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2}\lambda=\mu\ .$$

Остаточно ми одержимо ще два звичайні диференційні рівняння:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR(r)}{dr}\right]-\left[\frac{\lambda}{r^2}+\mu\right]R(r)=0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}(\rho)}{d\rho}\right]-\left[\frac{\lambda}{\rho^2}-\mu\right]\mathrm{P}(\rho)=0.$$

Розглянемо тепер межові умови. В умові періодичності змінні легко діляться і вона набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi).$$

Загальний розв'язок другого рівняння детально вже обговорювався, тому ми випишемо тут лише власні функції і власні значення цієї задачі:

$$\Phi_m(\varphi)=\exp(im\varphi),\qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\lambda_m=m^2.$$

Після підстановки знайдених власних чисел в інші рівняння системи, вони матимуть вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR_m(r)}{dr}\right]-\left[\frac{m^2}{r^2}+\mu\right]R_m(r)=0,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\mathrm{P}_m(\rho)}{d\rho}\right]-\left[\frac{m^2}{\rho^2}-\mu\right]\mathrm{P}_m(\rho)=0.$$

Це є рівняння Беселя. Першому з них задовольняють функції Беселя уявного аргументу, другому - дійсного. Зв'язок між функціями Беселя дійсного та уявного аргументів такого ж типу, як і між тригонометричними та гіперболічними функціями:

$$\boxed{I_m(z)=(-1)^m J_m(iz)},$$

$$\boxed{K_m(z)=\frac{\pi}{2}(i)^{m+1}H_m(iz)}.$$

Загальний розв'язок рівняння Беселя для функцій Беселя дійсного аргументу має вигляд

$$\mathrm{P}_m(\mu,\rho)=A_m J_m(\sqrt{\mu}\rho)+B_m N_m(\sqrt{\mu}\rho)\ .$$

З межових умов обмежувального характеру для невідомої функції природно випливають межові умови для розв'язків останніх двох рівнянь:

$$R(0)<\infty, \qquad \mathrm{P}(0)<\infty.$$

У висліді, оскільки функції Ноймана мають у нулі логарифмічну особливість, у загальному розв'язку залишаються лише функції Беселя

$$\mathrm{P}_m(\mu,\rho)=A_m J_m(\sqrt{\mu}\rho).$$

Однорідна межова умова першого роду на одному з параболоїдів приводить до наступного набору власних функцій та власних чисел

$$\mathrm{P}_{nm}(\mu_n,\rho)=J_m(\sqrt{\mu_n}\rho),$$

де власні числа $\mu_n$ є нулями функції Беселя, що визначаються з умови

$$J_m(\sqrt{\mu_n}\rho_0)=0.$$

Загальний розв'язок рівняння Беселя для уявних функцій має вигляд

$$R_m(\mu_n,r)=A_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}r)+B_{mn}K_m(\sqrt{\mu_n}\rho).$$

Оскільки функція Беселя другого роду уявного аргументу має особливість у нулі, то для внутрішньої задачі розв'язок має вигляд

$$R_m(\mu_n,r)=A_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}r).$$

Тепер можна записати загальний розв'язок внутрішньої задачі так

$$\boxed{u_1(r,\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}r)J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\exp(im\varphi)}\,.$$

Довільні сталі знаходяться з межової умови на поверхні області

$$\alpha(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}r_0)J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\exp(im\varphi)\ .$$

У висліді ми отримали подвійний ряд Фур'є з коефіцієнтами

$$A_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}r_0)=\frac{1}{\pi}\frac{2}{\left[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n}\rho_0)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(im\varphi)\int_0^{\rho_0}d\rho\rho J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\alpha(\rho,\varphi)\ .$$

Аналогічно розв'язується і друга межова задача. Симетрія вихідної задачі відносно змінних $r,\rho$ дозволяє відразу записати її розв'язок

$$\boxed{u_2(r,\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_n}r)\exp(im\varphi)},$$

де

$$C_{mn}I_m(\sqrt{\mu_n}\rho_0)=\frac{1}{\pi}\frac{2}{\left[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n}r_0)\right]^2}*$$

$$*\int_0^{2\pi}d\varphi\exp(im\varphi)\int_0^{r_0}drr\,J_m(\sqrt{\mu_n}r)\beta(\rho,\varphi).$$

Розв'язок же вихідної межової задачі має вигляд

$$\boxed{u(r,\rho,\varphi)=u_1(r,\rho,\varphi)+u_2(r,\rho,\varphi)}\ .$$

## 5.7. Задачі для самостійної роботи

### Варіант 1

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 2

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 3

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\nu(x),\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 4

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=\nu(x).$$

**Варіант 5**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=\nu(y), \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 6**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\nu(y), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 7**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\nu(x), \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 8**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=\nu(x).$$

## Варіант 9

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 10

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y)=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 11

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\nu(x),\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 12

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad u(l,y)=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=\nu(x).$$

## Варіант 13

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y), \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 14

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\nu(y), \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 15

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0)=\nu(x),\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

## Варіант 16

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=\nu(x).$$

## Варіант 17

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

## Варіант 18

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad u(x,h)=0.$$

**Варіант 19**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\nu(x), \qquad u(x,h)=0.$$

**Варіант 20**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad u(x,h)=\nu(x).$$

**Варіант 21**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=\nu(y), \qquad u(l,y)=0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 22**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=v(y),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 23**

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=v(x),\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 24**

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(l,y)=0,\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=v(x).$$

**Варіант 25**

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y), \qquad u(l,y)=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 26**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad u(l,y)=\nu(y), \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 27**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad u(l,y)=0, \qquad u(x,0)=\nu(x), \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=0.$$

**Варіант 28**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0 ,$$

$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0, \qquad u(l,y)=0, \qquad u(x,0)=0, \qquad \frac{\partial u(x,h)}{\partial y}=\nu(x).$$

**Варіант 29**

1.Розв’язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$
$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=0,\qquad u(x,0)=0,\qquad u(x,h)=0.$$

**Варіант 30**

1.Розв'язати двовимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0\ ,$$
$$x\in(0,l),\ y\in(0,h),$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(l,y)}{\partial x}=\nu(y),\qquad u(x,0)=0,\qquad u(x,h)=0.$$

## Глава 6. Рівняння Пуасона

Рівняння Пуасона має вигляд

$$\boxed{\Delta u(\mathbf{r})=\rho(\mathbf{r})}$$

і відрізняється від рівняння Лапласа лише вільним членом. Воно описує те саме коло різних фізичних явищ, що і рівняння Лапласа, але дозволяє розглянути більш складні їх варіанти. Узагальнення пов'язане з можливістю врахування наявності джерел, або стоків того фізичного поля, яке ми шукаємо, розв'язуючи рівняння. Якщо рівняння Лапласа може бути розв'язаним, то може бути розв'язаним і рівняння Пуасона. Тому, ми розглянемо лише декілька прикладів розв'язання рівняння Пуасона.

### 6.1.Неоднорідні диференційні рівняння

Задача, що складається з неоднорідного рівняння та неоднорідних межових умов, має ненульові розв'язки за досить загальних умов і завжди може бути розв'язана, якщо відомі розв'язки відповідної їй однорідної задачі. Одновимірні неоднорідні задачі безпосередньо не пов'язані з задачею Штурма-Ліувіля. Зате, багатовимірні задачі дуже часто розпадаються на задачу Штурма-Ліувіля, за одними змінними, та неоднорідні задачі за іншими. Тому доцільно окремо розглянути розв'язок неоднорідних задач. Почнемо розгляд з неоднорідного звичайного лінійного диференційного рівняння другого порядку

$$:\boxed{f''(x)+p(x)f'(x)+q(x)f(x)=g(x)},$$

Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$ - лінійно незалежні розв'язки однорідного диференційного рівняння, що відповідає даному неоднорідному. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння можна представити їх лінійною комбінацією

$$f(x)=Af_1(x)+Bf_2(x).$$

Шукатимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$f(x)=A(x)f_1(x)+B(x)f_2(x),$$

вважаючи довільні коефіцієнти загального розв'язку однорідного рівняння довільними функціями. Подальшою метою є їх такий вибір, щоб написана лінійна комбінація була розв'язком вже неоднорідного рівняння. Оскільки довільних функцій дві, а рівняння для їх визначення одне, то цілком можливо і доцільно накласти на ці функції ще одну додаткову умову. Її краще вибрати так, щоб рівняння, яке виникає при підстановці цих функцій у вихідне неоднорідне диференційне рівняння, було максимально простим. Такою додатковою умовою може бути наступна:

$$\boxed{A'(x)f_1(x)+B'(x)f_2(x)=0}.$$

Обчислимо похідні невідомої функції. З урахуванням попереднього:

$$f'(x)=A(x)f_1'(x)+B(x)f_2'(x),$$

$$f''(x)=A(x)'f_1'(x)+B'(x)f_2'(x)+A(x)f_1''(x)+B(x)f_2''(x).$$

Після підстановки похідних у неоднорідне диференційне рівняння, воно набуває вигляду

$$A(x)'f_1'(x)+B'(x)f_2'(x)+A(x)f_1''(x)+B(x)f_2''(x)+$$
$$+p(x)\left[A(x)f_1'(x)+B(x)f_2'(x)\right]+$$
$$+q(x)\left[A(x)f_1(x)+B(x)f_2(x)\right]=g(x).$$

Оскільки кожний з лінійно незалежних розв'язків задовольняє однорідному рівнянню, то рівняння спрощується і набуває вигляду:

$$A(x)'f_1'(x)+B'(x)f_2'(x)=g(x).$$

Розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $A'(x),B'(x)$ є:

$$A'(x) = \frac{f_2(x)}{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)} g(x),$$

$$B'(x) = -\frac{f_1(x)}{f_1'(x)f_2(x) - f_2'(x)f_1(x)} g(x).$$

Здобувши невизначені інтеграли від обох частин обох рівностей, одержимо:

$$\boxed{A(x) = \int_0^x dy\, g(y) \frac{f_2(y)}{f_1'(y)f_2(y) - f_2'(y)f_1(y)}},$$

$$\boxed{B(x) = -\int_0^x dy\, g(y) \frac{f_1(y)}{f_1'(y)f_2(y) - f_2'(y)f_1(y)}}.$$

Тепер загальний розв'язок неоднорідного диференційного рівняння можна записати так

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= Af_1(x) + Bf_2(x) + \\ &+ \int_0^x dy\, g(y) \frac{f_2(y)f_1(x)}{f_1'(y)f_2(y) - f_2'(y)f_1(y)} - \\ &- \int_0^x dy\, g(y) \frac{f_1(y)f_2(x)}{f_1'(y)f_2(y) - f_2'(y)f_1(y)} \end{aligned}}.$$

Розглянемо декілька частинних випадків.

**Приклад 1.** Нехай лінійно незалежними розв'язки рівняння є:

$$f_1(x) = \cos(\lambda x), \qquad f_2(x) = \sin(\lambda x),$$

тобто мова йде про розв'язання наступного диференційного рівняння з сталими коефіцієнтами

$$f''(x) + \lambda^2 f(x) = g(x).$$

Загальний розв'язок такого рівняння матиме вигляд:

$$f(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^x dy g(y) \sin\left[\lambda(x - y)\right].$$

**Приклад 2.** Нехай лінійно незалежними розв'язками рівняння є:

$$f_1(x)=\cosh(\lambda x), \qquad f_2(x)=\sinh(\lambda x),$$

тобто мова йде про розв'язання наступного диференційного рівняння з сталими коефіцієнтами

$$f''(x)-\lambda^2 f(x)=g(x)\ .$$

Загальний розв'язок такого рівняння матиме вигляд:

$$f(x)=A\cosh(\lambda x)+B\sinh(\lambda x)+\frac{1}{\lambda}\int_0^x dy g(y)\sinh[\lambda(x-y)].$$

Довільні сталі, що входять до цього рівняння, можуть бути визначеними з межових або початкових умов.

Наведений метод розв'язання звичайних неоднорідних диференційних рівнянь називається методом варіації довільних сталих. Він не обмежується лише лінійними рівняннями з сталими коефіцієнтами. Навпаки, справжні його можливості реалізуються саме при розв'язанні лінійних диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами.

## 6.2.Теплопровідність стінки з внутрішніми джерелами тепла

Розглянемо стінки, утворені двома паралельними поверхнями, двома концентричними циліндричними поверхнями, та двома концентричними сферичними поверхнями. Нехай густина внутрішніх джерел тепла буде сталою величиною. У випадку, коли стінка є джерелом або стоком тепла, фізично доцільно і практично можливо контролювати на поверхнях, що утворюють стінку, потік тепла. Це означає, що слід розв'язувати рівняння теплопровідності з межовими умовами другого роду або третього роду. Нехай одна з поверхонь що утворює стінку, теплоізольована. На ній межова умова має вигляд

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n}u(\mathbf{r})\right\}_{S_1}=0,$$

де похідна береться за напрямком зовнішньої нормалі

$$\frac{\partial}{\partial n}u(\mathbf{r})=(\mathbf{n}\nabla)u(\mathbf{r})\ .$$

Якщо температура навколишнього середовища $T_0$ і теплообмін між середовищем і другою поверхнею стінки здійснюється за законом Н'ютона, то межову умову на другій стінці можна записати так

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n}u(\mathbf{r})-\alpha[T_0-u(\mathbf{r})]\right\}_{S_2}=0,$$

де $\alpha$ - коефіцієнт, що дорівнює коефіцієнту тепловіддачі, поділеному на коефіцієнт теплопровідності.

Для процесу теплопровідності, що має стаціонарний характер, неоднорідне рівняння теплопровідності зведеться до рівняння Пуасона

$$\Delta u(\mathbf{r})=q\ ,$$

$u(\mathbf{r})$ - температура стінки у точці з радіус - вектором $\mathbf{r}$, $q<0$ - з точністю до сталого множника є густиною внутрішніх джерел тепла (для стоків тепла $q>0$).

### 6.2.1.Стінка, утворена паралельними площинами

Знайдемо температурне поле у стінці, створеній двома паралельними площинами, перпендикулярними осі $x$, у якій густина джерел тепла є сталою величиною. Нехай одна з поверхонь перетинає вісь $x$ у точці $x_1$, інша - у точці $x_2$. Якщо процес носить стаціонарний характер, то рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Пуасона

$$\Delta u(x,y,z)=q\ ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

У декартовій системі координат одиничний вектор зовнішньої нормалі визначається так

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}_x\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_x)+\mathbf{i}_y\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_y)+\mathbf{i}_z\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_z),$$

де $\mathbf{i}_x,\mathbf{i}_y,\mathbf{i}_z$ - вектори одиничної довжини, направлені вздовж відповідних декартових осей координат. Оператор градієнта визначається так

$$\boxed{\nabla=\mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}}\ .$$

Оскільки, за нашого вибору декартових осей координат, напрямок зовнішньої нормалі до площини $S_1$ протилежний напрямку осі $x$, то він матиме відмінну від нуля проекцію лише на цю вісь, отже межова умова на цій поверхні запишеться так

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} u(\mathbf{r}) \right\}_{S_1} = 0 .$$

На другій поверхні зовнішня нормаль буде мати той же напрямок, що і вісь $x$ , і у вектора зовнішньої нормалі також відмінною від нуля буде лише проекція на цю вісь, тому друга межова умова буде такою

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} u(\mathbf{r}) - \alpha [T_0 - u(\mathbf{r})] \right\}_{S_2} = 0.$$

Оскільки температури площин, що обмежують стінку, є сталими величинами, то температура всередині стінки може залежати лише від відстані до них, тобто $u(\mathbf{r}) = u(x)$. Тому рівняння Пуасона у трьохвимірній декартовій системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = q$$

з наступними межовими умовами

$$u'(x_1) = 0, \;\; u'(x_2) - \alpha [T_0 - u(x_2)] = 0 .$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференційного рівняння складається з загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$u(x) = A + Bx ,$$

де $u_1(x) = x$ , $u_2(x) = 1$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння. Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння використаємо метод варіації довільних сталих, відповідно до якого

$$u_0(x) = qx \int_0^x dy \; - q \int_0^x dy \; y = q \; \frac{x^2}{2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$u(x) = A + Bx + q \; \frac{x^2}{2} .$$

Підстановка його у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A, B$ . Дійсно

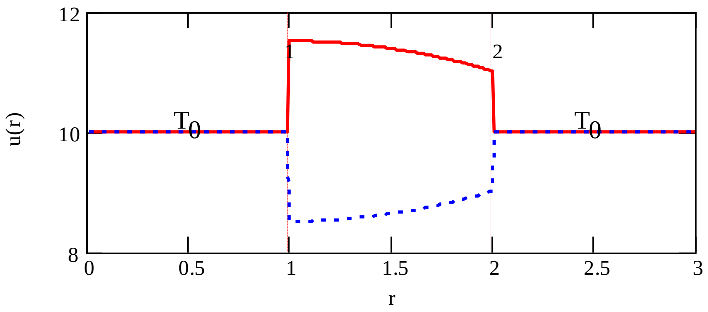
$$u'(x_1) = B + qx_1 = 0,$$

$$u'(x_2) - \alpha [T_0 - u(x_2)] =$$

$$=B+qx_2-\alpha\left(T_0-A-Bx_2-q\frac{x_2{}^2}{2}\right)=0\ .$$

Звідси

$$A=T_0+qx_1x_2-q\frac{x_2{}^2}{2}-\frac{q}{\alpha}(x_2-x_1)\ ,$$
$$B=-qx_1\ .$$




**Малюнок 17.***Температурне поле у стінці, утвореній паралельними площинами: суцільна ліній - джерело тепла, пунктирна - стік тепла*

З малюнка видно, що на межах стінки температура змінюється стрибком. При цьому, за наявності у стінці джерел тепла, температура поблизу теплоізольованої поверхні вище, ніж біля поверхні, через яку йде теплообмін з навколишнім середовищем.

### 6.2.2.Стінка, утворена циліндричними поверхнями

Знайдемо температурне поле у стінці, утвореній двома концентричними циліндричними поверхнями з радіусами $R_1,R_2$. Обидві поверхні стінки мають температуру $T_0$. Якщо процес носить стаціонарний характер, то рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Пуасона

$$\Delta u(r,\varphi,z)=q\ ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$

У циліндричній системі координат одиничний вектор зовнішньої нормалі визначається так

$$\boxed{\mathbf{n}=\mathbf{i}_r\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_r)+\mathbf{i}_\varphi\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_\varphi)+\mathbf{i}_z\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_z)}\,.$$

Відповідним чином визначається і оператор градієнта

$$\boxed{\nabla=\mathbf{i}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\mathbf{i}_z\frac{\partial}{\partial z}}\,.$$

Якщо бокові поверхні циліндричної стінки збігаються з відповідними координатними поверхнями циліндричної системи координат, то напрямок зовнішньої нормалі до площини $S_1$ протилежний напрямку орта $\mathbf{i}_r$, то він матиме відмінну від нуля проекцію лише на цей орт, отже межова умова на цій поверхні запишеться так

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(\mathbf{r})\right\}_{S_1}=0$$

На другій поверхні зовнішня нормаль буде мати той же напрямок, що і орт $\mathbf{i}_r$, і у вектора зовнішньої нормалі також відмінною від нуля буде лише проекція на цей орт, тому друга межова умова буде такою

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(\mathbf{r})-\alpha[T_0-u(\mathbf{r})]\right\}_{S_2}=0.$$

Оскільки температури площин, що обмежують стінку, є сталими величинами, то температура у середині стінки може залежати лише від відстані до них, тобто $u(\mathbf{r})=u(r)$ Отже рівняння Пуасона у циліндричній системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du(r)}{dr}\right)=q\ ,$$

або

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du(r)}{dr}=q\ .$$

Якщо розглянути лише однорідне рівняння, то воно є частинним випадком рівняння

$$r^2\frac{d^2u(r)}{dr^2}+r\frac{du(r)}{dr}+\lambda u(r)=0,$$

яке має власні функції

$$u_n(r)=A_n r^n + B_{-n} r^{-n}, \qquad n=1,2,...$$

та власні числа

$$\lambda_n = -n^2 .$$

У випадку $\lambda=0$ $n=0$ і загальний розв'язок має вигляд

$$u(r)=A+B\ln(r) ,$$

де $u_1(r)=\ln r$ , $u_2(r)=1$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння.

Знайдемо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Відповідно до методу варіації довільних сталих

$$u_0(r)=q\ln r\int_0^r dyy - q\int_0^r dyy \ln y = q\frac{r^2}{4}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$u(r)=A+B\ln r + q\frac{r^2}{4}.$$

Підстановка його у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A,B$ . Дійсно

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(r)\right\}_{S_1} = \frac{B}{R_1} + q\frac{R_1}{2} = 0,$$

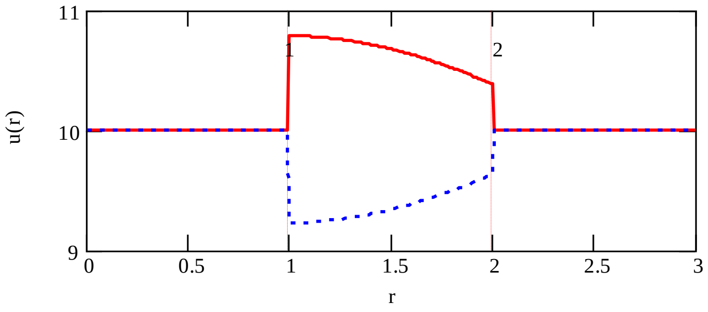
$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(r) - \alpha[T_0 - u(r)]\right\}_{S_2} =$$

$$=\frac{B}{R_2} + q\frac{R_2}{2} - \alpha[T_0 - A - B\ln R_2 - q\frac{R_2^2}{4}] = 0 .$$

Звідси

$$A = T_0 + \frac{q}{4}\left(R_1^2\ln R_2^2 - R_2^2\right) - \frac{q}{\alpha}\frac{R_2}{2}\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right),$$

$$B = -q\frac{R_1^2}{2} .$$




**Малюнок 18.** *Температурне поле у стінці, утвореній концентричними циліндричними поверхнями: суцільна лінія - джерело тепла, пунктирна - стік тепла*

З малюнка видно, що температура у стінці, утвореній концентричними циліндричними поверхнями, змінюється приблизно так само як в стінці, утвореній паралельними площинами. При цьому, замість доданку, пропорційного першому степеню температури, міститься доданок, пропорційний логарифму температури.

