

В.Т. Швець

**Вища математика:
теорія функцій комплексної
змінної**

Одеса 2014

ББК 22.161я73
УДК 517(0.75.8)

Швець Валерій Тимофійович
Вища математика: теорія функцій комплексної змінної
Одеса. Видавництво БМВ, 2014 - 284 с.

Навчальний посібник є вступом у теорію функцій комплексної змінної і в цілому відповідає програмі з вищої математики для технічних вузів. Від аналогічних підручників для класичних університетів він відрізняється ширшим охопленням проблематики комплексного аналізу і меншою строгістю викладення матеріалу. Доводяться лише засадничі для теорії теореми. Підбір матеріалу для навчального посібника зорієнтований на подальше використання комплексного аналізу при розв'язанні задач математичної фізики, зокрема теорії інтегральних перетворень. Тому центральне місце присвячене теорії інтегрування аналітичних функцій. Вперше у навчальній літературі для технічних вузів розглянуто інтегрування функцій, що мають особливості на дійсній осі, або близько від неї. Вперше розглянуті кватерніони та бікватерніони, як подальші узагальнення комплексних чисел, і їх використання в теоретичній фізиці. Посібник містить велику кількість різноманітних задач і їх розв'язань, так само як і велику кількість задач, призначених для самостійної роботи. Це робить його зручним для використання студентами у всіх формах навчальної роботи з вищої математики.

Посібник розрахований на студентів та аспірантів технічних вузів.

Автор:

доктор фіз.-мат. наук, проф. В.Т.Швець

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, проф. С.В. Козицький

доктор техн. наук, проф. В.Х.Кирилов

© В.Т.Швець 2014

Передмова

Поява цього навчального відбиває збережену автором протягом всього свого життя любов до комплексного аналізу. Комплексний аналіз розуміється як фундамент і сучасної вищої математики, і сучасної теоретичної фізики, і всіх інших природничих та технічних наук. Без знання комплексного аналізу втрачає сенс будь-яка спроба розв'язання різноманітних задач математичної фізики. Традиційно, саме комплексний аналіз викликає найбільшу складність при вивченні студентами вищої математики у технічних вузах. Добре відомі ще з попередніх часів підручники з теорії функцій комплексної змінної переобтяжені доведеннями різноманітних теорем і є занадто великими за обсягом, що ускладнює їх використання у навчальному процесі. Автор має великий досвід у викладанні вищої математики у технічних вузах і прийшов до висновку, що оптимальний підручник для студентів, але не викладачів, є підручник, невеликий за обсягом, конкретний за змістом, лаконічний за викладанням і такий, що містить велику кількість різноманітних задач і їх розв'язань.

Даний навчальний посібник є вступом у теорію функцій комплексної змінної і в цілому відповідає програмі з вищої математики для технічних вузів. Від аналогічних підручників для класичних університетів він відрізняється ширшим охопленням проблематики комплексного аналізу і меншою строгістю викладення матеріалу. Доводяться лише засадничі для теорії теореми. Підбір матеріалу для навчального посібника зорієнтований на подальше використання комплексного аналізу при розв'язанні задач математичної фізики, зокрема теорії інтегральних перетворень. Тому центральне місце присвячене теорії інтегрування аналітичних функцій. Вперше у навчальній літературі для технічних вузів розглянуто інтегрування функцій, що мають особливості на дійсній осі, або близько від неї. Вперше розглянуті кватерніони та бікватерніони, як подальші

узагальнення комплексних чисел, і їх використання в теоретичній фізиці. Посібник містить велику кількість різноманітних задач і їх розв'язань, так само як і велику кількість задач, призначених для самостійної роботи. Це робить його зручним для використання у всіх формах навчальної роботи з вищої математики.

Зміст

Глава 1. Елементи комплексного аналізу.....	6
1.1. Геометрична інтерпретація комплексних чисел.....	7
1.2. Функція комплексної змінної.....	23
1.3. Основні елементарні функції комплексної змінної...32	
1.4. Диференціювання комплексних функцій.....	53
1.5. Особливі точки аналітичних функцій	70
1.6. Криві у комплексній площині	87
1.7. Конформні відображення	91
1.8. Інтегрування комплексних функцій.....	99
1.9. Кватерніони	127
1.10. Бікватерніони	134
1.11. Перетворення Лоренца	139
1.12. Кватерніони релятивістської механіки	147
1.13. Кватерніони електродинаміки	150
1.14. Задачі для самостійної роботи	156
Глава 2. Визначений інтеграл	169
2.1. Полюси. Дробоворациональні функції.....	169
2.2. Істотно особливі точки	171
2.3. Інтеграл Френеля	180
2.4. Точки галуження	182
2.5. Інтеграл від функції Фермі-Дірака	196
2.6. Полюси на дійсній осі	205
2.7. Обчислення сум. Формула Пуассона	224
2.8. Задачі для самостійної роботи	227
Література.....	232

Глава 1

Елементи комплексного аналізу

Найпростішою числовою множиною є множина N натуральних чисел $1, 2, \dots, n, \dots$ $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. Ці числа природним чином виникають при лічбі. Лише дві арифметичні операції над натуральними числами є такими, що їх результат також є натуральним числом. Це операції додавання і множення. Результат виконання всіх інших операцій над натуральними числами може бути вже числом не натуральним. Множина натуральних чисел є занадто бідна для пошуку розв'язків, приналежних цій множині, для будь-яких рівнянь.

Якщо результати виконання операції віднімання для всіх можливих натуральних чисел додати до множини натуральних чисел, то ми отримаємо множину цілих чисел $Z = \{\dots, n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, m, \dots\}$. Ця числова множина є замкненою вже відносно операцій додавання віднімання і множення але результат операції ділення двох цілих чисел все ще може не бути цілим числом. Така множина також занадто бідна для пошуку розв'язків, приналежних цій множині, для будь-яких рівнянь, оскільки розв'язок вже найпростішого з рівнянь - лінійного алгебраїчного рівняння з цілими або натуральними коефіцієнтами може не бути цілим числом.

Якщо до множини цілих чисел додати результати ділення всіх можливих цілих чисел, то ми отримаємо множину раціональних чисел $Q = \{m/n, m \in Z, n \in N\}$. Тобто множина раціональних чисел замкнена відносно всіх чотирьох арифметичних операцій. Запас цих чисел вже достатній для розв'язання лінійних алгебраїчних рівня з цілими або натуральними коефіцієнтами. Але вже розв'язання алгебраїчного рівняння другого степеню з цілими або натуральними коефіцієнтами можливе лише в обмеженій кількості випадків.

Множина раціональних чисел виявляється незамкненою відносно операції піднесення числа до степеню (здобування кореня) з показником степеню вигляду $1/n$, де n - натуральне число.

Якщо числам ставити у відповідність точки числової прямої, то точки, відповідні раціональним числам утворюють на числовій прямій всього лише злічену множину, тобто розташовані на числовій прямій досить рідко. Решта точок числової прямої утворюють континуальну множину, тобто множину потужнішу, ніж злічену, хоча обидві множини нескінчені. Доповнення множини точок, що відповідає раціональним числам, до множини всіх точок числової прямої називається множиною ірраціональних чисел I . Раціональні і ірраціональні числа разом утворюють множину дійсних чисел R . Використання множини раціональних чисел для розв'язання рівнянь значно розширює можливості такого розв'язання але цієї множини недостатньо навіть для розв'язання простих рівнянь типу алгебраїчного рівняння другого степеню $x^2 + 1 = 0$, тригонометричного рівняння $\sin(x) = 2$, показникового рівняння $\exp(x) = -1$ тощо. Бажано було б мати таку числову множину, де при розв'язанні різних типів рівнянь: алгебраїчних, трансцендентних, диференціальних тощо не існувало б жодних обмежень на їх коефіцієнти. На щастя така числова множина є і називається множиною комплексних чисел C . Фактично, множина комплексних чисел є фундаментом сучасної математики. Тільки використовуючи цю множину можна дослідити всі властивості найважливіших математичних об'єктів.

1.1. Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Геометрична інтерпретація комплексних чисел абсолютно схожа на геометричну інтерпретацію дійсних чисел.

Сенс числа ми завжди намагаємось зрозуміти поставивши йому у відповідність якийсь зоровий образ. Для дійсних чисел одним з таких співставлень є встановлення відповідності між дійсними числами і точками числової прямої. Комплексне число z визначається парою дійсних чисел a і b

$$z = (a, b) .$$

Тому, розглядаючи ці числа як координати точки площини, ми можемо встановити взаємно однозначну відповідність між комплексними числами і точками площини. У тому разі, коли точки площини є геометричними образами саме комплексних чисел, площину називають комплексною, хоча, в усіх інших відношеннях це звичайна дійсна площина. Для комплексної площини зручно вісь x називати дійсною, а вісь y - уявною. Зрозуміло, що не тільки вздовж дійсної осі але і вздовж уявної осі ми відкладаємо дійсні числа. Очевидно, що всі метричні властивості так званої комплексної площини також збігаються з метричними властивостями дійсної площини. Так відстань точки, що відповідає комплексному числу $z = (a, b)$ від початку координат, де a і b - Декартові координати точки, визначається традиційним чином як $\sqrt{a^2 + b^2}$, а відстань між двома точками, яким відповідають різні комплексні числа $z_1 = (a_1, b_1)$ і $z_2 = (a_2, b_2)$, визначається як $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Тут a називається дійсною частиною комплексного числа z , b - його уявною частиною. Зазначене вище можна записати так, вводячи нові, характерні для комплексного аналізу, функції:

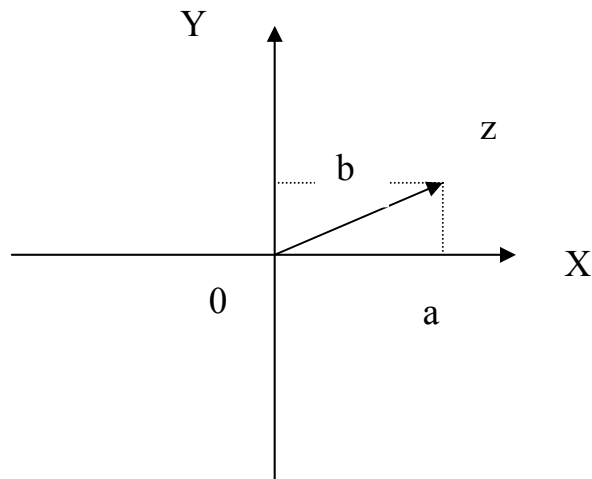
$$a = \operatorname{Re}(z) , \quad b = \operatorname{Im}(z) .$$

Назви функцій у правих частинах останніх двох рівностей пов'язані із англійськими словами real - дійсний та imaginary - уявний. За означенням

$$i^2 = -1 .$$

Якщо a і b Декартові координати точки, то комплексне число можна записати в алгебраїчній формі як

$$z = a + ib .$$



Мал. 1. Інтерпретація комплексних чисел векторами

Позначення i вперше було введене Ейлером¹ (Euler) у вісімнадцятому сторіччі. Означення уявної одиниці фактично визначає властивості математичної структури, створеної з двох дійсних чисел. Якщо покласти

$$i^2 = -1 ,$$

то відповідна математична структура називається подвійним числом. Якщо

$$i^2 = 0 ,$$

то такі числа називаються дуальними. Надалі ми розглядатимемо лише комплексні числа, оскільки лише вони знайшли широке застосування у математиці.

¹ Ейлер Леонард (15.04.1707 - 7.09.1783) - німецький математик, механік, фізик

Важливою операцією комплексного аналізу є операція комплексного спряження. Число, комплексно спряжене числу z записується так

$$\bar{z} = a - ib .$$

Операція комплексного спряження застосовна для довільного комплексного виразу або функції і означає заміну знаку перед уявною одиницею на протилежний.

Крім комплексних чисел, що є двовимірними числами і мають лише одну уявну одиницю, можна розглядати числа більшої розмірності, так звані гіперкомплексні числа, в принципі, як завгодно великої розмірності. Практичне застосування з таких багатовимірних чисел на сьогодні мають лише чотиривимірні числа з трьома уявними одиницями - кватерніони та бікватерніони, і восьмивимірні числа з сімома уявними одиницями - октави. Така винятковість кватерніонів і октав серед гіперкомплексних чисел зумовлена визначеністю лише для них, крім дійсних і комплексних чисел, операції ділення.

Зауважимо, що комплексне число можна задавати парою дійсних чисел, що є координатами точки у довільній криволінійній системі координат, а не тільки у Декартовій. З усіх відомих криволінійних систем координат на площині для представлення комплексних чисел знайшла застосування лише одна з них, а саме полярна. Якщо ρ , φ – полярні координати точки, то комплексне число можна записати у показниковій формі

$$z = \rho \exp(i \varphi) ,$$

або тригонометричній формі

$$z = \rho [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] .$$

Тут ρ – називається модулем комплексного числа, φ – його аргументом. Сказане можна записати так:

$$\rho = |z| , \quad \varphi = \text{Arg}(z) .$$

Модуль і аргумент комплексного числа мають простий математичний сенс. Модуль визначає відстань точки, що відповідає даному комплексному числу на площині, від початку координат. Модуль є однозначною функцією z , аргумент - нескінченнозначною. Якщо розуміти під φ мінімальний кут між радіус-вектором, що відповідає даному комплексному числу, і додатним напрямом дійсної осі, то такий кут називається головним значенням аргументу і позначається $\arg(z)$. Очевидно, що він є однозначною функцією z .

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Імена, що відповідають багатозначним функціям в комплексному аналізі прийнято писати з великої літери. Виключенням з цього правила є лише дві функції: $\text{Re}(z)$ і $\text{Im}(z)$, які можуть бути і однозначними і багатозначними, в залежності від властивостей своїх аргументів.

Для двох комплексних чисел z_1, z_2 відстанню між двома відповідними їм точками є $|z_1 - z_2|$. Використання модуля дозволяє максимально наочно записати рівняння деяких ліній у комплексній площині.

Приклад 1. $|z - z_0| = R$, $R > 0$ - коло радіуса R з центром у точці z_0 . З вигляду рівняння і геометричного сенсу модуля дійсно випливає, що мова йде про геометричне місце точок z , відстань яких від даної точки z_0 є сталою величиною R , тобто про коло. У цьому ж можна переконатись і записавши це рівняння, наприклад, у Декартових координатах. Для цього досить використати те, що $z = x + iy$. Тоді

$$|z - z_0| = |x - x_0 + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Ми отримали канонічне рівняння кола у дійсній площині. Таким є і вихідне рівняння, хоча воно і записане у комплексній формі.

Всі розглядувані тут рівняння є рівняннями дійсних функцій типу $f(x, y) = \text{const}$ у дійсній площині. У разі, коли щодо цієї дійсної площини зручно використовувати термінологію комплексної площини, зазначені рівняння зручно записувати використовуючи комплексну змінну $z = x + iy$, а не дійсні змінні x, y . В багатьох випадках ці рівняння на диво просто виражаються саме через комплексну змінну, на відмінну від дійсних змінних, і мають прозорий геометричний зміст. Так, наприклад, є у випадку кола, еліпса, гіперболи

Приклад 2. Аналогічним чином можна показати, що рівняння $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, де $a > |z_1 - z_2|/2$ є рівнянням еліпса з фокусами у точках z_1, z_2 і довжиною більшої півосі, рівною a . Дійсно, наше рівняння описує геометричне місце точок, сума відстаней яких від даних двох точок є сталою величиною, тобто еліпс.

Приклад 3. Так само очевидно, що рівняння $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$, де $a < |z_1 - z_2|/2$ є рівнянням гіперболи з фокусами у точках z_1, z_2 і довжиною дійсної півосі, рівною a . Дійсно, наше рівняння описує геометричне місце точок, різниця відстаней яких від даних двох точок є сталою величиною, тобто гіперболу.

Приклад 4. Рівняння параболи у комплексній формі вже буде не таким наочним. Дійсно, після підстановки у рівняння $\text{Re}(z \bar{z} - z^2) = 4p \text{Re}(z)$ виразу $z = x + iy$ ми отримаємо канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$.

Приклад 5. Множина точок z , що задовольняє рівнянню $|z - z_1| = |z - z_2|$, є множиною точок, рівновіддалених від точок

z_1 і z_2 . Отже, це є рівняння прямої, перпендикулярної відрізка, що з'єднує точки z_1 та z_2 і проведеної через його середину.

Областю визначення функції $\arg(z)$ може бути довільний проміжок довжиною 2π . Наприклад $\arg(z) \in [0, 2\pi)$ або $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. У першому випадку аргумент комплексного числа визначається через його дійсну та уявну частини так

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a), & a \in (0, \infty), b \in (0, \infty), \\ \arctan(b/a) + \pi, & a \in (-\infty, 0), b \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ \arctan(b/a) + 2\pi, & a \in (0, \infty), b \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

У другому випадку аргумент визначається дещо інакше

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan(b/a), & a \in (0, \infty), b \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ \arctan(b/a) + \pi, & a \in (-\infty, 0), b \in (0, \infty), \\ \arctan(b/a) - \pi, & a \in (-\infty, 0), b \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Коли точка, що відповідає певному комплексному числу, лежить на одній з осей координат, то значення аргументу є очевидним і не вимагає окремого обчислення. Надалі ми використовуватимемо варіант $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$.

Приклад 6. Записати наступні комплексні числа у показниковій формі: 1) 1, 2) -1 , 3) i , 4) $-1+i$.

Розв'язання.

1) $|1|=1$, оскільки комплексному числу відповідає точка, що належить дійсній додатній півосі, то

$$\arg(1) = 0, \quad \text{Arg}(1) = \arg(1) + 2\pi n = 2\pi n.$$

Відповідно,

$$1 = \exp[i(2\pi n)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2) $|-1|=1$, оскільки комплексному числу відповідає точка, що належить дійсній від'ємній півосі, то

$$\arg(-1) = \pi, \quad \text{Arg}(-1) = \arg(-1) + 2\pi n = \pi + 2\pi n.$$

Відповідно,

$$-1 = \exp[i(\pi + 2\pi n)] , n \in Z .$$

3) $|i|=1$, оскільки комплексному числу відповідає точка, що належить уявній додатній півосі, то

$$\arg(i) = \pi / 2 , \text{Arg}(i) = \arg(i) + 2\pi n = \pi / 2 + 2\pi n .$$

Відповідно,

$$i = \exp[i(\pi / 2 + 2\pi n)] , n \in Z .$$

4) $|-1+i|=\sqrt{2}$, оскільки комплексному числу відповідає точка що, належить другому координатному куту, то

$$\arg(-1+i) = \arctan(-1) + \pi = -\pi / 4 + \pi = 3\pi / 4 ,$$

$$\text{Arg}(-1+i) = \arg(-1+i) + 2\pi n = 3\pi / 4 + 2\pi n .$$

Відповідно,

$$-1+i = \sqrt{2} \exp[i(3\pi / 4 + 2\pi n)] , n \in Z .$$

В усіх розглянутих вище випадках ми у показниках експонент писали повні значення аргументів. Як буде з'ясовано далі, саме багатозначністю аргументу зумовлена багатозначність багатьох функцій комплексної змінної, таких як: обернені тригонометричні та гіперболічні функції, логарифмічна функція та степенева функція з нецілим показником степеню тощо. При обчисленні значень таких функцій використання саме повного значення аргументу комплексного числа є принциповим. При обчисленні однозначних функцій комплексної змінної, таких як: тригонометричні та гіперболічні функції, показникова функція та степенева функція з цілим показником степеню тощо використання повного і головного значень аргументів комплексного числа є рівноцінним. Звичайно, для спрощення запису комплексних чисел у показниковій формі записують лише головне значення аргументу, що надалі ми і робитимемо там, де це не викликає ускладнень.

Ще один варіант геометричної інтерпретації комплексного числа виникає внаслідок взаємно однозначної відповідності між комплексними числами і векторами площини. Такими векторами можуть бути радіус-вектори точок комплексної площини. Результатом цієї інтерпретації

комплексних чисел є еквівалентність дій над комплексними числами і векторами. Дійсно, і комплексні числа, і вектори можна записати так

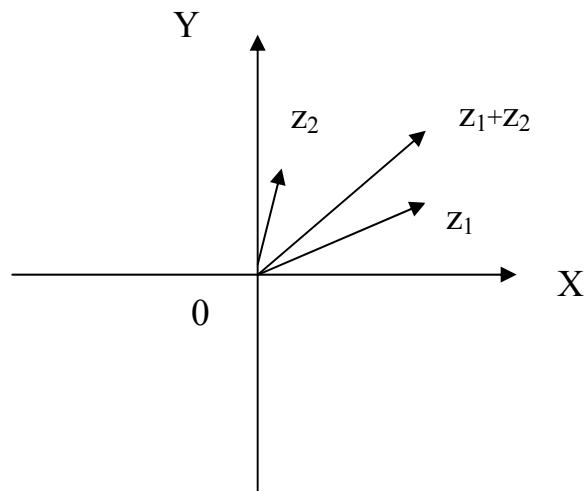
$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2) ,$$
$$\mathbf{z}_1 = (a_1, b_1), \quad \mathbf{z}_2 = (a_2, b_2) .$$

Так само в обох випадках

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2) ,$$
$$\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2) ,$$

або, для комплексних чисел в алгебраїчній формі,

$$z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2) .$$



Мал. 2. Додавання векторів

Операцій множення для векторів є дві: скалярне множення і векторне множення. Виникає запитання, а як бути з множенням комплексних чисел. Яке з цих двох множень взяти для комплексних чисел, а можливо обидва? Відповідь така - не

підходить жодне, оскільки для жодної з зазначених операцій множення не можна ввести обернену операцію ділення. А це відразу позбавляє комплексні числа їх головної ознаки - можливості виконувати над ними всіх чотирьох арифметичних операцій. Але операцію множення для комплексних чисел, так щоб, разом з нею існувала і обернена операція ділення, ввести можна. Для цього операцію множення комплексних чисел слід виконувати за правилами множення багаточленів з використанням означення уявної одиниці $i^2 = -1$, тобто

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) .$$

При цьому з'ясується, що результат множення комплексних чисел визначається і через скалярний добуток векторів, і через їх векторний добуток одночасно. Дійсно, якщо поряд з числом

$$z = a + ib$$

ввести комплексно спряжене йому число

$$\bar{z} = a - ib ,$$

то добуток цих комплексних чисел можна записати і так

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 - i(a_1 b_2 - a_2 b_1) ,$$

або

$$z_1 \bar{z}_2 = \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 - i[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2]_z .$$

У правій частині цієї рівності \mathbf{z}_1 і \mathbf{z}_2 означають вектори, $\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2$ - їх скалярний добуток, $[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2]_z$ - z -компонента їх векторного добутку. Дійсно, якщо записати \mathbf{z}_1 і \mathbf{z}_2 як тривимірні вектори

$$\mathbf{z}_1 = (a_1, b_1, 0) , \quad \mathbf{z}_2 = (a_2, b_2, 0) ,$$

то

$$(\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$

відповідно

$$[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1) ,$$

або

$$[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2]_z = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

При цьому очевидно, що

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2),$$

$$[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2]_z = -\operatorname{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

Отже, якщо вектори \mathbf{z}_1 й \mathbf{z}_2 – перпендикулярні, то $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$. Якщо ж ці вектори паралельні, то $\operatorname{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2) = 0$.

Очевидно, для однакових комплексних чисел $z_1 = z_2 = z = a + ib$

$$z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Остання рівність дозволяє обчислювати модуль комплексного числа так

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} .$$

Видно, що модуль комплексного числа збігається з модулем відповідного йому вектора. Оскільки

$$\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot z_2 ,$$

то

$$\bar{z}_1 \cdot z_2 = (z_1 \cdot \bar{z}_2) + i[\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2]_z .$$

Введений таким чином добуток комплексних чисел має всі властивості добутку звичайних чисел, зокрема властивості комутативності і асоціативності. Останнє дозволяє ввести для комплексних чисел операцію ділення. Дійсно, часткою z двох комплексних чисел z_1 і z_2 є розв'язок рівняння

$$z_2 \cdot z = z_1 .$$

Помноживши обидві частини цього рівняння на \bar{z}_2 ми отримаємо значно простіше рівняння, де множником при z вже є дійсне число

$$|z_2|^2 z = z_1 \cdot \bar{z}_2 .$$

У висліді, операція ділення комплексних чисел приводиться до операції ділення комплексних чисел на дійсні числа

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Частка комплексних чисел має бути комплексним числом, представленим в алгебраїчній, тригонометричній або показниковій формах запису.

Приклад 7. Обчислити вираз $\frac{1+i}{1-i}$.

Розв'язання. Простота виразу робить доцільним використання саме алгебраїчної форми запису комплексних чисел. Далі користуватимемось такою послідовністю міркувань. Дріб не зміниться, якщо чисельник і знаменник помножити на число, комплексно спряжене знаменнику. Після такої операції знаменник стає дійсним. Діленням комплексного числа у чисельнику на дійсне число у знаменнику отримуємо остаточно результат

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1^2 + 2i + i^2}{1^2 + 1^2} = i.$$

Добуток комплексних чисел можна ввести різним чином, але інше означення добутку комплексних чисел порівняно з наведеним вище, означає втрату частини властивостей такого добутку та відсутність операції ділення комплексних чисел.

Можливість виконання над комплексними числами чотирьох арифметичних операцій із збереженням всіх їх властивостей, що мають місце для дійсних чисел, і виправдовує їх назву - комплексні числа.

Можливість ділення комплексних чисел і неможливість ділення векторів так, щоб результат такого ділення теж був вектором, не суперечать взаємно однозначній відповідності між множинами векторів та комплексних чисел. Дійсно, скалярний й векторний добутки векторів однозначно визначають добуток комплексних чисел. Саме для такого розуміння добутку

можливе і ділення. Наведемо ще деякі властивості комплексних чисел.

Комплексні числа, так само як і вектори, не можна порівнювати подібно дійсним числам. На відміну від останніх вони можуть або збігатись, або відрізнятись. Два комплексні числа z_1 і z_2 збігаються лише у разі, коли $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ і $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$.

Серед комплексних чисел є два виділених. Це числа з невизначеними аргументами. Ними є $z = 0 (\rho = 0)$ та $z = \infty (\rho = \infty)$. Першому з цих чисел відповідає початок координат, другому – символічна нескінченно віддалена точка. Невизначеність їх аргументів означає, що як у початок координат, так і у нескінченно віддалену точку, можна потрапити рухаючись вздовж довільного променя, що виходить з початку координат або входить у нього. Якщо ж використовувати алгебраїчну форму запису комплексних чисел, то дійсна та уявна частини числа $z = 0$ мають лише одне значення $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$. У цей же час для “числа” $z = \infty$ така однозначність відсутня. Його дійсну та уявну частини можна написати безліччю способами: 1) $\operatorname{Re}(z) = \pm\infty$, $\operatorname{Im}(z) = \pm\infty$; 2) $\operatorname{Re}(z) = \pm\infty$, $\operatorname{Im}(z) = b$, де $|b| < +\infty$ - довільне дійсне число; 3) $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Im}(z) = \pm\infty$, де $|a| < +\infty$ - довільне дійсне число. “Число” $z = \infty$ - це математичний об'єкт, що має лише деякі властивості числа. Можна шукати ліміт функції або лишок, можна говорити про значення функції в цій точці. Але застосування до числа $z = \infty$, наприклад, арифметичних операцій має специфічний характер або взагалі не має сенсу. Наприклад: $2 + \infty = \infty$, $2 \cdot \infty = \infty$. Насправді, $z = \infty$ це сукупність всіх точок у комплексній площині, що належать колу нескінченно великого радіусу. Останнє можна означити і так: це сукупність точок, що лежать у комплексній площині поза кругом довільного як завгодно великого але скінченного радіусу з

центром у початку координат. Такі унікальні властивості “числа” $z = \infty$, відрізняють його від решти комплексних чисел, роблячи його певним символом нескінченності. Надалі символ ∞ ми використовуватимемо лише для позначення нескінченно віддаленої точки. В усіх інших випадках будемо використовувати символи або $+\infty$, або $-\infty$. Ці символи зручно використовувати для позначення деяких прямих, зокрема осей координат у комплексній площині:

$(-\infty, +\infty)$ - дійсна вісь;

$(-i\infty, +i\infty)$ - уявна вісь;

$(a - i\infty, a + i\infty)$ - пряма паралельна уявній осі $\text{Re}(z) = a$;

$(-\infty + ib, +\infty + ib)$ - пряма паралельна дійсній осі $\text{Im}(z) = b$

Найважливіші властивості $z = \infty$ можна означити так

$$1/\infty = 0, 1/0 = \infty.$$

Замість одиниці в цих виразах може міститись довільне скінчене число. Тим самим, нескінченно віддаленій точці додається ще один атрибут звичайної точки комплексної площини. Таким чином, ми дещо зменшуємо кількість операцій з невизначеним результатом. Однак, такі операції як $0/0$, ∞/∞ і 0∞ мають невизначений результат.

Вектори, що відповідають комплексним числам z і \bar{z} , мають однакові модулі і різні аргументи. Знання числа z ще не дозволяє автоматично визначити число \bar{z} . Число \bar{z} можна побудувати лише у разі, коли разом з числом z задана і конкретна система координат, разом з якою стають заданими і координати точки, що відповідають комплексному числу z . Отже, числа z та \bar{z} необхідно розглядати як незалежні. Операція комплексного спряження має наступні властивості:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2},$$

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

Ці властивості легко довести, виходячи з того, що операція комплексного спряження полягає у заміні знаку на протилежний перед уявною одиницею скрізь, де вона зустрічається у виразі. Мають місце і такі співвідношення:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Алгебраїчна форма запису комплексних чисел зручна для виконання операцій додавання і віднімання. Для решти операцій, не тільки арифметичних, зручна показникова форма запису комплексних чисел. Певну роль відіграє і тригонометрична форма запису але, в основному, як така, що потрібна для переходу від показникової форми запису до алгебраїчної.

Комплексному числу, поданому в алгебраїчній формі

$$z = a + ib$$

можна поставити у відповідність і матрицю порядку 2×2

$$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці дорівнює квадрату модулю комплексного числа

$$|z|^2 = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2.$$

Легко перевірити, що додаванню і множенню матриць відповідає додавання і множення комплексних чисел. Дійсно, якщо

$$z' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix},$$

то

$$z + z' = \begin{pmatrix} a + a' & -b - b' \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix}.$$

Операції комплексного спряження відповідає операція транспонування матриць. Так

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Очевидно добуток комплексного числа на комплексно спряжене буде діагональна матриця з однаковими дійсними і невід'ємними елементами.

$$\overline{z}z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Для двох довільних комплексних чисел їх добуток буде таким

$$\overline{z}z' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & -(a'b - ab') \\ a'b - ab' & aa' + bb' \end{pmatrix}.$$

Знаючи визначник матриці, що відповідає комплексному числу, можна знайти обернене комплексне число у матричному представленні

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

За означенням оберненого комплексного числа добуток комплексного числа на обернене до нього комплексне число має дорівнювати одиниці. Для матриць ця властивість виконується автоматично

$$zz^{-1} = z^{-1}z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 1.$$

Існування оберненого комплексного числа дозволяє означити операцію ділення комплексних чисел. Дійсно часткою двох комплексних чисел z_1 і z_2 є роз'язок рівняння

$$z_2 z = z_1.$$

Домноживши обидві частини цього рівняння на обернене комплексне число z_2^{-1} , отримаємо

$$z_2^{-1} z_2 z = z_2^{-1} z_1$$

або

$$z = z_2^{-1} z_1.$$

Комплексному числу, поданому у тригонометричній формі запису

$$z = \rho(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

можна поставити у відповідність наступну квадратну матрицю

$$z = \rho \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Така матриця є матрицею повороту вектора у площині XOY на кут φ і одночасного розтягування його у ρ разів. Отже геометричному сенсу операції множення якраз і відповідає зазначена дія, що складається з повороту і розтягування.

1.2. Функція комплексної змінної

ε -околом точки називається множина точок комплексної площини, що лежить всередині кола радіуса ε з центром у даній точці.

Множина точок є областю, при виконанні таких двох умов: кожна точка множини є внутрішньою її точкою; довільні дві точки множини можна з'єднати ламаною лінією, всі точки якої належать множині.

Точка є внутрішньою щодо множини, якщо існує такий її ε -окіл, можливо як завгодно малий, що складається лише з точок множини.

Межовою точкою множини називається така точка, в довільному, у тому числі як завгодно малому, ε -околі якої є як точки, що належать множині, так і точки, що їй не належать.

Сукупність межових точок утворює межу області.

Область разом з межею утворює замкнену область.

Друга умова, що визначає область, є умовою зв'язаності множини. З означення області випливає, що дискретний набір точок області не утворює, оскільки тут порушуються обидві

умови. Точки ліній області теж не утворюють, оскільки тут порушується перша умова.

Найпростішою комплексною функцією є числова послідовність.

Числовою послідовністю називається закон, що ставить у відповідність кожному натуральному числу відповідне комплексне число. Аналогічно дійсному аналізу, послідовність комплексних чисел позначається $\{z_n\}$. Комплексні числа z_n , що утворюють послідовність, називаються її елементами. Отже, послідовність є функцією, визначеною на множині натуральних чисел. Комплексні числа, що є елементами послідовності, утворюють множину значень цієї функції. Очевидно, що множина натуральних чисел не утворює області у сенсі даного вище означення.

Число z називається межею послідовності $\{z_n\}$, якщо який би ε -окіл точки z ми не взяли, хоча б і як завгодно малий, всі члени послідовності, за виключенням їх скінченної кількості на початку послідовності, належать цьому ε -околу.

Оскільки кожне комплексне число характеризується парою дійсних чисел, то одній послідовності комплексних чисел відповідають дві послідовності дійсних чисел, утворені дійсними та уявними частинами членів послідовності комплексних чисел. Збіжність цих двох послідовностей дійсних чисел є необхідною і достатньою умовами збіжності відповідної послідовності комплексних чисел. Всі властивості меж дійсних чисел мають місце і для послідовностей комплексних чисел.

Послідовність комплексних чисел є обмеженою, якщо всі члени послідовності за модулем не перевищують довільне скінчене додатне число. Якщо такого скінченного числа зазначити неможливо, то послідовність називається необмеженою.

Зручно вважати, що необмежена послідовність збігається до нескінченно віддаленої точки $z = \infty$. Ця точка наділяється багатьма властивостями решти точок комплексної площини.

Зокрема можна говорити і про окіл нескінченно віддаленої точки. Цим околom є зовнішня частина круга довільного радіуса з центром у початку координат.

Комплексна площина разом з нескінченно віддаленою точкою утворюють повну комплексну площину.

Найбільш загальним варіантом комплексної функції є функція, визначена на множині точок, що утворюють область. Такі функції можна записати так

$$w = f(z, \bar{z}) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Тобто, в загальному випадку комплексна функція є функцією двох незалежних змінних. Лише у разі, коли функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ задовольняють певним додатковим умовам - умовам аналітичності комплексної функції, таку функцію можна записати як функцію однієї змінної, а саме:

$$w = f(z).$$

Між функціями однієї дійсної змінної і функціями однієї комплексної змінної є багато відмінностей. Одна з них полягає у наступному. Область визначення і множина значень функції однієї дійсної змінної належать одній площині. Це можуть бути множини точок (відрізки), що належать відповідним осям Декартової системи координат. Область визначення і множину значень комплексних функцій прийнято розміщувати у різних комплексних площинах, відповідно Z і, наприклад, W . Фактично, функція однієї комплексної змінної за своїми властивостями у багатьох випадках ближча до функції двох дійсних змінних.

Функція має певний набір локальних характеристик, тобто таких, що стосуються поведінки функції у кожній точці її області визначення, так само як і у безпосередньому околі кожної такої точки. Однією з найважливіших серед них є неперервність.

Нагадаємо, що функція $f(z)$, задана на множині $D(f)$, називається неперервною в точці $z_0 \in D$, якщо межове значення

цієї функції в точці z_0 існує, скінчене і збігається із значенням $f(z_0)$ функції $f(z)$ в точці z_0 , тобто

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Точки, де умова неперервності порушується, називаються особливими точками функції. Виконання умови неперервності функції в даній точці ще не означає, що ця точка є звичайною точкою функції, оскільки в цій точці може порушуватись умова неперервності похідних функції. Тобто, наведена умова є необхідною але не достатньою умовою того, що точка z_0 є звичайною точкою функції.

Приклад 8. У функції $f(z) = \sin(1/z)$ в точці $z=0$ не існує певного значення, оскільки $f(0) = \sin(1/0) = \sin(\infty)$ (вона у цій точці не визначена), тому ця точка не є точкою неперервності даної функції. Також у цій точці не існує і межі функції. Тобто в рівнянні, що визначає неперервність функції невизначеними є обидві його частини. Така особлива точка називається суттєво особливою. В усіх інших точках комплексної площини, разом із нескінченно віддаленою точкою, функція неперервна.

Приклад 9. Функція $f(z) = 1/z$ в точці $z=0$ не має скінченного значення, оскільки $f(0) = 1/0 = \infty$, тому ця точка не є точкою неперервності даної функції. Не має скінченного значення і межа функції в цій точці. Тобто в рівнянні, що визначає неперервність функції нескінченими є обидві його частини. Така особлива точка називається полюсом. В усіх інших точках комплексної площини, разом з нескінченно віддаленою точкою, функція неперервна.

Приклад 10. Функція $f(z) = \begin{cases} z, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0 \end{cases}$ в точці $z=0$ існує, має скінчене значення, але це значення відрізняється від

значення межі функції у цій точці, яке також скінчене, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$, в той час як $f(0) = 1$, тому ця точка не є точкою неперервності даної функції $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \neq f(0)$. Така особлива точка називається усувною особливою точкою. Нескінченно віддалена точка також не є точкою неперервності даної функції, оскільки у цій точці функція не має скінченного значення. В усіх інших точках комплексної площини функція неперервна.

Детальну класифікацію особливих точок ми розглянемо пізніше. Проте зауважимо, що характер особливої точки залежить від поведінки функції в околі такої точки. Для ілюстрації цієї тези нагадаємо означення межі функції у даній точці. Межа є ще однією важливою локальною характеристикою функції, відмінною від неперервності. Розглянемо функцію $w = f(z)$ і її поведінку в околі точки z_0 .

Означення. Якщо за будь-якого вибору послідовності $\{z_n\}$, що має межу z_0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(z_n)\}$ має межу w_0 , то ця межа називається межею функції $f(z)$ у точці z_0 .

Межа майже так само як і неперервність, дозволяє виявити особливі точки функції. Майже означає, що існують випадки, коли перевірка функції на неперервність дозволяє виявити таку особливу точку, де функція не неперервна, у той час як межа функції у цій точці існує і скінчена. Це - усувна особлива точка. У такій точці функція може бути невизначеною, або мати значення, відмінне від межі функції у цій точці.

Приклад 8. Для функції $f(z) = \sin(z)/z$ точка $z = 0$ є усувною особливою точкою, оскільки $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$, у той самий час як у самій точці значення функції невизначене. Для його обчислення ми маємо виконати операцію $0/0$, якій неможливо надати безпосереднього сенсу. Для функції

$$f(z) = \begin{cases} \sin(z)/z, & z \neq 0, \\ 2, & z = 0. \end{cases} \quad \text{точка } z=0 \text{ також є усувною}$$

особливою точкою, оскільки межа функції у цій точці

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1 \text{ не збігається із значенням функції у цій точці}$$

$f(0) = 2$. Особлива точка називається усувною, оскільки завжди змінивши значення функції у цій одній точці, або до визначивши її, можна отримати функцію неперервну у такій

$$\text{точці. У даному разі це буде функція } f(z) = \begin{cases} \sin(z)/z, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

У решті випадків перевірка функції на неперервність і наявність межі дають однаковий результат. Характер поведінки функції у безпосередньому околі особливої точки дозволяє класифікувати особливі точки. Надалі ми обмежимося такою класифікацією лише у разі аналітичних функцій, детальне обговорення яких буде нижче. Зараз лише зауважимо, що всі основні елементарні функції є аналітичними, а такі функції як $w = |z|$, $w = \operatorname{Re}(z)$, $w = \operatorname{Im}(z)$ не є аналітичними.