### 6.2.3.Стінка, утворена сферичним поверхнями

Знайдемо температурне поле у стінці, утвореній двома концентричними сферичними поверхнями з радіусами $R_1, R_2$. Обидві поверхні стінки мають температуру $T_0$. Якщо процес носить стаціонарний характер, то рівняння теплопровідності приведеться до рівняння Пуасона

$$\Delta u(r,\theta,\varphi)=q \ ,$$

де оператор Лапласа має вигляд

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \ .$$

У сферичній системі координат одиничний вектор зовнішньої нормалі визначається так

$$\boxed{\mathbf{n}=\mathbf{i}_r\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_r)+\mathbf{i}_\theta\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_\theta)+\mathbf{i}_\varphi\cos(\mathbf{n}\wedge\mathbf{i}_\varphi)} \ .$$

Відповідним чином визначається і оператор градієнта

$$\boxed{\nabla=\mathbf{i}_r\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{i}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{i}_\varphi\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}} \ .$$

Якщо поверхні сферичної стінки збігаються з відповідними координатними поверхнями циліндричної системи координат, то напрямок зовнішньої нормалі до площини $S_1$ протилежний напрямку орта $\mathbf{i}_r$, і він матиме відмінну від нуля проекцію лише на цей орт, отже межова умова на цій поверхні запишеться так

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(\mathbf{r})\right\}_{S_1}=0$$

На другій поверхні зовнішня нормаль буде мати той же напрямок, що і орт $\mathbf{i}_r$, і у вектора зовнішньої нормалі також відмінною від нуля буде лише проекція на цей орт, тому друга межова умова буде такою

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(\mathbf{r})-\alpha[T_0-u(\mathbf{r})]\right\}_{S_2}=0.$$

Оскільки  температура поверхонь, що обмежують стінку, є сталою величиною, то температура у середині стінки може залежати лише від відстані до них, тобто $u(\mathbf{r})=u(r)$. Отже рівняння Лапласа у сферичній системі координат набере вигляду звичайного диференційного рівняння

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du(r)}{dr}\right)=q\ ,$$

або

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du(r)}{dr}=q\ .$$

Якщо розглянути лише однорідне рівняння, то воно є частинним випадком рівняння

$$r^2\frac{d^2u(r)}{dr^2}+2r\frac{du(r)}{dr}+\lambda u(r)=0,$$

яке має власні функції

$$u_n(r)=A_n r^n+B_{-n-1}r^{-n-1},\quad n=0,1,2,\ldots$$

та власні числа

$$\lambda_n=-n(n+1)\ .$$

У випадку $\lambda=0$ ($n=0$ або $n=-1$) загальний розв'язок має вигляд

$$u(r)=A+\frac{B}{r}\ ,$$

де $u_1(r)=1/r$, $u_2(r)=1$ - лінійно незалежні розв'язки рівняння.

Знайдемо тепер частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Відповідно до методу варіації довільних сталих

$$u_0(r) = -q\,\frac{1}{r}\int_0^r dy\,y^2 + q\int_0^r dy\,y = \frac{1}{6}qr^2 .$$

Отже, загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$u(r) = A + \frac{B}{r} + \frac{1}{6}qr^2 .$$

Підстановка його у межові умови дозволяє одержати два лінійних алгебраїчних рівняння для знаходження довільних сталих $A, B$ . Дійсно

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(r)\right\}_{S_1} = -\frac{B}{R_1^2} + \frac{1}{3}qR_1 = 0,$$

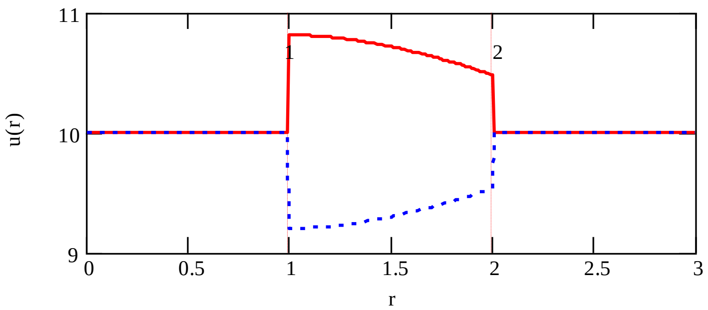
$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}u(r) - \alpha[T_0 - u(r)]\right\}_{S_2} =$$

$$= -\frac{B}{R_2^2} + \frac{1}{3}qR_2 - \alpha[T_0 - A - \frac{B}{R_2} - \frac{1}{6}qR_2^2] = 0.$$

Звідси

$$A = T_0 - \frac{1}{3}\frac{q}{\alpha}R_2\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) - \frac{1}{6}qR_2^2\left(1 + \frac{2}{3}\frac{R_1^3}{R_2^3}\right),$$

$$B = \frac{1}{3}qR_1^3 .$$




**Малюнок 19.** *Температурне поле у стінці, утвореній концентричними сферичними поверхнями: суцільна лінія - джерело тепла, пунктирна - стік тепла*

З малюнка видно, що температура у стінці, утвореній концентричними сферичними поверхнями, змінюється приблизно так само як в стінці, утвореній паралельними площинами або циліндричними поверхнями. При цьому, замість доданку, пропорційного першому степеню температури у першому випадку, або доданку, пропорційного логарифму температури у другому випадку, міститься доданок, обернено пропорційний температурі.

## 6.3.Межові задачі з неоднорідними межовими умовами

Покажемо, що при необхідності неоднорідність з межових умов може бути переведена у вільний член диференційного рівняння. Для цього розглянемо наступну межову задачу з лінійним диференційним оператором

$$\boxed{\hat{L} f(\mathbf{r}) + \lambda\rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = 0}\,.$$

В якості межової умови на поверхні $S$, що обмежує область $D$, де шукається розв'язок, візьмемо неоднорідну межову умову третього роду

$$\boxed{\left[\gamma_1(\mathbf{r})\frac{df(\mathbf{r})}{dn} + \gamma_2(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})\right]_S = \left[h(\mathbf{r})\right]_S}\,.$$

Неоднорідність межових умов може становити більшу проблему ніж неоднорідність рівняння. Ця проблема вирішується переходом до такої нової невідомої функції, межові умови для якої вже однорідні

$$f(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) + w(\mathbf{r}).$$

Тут $v(\mathbf{r})$ - нова невідома функція, $w(\mathbf{r})$ - відома функція. Вона підбирається таким чином, щоб на поверхні $S$, що обмежує область $D$, де шукається розв'язок, мала місце наступна рівність

$$\left[\gamma_1(\mathbf{r})\frac{dw(\mathbf{r})}{dn} + \gamma_2(\mathbf{r}) w(\mathbf{r})\right]_S = \left[h(\mathbf{r})\right]_S.$$

Для нової невідомої функції межова задача буде такою:

$$\hat{L} u(\mathbf{r}) + \lambda\rho(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}),$$

$$\left[\gamma_1(\mathbf{r})\frac{du(\mathbf{r})}{dn}+\gamma_2(\mathbf{r})u(\mathbf{r})\right]_S=0.$$

Тут

$$g(\mathbf{r})=-\hat{L}w(\mathbf{r})-\lambda\rho(\mathbf{r})w(\mathbf{r})\ .$$

Видно, що неоднорідність перейшла з межової умови у рівняння. Шлях його розв'язання показано в одновимірному випадку у попередньому параграфі. Успіх запропонованого підходу залежить від можливості отримання явного виразу для функції $w(\mathbf{r})$. Для одновимірної задачі це зробити досить просто. Так у випадку першої межової задачі з неоднорідними межовими умовами:

$$f(a)=\nu_1, \qquad f(b)=\nu_2$$

функція $w(x)$ повинна задовольняти двом умовам:

$$w(a)=\nu_1, \qquad w(b)=\nu_2.$$

Таких функцій завжди можна підібрати нескінченно багато, наприклад

$$w(x)=\nu_1+(\nu_2-\nu_1)\frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}.$$

Найпростішою серед них є функція

$$\boxed{w(x)=\nu_1+(\nu_2-\nu_1)\frac{x-a}{b-a}}.$$

У випадку другої межової задачі в якості функції $w(x)$ можна взяти, наприклад, наступну

$$\boxed{w(x)=\nu_1 x+(\nu_2-\nu_1)\frac{(x-a)^2}{2(b-a)}}.$$

## 6.4.Двовимірні декартові координати

Нехай область, де шукається розв'язок рівняння має вигляд прямокутника, а $u(x,y)$ - довільна фізична характеристика: температура, потенціал електричного поля, компонента потенціалу магнітного поля і т. і. в точці з координатами $x,y$, $\rho(x,y)$ - вільний член рівняння, що описує джерело поля у системі. Розглянемо розв'язок рівняння Пуасона за тих же умов, що і відповідного рівняння Лапласа, наприклад:

$$u(0,y)=0,\ \ u(l,y)=0,\ \ u(x,0)=0,\ \ u(x,h)=\nu(x).$$

Тобто мова йде про досить загальну межову задачу, у якій неоднорідне і рівняння і межові умови.

При поділі змінних в однорідному рівнянні Пуасона (рівнянні Лапласа) ми отримали систему звичайних однорідних диференційних рівнянь, з яких лише одне разом з однорідними межовими умовами першого роду складало задачу Штурма-Ліувіля, це:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\lambda X(x)=0,$$
$$X(0)=X(l)=0\ .$$

Власними функціями цієї задачі є

$$\boxed{X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)},\ \ n=1,2,...\ .$$

Використаємо їх в якості базису для розвинення у ряд Фур'є розв'язку рівняння Пуасона та його вільного члена

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}_n(y)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Тут коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$U_n(y)=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)u(x,y),$$

$$\mathrm{P}_n(y)=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\rho(x,y).$$

Після підстановки цих розвинень у рівняння, воно набере вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d^2U_n(y)}{dy^2}-\frac{\pi^2n^2}{l^2}U_n(y)-\mathrm{P}_n(y)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=0\ .$$

Остання рівність виконується лише у тому випадку, коли всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю. У висліді ми одержуємо нескінченну систему звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2U_n(y)}{dy^2}-\frac{\pi^2n^2}{l^2}U_n(y)=\mathrm{P}_n(y), \qquad n=1,2,\ldots\ .$$

Загальний розв'язок неоднорідного звичайного лінійного диференційного рівняння складається з загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного рівнянь. Перший, очевидно, є

$$U_n(y)=A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right).$$

Другий можна отриманим методом варіації довільних сталих у вигляді

$$U_n(y)=\frac{l}{n\pi}\int\limits_0^y d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(y-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha).$$

Загальний розв'язок вихідної задачі тепер можна записати так

$$\boxed{\begin{gathered}u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)*\\ *\left[\begin{gathered}A_n\cosh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+\\ +\frac{l}{n\pi}\int_0^y d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(y-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha)\end{gathered}\right]\end{gathered}}\ .$$

Для знаходження довільних сталих використаємо решту межових умов: $u(x,0)=0$, $u(x,h)=v(x)$, одна з яких вже неоднорідна.

Перша умова, оскільки вона однорідна, є особливо простою

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=0.$$

Звідки випливає, що всі коефіцієнти $A_n$ мають дорівнювати нулю.

Друга умова має більш складний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[\begin{matrix}B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)+\\ +\frac{l}{n\pi}\int\limits_0^h d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(h-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha)\end{matrix}\right]=\nu(x)$$

і є тригонометричним рядом Фур'є для функції, що задає неоднорідність у межовій умова. Для коефіцієнтів цього ряду існує стандартний вираз

$$B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)+\frac{l}{n\pi}\int\limits_0^h d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(h-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha)=$$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\nu(x)\ .$$

Звідси вже легко одержати вираз для коефіцієнтів $B_n$. Ці коефіцієнти відмінні від нуля з двох причин: наявності неоднорідності у межовій умові - права частина останньої рівності, та наявності вільного члена у рівнянні - другий доданок у лівій частині рівності.

Загальний розв'язок тепер можна записати у наступному вигляді

$$\boxed{\begin{gathered}u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)*\\ *\left[B_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}y\right)+\frac{l}{n\pi}\int\limits_0^y d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(y-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha)\right]\end{gathered}}\ .$$

Він переходить у розв'язок аналогічної межової задачі для рівняння Лапласа, якщо вільний член рівняння Пуасона спрямувати до нуля, і радикально спрощується, якщо межова умова на всіх сторонах прямокутника є однорідною. В останньому випадку

$$\boxed{u(x,y)=\frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\frac{1}{n}\int\limits_0^y d\alpha\sinh\left[\frac{n\pi}{l}(y-\alpha)\right]\mathrm{P}(\alpha)}\ .$$

## 6.5. Течія у трубі з трикутним перерізом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = -k \\ U(x,h) = 0 \\ U\left(x,\sqrt{3}x\right) = 0 \\ U\left(x,\sqrt{3}x\right) = 0,\ \text{àáî}\ U(x,y) = U(-x,y) \end{cases}.$$

Оскільки межі області, де шукається розв'язок задачі, не збігаються з координатними лініями, то задача не може бути розв'язана методом поділу змінних. Степеневий характер рівнянь, що визначають межі області, робить ефективним використання метода степеневих рядів. Останнє означає, що загальний розв'язок рівняння шукатимемо у вигляді

$$U(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n y^m .$$

Наявність лише додатних степенів $x$ та $y$ пов'язане із відсутністю особливих точок у коефіцієнтів рівняння. Підстановка розвинення у рівняння дає наступний результат

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_{nm} x^{n-2} y^m + \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m(n-1) x^n y^{m-2} = -k .$$

Суми зручно об'єднати

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2,m} + (m+2)(m+1)a_{n,m+2} + k\delta_{n,0}\delta_{m,0}\right] x^n y^m = 0 .$$

Поліном дорівнює нулю лише у випадку, коли всі його коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто

$$(n+2)(n+1)a_{n+2,m} + (m+2)(m+1)a_{n,m+2} + k\delta_{n,0}\delta_{m,0} = 0 .$$

Тут $n = 0,\ldots,\infty$, $m = 0,\ldots,\infty$. Перші декілька рівнянь цієї нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь мають вигляд

$$2a_{2,0} + 2a_{0,2} = -k, \quad n = 0, m = 0,$$

$$3\cdot 2a_{3,0} + 2a_{1,2} = 0, \quad n = 1, m = 0,$$

$$2a_{2,1} + 3\cdot 2a_{0,3} = 0, \quad n = 0, m = 1,$$

$$
\begin{aligned}
3\cdot 2a_{3,1}+3\cdot 2a_{1,3}&=0, \quad n=1, m=1,\\
4\cdot 3a_{4,0}+2a_{2,2}&=0, \quad n=2, m=0,\\
2a_{2,2}+4\cdot 3a_{0,4}&=0, \quad n=0, m=2,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Видно, що система рівнянь є сумою окремих незалежних підсистем рівнянь. Останні пов'язують між собою лише коефіцієнти з однаковою сумою індексів. Перша підсистема складається з одного рівняння, причому неоднорідного, друга – з двох однорідних, третя – з трьох тощо. Кожна з цих підсистем має нескінченну кількість розв'язків. Фактично виникає можливість зменшення кількості незалежних коефіцієнтів розвинення. Для конкретного знаходження цих коефіцієнтів необхідне використання межових умов.

З межової умови $U(x,y)=U(x,-y)$, умови парності невідомої функції за змінною $x$ випливає, що $a_{2n+1,m}=0$. Система рівнянь спроститься наступним чином

$$
\begin{aligned}
2a_{2,0}+2a_{0,2}&=-k,\\
a_{2,1}+3a_{0,3}&=0,\\
6a_{4,0}+a_{2,2}&=0,\\
a_{2,2}+6a_{0,4}&=0,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Кожна з межових умов, що залишились, у свою чергу породжує свою нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Дійсно,

$$
U(x,h)=a_{0,0}+a_{1,0}x+a_{0,1}h+a_{2,0}x^2+a_{1,1}xh+
$$
$$
+a_{0,2}h^2+a_{3,0}x^3+a_{2,1}x^2h+a_{1,2}xh^2+a_{0,3}h^3+\ldots=0,
$$

$$
U\left(x,\sqrt{3}\right)=a_{0,0}+a_{1,0}x+a_{0,1}\sqrt{3}x+a_{2,0}x^2+a_{1,1}x\sqrt{3}x+
$$
$$
+a_{0,2}3x^2+a_{3,0}x^3+a_{2,1}x^2\sqrt{3}x+a_{1,2}x3x^2+a_{0,3}3\sqrt{3}x^3+\ldots=0,
$$

де ми вже врахували, що $a_{2n+1,m}=0$. Прирівнюючи нулю коефіцієнти кожного з поліномів одержимо наступні системи рівнянь

$$
a_{6,0}=0
$$
$$
a_{0,1}=0
$$

$$a_{2,0}+3a_{0,2}=0$$
$$a_{2,1}+3a_{0,3}=0$$
$$a_{4,0}+3a_{2,2}+9a_{0,4}=0$$
……………………………...
$$a_{0,0}+a_{0,1}h+\ldots+a_{0,m}h^m+\ldots=0$$
$$a_{2,0}+a_{2,1}h+\ldots+a_{2,m}h^m+\ldots=0$$
…………………………………………………….
$$a_{2n,0}+a_{2n,1}h+\ldots+a_{2n,m}h^m+\ldots=0$$
…………………………………………………….

Об'єднаємо тепер перші дві системи рівнянь виписавши рівняння групами, окремо для коефіцієнтів з однаковою сумою індексів

$$\begin{cases} a_{2,0}+a_{0,2}=-\frac{1}{2}k \\ a_{2,0}+3a_{0,2}=0 \\ a_{2,1}+3a_{0,3}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 6a_{4,0}+a_{2,2}=0 \\ a_{2,2}+6a_{0,4}=0 \\ a_{4,0}+3a_{2,2}+9a_{0,4}=0 \end{cases}.$$

………………………………..

Перша з цих систем рівнянь має один розв'язок

$$a_{2,0}=-\frac{3}{4}k, \quad a_{0,2}=\frac{1}{4}k .$$

Друга система рівнянь, що складається з одного рівняння, має нескінченну кількість розв'язків. Решта систем рівнянь мають лише нульові розв'язки. Підставляючи знайдені розв'язки у систему рівнянь, що випливає з другої межової умови, одержимо єдине рівняння

$$a_{2,0}+a_{2,1}h=0 .$$

Звідси

$$a_{2,1}=\frac{3}{4}\frac{k}{h} .$$

Відповідно

$$a_{0,3} = -\frac{1}{4}\frac{k}{h}\ .$$

Тепер розв’язок задачі матиме вигляд

$$U(x,y) = -\frac{3}{4}kx^2 + \frac{1}{4}ky^2 + \frac{3}{4}\frac{k}{h}x^2y - \frac{1}{4}\frac{k}{h}y^3\ .$$

Останній вираз можна записати й так

$$U(x,y) = -\frac{k}{4h}(y-h)\left(y^2-3x^2\right).$$

## 6.6.Полярні координати

Будемо шукати розв'язок рівняння Пуасона для області, що має форму круга за тих же умов, що і відповідного рівняння Лапласа. Тобто на межі круга $r = R_0$ задамо межову умова першого роду

$$u(R_0,\varphi) = u_0(\varphi).$$

У випадку внутрішньої задачі на внутрішній межі круга, тобто у початку координат, задамо межову умову обмежувального характеру

$$u(o,\varphi) < \infty.$$

У випадку зовнішньої задачі задамо аналогічну умову у нескінченно віддаленій точці

$$u(\infty,\varphi) < \infty.$$

Нарешті умова періодичності має вигляд:

$$u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi).$$

Після поділу змінних з межової задачі для рівняння Лапласа виділяється наступна межова задача:

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \lambda\Phi(\varphi) = 0,$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Власними функціями цієї задачі є:

$$\Phi_n(\varphi) = \exp(in\varphi), \qquad n = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\ .$$

Розкладемо у ряд за цими функціями розв'язок вихідного рівняння та вільний член:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(r)\exp(in\varphi),$$

$$\rho(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{P}_n(r)\exp(in\varphi).$$

Після підстановки цих розвинень рівняння, воно набуде вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_n(r)}{dr}\right)-\frac{n^2}{r^2}U_n(r)-\mathrm{P}_n(r)\right]\exp(in\varphi)=0\ .$$

Звідси випливає така система звичайних диференційних рівнянь:

$$\frac{d^2U_n(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dU_n(r)}{dr}-\frac{n^2}{r^2}U_n(r)=\mathrm{P}_n(r).$$

Лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння мають вигляд:

$$R_{1n}(r)=r^n,\qquad R_{2n}(r)=r^{-n-1}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння, відповідно до методу варіації довільних сталих, має вигляд

$$U_n(r)=A_nr^n+B_nr^{-n-1}-$$

$$-\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx\mathrm{P}(x)\frac{r^n}{x^{n-1}}+\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx\mathrm{P}(x)\frac{x^{n+2}}{r^{n+1}}$$

і складається з суми загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Повертаючись до загального розв'язку рівняння Пуасона одержимо

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[A_nr^n+B_nr^{-n-1}\right]\exp(in\varphi)-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\varphi)\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx\mathrm{P}(x)\frac{r^n}{x^{n-1}}+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\varphi)\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx\mathrm{P}(x)\frac{x^{n+2}}{r^{n+1}}\ .$$

Межові умови обмежувального характеру приводять до наступних результатів для внутрішньої задачі:

$$\boxed{\begin{aligned}u(r,\varphi)= &\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^n \exp(in\varphi) - \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\exp(in\varphi)\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx \mathrm{P}(x)\frac{r^n}{x^{n-1}}\end{aligned}},$$

та

$$\boxed{\begin{aligned}u(r,\varphi)= &\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n r^{-n-1} \exp(in\varphi) + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} &\exp(in\varphi)\frac{1}{2n+1}\int_0^r dx \mathrm{P}(x)\frac{x^{n+2}}{r^{n+1}}\end{aligned}}$$

для зовнішньої задачі.

Межова умова на межі круга дає наступне співвідношення

$$u_0(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[A_n {r_0}^n - \frac{1}{2n+1}\int_0^{r_0} dx \mathrm{P}(x)\frac{{r_0}^n}{x^{n-1}}\right]\exp(in\varphi)$$

для внутрішньої задачі, та

$$u_0(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[B_n {r_0}^{-n-1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{r_0} dx \mathrm{P}(x)\frac{x^{n+2}}{{r_0}^{n+1}}\right]\exp(in\varphi)$$

для зовнішньої задачі. Ці співвідношення є рядами Фур'є з коефіцієнтами:

$$A_n {r_0}^n - \frac{1}{2n+1}\int_0^{r_0} dx \mathrm{P}(x)\frac{{r_0}^n}{x^{n-1}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) u_0(\varphi),$$

$$B_n {r_0}^{-n-1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{r_0} dx \mathrm{P}(x)\frac{x^{n+2}}{{r_0}^{n+1}} u_0(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) u_0(\varphi).$$

Звідси:

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\pi {r_0}^n}\int_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi) u_0(\varphi) + \frac{1}{2n+1}\int_0^{r_0} dx \frac{\mathrm{P}(x)}{x^{n-1}}},$$

$$\boxed{B_n = \frac{r_0^{\,n+1}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \exp(-in\varphi)u_0(\varphi) - \frac{1}{2n+1}\int\limits_0^{r_0} dx x^{n+2} \mathrm{P}(x) u_0(\varphi)}\,.$$

## 6.7.Провідна сфера у полі точкового заряду

нехай у точці з радіусом - вектором $\mathbf{R}$ поблизу провідної сфери радіуса $r_0$ знаходиться точковий заряд $q$ . Знайдемо поле, створене таким зарядом. Потенціал цього поля задовольняє наступному рівнянню Пуасона

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}),$$

де $\mathbf{r}$ - радіус - вектор довільної точки простору, $\rho(\mathbf{r})$ - густина заряду. Густину точкового заряду можна задати за допомогою дельта-функції Дірака

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \,,$$

де

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{R} \\ \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{R} \end{cases},$$

так що інтеграл за всім простором від густини дорівнює зазначеному заряду

$$\int dV\ \rho(\mathbf{r}) = q\int dV\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = q\ .$$

У нескінченно віддаленій точці візьмемо традиційну межову умову

$$u(\infty) = 0\,,$$

що цілком природно для поля, створеного точковим зарядом. Сферу будемо вважати заземленою, тому її потенціал дорівнюватиме нулю. Отже,

$$u(\mathbf{r}_0) = 0.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння, як відомо, є сумою частинного розв'язку неоднорідного рівняння та загального розв'язку однорідного рівняння. Найпростіше знайти частинний розв'язок, оскільки для точкового заряду відповідь добре відома - це закон Кулона

$$u_0(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}\ .$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння - рівняння Лаплас - нам теж відомий (дивися вище). Центр сфери зручно розташувати у початку координат. Тоді загальний розв'язок має наступний вигляд

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} H_{nm} r^n \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi) .$$

Можна спростити цей розв'язок, використавши межову умову у нескінченно віддаленій точці. Тоді

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} G_{nm} r^{-n-1} \mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi),$$

оскільки доданки першого ряду у нескінченості розбіжні для $H_{nm} \neq 0$ .

Для використання другої межової умови частинний розв'язок розкладемо у ряд Фур'є за сферичними функціями. Для цього направимо полярну вісь вздовж вектора $\mathbf{R}$. Тоді частинний розв'язок можна записати так

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{R\sqrt{1-2r\cos(\theta)+(r/R)^2}} .$$

Тут $\theta$ - кут між векторами $\mathbf{R}$ і $\mathbf{r}$. Використаємо далі відоме розвинення

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), |t<1| \\ \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n-1} P_n(x), |t>1| \end{cases} .$$

У висліді

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}=\frac{1}{R}\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}P_n[\cos(\theta)], \ \frac{r}{R}<1\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{-n-1}P_n[\cos(\theta)], \ \frac{r}{R}>1\end{cases}.$$

З точністю до сталого множника, це розвинення можна записати і як розвинення за сферичними функціями

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}=\frac{\sqrt{2\pi}}{R}\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\mathrm{Y}_{n0}(\theta,\varphi), \ \frac{r}{R}<1\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{R}{r}\right)^{-n-1}\mathrm{Y}_{n0}(\theta,\varphi), \ \frac{r}{R}>1\end{cases}.$$

Оскільки, щодо сфери, ми розглядаємо зовнішню задачу, то на поверхні сфери завжди виконується умова, якщо тільки заряд не знаходиться на цій поверхні, $r_0/R<1$, а тому

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_0-\mathbf{R}|}=\frac{\sqrt{2\pi}}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{n}\mathrm{Y}_{n0}(\theta,\varphi).$$

Таким чином, друга межова умова матиме вигляд

$$q\frac{\sqrt{2\pi}}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{n}\mathrm{Y}_{n0}(\theta,\varphi)+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}G_{nm}r_0^{-n-1}\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=0.$$

Обидві суми доцільно об'єднати в одну, ввівши символ Кронекера

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left\{G_{nm}r_0^{-n-1}+\delta_{nm}q\,\frac{\sqrt{2\pi}}{R}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^n\right\}*$$
$$*\mathrm{Y}_{nm}(\theta,\varphi)=0$$

З лінійної незалежності сферичних функцій випливає, що

$$G_{nm}r_0^{-n-1}+\delta_{nm}q\,\frac{\sqrt{2\pi}}{R}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\left(\frac{r_0}{R}\right)^n=0.$$

Звідси

$$G_{nm}=-\delta_{nm}q\,\frac{\sqrt{2\pi}}{R^{n+1}}(-1)^n 2^n n!\sqrt{\frac{2}{2n+1}}r_0^{2n+1}.$$

Остаточний результат буде таким

$$\boxed{u(\mathbf{r})=\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}-q\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{r_0^{2n+1}}{R^{n+1}r^{n+1}}P_n[\cos(\theta)]}.$$

## Глава 7.Хвильове рівняння.

Розглянемо наступне хвильове рівняння:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=a^2\Delta u(\mathbf{r},t)-f(\mathbf{r},t)}.$$

Однорідне хвильове рівняння описує власні коливання системи, що виникають внаслідок виведення системи з рівноваги у початковий момент часу. Неоднорідне хвильове рівняння описує коливання системи під дією зовнішнього збурення, що може діяти на протязі всього часу спостереження. При цьому можуть біти враховані і збурення за рахунок початкових умов. При розгляді межових умов ми не вийдемо за межі межових умов першого, другого або третього родів. Це забезпечить нам зведення вихідної задачі до задачі Штурма-Ліувіля. Зате початкові умови ми розглянемо двох видів. До першого з них будуть належати умови Коші, до другого - умови існування інтегрального перетворення Фур'є. Останній випадок відповідає стаціонарному процесу.

У принципі, якщо межова задача для рівняння Гельмгольца може бути розв'язана, то завжди може бути розв'язана і межова задача для хвильового рівняння. Цей розв'язок можна одержати у загальному вигляді.

## 7.1.Стаціонарна задача

Будемо вважати процес стаціонарним у часі. Тобто він має початись у нескінченно віддаленому минулому, а закінчитись у нескінченно віддаленому майбутньому. Це, фактично, гарантує виконання умов існування прямого перетворення Фур'є для розв'язку хвильового рівняння:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt \left| u(\mathbf{r},t) \right| < \infty}.$$

Нехай відомі власні функції межової задачі для рівняння Гельмгольца

$$\Delta R_n(\mathbf{r}) + \omega_n{}^2 R_n(\mathbf{r}) = 0.$$

Тут, для зручності, ми обрали інше, порівняно з попереднім, позначення для коефіцієнта рівняння при невідомій функції. Межові умови ми явно не пишемо вважаючи, що вони належать до межових умов першого, другого або третього родів. Для виключення з хвильового рівняння похідних за часом виконаємо перетворення Фур'є невідомої функції та її другої похідної, а також межових умов:

$$u(\mathbf{r},t) \coloneqq U(\mathbf{r},\omega),$$

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \coloneqq -\omega^2 U(\mathbf{r},\omega).$$

Тут для прямого та зворотного перетворення Фур'є ми використали наступні формули:

$$\boxed{U(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) u(\mathbf{r},t)},$$

$$\boxed{u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) U(\mathbf{r},\omega)}.$$

Після підстановки наведених Фур'є - образів у рівняння, воно перетвориться у неоднорідне рівняння Гельмгольца, невідома функція у якому залежить від одного з його коефіцієнтів як від параметра:

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega)+\frac{\omega^2}{a^2}U(\mathbf{r},\omega)=-F(\mathbf{r},\omega).$$

**Розв'язок однорідного рівняння.** Розглянемо спочатку однорідне рівняння Гельмгольца:

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega)+\frac{\omega^2}{a^2}U(\mathbf{r},\omega)=0\ .$$

Рівняння можна спростити позбавившись від параметричної залежності невідомої функції. Цього можна досягти методом поділу змінних, шукаючи його частинні розв'язки у вигляді

$$U(\mathbf{r},\omega)=R(\mathbf{r})\Omega(\omega).$$

Після підстановки їх у рівняння Гельмгольца воно набере вигляду:

$$\Delta R(\mathbf{r})+\frac{\omega^2}{a^2}R(\mathbf{r})=0.$$

Нехай $R_n(\mathbf{r})$ - власні функції, а $\omega_n$ - власні числа цієї задачі, що є задачею Штурма-Ліувіля, відомі нам за умовою. Тоді

$$U_n(\mathbf{r},\omega)=R_n(\mathbf{r})\Omega_n(\omega).$$

При розв'язанні однорідного хвильового рівняння нам потрібні обидва множники у частинному розв'язку. Отже, знайдемо тепер другий з них. Для цього підставимо цей розв'язок у вихідне однорідне рівняння Гельмгольца. Воно набере вигляду

$$\left(\omega_n{}^2-\omega^2/a^2\right)R_n(\mathbf{r})\Omega_n(\omega)=0$$

З нього можна знайти параметричну залежність невідомої функції.

Оскільки для довільних значень аргументу, $R_n(\mathbf{r})\neq 0$, то рівняння буде вірним лише при виконанні наступної умови

$$\left(\omega_n{}^2-\omega^2/a^2\right)\Omega_n(\omega)=0.$$

Перший множник у лівій частині рівняння відмінний від нуля скрізь, за виключенням значень частоти $\omega=\pm a\omega_n$. Це означає, що функція $\Omega_n(\omega)$ скрізь, за виключенням зазначених двох точок, дорівнює нулю. Лише у цих точках вона відмінна від нуля. Якщо її значення скінчені, то частинні розв'язки теж будуть скінченими для цих значень частоти. При виконанні зворотного перетворення Фур'є ми одержимо нульовий результат для оригінала, оскільки підінтегральна функція відповідного інтеграла буде скінченою і відмінною від нуля лише у двох точках. З цього можна зробити висновок, що функція $\Omega_n(\omega)$ не може бути скінченою у точках, де вона відмінна від нуля. Останнє означає, що вона не може бути звичайною функцією, а лише узагальненою функцією типу дельта-функції Дірака

$$\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases}.$$

Дійсно, однією з властивостей дельта-функції є така

$$\boxed{x\delta(x)=0}.$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$\Omega_n(\omega)=\delta\left(a^2\omega_n{}^2-\omega^2\right).$$

Його можна дещо спростити, якщо врахувати ще одну властивість дельта-функції

$$\boxed{\delta\left(a\omega_n{}^2-\omega^2\right)=\frac{1}{2a\omega_n}\left[\delta\left(a\omega_n-\omega\right)+\delta\left(a\omega_n-\omega\right)\right]}.$$

У висліді загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n\frac{A_n}{2a\omega_n}R_n(\mathbf{r})\left[\delta\left(a\omega_n-\omega\right)+\delta\left(a\omega_n-\omega\right)\right].$$

Виконавши щодо цієї функції зворотне перетворення Фур'є, знайдемо шуканий розв'язок вихідного однорідного хвильового рівняння у вигляді:

$$\boxed{U(\mathbf{r},t)=\sum_n\frac{A_n}{a\omega_n}R_n(\mathbf{r})\cos(a\omega_m t) \\ =}.$$

Тут ми використали наявність дельта - функцій під знаком інтеграла, тобто таку її властивість:

$$\boxed{f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}dx f(x)\delta(x-a)}.$$

та формулу Ейлера щодо косинуса.

У виразі для розв'язку залишився довільний сталий множник, але це є неминуча розплата за простоту розв'язку, тобто за використання перетворення Фур'є. Цього цілком достатньо для якісного аналізу характеру фізичного процесу. Для отримання більш конкретного розв'язку необхідно використовувати або перетворення Лапласа, або будь - який інший спосіб розв'язання зазначеного рівняння.

З фізичної точки зору у розглянутій задачі рух тіла є набором гармонійних коливань з частотами $\omega_n$. Кожна точка тіла коливається за гармонійним законом з частотою, що є власним числом відповідної задачі Штурма-Ліувіля.

**Розв'язання неоднорідного хвильового рівняння.**

Розглянемо тепер неоднорідне хвильове рівняння. Маючи у розпорядженні власні функції однорідного рівняння, розкладемо тепер всі функції, що входять у нього, у ряд Фур'є за цими функціями:

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n U_n(\omega)R(\mathbf{r}),$$

$$F(\mathbf{r},\omega)=\sum_n F_n(\omega)R_n(\mathbf{r}).$$

Коефіцієнти цих рядів Фур'є визначаються так:

$$U_n(\omega)=\frac{1}{\left\|R_n\right\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})U(\mathbf{r},\omega),$$

$$F_n(\omega)=\frac{1}{\left\|R_n\right\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})F(\mathbf{r},\omega).$$

Інтегрування тут ведеться за просторовою областю, де шукається розв'язок. Після підстановки розвинень у рівняння воно набере вигляду

$$\sum_n \left[U_n(\omega)\left(a^2\omega_n{}^2-\omega^2\right)-F_n(\omega)\right]R_n(\mathbf{r})=0.$$

Оскільки власні функції задачі Штурма-Ліувіля є лінійно незалежними, то їх лінійна комбінація може дорівнювати нулю лише у випадку, коли всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю. Отже, ми одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів Фур'є невідомої функції

$$U_n(\omega)\left(a^2\omega_n{}^2-\omega^2\right)-F_n(\omega)=0.$$

Звідси

$$U_n(\omega)=\frac{F_n(\omega)}{a^2\omega_n{}^2-\omega^2}.$$

У висліді Фур'є - образ шуканої функції матиме вигляд

$$\boxed{U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n \frac{F_n(\omega)}{a^2\omega_n{}^2-\omega^2}R_n(\mathbf{r})}.$$

На відміну від випадку вільних коливань, він не містить довільних сталих. Кожна компонента Фур'є шуканої функції пропорційна відповідній компоненті Фур'є зовнішньої сили. Видно, що частоти власних коливань тіла $\pm\omega_n$ є полюсами першого порядку для Фур'є-образу. Конкретний вигляд останнього, а також технічна можливість виконання зворотного перетворення Фур'є, залежать від конкретного вигляду функції $f(\mathbf{r},t)$.

Розглянемо випадок гармонійної зовнішньої сили

$$f(\mathbf{r},t)=c(\mathbf{r})\sin(\Omega t).$$

Тоді потрібні нам Фур'є-образи матимуть вигляд

$$\boxed{\sin(\Omega t):=i\pi\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right]},$$

і

$$F(\mathbf{r},\omega)=i\pi c(\mathbf{r})\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right].$$

Тут ми використали одне з означень дельта-функції Дірака

$$\boxed{\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\exp(i\omega t)}.$$

Коефіцієнти Фур'є зовнішньої сили за координатами, відповідно до їх означення, можуть бути тепер представленими так

$$F_n(\omega)=i\pi c_n\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right],$$

де

$$c_n=\frac{1}{\left\|R_n\right\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})c(\mathbf{r}).$$

Тоді Фур'є-образ шуканої функції визначиться наступним чином

$$U(\mathbf{r},\omega)=i\pi\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right]\sum_n \frac{c_n}{a^2{\omega_n}^2-\Omega^2}R_n(\mathbf{r}).$$

Виконуючи зворотне перетворення Фур'є остаточно одержимо

$$\boxed{u(\mathbf{r},t)=\sum_n \frac{c_n}{a^2{\omega_n}^2-\Omega^2}R_n(\mathbf{r})\sin(\Omega t)}\,.$$

Характерною особливістю результату є наявність у нього полюсів першого порядку за частотою зовнішнього поля. Це означає, що як тільки частота зовнішнього поля наближається до однієї з власних частот системи, то амплітуда коливань прямує до нескінченості як $\dfrac{1}{a^2\omega_n-\Omega}$. Тобто має місце явище резонансу, що спостерігається на кожній з власних частот системи.

Розглянемо декілька прикладів, використовуючи отримані раніше розв'язки однорідних межових задач для рівняння Гельмгольца.

### 7.1.1.Приклади

**Приклад 1.** Одновимірне неоднорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду має наступний розв'язок

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{a^2{\omega_n}^2-\Omega^2}\sin(\omega_n x)\sin(\Omega t),$$

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},$$

$$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)c(x).$$

**Приклад 2.** Двовимірне неоднорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для прямокутника має розв'язок:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{c_{nm}}{a^2{\omega_{nm}}^2-\Omega^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin(\Omega t)$$

$$\omega_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2}},$$

$$c_{nm} = \frac{4}{lh}\int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)c(x,y).$$

**Приклад 3.** Трьохвимірне неоднорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для паралелепіпеда має розв'язок:

$$U(x,y,z,t) = \sum_{n,m,k=1}^{\infty}\frac{c_{nmk}}{a^2\omega_{nmk}{}^2 - \Omega^2} *$$

$$* \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right)\sin(\Omega t),$$

$$\omega_{nmk} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} + \frac{k^2}{s^2}},$$

$$c_{nmk} = \frac{8}{lhs}\int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\int_0^s dz \sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right)c(x,y,z).$$

**Приклад 4.** Двовимірне неоднорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для круга має наступний розв'язок:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{nm}}{a^2\omega_{nm}{}^2 - \Omega^2} *$$

$$* J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\exp(in\varphi)\sin(\Omega t),$$

$$\omega_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{r_0},$$

$$c_{nm} = \frac{2}{\pi r_0{}^2\left[J_{n+1}(\mu_{nm})\right]^2} *$$

$$* \int_0^{2\pi} d\theta \exp(in\theta)\int_0^{r_0} dr r J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)c(r,\varphi).$$

**Приклад 5.** Трьохвимірне неоднорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для кулі має наступний розв'язок:

$$U(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{c_{nmk}}{a^2\omega_{nk}{}^2-\Omega^2}*$$

$$*\, j_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)Y_{nm}(\theta,\varphi)\sin(\Omega t)$$

$$\omega_{nk}=\frac{\mu_{nk}}{r_0},$$

$$c_{nmk}=\frac{2}{r_0{}^2\left[J_{n+1}(\mu_{nk})\right]^2}*$$

$$*\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)\int_0^{r_0} drrJ_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)c(r,\theta,\varphi).$$

**Приклад 6.** Трьохвимірне неоднорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для циліндру має наступний розв'язок:

$$U(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n,k=1}^{\infty}\frac{c_{nmk}}{a^2\omega_{nmk}{}^2-\Omega^2}*$$

$$*\,J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(im\varphi)\sin(\Omega t),$$

$$\omega_{nmk}=\sqrt{\frac{\mu_{mk}{}^2}{r_0{}^2}+\frac{n^2\pi^2}{l^2}},$$

$$c_{nmk}=\frac{4}{\pi h r_0{}^2\left[J_{m+1}(\mu_{mk})\right]^2}*$$

$$*\int_0^h dz\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\int_0^{2\pi} d\theta\exp(im\varphi)\int_0^{r_0} drrJ_m\left(\frac{\mu_{mk}}{R}r\right)c(r,\varphi,z).$$

## 7.2.Задача Коші для однорідного рівняння

Однорідне хвильове рівняння має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=a^2\Delta u(\mathbf{r},t)}.$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього роду. Явно ми їх розглядати не будемо, оскільки цікавитимося лише часовою залежністю розв'язку. Задамо початкові умови (умови Коші), у момент часу $t=0$:

$$\boxed{u(\mathbf{r},0)=\varphi(\mathbf{r})}, \qquad \boxed{u_t(\mathbf{r},0)=\psi(\mathbf{r})}.$$

Такі умови доцільно використовувати тоді, коли момент спостереження за поведінкою системи не дуже віддалений від початку процесу у ній. У цьому випадку початкові умови суттєво впливають на процеси у ній в момент спостереження. При такому підході ми можемо досліджувати процеси у системі ще до виходу їх у стаціонарний режим, якщо останній можливий, або такі процеси, стаціонарні режими яких фізично не можливі.