Ще раз нагадаємо, що якщо межа функції у даній точці існує, але є нескінченною, то ця точка називається полюсом скінченного порядку.

Зауваження. Послідовність прямує до нескінченності, якщо її межею є нескінченно віддалена точка. Це твердження аналогічне тому, що, якщо утворити послідовність з модулів елементів даної послідовності, то ця нова послідовність прямує до $+\infty$.

Приклад 12. У функції $f(z) = 1/z$ точка $z = 0$ є полюсом, оскільки для будь-якої послідовності $\{z_n\}$, із межею 0 , відповідна послідовність значень функції $\{f(z_n)\}$ має межею нескінченно віддалену точку $z = \infty$.

Детальніше визначення характеру особливою точки у цьому разі вимагає аналізу швидкості, з якою значення функції прямують до нескінченно віддаленої точки. Якщо у безпосередньому (нескінченно малому) околі точки z_0 функцію $f(z)$ можна представити як $f(z) = c/(z - z_0)^n$, де c - довільна скінчена стала, а $n \in \mathbb{N}$ - довільне натуральне число, то точка z_0 є полюсом n - порядку. Інший тип особливих точок виникають у разі, якщо межа функції у даній точці не існує. Розглянемо випадок, коли межа функції у точці z_0 не існує через те, що залежить від вибору послідовності $\{z_n\}$, що прямує до z_0 . Така точка називається суттєво особливою.

Приклад 13. Розглянемо функції $f(z) = \sin(1/z)$ і

$$f(z) = \begin{cases} \sin(1/z), & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases} \quad \text{З'ясуємо характер точки } z = 0 \text{ для цих}$$

функцій. Очевидно, що у самій точці перша з функцій не визначена, а друга визначена. Для дослідження поведінки функцій в околі зазначеної точки знайдемо межове значення функцій у цій точці, обравши в якості послідовності, збіжної до точки $z = 0$, наступну:

$$\frac{1}{z_n} = n\pi \quad \text{або} \quad z_n = \frac{1}{n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для кожного такого значення аргументу для обох функцій

$$f(z_n) = 0,$$

а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0.$$

Знайдемо тепер межові значення функцій у зазначеній точці обравши в якості послідовності, збіжної до точки $z = 0$, наступну:

$$\frac{1}{z_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{або} \quad z_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для кожного такого значення аргументу для обох функцій

$$f(z_n) = 1,$$

а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1.$$

Знайдемо наступне граничні значення функцій у зазначеній точці, обравши як послідовність, збіжну до точки $z = 0$, таку

$$\frac{1}{z_n} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{або} \quad z_n = \frac{1}{-\pi/2 + 2n\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для кожного такого значення аргументу для обох функцій

$$f(z_n) = -1,$$

а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = -1.$$

Цей процес можна продовжувати як завгодно довго. Для кожної наступної послідовності ми отримаємо якесь інше межове значення для обох функцій у точці $z = 0$. Це і означає, що межа функцій у даній точці не існує. Ця точка є суттєво особливою точкою обох функцій.

Так само можна перевірити, що нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є суттєво особливою точкою для функції $f(z) = \sin(z)$.

Особливі точки функцій можуть бути ізольованими, а можуть утворювати лінії у комплексній площині. У цьому разі класифікацію слід проводити вже щодо особливих ліній, а не окремих точок. Надалі ми обмежимося розглядом лише ізольованих особливих точок.

Приклад 14. Розглянемо функцію $f(z) = \begin{cases} \sin(z), & |z| \leq \pi, \\ 1, & z > \pi. \end{cases}$

Для неї кожна точка лінії $|z| = \pi$ є особливою, оскільки у всіх точках цієї лінії функція не має межі, хоча однобічні межі існують.

Ще один тип особливих точок, властивий лише багатозначним функціям і не пов'язаний ні з неперервністю, ні з її межею у даній точці

Приклад 15. Двозначну функцію, обернену до функції $z = w^2$, можна представити сукупністю двох однозначних функцій $w_1 = +\sqrt{z}$ і $w_2 = -\sqrt{z}$, кожна з яких визначена на комплексній площині з розрізом вздовж довільного променя, що виходить з початку координат. Ці дві однозначні функції називаються гілками двозначної функції $w = \sqrt{z}$. Точка $z = 0$ для цієї двозначної функції є точкою галузження, оскільки є точкою, де значення обох гілок двозначної функції збігаються. При цьому кожна з гілок неперервна у точці $z = 0$. Іншою точкою галузження є нескінченно віддалена точка $z = \infty$. Обхід початку координат за замкненим контуром є одночасно обходом і нескінченно віддаленої точки.

Крім розглянутих типів особливих точок можуть бути і їх комбінації.

Функція називається однозначною, якщо у кожній точці своєї області визначення вона приймає лише одне значення і багатозначною у протилежному випадку. Такі основні елементарні функції як показникова, степенева з цілим показником степеню, всі тригонометричні і гіперболічні функції є однозначними. Логарифмічна, степенева функція з нецілим показником степеню, обернені тригонометричні та гіперболічні функції є багатозначними функціями.

Функція називається однолистою, якщо у різних точках своєї області визначення вона має різні значення. Така функція здійснює взаємно однозначне відображення. Зазначимо, що оскільки в означення функції входить і її область визначення, то, в залежності від останньої, функція, що визначається тою самою формулою, може бути і однолистою і багатолистою.

Задавання однієї комплексної функції однієї комплексної змінної рівноцінне задаванню двох дійсних функцій двох дійсних змінних, тобто

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

Неперервність функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$ є необхідною і достатньою умовою неперервності функції $f(z)$.

1.3. Основні елементарні функції комплексної змінної

Теорія функцій комплексної змінної стосовно основних елементарних функцій дозволяє зробити два важливих узагальнення.

1. Серед основних елементарних функцій незалежними є лише дві. Решту можна виразити через них.

2. Не існує жодних обмежень на коефіцієнти алгебраїчних і трансцендентних рівнянь на предмет існування розв'язків цих рівнянь. Останнє можна сказати і так: множина комплексних чисел є замкненою не лише відносно арифметичних операцій але і операцій, що відповідають обчисленню значень всіх основних елементарних функцій. Множина дійсних чисел є замкненою лише відносно арифметичних операцій і операцій, що відповідають обчисленню однозначних основних елементарних функцій. Але саме багатозначні функції принципово необхідні для отримання розв'язків різноманітних трансцендентних рівнянь.

До основних елементарних функцій традиційно відносять: показникову, логарифмічну, тригонометричні,

обернені тригонометричні, гіперболічні, обернені гіперболічні та степеневу. Всі основні елементарні функції діляться на однозначні і багатозначні. Однозначними є: показникова, тригонометричні, гіперболічні, степенева функція з цілим показником степеню. Багатозначними є: логарифмічна, обернені тригонометричні, обернені гіперболічні, степенева функція з нецілим показником степеню. Кожній однозначній основній елементарній функції відповідає їй обернена багатозначна функція, тобто всі основні елементарні функції можна розбити на пари: показникова - логарифмічна, тригонометричні - обернені тригонометричні, гіперболічна - обернена гіперболічна. Єдина функція, що разом із своєю оберненою належить до одного виду основних елементарних функцій - це степенева функція з довільним (нецілим) показником степеню. У цьому разі і пряма, і обернена функції є багатозначними. Виключенням серед степеневих функцій є степенева функція з цілим показником степеню, яка є однозначною, в той час як обернена до неї степенева функція є багатозначною. Степенева функція серед основних елементарних функцій в певному сенсі є унікальною. А степенева функція з цілим показником степеню цілком може вважатись і найпростішою серед них. Таку функцію зручно використовувати в якості цеглинок для побудови всіх інших основних елементарних, елементарних і більшості спеціальних функцій. Така математична конструкція називається рядом Тейлора, рядом Лорана, а при використанні степеневих функцій з нецілим показником степеню - рядом Пуїзю. Розглянемо основні елементарні функції детальніше. Степенева функція з цілим показником степеню - це єдина основна елементарна функція, обчислення якої зводиться до скінченною кількості арифметичних операцій і може виконуватись комп'ютером безпосередньо. Решту основних елементарних функцій комп'ютер виражає через степеневі функції і лише таким чином їх може обчислювати. Правда, для такого точного представлення необхідна вже нескінченна

кількість арифметичних операцій, і ця обставина є додатковим джерелом похибки при обчисленні значень всіх основних елементарних функцій, крім степеневі з цілим показником степеню.

Логарифмічна функція $w = \text{Ln}(z)$. Це нескінченнозначна функція, що легко побачити, використавши показникову форму представлення комплексних чисел $z = |z| \exp[\text{Arg}(z)]$. Тоді

$$\text{Ln}(z) = \ln(z) + i2\pi n ,$$

де

$$\ln(z) = \ln |z| + i \arg(z)$$

- головне значення логарифму. У кожній точці логарифм комплексного числа має стільки значень, скільки різних значень має n , тобто нескінченно багато, оскільки $n \in Z$. Головному значенню логарифму відповідає $n=0$. Очевидно, при такому означенні головного значення, логарифми дійсних додатних чисел є дійсними, дійсних від'ємних чисел - комплексними. Логарифм має дві особливі точки - початок координат і нескінченно віддалену точку. Якщо логарифм представити сукупністю однозначних функцій - його гілками, кожній з яких відповідає конкретне значення n

$$w_n = \ln |z| + i[\arg(z) + 2\pi n] , \quad -\pi < \arg(z) < \pi ,$$

то зазначені особливі будуть спільними для різних гілок логарифму. Отже вони є точками галуження логарифму. Можна показати, що одночасно ці точки є і суттєво особливими точками. Таке поєднання різних особливостей носить назву логарифмічних особливих точок. Області визначення окремих гілок логарифму збігаються. Ними є вся комплексна площина, за винятком множини точок, що належать довільному променю, який виходить із початку координат. Викинувши множину точок комплексної площини, що належить цьому променю, ми фактично виконуємо розріз комплексної площини по цій лінії. Зручно такий розріз виконувати або

вздовж дійсної від'ємної півосі, якщо $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, або вздовж дійсної додатної півосі, якщо $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. Виконавши такий розріз ми уникаємо неоднозначності окремих гілок багатозначної функції. У першому випадку при виборі розрізу не виникає парадоксальної ситуації, коли у точках дійсної від'ємної півосі, наприклад, для головного значення логарифму $\ln|x| + i\pi = \lim_{\arg(z) \rightarrow -\pi} \ln(z) = \ln|x| - i\pi$. У другому випадку розрізу

не виникає парадоксальної ситуації, коли у точках дійсної додатної півосі, наприклад, для головного значення логарифму $\ln|x| = \lim_{\arg(z) \rightarrow -2\pi} \ln(z) = \ln|x| + i2\pi$. Оскільки областю визначення

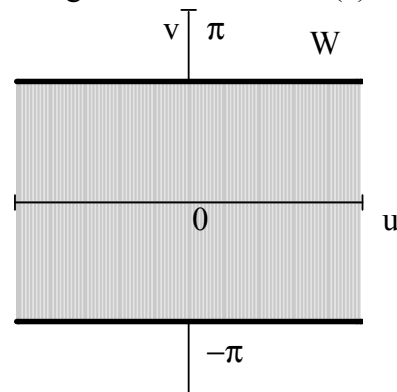
функції є вся комплексна площина, то всі точки від'ємної півосі в першому випадку і додатної півосі у другому випадку будуть особливими точками функції, оскільки, наприклад для першого випадку, $\lim_{\arg(z) \rightarrow -\pi} \ln(|z| \exp[i \arg(z)]) \neq \ln(|z| \exp(i\pi))$ і умова

неперервності логарифмічної функції у цих точках порушується. Крім того, якщо не зробити зазначені розрізи, то у всіх точка дійсної від'ємної або додатної півосі різні гілки логарифмічної функції матимуть однакові значення. Головне значення логарифму $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ при $-\pi < \arg(z) < \pi$ відображує комплексну площину Z з розрізом вздовж дійсної від'ємної півосі на смугу $-i\pi < \text{Im}(w) < i\pi$ комплексної площини W . Гілка логарифму, що відповідає значенню $n=1$, відображує таку ж комплексну площину Z у смугу $i\pi < \text{Im}(w) < i3\pi$ комплексної площини W , тощо.

Можна легко встановити відповідність і між деякими лініями у площинах Z і W . Дійсно, у площині Z рівняння $z = |z| \exp[i \arg(z)]$ для фіксованого значення $\arg(z) = \text{const}$ і $0 < |z| < +\infty$ є рівнянням променя, що виходить з початку координат і утворює з додатним напрямом дійсної осі кут $\arg(z) = \text{const}$. У площині W рівняння $w = \ln|z| + i \arg(z)$ при тих же значеннях аргументу і модуля є рівнянням прямої,

паралельної дійсній осі, що перетинає уявну вісь при $v = \arg(z) = \text{const}$. При цьому дійсній від'ємній півосі у площині Z $\arg(z) = \pm\pi$, вздовж якої здійснено розріз комплексної площини, відповідають у комплексній площині W дві прямі $w = \ln|z| \pm i\pi$, що обмежують область значень головного значення логарифму. Рівняння $z = |z| \exp[i \arg(z)]$ для фіксованого значення $|z| = \text{const}$ і $-\infty < \arg(z) < +\infty$ у комплексній площині Z є рівнянням кола радіусу $|z|$ з центром у початку координат. У площині W рівняння $w = \ln|z| + i \arg(z)$ при тих же значеннях аргументу і модуля є рівнянням прямої, паралельної уявній осі, що перетинає дійсну вісь при $w = \ln|z|$.

Range of function for $\ln(z)$



Мал. 3. Область визначення і множина значень головного значення логарифму $w_0 = \ln|z| + i \arg(z)$

Приклад 16. Знайти логарифми наступних комплексних чисел: 1) 1, 2) -1 , 3) i , 4) $1+i$.

Розв'язання.

1) Оскільки $|1|=1$ і $\arg(1)=0$, $\text{Arg}(1)=\arg(1)+2\pi n=2\pi n$, то, $\text{Ln}(1)=i2\pi n$, $n \in Z$, $\ln(1)=0$.

2) Оскільки $|-1|=1$ і $\arg(-1)=\pi$, $\text{Arg}(-1)=\pi+2\pi n$, то $\text{Ln}(-1)=i(\pi+2\pi n)$, $n \in Z$, $\ln(-1)=i\pi$.

3) Оскільки $|i|=1$ і $\arg(i)=\pi/2$, $\text{Arg}(i)=\pi/2+2\pi n$, то $\text{Ln}(i)=i(\pi/2+2\pi n)$, $n \in Z$, $\ln(i)=i\pi/2$.

4) Оскільки $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ і $\arg(1+i)=\arctan(1)=\pi/4$, $\text{Arg}(1+i)=\pi/4+2\pi n$, то $\text{Ln}(1+i)=\ln(\sqrt{2})+i(\pi/4+2\pi n)$, $n \in Z$, $\ln(1+i)=\ln(2)/2+i\pi/4$.

Всі багатозначні основні елементарні функції, крім степеневі функції з довільним показником степеневі, можна виразити лише через логарифм. Покажемо це на прикладі функції $w = \text{Arcsin}(z)$. Для цього розглянемо функцію, обернену до функції $z = \sin(w)$. Використавши формулу Ейлера можна записати, що

$$z = [\exp(iw) - \exp(-iw)] / 2i,$$

або

$$\exp(i2w) - 2iz \exp(iw) - 1 = 0.$$

Звідси, розв'язавши квадратне алгебраїчне рівняння щодо $\exp(iw)$, маємо

$$\exp(iw) = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

або

$$w = -i \text{Ln}[iz \pm \sqrt{1-z^2}].$$

Таким чином, ми отримуємо дві родини гілок

$$\text{Arcsin}(z) = -i \text{Ln}[iz \pm \sqrt{1-z^2}].$$

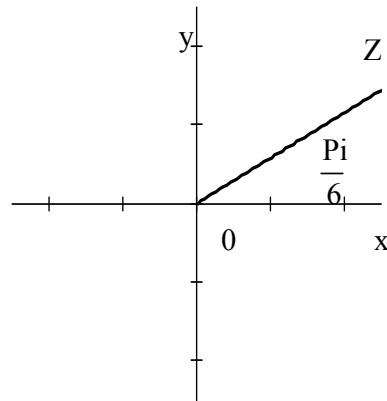
Приклад 179. Обчислити $w = \text{Arcsin}(i)$.

Розв'язання. Маємо дві родини гілок

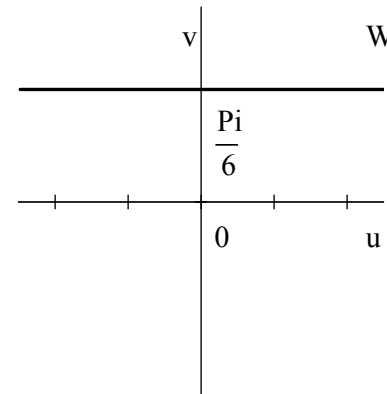
$$w_1 = \text{Arcsin}(i) = -i \text{Ln}[-1 + \sqrt{2}], \quad w_2 = \text{Arcsin}(i) = -i \text{Ln}[-1 - \sqrt{2}].$$

Використовуючи означення логарифму комплексних чисел, отримаємо

The graph of function $z = |z| \exp(i \pi/6)$



The graph of function $w = \ln|z| + i \pi/6$



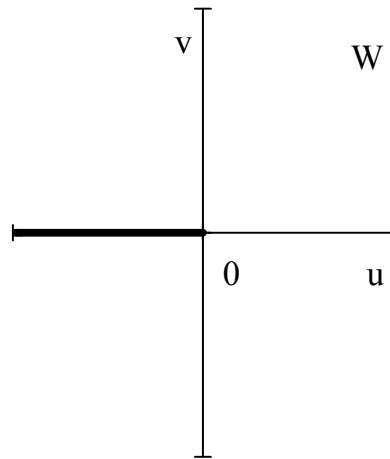
Мал. 4. Відображення, здійснюване головним значенням логарифму: в площині Z промінь задається рівнянням $z = |z| \exp[i \pi / 6]$, $0 < |z| < +\infty$; в площині W лінія задається рівнянням $w = \ln |z| + i \pi / 6$.

$$w_{1n} = \operatorname{Arcsin}(i) = -i[\ln(\sqrt{2}-1) + i2\pi n] = 2\pi n - i \ln(\sqrt{2}-1),$$

$$w_{2n} = \operatorname{Arcsin}(i) = -i[\ln(\sqrt{2}+1) + i(\pi + 2\pi n)] = (2n+1)\pi - i \ln(\sqrt{2}+1).$$

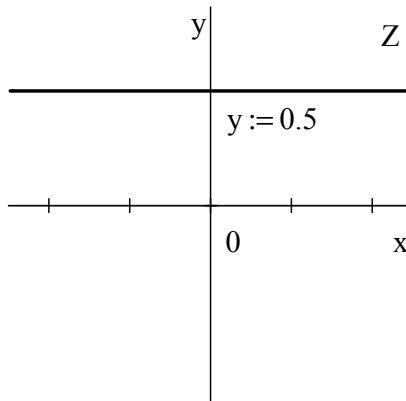
Показникова функція $w = \exp(z)$. Показникова функція неперервна і однозначна у всій комплексній площині. Вона є періодичною функцією з уявним періодом $2\pi i$, тобто $\exp(z + i2\pi) = \exp(z)$. Останнє означає, що показникова функція є нескінченнолисною функцією комплексної змінної. Оскільки показникова функція є оберненою щодо логарифмічної, то вона здійснює відображення смуги $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ комплексної площини Z у комплексну площину W з розрізом вздовж дійсної від'ємної півосі. Сказане стосується і довільної смуги $-\pi(n-1) < \operatorname{Im}(z) < \pi(n+1)$

Range of function for $\exp(z)$

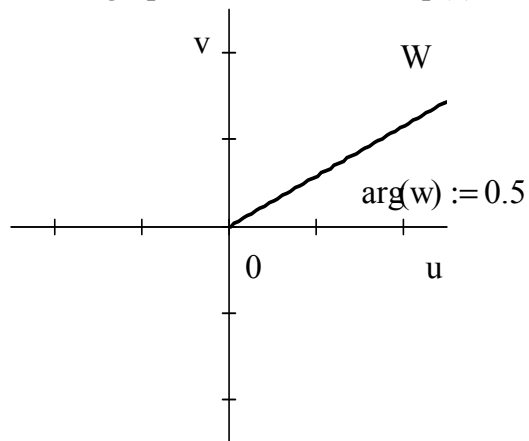


Мал. 5. Одна з можливих областей однолистності функції $w = \exp(z)$, та відповідна їй множина значень

The graph of function $z=x+i 0.5$



The graph of function $w=\exp(z)$



Мал. 6. Відображення, здійснюване показниковою функцією: у площині Z промінь задається рівнянням $z = x + i0.5$, $-\infty < x < \infty$; у площині W лінія задається рівнянням $w = \exp(x) \exp(i 0.5)$.

Всі основні однозначні елементарні функції, крім степеневі з цілим показником степеню можна виразити лише через показникову функцію.

Тригонометричні функції. Розглянемо тут лише одну з тригонометричних функцій, а саме $w = \cos(z)$. Проаналізуємо здійснюване нею відображення. Маємо

$$\cos(z) = \cos(x + iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y),$$

де ми скористались тим, що

$$\cos(iy) = \cosh(y),$$

$$\sin(iy) = i \sinh(y).$$

Нехай

$$u(x, y) = \cos(x) \cosh(y),$$

$$v(x, y) = -\sin(x) \sinh(y).$$

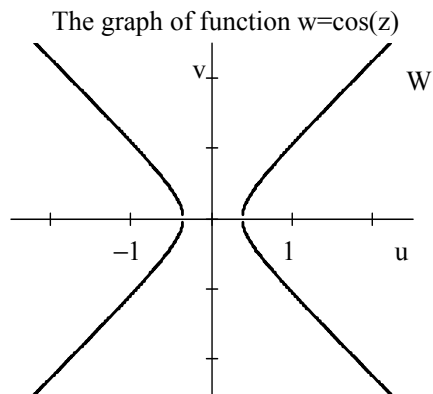
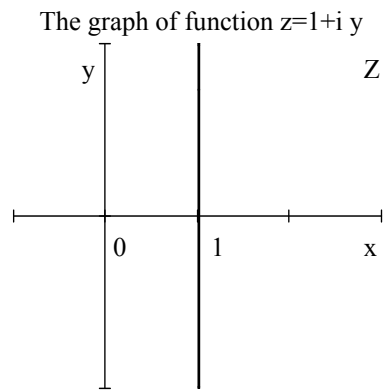
У комплексній площині Z рівняння $z = x + iy$, $x = \text{const}$, $-\infty < y < +\infty$ є рівнянням прямої, паралельної уявній осі, що перетинає дійсну вісь при $x = \text{const}$. У комплексній площині W за тих же значень x і y рівняння $w = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$ є рівнянням гіперболи. Дійсно, легко перевірити, що це рівняння можна записати так

$$\frac{u^2}{[\cos(x)]^2} - \frac{v^2}{[\sin(x)]^2} = 1.$$

Підстановки у нього знайдених вище u і v приводить до тотожності

$$[\cosh(y)]^2 - [\sinh(y)]^2 = 1.$$

Легко бачити, що фокуси всіх отриманих гіпербол містяться на дійсній осі у точках $u = \pm 1$. При $0 < x < \pi/2$, оскільки тоді $u > 0$, пряма $x = \text{const}$ у комплексній площині Z переходить у праву гілку гіперболи, а пряма $x = \text{const}$ при $\pi/2 < x < \pi$, оскільки тоді $u < 0$, у її ліву гілку. При цьому пряма $x = \pi/2$ у комплексній площині Z відображується на уявну вісь комплексної площини W , оскільки у цьому разі

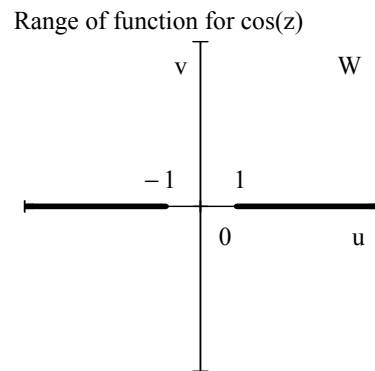
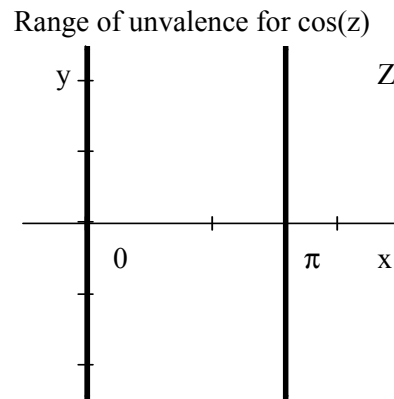


Мал. 7. Відображення, здійснюване функцією $w = \cos(z)$: у площині Z пряма задається рівнянням $z = x + iy$, $x = 1$, $-\infty < y < \infty$; у площині W гіпербола задається рівнянням

$$\frac{u^2}{[\cos(1)]^2} - \frac{v^2}{[\sin(1)]^2} = 1.$$

$u = \cos(\pi/2) \cosh(y) = 0$, а $v = -\sin(\pi/2) \sinh(y) = -\sinh(y)$ може бути довільним. Прямі $x = 0$ і $x = \pi$ відображуються у промені

$(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, оскільки $u = \cos(0) \cosh(y) = \cosh(y)$,
 $v = -\sin(0) \sinh(y) = 0$ є рівнянням променя $[1, +\infty)$, а
 $u = \cos(\pi) \cosh(y) = -\cosh(y)$, $v = -\sin(\pi) \sinh(y) = 0$ є



Мал. 8. Одна з можливих областей однолистності функції $w = \cos(z)$, та відповідна їй множина значень

рівнянням променя $(-\infty, -1]$. Тим самим функція $w = \cos(z)$ здійснює взаємно однозначне відображення смуги $0 < x < \pi$

комплексної площини Z на всю комплексну площину W з розрізами вздовж променів $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ дійсної осі. Так само відображується і наступна смуга $\pi < x < 2\pi$, тощо.

Степенева функція $w = z^a$. Цікавість становить випадок, коли показник степеню a не є цілим, а, наприклад, $a = 1/n$, $n \in N$, тобто $w = z^{1/n}$. Така функція є n -значною і виникає питання про обчислення її значень. У цьому разі степеневу функцію зручно представити сукупністю однозначних функцій - її гілок. Найзручніше це зробити, використавши показникові форму представлення комплексного числа z . Тоді

$$z = |z| \exp[i \operatorname{Arg}(z)] ,$$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp[i \operatorname{Arg}(z)/n] .$$

Різні гілки степеневі функції можна записати так

$$w_m = |z|^{1/n} \exp\{i[\arg(z) + 2\pi m]/n\} , m = 0, \dots, n-1 .$$

Головному значенню функції відповідає $m = 0$. Числу m можна надати довільні n цілих значень, взятих підряд, а не тільки наведені вище. Видно, що коли $m = n$, то $w_n = w_0$, коли $m = n+1$, то $w_{n+1} = w_1$, тощо.

Приклад 18. Обчислити значення функції $w = z^{1/3}$ у точці $z = 1$.

Розв'язання.

Оскільки $|1| = 1$ і $\arg(1) = 0$, $\operatorname{Arg}(1) = \arg(1) + 2\pi n = 2\pi n$, то, $w_m = \exp(i2\pi m/3)$. Відповідно до умови, дана функція є тризначною. Знайдемо ці три її різні значення у точці $z = 1$:

$$m = 0, w_1 = \exp(0) = 1 ,$$

$$m = 1, w_2 = \exp(i2\pi/3) ,$$

$$m = 2, w_3 = \exp(i4\pi/3) = \exp(-i2\pi/3) .$$

Різні значення розглянутої степеневі функції розташовані на колі одиничного радіусу з центром у початку координат у вершинах рівностороннього трикутника, вписаного у це коло.

У загальному випадку різні значення степеневі функції $w = z^{1/n}$ в точці z_0 містяться у вершинах правильного n -кутника, вписаного у коло радіусу $|z_0|^{1/n}$. Легко

переконатись, що степенева функція $w = z^n$, $n \in N$ відображує сектор $0 \leq \arg(z) < 2\pi/n$ у комплексній площині Z на всю комплексну площину W . Відповідно, головне значення степеневі функції $w_0 = z^{1/n}$, $n \in N$ відображує всю комплексну площину Z на сектор $0 \leq \arg(w) < 2\pi/n$. Гілка $w_1 = z^{1/n}$, $n \in N$ відображує всю комплексну площину Z на сектор $2\pi/n \leq \arg(w) < 4\pi/n$, тощо.

Якщо степенева функція має довільний показник степеню, у тому числі комплексний, то для обчислення значення такої степеневі функції у довільній точці її виражають і через показникову, і через логарифмічну функції

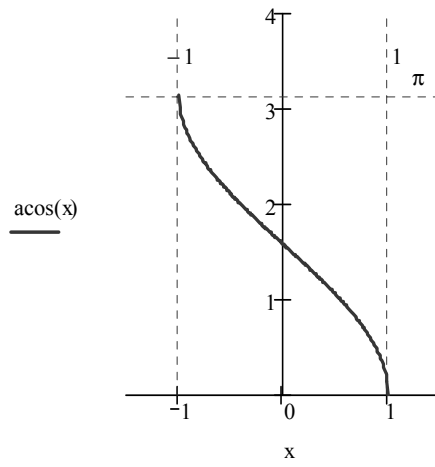
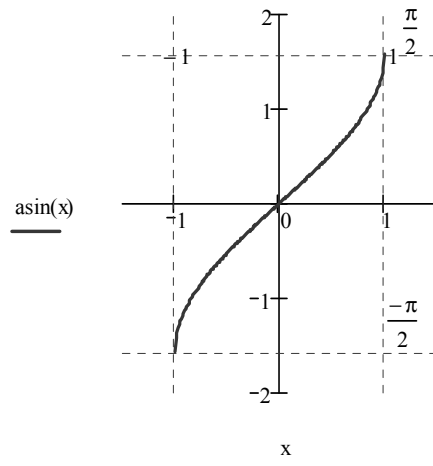
$$w = z^a = \exp[a \operatorname{Ln}(z)].$$

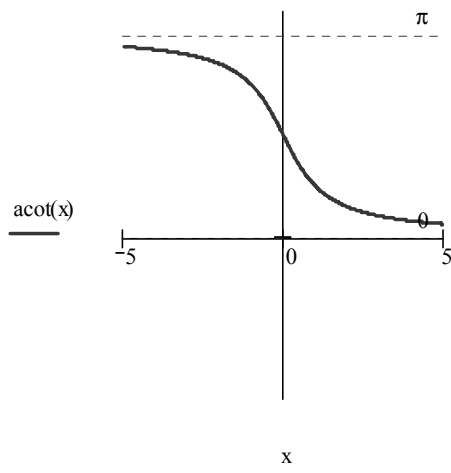
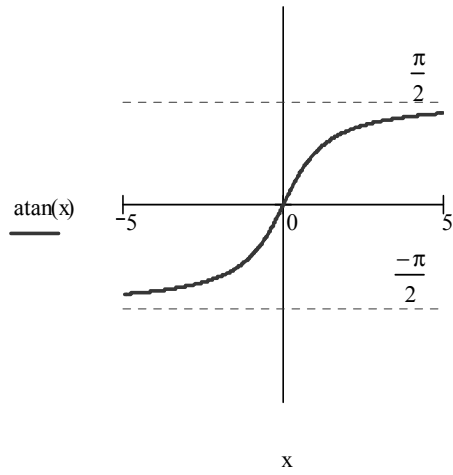
У цьому разі функція матиме у кожній точці безліч значень.

Приклад 19. Обчислити значення функції $w = z^i$ у точці $z = i$.

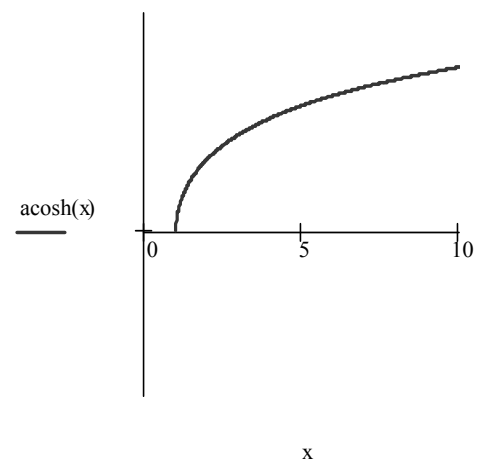
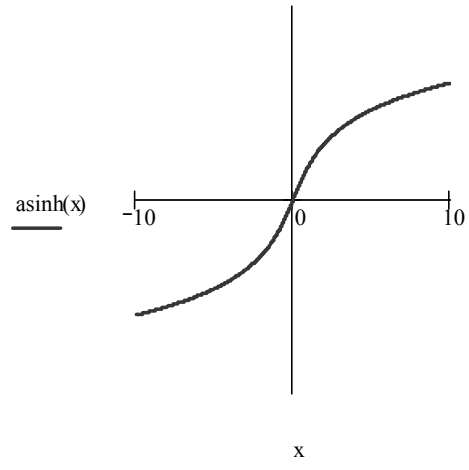
Розв'язання. Очевидно, що $w = z^i = \exp[i \operatorname{Ln}(z)]$. Оскільки $|i|=1$ $\arg(i) = \pi/2$, $\operatorname{Arg}(1) = \arg(1) + 2\pi n = \pi/2 + 2\pi n$, то, $\operatorname{Ln}(i) = i(\pi/2 + 2\pi n)$. Тоді $w_n(i) = \exp[-(\pi/2 + 2\pi n)]$. Тут ми маємо безліч дійсних значень функції у зазначеній точці.

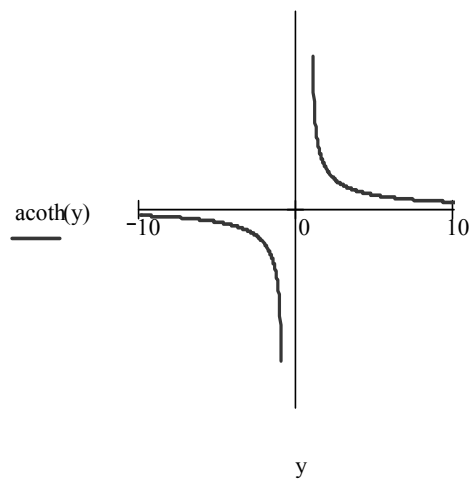
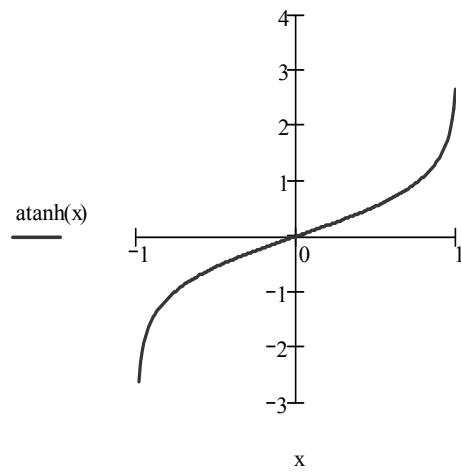
Нижче наведені графіки головних значень деяких обернених тригонометричних і гіперболічних функцій для дійсних аргументів:





Мал. 9. Графіки обернених тригонометричних функцій

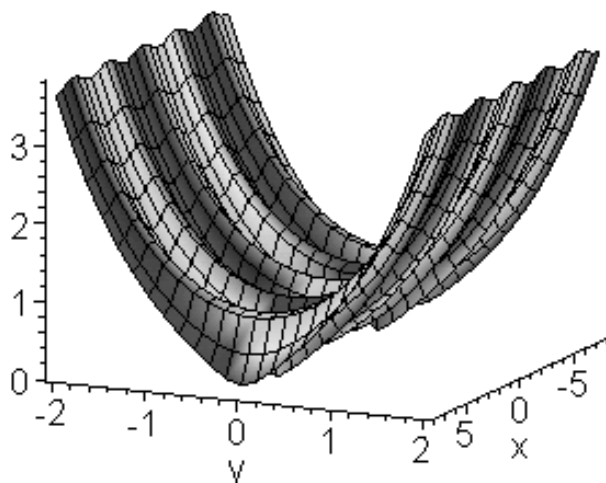




Мал. 10. Графіки обернених гіперболічних функцій

Наведемо також графіки деяких елементарних функцій у комплексній площині. Технічно це можна подати у вигляді функції двох змінних x і y , поставивши їм у відповідність,

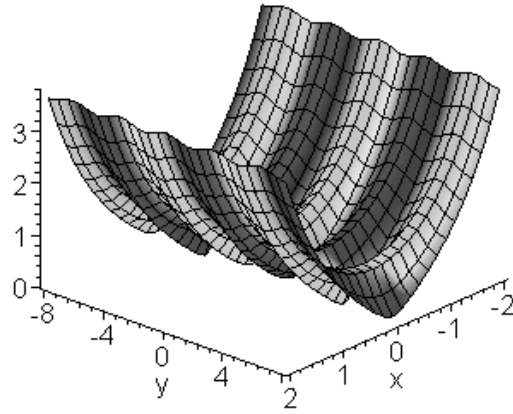
наприклад, модуль вихідної функції. З малюнків видно, що графік гіперболічного косинуса отримується поворотом графіка тригонометричного косинуса на 90 градусів. У висліді, якщо тригонометричний косинус має дійсний період 2π , гіперболічний косинус має уявний період $2\pi i$.



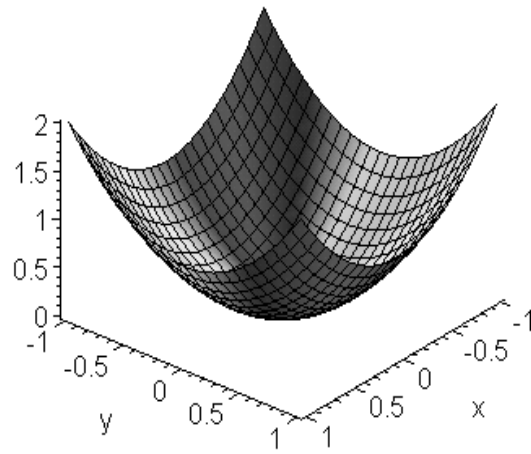
Мал. 11. $f(x,y) = |\cos(z)|$

Ще раз нагадаємо, що серед основних елементарних функцій незалежними є лише дві. Решту можна виразити через них. Звичайно в якості таких незалежних функцій зручно обрати показникову і логарифмічну функції. Сказане стає очевидним саме у рамках теорії функцій комплексної змінної завдяки існуванню формул Ейлера:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)],$$



Мал. 12. $f(x, y) = |\cosh(z)|$



Мал. 13. $f(x, y) = |z^2|$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} [\exp(iz) + \exp(-iz)] ,$$

$$\sinh(z) = \frac{1}{2} [\exp(z) - \exp(-z)] ,$$

$$\cosh(z) = \frac{1}{2} [\exp(z) + \exp(-z)] ,$$

$$z^{\nu} = \exp[\nu \operatorname{Ln}(z)] .$$

Обернені тригонометричні та гіперболічні функції можна виразити через логарифмічну функцію, як це було показано вище на прикладі $\operatorname{Arcsin}(z)$, так

$$\operatorname{Arcsin}(z) = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1-z^2} \right) ,$$

$$\operatorname{Arccos}(z) = -i \operatorname{Ln} \left(z + i\sqrt{1-z^2} \right) ,$$

$$\operatorname{Arcsinh}(z) = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2+1} \right) ,$$

$$\operatorname{Arccosh}(z) = \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2-1} \right) ,$$

$$\operatorname{Arctan}(z) = -i \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) ,$$

$$\operatorname{Arccot}(z) = -i \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{iz-1}{iz+1} \right) ,$$

$$\operatorname{Arctanh}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) ,$$

$$\operatorname{Arccoth}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) .$$

У цих виразах для коренів квадратних слід враховувати обидва їх значення.

1.4. Диференціювання функції комплексної змінної

Формально похідна комплексної функції визначається аналогічно похідній дійсної функції

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

де Δz – довільно орієнтований відрізок у комплексній площині, одним з кінців якого є точка z . Саме у довільній орієнтованості відрізка Δz і полягає відміна між диференціюванням комплексної і дійсної функцій. В останньому випадку відрізок Δx належить дійсній осі і його орієнтація завжди фіксована. Очевидно, що якщо похідна комплексної функції існує, то її значення не повинно залежати від орієнтації відрізка Δz . Ця вимога накладає певні обмеження на вигляд функції $f(z)$, які називаються умовами Коші–Рімана (Cauchy²-Riemann³) або Д'Аламбера-Ейлера (D'Alembert⁴- Euler). Якщо функцію $f(z)$ представити у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де

$$u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)],$$

$$v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)],$$

то умови Коші-Рімана мають вигляд

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

² Коші Огюстен Луї (21.08.1789 - 23.05.1857) - французький математик.

³ Ріман Георг Фрідріх Бернард (17.09.1826 - 20.07.1866) - німецький математик.

⁴ Д'Аламбер Жан Лерон (16.09.1717 - 29.10.1783) - французький просвітител, математик і філософ.

Наведені співвідношення є необхідними і достатніми умовами диференційованості комплексної функції. Необхідність цих умов доводиться наступною теоремою.

Теорема 1. Якщо функція $f(z)$ диференційована в точці z , то в цій точці існують частинні похідні функцій $u(x, y)$ й $v(x, y)$ за змінними x і y і мають місце умови Коші-Рімана.

Доведення. Відрізок Δz довільним чином може прямувати до нуля. При цьому можуть змінюватись як його модуль, так і орієнтація одночасно, або тільки модуль. Для доведення оберемо, наприклад, дві різні орієнтації відрізка Δz , обчислимо відповідні похідні, а результати обчислення прирівняємо. Зручно один раз покласти $\Delta z = \Delta x$, а другий – $\Delta z = i\Delta y$. У першому разі

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} = \\ &= u_x(x, y) + i v_x(x, y). \end{aligned}$$

У другому разі

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + i\Delta y) - f(z)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} = \\ &= -i u_y(x, y) + v_y(x, y). \end{aligned}$$

З умови диференційованості функції $f(z)$, тобто існування межі різничевої частки, випливають і умови існування меж різницевих часток для функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, тобто їх

частинних похідних. Прирівнюючи останні два вирази отримаємо

$$u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y) .$$

Рівність двох комплексних виразів вимагає рівностей їх дійсних та уявних частин

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) ,$$

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y) ,$$

що і потрібно було довести.

Подібним чином доводиться і достатність умов Коші-Рімана.

Якщо функція $f(z)$ диференційована в даній точці і залежить саме від z , то техніка диференціювання комплексної і дійсної функцій не відрізняються. Якщо ж диференційована функція $f(z)$ задана як функція x, y , тобто у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

то умови Коші-Рімана дають чотири варіанти формули диференціювання:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) ,$$

$$f'(z) = v_y(x, y) + iv_x(x, y) ,$$

$$f'(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y) ,$$

$$f'(z) = v_y(x, y) - iu_y(x, y) .$$

Інколи зручними є умови Коші-Рімана у полярній системі координат

$$\frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} ,$$
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v(\rho, \varphi)}{\partial \rho} .$$

Розглянемо декілька прикладів використання умов Коші-Рімана.

Приклад 20. Перевірити на диференційованість функцію $f(z) = x$.

Розв'язання. Очевидно, що тут

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 1, & u_y(x, y) &= 0, \\ v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Видно, що умови Коші-Рімана

$$1 \neq 0, \quad 0 = 0$$

не виконуються у жодній точці комплексної площини. Відповідно дана функція не є диференційованою в жодній точці комплексної площини.

Приклад 21. Дослідити на диференційованість функцію $f(z) = |z|$.

Розв'язання. Тут доцільно використати полярну систему координат, де $f(z) = \rho$. Тепер

$$u(\rho, \varphi) = \rho, \quad v(\rho, \varphi) = 0.$$

Отже,

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \varphi) &= 1, & u_\varphi(\rho, \varphi) &= 0, \\ v_\rho(\rho, \varphi) &= 0, & v_\varphi(\rho, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно і тут умови Коші-Рімана не виконуються в жодній точці комплексної площини

$$1 \neq 0, \quad 0 = 0.$$

Приклад 22. Дослідити на диференційованість функцію $f(z) = z|z|$.

Розв'язання. Тут доцільно використати полярну систему координат, де $f(z) = \rho^2 \exp(i\varphi)$. Тепер

$$u(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos(\varphi) ,$$

$$v(\rho, \varphi) = \rho^2 \sin(\varphi) .$$

Отже,

$$u_\rho(\rho, \varphi) = 2\rho \cos(\varphi) ,$$

$$u_\varphi(\rho, \varphi) = -\rho^2 \sin(\varphi) ,$$

$$v_\rho(\rho, \varphi) = 2\rho \sin(\varphi) ,$$

$$v_\varphi(\rho, \varphi) = \rho^2 \cos(\varphi) .$$

Очевидно, що тут умови Коші-Рімана виконуються в одній точці комплексної площини, а саме у початку координат

$$2\rho \cos(\varphi) = \rho \cos(\varphi) ,$$

$$2\rho \sin(\varphi) = \rho \sin(\varphi) .$$

Це означає, що функція диференційована лише в одній точці.

Приклад 10. Перевірити на диференційованість функцію $f(z) = z$.

Розв'язання. Тут

$$u(x, y) = x , \quad v(x, y) = y .$$

Відповідно

$$u_x(x, y) = 1, \quad u_y(x, y) = 0 ,$$

$$v_x(x, y) = 0, \quad v_y(x, y) = 1 .$$

Тут умови Коші-Рімана виконуються в усіх точках комплексної площини крім нескінченно віддаленої точки, яка є особливою для вихідної функції

$$1 = 1 , \quad 0 = 0 .$$

Очевидно функція диференційована скрізь, за виключенням нескінченно віддаленої точкою, яка для неї є особливою – полюсом першого порядку.

Диференційованість або недиференційованість функції легко визначити і не використовуючи умови Коші-Рімана. Якщо комплексна функція залежить лише від змінної z , або може

бути приведена до такого вигляду, то вона буде диференційованою скрізь, крім особливих точок цієї функції. Якщо ж вона є функцією двох змінних z, \bar{z} , або може бути приведена до такого вигляду, то вона не є диференційованою. Зауважимо, що всі основні елементарні функції є диференційованими скрізь, за виключенням скінченої або зліченої кількості точок комплексної площини, а саме: степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні, гіперболічні та обернені гіперболічні.

Взаємно однозначна відповідність між векторами і комплексними числами дозволяє замість векторних співвідношень розглядати відповідні їм співвідношення між комплексними числами. Сказане стосується і диференційних операторів. Так диференційні властивості векторного поля виражаються через векторний диференційний оператор ∇ . У Декартовій системі координат у дійсній площині

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y},$$

де \mathbf{i}, \mathbf{j} – одиничні вектори, направлені вздовж відповідних осей координат. Зазначена вище взаємно однозначна відповідність між векторами і комплексними числами, між векторними функціями і комплексними функціями тощо, дозволяє розглянути комплексний варіант оператора набла

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}.$$

Результат дії цього диференційного оператора на комплексну функцію можна представити сумою двох величин

$$\bar{\nabla} f(x, y) = (\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y)) + i [\nabla \times \mathbf{f}(x, y)]_z.$$

За означенням скалярного і векторного добутків та оператора набла

$$(\nabla \cdot \mathbf{f}(x, y)) = \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) ,$$

$$[\nabla \times \mathbf{f}(x, y)]_z = \operatorname{rot}_z \mathbf{f}(x, y) ,$$

і останній вираз можна записати так

$$\bar{\nabla} \cdot f(z) = \operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) + i \operatorname{rot}_z \mathbf{f}(x, y) .$$

Тут присутні векторна функція

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{i}f_x(x, y) + \mathbf{j}f_y(x, y)$$

і відповідна їй комплексна функція

$$f(z) = f_x(x, y) + if_y(x, y) .$$

Тепер

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y} ,$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} ,$$

$f_x(x, y), f_y(x, y)$ – відповідні координати вектор-функції $\mathbf{f}(x, y)$.

Комплексний відповідник оператора набла має найпростіший вигляд, якщо від змінних x, y перейти до змінної z або \bar{z} . У першому разі

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} ,$$

у другому –

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

Після обчислення відповідних похідних можна записати:

$$\bar{\nabla} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ,$$

$$\nabla = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} .$$

Тепер можливий і такий варіант запису

$$\bar{\nabla} \cdot f(z) = 2 f'(z) .$$

До речі, зв'язок між оператором набла і похідними за комплексними змінними z або \bar{z} . Можна використати для ще одного варіанту означення диференційованості функції, а саме: вимагати від неї щоб

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = 0 ,$$

тобто комплексна функція залежала лише від змінної z , а не двох змінних z і \bar{z} окремо. Необхідність цієї властивості зумовлена тим, що довільна комплексна функція

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(z, \bar{z})$$

лише за певних обставин може залежати від x і y не окремо, а від певного виразу, що їх об'єднує $x + iy = z$, тобто лише за певних обставин

$$f(z, \bar{z}) = f(z) .$$

Математично цю вимогу якраз і можна сформулювати у вигляді рівності нулю похідної комплексної функції за аргументом \bar{z} .

Дійсно

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u(x, y) + iv(x, y)) = \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + i \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Прирівнюючи нулю окремо дійсну і уявну частини лівої частини останнього рівняння ми і отримуємо умови Коші-Рімана, тобто умову диференційованості функції в області, де ці умови виконуються.

Використання комплексної форми запису функції та її похідної часто корисне у різних фізичних застосуваннях теорії. В якості приклада розглянемо двовимірне електростатичне поле.

Двовимірне електростатичне поле. Нехай $\mathbf{E}(x, y)$ – напруженість цього поля

$$\mathbf{E}(x, y) = \mathbf{i}E_x(x, y) + \mathbf{j}E_y(x, y).$$

Ця вектор-функція задовольняє рівнянням Максвелла (Maxwell⁵). В області, де відсутні заряди, ці рівняння мають вигляд

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(x, y) = 0,$$

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{E}(x, y) = 0.$$

Замість векторної функції $\mathbf{E}(x, y)$ розглянемо комплексну функцію

$$E(z) = E_x(x, y) + iE_y(x, y).$$

Вище було показано, що

$$\bar{\nabla} E(z) = \operatorname{div} \mathbf{E}(x, y) + \operatorname{rot}_z \mathbf{E}(x, y).$$

Врахувавши рівняння Максвелла отримаємо

$$\bar{\nabla} E(z) = 0.$$

Останнє можна записати так

$$\frac{\partial E(z)}{\partial z} = 0.$$

Отже, одне звичайне диференціальне рівняння щодо комплексної функції еквівалентне системі двох диференціальних рівнянь з частинними похідними щодо дійсної, але векторної функції. Знайшовши функцію $E(z)$, ми тим самим знайдемо і функцію $\mathbf{E}(x, y)$.

Аналітичні функції. Існує три споріднених терміни: аналітична функція, голоморфна функція, регулярна функція. Останні два за сенсом тотожні. Перші два відрізняються. Якщо мова йде про комплексні функції комплексного аргументу, то і

⁵ Максвелл Джеймс Клерк (13.06.1831 - 5.09.1879) - англійський фізик

перші два терміни збігаються. Термін "аналітична функція" має певну сферу вжитку і за межами комплексного аналізу, тому часто вживають другий і третій терміни. Ми надалі вживатимемо саме термін "аналітична функція", оскільки він є значно популярнішим, а наш виклад не виходить за межі комплексного аналізу. Аналітичні функції займають центральне місце у теорії функцій комплексної змінної та в різних математичних і фізичних застосуваннях. Поняття аналітичної функції можна сформулювати виходячи з її диференційних і інтегральних властивостей та можливості розвинення у степеневий ряд. У цьому параграфі ми розглянемо перший із зазначених трьох варіантів означення аналітичної функції. Перш за все зауважимо, що поняття диференційованості і аналітичності функцій не тотожні. Кожна функція, аналітична у даній точці, диференційована у цій точці, але не кожна функція диференційована у даній точці є аналітичною у цій точці. Тобто точка, де функція диференційована, може бути ізольованою, а точка де функція аналітична - ізольованою бути не може. Функція аналітична в точці лише у разі, якщо ця функція диференційована не лише в цій точці але і хоча б у як завгодно малому її околі. Тобто аналітичність є не локальною характеристикою функції, а швидше інтегральною. Особливо чітко це видно при інтегральному означенні аналітичної функції або при використанні інтегрального представлення для похідних функції.

Означення. Якщо функція $f(z)$ диференційована в кожній точці деякої області, а її похідна при цьому неперервна, то функція $f(z)$ називається аналітичною в зазначеній області.

Таким чином функція, диференційована в дискретному наборі точок, або в усіх точках деякої кривої не є аналітичною. Наприклад функція $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ диференційована в точці $z = 0$, але не аналітична в цій точці. Функція $f(z) = x^2 + 2ixy$

диференційована в усіх точках дійсної осі $y = 0$, $-\infty < x < \infty$ але ніде не аналітична. Функція $f(z) = z^3$ диференційована в усіх точках комплексної площини, крім нескінченно віддаленої. Відповідно вона аналітична в усіх точках комплексної площини крім нескінченно віддаленої. Зазначимо, що всі основні елементарні функції є аналітичними функціями скрізь у комплексній площині, за виключенням скінченної або зліченої кількості їх особливих точок, а саме: степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні, гіперболічні та обернені гіперболічні функції. Характерною ознакою неаналітичності функції у всій комплексній площині є наявність у її складі функцій типу $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$. Хоча наявність парного числа таких функцій може приводити якраз до аналітичності функції, наприклад, $\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = z$, очевидно, є аналітичною функцією.

Повертаючись до двовимірного електростатичного поля можна довести, що довільна аналітична функція може описувати зазначене поле. Дійсно, це поле можна описати потенціалом, який пов'язаний з напруженістю поля співвідношенням

$$\mathbf{E}(x, y) = -\nabla v(x, y)$$

або

$$\mathbf{E}(x, y) = -\mathbf{i} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \mathbf{j} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} .$$

У комплексному варіанті запис має бути таким

$$E(z) = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} .$$

Якщо ввести комплексний потенціал

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

вважаючи його аналітичною функцією, то для напруженості електричного поля, використовуючи умову Коші-Рімана

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} ,$$

можна записати і такий вираз

$$E(z) = -\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial x} = -i \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) =$$

$$= -i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -i \frac{\overline{\partial f(z)}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \nabla f(z).$$

Оскільки, як зазначалось вище,

$$\overline{\nabla} E(z) = 0 ,$$

то мовою потенціалу це виглядає так

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 f(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(z)}{\partial y^2} = 0 ,$$

а також

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 v(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(z)}{\partial y^2} = 0 .$$

Останнє рівняння називається рівнянням Лапласа⁶ (Laplace). Отже, потенціал електростатичного поля у відсутності зарядів задовольняє рівнянню Лапласа.

Двовимірна безвихрова течія нестисливої рідини.

Аналітична функція може описувати і безвихрову плоску течію нестисливої рідини, де також $f(z)$ називається комплексним потенціалом або характеристичною функцією течії. Дійсна частина $u(x, y)$ і уявна $v(x, y)$ називаються відповідно потенційною функцією і функцією тока. Лінії $u(x, y) = const$ називаються екіпотенційними лініями або лініями рівня, а лінії $v(x, y) = const$ називаються лініями тока. Кожна точка рідини, якщо розглядати її як суцільне середовище, рухається за лініями

⁶ Лаплас П'єр Сімон (23.03.1749 - 5.03.1827) - французький астроном, математик і фізик.

тока. Її швидкість визначається через характеристичну функцію майже аналогічно тому, як виражається напруженість електричного поля через потенціал поля

$$\mathbf{V}(x, y) = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} = \nabla u(x, y)$$

у векторну запису або

$$V(z) = V_x + iV_y = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \overline{\nabla} u(x, y)$$

у комплексному запису.

Очевидно проєкції швидкості на координатні осі будуть наступними

$$V_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

або відповідно до умов Коші-Рімана

$$V_x = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Циркуляції вектора швидкості вздовж замкненої кривої L , що обходиться у додатному напрямі, називається величина

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \oint_L V_x dx + V_y dy = \oint_L \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \oint_L \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Циркуляція характеризує завихреність течії рідини.

Потоком вектора швидкості через замкнену криву L називається величина

$$\begin{aligned} N_L &= \oint_L V_x dy - V_y dx = \oint_L \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx = \\ &= \oint_L \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Цей потік визначає кількість рідини, що перетинає криву L за одиницю часу.

Формули для циркуляції і потоку можна об'єднати в одну формулу і використати для обчислення утвореної комплексної функції ефективні методи інтегрування комплексного аналізу, наприклад, теорему про лишки,

$$\Gamma_L + iN_L = \oint_L f(z)dz.$$

Приклад 24. Для комплексного потенціалу $f(z) = z^2$ знайти потенціал швидкостей, функцію току, лінії рівня, лінії тока, швидкість, циркуляцію і потік.

Розв'язання. Оскільки

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

то потенціал швидкості

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

а функція току

$$v(x, y) = 2xy.$$

Очевидно, що лінії рівня або еквіпотенційні лінії є гіперболами

$$x^2 - y^2 = \text{const},$$

а лінії тока гіперболи

$$xy = \text{const}.$$

Вектор швидкості визначатиметься так

$$V(z) = \overline{f'(z)} = 2\bar{z} = 2x - i2y.$$

Звідси координати швидкості

$$V_x = 2x, \quad V_y = -2y.$$

Модуль швидкості

$$V(x, y) = |V(z)| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Оскільки, відповідно до теореми Коші для однозв'язаної області,

$$\oint_L f'(z)dz = 0,$$

то дана течія не є завихреною і через довільний замкнений контур L її потік дорівнює нулю.

Властивість аналітичності комплексної функції вже має своїм наслідком гармонійність дійсної та уявної її частин. Останнє означає, що вони задовольняють рівнянню Лапласа. Дійсно, якщо відповідним чином здиференціювати умови Коші-Рімана, то отримуємо

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Склавши обидва рівняння матимемо

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогічно можна отримати і рівняння щодо функції $v(x, y)$, а саме

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Аналітична функція, якщо це тільки не стала величина, завжди має особливі точки. З точки зору теорії електричного поля особливі точки відповідають джерелам поля. Як вже зазначалось вище, аналітичність функції в даній точці означає, що функція диференційована не тільки в зазначеній точці, але і в деякому її околі.

Приклад 25. Побудувати аналітичну функцію за її уявною частиною:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$v(x, y) = x^3 / 3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 / 3.$$

Розв'язання. Умови Коші-Рімана розглядатимемо як диференційні рівняння щодо функції $u(x, y)$. Їх вільними членами будуть такі похідні

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = x^2 + 4xy - y^2 ,$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x^2 - 2xy - 2y^2 .$$

Тоді

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2x^2 - 2xy - 2y^2 ,$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -x^2 - 4xy + y^2 .$$

Інтегруємо перше з цих рівнянь

$$u(x, y) = 2x^3 / 3 - x^2 y - 2xy^2 + \varphi(y) ,$$

де $\varphi(y)$ – довільна невідома функція. Для її знаходження отриманий результат потрібно підкласти у друге рівняння. Оскільки

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -x^2 - 4xy + \varphi'(y) ,$$

то шукане рівняння буде таким

$$-x^2 - 4xy + \varphi'(y) = -x^2 - 4xy + y^2 .$$

Звідси

$$\varphi'(y) = y^2 .$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо

$$\varphi(y) = y^3 / 3 + c ,$$

де c – довільна стала. Отже, за відомою уявною частиною аналітичної функції ми знайшли її дійсну частину з точністю до довільної сталої

$$u(x, y) = 2x^3 / 3 - x^2 y - 2xy^2 + y^3 / 3 + c .$$

Приклад 26. Побудувати аналітичну функцію за її дійсною частиною

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) .$$

Розв'язання. Метод повного відтворення аналітичної функції, використаний у попередньому прикладі, не єдиний. Можливі й інші. Покажемо, принаймні, ще один. Очевидно, що

$$v(x, y) = \int dv.$$

У свою чергу, за означенням,

$$dv(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy.$$

Отже,

$$v(x, y) = \int \left(\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy \right).$$

Згідно умовам Коші-Рімана перейдемо до інтеграла від відомої функції

$$v(x, y) = \int \left(-\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy \right).$$

Після обчислення відповідних похідних

$$v(x, y) = -2 \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} + 2 \int \frac{x dy}{x^2 + y^2}.$$

Звідси

$$v(x, y) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x} \right) - 2 \arctan \left(\frac{x}{y} \right) + c.$$

Серед важливих характеристик аналітичних функцій є така як однолистність функцій. Розглянемо цю характеристику докладніше. Аналітична функція є однолистною в області G , якщо для довільної пари точок $z_1 \neq z_2$ $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ще однією умовою однолистності є відмінність від нуля похідної функції $w = f(z)$ в усіх точках області G , тобто $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in G$. У цьому разі існує функція, обернена $f^{-1}(z)$ щодо функції, і ця функція аналітична і однозначна. Таким чином, однолистна функція $w = f(z)$ здійснює взаємно однозначне відображення області G комплексної площини z в область D комплексної

площини w . Наприклад функція $w = z^2$ є однолисною у верхній, а також і в нижній півплощині. В якості області однолистності можна взяти також праву або ліву півплощину. Взагалі, якщо через початок координат провести довільну пряму, то області однолистності знаходитимуться по різні боки від цієї прямої.

1.5. Особливі точки аналітичних функцій

Одним з головних факторів, що визначає властивості аналітичних функцій є наявність у них нулів та особливих точок.

Ряд Тейлора⁷ (Taylor). Ще раз наведемо класифікацію ізольованих особливих точок аналітичних функцій. Найпростіше ці точки класифікувати за виглядом степеневого ряду для аналітичних функцій в їх околі. Розглянемо спочатку однозначні аналітичні функції. В околі звичайної точки z_0 степеневий ряд для них має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де хоча б один з коефіцієнтів ряду відмінний від нуля. Ці коефіцієнти безпосередньо визначаються функцією $f(z)$. Такий зв'язок існує, наприклад, у диференційній формі. Для його отримання в останньому виразі спрямуємо z до z_0 . Маємо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0,$$

тобто

$$c_0 = f(z_0).$$

Здиференціюємо даний степеневий ряд

⁷ Тейлор Брук (18.08.1685 - 29.12.1731) - англійський математик.

$$\frac{df(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

і знову спрямуємо z до z_0 . Маємо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{df(z)}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = c_1,$$

тобто

$$c_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{df(z)}{dz}.$$

Нарешті, виконавши цю процедуру n раз, отримаємо вираз для n -го коефіцієнта степеневого ряду

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dz^n}, \quad n \geq 0.$$

Вирази для коефіцієнтів степеневого ряду можна отримати і в інтегральній формі, як буде показано далі,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Тут γ - довільний замкнений контур, що охоплює точку z_0 , всередині якого відсутні особливі точки функції $f(z)$, і орієнтований у додатному напрямку. Тотожність обох означень впливає з інтегрального представлення похідної аналітичної функції

$$\frac{d^n f(z_0)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Можливість інтегрального представлення похідної - це ще один важливий результат теорії аналітичних функцій. Звичайно, те, що похідну можна обчислювати як інтеграл важливо для розуміння похідної аналітичної функції в точці, а значить і самого факту аналітичності функції в цій точці. Інтегральне представлення похідної важливе також і для обчислення певного класу інтегралів, для яких їх обчислення може зводитись до обчислення похідної.

Розглянутий степеневий ряд називається рядом Тейлора. Природно, що він не має розбіжних доданків в околі звичайної точки z_0 . Якщо перші m коефіцієнтів ряду дорівнюють нулю, то точка z_0 є нулем m -го порядку. Зазначимо, що аналітична функція може мати нескінченну кількість нулів лише у відкритій або необмеженій області. Областю збіжності ряду Тейлора є круг з центром у точці z_0 і радіусом R , що дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки функції $f(z)$ z_1 (дивися наступний малюнок). Цей радіус називається радіусом збіжності ряду Тейлора. Якщо функція, що розвивається в ряд, відома, то радіус збіжності можна визначати у наведений вище спосіб. Якщо відомий сам ряд, то радіус збіжності можна визначати за властивостями його коефіцієнтів

$$R = 1/l,$$

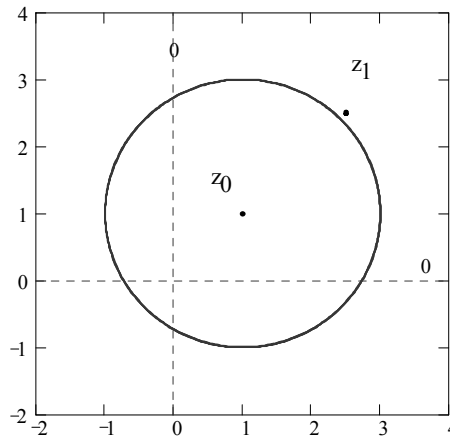
де

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Очевидно, що всередині круга збіжності ряду Тейлора, він збігається до аналітичної функції, а отже його можна нескінченну кількість разів диференціювати та інтегрувати. Причому радіус збіжності отриманого ряду збігається з радіусом збіжності вихідного ряду.

Можливість розвинення функції комплексної змінної у збіжний ряд Тейлора в області тотожна аналітичності функції у цій області. Саме ця ознака може братись за означення аналітичності функції. Тоді умови Коші-Рімана будуть наслідком такого означення аналітичності. Дійсно, з можливості розвинення функції в ряд Тейлора у певній області впливає її диференційованість у цій області через скінченність і однозначність коефіцієнтів ряду Тейлора. У свою чергу, з диференційованості впливають умови Коші-Рімана. Ефективність представлення аналітичних функцій степеневими

рядами важлива через те, що саме таке представлення у явному вигляді висвітлює внутрішню природу, симетрію функцій.



Мал. 14. Область збіжності ряду Тейлора

Наведемо деякі приклади розвинень функцій в ряд Тейлора (Маклорена) в околі нуля:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} ,$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} ,$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n .$$

Оскільки єдиною особливою точкою цих функцій є нескінченно віддалена точка, то областю збіжності цих рядів є вся комплексна площина, за виключенням нескінченно віддаленої точки. Порівняння трьох наведених степеневих рядів відразу робить очевидною формулу Ейлера

$$\exp(z) = \cos(z) + i \sin(z) .$$

Ряд Лорана⁸. У кільці, з внутрішнім радіусом, рівним відстані від точки z_0 до особливої точки z_1 , а зовнішній - від точки z_0 до наступної по віддалі від неї особливої точки z_2 , аналітичну функцію $f(z)$ знову можна представити збіжним степеневим рядом, але це вже буде ряд Лорана (дивися наступний малюнок). Ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Коефіцієнти цього ряду те; безпосередньо визначаються функцією $f(z)$. Найпростіше цей зв'язок виразити в інтегральній формі

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \in Z .$$

Ця форма є універсальною. Тут γ - довільний замкнений контур, що охоплює точку z_0 і лежить в кільці збіжності ряду Лорана, орієнтований у додатному напрямку. У разі, якщо розвинення виконується в околі полюсу, коефіцієнти можна представити і у диференційній формі, про що мова буде йти далі. Така ж можливість виникає, якщо функція має у внутрішній частині кільця лише полюси.

Отже, кожна пара сусідніх за відстанню від точки z_0 особливих точок виділяє кільце, де ряд Лорана для функції $f(z)$ збіжний. Сукупність всіх ізольованих особливих точок аналітичної функції покриває комплексну площину системою концентричних кілець з центром у точці z_0 , у кожному з яких ряд Лорана збігається, розбігаючись лише на їх межах. Якщо ж точка z_0 є ізольованою особливою точкою аналітичної функції $f(z)$, то степеневий ряд для цієї функції є рядом Лорана вже у

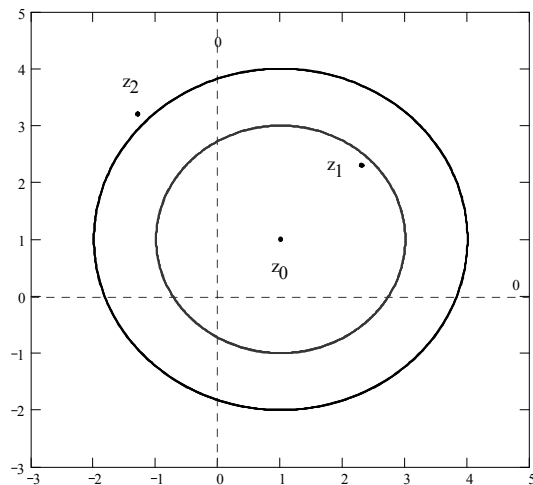
⁸ Лоран П'єр Альфонс (18.07.1813 - 2.09.1854) - французький математик та військовий інженер.

безпосередньому околі точки z_0 . У разі полюсу порядку m індекс підсумовування ряду Лорана набуває значень $n = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. В безпосередньому околі (нескінченно малому) член, що дає найбільший внесок у суму ряду Лорана має від'ємний степінь m . Тоді областю збіжності ряду Лорана є кільце з центром у точці z_0 із довільним як завгодно малим внутрішнім радіусом. Зовнішнім радіусом є відстань від точки z_0 до найближчої особливої точки z_1 .

Якщо в околі ізольованої особливої точки, що не є нескінченно віддаленою, степеневий ряд має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

то ця точка називається істотно особливою точкою. Степеневий ряд у цьому разі теж називається рядом Лорана. Він містить нескінченно багато розбіжних членів.



Мал. 14. Область збіжності ряду Лорана

Приклад 27. Функцію $f(z) = \frac{1}{1-z}$ розвинути в ряд Лорана за степенями $z-1$ (в околі точки $z_0 = 1$).

Розв'язання. За означенням ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n.$$

Порівнюючи цей ряд з виразом для функції $f(z)$ отримаємо, що

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ -1, & n = -1 \end{cases}.$$

Областю збіжності цього ряду є вся комплексна площина за виключенням точки $z = 1$.

Приклад 28. Функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$ розвинути в ряд Лорана у кільці $0 < |z-1| < 2$.

Розв'язання. За означенням ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n.$$

Областю збіжності ряду для даної функції є кільце з центром у точці $z_0 = 1$. Менший радіус кільця може бути нескінченно малим. Більший радіус не перевищує відстані до другої особливої точки функції $f(z)$. Коефіцієнти цього ряду можна знайти виходячи з загального виразу для них

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-1)^2 (z-1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z+1)^2 (z-1)^{n+3}}.$$

Тут Γ – довільний контур, що належить зазначеному вище кільцю, і охоплює точку $z_0 = 1$. Для $n \leq -3$ інтегранда всередині контуру інтегрування особливих точок не має і відповідно до теореми Коші для одно зв'язаної області $c_n = 0$. Для $n > -3$

інтегранда має в точці $z=1$ полюс порядку $n+3$. Для $n=-2$ відповідно до теореми про лишки (дивися наступну главу)

$$c_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)} = \operatorname{res} \left[\frac{1}{(z+1)^2(z-1)}, 1 \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{(z+1)^2(z-1)} = \frac{1}{4}.$$

Для $n > -2$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z+1)^2(z-1)^{n+3}} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} (z-1)^{n+3} \frac{1}{(z+1)^2(z-1)^{n+3}} \right] = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}.$$

Отже, шуканий ряд матиме вигляд

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} (z-1)^n =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \dots$$

Приклад 29. Функцію $f(z) = z^3 \cos(1/z)$ розвинути в ряд Лорана в околі точки $z_0 = 0$.

Розв'язання. Точка $z_0 = 0$ є істотно особливою точкою даної функції. У цьому разі загальний алгоритм знаходження коефіцієнтів ряду Лорана відсутній. Найпоширенішим підходом для задач даного типу є використання вже відомих розвинень. У даному разі відомим розвиненням можна вважати таке

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

з заміною z на $1/z$. Отже,

$$z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} = z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \dots$$

Приклад 30. Знайти області збіжності ряду Лорана для функції $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$. При цьому $z_0 = 0$.

Розв'язання. Дану дробоворациональну функцію можна розкласти на прості дроби

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}.$$

Звідси видно, що ця функція має дві особливі точки - полюси першого порядку $z = -2$ і $z = 1$. Очевидно, точка $z_0 = 0$ є звичайною точкою вихідної функції. На комплексній площині можна виділити три області, де степеневий ряд для даної функції буде збіжним. Це круг $|z| < 1$. Тут функцію можна розвинути в ряд Тейлора. Це кільце $1 < |z| < 2$. Тут функцію можна розвинути в ряд Лорана. Це кільце $|z| > 2$. Тут функцію можна розвинути в ряд Лорана. Нескінченно віддалена точка є звичайною точкою функції.

Всі необхідні розвинення для даної функції можна виконати не використовуючи загальних формул ні для коефіцієнтів ряду Тейлора, ні для коефіцієнтів ряду Лорана. Досить використати розвинення, відоме як геометрична прогресія. В області $|z| < 1$ функцію можна представити так

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z/2)} - \frac{1}{1 - z}.$$

Оскільки у кожному з доданків знаменник геометричної прогресії за модулем менше одиниці, то

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right] z^n.$$

В області $1 < |z| < 2$ функцію можна представити так

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-z/2)} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z}.$$

Знаменник геометричної прогресії у кожному з доданків за модулем менше від одиниці, тому

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}, & 0 \leq n < \infty \\ 1, & -\infty < n \leq -1 \end{cases}.$$

В області $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - (-2/z)} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z}.$$

Тоді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n 2^n + 1 \right] \frac{1}{z^{n+1}}.$$

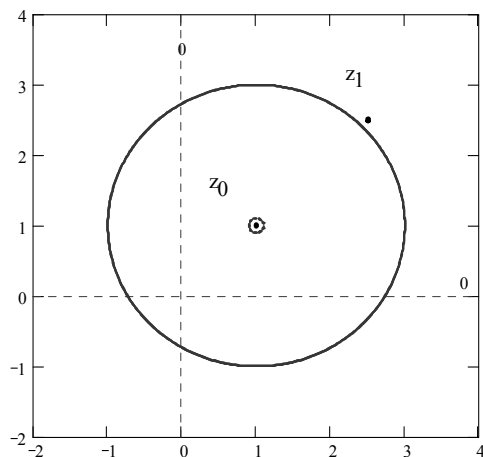
Цікаво, що в жодній з розглянутих областей ряд не містить розбіжних членів, що пояснюється тим, що точка $z_0 = 0$ є звичайною точкою функції. Прот, на границях кожної з областей збіжності відповідні ряди розбігаються.

Ряд Пуїзю⁹. Інших особливих точок, відмінних від полюсів скінченного і нескінченного порядків, у однозначних аналітичних функцій бути не може. У багатозначних аналітичних функцій є ще один тип особливих точок, що називаються точками галуження. Це точки спільні для всіх гілок даної багатозначної функції. Степеневий ряд для багатозначної аналітичної функції в околі точки галуження має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n/k} (z - z_0)^{n/k}.$$

⁹ Пуїзю Віктор Олександр (16.04.1820 - 9.09.1883) - французький математик і астроном

Ця точка називається точкою галуження k -го порядку (k може бути як скінченим, так і нескінченим натуральним числом відповідно до того, чи дана багатозначна функція еквівалентна скінченій або нескінченій кількості однозначних аналітичних функцій), а степеневий ряд називається рядом Пуїзо. Даний ряд, очевидно, не містить розбіжних доданків. Областю його збіжності є круг з центром в особливій точці і радіусом, що дорівнює відстані від цієї точки до найближчої до неї особливої точки функції $f(z)$. Для кожної окремої гілки багатозначної аналітичної функції зазначений круг містить розріз вздовж довільного радіуса цього кола. Довільність цього розрізу безпосередньо пов'язана з довільністю вибору області означення для функції $\arg(z)$. При перетині розрізу і відбувається перехід однієї гілки багатозначної аналітичної функції у іншу. Різновидів ряду Пуїзо стільки, скільки різновидів рядів Тейлора і Лорана разом узятих, оскільки зовнішня відміна першого від останніх лише у наявності дробового показника степеню та індексу у коефіцієнтів.



Мал. 15 Область збіжності ряду Лорана в околі точки z_0

Якщо в околі ізольованої особливої точки ряд Пуїзю має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_{n/k} (z - z_0)^{n/k},$$

то ця точка є алгебраїчною точкою галуження, тобто вона одночасно є полюсом порядку m і точкою галуження порядку k .

Якщо в околі ізольованої особливої точки ряд Пуїзю має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n/k} (z - z_0)^{n/k},$$

то ця точка називається трансцендентною точкою галуження, тобто вона, одночасно, є істотно особливою і точкою галуження порядку k .

Якщо ізольована особлива точка одночасно є істотно особливою і точкою галуження нескінченного порядку, то така точка називається логарифмічною точкою галуження.

Нескінченно віддалена точка. Розглянемо тепер розвинення у степеневі ряди в околі нескінченно віддаленої точки. Околом такої точки є зовнішня частина круга довільного скінченного радіуса з центром у початку координат. У випадку, коли ізольованою особливою точкою є нескінченно віддалена точка, визначення її характеру має певні особливості. Так, якщо нескінченно віддалена точка є полюсом порядку m , то ряд Лорана в її околі має вигляд:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m c_n z^n.$$

Тут m є показником степеню найбільш розбіжного члена ряду при наближенні до нескінченно віддаленої точки. Якщо нескінченно віддалена точка є істотно особливою, то ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Цей ряд містить нескінченну кількість розбіжних доданків в околі нескінченно віддаленої точки. Якщо нескінченно віддалена точка є алгебраїчною точкою галуження, то ряд Пуїзьо має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m c_{n/k} z^{n/k}.$$

Якщо нескінченно віддалена точка є трансцендентною точкою галуження, то ряд Пуїзьо має вигляд:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n/k} z^{n/k}.$$

Класифікація особливих точок має надзвичайно важливе значення в теорії диференціальних рівнянь. Наявність особливих точок у коефіцієнтів рівняння приводить до наявності тих самих особливих точок і у розв'язків рівняння, хоча характер перших і других може не збігатись. Ця обставина дозволяє задавати характер особливості розв'язку як своєрідну граничну умову задачі. Розглянемо детальніше поведінку аналітичних функцій в околі їх особливих точок.

Полюси скінченного порядку. Найпростішим типом особливих точок є полюси скінченного порядку. При наближенні до цієї точки у комплексній площині з будь-кого напрямку значення модулю функції прямує до нескінченості. У безпосередньому околі полюса m -го порядку аналітичну функцію можна представити у вигляді:

$$f(z) = \frac{A}{(z - z_0)^m}.$$

У самій точці вважається, що $|f(z_0)| = \infty$. Тут A - довільна стала. Якщо полюс лежить на дійсній осі, то у полюсі парного порядку функція має нескінченні ліву і праву границі, що

збігаються за знаком (дивися у випадку дійсної змінної наступний малюнок).

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = +\infty$$

У полюсі непарного порядку, що лежить на дійсній осі, ліва і права границі є нескінченими але відрізняються знаками. У залежності від знаку сталої A (дивися у випадку дійсної змінної наступний малюнок):

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = -\infty,$$

або

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = +\infty.$$

Нагадаємо, що в теорії функцій комплексної змінної точки $x = +\infty$, $x = -\infty$ є однією нескінченно віддаленою точкою $z = \infty$.

Істотно особливі точки. В істотно особливих точках функція не має певного значення. В залежності від способу прямування до такої особливої точки ми можемо отримати будь-яке межове значення функції або її похідних у цій точці.