Якщо коефіцієнти диференційного рівняння не залежать від часу, то ефективним методом розв'язку таких задач Коші є застосування інтегрального перетворення Лапласа. У випадку хвильового рівняння, ситуація саме така. Разом з тим, однорідне хвильове рівняння у висліді поділу змінних зразу зводиться до рівняння Гельмгольца. Саме у цій ситуації перетворення Лапласа неадекватне проблемі, тобто є занадто важкою артилерією. Тому однорідне хвильове рівняння ми розв'яжемо методом поділу змінних.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді

$$u(\mathbf{r},t)=R(\mathbf{r})T(t).$$

Після підстановки його у рівняння воно матиме вигляд

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{a^2}\frac{d^2T(t)}{dt^2}=\frac{1}{R(\mathbf{r})}\Delta R(\mathbf{r})=-\omega^2.$$

Тут $\omega^2$ - стала поділу. Остання подвійна рівність еквівалентна двом наступним диференційним рівнянням, одне з яких вже звичайне:

$$.\ T''(t)+a^2\omega^2T(t)=0,$$

$$\Delta R(\mathbf{r})+\omega^2R(\mathbf{r})=0.$$

Друге рівняння є рівнянням Гельмгольца. Разом з межовими умова першого, другого або третього родів, які для простоти ми явно не виписуємо, воно утворює задачу Штурма-Ліувіля. Будемо вважати її власні функції $R_n(\mathbf{r})$ і числа $\omega_n$ відомими ($\Delta R_n(\mathbf{r})+\omega_n{}^2R_n(\mathbf{r})=0$).

Тоді шукані частинні розв'язки можна записати так

$$u_n(\mathbf{r},t)=R_n(\mathbf{r})T_n(t).$$

Тут $T_n(t)$ - загальний розв'язок першого рівняння системи:

$$T_n''(t)+a^2\omega_n^2T_n(t)=0.$$

Цей розв'язок має вигляд

$$T_n(t)=A_n\cos(a\omega_n t)+B_n\sin(a\omega_n t).$$

Загальний розв'язок вихідного хвильового рівняння є сумою знайдених частинних розв'язків, а отже, може бути записаним у вигляді:

$$\boxed{u(\mathbf{r},t)=\sum_n R_n(r)\left[A_n\cos(a\omega_n t)+B_n\sin(a\omega_n t)\right]}.$$

Видно, що єдиним збуренням, яке викликає коливальний процес у системі, є початкові умови. Цей процес є незатухаючим, оскільки у використаному нами хвильовому рівнянні ніде не закладена дисипація енергії системи.

Знайдемо похідну розв'язку за часом

$$u_t'(\mathbf{r},t)=\sum_n R_n(r)\left[-a\omega_n A_n\sin(a\omega_n t)+a\omega_n B_n\cos(a\omega_n t)\right].$$

Довільна сталі, що входять у загальний розв'язок, можуть бути визначеними з початкових умов:

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_n A_n R_n(r),$$

$$\psi(\mathbf{r})=\sum_n a\omega_n B_n R_n(r).$$

Ці умови є ніщо інше як ряди Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля для рівняння Гельмгольца. Коефіцієнтами рядів є:

$$A_n=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}),$$

$$B_n=\frac{1}{a\omega_n\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}).$$

## 7.2.1.Приклади

**Приклад 1.** Одновимірне однорідне хвильове рівняння з однорідними межовими умовами першого роду має наступний розв'язок:

$$U(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(a\omega_n t)+B_n\sin(a\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l},$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{na}{l}x\right)\varphi(x),$$

$$B_n=\frac{2}{a\omega_n l}\int_0^l dx\sin\left(\frac{na}{l}x\right)\psi(x).$$

**Приклад 2.** Двовимірне однорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для прямокутника має наступний розв'язок:

$$u(x,y,t)=\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[A_{nm}\cos(a\omega_{nm}t)+B_{nm}\sin(a\omega_{nm}t)\right]*$$

$$*\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right),$$

$$\omega_{nm}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}},$$

$$A_n=\frac{4}{lh}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\varphi(x,y),$$

$$B_n=\frac{4}{a\omega_{nm}lh}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\psi(x,y).$$

**Приклад 3.** Трьохвимірне однорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для паралелепіпеда має розв'язок

$$U(x,y,z,t)=\sum_{n,m,k=1}^{\infty}\left[A_{nmk}\cos(a\omega_{nmk}t)+B_{nmk}\sin(a\omega_{nmk}t)\right]*$$

$$*\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right),$$

$$\omega_{nmk}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}+\frac{k^2}{s^2}},$$

$$A_{nmk}=\frac{8}{lhs}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\int_0^s dz\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right)\varphi(x,y,z),$$

$$B_{nmk}=\frac{8}{a\omega_{nmk}lhs}\int_0^l dx\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)*$$

$$*\int_0^s dz\sin\left(\frac{k\pi}{s}z\right)\psi(x,y,z)\ .$$

**Приклад 4.** Двовимірне однорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для області у формі круга має наступний розв'язок

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[A_{nm}\cos(a\omega_{nm}t)+B_{nm}\sin(a\omega_{nm}t)\right]*$$

$$*J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\exp(in\varphi),$$

$$A_{nm}=\frac{2}{\pi r_0^{\,2}\left[J_{n+1}(\mu_{nm})\right]^2}*$$

$$*\int_0^{2\pi}d\theta\exp(in\theta)\int_0^{r_0}drrJ_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\varphi(r,\varphi),$$

$$B_{nm}=\frac{2}{a\omega_{nm}\pi r_0^{\,2}\left[J_{n+1}(\mu_{nm})\right]^2}*$$

$$*\int_0^{2\pi}d\theta\exp(in\theta)\int_0^{r_0}drrJ_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\psi(r,\varphi),$$

$$\omega_{nm}=\frac{\mu_{nm}}{r_0}.$$

**Приклад 5.** Трьохвимірне однорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для кулі має наступний розв'язок

$$U(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[A_{nmk}\cos(a\omega_{nk}t)+B_{nmk}\sin(a\omega_{nk}t)\right]*$$

$$*\frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)Y_{nm}(\theta,\varphi)\ ,$$

$$\omega_{nk}=\frac{\mu_{nk}}{r_0},$$

$$A_{nmk}=\frac{2}{r_0^{\,2}\left[J_{n+3/2}(\mu_{nk})\right]^2}*.$$

$$*\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)\int_0^{r_0}drr^{3/2}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)\varphi(r,\theta,\varphi)\ ,$$

$$B_{nmk}=\frac{2}{a\omega_{nk}r_0^{\,2}\left[J_{n+3/2}(\mu_{nk})\right]^2}*$$

$$*\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)\int_0^{r_0}drr^{3/2}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)\psi(r,\theta,\varphi).$$

**Приклад 6.** Трьохвимірне однорідне хвильове рівняння з межовими умовами першого роду для циліндру має наступний розв'язок

$$U(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n,k=1}^{\infty}\left[A_{nmk}\cos(a\omega_{mk}t)+B_{nmk}\sin(a\omega_{mk}t)\right]*$$

$$*J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(im\varphi),$$

$$\omega_{mk}=\frac{\mu_{mk}}{r_0},$$

$$A_{nmk}=\frac{4}{\pi h r_0^{\,2}\left[J_{m+1}(\mu_{mk})\right]^2}*$$

$$*\int_0^h dz \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\int_0^{2\pi} d\theta \cos\left(m\theta\right)\int_0^{r_0} drrJ_m\left(\frac{\mu_{mk}}{R}r\right)\varphi(r,\varphi,z),$$

$$B_{nmk} = \frac{4}{a\omega_{mk}\pi hr_0{}^2\left[J_{m+1}\left(\mu_{mk}\right)\right]^2}*$$

$$*\int_0^h dz \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\int_0^{2\pi} d\theta \cos\left(m\theta\right)\int_0^{r_0} drrJ_m\left(\frac{\mu_{mk}}{R}r\right)\psi(r,\varphi,z).$$

### 7.3.Задача Коші для неоднорідного рівняння

Неоднорідне хвильове рівняння має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(\mathbf{r},t) + f(\mathbf{r},t)}.$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього родів. Явно ми їх розглядати не будемо, оскільки нас цікавитиме лише часова залежність розв'язку. Нехай умови Коші мають вигляд:

$$\boxed{u(\mathbf{r},0) = \varphi(\mathbf{r})}, \qquad \boxed{u_t'(\mathbf{r},0) = \psi(\mathbf{r})}.$$

Використаємо для розв'язку перетворення Лапласа. Припускаючи існування Лаплас - зображення шуканої функції, маємо:

$$u(\mathbf{r},t) =: U(\mathbf{r},\omega),$$

$$u_{tt}(\mathbf{r},t) =: p^2 U(\mathbf{r},\omega) - pu(\mathbf{r},0) - u_t(\mathbf{r},0),$$

$$f(\mathbf{r},t) =: F(\mathbf{r},\omega).$$

Тут нова змінна $\omega$ є комплексною, на відміну від перетворення Фур'є, де вона дійсна. Після підстановки знайдених зображень у рівняння, маємо

$$p^2 U(\mathbf{r},\omega) - p\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) = a^2 \Delta U(\mathbf{r},\omega) + F(\mathbf{r},\omega),$$

або

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega) - \frac{\omega^2}{a^2} U(\mathbf{r},\omega) = -\Phi(\mathbf{r},\omega),$$

де

$$\Phi(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{a^2}\left[F(\mathbf{r},\omega) + \omega\varphi(\mathbf{r}) + \psi(\mathbf{r})\right]$$

У висліді ми отримали неоднорідне рівняння Гельмгольца. Якщо власні функції та власні числа однорідного рівняння Гельмгольца позначити через $R_n(\mathbf{r})$, $\omega_n$ ($\Delta R_n(\mathbf{r})+\omega_n{}^2 R_n(\mathbf{r})=0$), то його розв'язок має вигляд

$$U(\mathbf{r},\omega)=a^2\sum_n \frac{\Phi_n(\omega)}{\omega^2+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r}),$$

або

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n \frac{F_n(\omega)}{\omega^2+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r})+$$

$$+\sum_n \frac{\omega\varphi_n}{\omega^2+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r})+\sum_n \frac{\psi_n}{\omega^2+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r}).$$

Тут коефіцієнти Фур'є визначаються наступним чином:

$$\varphi_n=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}),$$

$$\psi_n=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}),$$

$$F_n(\omega)=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})F(\mathbf{r},\omega).$$

Для знаходження оригіналу використаємо табличні зображення:

$$\boxed{\cos(\omega_n t)=\frac{\omega}{\omega^2+\omega_n{}^2}}, \qquad \boxed{\sin(\omega_n t)=\frac{\omega_n}{\omega^2+\omega_n{}^2}}$$

і властивість перетворення Лапласа під назвою - зображення згортки:

$$\boxed{F_1(\omega)F_2(\omega)=:\int_0^t d\tau f_1(\tau)f_2(t-\tau)}.$$

Тоді

$$\boxed{\begin{aligned}u(\mathbf{r},t)=&\sum_n\frac{1}{a\omega_n}R_n(\mathbf{r})\int_0^t d\tau F_n(\tau)\sin\left[a\omega_n(t-\tau)\right]+\\+&\sum_n R_n(\mathbf{r})\left[\varphi_n\cos(a\omega_n t)+\frac{\psi_n}{a\omega_n}\sin(a\omega_n t)\right]\end{aligned}}.$$

Отриманий нами розв'язок неоднорідного хвильового рівняння складається з двох доданків. Перший з них описує вплив на рух системи зовнішньої сили, що ініціює вимушені коливання у системі. Другий доданок описує власні коливання системи, що виникли виключно під дією початкових умов. Навіть за надзвичайно малих втрат системою енергії за скінчений проміжок часу власні коливання мають згаснути і лишаться лише вимушені коливання. За допомогою перетворення Фур'є ми можемо проаналізувати саме останній результат.

## Глава 8. Рівняння теплопровідності

Розглянемо наступне рівняння теплопровідності

$$\boxed{\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}=a^2\Delta u(\mathbf{r},t)+f(\mathbf{r},t)}.$$

Однорідне рівняння описує теплові процеси у тілах, якщо єдиним джерелом тепла є навколишнє середовище. Внутрішніх джерел і стоків тепла не існує. За однорідних межових умов, які ми надалі і розглядатимемо, єдиною причиною протікання теплових явищ є початкове поле температур у тілі, що відрізняється від температури навколишнього середовища. Теплові процеси закінчуються, як тільки температура тіла вирівняється з температурою навколишнього середовища. При розгляді межових умов ми не вийдемо за межи межових умов першого, другого або третього родів. Це забезпечить нам зведення вихідної задачі до задачі Штурма-Ліувіля. Зате початкові умови ми розглянемо двох видів. До першого з них будуть належати умови Коші, до другого - умови існування інтегрального перетворення Фур'є. Останній випадок відповідає стаціонарному процесу.

## 8.1.Одновимірне однорідне рівняння теплопровідності

Розглянемо постановку граничних задач в одновимірному випадку. Наближенною моделлю такого середовища є, наприклад, тонкий твердий стрижень. В якості зовнішнього середовища для нього розглядатимемо газ або рідину, у які він занурений. Рівняння теплопровідності і межові умови для такого стрижня є наслідком закону збереження енергії, закону Фур'є – закону внутрішньої теплопровідності і закону Н'ютона – закону конвективного теплообміну поверхні твердого тіла і навколишнім рідким або газоподібним середовищем.

Закон Фур'є в одновимірному випадку має вигляд

$$q(x,t)=-\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

де $q(x,t)$ – густина теплового потоку, тобто кількість тепла, що протікає за одиницю часу через одиничну площадку вздовж додатного напряму осі $x$, перпендикулярну до неї у точці стрижня з координатою $x$ у момент часу $t$; $u(x,t)$ – температура будь - якої точки перерізу стрижня, перпендикулярного осі $x$ у точці з координатою $x$ у момент часу $t$; $\lambda$ – коефіцієнт теплопровідності, який є характеристикою матеріалу твердого тіла. Взагалі кажучі, коефіцієнт теплопровідності є функцією температури.

Якщо стрижень розташований вздовж осі $x$ так, щоб початок координат збігався з його лівим кінцем і температура у стержні спадає у напрямку від лівого кінця до правого, то похідна $u_x(x,t)$ буде від'ємною, а тепловий потік через наявність знаку "–", додатним, тобто протікатиме у напрямку від більш нагрітих частин стрижня до менш нагрітих.

Закон Н'ютона визначається формулою

$$q(x,t)=\alpha[u(x,t)-u_0(x,t)],$$

де $q(x,t)$ – густина потоку тепла у точках поверхні стрижня, що мають координату $x$ у момент часу $t$; $u(x,t)$ – температура цих точок поверхні стрижня; $u_0(x,t)$ – температура рідини або газу в околі зазначених точок поверхні стрижня.

Нехай питома теплоємність матеріалу стрижня $c$, його густина $\rho$ і коефіцієнт теплопровідності є сталими величинами. Розглянемо ділянку стрижня довжиною $\Delta x$, розташовану між перерізами стрижня перпендикулярними осі $x$, у точках $x$ і $x+\Delta x$. Якщо $\sigma$ – площина цих перерізів, то приріст кількості тепла за одиницю часу на данній ділянці дорівнюватиме для малих $\Delta x$

$$c\rho\sigma\Delta x \partial u(x,t)/\partial t.$$

Цей приріст, у відсутності внутрішніх джерел і стоків тепла і теплоізольованій боковій поверхні зумовлений лише різницею теплових потоків, що поступають на дану ділянку через перерізи у точках $x$ і $x+\Delta x$, тобто

$$q(x,t)\sigma - q(x+\Delta t,t)\sigma = -\sigma\lambda\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \sigma\lambda\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}.$$

Закон збереження енергії вимагає наступної рівності

$$c\rho\Delta x\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right].$$

У межі $\Delta x \to 0$ ми і отримуємо одновимірне рівняння теплопровідності

$$\boxed{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}},$$

де коефіцієнт температуропровідності

$$a^2 = \lambda / c\rho.$$

Межові умови першого роду задають температуру кінців стрижня як функцію часу

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(l,t) = \mu_2(t),$$

де $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – відомі функції. Межові умови другого роду задають теплові потоки через кінці стрижня

$$-\lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = q(0,t), \qquad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = q(l,t),$$

або

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \nu_1(t), \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \nu_2(t),$$

де $\nu_1(t) = -q(0,t)/\lambda$, $\nu_2(t) = -q(l,t)/\lambda$ – відомі функції. Межові умови третього роду описують конвективний теплообмін на кінцях стрижня з навколишнім середовищем

$$\lambda \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \alpha[u(0,t) - \varphi_1(t)], \qquad -\lambda \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \alpha[u(l,t) - \varphi_2(t)],$$

де $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – відомі функції, які описують зміну з часом температури навколишнього середовища біля кінців стрижня.

Розглянемо наступну послідовність межових задач для одновимірного рівняння теплопровідності: межова задача з однорідними межовими умовами першого другого або третього родів для однорідного рівняння теплопровідності, межова задача першого, другого або третього родів з однорідними межовими умовами для неоднорідного рівняння теплопровідності, межова задача першого, другого або третього родів з неоднорідними межовими умовами для неоднорідного рівняння теплопровідності. Очевидно, що найпростішою є перша з наведених задач. Умовою розв`язання другої і третьої задач є розв`язання першої задачі. Друга з наведених задач є і другою за складністю. Її розв`язання є передумовою розв`язання третьої - найскладнішої з даних трьох задач.

Однорідне одновимірне рівняння теплопровідності описує процес теплопровідності або у тривимірному середовищі, де температура залежить лише від однієї з координат, або у тілі, яке наближено може розглядатись як одновимірне, наприклад тонкий довгий стрижень. При цьому внутрішні джерела і стоки тепла відсутні. За них відповідає вільний член рівняння. Якщо мова йде про стрижень, то його бокова поверхня вважається теплоізольованою. Якщо це не так, то існує дві можливості врахування теплообміну з навколишнім середовищем через бокову поверхню. Перша - розглянути стрижень як тривимірний об`єкт. Друга - розглянути одновимірне неоднорідне рівняння, де вільний член описує теплообмін з навколишнім середовищем як дію внутрішніх джерел і стоків тепла. Зауважимо, що у другому варіанті існує такий частинний випадок, коли рівняння теплопровідності залишається однорідним. Це випадок теплообміну з навколишнім середовищем, що має нульову температуру , що описується законом Н`ютона. Рівняння теплопровідності тонкого стрижня у разі конвективного теплообміну між ним і навколишнім середовищем має вигляд

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b[u(x,t) - u_0(x,t)],$$

де

$$b = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma} ,$$

$p$ - периметр поперечного перерізу стрижня, $\sigma$ - площа цого поперечного перерізу.

Отже, розглянемо першу з зазначених вище задач, а саме першу межову задачу для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності з однорідними межовими умовами і довільною початковою умовою

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} , \quad 0 < x < \ell, \ 0 < t < \infty ,$$

$$u(x,0) = \varphi(x) ,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 .$$

Лінійність і однорідність рівняння та межових умов дозволяє записати його загальний розв`язок як лінійну комбінацію всіх його лінійно незалежних частинних розв`язків. В якості частинних розв`язків візьмемо такі, що задовольняють рівнянню і лише межовим умовам. Початкову умову використаємо для знаходження довільних сталих, що їх містить загальний розв`язок. Отже розглянемо наступну допоміжну задачу:

$$U_t = a^2 U_{xx} ,$$

$$0 \le x \le l, \ 0 \le t < \infty ,$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0 .$$

Однорідні межові умови першого роду відповідають ситуації, коли температура кінців стрижня підтримується при нульовій температурі.

Для пошуку її частинних ненульових розв`язки (нульовий розв`язок у неї завжди є з причини однорідності рівняння і межових умов) використаємо метод поділу змінних. Лінійність і однорідність рівняння та сталість його коефіцієнтів гарантує його успішність щодо рівняння. Простота межових умов гарантує його успішність і щодо межових умов і, як результат, допоміжної задачі в цілому. Отже, шукатимемо частинні розв`язки допоміжної задачі у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної

$$U(x,t) = X(x)T(t) .$$

Оскільки $U(x,t)$ тотожньо не дорівнює нулю, то не дорівнюють тотожньо нулю і функції $X(x)$, $T(t)$.

Підклавши функцію $U(x,t)$ у такому вигляді у рівняння, одержимо

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) .$$

Поділивши обидві його частини на добуток функцій $X(x)$ і $T(t)$, матимемо рівняння, ліва і права частини якого є функціями різних змінних.

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Останнє можливе лише у разі, якщо ці функції є сталими величинами, тобто

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=-\lambda\ ,$$

де $\lambda$ - довільна стала, або стала поділу, мінус написаний для зручності наступного розгляду. Отримана подвійна рівність еквівалентна наступній системі двох звичайних диференційних рівнянь

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ T'(t)+\lambda a^2 T(t)=0. \end{cases}$$

Таким чином, ми замінили розв`язання диференційного рівняння у частинних похідних з двома незалежними змінними системою двох звичайних диференційних рівнянь. Так само змінні ділять і у межових умовах і з межових умов для функції $U(x,t)$

$$X(0)T(t)=0, \qquad X(l)T(t)=0$$

ми одержимо межові умови для функції $X(x)$:

$$X(0)=0, \qquad X(l)=0\ .$$

Розв`яжемо тепер по черзі отримані рівняння. Перше з них разом з межовими умовами є задачею Штурма-Ліувіля, розглянутою нами вище

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

Її власні числа і власні функції мають вигляд:

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\ , \quad n\in N,$$

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Нескінчений набір власних чисел межової задачі перетворює, що входить і у друге рівняння системи, перетворює це рівняння у нескінченну систему незалежних рівнянь:

$$T_n'(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=0\ ,\ \ n\in N\,.$$

Ці рівняння мають наступні лінійно незалежні частинні розв`язки

$$T_n(t)=\exp(-\lambda_n a^2 t)\,,$$

що найпростіше перевірити безпосередньою підстановкою у рівняння. З частинних розв`язків першого і другого рівнянь ми одержимо наступні частинні розв`язки допоміжної задачі

$$U_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)\ ,$$

або

$$U_n(x,t)=\exp(-\lambda_n a^2 t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\,.$$

Загальний розв`язок вихідної задачі тепер можна записати у вигляді лінійної комбінації всіх лінійно незалежних частинних розв`язків допоміжної задачі

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n U_n(x,t)\ ,$$

або

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp(-\lambda_n a^2 t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)},$$

де $A_n$ - довільні сталі. Ці довільні сталі можуть бути знайдені з початкової умови. Дійсно, початкову умову $U(x,0)=\varphi(x)$ можна записати як

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=\varphi(x)\ .$$

Останній вираз є нічим іншим як тригонометричним рядом Фур`є для функції $\varphi(x)$. Умовою збіжності цього ряду є абсолютна інтегрованість функції $\varphi(x)$ на проміжку $[0,l]$, тобто приналежність функції $\varphi(x)$ до простору $L_1[0,l]$. Сталі $A_n$ є коефіцієнтами цього ряду, а отже

$$\boxed{A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx}\,.$$

Зауважимо, що сама можливість знаходження з одного рівняння нескінченної кількості невідомих коефіцієнтів зумовлена ортогональністю тригонометричних функцій $\sin\left(n\pi x/l\right)$ на проміжку $[0,l]$.