Точки галуження. Кожна багатозначна функція еквівалентна певній скінченій або нескінченій сукупності однозначних функцій які називаються її гілками. Розглянемо наприклад наступну степеневу функцію

$$f(z) = z^{1/m}.$$

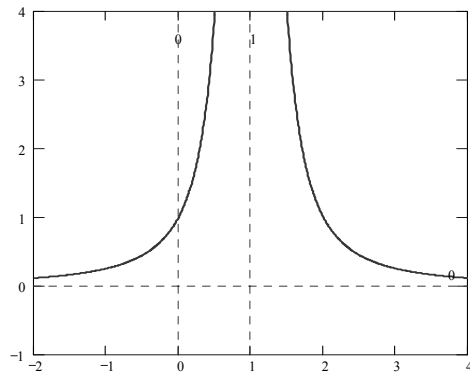
Очевидно, що для натуральних m ця функція є m значною і еквівалентна наступним m однозначним функціям:

$$f_1(z) = |z|^{1/m} \exp \left[i \frac{\arg(z) + 2\pi}{m} \right],$$

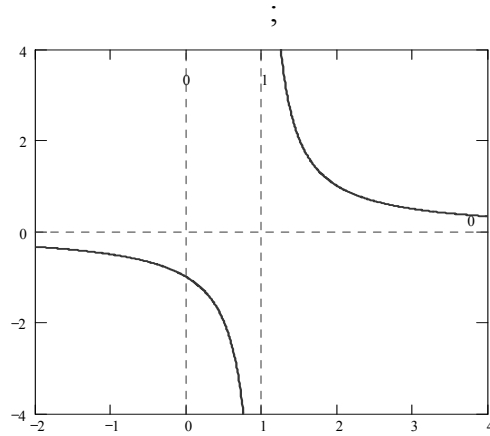
$$f_2(z) = |z|^{1/m} \exp \left[i \frac{\arg(z) + 4\pi}{m} \right],$$

.....,

$$f_m(z) = |z|^{1/m} \exp\left[i \frac{\arg(z)}{m}\right].$$



Мал. 17. Полюс парного порядка



Мал. 16. Полюс нечетного порядка

Областю означення кожної функції є вся комплексна площина. Єдиними точками комплексної площини, де значення всіх гілок збігаються, є початок координат і нескінченно віддалена точка. Тут

$$f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_m(0) = 0 ,$$

$$f_1(\infty) = f_2(\infty) = \dots = f_m(\infty) = \infty$$

В усіх інших точках комплексної площини

$$f_1(z) \neq f_2(z) \neq \dots \neq f_m(z) .$$

Точки, спільні для всіх гілок називаються точками галуження. Ми бачимо, що як багатозначна функція, так і всі її гілки визначені у цих точках. Точка галуження функції може бути точкою галуження і для її похідних, або особливою точкою іншого типу. Це і означає, що відповідна багатозначна функція у точках галуження не є аналітичною, що і виправдовує статус точок галуження як особливих точок. Характерною їх властивістю є те, що при їх обході за замкненим контуром одна гілка багатозначної функції переходить у іншу. Дійсно, при повному обході початку координат у додатному напрямку, що є також і обходом нескінченно віддаленої точки, аргумент кожної гілки змінюється на 2π ($\arg(z) \rightarrow \arg(z) + 2\pi$). У висліді:

$$f_1(z) \rightarrow |z|^{1/m} \exp \left[i \frac{\arg(z) + 2\pi + 2\pi}{m} \right] = f_2(z) ,$$

$$f_2(z) \rightarrow |z|^{1/m} \exp \left[i \frac{\arg(z) + 2\pi + 4\pi}{m} \right] = f_3(z) ,$$

.....,

$$f_m(z) \rightarrow |z|^{1/m} \exp \left[i \frac{\arg(z) + 2\pi}{m} \right] = f_1(z) .$$

Крім розглянутих особливих точок можуть бути і деякі їх сполучення, перераховані у попередньому параграфі.

Крім степеневих функцій з нецілими показниками степеню, багатозначними є всі обернені тригонометричні і гіперболічні функції та логарифмічна функція:

$$\operatorname{Ln}(z) = \ln(z) + i2\pi n, \quad n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Тут

$$\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

головне значення логарифму, $z = 0$ та $z = \infty$ є для логарифма точками галуження нескінченного порядку і, одночасно, істотно особливими точками. Обернені тригонометричні та гіперболічні функції, як вже зазначалось вище, можуть бути вираженими через логарифм.

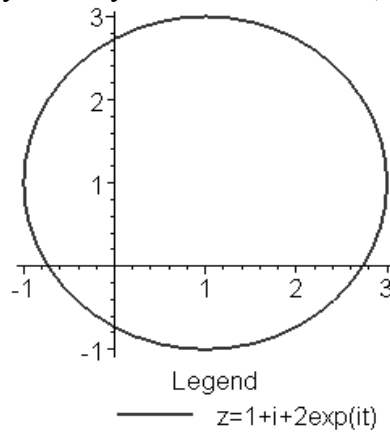
Деякі аналітичні функції мають спеціальні назви, тому ми їх тут коротко і обговоримо.

Функція, аналітична у всій комплексній площині за виключенням нескінченно віддаленої точки, називається цілою. Серед основних елементарних функцій до цілих функцій належать $\sin(z)$, $\cos(z)$, $\sinh(z)$, $\cosh(z)$, $\exp(z)$ та поліноми довільного степеню. Інші основні елементарні функції мають додаткові особливі точки. Для цілих функцій існує тісний зв'язок між рядом Тейлора і рядом Лорана. Його легко зрозуміти, якщо згадати, що коло довільного радіусу з центром у початку координат одночасно є околом звичайної точки цілих функцій $z = 0$ і околом особливої точки $z = \infty$. Для поліномів n -го степеню $z = \infty$ є полюсом n -го порядку. Для інших цілих функцій - суттєво особливою точкою. Ряд Тейлора в околі звичайної точки $z = 0$ одночасно є рядом Лорана в околі точки $z = \infty$.

Функція, аналітична у всій комплексній площині за виключенням нескінченно віддаленої точки і скінченної або зліченої кількості особливих точок типу полюсу називається мероморфною. Найпростіше мероморфну функцію можна представити часткою двох цілих функцій. Серед основних елементарних функцій мероморфними функціями є дробово-раціональні функції, $\tan(z)$, $\cot(z)$, $\tanh(z)$, $\coth(z)$. Інші основні елементарні функції мають в якості особливих точок точки галуження.

1.6. Криві у комплексній площині

Як вже зазначалось вище, у загальному випадку комплекснозначна функція комплексного аргументу здійснює відображення деякої області комплексної площини z на відповідну область іншої комплексної площини w . Якщо аргумент комплекснозначної функції дійсний, то областю означення такої функції буде множина точок, що не

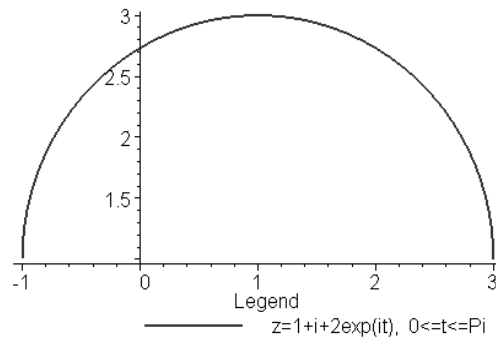


Мал. 19. Параметричне рівняння кола

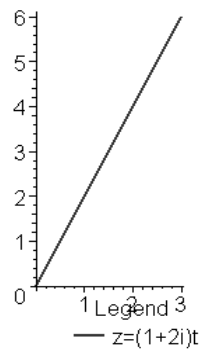
з центром у точці $1+i$ і радіусом 2 , $0 \leq t \leq 2\pi$.

утворює область. Це може бути відрізок або їх сукупність, точка або їх сукупність, що лежать на дійсній осі. Також не утворює область і область значень такої функції. Це також може бути крива або їх сукупність, точка або їх сукупність. Всі останні множини можуть розташовуватися довільним чином у комплексній площині. Якщо функція, що здійснює відображення, є неперервною, то вона є рівнянням неперервної кривої у комплексній площині, заданої у параметричній формі.

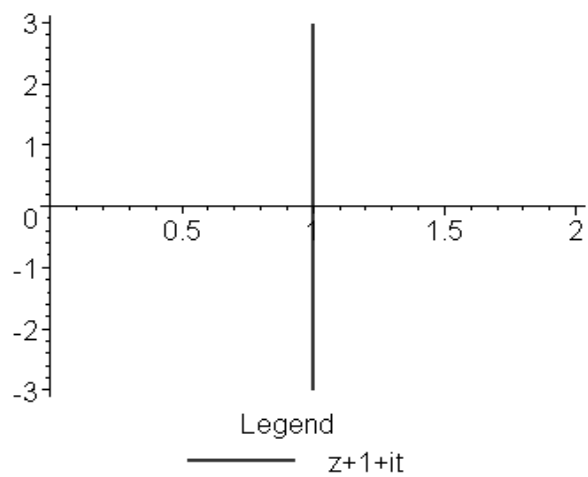
Роль параметра грає її дійсний аргумент. Напрямок проходження кривої при зростанні значень параметру, обирається за напрям кривої. Звичайно рівняння таких кривих надзвичайно важливі при інтегруванні у комплексній площині. Тут наведені графіки деяких з них.



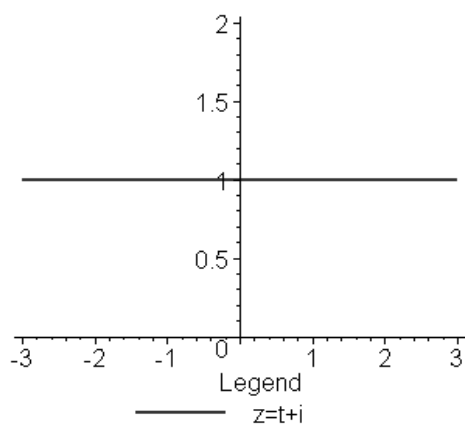
Мал. 20. Параметричне рівняння півкола з центром у точці $1+i$ і радіусом 2, $0 \leq t \leq \pi$.



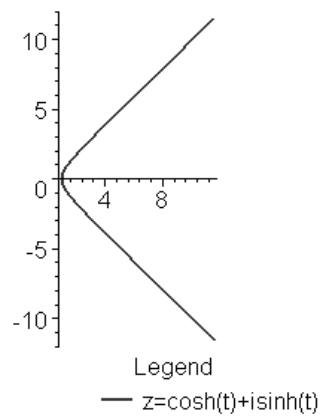
Мал. 21. Параметричне рівняння відрізка прямої, $0 \leq t \leq 3$.



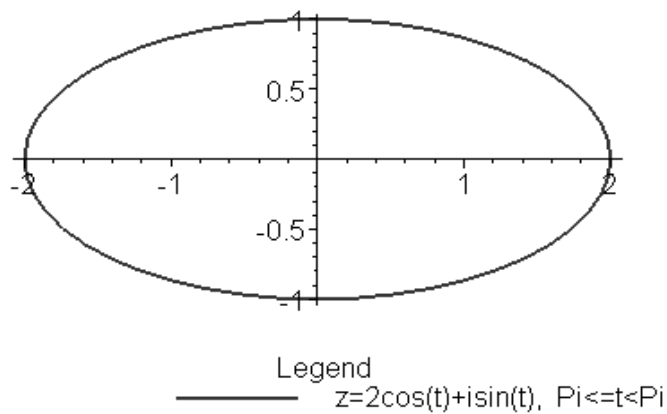
Мал. 22. Параметричне рівняння прямої, паралельної уявній осі, $-\infty < t < \infty$.



Мал. 23. Параметричне рівняння прямої, паралельної дійсній, $-\infty < t < \infty$.



Мал. 24. Параметричне рівняння правої гілки гіперболи, $-\infty < t < \infty$. Для лівої гілки рівнянням $\epsilon z(t) = -\cosh(t) + i \sinh(t)$, $-\infty < t < +\infty$.



Мал. 25. Параметричне рівняння еліпса з центром у початку координат, $-\pi < t \leq \pi$.

Параметричне рівняння кривої у комплексній площині легко отримати, якщо відповідне рівняння кривої у дійсній

площині задане у параметричній формі. Дійсно, нехай параметричне рівняння кривої у дійсній площині має вигляд

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Оскільки для довільної точки комплексної площини вірна рівність $z = x + iy$, то вона вірна і для точок, що належать даній кривій. Тобто

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + iy(t), \\ t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Якщо ж рівняння кривої у дійсній площині має вигляд

$$\begin{cases} y = f(x), \\ x_1 \leq x \leq x_2, \end{cases}$$

то його аналогом у комплексній площині буде рівняння

$$\begin{cases} z = x + if(x), \\ x_1 \leq x \leq x_2. \end{cases}$$

Така далекосяжна подібність рівнянь кривих у дійсній і комплексній площинах пов'язана з тим, що метричні властивості комплексної і дійсної площин тождні.

1.7. Конформні відображення

Відображення, здійснюване аналітичними однолистними функціями, має ряд унікальних властивостей. Нехай це відображення має вигляд

$$w = f(z).$$

Відповідно до означення похідної

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

їй можна надати простого математичного сенсу. Дійсно, довільний малий відрізок Δz в околі точки z відображується за допомогою похідної у нескінченно малий відрізок Δw в околі точки w згідно з формулою

$$\Delta w \approx f'(z)\Delta z \quad (f'(z) \neq 0).$$

Загально при такому відображенні змінюються і довжина відрізка і його напрям. Незалежність похідної аналітичної функції від довжини і напрямку відрізка Δz просто означає, що всі такі відрізки при відображенні змінять свою довжину і напрям подібним чином. Це означає, зокрема, що кут між двома таким відрізками при відображенні не зміниться. Відображення здійснюване аналітичними функціями називається конформним, тобто таким що зберігає. У даному разі воно зберігає коефіцієнт розтягу всіх нескінченно малих відрізків в околі точки z і їх кут повороту. Числові значення цих характеристик можна отримати представивши похідну у показниковій формі запису, а саме:

$$f'(z) = k \exp(i\varphi).$$

Тут

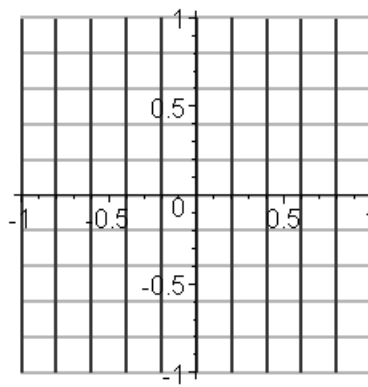
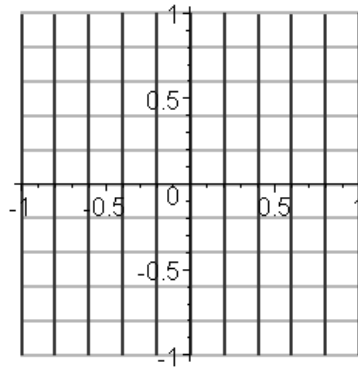
$$k = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

- коефіцієнт розтягу,

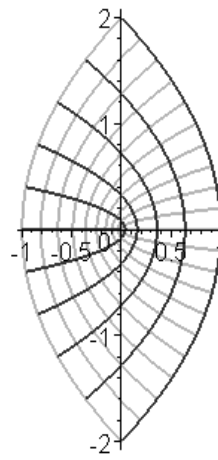
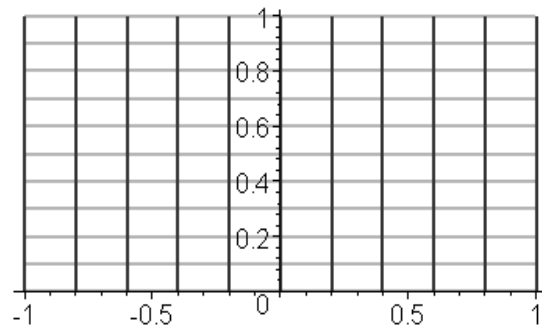
$$\varphi = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [\arg(\Delta w) - \arg(\Delta z)]$$

- кут повороту.

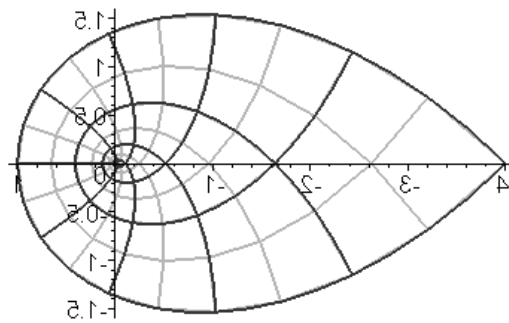
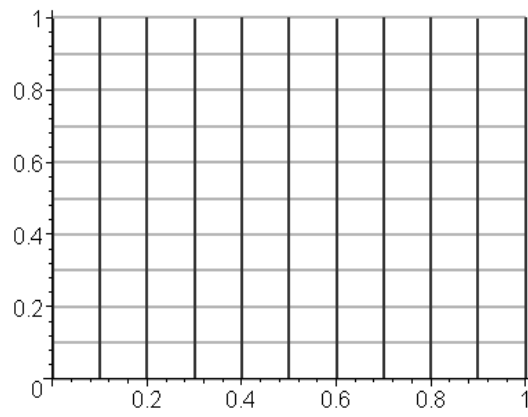
Конформність відображення, здійснюваного аналітичною функцією дозволяє це відображення також трактувати як перехід від однієї ортогональної системи координат (x, y) до іншої системи координат (u, v) , де $u = \operatorname{Re}(w)$, $v = \operatorname{Im}(w)$. Приклади деяких таких відображень - координатних ліній відповідних систем координат - наведені нижчі (ліворуч зображена комплексна площина Z , праворуч комплексна площина W).



Мал. 26. $w = z$

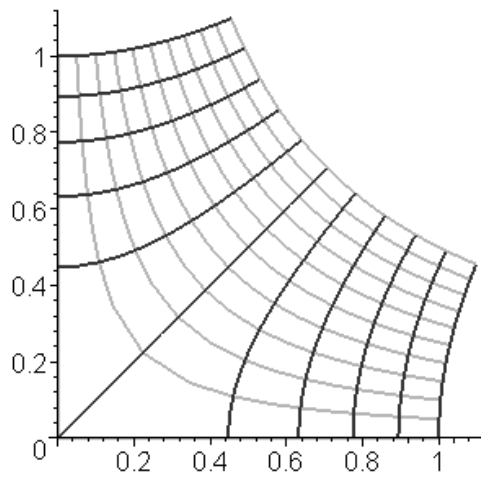
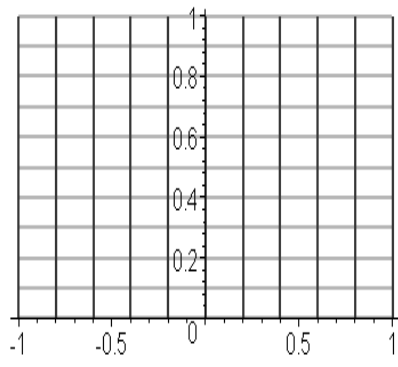


Мал. 27. $w = z^2$

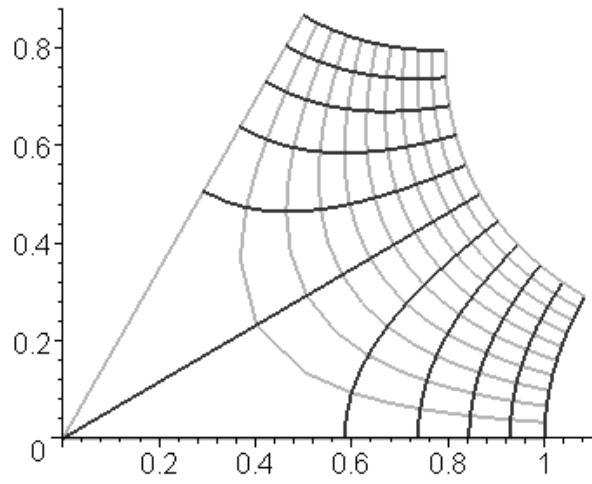


Мал. 28. $w = z^4$

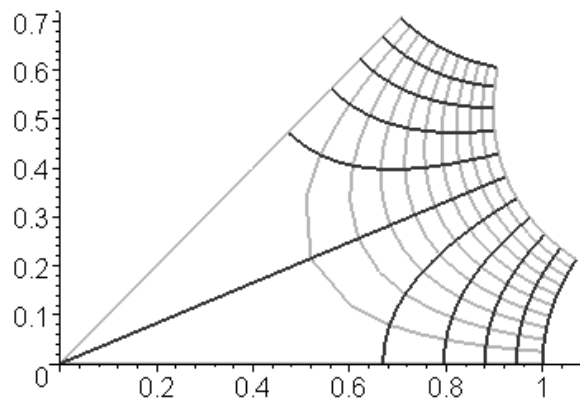
Наступні три малюнки містять графіки однієї з гілок багатозначних функцій, а саме тих, для яких $n = 0$.



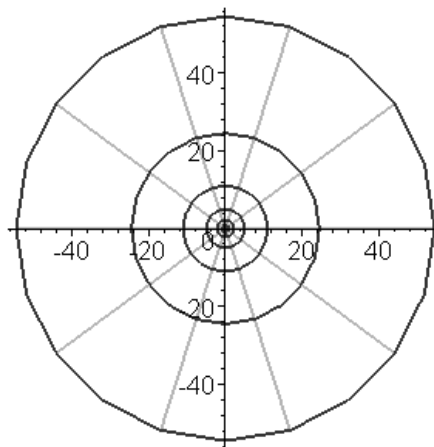
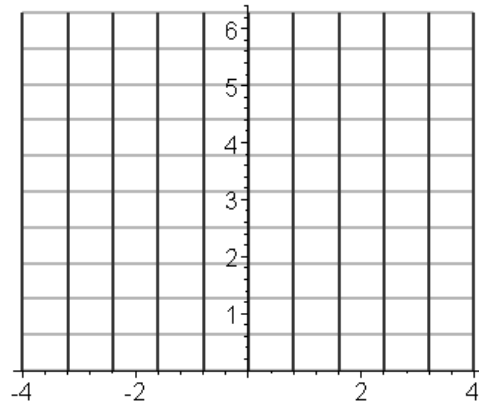
Mat. 29. $w = z^{1/2}$



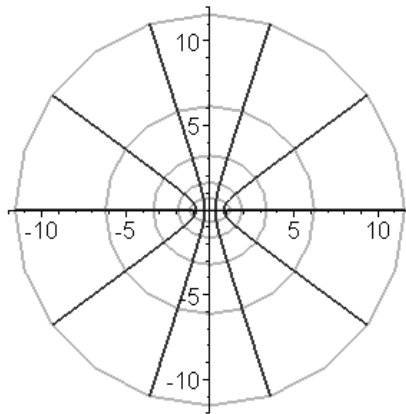
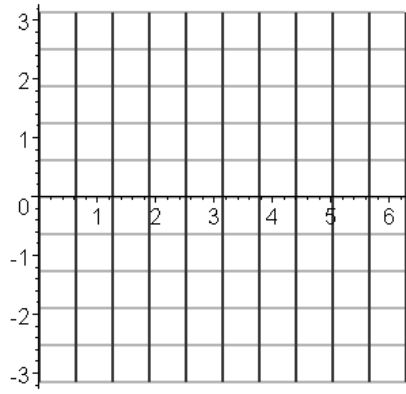
Мал. 30. $w = z^{1/3}$



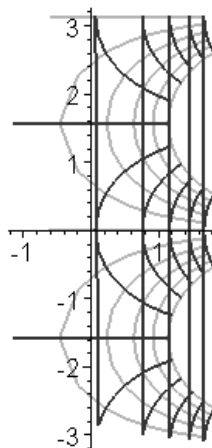
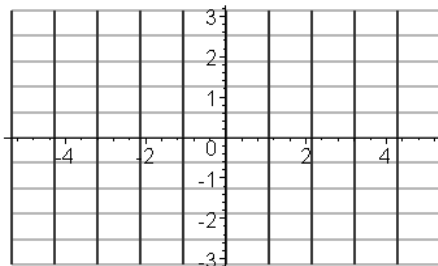
Мал. 31. $w = z^{1/4}$



Мал. 32. $w = \exp(z)$



Mat. 33. $w = \cos(z)$



Мал. 34. $w = \ln(z)$

1.8. Інтегрування комплексних функцій

Визначений та невизначений інтеграли. Найпростішим типом інтегралів від аналітичних функцій є визначені інтеграли. Вони визначаються аналогічно інтегралам від функцій однієї дійсної змінної і мають аналогічні властивості. Фактично

визначений інтеграл це інтеграл від функції комплексного аргументу, значення якого не залежить від форми контуру інтегрування, а лише від координат його початку і кінця. Відповідні комплексні числа записуються в якості меж інтегрування. Таку властивість мають лише інтеграли від аналітичних функцій, наприклад,

$$\int_a^b z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Невизначений інтеграл також має сенс лише щодо аналітичних функцій, його зручно записувати, як визначений інтеграл із змінною верхньою або нижньою межами, наприклад, інтеграл

$$\int_A^z z' dz' = \frac{z'^2}{2} \Big|_A^z = \frac{z^2}{2} + C, \quad C = -\frac{A^2}{2}.$$

Інтегральні представлення. Інтеграли із змінною верхньою межею від простих аналітичних функцій широко використовуються для представлення складніших аналітичних функцій. При цьому відповідний інтеграл у свій спосіб розкриває аналітичні властивості складної функції, ніж інші її представлення, наприклад, через степеневий ряд. Так логарифм можна представити інтегралом від степеневі функції

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln(z),$$

який можна розглядати в якості інтегрального представлення головного значення логарифму. Насправді цей інтеграл також розуміється як інтеграл, обчислений вздовж контуру. Причому контур може бути довільним, але таким, що не проходить через особливу точку інтегранди 0. З останньої рівності впливає наступний вираз для похідної логарифму

$$\frac{d}{dz} \ln(z) = \frac{1}{z}.$$

Подібні інтегральні представлення можна записати і для обернених тригонометричних та гіперболічних функцій, наприклад,

$$\arctan(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2},$$

$$\frac{d}{dz} \arctan(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Тут контур інтегрування не проходить через особливі точки інтегранди $\pm i$. Наведений інтеграл можна розглядати як аналітичне продовження у комплексну площину відомого результату для інтегралу від дійсної функції. Цей же результат можна отримати і безпосередньо, обчисливши зазначений інтеграл від аналітичної функції комплексного аргументу. У цьому разі ми отримаємо

$$\int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} \right) d\xi = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right).$$

Отриманий результат або дозволяє виразити функцію арктангенс через логарифм, або, якщо цей зв'язок отриманий в інший спосіб, довести ще в один спосіб правомірність наведеного інтегрального представлення арктангенсу. Отже,

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right).$$

Аналогічно щодо інших обернених тригонометричних функцій

$$\arcsin(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}},$$

$$\arccos(z) = \int_z^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}}.$$

З останніх двох рівностей випливає наступний зв'язок

$$\arcsin(z) = \frac{\pi}{2} - \arccos(z).$$

Подібним чином можна представити і обернені гіперболічні функції

$$\operatorname{arcsinh}(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}},$$

$$\operatorname{arccosh}(z) = \int_z^1 \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}}.$$

Особливо корисне таке представлення для спеціальних аналітичних функцій, які за своїми властивостями є складнішими за елементарні. Так, інтегральна показникова функція має вигляд

$$E_1(z) = \int_0^z \frac{\exp(-\xi)d\xi}{\xi}, \quad |\arg(z)| < \pi,$$

інтегральний тригонометричний синус

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin(\xi)d\xi}{\xi},$$

інтегральний гіперболічний синус

$$\operatorname{Shi}(z) = \int_0^z \frac{\sinh(\xi)d\xi}{\xi},$$

інтегральний тригонометричний косинус

$$\operatorname{Ci}(z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z \frac{[\cos(\xi)-1]d\xi}{\xi}, \quad |\arg(z)| < \pi,$$

інтегральний гіперболічний косинус

$$\operatorname{Chi}(z) = \gamma + \ln(z) + \int_0^z \frac{[\cosh(\xi)-1]d\xi}{\xi}, \quad |\arg(z)| < \pi.$$

Тут $\gamma = 0.577215664$ - стала Ейлера. Для гама-функції маємо

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \xi^{z-1} \exp(-\xi)d\xi, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

тощо.

Контурні інтеграли. На відміну від операцій диференціювання, обчислення визначених і невизначених інтегралів, які застосовні лише до аналітичних функцій, операція інтегрування за контуром застосовна як для аналітичних функцій, так і неаналітичних. Основним типом інтегралів стосовно функцій комплексної змінної є інтеграл $\int_L f(z)dz$. Як вже зазначалось вище, визначений і невизначений інтеграли є його частинними випадками. Цей інтеграл, у разі, коли його значення залежить від форми контуру, рівняння якого відоме, також обчислюється приведенням його до визначеного.

Якщо контур L задається рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то перехід до визначеного інтегралу здійснюється так

$$\int_L f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)]z'(t)dt .$$

Якщо інтегранду представити у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) ,$$

$$dz = dx + i dy ,$$

то обчислення контурного інтегралу від комплексної функції $f(z)$ можна привести до обчислення криволінійних інтегралів другого роду від двох дійсних функцій

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy .$$

Всі властивості інтегралів від функцій комплексної змінної є наслідком відповідних властивостей криволінійних інтегралів. Зокрема, достатньою умовою існування інтегралу за комплексною змінною є лише неперервність дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ за кожною з двох змінних.

Інтеграл за комплексною змінною у разі замкненого контуру звичайно називають контурним інтегралом, хоча ми вживатимемо цю назву і у разі незамкненого контуру.

Приклад 30. Обчислити $\int_L |z| z^2 dz$, де L – частина кола $|z|=1$, $0 \leq \arg(z) \leq \pi$, обравши за початок кривої L точку $z=1$.

Розв'язання. Рівняння кривої L запишемо у вигляді $z = \exp(it)$, $0 \leq t \leq \pi$. Тоді, $dz = i \exp(it) dt$ і

$$\int_L |z| z^2 dz = \int_0^\pi \exp(2it) i \exp(it) dt = i \int_0^\pi \exp(3it) dt = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 31. Обчислити $\int_L \exp(\bar{z}) dz$, де L – відрізок прямої з початком в точці $z_1 = 0$, і кінцем в точці $z_2 = 2\pi - 2i\pi$.

Розв'язання. Запишемо рівняння відрізка L в комплексній формі $z = (1-i)t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Тоді $\bar{z} = (1+i)t$, $dz = (1-i)dt$ і

$$\begin{aligned} \int_L \exp(\bar{z}) dz &= \int_0^{2\pi} \exp[(1+i)t](1-i) dt = \frac{1-i}{1+i} \exp[(1+i)t] \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -i \{ \exp[(1+i)2\pi] - 1 \} = i[1 - \exp(2\pi)]. \end{aligned}$$

Приклад 32. Обчислити $\int_L (z^2 + \bar{z}) dz$, де L – дуга параболи $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$.

Розв'язання. Представимо даний інтеграл від комплексної функції сумою двох криволінійних інтегралів від дійсних функцій

$$\int_L (z^2 + z\bar{z}) dz = \int_L 2x^2 dx - 2xy dy + i \int_L 2xy dx + 2x^2 dy.$$

Оскільки $y = x^3$, то $dy = 3x^2 dx$ і

$$\int_L (z^2 + z\bar{z}) dz = \int_{-1}^1 (2x^3 - 6x^6) dx + i \int_{-1}^1 (2x^4 + 6x^5) dx = -\frac{12}{7} + \frac{4i}{5}.$$

Специфічні і надзвичайно потужні методи обчислення визначених інтегралів теорії функцій комплексної змінної

застосовні лише для аналітичних функцій. Одна з головних властивостей аналітичної функції визначається теоремою Коші. Наведемо її.

Теорема Коші для однозв'язної області. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язаній області G , тоді інтеграл за довільним замкненим контуром Γ , що цілком лежить у цій області, дорівнює нулю, тобто

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 .$$

Тут контур інтегрування обходиться у додатному напрямку. Ним вважається такий, коли область, обмежена контуром інтегрування, лишається при обході ліворуч. Відповідно до умов теореми відкидається можливість наявності у функції $f(z)$ навіть ізольованих особливих точок всередині контуру Γ , або на контурі. Якщо ж такі точки z_n всередині контуру Γ є, то оточивши їх замкненими контурами γ_n , такими, щоб вони не перетинались з контуром Γ і між собою, ми утворюємо багатозв'язану область, де функція $f(z)$ є аналітичною. До повної границі цієї багатозв'язаної області при умові, що функція $f(z)$ неперервна на контурі Γ , знову можна застосувати теорему Коші для багатозв'язаної області (окремо ми її доводити не будемо), відповідно до якої

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n^-} f(z)dz = 0 .$$

Тут обхід контурів γ_n відбувається у від'ємному напрямку. Отримане рівняння є математичним формулюванням теореми Коші для багатозв'язаної області. Основний метод обчислення інтегралів за замкненим контуром базується на теоремі про лишки, яка, у свою чергу, є наслідком теореми Коші для багатозв'язаної області. Якщо ми маємо простий алгоритм знаходження інтегралів за контурами γ_n , то отримуємо і простий алгоритм для знаходження інтегралу за контуром Γ .

Доведення теореми Коші для однозв'язної області. В основі доведення теореми Коші для однозв'язної області лежить приведення інтегралу за замкненим контуром до криволінійного інтегралу другого роду. Для цього представимо інтегранду і диференціал змінної інтегрування так:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) ,$$

$$dz = dx + idy .$$

Тоді інтеграл можна записати як суму двох криволінійних інтегралів другого роду

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy .$$

Оскільки функція $f(z)$ аналітична скрізь всередині контуру Γ , то функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ в області, обмеженій цим контуром, мають неперервні частинні похідні першого порядку. Ця обставина дозволяє перейти від криволінійних інтегралів другого роду за замкненим контуром Γ до поверхневих інтегралів по поверхні, обмеженій цим контуром Γ , тобто

$$\int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy = \iint_S \left[-\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] dx dy ,$$

$$\int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy = \iint_S \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] dx dy .$$

Оскільки частинні похідні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ задовольняють умовам Коші-Рімана, то інтегранди обох поверхневих інтегралів і, відповідно, самі поверхневі інтеграли дорівнюють нулю.

Значимо, що обернена теорема (теорема Морера¹⁰) може служити означенням аналітичної функції. Наведемо цю теорему.

Означення. Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області G і інтеграл від $f(z)$ за довільним

¹⁰ Морер Джачинто (18.07.1856-7.02.1909) - італійський математик

замкненим контуром, що цілком належить G , дорівнює нулю. Тоді $f(z)$ аналітична функція в області G .

Таке означення аналітичності функції цілком еквівалентне означенням через диференційованість і розвиненість у степеневий ряд, обговореним вище, але наочно демонструє інтегральний характер самого поняття аналітичності функції.

Виходячи безпосередньо з теореми Коші для багатозв'язаної області можна отримати ряд фундаментальних результатів. Одним з них є формула Коші або інтеграл Коші. Формула Коші висвітлює ту властивість аналітичних функцій, відповідно до якої значення аналітичної функції у довільній точці всередині замкненого контуру визначається лише через її значення на самому контурі. Цей зв'язок подається інтегралом Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi .$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z} .$$

Якщо функція $f(\xi)$ аналітична скрізь всередині контуру Γ , то функція $\varphi(\xi)$ має всередині цього контуру особливу точку $\xi = z$ - полюс першого порядку. Якщо цю особливу точку оточити довільним, як завгодно малим, замкненим контуром γ , то всередині двозв'язаної області, обмеженої зовні контуром Γ , а із середини контуром γ , функція $\varphi(\xi)$ буде аналітичною. Відповідно до теореми Коші для багатозв'язаної області

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0 .$$

Помінявши напрямок обходу контуру γ на протилежний, відповідно помінявши і знак перед інтегралом, отримаємо

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Інтеграл у лівій частині цієї рівності можна легко обчислити. Дійсно, довільність контуру γ дозволяє взяти його у зручній для обчислень формі, наприклад, у вигляді кола з центром у точці z і нескінченно малим радіусом. Зазначене рівняння кола у параметричній формі це $\xi = z + \rho \exp(i\alpha)$, де параметр $0 \leq \alpha < 2\pi$. Тоді $d\xi = i\rho \exp(i\alpha) d\alpha$ і

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f[z + \rho \exp(i\alpha)] d\alpha = if(z) \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi if(z)a.$$

Звідси і випливає формула Коші.

Зазначимо, що формулу Коші можна записати і для багатозв'язаної області. У цьому разі інтегрування можна вести за повною межею області.

Формула Коші корисна для безпосереднього обчислення інтегралів, інтегранда яких всередині замкненого контуру інтегрування містить лише одну особливу точку - полюс першого порядку.

Якщо в якості замкненого контуру Γ взяти коло з центром у точці $\xi = z$ і довільним радіусом R , то формула Коші визначатиме значення аналітичної функції $f(z)$ у центрі кола як середнє її межових значень

$$f(z) = \frac{1}{2\pi R} \int_{|\xi|=R} f(\xi) d\xi.$$

Ця формула називається формулою середнього значення.

Дослідження формули Коші дозволяє сформулювати так званий принцип максимуму модуля аналітичної функції. Останній полягає у наступному: нехай функція $f(z)$ аналітична в області G і неперервна на її межі, тоді максимальне значення модуля цієї функції досягається тільки на межі області. У протилежному випадку функція є сталою величиною.

Інтеграл Коші залежить від z як від параметру і є аналітичною функцією цього параметру. Ця обставина дозволяє здиференціювати обидві частини формули Коші і отримати інтегральне представлення першої похідної аналітичної функції. Питання про можливість подальшого диференціювання отриманої функції вимагає формулювання загальних умов, за яких залежний від параметру інтеграл є аналітичною функцією цього параметру. Ці умови наступні: інтегранда має бути аналітичною функцією змінної інтегрування при всіх її можливих значеннях, що належать контуру інтегрування, та при всіх можливих значеннях параметра, що належать області, обмеженій контуром; для цих же значень змінної інтегрування і параметру інтегранда повинна мати неперервні похідні за обома змінними. Вираз для першої похідної формули Коші містить якраз інтегранду, що задовольняє цим умовам, а отже є аналітичною функцією. Відповідно до цього її можна диференціювати знову, продовжуючи цей процес необмежено. Отже, аналітична функція має похідні довільного порядку в усіх точках області своєї аналітичності. Інтегральне представлення похідної довільного порядку наступне

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Як вже зазначалось вище, корисність цієї формули полягає не тільки у тому, що похідні можна обчислювати як інтеграли, а й у тому, що деякі інтеграли можна обчислювати як похідні. Зокрема, формула корисна для обчислення інтегралів, інтегранда яких всередині замкненого контуру інтегрування містить лише одну особливу точку - полюс n -го порядку. Її можна використати і для інтегрального представлення коефіцієнтів ряду Тейлора

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

де Γ - довільний замкнений контур, що охоплює точку z_0 і цілком лежить в області збіжності ряду Тейлора. Останній вираз можна отримати і в інший спосіб, безпосередньо розглянувши ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Поділивши обидві частини останнього виразу на $(z - z_0)^{m+1}$ і зінтегрувавши за z , отримаємо

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^n dz}{(z - z_0)^{m+1}} .$$

Інтеграл у правій частині цього виразу при $n \geq m+1$ дорівнює нулю (відповідно теоремі Коші для однозв'язної області), оскільки це є інтеграл від аналітичної функції за замкненим контуром. У разі $n = m$

$$\int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^n dz}{(z - z_0)^{m+1}} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i .$$

Тут довільний замкнений контур γ ми замінили колом радіусу ρ з центром в точці z_0 , що не впливає на значення інтегралу від аналітичної функції навіть за наявності особливих точок всередині замкненого контуру інтегрування. У разі $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)^n dz}{(z - z_0)^{m+1}} &= \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^{m-n+1}} = \\ &= i \rho^{n-m} \int_0^{2\pi} \exp[i(n-m)\varphi] d\varphi = \\ &= \frac{\rho^{n-m}}{n-m} \exp[i(n-m)\varphi] \Big|_0^{2\pi} = 0 . \end{aligned}$$

Тут в якості контуру γ , оскільки інтеграл від аналітичної функції не залежить від форми контуру, ми взяли коло радіусом

ρ з центром у точці z_0 . Отже, відмінним від нуля є лише доданок, що містить коефіцієнт c_m . Звідси

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ця формула зручна ще і тим, що дозволяє безпосереднє узагальнення на коефіцієнти ряду Лорана. Ряд Лорана для функції $f(z)$ в околі ізольованої особливої точки z_0 , що є полюсом довільного порядку

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n .$$

Коефіцієнти цього ряду абсолютно аналогічно попередньому можна визначити лише в інтегральній формі

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad n = -m, \dots, 0, 1, 2, \dots, .$$

Тут γ - довільний замкнений контур, що охоплює точку z_0 . Суттєва різниця між рядами Тейлора і Лорана з точки зору коефіцієнтів рядів у тому у разі ряду Тейлора функція $f(z)$ під знаком інтегралу не має особливих точок всередині контуру інтегрування, а у разі ряду Лорана - має. Якщо в останньому випадку точка z_0 є полюсом скінченного порядку m і єдиною особливою точкою функції $f(z)$, то коефіцієнти ряду Лорана також визначатимуться похідними функції $\varphi(z)$, для якої точка z_0 не є особливою, а $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^m$. У цьому разі також можна записати загальну формулу для коефіцієнтів ряду, привівши обчислення інтегралів до обчислення відповідних похідних

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z) dz}{(z - z_0)^{n+m+1}} = \frac{1}{(n+m)!} \varphi^{(n+m)}(z_0),$$

$$n = -m, \dots, 0, 1, 2, \dots$$

Проблема виникає у разі суттєво особливої точки, та у разі, коли точка z_0 є звичайною точкою функції $f(z)$ і центром кільця з внутрішнім радіусом $|z_0 - z_1|$ та зовнішнім радіусом $|z_0 - z_2|$, де z_1 і z_2 - пара розташованих поряд особливих точок функції $f(z)$ так, що між колами радіусами $|z_0 - z_1|$ і $|z_0 - z_2|$ інших особливих точок немає. У першому випадку загальна формула для коефіцієнтів відсутня. У другому випадку, якщо в крузі з радіусом, що відповідає зовнішньому радіусу кільця відсутні суттєво особливі точки, алгоритм знаходження коефіцієнтів завжди існує і залежить від конкретного вигляду функції $f(z)$.