***Приклад 1.*** *Знайти розв`язок попередньої задачі у разі, якщо початкова температура стрижня є однаковою в усіх точка і дорівнює* $T$ .

***Розв`язання.*** *Сталі* $A_n$ *визначатимуться наступним інтегралом*

$$A_n = \frac{2T}{l}\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \; .$$

*Його обчислення дає наступний результат*

$$A_n = \frac{2T}{n\pi}[1-(-1)^n] \; .$$

*Зокрема,* $A_1 = \frac{4T}{\pi}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{4T}{3\pi}$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{4T}{5\pi}$, ... . *Якщо виписати лише перші декілька членів ряду, яким визначається температура стрижня, то ми матимемо*

$$U\left(x,t\right) = \frac{4T}{\pi}\exp\left(-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) +$$

$$+\frac{4T}{3\pi}\exp\left(-\frac{9\pi^2 a^2}{l^2}t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) +$$

$$\frac{4T}{5\pi}\exp\left(-\frac{25\pi^2 a^2}{l^2}t\right)\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) + \ldots$$

*Видно, що числові коефіцієнти у членів ряду досить повільно спадають за величиною при зростанні їх номерів. Зате наявність експоненційно спадаючого з часом множників радикально впливає на збіжність ряду. Можна зробити наступну, хоча і досить грубу, оцінку. Для досить великих часів* $t \geq l^2/\pi^2 a^2$ *досить враховувати лише перший доданок. У цьому разі показник степеню експоненти у першому члені ряду за абсолютною величиною дорівнює або більше одиниці. Для менших часів* $t \geq l^2/9\pi^2 a^2$ *потрібно враховувати вже перші два доданки. Нарешті, кількість доданків, які треба враховувати при довільних часах визначається із співвідношення* $t \geq l^2/(2n-1)^2\pi^2 a^2$. *Така оцінка, насправді, є суттєво завищеною, оскільки не враховує спадання із зростанням* $n$ *числового коефіцієнта* *при експоненті. При цьому може видаватись, що певна проблема виникає при дуже малих часах, хоча і у цьому разі ряд збігається. При* $t=0$ *ми одержуємо збіжний ряд для функції, якою є права частина початкової умови.*

Розглянемо тепер випадок, коли бокова поверхня стержню не тепло ізольована, а через неї відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, яким може бути рідина. Відповідно до закону Н`ютона густина теплового потоку, що виникає внаслідок такого теплообміну, пропорційний різниці температури тіла і температури навколишнього середовища. Якщо температура навколишнього середовища є нульовою, то рівняння теплопровідності є однорідним, а саме:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t) \ ,$$

де $\beta$ - відома стала, що визначається через коефіцієнт тепловіддачі і характеристики речовини стрижня. Це рівняння можна привести до попереднього рівняння за допомогою підстановки

$$u(x,t)=\exp(-bt)v(x,t) \ ,$$

де $v(x,t)$ - нова невідома функція, яка, очевидно.

## 8.2.Одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності

Розглянемо тепер попередню межову задачу, але вже для неоднорідного одновимірного рівняння теплопровідності для довільного вільного члену. При цьому будемо вважати для нього виконаними умови збіжності ряду Фур`є. Отже,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t) \, , \quad 0<x<l, \ 0<t<\infty \ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \ , \quad u(0,t)=u(l,t)=0 \ .$$

Розв`язання цієї задачі базується на попередньому розв`язанні межової задачі для однорідного рівняння теплопровідності Причиною цього є те, що розв`язок задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності шукається у вигляді ряду Фур`є. В якості повної ортогональної системи функцій використовуються власні функції, знайдені у попередній задачі. Такий вибір повної ортогональної системи функцій гарантує автоматичне виконання межових умов задачі. Тоді

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) ,$$

де коефіцієнти Фур`є - функції $U_n(t)$ невідомі. Тим самим ми приводимо задачу відшукання функції $u(x,t)$ до відшукання її коефіцієнтів Фур`є. Останні мають задовольняти рівнянню і лише початковій умові Розвинемо в аналогічні ряди Фур`є і інші функції задачі, а саме:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Оскільки функції $f(x,t)$ і $\varphi(x)$ відомі, то їх коефіцієнти Фур`є можуть знаходитись безпосередньо

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx.$$

Підкладемо наведені розвинення у рівняння і початкову умову. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dt}U_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{l^2}U_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$

то задача матимемо наступний вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial t}U_n(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}U_n(t)-f_n(t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[U_n(0)-\varphi_n\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=0.$$

Оскільки базисні функції є лінійно незалежними, то їх лінійна комбінація дорівнює нулю лише у разі, якщо всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації дорівнюють нулю. Ця умова дає нам нескінченну систему звичайних диференційних рівнянь щодо коефіцієнтів Фур'є шуканої функції

$$\frac{\partial}{\partial t}U_n(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}U_n(t)=f_n(t)\ ,$$
$$U_n(0)=\varphi_n\ ,\ n\in N\ .$$

Цю систему зручно розв`язувати за допомогою інтегрального перетворення Лапласа. Отже, припускаючи, що зображення за Лапласом невідомої функції існує

$$U_n(t)=\!\!:U_n(p)\ ,$$

за властивістю зображення похідної одержуємо

$$\frac{\partial}{\partial t}U_n(t)=\!\!:pU_n(p)-\varphi_n\ .$$

Відповідно,

$$f_n(t)=\!\!:f_n(p)\ .$$

Система рівнянь тепер набуде вигляду

$$pU_n(p)-\varphi_n+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}U_n(p)=f_n(p)\ ,\ n\in N.$$

Її розв`язок має вигляд

$$U_n(p)=\frac{\varphi_n}{p+n^2\pi^2a^2/l^2}+\frac{f_n(p)}{p+n^2\pi^2a^2/l^2}\ .$$

Для знаходження оригіналу використаємо наступне табличне зображення

$$\exp(-\alpha t)=\frac{1}{p+\alpha}$$

і властивість зображення згортки

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=f_1(p)f_2(p)\ .$$

У вислiді

$$U_n(t)=\varphi_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)+\int_0^t\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tau\right)f_n(t-\tau)d\tau\ .$$

Шуканий розв`язок тепер буде таким

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)\sin\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\tau\right) f_n(t-\tau)d\tau \sin\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}x\right).$$

Здача розв`язана до кінця. Перший доданок у правій частині описує процес теплопровідності, зумовлений початковим розподілом температури у стержні, другий - дією внутрішніх джерел і стоків тепла. Така структура розв`язку відповідає структурі загального розв`язку неоднорідного рівняння, що складається з загального розв`язку однорідного рівняння і частинного розв`язку неоднорідного рівняння. Другий доданок якраз і є частинним розв`язком неоднорідного рівняння. Якщо ж внутрішні джерела або стоки тепла відсутні, то ми маємо вже отриманий вище частинний розвозок однорідного рівняння з відповідними межовими і початковою умовами. Подальша конкретизація розв`язку вимагає конкретизації початкової умови і густини внутрішніх джерел і стоків тепла.

## 8.3.Неоднорідні межові умови

У найбільш загальній постановці задачі для одновимірного рівняння теплопровідності неоднорідними мають бути і межові умови, а не тільки рівняння теплопровідності. Розглянемо першу межову задачу для одновимірного неоднорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними межовими умовами

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<l,\ 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t).$$

Наведену задачу можна звести до попередньої, якщо замість невідомої функції $u(x,t)$ ввести невідому функцію $v(x,t)$, для якої межові умови вже будуть однорідними. Для межових задач першого і другого роду це робиться наступним чином

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$$

або

$$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t).$$

Тут функція $w(x,t)$ для першої межової задачі підбирається так, що $w(0,t)=\mu_1(t),\ w(l,t)=\mu_2(t)$. Зробити це можна безліччю способами. Один з них наступний

$$w(x,t)=\mu_1(t)+x[\mu_2(t)-\mu_1(t)]/l.$$

У цьому разі

$$v(0,t)=u(o,t)-w(0,t)=0,$$

$$v(l,t)=u(l,t)-w(l,t)=0\ .$$

За рахунок спрощення межових умов дещо ускладняться рівняння і початкова умова. Дійсно, для функції $v(x,t)$ початкова умова буде наступною

$$v(x,0)=\varphi\left(x\right)-w(x,0)\ ,$$

а рівняння матиме вільний член складнішої структури

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)-\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+a^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}.$$

Для межових умов другого роду функцію $w(x,t)$ можна підібрати так

$$w(x,t)=\mu_1(t)+x^2[\mu_2(t)-\mu_1(t)]/(2l^2).$$

## 8.4.Межові умови спряження

Розглянемо стрижень $0\le x\le l$ з теплоізольованою боковою поверхнею і сталим перерізом, складений з двох однорідних стержнів $0\le x\le x_0$ і $x_0<x\le l$ з різними фізичними властивостями. Знайдемо температуру в стержні, якщо його кінці підтримуються при нульовій температурі, а початкова температура довільна.

Межову задачу у даному випадку доцільно сформулювати окремо для кожної з двох однорідних частин стрижня, а саме:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ \ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)_{,}\quad u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad v(l,t)=0.$$

Не вистачаючи дві межові умови слід задати у точці $x_0$ – точці контакту двох різнорідних частин стрижня. Оскільки у цій точці джерел і стоків тепла немає, то цими межовими умовами є умови спряження, тобто умови неперервності температури і теплового потоку в точці $x_0$:

$$u(x_0,t)=v(x_0,t),$$

$$\lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

Для даної задачі з межовими умовами спряження метод поділу змінних також застосовний. Розв’яжемо спочатку допоміжні задачі, що складаються з відповідних рівнянь і межових умов. Ненульові частинні розв'язки цих задач шукатимемо у вигляді

$$u(x,t)=Y(x)T(t), \qquad v(x,t)=Z(x)R(t).$$

У вислідi кожне з рівнянь можна привести до вигляду

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt}=a^2\frac{1}{Y(x)}\frac{d^2Y(x)}{dx^2}=-\alpha,$$

$$\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}=b^2\frac{1}{Z(x)}\frac{d^2Z(x)}{dx^2}=-\beta.$$

Тепер їх можна замінити наступними системами рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dT(t)}{dt}+\alpha T(t)=0, \\ \dfrac{d^2Y(x)}{dx^2}+\dfrac{\alpha}{a^2}Y(x)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dR(t)}{dt}+\beta R(t)=0, \\ \dfrac{d^2Z(x)}{dx^2}+\dfrac{\beta}{b^2}Z(x)=0. \end{cases}$$

Розділимо тепер змінні у межових умовах. Межові умови першого роду при $x=0$ і $x=l$ будуть наступними

$$Y(0)=0,\ Z(l)=0.$$

Ситуація з межовими умовами спряження при $x=x_0$ є дещо складнішою. Тут

$$Y(x_0)T(t)=Z(x_0)R(t),$$

$$\lambda_a\frac{dY(x_0)}{dx}T(t)=\lambda_b\frac{dZ(x_0)}{dx}R(t).$$

Оскільки $Y(x_0)$ і $Z(x_0)$ є сталими величинами, то перша межова умова спряження є умовою лінійної залежності функцій $T(t)$ і $R(t)$. Останнє означає, що ці функції можуть відрізнятись не більше ніж сталим множником. Розв'язуючи відповідні рівняння, матимемо

$$T(t)=A_a\exp(-\alpha t),$$

$$R(t)=A_b\exp(-\beta t),$$

де $A_a$ і $A_b$ – довільні сталі. Лінійна залежність останніх двох функцій означає, що

$$\exp(-\alpha t)=\exp(-\beta t),$$

або

$$\boxed{\alpha=\beta}.$$

Оскільки функції $Y(x)$ і $Z(x)$ також визначені з точністю до сталих множників, то сталі $A_a$ і $A_b$ можна об'єднати з ними і вважати, що $T(x)=R(x)$. Остання умова дозволяє радикально спростити межові умови спряження, надавши їм вигляду

$$Y(x_0)=Z(x_0),$$

$$\lambda_a Y'(x_0)=\lambda_b Z'(x_0).$$

Отже, і у межових умовах спряження змінні поділились.

Розв'яжемо тепер решту рівнянь з отриманих систем звичайних диференційних рівнянь. Їх загальні розв'язки зручно записати у тригонометричній формі, а саме:

$$Y(x)=A\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x\right),$$

$$Z(x)=C\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{b}x\right)+D\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{b}x\right).$$

Останньому загальному розв'язку доцільно надати дещо іншу форму, перейшовши від сталих $C$ і $D$ до сталих $E$ і $\gamma$ за формулами

$$C=E\sin(\gamma),\ D=E\cos(\gamma).$$

Тоді

$$Z(x)=E\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{b}x+\gamma\right).$$

Використання межових умов першого роду при $x=0$ і $x=l$ дещо спрощує наведені загальні розв'язки. Так

$$Y(0)=A=0,$$

$$Z(l)=E\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{b}l+\gamma\right)=0.$$

Якщо $E\neq 0$, що якраз і забезпечує існування ненульових розв'язків допоміжної задачі, то

$$\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{b}l+\gamma\right)=0.$$

Останнє можливо при умові, що $\gamma=-\frac{\sqrt{\alpha}}{b}l$. Тоді

$$Y(x)=B\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x\right),$$

$$Z(x)=E\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x-l)\right].$$

Тепер підкладемо ці розв'язки у межові умови спряження. Маємо,

$$B\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right)=E\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right],$$

$$B\frac{\lambda_a}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right)=E\frac{\lambda_b}{b}\cos\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right].$$

Ці умови можна розглядати як систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів $B$ і $E$. Ненульовий розв'язок цієї системи можливий лише у разі, якщо визначник системи дорівнює нулю

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right) & \sin\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right] \\ \frac{\lambda_a}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right) & \frac{\lambda_b}{b}\cos\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right] \end{vmatrix}=0,$$

або

$$\frac{\lambda_b}{b}\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right)\cos\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right]=\frac{\lambda_a}{a}\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right)\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right].$$

Останнє рівняння можна записати і у дещо іншому вигляді, поділивши, наприклад, обидві його частини на добуток синусів. Тоді матимемо

$$\frac{\lambda_b}{b}\cot\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{b}(x_0-l)\right]=\frac{\lambda_a}{a}\cot\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right].$$

Отримане трансцендентне рівняння можна розв'язати лише чисельно. Нехай $\alpha_n$ – його чисельні розв'язки. Можна довести, що їх злічена кількість, тобто $n \in N$. З будь-якої з умов спряження можна одержати зв'язок між сталими $B$ і $E$. Отже, наприклад,

$$E_n = B_n \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{a}x_0\right) / \sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x_0-l)\right].$$

Власні функції межових задач, що відповідають власним числам $\alpha_n$, можна записати так

$$Y_n(x)=B_n\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x\right),$$

$$Z_n(x)=B_n\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x_0\right)\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x-l)\right] \Big/ \sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x_0-l)\right].$$

Оскільки вони визначені з точністю до довільного сталого множника, а $\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x_0\right)$ є сталою величиною, то їх можна записати і у більш симетричному вигляді, опустивши при цьому сталу $B_n$

$$Y_n(x)=\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x\right) \Big/ \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x_0\right),$$

$$Z_n(x)=\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x-l)\right]\Big/\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x_0-l)\right].$$

Частинні розв'язки допоміжних задач тепер можна записати так:

$$u_n(x,t)=\exp(-\alpha_n t)\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x\right)\Big/\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x_0\right),$$

$$v_n(x,t)=\exp(-\alpha_n t)\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x-l)\right]\Big/\sin\left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{b}(x_0-l)\right].$$

У принципі, ці частинні розв'язки дозволяють записати нам загальні розв'язки вихідних задач, але при цьому виникне проблема при знаходженні довільних сталих, що входитимуть у ці загальні розв'язки, з початкових умов. Суть проблеми полягає у тому, що власні функції $Y_n(x)$ і $Z_n(x)$ не є власними функціями задачі Штурма-Ліувіля і перевірити їх ортогональність, не маючи явного виразу для власних чисел практично не можливо. Успішність подальшого аналітичного розв'язку задачі тепер залежатиме від того, чи вдасться з власних функцій $Y_n(x)$ і $Z_n(x)$ побудувати ортогональний базис. Така можливість існує. Для цього вихідну задачу слід сформулювати як задачу Штурма-Ліувіля. Така можливість випливає з наявності межових умов першого роду для $x=0$ і $x=l$ і структури самого рівняння теплопровідності.

Задачу Штурма-Ліувіля можна записати у наступному вигляді

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right],\quad 0<x<l,\ t>0,$$

$$w(x,0)=\Phi(x),\quad w(0,t)=w(l,t)=0,$$

де коефіцієнт питомої теплоємності

$$c(x)=\begin{cases}c_a, 0<x<x_0,\\ c_b, x_0<x<l,\end{cases}$$

густина стрижня

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_a,\ 0<x<x_0,\\ \rho_b,\ x_0<x<l,\end{cases}$$

питомий коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda(x)=\begin{cases}\lambda_a,\ 0<x<x_0,\\ \lambda_b,\ x_0<x<l,\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), 0<x<x_0,\\ \psi(x), x_0<x<l,\end{cases}$$

$$w(x,t)=\begin{cases}u(x,t), 0<x<x_0,\\ v(x,t), x_0<x<l,\end{cases}\quad\begin{pmatrix}a^2=\lambda_a/c_a\rho_a,\\ b^2=\lambda_b/c_b\rho_b.\end{pmatrix}$$

Власними функціями цієї задачі, очевидно, будуть наступні функції

$$\mathrm{X}_n(x)=\begin{cases}Y_n(x), 0<x<x_0,\\ Z_n(x), x_0<x<l.\end{cases}$$

Їх ортогональність гарантована тим, що вони є власними функціями задачі Штурма–Ліувіля

$$\int_0^l c(x)\rho(x)\mathrm{X}_n(x)\mathrm{X}_m(x)dx=0,\ n\neq m$$

$$\int_0^l c(x)\rho(x)\mathrm{X}_n^2(x)dx=\|\mathrm{X}_n\|^2=$$

$$=\frac{c_a\rho_a x_0}{2\sin^2\left(\dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{a}x_0\right)}+\frac{c_b\rho_b\left(l_0-x_0\right)}{2\sin^2\left[\dfrac{\sqrt{\alpha_n}}{b}\left(l-x_0\right)\right]}.$$

Частинні розв’язки допоміжної задачі тепер можна записати так

$$w_n(x,t)=\mathrm{X}_n(x)T_n(t),$$

оскільки, як вже обговорювалось вище, можна покласти $T_n(t)=R_n(t)$. Загальний розв’язок матиме вигляд

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\alpha_n t)\mathrm{X}_n(x).$$

Ортогональність функцій $\mathrm{X}_n(x)$ з ваговою функцією $c(x)\rho(x)$ дозволяє тепер з початкової умови знайти всі коефіцєнти $a_n$. Дійсно, початкова умова дає нам наступний ряд Фур’є

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{X}_n(x) = \Phi(x).$$

Його коефіцієнти визначаються за стандартною формулою

$$a_n = \frac{1}{\left\|\mathrm{X}_n\right\|^2} \int_0^l c(x)\rho(x)\Phi(x)\mathrm{X}_n(x)dx.$$

## 8.5.Рівняння теплопровідності ($-\infty < t < \infty$)

Будемо вважати, що процес теплопровідності почався у нескінченно віддаленому минулому, а закінчиться у нескінченно віддаленому майбутньому. Це, фактично, гарантує виконання умов існування прямого перетворення Фур'є

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt \left| u(\mathbf{r},t) \right| < \infty}.$$

Нехай нам відомі власні функції межової задачі для однорідного рівняння Гельмгольца

$$\Delta R_n(\mathbf{r}) + \omega_n{}^2 R_n(\mathbf{r}) = 0.$$

Межові умови ми тут не наводимо, вважаючи, що вони належать до межових умов першого, другого або третього родів. Для виключення з рівняння похідних за часом, виконаємо перетворення Фур'є невідомої функції та її першої похідної, а також межових умов:

$$u(\mathbf{r},t) := U(\mathbf{r},\omega),$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} := -i\omega U(\mathbf{r},\omega).$$

Тут для прямого і оберненого перетворень Фур'є використані формули:

$$\boxed{U(\mathbf{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i\omega t) u(\mathbf{r},t)},$$

$$\boxed{u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(-i\omega t) U(\mathbf{r},\omega)}.$$

Після підстановки наведених Фур'є-образів у рівняння, воно набере вигляду неоднорідного рівняння Гельмгольца, у якому невідома функція залежить від одного з коефіцієнтів рівняння як від параметра:

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega)+\frac{i\omega}{a^2}U(\mathbf{r},\omega)=-F(\mathbf{r},\omega).$$

**Розв'язання однорідного рівняння.** Розглянемо спочатку однорідне рівняння

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega)+\frac{i\omega}{a^2}U(\mathbf{r},\omega)=0$$

Його можна дещо спростити, виключивши параметричну залежність невідомої функції. Для цього представимо Фур'є-образ у вигляді

$$U(\mathbf{r},\omega)=R(\mathbf{r})\Omega(\omega).$$

Після підстановки цього розв'язку у рівняння воно набере вигляду

$$\Delta R(\mathbf{r})+\frac{i\omega}{a^2}R(\mathbf{r})=0.$$

Нехай $R_n(\mathbf{r})$ - власні функції, та $\omega_n$ - власні числа цієї межової задачі для рівняння Гельмгольца, відомі нам за умовою, тоді

$$U_n(\mathbf{r},\omega)=R_n(\mathbf{r})\Omega_n(\omega).$$

Після підстановки виразу в однорідне рівняння одержимо

$$\left(a^2\omega_n{}^2-i\omega\right)R_n(\mathbf{r})\Omega_n(\omega)=0.$$

При розв'язанні однорідного рівняння нам потрібні обидва множники у частинному розв'язку. Отже, знайдемо тепер другий множник. Оскільки для довільних значень аргументу $R_n(\mathbf{r})\neq 0$, то рівняння буде вірним лише при виконанні наступної умови

$$\left(a^2\omega_n{}^2-i\omega\right)\Omega_n(\omega)=0.$$

Перший множник у лівій частині рівняння відмінний від нуля скрізь, за виключенням одного значення $\omega=a^2\omega_n{}^2$. Це означає, що функція $\Omega_n(\omega)$ скрізь, за виключенням зазначеної точки, дорівнює нулю. Лише у цій точці вона відмінна від нуля. Якщо її значення є скінченим, то відповідний частинний розв'язок теж буде скінченим. Отже, загальний розв'язок буде відмінним від нуля і скінченим лише в одній точці. При виконанні оберненого перетворення Фур'є ми одержимо нульовий результат для оригінала, оскільки підінтегральна функція відповідного інтеграла буде скінченою і відмінною від нуля лише в одній точці. З сказаного можна зробити висновок, що функція $\Omega_n(\omega)$ не може бути скінченою у точках, де вона відмінна від нуля. Останнє означає, що вона має бути узагальненою функцією типу дельта-функції Дірака

$$\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases}.$$

Дійсно, однією з властивостей дельта - функції є наступна

$$x\delta(x)=0.$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд

$$\Omega_n(\omega)=\delta\left(a^2\omega_n{}^2-i\omega\right).$$

Тепер загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n A_n R_n(\mathbf{r})\delta\left(a^2\omega_n{}^2-i\omega\right).$$

Виконавши щодо цієї функції обернене перетворення Фур'є, знайдемо шуканий розв'язок однорідного рівняння у вигляді

$$\boxed{U(\mathbf{r},t)=\sum_n A_n R_n(\mathbf{r})\exp\left(-a^2\omega_n{}^2 t\right)}.$$

Тут ми використали таку властивість дельта-функцій

$$f(a)=\int_{-\infty}^{\infty}dx f(x)\delta(x-a).$$

У виразі для розв'язку залишився довільний сталий множник, але це неминуче при використанні перетворення Фур'є. Цього цілком достатньо для якісного аналізу характеру фізичного процесу. Для отримання більш конкретного розв'язку необхідні конкретніші додаткові умови, ніж умова існування перетворення Фур’є.