Особливу роль серед коефіцієнтів ряду Лорана грає коефіцієнт

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz .$$

Цей коефіцієнт відіграє важливу роль у теорії інтегралів і має спеціальні назву і позначення. Він називається лишком і позначається так

$$c_{-1} = \text{res}[f(z), z_0] .$$

Оскільки з точністю до сталого множника, цей коефіцієнт збігається, при відповідному виборі точки z_0 , з кожним з інтегралів

$$\int_{\gamma_n^-} f(z) dz ,$$

то теорему Коші для багатозв'язаної області можна записати так

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z_k), z_k] .$$

У такому вигляді теорема Коші називається теоремою про лишки. Вона дозволяє безпосередньо обчислювати інтеграли від аналітичних функцій за довільними замкненими контурами.

Якщо z_0 є полюсом скінченного порядку m , то лишок обчислюється так

$$\operatorname{res}[f(z_k), z_k] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] .$$

Якщо z_0 є полюсом першого порядку, то, очевидно,

$$\operatorname{res}[f(z_k), z_k] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) .$$

Приклад 33. Знайти лишок функції у зазначеній точці

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i .$$

Розв'язання. Точка $z_0 = i$ є полюсом першого порядку, тому

$$\operatorname{res}\left[\frac{z}{z^2 + 1}, i\right] = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} .$$

Приклад 34. Знайти лишки функції у зазначених точках

$$f(z) = \frac{1}{z[\exp(z) - 1]}, \quad z_1 = 2\pi i, \quad z_2 = 0 .$$

Розв'язання. Точка $z_1 = 2\pi i$ полюс першого порядку, оскільки один з множників у знаменнику має у цій точці нуль першого порядку

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \exp(z) - 1, & \varphi(z_1) &= 0, \\ \varphi'(z) &= \exp(z), & \varphi'(z_1) &\neq 0, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left[\frac{1}{z[\exp(z) - 1]}, 2\pi i\right] &= \lim_{z \rightarrow 2\pi i} (z - 2\pi i) \frac{1}{z[\exp(z) - 1]} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2\pi i} \frac{1}{z \exp(z)} = \frac{1}{2\pi i \exp(2\pi i)} = \frac{1}{2\pi i} . \end{aligned}$$

Точка $z_2 = 0$ є полюсом другого порядку, оскільки знаменник має у цій точці нуль другого порядку

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= z[\exp(z)-1], & \varphi(z_2) &= 0, \\ \varphi'(z) &= \exp(z)-1+z\exp(z), & \varphi'(z_2) &= 0, \\ \varphi''(z) &= 2\exp(z)+z\exp(z), & \varphi''(z_2) &\neq 0,\end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\left[\frac{1}{z[\exp(z)-1]}, 0\right] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{1}{z[\exp(z)-1]} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z)-1-z\exp(z)}{[\exp(z)-1]^2}.\end{aligned}$$

Невизначеність, що виникає, можна розкрити за допомогою правила Лопіталя. Після першого його застосування

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z[\exp(z)-1]}, 0\right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z\exp(z)}{2[\exp(z)-1]\exp(z)} = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2[\exp(z)-1]}$$

невизначеність залишається, тому застосуємо правило Лопіталя вдруге. Маємо

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z[\exp(z)-1]}, 0\right] = \frac{1}{2}.$$

Якщо аналітична функція є багатозначною, то лишки шукаються для кожної з гілок цієї багатозначної функції.

Приклад 35. Знайти лишок функції у зазначеній точці

$$f(z) = \frac{1}{1-\sqrt{z}}, \quad z_0 = 1.$$

Розв'язання. Функція \sqrt{z} є двозначною. Її точкою галузження є початок координат та нескінченно віддалена точка. Якщо у комплексній площині зробити розріз вздовж дійсної від'ємної півосі, то ця двозначна функція розпадається на дві гілки $+\sqrt{z}$ і $-\sqrt{z}$, кожна з яких вже є аналітичною однозначною функцією. Альтернативним розрізом міг би бути розріз вздовж дійсної додатної півосі, але тоді особлива точка вихідної функції потрапила б якраз на розріз. Таким чином, ми

маємо дві гілки. Для першої з них точка $z_0 = 1$ є полюсом першого порядку. Дійсно

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= 1 - \sqrt{z}, & \varphi(1) &= 0, \\ \varphi'(z) &= \frac{1}{2\sqrt{z}}, & \varphi'(1) &\neq 0.\end{aligned}$$

За стандартною формулою

$$\operatorname{res}[f_1(z), 1] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1-\sqrt{z}} = -\lim_{z \rightarrow 1} (1+\sqrt{z}) = -2.$$

Для другої гілки

$$f_2(z) = \frac{1}{1+\sqrt{z}},$$

точка $z_0 = 1$ не є особливою і тому

$$\operatorname{res}[f_2(z), 1] = 0.$$

На жаль, якщо z_0 є істотно особливою точкою, то простий і універсальний алгоритм знаходження лишку відсутній.

Приклад 36. Знайти лишок функції у зазначеній точці

$$f(z) = \exp\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z_0 = 0.$$

Розв'язання. Точка z_0 є істотно особливою точкою даної функції. Тому лишок знаходиться лише як відповідний коефіцієнт ряду Лорана за

степенями z . Маємо наступний добуток двох рядів

$$\begin{aligned}\exp\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \exp(z) \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots\right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots\right).\end{aligned}$$

Перемножуючи ці ряди, одержимо шукане розвинення, в якому

$$c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Отже,

$$\operatorname{res} \left[\exp \left(z + \frac{1}{z} \right), 0 \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Окремий і цікавий випадком становить нескінченно віддалена точка. В околі цієї точки ряд Лорана має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m c_n z^n.$$

Якщо максимальне значення індексу підсумовування додатне, то нескінченно віддалена точка є полюсом скінченного порядку. Для нескінченного додатного значення - істотно особливою точкою. Якщо це значення від'ємне або дорівнює нулю, то нескінченно віддалена точка є нулем відповідного порядку або звичайною точкою функції. Лишок і в цьому випадку визначається коефіцієнтом c_{-1} ряду Лорана, але взятим із знаком "-". Тому він може бути відмінним від нуля і у разі, коли нескінченно віддалена точка є полюсом довільного порядку, і тоді, коли вона є звичайною точкою функції або нулем першого порядку. Так само, в усіх цих випадках, крім випадку нуля першого порядку, він може дорівнювати нулю. Таким чином,

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] = -c_{-1}.$$

Розглянемо алгоритм знаходження лишку у різних випадках. Нехай нескінченно віддалена точка є нулем другого порядку, тобто

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} c_n z^n.$$

Тоді лишок, очевидно, дорівнює нулю. Так само він дорівнює нулю і у разі нуля вищого порядку. Нехай нескінченно віддалена точка є нулем першого порядку. Тоді

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n.$$

Помноживши обидві частини рівності на z , отримаємо

$$zf(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{n+1}.$$

Перейшовши тепер до межі $z \rightarrow \infty$, ми отримаємо

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} zf(z).$$

Нехай нескінченно віддалена точка звичайна точка функції. Тоді

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n.$$

Перейшовши до межі $z \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) = c_0.$$

Помноживши обидві частини передостанньої рівності на z , отримаємо

$$zf(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^{n+1}.$$

Звідси

$$zf(z) - c_0 z = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^{n+1}.$$

Перейшовши до межі $z \rightarrow \infty$ і враховуючи вже знайдений вираз для коефіцієнта c_0 , отримаємо

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)].$$

В останньому разі можна знайти і інший вираз для коефіцієнту c_{-1} . Для цього один раз здиференціюємо ряд Лорана

$$\frac{d}{dz} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} n c_n z^{n-1},$$

множимо обидві частини отриманої рівності на z^2 і переходимо до межі $z \rightarrow \infty$, тоді

$$C_{-1} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{d}{dz} f(z).$$

Аналогічним чином можна формально побудувати алгоритм знаходження лишку i у випадку полюсу n -го порядку

$$C_{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} z^{n+2} \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}} f(z) .$$

Проблемою знову ж таки залишається суттєво особлива точка.

Приклад 37. Знайти лишок функції у зазначеній точці

$$f(z) = \frac{1}{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad z_0 = \infty .$$

Розв'язання. Згідно з означенням,

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right), \infty\right] = -c_1,$$

тому розвинемо дану функцію в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки, тобто у ряд за степенями z^{-1}

$$\frac{1}{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!z^4} + \dots .$$

В одержаному розвиненні немає члена з z^{-1} , тому

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right), \infty\right] = 0 .$$

Важливість лишку у нескінченно віддаленій точці пов'язана з наступною фундаментальною теоремою, яка стверджує, що сума всіх лишків однозначної аналітичної функції, враховуючи і нескінченно віддалену точку, дорівнює нулю.

Приклад 38. Знайти лишки в усіх особливих точках функції та нескінченно віддаленій точці

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)^2} .$$

Розв'язання. Особливими точками функції є точки: $z = 1$ - полюс другого порядку, $z = 0$ - полюс першого порядку. $z = \infty$ - звичайна точка - нуль першого порядку.

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}[f(z), 1] &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{z^2+1}{z(z-1)^2} = \\
&= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \frac{z^2+1}{z} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[1 - \frac{1}{z^2} \right] = 0, \\
\operatorname{res}[f(z), 0] &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{z^2+1}{z(z-1)^2} = 1, \\
\operatorname{res}[f(z), \infty] &= -c_{-1} = -\lim_{z \rightarrow \infty} z[f(z) - f(\infty)] = \\
&= -\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{z^2+1}{z(z-1)^2} = -1.
\end{aligned}$$

Перевіркою вірності обчислення лишків може бути виконання умови

$$\operatorname{res}[f(z), \infty] + \operatorname{res}[f(z), 0] + \operatorname{res}[f(z), 1] = 0.$$

Якщо поза замкненим контуром є лише нескінченно віддалена точка, то буває доцільним замість обчислення лишків у великій кількості особливих точок, що містяться всередині контуру, знайти лишок лише у нескінченно віддаленій точці.

Теорія функцій комплексної змінної не робить різниці між інтегралом вздовж контуру і визначеним інтегралами. Визначений інтеграл це також інтеграл вздовж контуру але від аналітичної функції. У цьому разі його значення залежить лише від розташування початкової і кінцевої точок контуру, тому його для зручності і пишуть як визначений. Отже, визначені інтеграли теж можуть обчислюватись за допомогою теореми про лишки. При цьому контур, вздовж якого обчислюється визначений інтеграл, доповнюється до замкненого таким чином, щоб інтеграл за доповненням легко обчислювався. До утвореного інтегралу за замкненим контуром застосовують теорему про лишки.

Розглянемо тепер декілька контурних інтегралів, обчислених за допомогою теореми про лишки.

Приклад 39. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)},$$

Розв'язання. Особливими точками інтегранди є точки $z=0$ - полюс другого порядку і $z=1$ - полюс першого порядку. Обидві містяться всередині контуру інтегрування. Обчислимо лишки у цих точках

$$\begin{aligned} \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2(z-1)}, 0\right] &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-1}\right) = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)^2} = -1, \\ \operatorname{res}\left[\frac{1}{z^2(z-1)}, 1\right] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{z^2(z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z^2} = 1. \end{aligned}$$

Тому, за основною теоремою про лишки

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)} = 2\pi i(1-1) = 0.$$

Звертаємо увагу на те, що незважаючи на присутність всередині контуру інтегрування двох особливих точок, інтеграл за замкненим контуром дорівнює нулю.

Приклад 40. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2-1)\cos(z)},$$

де контуром є половина еліпса, що лежить у правій півплощині

$$\Gamma = \{z, |z-1| + |z+1| = 5, \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

Розв'язання. Особливими точками інтегранди є точки $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_0 = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Всі вони є полюсами першого порядку. З них тільки $z_1=1$ потрапляє всередину контуру. Очевидно

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{(z^2-1)\cos(z)}, 1\right] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{(z^2-1)\cos(z)} = \frac{1}{2\cos(1)}.$$

За основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 - 1) \cos(z)} = \frac{\pi i}{\cos(1)}.$$

Приклад 41. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}}{z^{100} - 1} dz.$$

Розв'язання. У крузі $|z| \leq 2$ є сто особливих точок інтегранди, а зовні його особливих точок немає. Тому простіше спочатку обчислити лишок відносно точки $z = \infty$, а потім використати той факт, що сума всіх лишок функції дорівнює нулю. Тоді

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}}{z^{100} - 1} dz = -2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{z^{99}}{z^{100} - 1}, \infty \right]$$

(коло $|z|=2$ обходить у від'ємному напрямі відносно області $|z| > 2$).

Оскільки нескінченно віддалена точка є звичайною точкою функції (нулем першого порядку), то маємо

$$\operatorname{res} \left[\frac{z^{99}}{z^{100} - 1}, \infty \right] = -\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{z^{99}}{z^{100} - 1} = -1.$$

Отже,

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{99}}{z^{100} - 1} dz = 2\pi i.$$

Приклад 42. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

Розв'язання. Всередині контуру інтегрування є дві особливі точки інтегранди: $z=1$ - полюс першого порядку і

$z=0$ - істотно особлива точка, лишок у якій обчислювати незручно. Інших особливих точок інтегранда не має. Тому і тут варто замість обчислення лишків у зазначених точках знайти один лишок у нескінченно віддаленій точці, яка є звичайною точкою функції (нулем першого порядку)

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = -2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{1}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right), \infty\right],$$

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right), \infty\right] = -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = -1.$$

Отже,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z+1} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i.$$

Приклад 43. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{|z-1|=1/2} \frac{\sqrt{z}}{z^2-1} dz.$$

Розв'язання. Точка галуження $z=0$ функції \sqrt{z} лежить поза кругом $|z-1| \leq 1/2$. Тому у цьому крузі функція \sqrt{z} допускає виділення гілок $+\sqrt{z}$ і $-\sqrt{z}$. У зв'язку з цим інтегранда також розпадається на дві гілки. Перша гілка

$$f_1(z) = \frac{+\sqrt{z}}{z^2-1}$$

є аналітичною в крузі $|z-1| < 1/2$, крім точки $z=1$, яка є її полюсом першого порядку. Тому, за теоремою про лишки

$$\int_{|z-1|=1/2} f_1(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}\left[\frac{+\sqrt{z}}{z^2-1}, 1\right] = \pi i.$$

Аналогічно, для другої гілки

$$f_2(z) = \frac{-\sqrt{z}}{z^2 - 1}$$

матимемо

$$\int_{|z-1|=1/2} f_2(z) dz = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{-\sqrt{z}}{z^2 - 1}, 1 \right] = -\pi i.$$

Приклад 44. Обчислити наступний інтеграл за замкненим контуром

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 2z + 2}}, \quad r \neq \sqrt{2}.$$

Розв'язання. Точки $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ є точками галуження функції $\sqrt{z^2 + 2z + 2}$ і лежать на колі $|z| = \sqrt{2}$. Якщо $r < \sqrt{2}$, то у крузі $|z| < r$ обидві гілки $\frac{1}{+\sqrt{z^2 + 2z + 2}}$ і $\frac{1}{-\sqrt{z^2 + 2z + 2}}$, на які розпадається інтегранда, є аналітичними.

Тому за теоремою Коші для однозв'язної області

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{+\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = \int_{|z|=r} \frac{dz}{-\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = 0.$$

Якщо $r > 1$, то точки галуження лежать у крузі $|z| < r$. В області $|z| > r$ інтегранда допускає виділення аналітичних гілок. Наявність двох особливих точок у інтегранди всередині контуру і відсутність їх поза контуром (нескінченно віддалена точка є звичайною точкою - нулем першого порядку) робить доцільним обчислення лишку саме у нескінченно віддаленій точці, тому

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{+\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = -2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{1}{+\sqrt{z^2 + 2z + 2}}, \infty \right] =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{1}{+\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = 2\pi i .$$

Аналогічно

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{-\sqrt{z^2 + 2z + 2}} = -2\pi i .$$

Приклад 45. Обчислити наступний визначений інтеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2b \cos(x) + b^2}, \quad |b| \neq 1 .$$

Тут b може бути комплексним числом.

Розв'язання. Інтеграли такого типу приводяться до інтегралів за замкненим контуром за допомогою такої заміни

$$\cos(x) = \frac{1}{2} [\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)] .$$

Оскільки $\exp(i\varphi)$ можна вважати показниковою формою представлення комплексного числа z , модуль якого дорівнює одиниці, то

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right] .$$

Візьмемо диференціал від обох частин цієї рівності

$$-\sin(x) dx = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{z^2} \right] dz .$$

Оскільки при попередній заміні

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right] ,$$

то

$$dx = dz / iz ,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2b \cos(x) + b^2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 - (1 + b^2)z + b} .$$

Точки $z=b$ і $z=1/b$ є полюсами першого порядку інтегранди, причому у крузі $|z|<1$ знаходиться тільки один полюс. Якщо $|b|<1$, то у крузі $|z|<1$ лежить полюс $z=b$, і тоді

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2b \cos(x)+b^2} = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{i}{bz^2 - (1+b^2)z + b}, b \right] = \frac{2\pi}{1-b^2}.$$

Якщо $|b|>1$, то у крузі $|z|<1$ лежить полюс $z=1/b$, тому

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2b \cos(x)+b^2} = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{i}{bz^2 - (1+b^2)z + b}, \frac{1}{b} \right] = \frac{2\pi}{b^2-1}.$$

Приклад 46. Обчислити наступний визначений інтеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)dx}{5/4 - \cos(x)}.$$

Розв'язання. Після виконання заміни з попередньої задачі,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)}{5/4 - \cos(x)} d\varphi = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{(z^6+1)^2}{z^6(z-1/2)(z-2)} dz.$$

Особливими точками інтегранди будуть точки $z=0$ - полюс шостого порядку, $z=1/2$ і $z=2$ - полюси першого порядку. Зазначимо,

що у крузі $|z|<1$ лежать точки $z=0$ і $z=1/2$. Обчислимо лишок в полюсі першого порядку $z=1/2$

$$\operatorname{res} \left[\frac{(z^6+1)^2}{z^6(z-1/2)(z-2)}, 1/2 \right] = \lim_{z \rightarrow 1/2} \frac{(z^6+1)^2}{z^6(z-2)} = -\frac{2^7(1+1/2^6)^2}{3}.$$

Тепер знайдемо лишок у полюсі шостого порядку $z=0$. Для цього в околі точки $z_0=0$ розвинемо у ряд Тейлора функції

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \quad \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

Матимемо

$$\frac{(z^6+1)^2}{z^6(1-2z)(1-z/2)} = (z^6+2+1/z^6)(1+2z+2^2z^2+\dots)(1+z/2+z^2/2^2+\dots)$$

Тепер

$$\operatorname{res} \left[\frac{(z^6+1)^2}{z^6(z-1/2)(z-2)}, 1/2 \right] = \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} + 2 + 2^3 + 2^5 .$$

Тоді

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)dx}{5/4-\cos(x)} = -\pi \left[\frac{2^5(1+1/2^6)^2}{(1/2^2-1)} \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2} + 2 + 2^3 + 2^5 \right] = \pi \frac{1+1/2^6}{1-1/2^2} .$$

Приклад 47. Обчислити наступний визначений інтеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(\sqrt{2-x})\sqrt{1-x^2}} .$$

Розв'язання.

Цей

інтеграл

заміною $x = \cos(\varphi)$ приводиться до інтегралу

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos(x)}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos(x)}} ,$$

який вже є інтегралом, до якого можна застосувати попередню заміну змінних. Тоді

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{2-\cos(x)}} = -\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} = \pi .$$

1.9. Кватерніони

З багатовимірними числами можна виконувати обчислення так само, як із дійсними (одномірними) числами, якщо попередньо визначити, що слід розуміти під сумою і добутком двох багатовимірних чисел. При цьому, в кожному випадку виникає спеціальна алгебра з правилами оперування, схожа на алгебру дійсних чисел. Повного збігу можна досягти

тільки у двовимірному випадку для комплексних чисел за допомогою відповідним чином обраних визначень.

Кватерніонами називаються чотиривимірні числа вигляду

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{L} + a_2\mathbf{M} + a_3\mathbf{N} + a_4\mathbf{E}$$

де a_1, a_2, a_3, a_4 – дійсні числа, а $\mathbf{L} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{M} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{E} = (0, 0, 0, 1)$ – спеціальні кватерніони, що мають такі властивості

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 = \mathbf{M}^2 = \mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}^2 = -\mathbf{E} , \\ \mathbf{LE} = \mathbf{EL} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{ME} = \mathbf{EM} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{NE} = \mathbf{EN} = \mathbf{N} , \\ \mathbf{LM} = \mathbf{N} = -\mathbf{ML}, \quad \mathbf{MN} = \mathbf{L} = -\mathbf{NM}, \quad \mathbf{NL} = \mathbf{M} = -\mathbf{LN} . \end{aligned}$$

Такі умови, що їм задовольняють спеціальні кватерніони, називаються умовами першого типу. Умови другого типу мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 = \mathbf{M}^2 = \mathbf{N}^2 = -\mathbf{E}^2 = -\mathbf{E} , \\ \mathbf{LE} = \mathbf{EL} = \mathbf{L}, \quad \mathbf{ME} = \mathbf{EM} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{NE} = \mathbf{EN} = \mathbf{N} , \\ \mathbf{LM} = -\mathbf{N} = -\mathbf{ML}, \quad \mathbf{MN} = -\mathbf{L} = -\mathbf{NM}, \quad \mathbf{NL} = -\mathbf{M} = -\mathbf{LN} . \end{aligned}$$

Надалі, для визначеності, ми використовуватимемо умови першого типу. Для спеціальних кватерніонів широко використовуються також і такі позначення

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} + a_4\mathbf{I}$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{I}$ – інші позначення для спеціальних кватерніонів.

Така само як і комплексним числам у разі двовимірного простору, кожному кватерніону можна поставити у відповідність вектор чотиривимірного простору - це одна із можливих геометричних інтерпретацій кватерніонів. Можна говорити про поворот кватерніону у просторі, розуміючи під цим поворот відповідного вектора. Можна говорити про норму або модуль кватерніона, розуміючи під цим норму або модуль відповідного вектора. Для кватерніонів з дійсними коефіцієнтами можна вживати на рівноправній основі всі три терміни: норма, модуль, довжина. Для кватерніонів з комплексними коефіцієнтами, строго кажучи, ці поняття

втрачають сенс, хоча самі характеристики з аналогічним алгоритмом обчислення залишаються і інколи називаються тими ж термінами. При цьому слід розуміти, що для вектора (кватерніона) з дійсними компонентами норма, модуль, довжина завжди невід'ємні. Для вектора (кватерніона) з комплексними коефіцієнтами аналог цих величин (за алгоритмом обчислення) може мати довільний знак. Кватерніони з комплексними коефіцієнтами називаються бікватерніонами.

Кватерніон

$$\bar{\mathbf{A}} = -a_1\mathbf{L} - a_2\mathbf{M} - a_3\mathbf{N} + a_4\mathbf{E}$$

називається спряженим щодо кватерніону \mathbf{A} . Добуток кватерніону на спряжений до нього кватерніон є дійсним числом і називається квадратом норми кватерніону

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

Компоненти кватерніона a_1, a_2, a_3 утворюють його векторну частину, компонента a_4 – скалярну. В алгебрі кватерніонів міститься тривимірна векторна алгебра. Кватерніон

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|^2} = \frac{-a_1\mathbf{L} - a_2\mathbf{M} - a_3\mathbf{N} + a_4\mathbf{E}}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2},$$

який називається оберненим щодо кватерніону \mathbf{A} , існує лише у разі, коли знаменник не дорівнює нулю. Очевидно,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = 1,$$

де \mathbf{A}^{-1} - обернений кватерніон.

Поряд із \mathbf{A} розглянемо ще один кватерніон

$$\mathbf{B} = b_1\mathbf{L} + b_2\mathbf{M} + b_3\mathbf{N} + b_4\mathbf{E}.$$

Тоді добуток

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = & (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{L} + \\ & + (a_2b_4 + a_4b_2 + a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{M} + \\ & + (a_3b_4 + a_4b_3 + a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{N} + \\ & + (-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + a_4b_4)\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Цей добуток не є комутативним. Дійсно,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = & (b_1 a_4 + b_4 a_1 + b_2 a_3 - b_3 a_2) \mathbf{L} + \\ & + (b_2 a_4 + b_4 a_2 + b_3 a_1 - b_1 a_3) \mathbf{M} + \\ & + (b_3 a_4 + b_4 a_3 + b_1 a_2 - b_2 a_1) \mathbf{N} + \\ & + (-b_1 a_1 - b_2 a_2 - b_3 a_3 + b_4 a_4) \mathbf{E}. \end{aligned}$$

i

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 2(a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{L} + 2(a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{M} + 2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{N}.$$

У висліді частка двох кватерніонів матиме два різних значення.

Запис кватерніонів та спеціальних кватерніонів у вигляді $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathbf{L} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{M} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{E} = (0, 0, 0, 1)$, еквівалентний представленню кватерніонів чотиривимірними векторами. Отже, алгебра кватерніонів ізоморфна алгебрі чотиривимірних векторів. Дії над кватерніонами можна розглядати як дії над чотиривимірними векторами з відповідно означеним добутком цих векторів так, щоб це уможливило існування оберненого кватерніону і операції ділення кватерніонів.

Алгебра кватерніонів ізоморфна також алгебрі квадратних матриць порядку 2×2 . Так кватерніон \mathbf{A} можна зобразити у вигляді

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_4 + ia_1 & -a_3 + ia_2 \\ a_3 + ia_2 & a_4 - ia_1 \end{pmatrix}.$$

При цьому спеціальні кватерніони матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = (1, 0, 0, 0) &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i \hat{\sigma}_z, \\ \mathbf{M} = (0, 1, 0, 0) &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i \hat{\sigma}_x, \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = (0, 0, 1, 0) = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \hat{\sigma}_y,$$

$$\mathbf{E} = (0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Тут $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ – матриця Паулі, I – одинична матриця. Тим самим дії над кватерніонами еквівалентні діям над зазначеними матрицями. Матриці Паулі є ермітовими з власними значеннями рівними ± 1 . Тобто вони не змінюються при послідовному виконанні операцій транспонування і комплексного спряження.

Лінійний простір, елементами якого є квадратні матриці розміру 2×2 , має лише чотири лінійно незалежні елементи. В якості таких можна взяти матриці Паулі. Всяку ермітову матрицю розміру 2×2 можна зобразити у вигляді лінійної комбінації матриць Паулі з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\mathbf{T} = \alpha_1 \hat{\sigma}_x + \alpha_2 \hat{\sigma}_y + \alpha_3 \hat{\sigma}_z + \alpha_4 I.$$

У разі кватерніонів коефіцієнти останньої лінійної комбінації вже будуть комплексними, отже кватерніони не є ермітовими матрицями.

Алебра кватерніонів також ізоморфна алгебрі квадратних матриць розміру 4×4 . Тобто кожному кватерніону можна поставити у відповідність матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Спеціальні кватерніони можна представити наступними квадратними матрицями

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У такому матричному представленні довільний кватерніон можна записати у стандартному вигляді

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{L} + a_2\mathbf{M} + a_3\mathbf{N} + a_4\mathbf{E}.$$

Всі дії над кватерніонами еквівалентні діям на таких матрицях.

Кватерніон \mathbf{A} зручно зобразити як (\mathbf{a}, α) , де \mathbf{a} – векторна частина кватерніона $\mathbf{a} = \mathbf{L}a_1 + \mathbf{M}a_2 + \mathbf{N}a_3$, а $\alpha = a_4$ – його скалярна частина. Тоді добуток двох кватерніонів можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}, \alpha) \cdot (\mathbf{b}, \beta) = \\ &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}, \alpha\beta - \mathbf{a}\mathbf{b}), \\ \mathbf{B}\mathbf{A} &= (\mathbf{b}, \beta)(\mathbf{a}, \alpha) = \\ &= ([\mathbf{b}, \mathbf{a}] + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}, \alpha\beta - \mathbf{a}\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Для оберненого кватерніона \mathbf{A}^{-1} маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{a}, \alpha)^{-1} = \frac{(-\mathbf{a}, \alpha)}{\mathbf{a}^2 + \alpha^2}, \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = I. \end{aligned}$$

Тобто у матричному представленні обернений кватерніон є унітарною матрицею. Тепер для дуже важливого з практичної точки зору подвійного добутку кватерніонів отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} &= \\ &= ((\alpha^2 - \mathbf{a}^2)\mathbf{b} - 2\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{a}, (\mathbf{a}^2 + \alpha^2)\beta) / (\mathbf{a}^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Такий подвійний добуток відповідає повороту векторної частини кватерніону \mathbf{B} у векторному просторі щодо вектора \mathbf{a} . Якщо кватерніон має тільки векторну частину, то

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{a}, 0) \cdot (\mathbf{a}, 0) = (0, -\mathbf{a}^2), \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}, 0) \cdot (\mathbf{b}, 0) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], -\mathbf{ab}). \end{aligned}$$

Тобто, хоча у множників скалярна частина відсутня, у їх добутку вона є.

Спряжений кватерніон можна записати так:

$$\overline{\mathbf{A}} = (-\mathbf{a}, \alpha).$$

Очевидно,

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = \mathbf{a}^2 + \alpha^2.$$

Поворот кватерніону у чотиривимірному просторі визначатиметься дещо інакше, ніж його поворот у тривимірному векторному просторі, а саме

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} &= \\ &= ((\mathbf{a}^2 + \alpha^2)\mathbf{b} - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{a} + 2\alpha\beta\mathbf{a}, -2\alpha\mathbf{ab} - (\mathbf{a}^2 - \alpha^2)\beta) / (\mathbf{a}^2 + \alpha^2). \end{aligned}$$

Розглянемо арифметичні дії над кватерніонами. Сумою двох кватерніонів $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \alpha)$ і $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \beta)$ називається такий кватерніон $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, що

$$\mathbf{C} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \alpha + \beta).$$

Різницею двох кватерніонів $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \alpha)$ і $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \beta)$ називається такий кватерніон $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, що

$$\mathbf{C} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \alpha - \beta).$$

Добутком двох кватерніонів $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \alpha)$ і $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \beta)$ називається такий кватерніон $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}$, що

$$C = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}, \alpha\beta - (\mathbf{a}, \mathbf{b})),$$

де $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – векторний добуток векторів, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) – скалярний добуток векторів. Для порівняння, добуток найпростіших бікватерніонів з уявною скалярною частиною

$$C = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + i\alpha\mathbf{b} + i\beta\mathbf{a}, -\alpha\beta - (\mathbf{a}, \mathbf{b})).$$

Часткою від ділення двох кватерніонів $\mathbf{A} = (\mathbf{a}, \alpha)$ і $\mathbf{B} = (\mathbf{b}, \beta)$ є такий кватерніон $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathbf{B}$, що

$$\mathbf{C} = \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}/(\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}})$$

або

$$\mathbf{C} = \overline{\mathbf{B}\mathbf{A}}/(\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}).$$

Хоча $\overline{\mathbf{B}\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}\mathbf{B}}$, але, взагалі кажучи, $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} \neq \overline{\mathbf{B}\mathbf{A}}$, і ми маємо два різних значення частки від ділення двох кватерніонів – ліву, що містить $\overline{\mathbf{B}\mathbf{A}}$, та праву, що містить $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}$.

1.10. Бікватерніони

У теоретичній фізиці зручно розглядати кватерніони з комплексними коефіцієнтами. В математиці такі кватерніони називаються бікватерніонами. Потреба в бікватерніонах в теоретичній фізиці зумовлена тим, що деякі характеристики фізичних систем мають більше ніж три компоненти. Наприклад, електромагнітне поле описується у тривимірному просторі трикомпонентним вектором напруженості електричного поля і трикомпонентним вектором напруженості магнітного поля. Очевидно, що для приведення характеристик електромагнітного поля до одного математичного об'єкту замало використання кватерніона з дійсними коефіцієнтами, оскільки його векторна частина визначається лише трьома числами. Проте виходом є використання кватерніона з комплексними компонентами. Векторна частина такого кватерніону визначатиметься шістьма

числами. Таких чисел вже цілком достатньо для опису електромагнітного поля.

Друга причина використання бікватерніонів така. Надзвичайно важливу роль в релятивістській фізиці відграють перетворення Лоренці. Відносно цих перетворень інваріантними є всі фундаментальні закони природи. Тобто, вони зберігають свій вигляд у довільній інерціальній системі відліку. У разі, якщо одна інерціальна система відліку K рухається з швидкістю \mathbf{V} відносно системи K' , то у Декартовій системі координат при виборі осей координат X, X' вздовж напрямку вектора швидкості \mathbf{V} , чотири просторові координати і час у цих системах координат пов'язуватимуться фундаментальними співвідношеннями

$$x' = \frac{x + V_x t}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t + \frac{V_x}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

Ці співвідношення Лоренца можна вважати твердо встановленим експериментальним фактом і є фундаментом релятивістської фізики. Як ми вже казали, всі основні рівняння фізики інваріантні відносно цих перетворень. Інваріантною характеристикою чотиривимірного простору-часу і є так званий просторово-часовий інтервал

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - (t'_2 - t'_1)^2 = \\ = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (t_2 - t_1)^2.$$

Дійсно,

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - (t'_2 - t'_1)^2 =$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{x_2 - x_1 + V_x(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \right)^2 + (y_2 - y_1)^2 + \\
& + (z_2 - z_1)^2 - c^2 \left(\frac{t_2 - t_1 + \frac{V_x}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} \right)^2 = \\
& = \frac{(x_2 - x_1)^2 + V_x^2(t_2 - t_1)^2 + 2V_x(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} + (y_2 - y_1)^2 + \\
& + (z_2 - z_1)^2 - \frac{c^2(t_2 - t_1)^2 + \frac{V_x^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2 + 2V_x(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} = \\
& = \frac{(x_2 - x_1)^2 \left(1 - \frac{V_x^2}{c^2}\right) + \frac{V_x^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2 + V_x^2(t_2 - t_1)^2}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} + (y_2 - y_1)^2 + \\
& + (z_2 - z_1)^2 - \frac{c^2(t_2 - t_1)^2 \left(1 - \frac{V_x^2}{c^2}\right) + V_x^2(t_2 - t_1)^2 + \frac{V_x^2}{c^2}(x_2 - x_1)^2}{1 - \frac{V_x^2}{c^2}} = \\
& = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2.
\end{aligned}$$

Кватерніони є природним способом опису чотиривимірного простору-часу, оскільки кожній точці чотиривимірного простору-часу можна поставити у

відповідність кватерніон. Але пов'язати кватерніон з наведеним вище інтервалом, інваріантним щодо перетворень Лоренца, неможливо. Інтервалом між двома точками чотиривимірного простору-часу є норма кватерніону $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, ct)$

$$|\mathbf{R}|^2 = \mathbf{r}^2 + c^2 t^2.$$

Проте таким чином визначений інтервал не є інваріантним щодо перетворень Лоренца. Інваріантним є інтервал, визначений так

$$\mathbf{r}^2 - c^2 t^2 = \text{const}.$$

Легко утворити кватерніон, що має саме таку норму. Для цього просто слід змінити дійсну скалярну частину кватерніону на уявну, тобто розглянути кватерніон

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}x + \mathbf{M}y + \mathbf{N}z + iEt.$$

У цьому разі

$$\bar{\mathbf{C}} = -\mathbf{L}x - \mathbf{M}y - \mathbf{N}z + iEt,$$

$$|\mathbf{C}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - t^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}, i\alpha) \cdot (\mathbf{b}, i\beta) = \\ &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + i\alpha\mathbf{b} + i\beta\mathbf{a}, -\alpha\beta - \mathbf{a}\mathbf{b}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{a}, i\alpha)^{-1} = \frac{(-\mathbf{a}, i\alpha)}{\mathbf{a}^2 - \alpha^2},$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} =$$

$$= \left(-(\alpha^2 + \mathbf{a}^2)\mathbf{b} - 2i\alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{a}, -i(\mathbf{a}^2 - \alpha^2)\beta \right) / (\mathbf{a}^2 - \alpha^2).$$

Відповідно,

$$\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A} =$$

$$= \left((\mathbf{a}^2 - \alpha^2)\mathbf{b} - 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{a} - i2\alpha\beta\mathbf{a}, -2i\alpha\mathbf{a}\mathbf{b} - (\mathbf{a}^2 + \alpha^2)\beta \right) / (\mathbf{a}^2 - \alpha^2).$$

Головна відмінність від дійсних кватерніонів полягає у тому, що модуль комплексних кватерніонів може бути від'ємним. Точніше, від'ємною може бути величина $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}$. Кватерніони з комплексними коефіцієнтами називаються бікватерніонами, оскільки в загальному випадку у них рівно вдвічі більше компонент, ніж у кватерніонів. Їх головна перевага перед

кватерніонами з дійсними компонентами полягає у тому, що їх норма інваріантна щодо перетворень Лоренца. Термін норма, щодо бікватерніонів слід розуміти з певним застереженням, оскільки за означенням норми вона не може бути від'ємною, у той час як аналог норми для бікватерніона може бути і від'ємним.

Як вже зазначалось вище, довільний кватерніон \mathbf{A} можна представити у вигляді

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + E\alpha,$$

найпростіший бікватерніон у вигляді

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + E\alpha.$$

З геометричної точки зору довільному кватерніону $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, \rho)$ або найпростішому бікватерніону $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, i\rho)$ можна поставити у відповідність точку чотиривимірного простору з координатами x, y, z, ρ , оскільки $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Цей простір логічно називати кватерніонним або бікватерніонним. Можна інтерпретувати кватерніони і як радіус-вектори, що виходять з початку координат і закінчуються у відповідних точках кватерніонного простору. Можна інтерпретувати кватерніони і як квадратні матриці відповідної структури розмірів 2×2 і 4×4 . Про це вже говорилось вище. Проте, найглибшою є аналогія кватерніонів із звичайними числами.

Практичне застосування кватерніонів у теоретичній фізиці може бути базоване на тому очевидному факті, що всі процеси розвиваються у просторі і часі. Оскільки три просторові координати x, y, z і одна часова t утворюють саме чотиривимірний простір-час, то кожній точці цього простору можна поставити у відповідність найпростіший бікватерніон

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}, ict),$$

де c – швидкість світла, якщо саме вона є єдиною характерною швидкістю задачі, або інша характерна швидкість. Саму точку кватерніонного простору зручно називати подією. Надалі саме такий кватерніонний простір ми і будемо розглядати. Систему ж координат $\{x, y, z, ict\}$ у зазначеному кватерніонному просторі

будемо називати також системою відліку. Відстань S між двома точками кватерніонного простору (двома подіями), яким відповідають кватерніони \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 визначається звичайним чином

$$S = \sqrt{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2}.$$

У свою чергу

$$|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2.$$

Зазначена відстань може бути як від'ємною, так і додатною. Від'ємний інтервал називається часоподібним. Додатний інтервал між подіями називається простороподібним. У разі двох нескінченно близьких подій:

$$t_2 = t_1 + dt, x_2 = x_1 + dx, y_2 = y_1 + dy, z_2 = z_1 + dz.$$

Відповідний інтервал має вигляд

$$|dS|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2 (dt)^2.$$

1.11. Перетворення Лоренца

Нехай w и w' два кватерніонні простори, у яких задані Декартові системи координат $\{x, y, z, ict\}$ та $\{x', y', z', ict'\}$ відповідно. Відобразимо довільний кватерніон $\mathbf{R} = (\mathbf{r}, i\rho)$ з кватерніонного простору w у кватерніонний простір w' таким чином, щоб відстань відповідної точки від початку координат залишилась незмінною. Якщо виходити з аналогії кватерніонів і векторів, то таке відображення зводиться до повороту вектора \mathbf{R} довкола довільної осі, що проходить через початок координат. Зазначене відображення має вигляд

$$\mathbf{R}' = \mathbf{SRS},$$

де $S = (\mathbf{s}, i\sigma)$ – спеціальний кватерніон, з модулем рівним одиниці, тобто

$$|\mathbf{S}|^2 = \mathbf{s}^2 - \sigma^2 = 1 .$$

Якщо обертання відбувається у площині $x0t$, то спеціальний кватерніон має вигляд $\mathbf{S} = (s_x, i\sigma)$, у площині $y0t$ – $\mathbf{S} = (s_y, i\sigma)$, у площині $z0t$ – $\mathbf{S} = (s_z, i\sigma)$. Оскільки

$$\mathbf{SR} = ([\mathbf{s}, \mathbf{r}] + i\sigma\mathbf{r} + i\rho\mathbf{s}, -\sigma\rho - \mathbf{sr}),$$

то

$$\mathbf{R}' = \mathbf{SRS} = ((\mathbf{s}^2 - \sigma^2)\mathbf{r} - 2(\mathbf{s}, \mathbf{r})\mathbf{s} - 2\sigma\mathbf{c}\mathbf{t}\mathbf{s}, -2i\sigma\mathbf{s}\mathbf{r} - (\mathbf{s}^2 + \sigma^2)\mathbf{c}\mathbf{t}) / (\mathbf{s}^2 - \sigma^2)$$

або

$$\mathbf{R}' = \mathbf{SRS} = (\mathbf{r} - 2(\mathbf{s}, \mathbf{r})\mathbf{s} - 2\sigma\mathbf{c}\mathbf{t}\mathbf{s}, i(1 - 2\mathbf{s}^2)\mathbf{c}\mathbf{t} - 2i\sigma\mathbf{s}\mathbf{r}).$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \mathbf{SRS} = & ([[\mathbf{s}, \mathbf{r}], \mathbf{s}] + i\sigma[\mathbf{r}, \mathbf{s}] + i\mathbf{c}\mathbf{t}[\mathbf{s}, \mathbf{s}] - (\sigma\mathbf{c}\mathbf{t} + \mathbf{s}\mathbf{r})\mathbf{s} + i\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{r}] - \sigma^2\mathbf{r} - \mathbf{c}\mathbf{t}\sigma\mathbf{s}, \\ & -i\sigma^2\mathbf{c}\mathbf{t} - i\sigma\mathbf{s}\mathbf{r} - [\mathbf{s}\mathbf{r}]\mathbf{s} - i\sigma\mathbf{s}\mathbf{r} - i\sigma^2\mathbf{c}\mathbf{t}). \end{aligned}$$

Якщо далі врахувати, що

$$\begin{aligned} [[\mathbf{s}, \mathbf{r}], \mathbf{s}] &= \mathbf{r}\mathbf{s}^2 - \mathbf{s}(\mathbf{s}\mathbf{r}), \\ [\mathbf{s}, \mathbf{s}] &= 0, \\ [\mathbf{s}\mathbf{r}]\mathbf{s} &= 0, \end{aligned}$$

то ми і отримаємо наведений вище остаточний вираз. Легко переконатися, що модуль кватерніона при такому повороті не змінюється

$$|\mathbf{R}'| = |\mathbf{SRS}^{-1}| = |\mathbf{R}| .$$

Для повороту, що відбувається у площині $x0t$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{SRS} = (\mathbf{r} - 2(s_x, x)\mathbf{s} - 2\sigma\mathbf{c}\mathbf{t}\mathbf{s}_x\mathbf{L}, i(1 - 2s_x^2)\mathbf{c}\mathbf{t} - 2i\sigma s_x x)$$

Для координат бікватерніону матимемо

$$x' = (\mathbf{SRS}^{-1})_x = x(1 - 2s_x^2) - 2\sigma s_x \mathbf{c}\mathbf{t},$$

$$y' = (\mathbf{SRS}^{-1})_y = y,$$

$$z' = (\mathbf{SRS}^{-1})_z = z,$$

$$t' = (\mathbf{SRS})_t = (1 - 2s_x^2)ct - 2i\sigma_x s_x.$$

Останні співвідношення доцільно порівняти з перетвореннями Лоренца, а саме:

$$x' = \frac{x + V_x t}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad ct' = \frac{ct + (V_x/c)t}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

Як відомо вони мають наступний сенс: якщо відносно нерухомої системи відліку матеріальна точка має координати x, y, z, ct , то відносно системи відліку, що рухається відносно першої з швидкістю V_x вздовж осі x , вона буде мати координати x', y', z', ct' , то для того, щоб ці співвідношення попарно збігались, потрібно, аби:

$$1 - 2s_x^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad -2\sigma_x s_x = \frac{V_x/c}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

Звідки легко знаходяться компоненти спеціального кватерніона

$$s_x = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

$$\sigma_x = i \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}} + 1 \right).$$

Таким чином чотирьохвимірний простір-час спеціальної теорії відносності еквівалентний бікватерніонному простору і

всі математичні співвідношення останнього можуть бути записані мовою бікватерніонів.

Згідно з попереднім викладом, координати події (матеріальної точки, точки бікватерніонного простору) у двох інерціальних системах відліку, що рухаються одна відносно іншої з швидкістю $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$, пов'язані між собою перетворенням Лоренца. Розглянемо тепер дві нескінченно близькі події. Вони можуть відповідати, наприклад, двом етапам при переміщенні у просторі і еволюції у часі однієї матеріальної точки. Якщо від однієї події до другої провести вектор $d\mathbf{R}$, то компоненти цього вектора $(d\mathbf{r}, icdt)$ та $(d\mathbf{r}', cdt')$ теж пов'язані між собою перетвореннями Лоренца

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{dx + V_x dt}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \\ dy' &= dy, \quad dz' = dz, \\ cdt' &= \frac{cdt + (V_x / c) dx}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Розділивши перші три рівності на четверту знаходимо закон додавання швидкостей релятивістської механіки

$$v'_x = \frac{v_x + V_x}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}.$$

Тут

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

швидкості руху матеріальної точки у нерухомій і руховій системах відліку. З отриманих формул видно, що швидкість

матеріальної точки у довільній інерціальній системі відліку не може перевищувати швидкості світла.

Якщо у рухомій системі відліку дві нескінченно близькі події відбуваються в одній і тій самій точці простору (розглядається еволюція у часі однієї матеріальної точки), тобто $d\mathbf{r} = 0$, то

$$dx' = \frac{V_x dt}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad dt' = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

Тут, згідно з термінологією релятивістської теорії, доцільно назвати dt власним часом, тобто часом, що відраховується у рухомій системі відліку, пов'язаній з матеріальною точкою. Очевидно, що найменшим проміжком між двома подіями є саме проміжок у рухомій системі відліку.

Аналогічно можна розглянути і випадок, коли у рухомій системі відліку дві нескінченно близькі події відбуваються в один і той самий момент часу (дві матеріальні точки займають фіксовані положення у кватерніонному просторі), тобто $dt = 0$, тоді

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad cdt' = \frac{(V_x/c) dx}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

Тут, згідно з термінологією релятивістської фізики, доцільно назвати dx власною відстанню (довжиною), тобто відстанню, що відраховується у рухомій системі відліку. Очевидно, що найменшою є відстань між двома точками простору саме в рухомій системі відліку.

Вище наведені результати для подій, що відбуваються в одній і тій самій точці простору, можна отримати і дещо іншим шляхом, причому, для загальнішого випадку довільної швидкості. Для цього знову розглянемо дві нескінченно близькі події, що відбуваються в одній і тій самій точці простору. Тоді

для квадрату модуля інтервалу між цими подіями у рухомій системі відліку матимемо:

$$|d\mathbf{R}|^2 = c^2 (dt)^2 .$$

Оскільки у нерухомій системі відліку той самий інтервал має вигляд

$$|dR|^2 = c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 ,$$

то порівнюючи ці два вирази маємо:

$$c^2 (dt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 = c^2 (dt)^2 ,$$

або

$$dt = dt' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} ,$$

де

$$V^2 = \frac{(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2}{(dt')^2} ,$$

а V – власна швидкість матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку або рухомої системи відліку щодо нерухомої.

Найпростіший функціонал, що можна співставити вільній частинці є

$$S = \alpha \int_{L_{AB}} d\mathbf{R} .$$

Тут інтеграл обчислюється вздовж траєкторії L частинки у кватерніонному просторі, A, B – довільні точки цього кватерніонного простору, α – певна стала (звичайне число), що характеризує дану частинку. Очевидно такий функціонал є бікватерніоном, а отже інваріантом відносно перетворення Лоренца. Рівняння траєкторії частинки у кватерніонному просторі у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} x &= x(t), & y &= y(t), & z &= z(t), \\ dx &= x'(t)dt, & dy &= y'(t)dt, & dz &= z'(t)dt, \end{aligned}$$

$$v_x = x'(t), \quad v_y = y'(t), \quad v_z = z'(t).$$

Оскільки диференціал кватерніону частинки

$$d\mathbf{R} = \mathbf{L}dx + \mathbf{M}dy + \mathbf{N}dz + i\mathbf{L}cdt,$$

то з урахуванням рівняння траєкторії він набере вигляду

$$d\mathbf{R} = (\mathbf{L}v_x + \mathbf{M}v_y + \mathbf{N}v_z + i\mathbf{L}c)dt,$$

де

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}, ic)$$

– бікватерніон швидкості частинки вздовж траєкторії.

З урахуванням двох останніх співвідношень, виконавши відповідну заміну, функціонал \mathbf{S} можна представити у вигляді визначеного інтегралу, а саме

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(t) dt,$$

де

$$\mathbf{L}(t) = \alpha(\mathbf{L}v_x + \mathbf{M}v_y + \mathbf{N}v_z + i\mathbf{L}c),$$

t_A – час початку, t_B – час закінчення руху частинки.

По аналогії з дією будемо називати функціонал \mathbf{S} бікватерніоном дії, а бікватерніонну функцію $\mathbf{L}(t)$ – бікватерніонною функцією Лагранжа. Саму функцію Лагранжа $L(t)$ визначимо як модуль бікватерніонної функції Лагранжа, тобто

$$L(t) = |\mathbf{L}(t)| = \sqrt{\mathbf{L}(t)\bar{\mathbf{L}}(t)},$$

або

$$L(t) = i\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Відповідним чином визначимо і дію:

$$S(t) = |\mathbf{S}(t)| = \sqrt{\mathbf{S}(t)\bar{\mathbf{S}}(t)}.$$

Оскільки у нерелятивістському наближенні $v^2/c^2 \ll 1$ функція Лагранжа має добре відомий вигляд

$$L(t) = -mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

то порівнюючи з нею в цьому ж наближенні отриману нами функцію

$$L(t) = c\alpha - c\alpha \frac{v^2}{2c^2},$$

ми матимемо наступний вираз для сталої α :

$$\alpha = -mc.$$

Для довільної швидкості частинки

$$L(t) = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

За означенням імпульсу частинки \mathbf{p}

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}.$$

Для вільної частинки, використовуючи отриманий нами лагранжиан, маємо:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

У нерелятивістському наближенні

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

За означенням енергії частинки \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L.$$

Для вільної частинки

$$\mathcal{E} = mc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Для $v=0$ енергія частинки складається лише з енергії спокою частинки

$$\mathcal{E} = mc^2.$$

При малих швидкостях до неї додається ще кінетична енергія і

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{mv^2}{2}.$$

Безпосередньою підстановкою можна переконатись, що у релятивістському випадку

$$\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Звідси легко визначається функція Гамільтона частинки

$$H = \varepsilon(\mathbf{p}) = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}.$$

1.12. Кватерніони релятивістської механіки

З усіх можливих бікватерніонів, що мають стосунок до релятивістської механіки, нас цікавитимуть такі, модуль яких є інваріантним щодо перетворень Лоренца. Поки що ми розглядали лише один такий кватерніон – кватерніонний радіус-вектор, а саме:

$$R = (\mathbf{r}, ict).$$

Диференціал цього кватерніону має вигляд

$$dR = (d\mathbf{r}, icdt),$$

а його модуль

$$|dR| = \sqrt{(d\mathbf{r})^2 - c^2 (dt)^2} = icdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

теж є інваріантом. Трансформаційні властивості бікватерніону не зміняться, якщо обчислити його похідну за інваріантною величиною. Тому, похідна

$$\mathbf{V} = \frac{dR}{|dR|} = -i \left(\frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, i \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right),$$

яка може називатись бікватерніоном швидкості матеріальної точки, має такі ж трансформаційні властивості, що і бікватерніонний радіус-вектор. При цьому

$$|\mathbf{V}|^2 = E.$$

Очевидно кватерніон

$$A = \frac{d^2R}{|dR|^2},$$

де

$$A = - \left(\frac{\mathbf{a}/c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{va})/c^4}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, i \frac{\mathbf{va}/c^3}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \right),$$

є бікватерніоном прискорення. Тут \mathbf{a} – тривимірний вектор прискорення. Помноживши бікватерніон прискорення на масу спокою матеріальної точки m_0 ми отримаємо бікватерніон сили:

$$F = - \left\{ \frac{\mathbf{f}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, i \frac{\mathbf{fv}/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right\}, \quad \text{де} \quad \mathbf{f} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

тривимірний вектор сили. Останній вираз можна записати і у вигляді

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} m\mathbf{v},$$

де

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

релятивістська маса матеріальної точки.

Безпосередньо обчисливши похідну

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \tilde{\mathbf{V}} = \left(\frac{\mathbf{v}}{c}, i \right),$$

ми отримаємо бікватерніон швидкості $\tilde{\mathbf{V}}$, модуль якого не є інваріантом відносно перетворення Лоренца. Компоненти саме такого кватерніону швидкості безпосередньо вимірюються експериментально.

Оскільки компоненти швидкості визначаються як частка двох диференціалів, кожний з яких при перетворенні Лоренца, тобто при переході від однієї інерціальної системи координат до іншої, що рухається відносно першої вздовж осі X із швидкістю V_x перетворюється за законом

$$dx' = \frac{dx + V_x dt}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad cdt' = \frac{cdt + (V_x/c) dx}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}},$$

то компоненти бікватерніону швидкості $\tilde{\mathbf{V}}$ будуть перетворюватись за складнішим законом, а саме:

$$v'_x = \frac{v_x + V_x}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x V_x}{c^2}}.$$

Якщо обчислити другу похідну радіус-вектора за часом, то ми отримаємо бікватерніон прискорення

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial t^2} = \mathbf{A} = \left(\frac{\mathbf{a}}{c^2}, 0 \right).$$

Очевидно, що закон його відображення з нерухомого бікватерніонного простору в рухомий буде ще складнішим.

Розглянемо лінійний бікватерніонний диференціальний оператор

$$\nabla = \left\{ \nabla, i \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\},$$

де, в Декартових координатах

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

– відомий диференціальний оператор набла. За аналогією назвемо диференціальний оператор ∇ бікватерніонним оператором набла. Подіємо цим оператором на дію S , яка є інваріантною відносно перетворення Лоренца. В результаті отримаємо

$$\nabla S = \left(i \nabla S, -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} S \right).$$

Останній результат можна записати і так:

$$\nabla S = iP, \text{ де } P = (\mathbf{p}, \varepsilon / c)$$

кватерніон імпульсу частинки. Дійсно, згідно з означенням,

$$\nabla S = \mathbf{p}$$

є імпульсом частинки, а

$$\partial S / \partial t = \varepsilon$$

її енергія. Очевидно, при перетворенні Лоренца компоненти кватерніону енергії-імпульсу перетворюватимуться за законом:

$$p'_x = \frac{p_x + V_x \varepsilon / c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon + V_x p_x}{\sqrt{1 - \frac{V_x^2}{c^2}}}.$$

1.13. Кватерніони електродинаміки

З однієї векторної і однієї скалярної функції завжди можна утворити бікватерніонну функцію. Така кватерніонна

функція тоді матиме фундаментальний характер, коли в результаті тих, чи інших операцій з неї можна отримати значну кількість інших, важливих для даної галузі фізики бікватерніонних функцій.

Найважливішу бікватерніонну функцію класичної електродинаміки утворимо з векторного $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ та скалярного $\varphi(\mathbf{r}, t)$ потенціалів.

$$A = (\mathbf{A}, i\varphi).$$

Подіємо на кватерніонний потенціал поля кватерніонним диференціальним оператором набла

$$\nabla A = ([\nabla, \mathbf{A}] + i\nabla\varphi + i\partial\mathbf{A}/c\partial t, -\partial\varphi/c\partial t - \nabla\mathbf{A})$$

або

$$\nabla A = (\text{rot } \mathbf{A} + i \text{grad } \varphi + i\partial\mathbf{A}/c\partial t, -\partial\varphi/c\partial t - \text{div } \mathbf{A}).$$

За означенням напруженостей електричного \mathbf{E} та магнітного \mathbf{H} полів

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \partial\mathbf{A}/c\partial t, \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi &= \nabla\varphi, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= [\nabla, \mathbf{A}], \\ \text{div } \mathbf{A} &= \nabla\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Легко з'ясувати, що якщо у співвідношення, які визначають напруженості полів замість потенціалів \mathbf{A} і φ підставити потенціали \mathbf{A}' і φ' такі, що

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } f, \\ \varphi' &= \varphi - \partial f / c\partial t, \end{aligned}$$

де f – довільна функція, то напруженості полів не зміняться. Дійсно

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \text{rot } \mathbf{A}' = [\nabla, \mathbf{A}'] = [\nabla, \mathbf{A} + \text{grad } f] = \\ &= [\nabla, \mathbf{A} + \nabla f] = [\nabla, \mathbf{A}] + [\nabla, \nabla f] = [\nabla, \mathbf{A}] = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \partial \mathbf{A}' / c \partial t = -\nabla \varphi' - \partial \mathbf{A}' / c \partial t = \\
&= -\nabla(\varphi - \partial f / c \partial t) - \partial(\mathbf{A} + \nabla f) / c \partial t = \\
&= -\nabla \varphi + \nabla \partial f / c \partial t - \partial \mathbf{A} / c \partial t - \partial \nabla f / c \partial t = \\
&= -\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / c \partial t = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / c \partial t = \mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Ця неоднозначність потенціалів дозволяє обрати їх так, щоб вони задовольняли одній додатковій умові, оскільки ми можемо обрати довільним чином саме одну невідому функцію f . Серед нескінченної кількості можливих умов найбільш зручною у багатьох випадках є умова

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

що називається калібрувкою Лоренца. У цьому разі

$$U = \nabla A = (\mathbf{H} + i\mathbf{E}, 0).$$

З'ясуємо, яким чином перетворюються напруженості електричного та магнітного полів при перетворенні Лоренца. Оскільки кватерніон напруженості поля \mathbf{U} є чисто векторним, то таким він має залишатись і при перетвореннях Лоренца. З математичної точки зору це означає, що поворот бікватерніону напруженості поля при його відображенні з нерухомого бікватерніонного простору у рухомий має бути чисто просторовим, хоча радіус-вектор при цьому може обертатись у будь-якій площині

$$U' = S U S^{-1}.$$

Тут S є вже розглянутим вище спеціальним бікватерніоном,

$$S = (\mathbf{s}, i\sigma),$$

$$\bar{S} = (-\mathbf{s}, i\sigma),$$

$$\|S\|^2 = S \bar{S} = \mathbf{s}^2 - \sigma^2$$

$$S^{-1} = \frac{(-\mathbf{s}, i\sigma)}{\mathbf{s}^2 - \sigma^2}.$$

У цьому разі, використовуючи формулу для добутку кватерніонів

$$AB = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] + i\alpha\mathbf{b} + i\beta\mathbf{a}, -\alpha\beta - \mathbf{ab}),$$

отримаємо

$$SU = (-[\mathbf{s}, \mathbf{u}] + i\sigma\mathbf{u}, -\mathbf{su}).$$

Відповідно

$$U' = SUS^{-1} = (-(s^2 + \sigma^2)\mathbf{u} + 2(\mathbf{su})\mathbf{s} + 2i\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{u}], 0)/(s^2 - \sigma^2).$$

Для повороту, що відбувається у площині $x0t$ чотиривимірного простору-часу вектор \mathbf{s} слід взяти у вигляді

$$\mathbf{s} = (s_x, 0, 0).$$

Тоді

$$U'_x = (SUS^{-1})_x = (-(s_x^2 + \sigma^2)u_x + 2s_x u_x s_x + 2i\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{u}]_x, 0)/(s_x^2 - \sigma^2),$$

$$U'_y = (SUS^{-1})_y = (-(s_x^2 + \sigma^2)u_y + 2i\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{u}]_y, 0)/(s_x^2 - \sigma^2),$$

$$U'_z = (SUS^{-1})_z = (-(s_x^2 + \sigma^2)u_z + 2i\sigma[\mathbf{s}, \mathbf{u}]_z, 0)/(s_x^2 - \sigma^2).$$

Враховуючи, що

$$[\mathbf{s}, \mathbf{u}]_x = 0, [\mathbf{s}, \mathbf{u}]_y = -s_x u_z, [\mathbf{s}, \mathbf{u}]_z = s_x u_y,$$

отримаємо

$$(SUS^{-1})_x = (u_x, 0),$$

$$(SUS^{-1})_y = (-(s_x^2 + \sigma^2)u_y - 2i\sigma s_x u_z, 0)/(s_x^2 - \sigma^2),$$

$$(SUS^{-1})_z = (-(s_x^2 + \sigma^2)u_z + 2i\sigma s_x u_y, 0)/(s_x^2 - \sigma^2).$$

В релятивістській електродинаміці переходу від однієї інерційної системи відліку до іншої, що рухається відносно першої із швидкістю $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$, відповідає поворот бікватерніону U в площині $x0t$ на певний кут, пов'язаний зі швидкістю руху системи. При цьому просторово-часовий інтервал не змінюється

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 = const.$$

Не змінюється і норма кватерніону U . Тобто

$$\|U\|^2 = \mathbf{u}^2 = \text{const}.$$

Більше того, у цього кватерніону при всіх подібних поворотах його скалярна частина завжди залишається рівною нулю.

Деталізуємо структуру кватерніону S . Перш за все видно, що величини s_x і σ не є незалежними. Дійсно, введемо позначення

$$\frac{s_x^2 + \sigma^2}{s_x^2 - \sigma^2} = A, \quad \frac{2i\sigma s_x u_z}{s_x^2 - \sigma^2} = B.$$

З першого рівняння випливає, що

$$s_x^2 = \sigma^2 \frac{A+1}{A-1}.$$

Легко показати, що

$$s_x^2 - \sigma^2 = \frac{2\sigma^2}{A-1}.$$

Тоді

$$\frac{2i\sigma s_x u_z}{s_x^2 - \sigma^2} = \frac{s_x(A-1)}{\sigma} = B,$$

тобто

$$s_x^2 = \sigma^2 \frac{B^2}{(A-1)^2}.$$

Порівнюючи два вирази для s_x^2 отримаємо

$$B^2 = A^2 - 1.$$

Всі результати релятивістської електродинаміки відтворюються при такому виборі сталих A і B

$$A = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}, \quad B = \frac{\frac{v_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}.$$

Тепер для компонент кватерніону поля матимемо відомі перетворення:

$$u'_x = u_x ,$$

$$u'_y = \frac{u_y - i \frac{v_x}{c} u_z}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} , \quad u'_z = \frac{u_z + i \frac{v_x}{c} u_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} .$$

Оскільки

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} + i\mathbf{E} ,$$

то

$$E'_x = E_x ,$$

$$E'_y = \frac{E_y + \frac{v_x}{c} H_z}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} , \quad E'_z = \frac{E_z - \frac{v_x}{c} H_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} ,$$

$$H'_x = H_x ,$$

$$H'_y = \frac{H_y - \frac{v_x}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} , \quad H'_z = \frac{H_z + \frac{v_x}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} .$$

Очевидно, що при розглянутому перетворенні компонент поля, модуль кватерніона поля є незмінним, тобто

$$U^2 = \|\mathbf{U}\|^2 = (\mathbf{H} + i\mathbf{E})^2 = const .$$

Звідси для дійсної та уявної частин останньої рівності маємо:

$$H^2 - E^2 = const ,$$

$$(\mathbf{H}\mathbf{E}) = const .$$

Це і є інваріанти поля.

Наступним важливим кватерніоном класичної електродинаміки є кватерніон густини струму

$$J = (\mathbf{j}, ic\rho) ,$$

де \mathbf{j} – вектор густини струму, ρ – густина заряду.

Наведені приклади не вичерпують можливостей кватерніонів (бікватерніонів) для їх використання в теоретичній фізиці. Всю релятивістську фізику можна переписати мовою кватерніонів. Для кватерніонів на сучасний момент існує добре розвинутий математичний аналіз, що, в значній мірі, нагадує комплексний. Існують аналоги умов Коші-Рімана, поняття кватерніонної аналітичності тощо. Але цей матеріал за своєю складністю вже виходить за межі навчального посібника для студентів технічних вузів.

1.14. Задачі для самостійної роботи

Варіант 1

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b) , зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z+i| < 2, 0 < \operatorname{Re} z \leq 1; \quad b) |z-i| = |z+2i|.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\ln(\sqrt{3}-i)$; $\sqrt[4]{-1}$; $\sqrt[3]{-1+i}$.

3. Обчислити: $(1+i)^{1-i}$, $\operatorname{Arcsin}(1+i\sqrt{3})$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $z^2 \bar{z}$.

5. Представити в алгебраїчній формі: $\bar{z} - iz^2$; $\sin(\pi/3+i)$; $\tan(\pi/4+i)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y; \quad f(0) = 0.$$

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $z \cos(z)$, $z_0 = 0$; $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -1$.

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $z \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$, $z_0 = 2$; $\frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1$.

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\sin(z); \sin(1/z); \frac{1}{\exp(z)-1} - \frac{1}{z}; \frac{z^5}{(1+z)(z^2+1)(z-i)}.$$

10. Обчислити інтеграл $\int_L (z+2) \exp(z) dz$, де $L: \{|z|=2, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{(x^2+1)^2} dx.$$

12. Знайти суму $\cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(nx)$.

Варіант 2

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами $a)$ і $b)$, зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z+i| > 1, -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0; \quad b) \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{-1-i}$.

3. Обчислити: $(1-i)^{1-i\sqrt{3}}$, $\operatorname{Arccos}(1+i\sqrt{3})$, $\ln(-\sqrt{3}+i)$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $z \exp(z)$.

5. Представити в алгебраїчній формі: $z^2 + i$; $\sin(\pi/4 + i)$; $\cot(\pi/3 + i)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$:

$$v(x, y) = 2xy - x + 3y + 1; \quad f(0) = i.$$

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $(z-1)\sin(z-1)$, $z_0 = 1$; $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 1$.

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$, $z_0 = 1$; $\frac{z-1}{z(z+1)}$, $z_0 = 0$.

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\cos(z); \cos(1/z); \frac{1}{\sin(z^2)}; \frac{z^5}{(1-z)(z^2+1)(z+i)}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} z \operatorname{Im}(z^2) dz, \text{ де } AB - \text{ відрізок прямої } z_A = 0 \quad z_B = 1 + i.$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z-1-i|=5/4} \frac{dz}{z^2(z-1)}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+1)}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{(x^2-x+1)^2} dx.$$

12. Знайти суму $\sin(x) + \sin(2x) + \dots + \sin(nx)$.

Варіант 3

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b), зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z-1-i| < 2, |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}; \quad b) \operatorname{Re}(\bar{z})^2 = 1.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{i}$; $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$.

3. Обчислити: i^{1-i} , $\operatorname{Arc} \tan(1+i\sqrt{3})$, $\ln(1-i\sqrt{3})$.

4.Перевірити функцію на диференційованість: $|z| \bar{z}$.

5.Представити в алгебраїчній формі: $i - z^3$; $\sin(\pi/6 + i)$; $\tan(\pi/4 + i)$.

6.Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 2x + y + 1; \quad f(0) = 1.$$

7.Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $\cos(z+1)$, $z_0 = i$; $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 2$.

8.Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $\cos\left(\frac{3z}{z-i}\right)$, $z_0 = i$; $\frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 1$.

9.Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\tan(z); \tan(1/z); \frac{\exp(z)-1}{\sin(z)}; \frac{\sin(z)}{z^4-1} \exp(1/z).$$

10.Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} z \operatorname{Re}(z^2) dz, \text{ де } AB - \text{ відрізок прямої } z_A = 0, \quad z_B = 1 + i.$$

11.Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z-3|=1/2} \frac{\exp(z) dz}{\sin(z)}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(x) dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

12.Розв'язати рівняння $(x+i)^n - (x-i)^n = 0$.

Варіант 4

1.Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b), зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z+i| \geq 1, |z| < 2; \quad b) \operatorname{Im}(\overline{z^2 - z}) = 2 - \operatorname{Im} z.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[4]{1}$; $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$;
3. Обчислити: $(1+i)^i$, $\text{Arc cot}(1+i\sqrt{3})$, $\ln(-1-i\sqrt{3})$;
4. Перевірити функцію на диференційованість: $|z| \text{Re}(z)$.
5. Представити в алгебраїчній формі: $\frac{iz+1}{1+z}$; $\cos(\pi/3+i)$;
 $\cot(\pi/4+i)$;
6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$:
 $u(x, y) = x^2 - y^2 + y - 2$; $f(-1) = 3$.
7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $(z-i)\sin(z)$, $z_0 = i$; $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0 = 2i$.
8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і знайти область збіжності ряду: $z \sin\left(\frac{z}{z-2i}\right)$, $z_0 = 2i$; $\frac{z}{z^2+1}$, $z_0 = i$.
9. Визначити особливі точки функції та їх тип:
 $\cot(z)$; $\cot(1/z)$; $\frac{\sin(z^2)}{z(z^3+1)} \exp(1/z)$; $\frac{(z+1)^5}{(1-z)^2(z^2+1)}$.
10. Обчислити інтеграл
 $\int_{ABC} [z + \sin(z)] dz$, де ABC - ламана $z_A = 0$, $z_B = i$.
11. Обчислити інтеграли:
 $\int_{|z-1/2|=1} \frac{\exp(z)+1}{z(z-1)} dz$; $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$; $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin(2x)}{x^2+2x+2} dx$.
12. Розв'язати рівняння $\cos(x) + i \sin(x) = \sin(x) + i \cos(x)$.

Варіант 5

1. Встановити, які множини точок комплексної площини

визначаються заданими умовами $a)$ і $b)$, зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z+i| > 1, -\pi/4 \leq \arg z < 0; \quad b) \operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[4]{1+i}$.

3. Обчислити: i^i , $\operatorname{Arcsinh}(1+i\sqrt{3})$, $\ln(1+i\sqrt{3})$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\operatorname{Im}(z^2)\bar{z}$.

5. Представити в алгебраїчній формі: \bar{z}/z ; $\cosh(1+i\pi/4)$; $\tan(\pi/4+i)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$: $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x - 2y$; $f(0) = 1$.

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $(z-1)\cos(z)$, $z_0 = 1$;

$$\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 0.$$

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $z \cos\left(\frac{2z}{z-1}\right)$, $z_0 = 1$;

$$\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3.$$

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\sinh(z); \sinh(1/z); \frac{z^6}{(1-z)^2(z^3+1)}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} \exp(|z|^2) \operatorname{Re}(z) dz, \text{ де } AB - \text{відрізок прямої } z_A = -1-i, z_B = 0$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z-2|=3} \frac{\cos^2(z)+1}{z^2-\pi^2} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}; \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{(x^2+1)^3}.$$

12. Виразити x і y через u і v , якщо

$$\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{u+iv} = 1.$$

Варіант 6

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b), зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z-2-i| \leq 2, \operatorname{Re} z \geq 3, \operatorname{Im} z < 1; b) \operatorname{Im} \frac{z+1}{z+i} = 0.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{-i}; \sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}.$

3. Обчислити: $(1+i)^{1-i}, \operatorname{Arcsin}(1+i\sqrt{3}), \ln(-1+i\sqrt{3});$

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\sin(z).$

5. Представити в алгебраїчній формі: $z \exp(z); \cosh(1+i\pi/6); \cot(\pi/2+i).$

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$: $u(x, y) = \exp(2x+1) \cos(2y); f(0) = e.$

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z-z_0$ і визначити область збіжності ряду: $z \cos(z-1), z_0 = 0;$

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}, z_0 = 1.$$

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z-z_0$ і визначити область збіжності ряду: $(z-1) \cos\left(\frac{z-1}{z}\right), z_0 = 0;$

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}, z_0 = -1.$$

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\cosh(z); \cosh(1/z); \frac{\sin(z)}{(z^3-1)^2}; \frac{(z+i)^5}{(1-z)(z^2+1)^2}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_L [\sin(iz) + z] dz, \text{ де } L: \{|z|=2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin(z)(z - \pi)} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+16)}; \int_0^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{(x^2+16)(x^2+9)}.$$

12. Довести, що $\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = 1$.

Варіант 7

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами *a*) і *b*), зобразити ці множини на малюнках.:

a) $1 < z \cdot \overline{z} < 2, \operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$; *b*) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}$.

3. Обчислити: $(1+i\sqrt{3})^{1-i}$, $\operatorname{Arc} \cosh(1+i\sqrt{3})$, $\ln(1-i)$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\operatorname{Re}(z^2)\overline{z}$.

5. Представити в алгебраїчній формі: $z^2 + z$; $\operatorname{Ln}(-1+i)$; $\exp(1+i\pi/4)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$: $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 - 3x^2y + y^3$; $f(0) = 0$.

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду:

$z^2 \sin(z+1), z_0 = 0$; $\frac{2z}{z^2+4}, z_0 = -2$.

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду:
 $z^2 \sin\left(\frac{z+1}{z}\right)$, $z_0 = 0$; $\frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -2i$.

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\tanh(z); \tanh(1/z); \frac{\sin^3(z)}{z[1 - \cos(z)]}; \frac{(z-i)^5}{(1-z)^2(z^2+1)}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_{ABC} \operatorname{Re}(|z|/z) dz, \text{ де } AB: \{|z|=2, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, BC - \text{відрізок прямої.}$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin^2(z)}{z \cos(z)} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos(x)}{x^4 + 5x^2 + 6} dx.$$

12. Представити в алгебраїчній формі комплексне число

$$\frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib)^2}.$$

Варіант 8

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a і b , зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z-1-i| \geq 1, 0 \leq \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z \leq 2; \quad b) |z+2i| = |z-2|.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{-1+2i}$.

3. Обчислити: $(\sqrt{3}+i)^{1-i}$, $\operatorname{Arc} \tanh(1+i\sqrt{3})$, $\ln(1+i)$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\operatorname{Im}(z^2)\bar{z}$.

5. Представити в алгебраїчній формі: z^3 ; $\operatorname{Ln}(-1+i\sqrt{3})$; $\exp(1+i\pi/3)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$: $u(x, y) = \exp(x) \cos(y+1)$; $f(-i) = 1$.

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $\sin(z+i)$, $z_0 = 1$;

$$\frac{z-2}{z(z+1)}, z_0 = 1.$$

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $\sin\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$, $z_0 = i$;

$$\frac{z-2}{z(z+1)}, z_0 = -1.$$

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\coth(z); \coth(1/z); \frac{\cos(z)}{z^4-1}; \frac{z^5}{(1-z)^2(z^3+1)}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_{ABC} \cosh(z) dz, \text{ де } ABC - \text{ ламана, } z_A = 0, z_B = 1, z_C = i.$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin(z^3)}{1-\cos(z)} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\sin(x)}{(x^2+9)^2} dx.$$

12. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(x-iy)(a-ib) = i^5, |a| \neq |b|, a \text{ and } b \text{ are real.}$$

Варіант 9

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b), зобразити ці множини на малюнках.:

a) $1 \leq |z - i| < 2, \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 1;$ b) $|(z - 3)/(z + 2i)| = 1.$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{-2 + i}.$

3. Обчислити: $(1 + i)^{\sqrt{3} - i}, \operatorname{Arc} \operatorname{coth}(1 + i\sqrt{3}), \ln(-1 - i);$

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\exp(z).$

5. Представити в алгебраїчній формі: $2^z; \operatorname{Ln}(-\sqrt{3} + i); \exp(1 + i\pi/6).$

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$:

$v(x, y) = 2xy + 3y - x + 1; f(0) = i.$

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $z \exp(z - 1), z_0 = 1;$

$\frac{z - 1}{z(z + 2)}, z_0 = 1.$

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $z \exp\left(\frac{1}{z - 1}\right), z_0 = 1;$

$\frac{z - 1}{z(z + 2)}, z_0 = 0.$

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$\exp(z); \exp[1/(z - 1)]; \frac{\exp(1/z)}{[\exp(z) - 1](1 - z)^3}; \frac{z^4}{(1 + z)(z^2 + 1)}.$

10. Обчислити інтеграл

$\int_{ABC} z \exp(z^2) dz$, де ABC - ламана $z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$.

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=2} \frac{1 - \cos(z^2)}{z^2} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

12. Знайти дійсні розв'язки рівняння
 $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

Варіант 10

1. Встановити, які множини точок комплексної площини визначаються заданими умовами a) і b), зобразити ці множини на малюнках.:

$$a) |z - 2 - i| \geq 1, 1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3; \quad b) |z| - 3 \operatorname{Im} z = 6.$$

2. Знайти всі значення коренів: $\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$.

3. Обчислити: $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{1-i}$, $\operatorname{Arcsinh}(\sqrt{3} - i)$, $\ln(-1 + i)$.

4. Перевірити функцію на диференційованість: $\ln(z)$.

5. Представити в алгебраїчній формі: z^i ; $\operatorname{Ln}(-1 + 2i)$; $\exp(1 + i\pi/2)$.

6. Відновити аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за її дійсною $u(x, y)$ або уявною частинами $v(x, y)$ і відомим значенням $f(z_0)$: $v(x, y) = \exp(x) \cos y$; $f(0) = 1 - i$.

7. Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $(z - 1) \exp(z)$, $z_0 = 1$;

$$\frac{z - 1}{z(z - 2)}, z_0 = 1.$$

8. Розвинути функцію в ряд Лорана за степенями $z - z_0$ і визначити область збіжності ряду: $(z - 1) \exp\left(\frac{z - 1}{z}\right)$, $z_0 = 0$;

$$\frac{z - 1}{z(z - 2)}, z_0 = 2.$$

9. Визначити особливі точки функції та їх тип:

$$\exp(1/z); \exp(1-z); \sin(z)/[1-\cos(z)]; \frac{z^5}{(1-z)^2(z^2+1)}.$$

10. Обчислити інтеграл

$$\int_L \frac{\bar{z}}{z} dz, \text{ де } L - \text{ межа області: } \{1 < |z| < 2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

11. Обчислити інтеграли:

$$\int_{|z|=2} \frac{z - \sin(z)}{z^4} dz; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx; \int_0^{\infty} \frac{x \sin(3x)}{(x^2+4)^2} dx.$$

12. Знайти дійсні розв'язки рівняння

$$(4+2i)x + (5-3i)y = 13+i.$$

Глава 2.

Обчислення визначених інтегралів

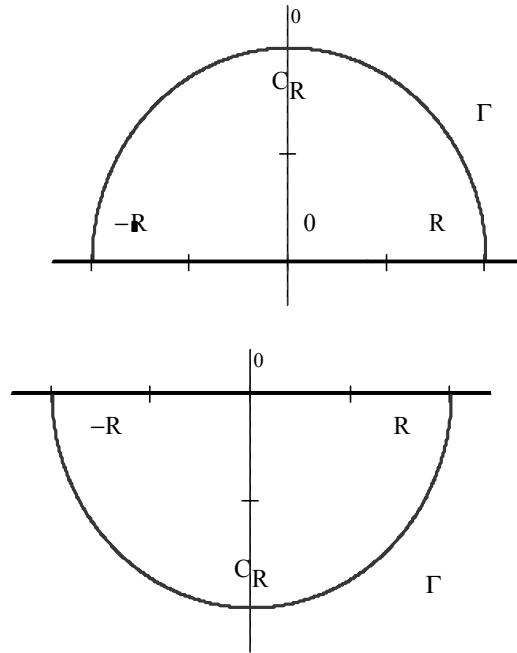
2.1. Полюси. Дробоворациональні функції

Тут $R(x)$ - дробоворациональна функція. Дробоворациональна функція $R(z)$ є аналітичною скрізь, за виключенням скінченної кількості особливих точок. Існування інтегралу можливе лише у разі, якщо нескінченно віддалена точка є нулем вищого порядку, ніж перший. До речі, ця умова гарантує нульове значення лишку у нескінченно віддаленій точці. Припустимо також, що функція $R(x)$ не має особливостей на дійсній осі.

Для обчислення цього інтегралу не можна безпосередньо застосувати теорему про лишки, оскільки цей визначений інтеграл є інтегралом вздовж дійсної осі, що не утворює замкненого контуру. Дійсну вісь можна доповнити до замкненого контуру за допомогою півкола нескінченно великого радіусу у верхній або нижній півплощинах з центром у початку координат C_R (дивися наступний малюнок).

Зауважимо, що форма контуру не грає жодної ролі при умові, що всі його ділянки знаходяться на нескінченній відстані від початку координат. До інтегралу вздовж такого замкненого контуру вже можна застосувати теорему про лишки, відповідно до якої

$$\int_{\Gamma} R(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[R(z), z_n] .$$



Мал. 17

Тут лишки обчислюються в ізолюваних особливих точках, що лежать або у верхній, або у нижній півплощинах. Контур обходиться у додатному напрямку. З іншого боку, у разі верхньої півплощини,

$$\int_{\Gamma} R(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x)dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} R(z)dz .$$

Проста оцінка показує, що якщо нескінченно віддалена точка є нулем другого або більш високого порядків, тобто в її околі $R(x)$ веде себе як $1/z^2$, $1/z^3$, ..., $1/z^n$, ..., то інтеграл за

півколом нескінченно великого радіусу дорівнює нулю. Отже, для верхньої півплощини

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[R(z), z_n] .$$

Якщо розглядається нижня півплощина, то, для проходження дійсної осі у попередньому напрямку, контур Γ слід обходити у від'ємному напрямку. Відповідно

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[R(z), z_n] .$$

Приклад 11. Обчислити наступний визначений інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} .$$

Розв'язання. Інтегранда є аналітичною у верхній півплощині за винятком точки $z=i$, яка є полюсом другого порядку. Крім того, вона достатньо швидко прямує до нуля при наближенні до нескінченно віддаленої точки. Обчислюючи її лишок у точці $z=i$,

$$\text{res} \left[\frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) = \frac{1}{4i}$$

матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2} .$$

Приклад 12. Обчислити

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} .$$

Розв'язання. Інтегранда задовольняє всім необхідним умовам попередньої теореми. Серед її шести полюсів першого порядку, що лежать на колі одиничного радіусу, три

$z_0 = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$ лежать у верхній півплощині. Тому

$$\operatorname{res}\left[\frac{1}{1+z^6}, z_k\right] = \frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}, \quad k=0,1,2.$$

Враховуючи парність інтегранди, можна записати, що

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Тоді

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = -\pi i \frac{z_0+z_1+z_2}{6} = -\frac{\pi i}{6} \left(\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right) + \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) + \exp\left(i\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \frac{\pi}{3}$$

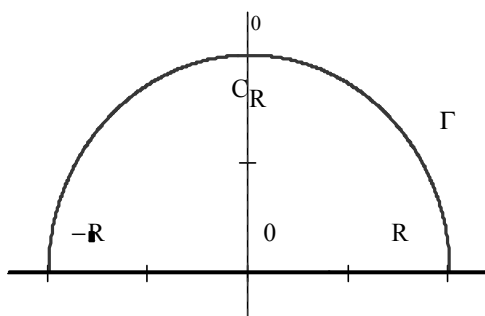
2.2. Істотно особливі точки

2.2.1. Інтеграли вигляду $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)R(x)dx$

Такі інтеграли виникають при використанні прямого та оберненого перетворень Фур'є¹¹ (Fourier), і оберненого перетворення Лапласа. Тут $R(x)$ - дробоворациональна функція. На відміну від попереднього випадку, вимоги щодо функції $R(x)$, які забезпечують існування інтегралу, менш жорсткі. Достатньо, щоб функція $R(x)$ при наближенні до нескінченно віддаленої точки вздовж дійсної осі прямувала до нуля. При цьому лишок у нескінченно віддаленій точці може бути відмінним від нуля. Припустимо також, що функція $R(x)$ не має особливостей на дійсній осі.

¹¹ Фур'є Жан Батист Жозеф (20.03.1768 - 16.05.1830) - французький математик, засновник математичної фізики

Зауважимо, що нескінченно віддалена точка є суттєво особливою для інтегранди, оскільки ряд Лорана містить нескінченну кількість розбіжних доданків в околі цієї точки. Значення функції у такій точці залежить від способу наближення до неї. Тому, на відміну від попереднього випадку, тут немає симетрії при виборі замкненого контуру. Для експоненти, у залежності від показника степеню, завжди існує така півплощина, що вздовж довільного напрямку руху від початку координат до нескінченно віддаленої точки спостерігається експоненційне спадання. У протилежній півплощині - експоненційне зростання. Вздовж межі між ними функція залишається обмеженою. Для обчислення цього інтегралу не можна безпосередньо застосувати теорему про лишки, оскільки цей визначений інтеграл є інтегралом вздовж дійсної осі, що не утворює замкнений контур. Дійсну вісь можна доповнити до замкнутого контуру за допомогою півкола нескінченно великого радіусу у верхній або нижній півплощині з центром у початку координат C_R (див. наступний малюнок).



Мал. 18

До інтегралу вздовж такого замкненого контуру Γ вже можна застосувати теорему про лишки, відповідно до якої

$$\int_{\Gamma} \exp(ikz)R(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(ikz)R(z), z_n] .$$

Лишки обчислюються в ізольованих особливих точках, що лежать у верхній півплощині. З іншого боку, для додатного напрямку обходу контуру

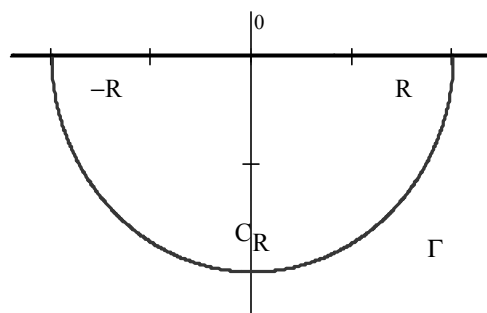
$$\int_{\Gamma} \exp(ikz)R(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)R(x)dx + \int_{C_R} \exp(ikz)R(z)dz .$$

Проста оцінка показує, що якщо нескінченно віддалена точка є нулем першого або більш високого порядків, тобто в її околі $R(x)$ веде себе як $1/z, 1/z^2, \dots, 1/z^n, \dots$ і, або просто прямує до нуля і, крім того, $k > 0$, то інтеграл за півколом нескінченно великого радіусу у верхній півплощині дорівнює нулю. Це пов'язане з тим, що під знаком інтегралу є множник $\exp[ik \text{Re}(z)]\exp[-k \text{Im}(z)]$, який забезпечує експоненційне спадання інтегранди при наближенні до нескінченно віддаленої точки у всіх напрямках, крім напрямків вздовж дійсної осі. Але ці дві точки становлять на півколі множину міри нуль і не впливають на значення інтегралу. До речі, і у цих напрямках інтегранда прямує до нуля, відповідно до умови існування вихідного інтегралу. Це твердження становить суть леми Жордана¹² (Jordan). Отже, для верхньої півплощини

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)R(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(ikz)R(z), z_n] .$$

При цьому, інтеграл за півколом нескінченно великого радіусу у нижній півплощині буде розбіжним. Якщо $k < 0$, то дійсну вісь доцільно доповнювати до замкненого контуру півколом нескінченно великого радіусу у нижній півплощини (дивися наступний малюнок).

¹² Йордан Марі Едмон Каміль (5.01.1838 - 21.01.1922) - французький математик.



Мал. 19

Для проходження дійсної осі у попередньому напрямку, контур Γ слід обходити у від'ємному напрямку. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx)R(x)dx = -2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(ikz)R(z), z_n] .$$

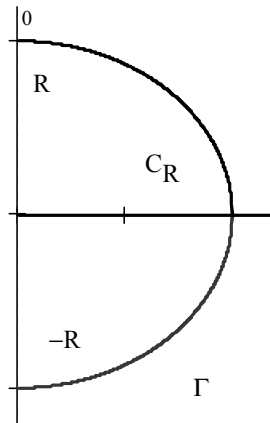
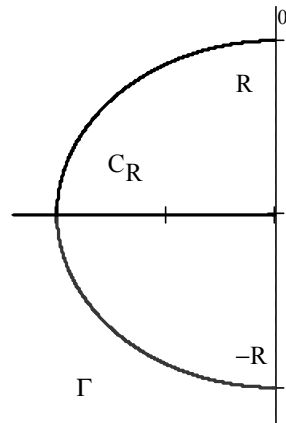
Тут лишки обчислюються в ізольованих особливих точках, що лежать у нижній півплощині. Аналогічно можна отримати і два наступні результати. Для $k > 0$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(-kz)R(z)dz = -2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(-kz)R(z), z_n] .$$

Тут лишки обчислюються в ізольованих особливих точках, що лежать у правій півплощині, а інтеграл береться вздовж уявної осі. Для $k < 0$

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(kz)R(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{res}[\exp(kz)R(z), z_n]$$

де лишки обчислюються в ізольованих особливих точках лівої півплощині.



Мал. 20

Приклад 13. Обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(imx)}{1+x^2} dx, \quad m > 0.$$

Розв'язання. Інтегранда аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, крім точки $z=i$, що є

полюсом першого порядку, і задовольняє умовам лемі Жордана, тому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(imx)}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{z \exp(imz)}{1+z^2}, i \right] = \frac{\pi i}{\exp(m)}.$$

Зауваження. Прирівнюючи дійсні і уявні частини рівності, матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(mx)}{1+x^2} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{1+x^2} dx = \pi \exp(-m).$$

Приклад 14. Обчислити інтеграл

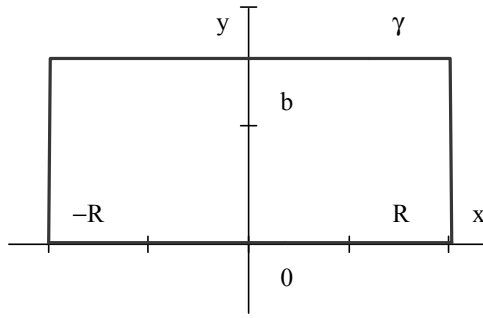
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Розв'язання. Інтегранда задовольняє умовам лемі Жордана і у верхній півплощині має полюс першого порядку $z = 1 + 2i$, тому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 5} dx &= -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{res} \left[\frac{\exp(iz)}{z^2 - 2z + 5}, 1 + 2i \right] \right\} = \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{Re}[\exp(-2 + i)] = \frac{\pi}{2} \exp(-2) \cos(1). \end{aligned}$$

2.2.2. Інтеграли вигляду $\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(2bx) dx$

Тут єдиною особливою точкою є нескінченно віддалена точка, яка є істотно особливою. Замість аналітичного продовження інтегранди на комплексну площину, розглянемо допоміжну функцію $f(z) = \exp(-z^2)$, аналітичну скрізь, крім нескінченно віддаленої точки. Зінтегруємо її за контуром Γ , утвореним прямокутником $|x| \leq R, 0 \leq y \leq b$ (див. наступний малюнок).



Мал. 21.

Доцільність саме такого вибору контуру інтегрування полягає у тому, як згодом з'ясується, що при $R \rightarrow \infty$ за двома сторонами прямокутника інтеграли дорівнюватимуть нулю, за третьою інтеграл від допоміжної функції буде збігатись з шуканим інтегралом а інтеграл за четвертою стороною прямокутника матиме відоме значення. Відповідно до теореми Коші, оскільки всередині зазначеного контуру відсутні особливі точки,

$$\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz = 0.$$

Контурний інтеграл вздовж сторін прямокутника є сумою чотирьох інтегралів, відповідно до кількості сторін прямокутника. Останні інтеграли легко привести до визначених інтегралів використовуючи рівняння відповідних ліній. Це наступні рівняння:

$$\begin{cases} z = x, \\ -R \leq x \leq R \end{cases}, \quad \begin{cases} z = R + iy, \\ 0 < y < b \end{cases}, \quad \begin{cases} z = x + ib, \\ -R \leq x \leq R \end{cases}, \quad \begin{cases} z = -R + iy \\ 0 < y < b \end{cases}.$$

Виконуючи в інтегралі заміну змінних відповідно до рівнянь окремих ділянок контуру і обходячи контур у додатному напрямку, отримаємо

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \exp(-z^2) dz &= \int_{-R}^R \exp(-x^2) dx + \int_0^b \exp[-(R+iy)^2] i dy + \\
&+ \int_{-R}^R \exp[-(x+ib)^2] dx + \int_0^b \exp[-(-R+iy)^2] i dy = \\
&= \int_{-R}^R \exp(-x^2) dx + i \int_0^b \exp(-R^2 + y^2) \exp(-2iRy) dy + \\
&+ \int_{-R}^R \exp(-x^2 + b^2) \exp(-2bix) dx + i \int_b^0 \exp(-R^2 + y^2) \exp(2Riy) dy = \\
&= \int_{-R}^R \exp(-x^2) dx + 2 \int_0^b \exp(-R^2 + y^2) \sin(2yR) dy + \\
&+ \int_R^0 \exp(-x^2 + b^2) \exp(-2bix) dx + \int_0^{-R} \exp(-x^2 + b^2) \exp(-2bix) dx = \\
&= \int_{-R}^R \exp(-x^2) dx - 2 \int_0^R \exp(-x^2 + b^2) \cos(2bx) dx + \\
&\quad + 2 \int_0^b \exp(-R^2 + y^2) \sin(2yR) dy .
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^R \exp(-x^2) dx + 2 \int_0^b \exp(-R^2 + y^2) \sin(2yR) dy - \\
&\quad - 2 \int_0^R \exp(-x^2 + b^2) \cos(2bx) dx = 0 .
\end{aligned}$$

Переходячи у цій рівності до межі при $R \rightarrow \infty$, одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = 2 \int_0^{\infty} \exp(-x^2 + b^2) \cos(2bx) dx ,$$

де ми врахували, що

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^b \exp(-R^2 + y^2) \sin(2yR) dy = 0.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Ейлера-Пуасона¹³ (Poisson)),

то остаточно матимемо

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(2bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-b^2).$$

2.3. Інтеграл Френеля $\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$

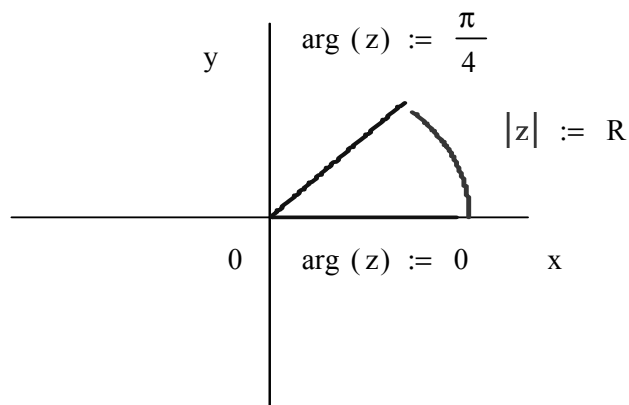
В інтегралах Френеля (Fresnel)¹⁴ єдиною особливою точкою інтегранди є нескінченно віддалена точка, яка є суттєво особливою. Замість розгляду аналітичного продовження інтегранди на всю комплексну площину, розглянемо допоміжну функцію $f(z) = \exp(iz^2)$, аналітичну на всій комплексній площині, крім нескінченно віддаленої точки, яка є істотно особливою. Зінтегруємо її за контуром $\Gamma: 0 \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg(z) \leq \pi/4$ (дивися наступний малюнок).

Цей контур обирається таким чином, що інтеграл за дугою кола для $R \rightarrow \infty$ прямуватиме до нуля, інтеграл вздовж відрізка дійсної осі приведеється до шуканого інтегралу, інтеграл вздовж відрізка бісектриси приведеється до інтегралу з відомим значенням. За теоремою Коші для однозв'язної області, оскільки всередині зазначеного контуру відсутні особливі точки,

$$\int_{\Gamma} \exp(iz^2) dz = 0.$$

¹³ Пуасон Семіон Дені (21.06.1781 - 25.04.1840) - французький математик

¹⁴ Френель Огюстен Жан (10.05.1788 - 14.07.1827) - французький фізик.



Мал. 22.

Контурний інтеграл вздовж границі сектора можна представити сумою трьох інтегралів, кожний з яких є контурним вздовж одного з променів або дуги кола. Ці інтеграли легко привести до визначених інтегралів, використовуючи рівняння відповідних ліній:

$$\begin{cases} z = x \\ 0 \leq x \leq R \end{cases}, \quad \begin{cases} z = R \exp(i\varphi) \\ 0 < \varphi < \pi/4 \end{cases}, \quad \begin{cases} z = (1+i)\rho \\ 0 \leq \rho < R \end{cases}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \exp(iz^2) dz = \\ & = \int_0^R \exp(ix^2) dx + \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2 \exp(2i\varphi)] \exp(i\varphi) R i d\varphi + \\ & \quad + \int_R^0 \exp(-\rho^2) \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) d\rho = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \int_R^0 \exp(-\rho^2) d\rho + \int_0^R \exp(ix^2) dx + \end{aligned}$$

$$+iR \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2 \cos(2\varphi)] \exp[-R^2 \sin(2\varphi)] \exp(i\varphi) d\varphi .$$

Переходячи у правій частині рівності до межі $R \rightarrow \infty$ одержимо

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_{-\infty}^0 \exp(-\rho^2) d\rho + \int_0^{\infty} \exp(ix^2) dx + \\ + i \lim_{R \rightarrow \infty} R \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2 \cos(2\varphi)] \exp[-R^2 \sin(2\varphi)] \exp(i\varphi) d\varphi = 0 .$$

Врахуємо, що для $R \rightarrow \infty$

$$\left| Ri \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2 \cos(2\varphi)] \exp[-R^2 \sin(2\varphi)] \exp(i\varphi) d\varphi \right| \leq \\ \leq R \int_0^{\pi/4} \exp[-R^2 \sin(2\varphi)] d\varphi < R \int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{4R^2\varphi}{\pi}\right) d\varphi = , \\ = -\frac{\pi}{4R} (\exp(-R^2) - 1) \rightarrow 0 ,$$

маємо

$$\int_0^{\infty} [\cos(x^2) + i \sin(x^2)] dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i) .$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини обох сторін цієї рівності, одержимо

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

2.4. Точки галуження

Інтеграли вигляду $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp$

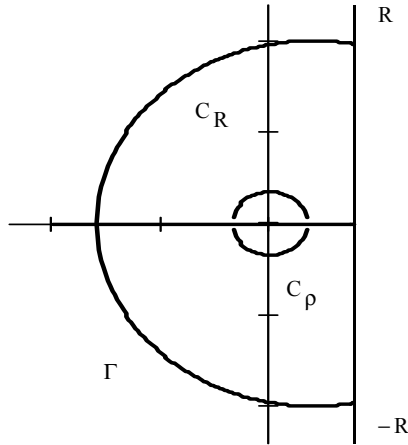
Тут інтегранда має точку галуження у початку координат і, одночасно, полюс. Нехай $t \geq 0$, $-1 < \alpha < 0$. У лівій півплощині інтегранда задовольняє умовам леми Жордана. Інтегрування ведеться вздовж прямої, паралельної уявній осі, що перетинає дійсну вісь у точці $x = c$. Остання обирається так, щоб єдина особлива точка інтегранди розташовувалась ліворуч від зазначеної прямої. Такі інтеграли виникають при виконанні оберненого перетворення Лапласа.

Оберемо наступний замкнений контур інтегрування Γ (дивися наступний малюнок). Він складається з півкола нескінченно великого радіусу \tilde{N}_R у лівій півплощині. Центр півкола лежить на дійсній осі, але дещо зміщений праворуч відносно початку координат. Доповнює це півколо до замкненого контуру вертикальна пряма, що проходить через центр півкола. Наступним елементом контуру Γ є коло нескінченно малого радіусу \tilde{N}_ρ , що охоплює початок координат. Зазначені півколо і коло обмежують разом двозв'язану область. Її легко перетворити в однозв'язану, зробивши розріз вздовж дійсної від'ємної півосі. Верхня і нижня границі розрізу і є останніми елементами контуру Γ . Оскільки в області, обмеженій контуром, інтегранда однозначна і не має особливостей, то відповідно до теореми Коші для однозв'язної області

$$\int_{\Gamma} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp = 0 .$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp &= \int_{C_R} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp + \int_{C_\rho} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp + \\ &+ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp + \int_{-R}^{-\rho} \frac{\exp(xt)}{x^{\alpha+1}} dx + \int_{-\rho}^{-R} \frac{\exp(\xi t)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi . \end{aligned}$$



Мал. 23

Оцінимо перші два інтеграли у правій частині. Згідно лемі Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp = 0 .$$

Наступний інтеграл

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp \right| \leq \int_{C_\rho} \frac{|\exp(pt)|}{|p|^{\alpha+1}} ds .$$

Оскільки рівнянням контуру C_ρ є $p = \rho \exp(i\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, то $ds = |\rho i \exp(i\varphi)| d\varphi = \rho d\varphi$. Тоді контурний інтеграл можна замінити наступним визначеним інтегралом

$$\int_{C_\rho} \frac{|\exp(pt)|}{|p|^{\alpha+1}} ds = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-\rho \cos(\varphi)t] d\varphi .$$

Тут ми використали те, що

$$p = \rho[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] ,$$

та

$$\begin{aligned}
& |\exp\{\rho[\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]t\}| = \\
& = |\exp[\rho \cos(\varphi)t]| |\exp[\rho i \sin(\varphi)t]| = \exp[\rho \cos(\varphi)t] .
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\exp[\rho \cos(\varphi)] \leq \exp(\rho t) ,$$

то

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp \right| \leq \frac{\exp(\rho t)}{\rho^\alpha} 2\pi .$$

Для від'ємних α

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\exp(\rho t)}{\rho^\alpha} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_\rho} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp \right| = 0 .$$

Знайдемо тепер зв'язок між інтегралами за обома межами розрізу. На верхній з них $p = x \exp(i\pi)$, на нижній - $p = x \exp(-i\pi)$. Після межового переходу $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ ми отримаємо

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{x^{\alpha+1} \exp[i(\alpha+1)\pi]} \exp(i\pi) dx + \\
& + \int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{x^{\alpha+1} \exp[-i(\alpha+1)\pi]} \exp(-i\pi) dx + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp = 0 .
\end{aligned}$$

Після спрощення

$$[\exp(i\alpha\pi) - \exp(-i\alpha\pi)] \int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{x^{\alpha+1}} dx + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp = 0 .$$

У свою чергу

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{x^{\alpha+1}} dx = t^\alpha \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y)}{y^{\alpha+1}} dy = t^\alpha \Gamma(-\alpha) ,$$

де

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-y)}{y^{\alpha+1}} dy$$

- гама-функція. Остаточний результат такий

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt)}{p^{\alpha+1}} dp = -t^\alpha \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \Gamma(-\alpha) .$$

• **Інтеграли вигляду** $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p}$

Нехай $a > 0$. Інтегранда має точку галуження другого порядку у початку координат. Одночасно ця точка є полюсом першого порядку. Розглянемо наступний замкнений контур Γ (дивися попередній малюнок). Він складається з півкола нескінченно великого радіусу \tilde{N}_R у лівій півплощині. Центр півкола лежить на дійсній осі, але дещо зміщений праворуч відносно початку координат. Доповнює це півколо до замкненого контуру вертикальна пряма, що проходить через центр півкола. Наступним елементом контуру Γ є коло нескінченно малого радіусу \tilde{N}_ρ , що охоплює початок координат. Зазначені півколо і коло обмежують разом двозв'язану область. Її легко перетворити в однозв'язану область, зробивши розріз вздовж дійсної від'ємної півосі. Верхня і нижня межі цього розрізу і є останніми елементами контуру Γ .

Такі інтеграли також виникають при виконанні оберненого перетворення Лапласа. В області, обмеженій контуром, розглянемо ту гілку багатозначної функції, яка є безпосереднім продовженням з дійсної осі функції $\exp(xt) \exp(-\alpha\sqrt{x}) / x$, $x > 0$. Оскільки всередині означеного контуру Γ інтегранда не має особливих точок, то відповідно до теореми Коші для однозв'язної області

$$\int_{\Gamma} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} = 0 .$$

З іншого боку

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} &= \int_{C_R} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} + \\
&+ \int_{C_\rho} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} + \\
&+ \int_{-R}^{-\rho} \exp(xt) \exp(-\alpha\sqrt{x}) \frac{dx}{x} + \int_{-\rho}^{-R} \exp(\xi t) \exp(-\alpha\sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\xi} + \\
&+ \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p}.
\end{aligned}$$

Оскільки у лівій півплощині де $p < 0$, $t > 0$ інтегранда задовольняє умовам леми Жордана, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} = 0.$$

Обчислимо тепер інтеграл за контуром C_ρ

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} &= \\
= i \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i\varphi) \exp\left[-\alpha\sqrt{\rho} \exp(i\varphi/2)\right] d\varphi &= \\
= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = 2\pi i,
\end{aligned}$$

де ми використали для переходу від контурного інтеграла до визначеного рівняння кола $p = \rho \exp(i\varphi)$. Нарешті, розглянемо інтеграл вдовж межі розрізу для $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$. На верхній межі розрізу $\arg(p) = \pi$ і $x = |x| \exp(i\pi) = -|x|$. На нижній межі $\arg(p) = -\pi$ і $\xi = |x| \exp(-i\pi) = -|x|$. Відповідно:

$$\sqrt{x} = \sqrt{|x|} \exp(i\pi/2) = i\sqrt{|x|},$$

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{|x|} \exp(-i\pi/2) = -i\sqrt{|x|}.$$

Тепер перейдемо до нової змінної $y = |x|$. Тоді

$$\begin{aligned} dx &= \exp(i\pi) d|x| = -dy, \\ d\xi &= \exp(-i\pi) d|x| = -dy. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \exp(xt) \exp(-\alpha\sqrt{x}) \frac{dx}{x} + \int_0^{-\infty} \exp(xt) \exp(-\alpha\sqrt{\xi}) \frac{dx}{x} = \\ & = \int_0^{\infty} \exp(-xt) \exp(i\alpha\sqrt{x}) \frac{dx}{x} - \int_0^{\infty} \exp(-xt) \exp(-i\alpha\sqrt{x}) \frac{dx}{x} = \\ & = 2i \int_0^{\infty} \exp(-xt) \frac{\sin(\alpha\sqrt{x})}{x} dx. \end{aligned}$$

Отже, шуканий інтеграл має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(pt) \exp(-\alpha\sqrt{p}) \frac{dp}{p} = \\ & = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(-xt) \frac{\sin(\alpha\sqrt{x})}{x} dx. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx$

Інтегранда має дві точки галуження, це $x=0$ і $x=1$. Нехай функція $f(x)$ ($0 < \alpha < 1$) задана на відрізку дійсної осі $[0,1]$ і може бути аналітично продовжена на всю комплексну площину і її аналітичне продовження є однозначною аналітичною функцією, за виключенням скінченної кількості ізольованих особливих точок z_k ($k=1,2,\dots,n$), що не лежать на

відрізку $[0,1]$, а нескінченно віддалена точка є її звичайною точкою. Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z)$$

і зінтегруємо її вздовж наступного замкненого контуру, обраного так, щоб він не охоплював жодної з точок галуження (дивися наступний малюнок).

Це досягається розрізом площини вздовж відрізка $[0,1]$ дійсної осі. Оскільки всередині контуру інтегранда не містить жодної з точок галуження, то інтеграл обчислюється за допомогою теореми про лишки

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[\varphi(z), z_k] .$$

Тут мається на увазі, що межові переходи $\rho_1 \rightarrow 0, \rho_2 \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ вже виконані. З іншого боку

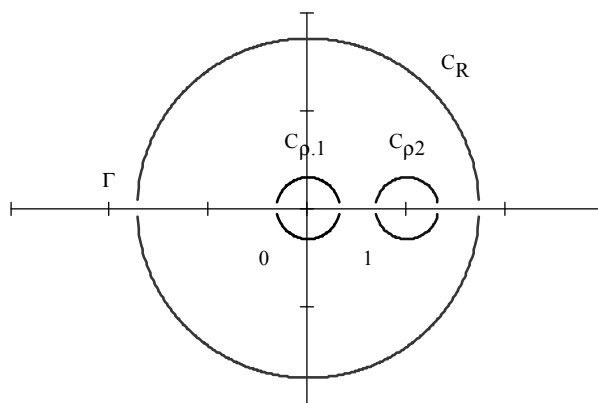
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi(z) dz &= \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz + \int_{C_{\rho_2}} \varphi(z) dz + \int_{C_R} \varphi(z) dz + \\ &+ \int_{\rho_1}^{1-\rho_2} \varphi(x) dx + \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} \varphi(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Тут змінна інтегрування x пробігає значення на верхній межі розрізу, ξ - на нижній. Проведемо оцінку перших двох інтегралів у правій частині

$$\left| \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz \right| \leq \int_{C_{\rho_1}} |z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}| |f(z)| ds .$$

Оскільки початок координат є звичайною точкою функції $f(z)(1-z)^{-\alpha}$, то в його околі

$$f(z)(1-z)^{-\alpha} \leq M .$$



Мал. 24.

Тоді

$$\left| \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz \right| \leq M \int_{C_{\rho_1}} |z^{\alpha-1}| ds .$$

Інтеграл, що залишився, можна привести до визначеного заміною $z = \rho_1 \exp(i\varphi)$. Тоді

$$|z^{\alpha-1}| = \rho_1^{\alpha-1} |\exp[i(\alpha-1)\varphi]| = \rho_1^{\alpha-1} ,$$

$$ds = |i\rho_1 \exp(i\varphi)| d\varphi = \rho_1 d\varphi .$$

Відповідно

$$\left| \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz \right| \leq M \rho_1^{\alpha-1} 2\pi\rho_1 .$$

Переходячи до межі $\rho_1 \rightarrow 0$ отримаємо

$$0 \leq \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \left| \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz \right| \leq \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} 2\pi M \rho_1^\alpha = 0 .$$

Отже,

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \left| \int_{C_{\rho_1}} \varphi(z) dz \right| = 0 .$$

Аналогічним чином можна показати, що

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow 0} \left| \int_{C_{\rho_2}} \varphi(z) dz \right| = 0 .$$

Розглянемо тепер інтеграл за контуром C_R . Ту частину комплексної площини, що лежить за межами цього контуру, можна вважати околom нескінченно віддаленої точки. У випадку, який ми розглядаємо, інтегранда має відмінний від нуля лишок у нескінченно віддаленій точці. Дійсно, той факт, що $z = \infty$ є звичайною точкою функції $f(z)$, означає, що в околі $z = \infty$ $|f(z)| \leq M$. Сталу M можна обрати так, щоб у самій точці $z = \infty$ $|f(z)| = M$. Функція $z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha}$ в околі нескінченно віддаленої точки веде себе як $1/z$. Отже, ряд Лорана для інтегранди в околі цієї точки обов'язково має вигляд

$$\varphi(z) = \frac{M \exp(i\alpha\pi)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Тут можна врахувати, що в околі нескінченно віддаленої точки

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)^\alpha = (-1)^\alpha = \exp(i\pi\alpha).$$

Тоді

$$\operatorname{res}[\varphi(z), z = \infty] = -f(\infty) \exp(i\pi\alpha) .$$

Якщо $R \rightarrow \infty$, то в околі нескінченно віддаленої точки не буде інших особливих точок інтегранди, а отже, за теоремою про лишки,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \varphi(z) dz &= 2\pi i \operatorname{res}[\varphi(z), z = \infty] = \\ &= 2\pi i M \exp(i\pi\alpha) = 2\pi i f(\infty) \exp(i\pi\alpha) . \end{aligned}$$

Інтеграл за верхньою і нижньою межами розрізу можна виразити один через другий. Дійсно, на нижній межі розрізу аргумент змінної інтегрування на 2π більший за аргумент змінної інтегрування на верхній межі розрізу. Якщо на верхній межі $z = x$, то на нижній $z = x \exp(i2\pi)$. Тому

$$\begin{aligned} & \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} \varphi(\xi) d\xi = \\ & = \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} x^{\alpha-1} \exp[i(\alpha-1)2\pi] (1-x)^{-\alpha} f(x) \exp(i2\pi) dx = \\ & = \int_{1-\rho_2}^{\rho_1} x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx \exp(i\alpha 2\pi). \end{aligned}$$

Тут ми врахували, що $f(x) = f(\xi)$, та

$$(1-\xi)^{-\alpha} = [1-x \exp(2\pi i)]^{-\alpha} = (1-x)^{-\alpha}.$$

У висліді, шуканий інтеграл знаходиться із співвідношення

$$\begin{aligned} [1 - \exp(2\pi i \alpha)] \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx &= 2\pi i f(\infty) \exp(i\pi \alpha) = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} f(z), z_k]. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{-\alpha} f(x) dx = \\ & = \frac{2\pi i}{1 - \exp(2\pi i \alpha)} \sum_{k=1}^n \operatorname{res} [z^{\alpha-1} (1-z)^{-\alpha} f(z), z_k]. \end{aligned}$$

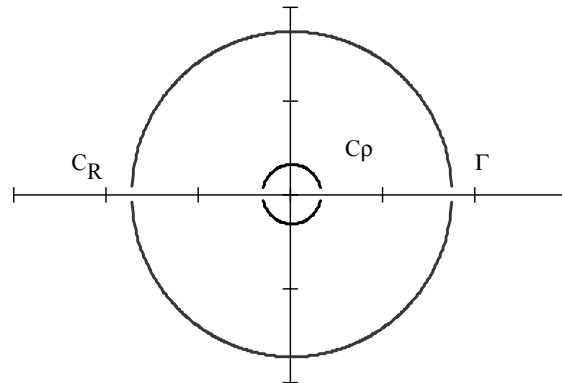
Інтеграл вигляду $\int_0^{\infty} f(x) \ln(x) dx$

Нехай функція $f(x)$ не має особливостей на дійсній осі, є парною і може бути аналітично продовжена у верхню

півплощину $\text{Im}(z) > 0$ скрізь, за виключенням скінченної кількості особливих точок $z_k (k=1, \dots, n)$ і в околі нескінченно віддаленої точки має місце оцінка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Очевидно, що початок координат є точкою галузнення нескінченного порядку (логарифм є нескінченнозначною функцією і, одночасно, суттєво особливою точкою). Виберемо контур інтегрування Γ таким чином, щоб він не включав у себе початок координат. Доцільним є такий варіант



Мал. 9.

Тут контур Γ складається з кола нескінченно великого радіусу \tilde{N}_R з центром у початку координат, кола нескінченно малого радіусу з центром у початку координат та верхньої і нижньої меж розрізу, виконаної вздовж дійсної додатної півосі.

Якщо взяти головне значення логарифму, то він є однозначною і аналітичною функцією в усіх точках, охоплених наведеним контуром. Тому можна використати теорему про лишки ($\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$)

$$\int_{\Gamma} f(z) \ln(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z) \ln(z), z_k] .$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) \ln(z) dz &= \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) \ln(z) dz + \\ &+ \int_{\rho}^R f(x) \ln(x) dx + \int_R^{\rho} f(\xi) \ln(\xi) d\xi . \end{aligned}$$

Тут змінна інтегрування x пробігає дійсні додатні значення, а ξ - дійсні від'ємні. Оцінимо перші два інтеграли у правій частині рівності

$$\left| \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |\ln(z)| ds \leq \frac{M}{R^{1+\alpha}} \int_{C_R} |\ln(z)| ds .$$

Оскільки на контурі C_R ($z = R \exp(i\varphi)$) $\ln(z) = \ln(R) + i\varphi$, $|\ln(z)| = \sqrt{\ln^2(R) + \varphi^2}$, $ds = R d\varphi$, то переходячи від інтеграла за контуром C_R до визначеного інтеграла за φ у межах $[0, \pi]$, матимемо

$$\left| \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^\alpha} \int_0^\pi \sqrt{\ln^2(R) + \varphi^2} d\varphi .$$

Оскільки

$$\sqrt{\ln^2(R) + \varphi^2} \leq \sqrt{\ln^2(R) + \pi^2} ,$$

то

$$\left| \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \frac{\pi M}{R^\alpha} \sqrt{\ln^2(R) + \pi^2}$$

і

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi M}{R^\alpha} \sqrt{\ln^2(R) + \pi^2} = 0 .$$

Тобто

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} f(z) \ln(z) dz \right| = 0 .$$

Розглянемо тепер інтеграл за контуром C_ρ

$$\left| \int_{C_\rho} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \int_{C_\rho} |f(z)| |\ln(z)| ds .$$

Оскільки початок координат є звичайною точкою функції $f(z)$, то в околі $z = 0$ $|f(z)| \leq M$. Відповідно

$$\left| \int_{C_\rho} f(z) \ln(z) dz \right| \leq M \rho \int_0^\pi \sqrt{\ln^2(\rho) + \varphi^2} d\varphi \leq M \rho \pi \sqrt{\ln^2(\rho) + \pi^2}$$

Оскільки

$$0 \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_\rho} f(z) \ln(z) dz \right| \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} M \rho \pi \sqrt{\ln^2(\rho) + \pi^2} = 0 ,$$

то

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_\rho} f(z) \ln(z) dz \right| = 0 .$$

Прирівнюючи праві частини відповідних виразів, матимемо ($\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$)

$$\int_0^\infty f(x) \ln(x) dx + \int_{-\infty}^0 f(\xi) \ln(\xi) d\xi = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z) \ln(z), z_k] .$$

Інтеграл у лівій частині рівності можна виразити один через інший. Дійсно, оскільки $\ln(\xi) = \ln(|\xi|) + i\pi$ і функція $f(x)$ є парною $f(x) = f(\xi) = f(-x)$, то

$$\int_0^\infty f(x) \ln(x) dx + \int_{-\infty}^0 f(x) (\ln(|x|) + i\pi) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}[f(z) \ln(z), z_k] .$$

Змінюючи порядок інтегрування у другому інтегралі у лівій частині рівності і виконавши заміну змінних $x \rightarrow -x$, отримаємо

$$2 \int_0^{\infty} f(x) \ln(x) dx + i\pi \int_0^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z) \ln(z), z_k] .$$

Для другого інтегралу у лівій частині використаємо вже відомий результат

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}[f(z), z_k] .$$

Остаточно,

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[f(z) \left(\ln(z) - \frac{i\pi}{2} \right), z_k \right] .$$

2.5. Інтеграли від функцій Фермі¹⁵-Дірака¹⁶

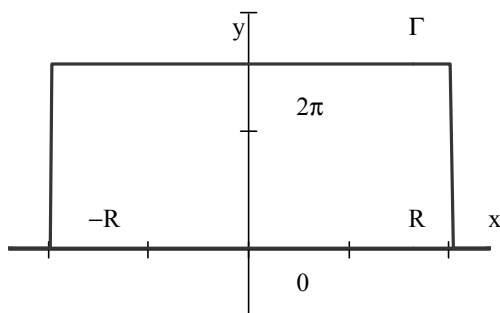
$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]}$$

Аналітичне продовження інтегранди у комплексну площину має злічену кількість особливих точок. При цьому, нескінченно віддалена точка є суттєво особливою. Одна така множина отримується з умови $1 + \exp(z) = 0$. Звідси $z_m = i(2m+1)\pi$. Ця множина розташована еквідистантно на уявній осі. Інша множина особливих точок отримується з умови $1 + \exp(-z - \Omega) = 0$. Звідки $z_m = -\Omega - i(2m+1)\pi$. Ця множина розташована еквідистантно на прямій, паралельній уявній осі.