**Розв'язання неоднорідного рівняння теплопровідності.** Розглянемо тепер неоднорідне рівняння теплопровідності. Маючи у розпорядженні власні функції однорідного рівняння розвинемо всі функції, що до нього входять, у ряд Фур'є за цими власними функціями:

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n U_n(\omega)R(\mathbf{r}),$$

$$F(\mathbf{r},\omega)=\sum_n F_n(\omega)R_n(\mathbf{r}).$$

Коефіцієнти цих рядів Фур'є визначаються так:

$$U_n(\omega)=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})U(\mathbf{r},\omega),$$

$$F_n(\omega)=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})F(\mathbf{r},\omega).$$

В останніх двох інтегралах інтегрування ведеться за тією просторовою областю, де шукається розв'язок рівняння. Після підстановки цих розвинень у рівняння, воно набере вигляду

$$\sum_n\left[U_n(\omega)\left(\omega_n{}^2+i\omega\right)-a^2F_n(\omega)\right]R_n(\mathbf{r})=0.$$

Оскільки власні функції задачі Штурма-Ліувіля є лінійно незалежними, то їх лінійна комбінація може дорівнювати нулю лише у випадку, коли всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю. Отже, ми одержуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів Фур'є невідомої функції

$$U_n(\omega)(\omega_n{}^2+i\omega)-a^2F_n(\omega)=0.$$

Звідси

$$U_n(\omega)=a^2\frac{F_n(\omega)}{\omega_n{}^2+i\omega}.$$

Тепер Фур'є-образ шуканої функції матиме вигляд

$$\boxed{U(\mathbf{r},\omega)=a^2\sum_n\frac{F_n(\omega)}{\omega_n{}^2+i\omega}R_n(\mathbf{r})}.$$

На відміну від однорідного рівняння, він не містить жодної довільної сталої. При цьому кожна компонента Фур'є шуканої функції пропорційна відповідній компоненті Фур'є густини джерел або стоків тепла.

### 8.1.1.Приклади

**Приклад 1. Довільна область.** Для межових умов третього роду знайти розв'язок рівняння теплопровідності для густини джерел тепла, що змінюється за гармонійним законом:

$$f(\mathbf{r},t)=c(\mathbf{r})\sin(\Omega t).$$

Така ситуація може спостерігатись при виділенні тепла всередині тіла за рахунок змінного електромагнітного поля або струму.

**Розв'язання.** Знайдемо Фур'є-образ вільного члена рівняння

$$F(\mathbf{r},\omega)=c(\mathbf{r})\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\exp(i\omega t)\sin(\Omega t)=$$

$$=i\pi c(\mathbf{r})\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right].$$

Тут ми використали одне з представлень дельта - функції Дірака

$$\boxed{\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt\exp(i\omega t)}.$$

Відповідно до означення коефіцієнтів розвинень за власними функціями однорідної задачі

$$F_n(\omega)=i\pi c_n\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right],$$

де

$$c_n=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int\limits_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})c(\mathbf{r}).$$

У висліді Фур'є-образ шуканої функції визначається так

$$U(\mathbf{r},\omega)=i\pi a^2\left[\delta(\omega-\Omega)-\delta(\omega+\Omega)\right]\sum_n\frac{c_n}{\omega_n{}^2+i\omega}R_n(\mathbf{r}).$$

Виконуючи обернене перетворення Фур'є, матимемо

$$\boxed{u(\mathbf{r},t)=a^2\sum_n c_n\left[\Omega\cos(\Omega t)+\omega_n{}^2\sin(\Omega t)\right]\frac{R_n(\mathbf{r})}{\omega_n{}^4+\Omega^2}}.$$

**Приклад 2. Прямокутна мембрана.** Знайти розв'язок рівняння теплопровідності для прямокутної мембрани для густини джерел тепла, що змінюється за гармонійним законом:

$$f(\mathbf{r},t)=c(\mathbf{r})\sin(\Omega t).$$

Краї мембрани підтримуються за нульової температури, бокова поверхня теплоізольована.

**Розв'язання.** Нехай мембрана має форму прямокутника $0\le x\le l,\ \ 0\le y\le h$, тоді власні числа та власні функції першої межової задачі для рівняння Гельмгольца мають вигляд:

$$\omega_{nm}=a\pi\sqrt{\frac{m^2}{h^2}+\frac{n^2}{l^2}},\quad n,m=1,2,\ldots\ ,$$

$$R_{nm}(\mathbf{r})=\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right).$$

Використовуючи результат попередньої задачі матимемо

$$\boxed{u(x,y,t)=a^2\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{c_n}{\omega_{nm}{}^2-\Omega^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\sin(\Omega t)}.$$

**Приклад 3. Кругла мембрана.** Знайти розв'язок рівняння теплопровідності для круглої мембрани для густини джерел тепла, що змінюється за гармонійним законом

$$f(\mathbf{r},t)=c(\mathbf{r})\sin(\Omega t).$$

Краї мембрани підтримуються за нульової температури, бокова поверхня теплоізольована.

. **Розв'язання.** Нехай кругла мембрана має радіус $R_0$ тоді власні функції першої межової задачі для рівняння Гельмгольца мають вигляд:

$$R_{nm}(\mathbf{r})=J_n\left(\frac{\omega_{nm}}{a}r\right)\exp(in\varphi),$$

$$n=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots,\ \ m=1,2,\ldots\ .$$

Власні числа цієї задачі визначаються з умови

$$J_n\left(\frac{\omega}{a}R_0\right)=0,$$

тобто $\omega_{nm}$ - є $m$ - им нулем функції Беселя $n$ - го порядку. Отже,

$$\boxed{u(r,\varphi,t)=a^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_n}{\omega_{nm}{}^2-\Omega^2}J_n\left(\frac{\omega_{nm}}{a}r\right)\exp(in\varphi)\sin(\Omega t)}.$$

## 8.6.Задача Коші для однорідного рівняння

Однорідне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}=a^2\Delta u(\mathbf{r},t)}.$$

Межові умови як і раніше нехай будуть першого, другого або третього роду. Явно ми їх розглядати не будемо, оскільки нас цікавитиме лише часова залежність розв'язку. Початкова умови має вигляд

$$u(\mathbf{r},0)=\varphi(\mathbf{r}).$$

Таку умову доцільно використовувати тоді, коли момент спостереження за поведінкою системи не дуже віддалений від початку у ній теплового процесу. У цьому випадку початкова умова суттєво впливає на процес. При такому підході ми можемо досліджувати процеси у системі ще до виходу їх у стаціонарний режим, якщо останній можливий.

Якщо коефіцієнти диференційного рівняння не залежать від часу, то ефективним методом розв'язку таких задач Коші є застосування інтегрального перетворення Лапласа. У випадку рівняння теплопровідності ситуація саме така. Разом з тим, однорідне рівняння теплопровідності  у висліді поділу змінних зразу зводиться до рівняння Гельмгольца. Саме у такій ситуації перетворення Лапласа неадекватне проблемі. Тому однорідне рівняння теплопровідності ми розв'яжемо методом поділу змінних, а вже до неоднорідного застосуємо інтегральне перетворення Лапласа.

Будемо шукати частинні розв'язки рівняння у вигляді добутку

$$u(\mathbf{r},t)=R(\mathbf{r})T(t).$$

Після підстановки його у рівняння одержимо

$$\frac{1}{T(t)}\frac{1}{a^2}\frac{dT(t)}{dt}=\frac{1}{R(\mathbf{r})}\Delta R(\mathbf{r})=-\omega^2.$$

Остання подвійна рівність еквівалентна двом наступним диференційним рівнянням, одне з яких вже звичайне:

$$.\ T'(t)+a^2\omega^2T(t)=0,$$

$$\Delta R(\mathbf{r})+\omega^2R(\mathbf{r})=0.$$

Друге рівняння є рівнянням Гельмгольца. Разом з межовими умова першого воно утворює задачу Штурма-Ліувіля.  Будемо вважати її власні функції $R_n(\mathbf{r})$ і власні числа $\omega_n$ відомими ($\Delta R_n(\mathbf{r})+\omega_n{}^2R_n(\mathbf{r})=0$). оді шукані частинні розв'язки можна записати так

$$u_n(\mathbf{r},t)=R_n(\mathbf{r})T_n(t).$$

Тут $T_n(t)$ - загальний розв'язок першого рівняння системи

$$T_n{}'(t)+a^2\omega_n{}^2T_n(t)=0.$$

Цей розв'язок має вигляд

$$T_n(t)=A_n\exp(-a^2\omega_n{}^2t).$$

Загальний же розв'язок вихідного рівняння теплопровідності є сумою знайдених частинних розв'язків і може бути записаним у вигляді:

$$\boxed{u(\mathbf{r},t)=\sum_n A_nR_n(r)\exp(-a^2\omega_n{}^2t)}\,.$$

З цього видно, що єдиним збуренням, яке викликає тепловий процес у системі, є початкова умова. Процес є затухаючим, тобто температура тіла асимптотично прямує до температури навколишнього середовища.

Довільні сталі, що входять у загальний розв'язок, можуть бути визначеним з початкової умови

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_n A_n R_n(r).$$

Ця умова є рядом Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувіля для рівняння Гельмгольца. Отже, його коефіцієнти визначаються так

$$A_n = \frac{1}{\left\|R_n\right\|^2} \int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}),$$

Таким чином задача у загальному вигляді розв'язана до кінця. Використаємо останній результат для декількох простих випадків.

### 8.2.1.Приклади

**Приклад 1.** Одновимірна однорідна задача теплопровідності з однорідними межовими умовами першого роду має розв'язок:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\exp\left(-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t\right),$$

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l dx\ \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\varphi(x).$$

**Приклад 2.** Двовимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для прямокутника має розв'язок:

$$u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}\right)t\right].$$

$$A_n = \frac{4}{lh}\int_0^l dx \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\int_0^h dy \sin\left(\frac{m\pi}{h}y\right)\varphi(x,y).$$

**Приклад 3.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для паралелепіпеда має розв'язок:

$$U(x,y,z,t) =$$

$$\sum_{n,m,k=1}^{\infty} A_{nmk} \sin\left(\frac{na}{l}x\right)\sin\left(\frac{ma}{h}y\right)\sin\left(\frac{ka}{s}z\right)\times$$

$$\times \exp\left[-a^2\pi^2\left(\frac{n^2}{l^2}+\frac{m^2}{h^2}+\frac{k^2}{s^2}\right)t\right],$$

$$A_{nmk}=\frac{8}{lhs}\int_0^l dx \sin\left(\frac{na}{l}x\right)\int_0^h dy \sin\left(\frac{ma}{h}y\right)\int_0^s dz \sin\left(\frac{ka}{s}z\right)\varphi(x,y,z).$$

**Приклад 4.** Двовимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для круга має наступний розв'язок:

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\exp(in\varphi)\exp\left(-a^2\frac{\mu_{nm}{}^2}{r_0{}^2}t\right),$$

$$A_{nm}=\frac{2}{\pi r_0{}^2\left[J_{n+1}\left(\mu_{nm}\right)\right]^2}\int_0^{2\pi} d\theta \exp\left(in\theta\right)\int_0^{r_0} dr r J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_0}r\right)\varphi(r,\varphi).$$

**Приклад 5.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для кулі має наступний розв'язок:

$$U(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n,k=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{nmk}j_n\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)Y_{nm}(\theta,\varphi)\exp\left(-a^2\frac{\mu_{nk}{}^2}{r_0{}^2}t\right),$$

$$A_{nmk}=\frac{2}{r_0{}^2\left[J_{n+3/2}\left(\mu_{nk}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int d\Omega Y_{nm}(\theta,\varphi)\int_0^{r_0} dr r^{3/2}J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{r_0}r\right)\varphi(r,\theta,\varphi).$$

**Приклад 6.** Тривимірна однорідна задача теплопровідності з межовими умовами першого роду для циліндра має наступний вигляд:

$$U(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n,k=1}^{\infty}A_{nmk}J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\times$$

$$\times\exp(im\varphi)\exp\left[-a^2\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{\mu_{mk}{}^2}{r_0{}^2}\right)t\right],$$

$$A_{nmk}=\frac{4}{\pi h r_0{}^2\left[J_{m+1}\left(\mu_{mk}\right)\right]^2}\times$$

$$\times\int_0^h dz \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\int_0^{2\pi} d\theta \cos\left(m\theta\right)\int_0^{r_0} dr r J_m\left(\frac{\mu_{mk}}{r_0}r\right)\varphi(r,\varphi,z).$$

## 8.7.Задача Коші для неоднорідного рівняння

Неоднорідне рівняння теплопровідності має вигляд

$$\boxed{\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}=a^2\Delta u(\mathbf{r},t)+f(\mathbf{r},t)}\,.$$

Межові умови, як і раніше, нехай будуть першого, другого або третього родів. Ми їх явно розглядати не будемо, оскільки нас цікавитиме лише часова залежність розв'язку. Початкова умова має вигляд

$$u(\mathbf{r},0)=\varphi(\mathbf{r})\ .$$

Використаємо для розв'язання перетворення Лапласа. Припускаючи існування Лаплас-зображення шуканої функції, маємо:

$$u(\mathbf{r},t)=:U(\mathbf{r},\omega),$$

$$u_t(\mathbf{r},t)=:\omega U(\mathbf{r},\omega)-u(\mathbf{r},0),$$

$$f(\mathbf{r},t)=:F(\mathbf{r},\omega).$$

Тут нова змінна $\omega$ є комплексною, на відміну від перетворення Фур'є, де вона є дійсною. Після підстановки знайдених зображень у рівняння, воно набуде вигляду

$$\omega U(\mathbf{r},\omega)-\varphi(\mathbf{r})=a^2\Delta U(\mathbf{r},\omega)+F(\mathbf{r},\omega),$$

або

$$\Delta U(\mathbf{r},\omega)-\frac{\omega}{a^2}U(\mathbf{r},\omega)=-\Phi(\mathbf{r},\omega),$$

де

$$\Phi(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{a^2}\left[F(\mathbf{r},\omega)+\varphi(\mathbf{r})\right].$$

У висліді ми отримали неоднорідне рівняння Гельмгольца. Якщо власні функції та власні числа цього рівняння позначити через $R_n(\mathbf{r})$, $\omega_n$ ($\Delta R_n(\mathbf{r})+\omega_n{}^2R_n(\mathbf{r})=0$), то його розв'язок має вигляд

$$U(\mathbf{r},\omega)=a^2\sum_n\frac{\Phi_n(\omega)}{\omega+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r}),$$

або

$$U(\mathbf{r},\omega)=\sum_n \frac{F_n(\omega)}{\omega+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r})+\sum_n \frac{\varphi_n}{\omega+a^2\omega_n{}^2}R_n(\mathbf{r}).$$

Тут коефіцієнти Фур'є визначаються стандартним чином:

$$\varphi_n=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}),$$

$$F_n(\omega)=\frac{1}{\|R_n\|^2}\int_V d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})R_n(\mathbf{r})F(\mathbf{r},\omega).$$

Для знаходження оригіналу, використаємо табличне зображення

$$\boxed{\exp(-\omega_n{}^2 t)=:\frac{1}{\omega+\omega_n{}^2}},$$

і властивість перетворення Лапласа під назвою зображення згортки:

$$\boxed{F_1(\omega)F_2(\omega)=:\int_0^t d\tau f_1(\tau)f_2(t-\tau)}.$$

Тоді,

$$\boxed{\begin{gathered}u(\mathbf{r},t)=\sum_n R_n(\mathbf{r})\int_0^t d\tau F_n(\tau)\exp\left[-a^2\omega_n{}^2(t-\tau)\right]+\\ +\sum_n \varphi_n R_n(\mathbf{r})\exp(-a^2\omega_n{}^2 t)\end{gathered}}.$$

Отриманий нами розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності складається з двох доданків. Перший з них описує вплив на теплові процеси у системі внутрішніх джерел або стоків тепла. Другий - описує процес вирівнювання температурного поля тіла, яке воно мало у початковий момент часу, і температури навколишнього середовища.

## 8.8. Задачі для самостійної роботи

### Варіант 1

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$ з теплоізольованою бічною поверхнею. На кінцях стрижня відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з

середовищем, температура якого задана. Стрижень зроблений з двох різних матеріалів, з'єднаних між собою у точці $x_0$ .

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x) , \quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t) , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x) , \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\nu_1(t) , \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\nu_2(t) .$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t) , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=u(l,t)=0 .$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0<x<x_0, \ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)_, \quad u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \ x_0<x<l, \ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x), \quad \lambda_b\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha_b u(l,t)=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t), \qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 2

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з середовищем з заданою температурою, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а на кінцях стрижня також відбувається конвективний теплообмін за законом

Н'ютона. Стрижень зроблений з двох різних матеріалів, з'єднаних між собою у точці $x_0$ .

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=u(l,t)=0\ .$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\nu_1(t)\ ,\qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\nu_2(t)\ .$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad \lambda_b\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha_b u(l,t)=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t),\qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 3

1. Поставити межову задачу про остигання тонкого кільця, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Початкова температура є довільною функцією координати і часу.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ,\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\nu(t),\quad u(l,t)=\mu(t).$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\ .$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)_,\quad u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad \lambda_b\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha_b u(l,t)=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t),\quad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 4

1. Поставити межову задачу про остигання тонкого кільця з теплоізольованою поверхнею. Початкова температура є довільною функцією координати і часу.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u(0,t)=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \; .$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \;\; 0<t<\infty \; ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\nu(t), \qquad u(l,t)=\mu(t) .$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t) \; , \quad 0<x<l, \;\; 0<t<\infty \; ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0 , \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 .$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; 0<x<x_0, \;\; t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \;\; \lambda_a\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha_a u(0,t)=0 ,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \; x_0<x<l , \; t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x), \;\; \lambda_b\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha_b u(l,t)=0 ,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t), \qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t) .$$

**Варіан**т 5

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з вередовищем з заданою температурою, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а на кінцях стрижня також відбувається конвективний теплообмін з середовищем за законом Н'ютона.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \;\; 0<t<\infty \; ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}=0 \ .$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=\mu(t)\ , \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\nu(t).$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \ .$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \lambda_a\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha_a u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x), \quad v(l,t)=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t), \qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіант 6**

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з вередовищем з заданою температурою, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а на кінці стрижня подається ззовні заданий тепловий потік.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0 \ .$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=\mu(t)\ ,\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\nu(t).$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}=0\ .$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lambda_a\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha_a u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad \frac{\partial v(l,t)}{\partial x}=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t),\qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 7

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін за законом Н'ютона з вередовищем з заданою температурою, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а кінці стрижня підтримуються при заданній температурі.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=\mu_1(t)\ , \quad u(l,t)=\mu_2(t).$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0, \quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x), \quad \frac{\partial v(l,t)}{\partial x}=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t), \qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 8

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а на кінцях стрижня відбувається конвективний теплообмін за законом Н’ютона з середовищем, температура якого задана.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ , \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0, \quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=\mu_1(t)\ , \quad u(l,t)=\mu_2(t).$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \lambda\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-\alpha u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0.$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x),\quad \frac{\partial v(l,t)}{\partial x}=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t),\qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 9

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а на кінці стрижня подається заданий тепловий потік.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=u(l,t),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\ ,\quad 0<x<l,\quad 0<t<\infty\ ,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=0, \quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

5. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$

$$v(x,0)=\psi(x), \quad v(l,t)=0,$$

$$u(x_0,t)=v(x_0,t), \qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

**Варіан**т 10

1. Поставити межову задачу про визначення температури стрижня $0<x<l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією температури, а кінці стрижня підтримуються при заданній температурі.

2. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t), \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=0, \quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

3. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u(0,t)=u(l,t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

4. $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \quad 0<x<l, \quad 0<t<\infty,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0, \quad \lambda\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}+\alpha u(l,t)=0.$$

5.
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0<x<x_0,\ t>0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=0,$$
$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=b^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ x_0<x<l,\ t>0,$$
$$v(x,0)=\psi(x),\quad v(l,t)=0,$$
$$u(x_0,t)=v(x_0,t),\qquad \lambda_a u_x(x_0,t)=\lambda_b v_x(x_0,t).$$

## Глава 9.Рівняння Шредінгера

Рівняння Шредінгера має вигляд

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\hat{H}\,u(\mathbf{r},t)}.$$

Тут $u(\mathbf{r},t)$ - хвильова функція, що має сенс амплітуди ймовірності знаходження системі у тому чи іншому квантовомеханічному стані; $\mathbf{r}$ - радіус вектор системи, кількість його компонент збігається з кількістю її степенів свободи; $t$ - час; $\hbar$ - стала Планка; $\hat{H}$ - оператор Гамільтона. Оператор Гамильтона має структуру, яка є частинним випадком структури оператора Штурма-Ліувіля. Як наслідок, у стаціонарному випадку рівняння Шредінгера є одним з варіантів рівняння Штурма-Ліувіля. Межові умови для рівняння Шредінгера мають характер такої поведінки розв'язку, що гарантує інтегрованість його квадрату у області, де він шукається. Для необмеженої області інших межових умов нема. Для обмеженої області вони можуть доповнюватись межовими умова на межі області. В останньому випадку рівняння Шредінгера з межовими умова першого, другого або третього родів утворює типову задачу Штурма-Ліувіля. При цьому умова інтегрованості квадрату розв'язку не впливає на властивості власних чисел та власних функцій, але дозволяє його знайти разом з коефіцієнтами, на відміну від задачі Штурма-Ліувіля, де власні функції знаходяться лише з точністю до довільних коефіцієнтів. Для необмеженої області єдиною граничною точкою області є нескінченно віддалена точка. Для виконання умови інтегрованості квадрату розв'язку необхідне його прямування до нуля у її околі. А це є, фактично, межова умова першого роду у нескінченно віддаленій точці. Тобто і у цьому випадку рівняння Шредінгера разом з такою граничною умовою утворює задачу Штурма-Ліувіля.

## 9.1.Перша межова задача для одновимірного рівняння

Розв’яжемо наступну першу межову задачу:

$$\boxed{\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\lambda u(x)=0}, \quad x\subset\lfloor -a,a\rfloor$$

$$\boxed{u(-a)=u(a)=0}.$$

Така задача описує, наприклад, поведінку мікрочастинки масою $m$, що знаходиться між двома непроникними стінками. Вона не може вийти за межі цих стінок, а між останніми на неї не діє зовнішнє поле. При цьому хвильова функція мікрочастинки визначається так

$$\Psi(x,t)=u(x)\exp(-iE/\hbar).$$

Тут її кінетична енергія $E=\hbar^2\lambda/2m$.

Дана задача є типовою задачею Штурма – Ліувіля. Звідси випливають всі загальні властивості власних чисел та власних функцій зокрема те, що нуль не є власним числом задачі. Загальний розв’язок рівняння, як було показано раніше, можна записати у вигляді

$$u(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Підстановка межових умов дає наступну систему рівнянь для визначення спектру власних чисел та власних функцій рівняння, та однієї з довільних сталих у його загальному розв’язку:

$$A\cos(-\sqrt{\lambda}a)+B\sin(-\sqrt{\lambda}a)=0,$$

$$A\cos(\sqrt{\lambda}a)+B\sin(\sqrt{\lambda}a)=0.$$

Рівняння для знаходження власних чисел ми одержимо з умови існування ненульового розв’язку цієї системи рівнянь

$$\begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}a) & -\sin(\sqrt{\lambda}a) \\ \cos(\sqrt{\lambda}a) & \sin(\sqrt{\lambda}a) \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\cos(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

що еквівалентне системі рівнянь:

$$\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0, \qquad \sin(\sqrt{\lambda}a) = 0.$$

У висліді спектр власних чисел складається з нулів косинуса:

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 / 4a^2, \quad n = 1,3,\dots \ ,$$

та нулів синуса:

$$\lambda_n = \pi^2 n^2 / 4a^2, \quad n = 2,4,\dots \ .$$

Сукупний спектр власних значень можна записати так:

$$\boxed{\lambda_n = \pi^2 n^2 / 4a^2}, \quad n = 1,2,3,4,\dots \ .$$

Оскільки власні числа задачі безпосередньо пов’язані з можливими значеннями енергії мікрочастинки, то дискретний спектр власних чисел породжує дискретний набір значень енергії, які тільки і може мати мікрочастинка, а саме:

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}}, \quad n = 1,2,3,\dots \ .$$

Зазначимо, що у відсутності непроникних стінок енергія мікрочастинки могла б приймати довільні невід'ємні значення.

Для знаходження власних функцій представимо систему рівнянь так:

$$A\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0, \qquad B\sin(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

Це можна зробити спочатку склавши обидва рівняння, а потім віднявши від першого друге. З цієї системи рівнянь випливає, що для власних чисел, що є нулями косинуса, відмінним від нуля, буде лише коефіцієнт $A$. А для власних чисел, що є нулями синуса, відмінним від нуля, буде лише коефіцієнт $B$. У висліді відповідні власні функції матимуть вигляд:

$$\boxed{u_n(x) = \cos(n\pi/2)}, \quad n = 1,3,\dots,$$

$$\boxed{u_n(x)=\sin(n\pi/2)}. \quad n=2,4,....$$

Тут, для простоти, ми не опускаємо у власних функцій довільні сталі.

Власні функції є або парними, або непарними. Відповідні їм власні числа за величиною слідують почергово. За власним числом, що відповідає парній власній функції йде власне число, що відповідає непарній власній функції і навпаки. Оскільки квадрат модуля хвильової функції має сенс густини ймовірності знаходження мікрочастинки у даній точці простору, то у даній задачі існує можливість знаходження довільної сталої з умови нормування

$$\boxed{\int_{-a}^{a} dx\left|u_n(x)\right|^2=1}.$$

## 9.2.Потенціал з прямокутним профілем

Розглянемо наступну змішану межову задачу:

$$\boxed{\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\lambda u(x)=0}, \quad x\subset\left[-a,-\varepsilon\right],$$

$$\boxed{\frac{d^2v(x)}{dx^2}+\kappa v(x)=0}, \quad x\subset(-\varepsilon,\varepsilon),$$

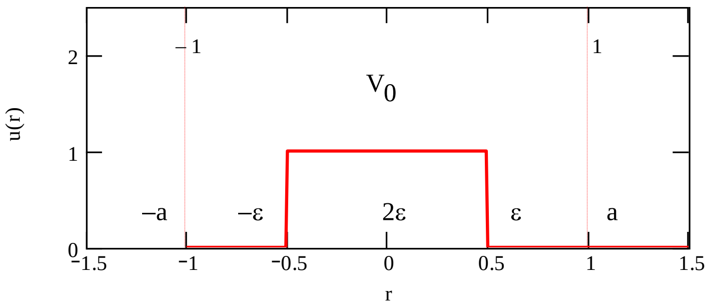
$$\boxed{\frac{d^2u(x)}{dx^2}+\lambda u(x)=0}, \quad x\subset\left[\varepsilon,a\right],$$

$$u(-a)=0\,, \quad u(a)=0\,,$$
$$u(-\varepsilon)=v(-\varepsilon), \qquad u(\varepsilon)=v(\varepsilon),$$
$$du(-\varepsilon)/dx=dv(-\varepsilon)/dx, \qquad du(\varepsilon)/dx=dv(\varepsilon)/dx,$$

Перші дві умови є однорідними межовими умовами першого роду. Решта межових умов є умовами спряження. Вони забезпечують неперервність функції та її першої похідної при переході через границю.

Наведена задача описує поведінку мікрочастинки, що знаходиться у нескінченно глибокій потенційній ямі. Посередині цієї потенційної ями знаходиться потенційний бар'єр шириною $2\varepsilon$ та висотою $V_0$

($V = 2mV_0 / \hbar$). Як і раніше, повна енергія мікрочастинки поза бар'єром (кінетична) $E = \hbar^2 \lambda / 2m$, повна енергія мікрочастинки всередині бар'єру (сума кінетичної та потенційної) $E = \hbar^2 \kappa / 2m + V_0$.




**Малюнок 20.***Прямокутний потенційний бар'єр*

Наведена задача хоча і нагадує задачу Штурма-Ліувіля, але не є такою через наявність межових умов спряження, тому власні числа і власні функції цієї задачі будуть мати дещо відмінні властивості від таких для задачі Штурма-Ліувіля.

Загальний розв'язок рівняння поза бар'єром, як було показано раніше, можна записати так

$$u(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Аналогічно можна записати загальний розв'язок і для області бар'єру

$$v(x) = C\cos(\sqrt{\kappa}x) + D\sin(\sqrt{\kappa}x).$$

Підстановка розв'язків у межові умови дасть наступні рівняння:

$$A\cos(-\sqrt{\lambda}a) + B\sin(-\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

$$A\cos(-\sqrt{\lambda}\varepsilon) + B\sin(-\sqrt{\lambda}\varepsilon) =$$
$$= C\cos(-\sqrt{\kappa}\varepsilon) + D\sin(-\sqrt{\kappa}\varepsilon),$$

$$\sqrt{\lambda}[-A\sin(-\sqrt{\lambda}\varepsilon) + B\cos(-\sqrt{\lambda}\varepsilon)] =$$
$$= \sqrt{\kappa}[-C\sin(-\sqrt{\kappa}\varepsilon) + D\cos(-\sqrt{\kappa}\varepsilon)],$$

$$C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon) + D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon) =$$
$$= F\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + G\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon),$$

$$\sqrt{\kappa}[-C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon) + D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)] =$$
$$= \sqrt{\lambda}[-F\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon) + G\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon)],$$

$$F\cos(\sqrt{\lambda}a)+G\sin(\sqrt{\lambda}a)=0.$$

Цю систему рівнянь можна дещо спростити за рахунок першого і останнього рівнянь. Дійсно, з першого рівняння

$$A=Btg(\sqrt{\lambda}a),$$

з останнього

$$F=-Gtg(\sqrt{\lambda}a).$$

Отже, система рівнянь набере вигляду:

$$B[tg(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon)-\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon)]=$$
$$=C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon),$$
$$\sqrt{\lambda}B[tg(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon)+\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon)]=$$
$$=\sqrt{\kappa}[C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)],$$
$$C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)=$$
$$=-G[tg(\sqrt{\lambda}a)\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon)-\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon)],$$
$$\sqrt{\kappa}[-C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)]=$$
$$=\sqrt{\lambda}G[tg(\sqrt{\lambda}a)\sin(\sqrt{\lambda}\varepsilon)+\cos(\sqrt{\lambda}\varepsilon)],$$

або

$$\frac{B\sin[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}=C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon),$$

$$\frac{B\sqrt{\lambda}\cos[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}=\sqrt{\kappa}[C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)],$$

$$C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)=\frac{-G\sin[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$\sqrt{\kappa}[-C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)]=\frac{\sqrt{\lambda}G\cos[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}.$$

Останню систему рівнянь можна скоротити ще на два рівняння, якщо за допомогою першого і останнього з них виключити коефіцієнти $B,G$. Тоді система набере вигляду:

$$\sqrt{\lambda}ctg[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]=\sqrt{\kappa}\,\frac{C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}{C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)},$$

$$\sqrt{\lambda}ctg[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]=\sqrt{\kappa}\,\frac{C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}{C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}.$$

Оскільки ліві частини цих рівнянь рівні, то рівні і їх праві частини

$$\frac{C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}{C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}=\frac{C\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}{C\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)}$$

Останнє можливе лише для $C=0,\ D\neq 0$, або $C\neq 0,\quad D=0$, або $C=0,\quad D=0$. В іншому випадку ми маємо лише нульові розв’язки вихідної системи рівнянь. Варіант $C\neq 0,\ D\neq 0$ очевидно неможливий. Отже, власні функції в області бар’єру можуть бути або парними або непарними. В першому випадку система рівнянь набере вигляду:

$$\frac{B\sin[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}=-D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon),$$

$$\frac{B\sqrt{\lambda}\cos[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}=\sqrt{\kappa}D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)],$$

$$D\sin(\sqrt{\kappa}\varepsilon)=\frac{-G\sin[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)},$$

$$\sqrt{\kappa}D\cos(\sqrt{\kappa}\varepsilon)=\frac{\sqrt{\lambda}G\cos[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]}{\cos(\sqrt{\lambda}a)}$$

і в області $[-\varepsilon,\varepsilon]$ матиме непарні власні функції. З першого і третього, або другого і четвертого рівнянь цієї системи випливає, що $B=G$. Використовуючи зв’язок між $A$ і $B$, та $F$ і $G$, одержимо, що $A=-F$. Оскільки розв’язки в областях $[-a,-\varepsilon]$ і $[\varepsilon,a]$ мають збігатись, то це можливо лише для $A=F=0$. Отже і в областях $[-a,-\varepsilon]$, $[\varepsilon,a]$ система рівнянь матиме лише непарні розв’язки. Таким чином, для зазначеного випадку матимемо такі власні функції

$$\boxed{u_n(x)=B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)},\quad x\subset[-a,-\varepsilon],$$

$$\boxed{v_n(x)=D_n\sin(\sqrt{\kappa_n}\,x)},\quad x\subset(-\varepsilon,\varepsilon),$$

$$\boxed{u_n(x)=G_n\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x)},\quad x\subset[\varepsilon,a].$$

У другому випадку $C \neq 0, \quad D = 0$. Ненульові розв'язки вихідної системи рівнянь будуть парними функціями одночасно в усіх трьох областях:

$$\boxed{u_n(x) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)}, \quad x \subset [-a, -\varepsilon],$$

$$\boxed{v_n(x) = C_n \cos(\sqrt{\kappa_n}\, x)}, \quad x \subset [-\varepsilon, \varepsilon],$$

$$\boxed{u_n(x) = F_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x)}, \quad x \subset [\varepsilon, a].$$

Отже і у даному випадку межових умов спряження, система власних функцій буде складатись з парних і непарних власних функцій.

Якщо розглядати стан мікрочастинки як у середині бар'єру, так і поза ним при одній і тій самій енергії, то існує наступний взаємно однозначний зв'язок між власними числами в областях поза бар'єром та у межах бар'єру

$$\hbar^2 \lambda_n / 2m = \hbar^2 \kappa_n / 2m + V_0.$$

Звідси випливає, що якщо енергія частинки поза бар'єром, яка є, очевидно, додатною, менша від висоти бар'єру, тобто

$$\hbar^2 \lambda_n / 2m < V_0,$$

то доданок $\hbar^2 \kappa_n / 2m$ не може бути додатним. Останнє можливо лише для від'ємних власних значень $\kappa_n$.

Якщо ж енергія мікрочастинки поза бар'єром більша за висоту бар'єру, то власні числа $\kappa_n$ теж будуть додатними. Почнемо розгляд саме з цього випадку. Для конкретного знаходження власних чисел перепишемо систему рівнянь так:

$$C\left[\sqrt{\kappa}\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon) - \sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\right] +$$

$$+ D\left[\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)\right] = 0,$$

$$C\left[\sqrt{\kappa}\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon) - \sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\right] -$$

$$- D\left[\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)\right] = 0.$$

Власні числа, як завжди, будуть розв’язками рівняння, яке виникає з умови рівності визначника даної однорідної системи нулю. Після розкриття визначника шукане рівняння матиме вигляд:

$$\left|\sqrt{\kappa}\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-\sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\right|*$$
$$*\left[\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)\right]=0.$$

Останнє рівняння еквівалентне наступним двом:

$$\sqrt{\kappa}\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)-\sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]=0,$$
$$\sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\kappa}\varepsilon)+\sqrt{\kappa}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)]=0.$$

Перше з цих рівнянь дає власні числа, що відповідають парним власним функціям, друге – непарним. Ці рівняння, безумовно, повинні розв’язуватись разом з рівнянням

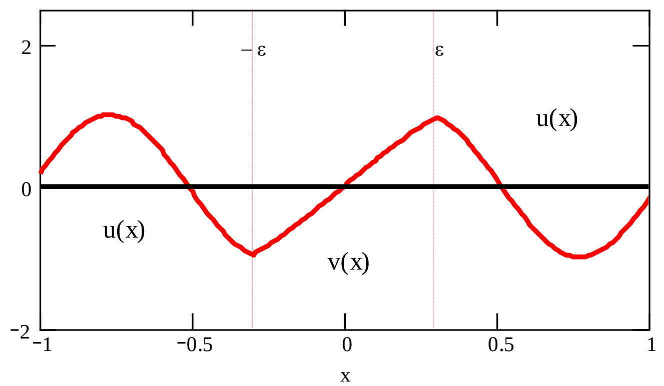
$$\hbar^2\lambda/2m=\hbar^2\kappa/2m+V_0.$$

Очевидно, у загальному випадку, ці рівняння можуть бути розв’язаними лише чисельно. Разом з тим, важливі якісні результати можна одержати їх не розв’язуючи. Для додатних власних чисел $\kappa_n$ (повна енергія мікрочастинки більша за висоту потенційного бар’єру) власні функції мікрочастинки будуть якісно такими як і поза бар’єром:

$$\boxed{v_n(x)=C_n\cos(\sqrt{\kappa_n}x)},$$

або

$$\boxed{v_n(x)=D_n\sin(\sqrt{\kappa_n}x)}.$$




**Малюнок 21.***Одна з непарних власних функцій у випадку, коли повна енергія частинки перевищує висоту бар'єру. Вертикальні лінії позначають межі бар'єру*

Для від'ємних власних чисел $\kappa_n$ (повна енергія мікрочастинки менша висоти потенційного бар'єру) власні функції вже не будуть мати осцилюючий характер, тобто:

$$\boxed{v_n(x) = F_n \cosh(\sqrt{|\kappa_n|}x)},$$

або

$$\boxed{v_n(x) = iD_n \sinh(\sqrt{|\kappa_n|}x)}.$$

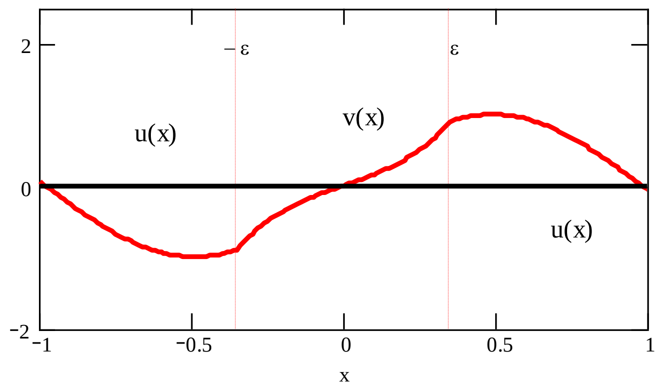
У цьому випадку, використавши співвідношення:

$$\boxed{\tan\left(i\sqrt{|k|}\varepsilon\right) = i\tanh\left(\sqrt{|k|}\varepsilon\right)},$$

трансцендентні рівняння для знаходження власних чисел можна записати так:

$$\sqrt{|\kappa|}\tanh(\sqrt{|\kappa|}\varepsilon) + \sqrt{\lambda}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)] = 0,$$
$$\sqrt{\lambda}\tanh(\sqrt{|\kappa|}\varepsilon) + \sqrt{|\kappa|}\cot[\sqrt{\lambda}(a-\varepsilon)] = 0.$$

Обидві власні функції досягають максимального значення у межових точках бар'єру і експоненційно спадають при наближенні до його центру. Оскільки квадрат модуля власної (хвильової) функції має сенс густини ймовірності знаходження мікрочастинки у відповідній точці простору, то відмінність від нуля власної функції задачі всередині бар'єру означає скінчену ймовірність знаходження тут мікрочастинки. Зазначимо, що класична частинка ні за яких обставин знаходитись всередині потенційного бар'єру не може.




**Малюнок 22.** *Одна з непарних власних функцій у випадку, коли повна енергія частинки менша за висоту бар'єру. Вертикальні лінії позначають межі бар'єру*

## 9.3.Гармонійний осцилятор

Знайдемо власні функції та власні числа наступної межової задачі:

$$\boxed{\frac{d^2u(x)}{dx^2}+(k-\lambda^2x^2)u(x)=0}, \quad x\subset[-\infty,\infty].$$

В якості межової умови візьмемо умову приналежності розв'язку до простору $L_2(-\infty,\infty)$. Оскільки функція $u(x)$ матиме сенс хвильової функції мікрочастинки, то остання межова умова ще має сенс умови нормування

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2dx=1}.$$

Принциповим моментом цієї умови є збіжність відповідного інтегралу, тобто приналежності розв'язку до простору $L_2(-\infty,\infty)$, не принциповим – конкретне значення інтегралу. Оскільки необхідною умовою існування такого інтегралу є прямування відповідної функції до нуля при наближенні до нескінченності, то у даній задачі можна скористатись і такою граничною умовою $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x)=0$. Тоді наша межова задача стане типовою задачею Штурма-Ліувіля.

Фізичною інтерпретацією цієї задачі може бути рівняння Шредінгера для мікрочастинки, що знаходиться в полі гармонійної сили. Іншими словами, це є квантовий аналог рівняння гармонійних коливань матеріальної точки. Тут повна енергія мікрочастинки $E=\hbar^2\kappa/2m$, $\lambda=m\omega/\hbar$, $\omega$ - частота коливань гармонійного потенціалу, що діє на мікрочастинку $V(x)=m\omega^2x^2/2$ (у класичному випадку – частота коливань зовнішньої гармонійної сили).

До розв'язання рівняння можна застосувати метод степеневих рядів, але відповідні рекурентні співвідношення для коефіцієнтів ряду будуть містити відразу три коефіцієнти і будуть достатньо складними. Простіше спочатку спростити рівняння. Для цього знайдемо асимптотику розв'язку для великих значень аргументу. Тоді у рівнянні можна знехтувати малим при великих значеннях аргументу доданком і воно набере вигляду

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2}-\lambda^2x^2u(x)=0.$$

Спробуємо шукати його розв'язок у вигляді

$$u(x) = \exp(\pm \lambda x^2 / 2)$$

Оскільки для великих значень аргументу

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = -\lambda^2 x^2 u(x) \pm \lambda u(x) = -\lambda^2 x^2 u(x),$$

то наша спроба вгадати розв'язок виявилась вдалою. З двох лінійно незалежних розв'язків, межовим умовам задовольняє лише один, а саме

$$u(x) = \exp(-\lambda x^2 / 2).$$

Інший в околі нескінченно віддаленої точки прямуватиме до нескінченості. З урахуванням отриманого результату, для довільних значень аргументу розв'язок вихідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$u(x) = v(x)\exp(-\lambda x^2 / 2).$$

Після підстановки цієї формули у рівняння воно відносно нової невідомої функції $v(x)$ набере вигляду

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} - 2\lambda x \frac{dv(x)}{dx} + (k - \lambda) v(x) = 0,$$

або

$$\frac{d^2 v(y)}{dy^2} - 2y \frac{dv(y)}{dy} + (k / \lambda - 1) v(y) = 0,$$

де введена нова незалежна змінна $y = \sqrt{\lambda} x$.

Отримане рівняння є рівнянням Ерміта. Його власними числами є

$$k / \lambda - 1 = 2n,$$

Звідси для можливих значень повної енергії системи одержимо:

$$\boxed{E_n = \hbar\omega(n + 1/2)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots\ .$$

Власними функціями цього рівняння є лінійна комбінація поліномів Ерміта та функцій Ерміта

$$v_n(\sqrt{\lambda} x) = A_n H_n(\sqrt{\lambda} x) + B_n h_n(\sqrt{\lambda} x).$$

Повертаючись до вихідної невідомої функції, матимемо:

$$u_n(x) = A_n H_n(\sqrt{\lambda} x)\exp(-\lambda x^2 / 2) +$$
$$+ B_n h_n(\sqrt{\lambda} x)\exp(-\lambda x^2 / 2).$$

Другий доданок для великих за модулем значень аргументу розбігається і може бути сумісним з граничною умовою лише у випадку $B_n = 0$.

Отже, власні функції рівняння Шредінгера для гармонійного осцилятора мають вигляд

$$\boxed{u_n(x)=H_n(\sqrt{\lambda}x)\exp(-\lambda x^2/2)}\,.$$

Довільна стала (для простоти ми її у виразі для власних функцій опустили) може бути знайдена з умови нормування, яка одночасно є і граничною умовою. Власні функції відповідно до властивостей поліномів Ерміта складаються з парних та непарних функцій.

## 9.4.Рівняння Шредінгера для атома водню

Знайдемо власні функції та власні числа наступної межової задачі (для її запису використані сферичні координати):

$$\boxed{\Delta u(r,\theta,\varphi)+\left[\lambda+\frac{a}{r}\right]u(r,\theta,\varphi)=0}\,,$$

$$r\subset[0,\infty),\theta\subset[0,\pi],\ \varphi\subset[0,2\pi].$$

Ця задача має яскраво виражену сферичну симетрію, оскільки сферично симетричним є потенціал, у полі якого знаходиться електрон. В якості межової умови візьмемо умову приналежності розв'язку до простору функцій з інтегрованим квадратом. Оскільки в цій задачі функція $u(r,\theta,\varphi)$ матиме сенс хвильової функції мікрочастинки, то остання межова умова має ще і сенс умови нормування:

$$\boxed{\int\limits_0^\infty drr^2\int\limits_0^\pi d\theta\sin\theta x\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left|u(r,\theta,\varphi)\right|^2=1}\,.$$

Ще однією граничною умовою є інваріантність розв'язку відносно повороту системи на кут $2\pi$

$$u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta+2\pi,\varphi).$$

Зауважимо, що з умови інтегрованості квадрату розв'язку випливає його обмеженість, тому цю умову ми явно записувати не будемо. Повна енергія системи визначається так: $E=\hbar^2\lambda/2m$. Крім того, комбінація універсальних сталих $a=\hbar^2/me^2$ знову є універсальною сталою, що має розмірність довжини і називається сталою Бора. Надалі нами буде використовуватись ще одна комбінація універсальних сталих $E_0=e^2/a=e^4m/\hbar^2$, що має розмірність енергії.

Розглянуте рівняння є рівнянням Шредінгера для атома водню, який складається з протона і електрона. Масу протона порівняно з масою електрона будемо вважати нескінченою, а створюване ним поле кулонівським з потенціалом $V(r)=e/r$ (початок системи координат суміщений з ядром). Власні числа задачі формують можливі енергетичні стани атома водню, а власні функції - описують поведінку електрона.

Для розв'язання задачі зручно перейти до безрозмірних змінних $\rho=r/a$, $\varepsilon=E/E_0$. Тоді рівняння набере вигляду

$$\Delta u(\rho,\theta,\varphi)+\left[\varepsilon+\frac{1}{\rho}\right]u(\rho,\theta,\varphi)=0.$$

Записавши явно у полярній системі координат оператор Лапласа матимемо наступне рівняння:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u(\rho,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\left[\varepsilon+\frac{1}{\rho}\right]u(\rho,\theta,\varphi)=0\ .$$

Будемо шукати розв'язок рівняння методом поділу змінних, представивши шукану функцію у вигляді добутку

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\mathrm{X}(\rho)\Upsilon(\theta,\varphi).$$

Після підстановки цього розв'язку у рівняння, одержимо

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\mathrm{X}(\rho)}{d\rho}\right)+\frac{1}{\Upsilon(\theta,\varphi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+.$$

$$+\frac{1}{\Upsilon(\theta,\varphi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\rho^2\left[\varepsilon+\frac{1}{\rho}\right]=0\,.$$

Тепер легко відділити кутову частину

$$\frac{1}{\mathrm{X}(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\mathrm{X}(\rho)}{d\rho}\right)+\rho^2\left[\varepsilon+\frac{1}{\rho}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\Upsilon(\theta,\varphi)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\Upsilon(\theta,\varphi)\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=\mu\ .$$

і звести рівняння Шредінгера до системи двох наступних рівнянь

$$\boxed{\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\mathrm{X}(\rho)}{d\rho}\right)+\left[\varepsilon+\frac{1}{\rho}-\frac{\mu}{\rho^2}\right]\mathrm{X}(\rho)=0},$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Upsilon(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu\Upsilon(\theta,\varphi)=0}.$$

Друге рівняння цієї системи ми детально розглядати не будемо оскільки, як вже зазначалось вище, єдиними скінченими та неперервними його розв'язками є сферичні функції $\Upsilon_{nm}(\theta,\varphi)$, а власними числами - $\mu_n = n(n+1)$. Перше рівняння значно спроститься, якщо в ньому перейти до нової невідомої функції

$$R(\rho)=\sqrt{\rho}\mathrm{X}(\rho).$$

Перше рівняння після цієї підстановки і підстановки власних чисел другого рівняння набере вигляду

$$\frac{d^2R_n(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_n(\rho)}{d\rho}+\left[2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{s^2}{4\rho^2}\right]R_n(\rho)=0,$$

де $s=2n+1$. Наступне спрощення може бути досягнуте при заміні незалежної змінної

$$x=\rho\sqrt{-8\varepsilon}.$$

У висліді

$$x\frac{d^2R_s(x)}{dx^2}+\frac{dR_s(x)}{dx}-\left(\frac{x}{4}+\frac{s^2}{4x}\right)R_s(x)+\chi R_s(x)=0,$$

де $\chi=1/\sqrt{-2\varepsilon}$.

Наступне спрощення цього рівняння можливе лише при використанні асимптотик розв'язку для малих і великих значень аргументу. Розглянемо спочатку великі значення аргументу. Відкинувши у рівнянні малі для великих значень аргументу члени, матимемо

$$\frac{d^2R_s(x)}{dx^2}-\frac{1}{4}R_s(x)=0,$$

розв'язком якого буде функція

$$R_s(x)=\exp(-x/2).$$

Розглянемо тепер малі значення аргументу. Відкинувши у рівнянні малі для малих значень аргументу члени, матимемо

$$\frac{dR_s(x)}{dx}-\frac{s^2}{4x}R_s(x)=0,$$

розв'язком якого є функція

$$R_s(x)=x^{s/2}.$$

Отже, розв'язок вихідного рівняння можна шукати у вигляді:

$$R_s(x)=x^{s/2}\exp(-x/2)L_s(x).$$

Після підстановки цього виразу у вихідне рівняння, останнє набере вигляду:

$$\boxed{x\frac{d^2L_s(x)}{dx^2}+(s+1-x)\frac{dL_s(x)}{dx}+\left(\chi-\frac{s+1}{2}\right)L_s(x)=0}\,.$$

Власними функціями цього рівняння є узагальнені поліноми Лагера $L_k^{\,s}(x)$, а власні числа задаються співвідношенням:

$$\chi_{ks}=k+(s+1)/2=k+n+1,\quad k,n=0,1,2,\dots\,.$$

Оскільки сума довільних цілих чисел є знову ціле число, то позначивши цю суму через $n$, $n=1,2,3,\dots$, матимемо

$$\boxed{\chi_n=n}\,.$$

Для можливих значень енергії атома водню одержимо вираз

$$E_n=E_0/2n^2\,.$$

Видно, що спектр власних значень рівняння Шредінгера для атому водню виявився виродженим. Він залежить лише від головного квантового числа $n$ і не залежить від орбітального та магнітного квантових чисел $l$ і $m$.

Наведемо вирази для нормованих власних функцій вихідної задачі

$$\boxed{u_{mnl}(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m\pi(l+m)!}}\mathrm{X}_{nl}(\rho)Y_{lm}(\theta,\varphi)}\,,$$

де радіальна функція

$$\boxed{\mathrm{X}_{nl}(\rho)=\left(\frac{2}{n}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}}\left(\frac{2\rho}{n}\right)^{l}\exp\left(-\frac{\rho}{n}\right)L_{l-n-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right)}.$$

Наведемо декілька виразів для цієї функції. Для того, щоб описати і воднеподібні атоми, ми вважатимемо валентність $z$ довільною. Для $z=1$ ми одержимо атом водню

$$\mathrm{X}_{10}(\rho)=2z^{3/2}\exp(-z\rho)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{20}(\rho)=\frac{1}{\sqrt{2}}z^{3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}z\rho\right)\left(1-\frac{1}{2}z\rho\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{21}(\rho)=\frac{1}{\sqrt{24}}z^{5/2}r\exp\left(-\frac{1}{2}z\rho\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{30}(\rho)=\frac{2}{3\sqrt{3}}z^{3/2}\exp\left(-\frac{1}{3}z\rho\right)\left(1-\frac{2}{3}z\rho+\frac{2}{27}z^{2}\rho^{2}\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{31}(\rho)=\frac{4}{27}\sqrt{\frac{2}{3}}z^{5/2}\rho\exp\left(-\frac{1}{3}z\rho\right)\left(1-\frac{1}{6}z\rho\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{32}(\rho)=\frac{4}{81\sqrt{30}}z^{7/2}\rho^{2}\exp\left(-\frac{1}{3}z\rho\right)\ ,$$

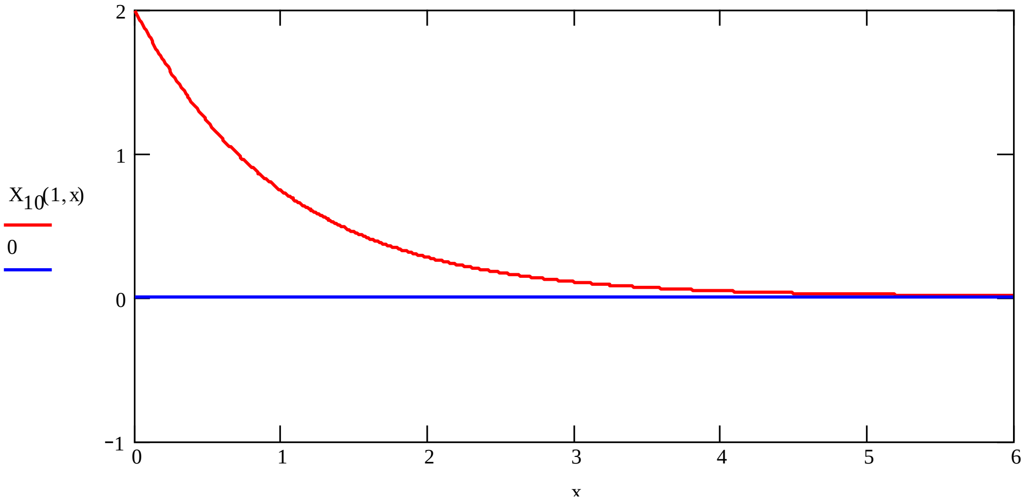
$$\mathrm{X}_{40}(\rho)=\frac{1}{4}z^{3/2}\exp\left(-\frac{1}{4}z\rho\right)\left(1-\frac{3}{4}z\rho+\frac{1}{8}z^{2}\rho^{2}-\frac{1}{192}z^{3}\rho^{3}\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{41}(\rho)=\frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{3}}z^{5/2}\rho\exp\left(-\frac{1}{4}z\rho\right)\left(1-\frac{1}{4}z\rho+\frac{1}{80}z^{2}\rho^{2}\right)\ ,$$

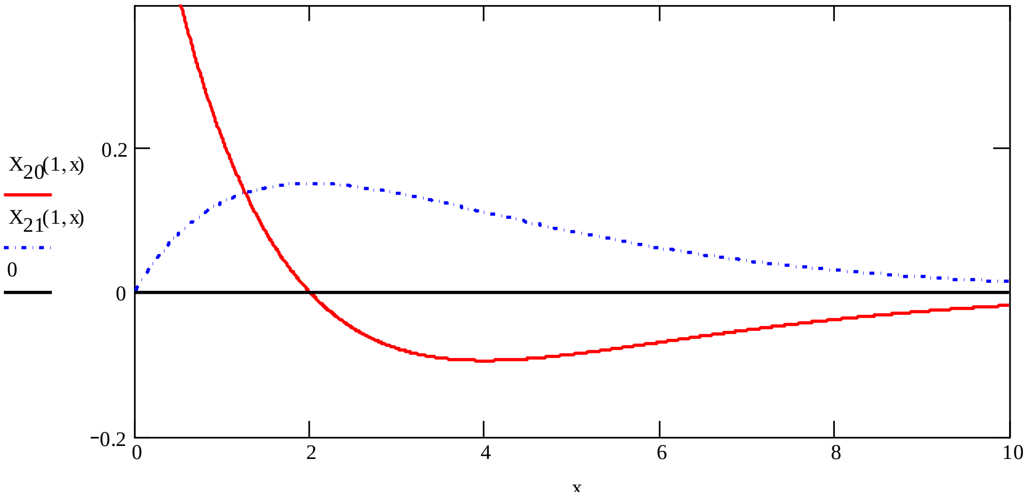
$$\mathrm{X}_{42}(\rho)=\frac{1}{64\sqrt{5}}z^{7/2}\exp\left(-\frac{1}{4}z\rho\right)\rho^{2}\left(1-\frac{1}{12}z\rho\right)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{43}(\rho)=\frac{1}{768\sqrt{35}}z^{9/2}\rho^{3}\exp\left(-\frac{1}{4}z\rho\right)\ .$$

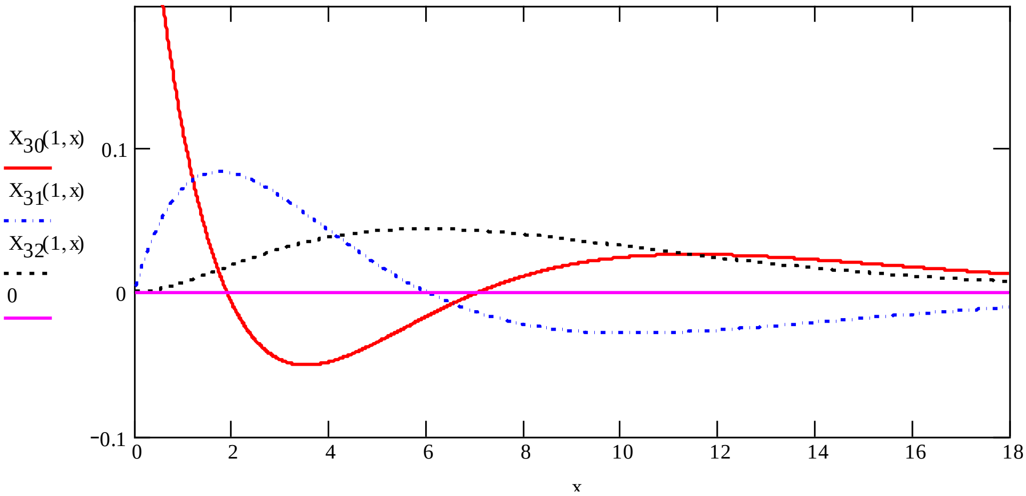
Видно, що густина ймовірності для електрона відмінні від нуля у центрі атома (ядрі) і досягає там максимума лише для $s$ - станів ($n=1,2,3,\ldots$) . Для решти станів вона дорівнює нулю і досягає свого максимуму на певній відстані від центра атома. Це добре видно на наступних малюнках



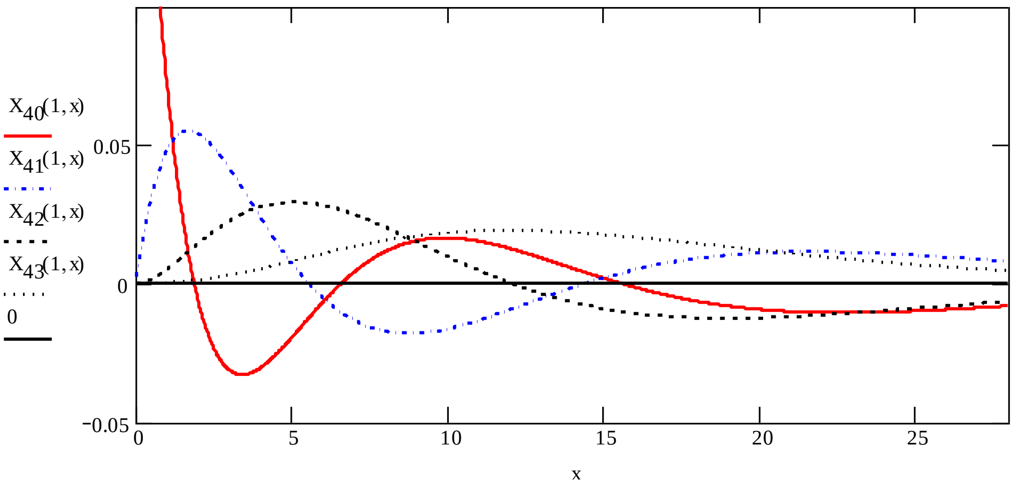

**Малюнок 23**




**Малюнок 24**




**Малюнок 25**




**Малюнок 26**

## Література


1. Свідзинський А. Математичні методи теоретичної фізики. - Київ: Видавництво імені Олени Теліги, 1998.
2. Вакарчук І.О. Квантова механіка. – Львів: Видавництво Львівського державного університету ім. І. Франка, 1998.
3. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. - Київ: Наукова думка, 1996.
4. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика, т.1,2. - Київ: Техніка, 1999.
5. Кошляков Н.С., Глинэр Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высшая школа 1970.
6. Маделунг Э. Математический аппарат физики.– Москва: Наука, 1968.

7. Мэтьюз Дж., Уоркер Р. Математические методы физики. – Москва: Атомиздат, 1972.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1977.
9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1 и 2. - Москва: Иностранная литература, 1960
10. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – Москва: Высшая школа, 1964.
11. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. – Москва: Наука, 1984.
12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 4, часть вторая. – Москва: Наука, 1981.
13. Беляев М.Н., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. – Киев: Вища школа, 1993.
14. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям.- Москва: Наука, 1979.
15. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Том 1. Москва: Мир, 1982.
16. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Том 2. Москва: Мир, 1984.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: специальные функции. – Москва: Наука, 1983.
18. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. – Москва: Мир, 1985.
19. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1982.
20. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – Москва: Наука, 1984.
21. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высшая школа, 1985.
22. Погорелов А.И.Тепломассообмен (основы теории и расчета). - Одесса:Маяк, 1999.
23. Джефрис Г.,Свирас В.Методы математической физики. Том 3.- Москва: Мир, 1978.
24. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В.Элементы теории функций и функционального анализа. - Москва: Наука, 1972.
25. Владимиров В.С.Уравнения математической физики. - Москва: Наука,1972.
26. Флюгге З.Задачи по квантовой механике. Том 1. - Москва: Мир, 1974.
27. Лойцянский Л.Г.Механика жидкости и газа. - Москва: Государственное издательство технико - технической литературы, 1957.
28. Будак Б.М.,Самарский А.А.,Тихонов А.Н.Сборник задач по математической физике. - Москва: Наука, 1980.