¹⁵ Фермі Енріко (29.09.1901 - 28.11.54) - італійський фізик (квантова механіка, квантова теорія поля, ядерна фізика).

¹⁶ Дірак Поль Андрієн Моріс (8.08.1902 -) - геніальний англійський фізик-теоретик, засновник релятивістської квантової механіки)

При виборі замкненого контуру інтегрування доцільно врахувати періодичність знаменника інтегранди з уявним періодом $T = i2m\pi$. Зручним контуром для цього є наступний контур Γ



Мал. 10

Всередину цього контуру потрапляють дві особливі точки $z_1 = i\pi$ і $z_2 = -\Omega + i\pi$, що є полюсами першого порядку. Інтеграл за боковими сторонами прямокутника, що мають скінчену довжину, дорівнюють у межі нулю. Це зумовлене тим, що при підході до нескінченно віддаленої точки вздовж довільної прямої, паралельної дійсній осі і розташованої від неї на скінченій відстані, інтегранда експоненційно прямує до нуля. На верхній же стороні прямокутника, завдяки періодичності знаменника інтегранди, інтеграл можна виразити через інтеграл на нижній стороні прямокутника. Отже, застосовуючи теорему про лишки, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 2i\pi)^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} =$$

$$= 2i\pi \left\{ \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z - i\pi)z^n}{[1 + \exp(z)][1 + \exp(-z - \Omega)]} + \right. \\ \left. + \lim_{z \rightarrow i\pi - \Omega} \frac{(z - i\pi + \Omega)z^n}{[1 + \exp(z)][1 + \exp(-z - \Omega)]} \right\}.$$

Для $n = 1$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 2i\pi) dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} = \\ = 2i\pi \frac{\Omega}{1 - \exp(-\Omega)},$$

звідки отримуємо

$$I_0 = -\frac{\Omega}{1 - \exp(-\Omega)}.$$

Важливим частинним випадком цього інтегралу є той, коли $\Omega \rightarrow 0$. Тоді

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} I_0 = -1.$$

Для $n = 2$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 2i\pi)^2 dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} = \\ = 2i\pi \frac{2i\pi\Omega - \Omega^2}{1 - \exp(-\Omega)}.$$

Після об'єднання інтегралів у лівій частині в один, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-4\pi i x + 4\pi^2) dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} = \frac{-2\pi i \Omega^2 - 4\pi^2 \Omega^2}{1 - \exp(-\Omega)}.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини обох частин рівняння, маємо попередній результат

$$I_0 = -\frac{\Omega}{1 - \exp(-\Omega)},$$

а також

$$I_1 = \frac{\Omega^2}{2[1 - \exp(-\Omega)]}.$$

Для $n = 3$ маємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 2i\pi)^3 dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} = \\ & = \frac{-3\pi^2\Omega - 3i\pi\Omega^2 + \Omega^3}{1 - \exp(-\Omega)}. \end{aligned}$$

Після об'єднання інтегралів у лівій частині в один, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-6\pi ix^2 + 12\pi^2 x + 8\pi^3 i) dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega)]} = \frac{-6\pi^3 i\Omega + 6\pi^2\Omega^2 + 2\pi i\Omega^3}{1 - \exp(-\Omega)}.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні частини обох частин рівняння, маємо

$$-6\pi i I_2 + 12\pi^2 I_1 + 8\pi^3 i I_0 = \frac{-6\pi^3 i\Omega + 6\pi^2\Omega^2 + 2\pi i\Omega^3}{1 - \exp(-\Omega)}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Omega^2}{2[1 - \exp(-\Omega)]}, \\ -6I_2 - 8\pi^2 \frac{\Omega}{1 - \exp(-\Omega)} &= \frac{-6\pi^2\Omega + 2\Omega^3}{1 - \exp(-\Omega)}. \end{aligned}$$

Остаточнo

$$I_2 = \frac{\Omega(\pi^2 - \Omega^2)}{3[1 - \exp(-\Omega)]}.$$

Важливим частинним випадком є такий, коли $\Omega \rightarrow 0$. Тоді

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} I_1 = 0, \quad \lim_{\Omega \rightarrow 0} I_2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

Аналогічним чином можна обчислити інтеграли для довільних значень n .

Розглянемо тепер інтеграли типу

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega_1)][1 + \exp(-x - \Omega_2)]}.$$

Обравши контур інтегрування аналогічно попередньому випадку, отримаємо наступне рівняння

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega_1)][1 + \exp(-x - \Omega_2)]} - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 2i\pi)^n dx}{[1 + \exp(x)][1 + \exp(-x - \Omega_1)][1 + \exp(-x - \Omega_2)]} = \\ & = 2i\pi \left\{ \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{(z - i\pi)z^n}{[1 + \exp(z)][1 + \exp(-z - \Omega_1)][1 + \exp(-z - \Omega_2)]} + \right. \\ & + \lim_{z \rightarrow i\pi - \Omega_1} \frac{(z - i\pi + \Omega_1)z^n}{[1 + \exp(z)][1 + \exp(-z - \Omega_1)][1 + \exp(-z - \Omega_2)]} \\ & \left. + \lim_{z \rightarrow i\pi - \Omega_2} \frac{(z - i\pi + \Omega_2)z^n}{[1 + \exp(z)][1 + \exp(-z - \Omega_1)][1 + \exp(-z - \Omega_2)]} \right\}. \end{aligned}$$

Для $n = 0$ це рівняння набуває вигляду

$$J_0 = \frac{i\pi}{[1 - \exp(-\Omega_1)][1 - \exp(-\Omega_2)]} - \frac{i\pi - \Omega_1}{[1 - \exp(-\Omega_1)][1 - \exp(\Omega_1 - \Omega_2)]} - \frac{i\pi - \Omega_2}{[1 - \exp(-\Omega_2)][1 - \exp(\Omega_2 - \Omega_1)]}.$$

Аналогічним чином можна обчислити і інтеграл вигляду

$$\tilde{J}_n = \beta^{n+1} \int_0^{\infty} (\varepsilon - \mu)^n n(\varepsilon) [1 - n(\varepsilon + \hbar\omega_1)] [1 - n(\varepsilon + \hbar\omega_2)] d\varepsilon .$$

Розглянемо конкретний приклад використання інтегралів, що містять функції Фермі-Дірака.

Густина та хімічний потенціал електронної плазми.

Середня густина електронної плазми n визначається так

$$n = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\exp[(\varepsilon_k - \mu) / k_B T] + 1} .$$

Тут $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ - енергія електрона, m - його маса, \hbar - стала Планка¹⁷ (Planck), μ - хімічний потенціал, k_B - стала Больцмана¹⁸ (Boltzmann), T - абсолютна температура. Зауважимо, що хімічний потенціал є функцією температури, оскільки тільки у цьому разі із зміною температури середня густина плазми залишається сталою. В інтегралі зручно перейти до безрозмірної змінної $\hbar^2 k^2 / 2m = x$. Тоді інтеграл набере вигляду

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} .$$

Для довільних температур інтеграл можна обчислити лише чисельно. Але є два випадки, коли можна отримати і аналітичний результат. Це випадки дуже малих та дуже великих температур. Розглянемо спочатку перший з них. Для нульових температур функція Фермі-Дірака є наступною

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} = \begin{cases} 1, & x < \mu / k_B T \\ 0, & x > \mu / k_B T \end{cases} ,$$

¹⁷ Планк Макс Карл Ернст (23.04.1858 - 4.10.1947) - німецький фізик-теоретик, засновник квантової механіки.

¹⁸ Больцман Людвіг (20.02.1844 - 5.09.1906) - німецький фізик-теоретик, засновник статистичної фізики.

тобто графік функції має вигляд сходинки. Фактична зміна функції відбувається у дуже вузькому інтервалі. Цю обставину можна врахувати, виконавши інтегрування частинами

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \frac{x^{3/2}}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} \Big|_0^\infty - \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty x^{3/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} \right] dx .$$

Очевидно, що зінтегрована частина інтегралу дорівнює нулю, а інтегранда інтегралу, що залишився, відмінна від нуля у дуже вузькому інтервалі значень аргументу.

$$n = - \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty x^{3/2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} \right] dx .$$

Знову ж таки, у межі низьких температур похідна функції Фермі-Дірака переходить у дельта-функцію Дірака

$$- \lim_{T \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \frac{1}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} = \delta(x - \mu / k_B T) ,$$

У цьому разі інтеграл легко обчислюється

$$n = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty x^{3/2} \delta(x - \mu / k_B T) dx ,$$

або

$$n = (2m)^{3/2} \mu_0^{3/2} / 3\pi^2 \hbar^3 .$$

Звідси, хімічний потенціал при нульовій температурі має вигляд

$$\mu_0 = (3\pi^2 \hbar^3 n)^{2/3} / 2m .$$

Для малих але ненульових температур

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\exp(x - \mu / k_B T) + 1} = - \frac{1}{[\exp(x - \mu / k_B T) + 1][\exp(\mu / k_B T - x) + 1]}$$

Інтеграл можна ще більше спростити, перейшовши до нової змінної

$$x - \mu / k_B T = y .$$

Тепер інтеграл набере вигляду

$$n = -\frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_{-\mu/k_B T}^{\infty} (\mu/k_B T + y)^{3/2} \frac{dy}{[\exp(y) + 1][\exp(-y) + 1]} .$$

При такому виборі змінної інтегрування інтегранда відмінна від нуля лише у вузькому інтервалі в околі нуля. Оскільки, для низьких температур нижня межі є надзвичайно великою за абсолютною величиною то, якщо її покласти рівної нулю, це не вплине на значення інтегралу. Отже, інтеграл, який нам потрібно обчислити, є

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu/k_B T + y) \frac{dy}{[\exp(y) + 1][\exp(-y) + 1]} .$$

Тут

$$f(\mu/k_B T + y) = (\mu/k_B T + y)^{3/2} .$$

Подальше спрощення інтегралу досягається розвиненням останньої функції у ряд Тейлора за степенями y і врахуванням перших трьох членів розвинення

$$f(\mu/k_B T + y) = f(\mu/k_B T) + f'(\mu/k_B T)y + \frac{1}{2} f''(\mu/k_B T)y^2 .$$

Інтеграл від члена ряду лінійного за y дорівнює нулю, оскільки інтегранда тут є непарною, а інтеграл береться у симетричних межах. Тому наведемо лише вираз для другої похідної

$$f''(\mu/k_B T) = \frac{3}{4} (k_B T / \mu)^{1/2} .$$

Вираз для електронної густини тепер матиме вигляд

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ \left(\frac{\mu}{k_B T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[\exp(y) + 1][\exp(-y) + 1]} + \frac{3}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 dy}{[\exp(y) + 1][\exp(-y) + 1]} \right\} .$$

Раніше нами було показано, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{[\exp(y)+1][\exp(-y)+1]} = 1 ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 dy}{[\exp(y)+1][\exp(-y)+1]} = \frac{\pi^2}{3} .$$

Остаточний вираз для середньої густини електронного газу матиме вигляд

$$n = \frac{(2m\mu)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right] .$$

Значимо, що незалежними змінними тут є як температура, так і густина. Залежною змінною є хімічний потенціал.

З останнього виразу можна знайти хімічний потенціал як функцію температури. Для цього запишемо його так

$$\mu = \frac{(3\pi^2\hbar^3 n)^{2/3}}{2m} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\mu} \right)^2 \right] .$$

Доданок у правій частині, що містить хімічний потенціал, є надзвичайно малим і наведене рівняння можна розв'язати методом ітерацій. Для точності, з якою обчислена середня густина електронного газу, достатньо обмежитись першою ітерацією. Отже,

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\mu_0} \right)^2 \right] .$$

Розглянемо тепер випадок високих температур. Як було показано вище, загальний вираз для електронної густини має вигляд

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp(x - \mu/k_B T) + 1} .$$

У разі, коли температура прямує до нескінченності, множник перед інтегралом теж прямує до нескінченності. Густина може залишатись сталою лише якщо інтеграл прямує

при цьому до нуля. Останнє можливо лише для $\exp(x - \mu/k_B T) \gg 1$. Тоді одиницею у знаменнику інтегранди можна знехтувати і вираз для густини суттєво спроститься

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} \exp(\mu/k_B T) \int_0^\infty \exp(-x) x^{1/2} dx .$$

Інтеграл у правій частині визначається через інтеграл Пуассона і є таким

$$\int_0^\infty \exp(-x) x^{1/2} dx = \frac{\pi^{1/2}}{4} .$$

Таким чином,

$$n = \frac{(2mk_B T)^{3/2}}{8\pi^{3/2} \hbar^3} \exp(\mu/k_B T) .$$

Звідси

$$\mu = k_B T \ln \left[4n \left(\frac{\pi \hbar^2}{2mk_B T} \right)^{3/2} \right] .$$

Очевидно, у межі високих температур, хімічний потенціал електронного газу буде від'ємним.

2.6. Полюси на дійсній осі $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} dx$, $n \in \mathbb{N}$

Функції типу $f(x)/(x-x_0)^\alpha$ за локальної інтегрованості функцій $f(x)$ локально інтегровані лише у разі $0 \leq \alpha < 1$. Для $\alpha \geq 1$ відповідні інтеграли, взагалі кажучи, не існують - функція $f(x)/(x-x_0)^\alpha$ не є локально інтегрованою. Тим не менш, можна розглянути інтеграли дуже близькі до зазначених але такі, що існують. Можливі два варіанти модифікації. Перший пов'язаний

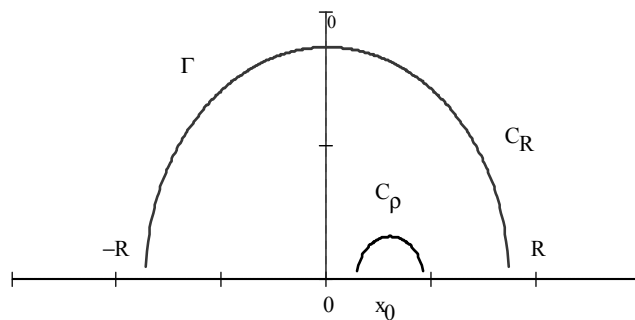
з нескінченно малою деформацією контуру інтегрування в околі особливої точки такою, що він обходить особливу точку, виходячи у комплексну площину за півколом нескінченно малого радіуса. (конкретна форма цієї ділянки контуру неістотна). На такому контурі інтегранда вже не має особливостей і є локально інтегрованою. Другий варіант пов'язаний з нескінченно малою деформацією інтегранди такою, що зміщує особливу точку на нескінченно малу відстань з дійсної осі у комплексну площину. Можна довести, що з математичної точки зору обидва варіанти "регуляризації інтегралу" еквівалентні. Другий варіант регуляризації підказує нам сама природа. Якщо змінною інтегрування за її фізичним змістом є частота коливань системи, то нескінченно мала уявна добавка еквівалентна врахуванню безмежно малого загасання цих коливань за рахунок дисипації енергії системи. З фізичної точки зору таке припущення є цілком природним і означає що від початку саме такий інтеграл нам і потрібно обчислювати. Розглянемо питання регуляризації розбіжних інтегралів із степеневими особливостями детальніше.

Нехай функція $f(x)$ не має особливостей на дійсній осі, не має нуля в точці x_0 , що є полюсом n -го порядку, і її можна аналітично продовжити у верхню півплощину скрізь, за виключенням точок z_k , ($k = 1, \dots, m$), а в околі нескінченно віддаленої точки вірна оцінка

$$|f(z)| \leq M |z|^{n-1-\delta}.$$

Обчислимо інтеграл за замкненим контуром Γ // Застосовуючи теорему про лишки у разі $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, маємо

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_0)^n}, z_k \right].$$



Мал. 11.

З іншого боку

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz + \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz + \int_{-R}^{x_0-\rho} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} dx + \int_{x_0+\rho}^R \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} dx .$$

Оцінимо інтеграл за контуром C_R

$$\left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|f(z)|}{|z-x_0|^n} ds \leq M \int_{C_R} \frac{|z|^{n-1-\delta}}{|z-x_0|^n} ds \leq M \int_{C_R} \frac{ds}{|z|^{1+\delta}} .$$

Перейдемо від контурного інтегралу до визначеного використовавши рівняння півкола $z = R \exp(i\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Отримаємо

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{R d\varphi}{R^{1+\delta}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{R^\delta} = 0 .$$

Отже,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z-x_0)^n} dz \right| = 0 .$$

Поліос першого порядку. Розглянемо інтеграл вздовж дійсної осі у разі, коли на ній існує поліос першого порядку. За означенням інтеграл

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^{x_0 - \rho} \frac{f(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \rho}^R \frac{f(x)}{x - x_0} dx \right] = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx$$

називається інтегралом у сенсі головного значення. Інтеграл у сенсі головного значення дорівнює різниці двох нескінчених величин. Ця різниця виявляється скінченою лише тому, що, чим ближче аргументи обох інтегранд до особливої точки, тим універсальнішим є поведінка кожної з них. В безпосередньому околі особливої точки вони ведуть себе абсолютно однаково і в цьому околі їх розбіжні внески в інтеграл взаємно компенсуються. Дійсно, якщо $\delta \rightarrow 0$, то перший з інтегралів у лівій частині розбігається, прямуючи до $-\infty$, якщо в околі точки x_0 $f(x) > 0$, і до $+\infty$, якщо в околі точки x_0 $f(x) < 0$. Другий інтеграл у лівій частині веде себе навпаки, прямуючи до $+\infty$, якщо в околі точки x_0 $f(x) > 0$, і до $-\infty$, якщо в околі точки x_0 $f(x) < 0$. При цьому, чим менший окіл точки x_0 ми розглядаємо, тим більшою мірою поведінка інтегранди по один бік точки x_0 буде симетричним відображенням її поведінки по інший бік цієї точки. Така поведінка інтегранди веде до того, що внески у відповідні інтеграли у безпосередньому околі точки x_0 практично компенсуються і сума двох зазначених інтегралів залишається скінченою навіть для $\delta \rightarrow 0$. Легко перевірити, що існування інтегралу у сенсі головного значення можливе лише у разі, якщо особливість на дійсній осі для інтегранди є поліосом не вище першого порядку.

Обчислимо тепер інтеграл за контуром C_ρ . При цьому важливі деталі поведінки функції $f(z)$ в околі точки x_0 . Неперервність функції $f(x)$ і сталість її знаку в околі точки x_0 дозволяє суттєво спростити цей інтеграл. Останнє дає

представлення функції $f(z)$ в околі точки x_0 рядом Тейлора, де досить врахувати лише перші два члени

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots .$$

Тепер

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - x_0} dz = f(x_0) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} + f'(x_0) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} dz .$$

Перейдемо від контурного інтеграла за C_ρ до визначеного. Оскільки інтегранда є аналітичною, то останнє можна виконати як використовуючи рівняння контуру, так і безпосередньо обчислюючи інтеграл як визначений. У першому разі

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = i \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi .$$

Тобто, за наявності на дійсній осі полюсу першого порядку інтеграл набуває скінченного значення, відмінного від нуля. Аналогічні обчислення показують, що

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} dz = 0 .$$

Тепер інтеграл вздовж дійсної осі набуває вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx - i\pi f(x_0) .$$

Останній результат можна записати і в операторній формі

$$\frac{1}{(x - x_0)_+} = P \frac{1}{x - x_0} - i\pi \delta(x - x_0) .$$

Тут нижній індекс "+" означає, що обхід полюса здійснюється за півколом у верхній півплощині, $\delta(x - x_0)$ - дельта-функція Дірака. Наведена операторна формула називається формулою Сохоцького¹⁹. Інтеграл за замкненим контуром, що охоплює всю верхню півплощину, тепер матиме вигляд

¹⁹ Сохоцький Ю. В. (5.11.1842 - 14.12.1927) - польський математик

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx - i\pi f(x_0) = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{z-x_0}, z_k \right].$$

Останній вираз дозволяє знаходити інтеграл у сенсі головного значення від аналітичної функції, що має полюс першого порядку на дійсній осі.

Шуканий інтеграл можна записати і у іншому вигляді, якщо скористатись тим, що у полюсі першого порядку

$$\operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{z-x_0}, x_0 \right] = f(x_0).$$

Тоді

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0} dx = i\pi \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{z-x_0}, x_0 \right] + 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{z-x_0}, z_k \right].$$

У разі довільної кількості таких полюсів інтеграл у сенсі головного значення можна записати так

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_1)\dots(z-x_n)}, z_k \right] + \\ + \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_1)\dots(z-x_n)}, x_k \right].$$

Полюс n -го порядку. Для подальшого нам буде корисним наступний очевидний результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-x_0)^n} = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

якщо розуміти інтегрування як інтегрування вздовж контуру з обходом особливої точки за відповідним півколом. Контур інтегрування до замкненого тут доповнюється півколом нескінченно великого радіусу з центром у початку координат. Оскільки всередині такого замкненого контуру особливі точки відсутні (єдина особлива точка інтегранди, що на дійсній осі, обходиться півколом нескінченно малого радіусу), то відповідно до теореми Коші для однозв'язаної області інтеграл дорівнює

нулю. Він дорівнює нулю також і за півколом нескінченно великого радіусу, оскільки інтегранда досить швидко спадає при наближенні до нескінченно віддаленої точки. Тому дорівнює нулю і шуканий інтеграл.

Для полюсу довільного порядку, аналогічно попередньому, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_0)^n}, z_k \right].$$

Нагадаємо, що тут використане нами традиційне позначення для інтегрування вздовж дійсної осі має на увазі обхід особливої точки, що лежить на дійсній осі півколом нескінченно малого радіусу, тобто насправді має складний характер.

Шуканий інтеграл у лівій частині залишиться незмінним, якщо функцію $f(x)$ замінити функцією $F(x)$, де

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \dots - \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-2)!} (x-x_0)^{n-2}.$$

Остання функція має у точці x_0 нуль $n-1$ -го порядку. Відповідно інтегранда матиме у цій точці полюс лише першого порядку. У цьому разі застосовна вище отримана формула і

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(x-x_0)^n} dx - i\pi \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} &= \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_0)^n}, z_k \right], \end{aligned}$$

або

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(x-x_0)^n} dx = i\pi \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_0)^n}, x_0 \right] + 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left[\frac{f(z)}{(z-x_0)^n}, z_k \right].$$

Отже, можна зробити наступний висновок. Інтеграл від регуляризованої функції вздовж дійсної осі у сенсі головного значення дорівнює сумі лишків у полюсах скінченного або нескінченного порядків в особливих точках, що лежать у верхній

(нижній) півплощині, та півсумі лишків у полюсах скінченного порядку, що лежать на дійсній осі. При цьому відповідний інтеграл вздовж півкола нескінченно великого радіусу у верхній (нижній) півплощинах з центром у початку координат має дорівнювати нулю.

Для надання сенсу інтегралам, підінтегральні, функції яких мають полюси на дійсній осі, можна використати не тільки вище наведений варіант обходу особливої точки відповідним півколом нескінченно малого радіусу. При такому виборі контуру інтегрування інтегранда в усіх точках контуру інтегрування стає скінченою. Можливий і інший варіант. Ми можемо залишити контур інтегрування незмінним, взявши в якості складової останнього всю дійсну вісь, але особливу точку змістити з дійсної осі на нескінченно малу відстань у верхню або нижню півплощини. Всі наведені формули по суті залишаються при цьому незмінними. Зокрема формулу Сохоцького можна тепер записати так

$$\frac{1}{x-x_0 \pm i\delta} = P \frac{1}{x-x_0} \mp i\pi\delta(x-x_0) .$$

Куди саме слід змістити особливу точку з дійсної осі - у верхню чи нижню півплощини залежить від додаткових умов задачі. Якщо змінною є час, то такою умовою є принцип причинності.

Зауважимо, що проблемою є лише випадок полюсу нескінченного порядку, або суттєво особливої точки, хоча у деяких випадках і ця проблема легко розв'язується.

Нерозв'язною проблемою є випадок, коли полюс довільного порядку збігається з однією з границь інтегрування. У цьому разі інтеграли не існують у жодному сенсі.

Приклад 5. Цікавим і важливим прикладом застосування формули Сохоцького є обчислення наступного інтеграла

$$I(k) = \int_0^{\infty} \exp(ikx) dx .$$

Тут нескінченно віддалена точка є суттєво особливою точкою інтегранди, а інтегрування виконується вздовж дійсної додатної півосі. Формально особлива точка лежить також і на дійсній осі, оскільки ця віс закінчується у нескінченно віддаленій точці.

Розв'язання. Невизначеність інтегранди поблизу верхньої межі інтегрування можна подолати шляхом її заміни іншою функцією і відповідним межовим переходом, а саме:

$$I(k) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \exp[(ik - \delta)x] dx .$$

Останній інтеграл, оскільки інтегранда прямує до нуля при наближенні до нескінченно віддаленої точки вздовж дійсної осі, можна легко обчислити

$$I(k) = i \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{k + i\delta} .$$

Фактично ми скористались властивістю суттєво особливої точки, а саме тим, що межа функції в цій точці залежить від способу прямування її аргументу до такої точки. Серед безлічі можливих, ми обрали такий спосіб, де функція прямує в околі суттєво особливої точки до нуля. Отже,

$$I(k) = iP \frac{1}{k} + \pi\delta(k) .$$

Приклад 6. Аналогічно попередньому можна знайти Фур'є-образ, який визначається наступним інтегралом

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dx .$$

Тут нескінченно віддалена точка також є суттєво особливою точкою інтегранди, а інтегрування ведеться вздовж всієї дійсної осі. Формально особлива точка лежить також і на дійсній осі.

Розв'язання. Шуканий інтеграл можна представити сумою двох інтегралів

$$I(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(ikx) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-ikx) dx .$$

Кожний з них можна обчислити аналогічно попередньому. У висліді

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dx = \delta(k) .$$

Таким чином Фур'є-образом є дельта-функція Дірака. Остання формула може розглядатись також і як інтегральне представлення дельта-функції.

Поліос першого порядку поряд з дійсною віссю.

Нетривіальним є випадок, коли особливі точки розташовані поряд з дійсною віссю. Формулу Сохоцького можна узагальнити на випадок, коли особлива точка лежить на малій, але скінченній відстані від дійсної осі. У цьому разі результат відразу можна записати в операторному вигляді формально розвинувши відповідний вираз в ряд Маклорена

$$\frac{1}{x+i\Delta} = \frac{1}{x_+} \frac{1}{1+i\frac{\Delta}{x_+}} = \frac{1}{x_+} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\Delta^n}{x_+^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \Delta^n \frac{1}{x_+^{n+1}} .$$

Аналогічно

$$\frac{1}{x-i\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \Delta^n \frac{1}{x_-^{n+1}} .$$

Здиференціювавши останній вираз m разів ми отримаємо результат, що відповідає поліосу m - го порядку поряд з дійсною віссю

$$\frac{1}{(x-i\Delta)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{(n+m+1)!}{m!} \Delta^n \frac{1}{x_-^{n+m+1}}$$

Важливим також є випадок двох симетричних відносно дійсної осі особливих точок

$$\frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2} = \left(\frac{1}{x - i\Delta} - \frac{1}{x + i\Delta} \right) \frac{1}{2i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n \left[\frac{i^n}{x_-^{n+1}} - \frac{(-i)^n}{x_+^{n+1}} \right].$$

При врахуванні членів, не вище першого порядку за Δ

$$\frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2} \approx \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x_-} - \frac{1}{x_+} \right) + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{x_-^2} + \frac{1}{x_+^2} \right) = \pi \delta(x) + \Delta P \frac{1}{x^2}.$$

В інтегральній формі матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{x^2 + \Delta^2} \varphi(x) dx \approx \pi \varphi(0) + \Delta P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx,$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta}{(x - x_0)^2 + \Delta^2} \varphi(x) dx \approx \pi \varphi(x_0) + \Delta P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^2} dx.$$

Тут функція $\varphi(x)$ не має особливостей на дійсній осі і забезпечує існування відповідного інтегралу у сенсі головного значення. Для скінчених меж інтегрування

$$\int_{-a}^b \frac{\Delta}{(x - x_0)^2 + \Delta^2} \varphi(x) dx \approx \pi \varphi(x_0) + \Delta P \int_{-a}^b \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^2} dx - \Delta \left(\frac{1}{a + x_0} + \frac{1}{b - x_0} \right) \varphi(x_0).$$

Алгебраїчні особливі точки на дійсній осі. Нехай інтегранда має на дійсній осі алгебраїчні особливі точки, тобто одночасно полюси і точки галузнення скінченного порядку.

Фактично розглянемо узагальнені функції вигляду $\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx$.

Тут α – довільне скінчене число, відмінне від цілого. Розглянемо спочатку випадок, коли $-2 < \alpha < -1$.

Для з'ясування структури наведеної узагальненої функції обчислимо спочатку дещо інший контурний інтеграл $\int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz$,

де контур інтегрування L складається з трьох характерних ділянок: верхнього краю розрізу, виконаного у комплексній площині вздовж дійсної додатної півосі, нижнього краю цього ж розрізу і кола, що охоплює початок координат, який і є алгебраїчною особливою точкою. На верхньому краї розрізу $z = x$, на нижньому краї $z = x \exp(i2\pi)$. Таким чином

$$\int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\infty}^{\delta} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha \exp(i2\pi\alpha)} dx + \int_{C_\delta} \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx$$

Регулярна частина допоміжної узагальненої функції очевидно має вигляд

$$\text{reg} \int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\alpha} dx [1 - \exp(-i2\pi\alpha)]$$

Дійсно, в околі нуля інтегранда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\alpha} = \frac{\varphi'(0)}{x^{\alpha-1}}$$

і є локально інтегрованою в усіх точках, включаючи початок координат. Сингулярна частина відповідно буде наступною

$$\text{sing} \int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz + \varphi(0) \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} [1 - \exp(-i2\pi\alpha)] dx \right]$$

Оскільки

$$\int_{C_\delta} \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = \varphi(0) \int_{\delta \exp(i2\pi)}^{\delta} \frac{dz}{z^\alpha} = \frac{\varphi(0)}{-\alpha + 1} \frac{1}{\delta^{\alpha-1}} [1 - \exp(-i2\pi\alpha)]$$

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{dz}{x^\alpha} = \frac{-1}{-\alpha + 1} \frac{-1}{\delta^{\alpha-1}}$$

то

$$\text{sing} \int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = 0$$

Отже розглянута узагальнена функція має лише регулярну частину

$$\int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = [1 - \exp(-i2\pi\alpha)] \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\alpha} dx$$

З іншого боку розглянуту узагальнену функцію можна представити сумою двох інших узагальнених функцій, одна з яких відповідає інтегралу вздовж верхнього краю розрізу, інша – вздовж нижнього краю, тобто

$$\int_L \frac{\varphi(z)}{z^\alpha} dz = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha \exp(i2\pi\alpha)} dx + \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx = [1 - \exp(-i2\pi\alpha)] \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівнянь отримаємо алгоритм обчислення шуканої узагальненої функції

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^\alpha} dx$$

Отриманий результат можна узагальнити для довільних α . У цьому разі

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx = P \int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}(x)}{x^\alpha} dx$$

де

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \varphi'(0)x - \dots - \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

При цьому n вибирається з умови $-1 < \alpha - n < 0$.

Поляризаційна функція. Ситуація, коли інтегранда має особливості на дійсній осі, є типовою для теоретичної фізики. Важливою характеристикою електронного газу є поляризаційна функція. Через неї визначаються інші характеристик електронного газу, такі як: діелектрична проникність, повна енергія, тощо. За означенням поляризаційної функції

$$\pi(q, \omega) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n(\mathbf{k}) + n(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k} + \mathbf{q}} + \hbar\omega}$$

Тут $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ - кінетична енергія електрона, m - його маса, \hbar - стала Планка, \mathbf{k} - хвильовий вектор електрона, $n(k)$ - закон розподілу електронів провідності. Вираз для поляризаційної функції можна записати і так

$$\begin{aligned} \pi(q, \omega) = & -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n(\mathbf{k})}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega} + -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{n(\mathbf{k} + \mathbf{q})}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega} \\ & -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \hbar\omega} \right]. \end{aligned}$$

При інтегруванні за k маємо особливості інтегранди на дійсній осі. У таких випадках інтеграл є комплексним. Доцільно окремо обчислити його дійсну та уявну частини. При цьому можна використати наступну операторну формулу (формулу Сохоцького)

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \pm \hbar\omega} = P \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \pm \hbar\omega} \mp i\pi\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \pm \hbar\omega).$$

Отже,

$$\text{Re}[\pi(q, \omega)] = -P \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \hbar\omega} \right],$$

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{\pi}{V} \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) \left[\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \hbar\omega) - \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega) \right].$$

Перейдемо тепер від суми до інтегралу

$$\begin{aligned} \text{Re}[\pi(q, \omega)] = & -\frac{1}{V} \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 n(k) \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \hbar\omega} \right] d\varphi, \end{aligned}$$

Якщо полярну вісь направити вздовж вектора \mathbf{k} , то інтегранда не залежить від φ і відповідний інтеграл легко обчислюється

$$\operatorname{Re}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m}{\hbar^2 \pi^2} \int_0^\infty dk k^2 n(k) \times \\ \times \int_0^\pi \left[\frac{1}{k^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + \Omega} + \frac{1}{k^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 - \Omega} \right] \sin(\theta) d\theta ,$$

де $\Omega = 2m\omega/\hbar$. Обчислимо тепер інтеграл за кутом θ , враховуючи, що $(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 = k^2 + q^2 + 2kq \cos(\theta)$,

$$\operatorname{Re}[\pi(q, \omega)] = \frac{m}{2\hbar^2 \pi^2 q} \int_0^\infty \left[\ln \left| \frac{2kq + q^2 + \Omega}{2kq - q^2 - \Omega} \right| + \ln \left| \frac{2kq + q^2 - \Omega}{2kq - q^2 + \Omega} \right| \right] n(k) k dk .$$

Для класичної електронної плазми закон розподілу має вигляд

$$n(k) = 4\pi^3 n \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2m k_B T} \right) .$$

Тут n - середня густина електронного газу, k_B - стала Больцмана, T - абсолютна температура. Остаточний вираз є таким

$$\operatorname{Re}[\pi(q, \omega)] = \frac{n\hbar}{\sqrt{2\pi m (k_B T)^{3/2}} q} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2m k_B T} \right) \times \\ \times \left[\ln \left| \frac{2kq + q^2 + \Omega}{2kq - q^2 - \Omega} \right| + \ln \left| \frac{2kq + q^2 - \Omega}{2kq - q^2 + \Omega} \right| \right] k dk .$$

У разі виродженого електронного газу металів $\varepsilon_F \gg k_B T$ закон розподілу визначається функцією Хевісайда

$$n(k) = \Theta(k_F - k) .$$

Тепер

$$\operatorname{Re}[\pi(q, \omega)] = \frac{m}{2\hbar^2 \pi^2 q} \int_0^{k_F} \left[\ln \left| \frac{2kq + q^2 + \Omega}{2kq - q^2 - \Omega} \right| + \ln \left| \frac{2kq + q^2 - \Omega}{2kq - q^2 + \Omega} \right| \right] k dk ,$$

Використаємо табличний інтеграл

$$\int x \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right) dx = \frac{1}{2} (x^2 - a^2) \ln \left(\frac{x+a}{x-a} \right) + ax .$$

Тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\pi(q, \omega)] = & \frac{m}{16\pi^2 \hbar^2 q^3} \times \\ & \times \left\{ 8k_F q^3 + (2kq + q^2 + \Omega)(2kq - q^2 - \Omega) \ln \left| \frac{2kq + q^2 + \Omega}{2kq - q^2 - \Omega} \right| + \right. \\ & \left. + (2kq + q^2 - \Omega)(2kq - q^2 + \Omega) \ln \left| \frac{2kq + q^2 - \Omega}{2kq - q^2 + \Omega} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Ця функція є парною відносно частоти і має сім усувних особливих точок. Одна з них $q = 0$. У цій точці $\operatorname{Re}[\pi(0, \omega)] = 0$. Інші особливі точки визначаються із співвідношень $2kq + q^2 + \Omega = 0$, $2kq - q^2 - \Omega = 0$, $2kq + q^2 - \Omega = 0$, $2kq - q^2 + \Omega = 0$. Коренями цих рівнянь є

$$\begin{aligned} q_1 = -k_F - \sqrt{k_F^2 - \Omega}, \quad q_2 = -k_F + \sqrt{k_F^2 - \Omega}, \quad q_3 = k_F - \sqrt{k_F^2 - \Omega}, \\ q_4 = k_F + \sqrt{k_F^2 - \Omega}, \quad q_5 = -k_F - \sqrt{k_F^2 + \Omega}, \quad q_6 = -k_F + \sqrt{k_F^2 + \Omega}, \\ q_7 = k_F - \sqrt{k_F^2 + \Omega}, \quad q_8 = k_F + \sqrt{k_F^2 + \Omega}. \end{aligned}$$

Оскільки хвильовий вектор може бути лише невід'ємним, то q_1 і q_5 не можуть бути особливими точками функції. Решта шість коренів є усувними особливими точками. У цих точках доданки, що містять логарифми, дорівнюють нулю, завдяки множникам перед логарифмами. Решта доданків є скінченими і визначають значення функції у цих точках. Для нульової частоти поляризаційна функція електронів буде дійною

$$\pi(q) = \frac{mk_F}{\pi^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{4k_F^2 - q^2}{8k_F q} \ln \left| \frac{2k_F + q}{2k_F - q} \right| \right].$$

У цьому разі він матиме лише дві усувні особливі точки: $q = 0$ і $q = 2k_F$. На відміну від динамічного випадку, для $q = 0$ поляризаційної функції дорівнює не нулю, а

$$\pi(0) = \frac{mk_F}{\pi^2 \hbar^2}.$$

У точці $q = 2k_F$

$$\pi(2k_F) = \frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2}.$$

Знайдемо тепер уявну частину поляризаційної функції

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty dk k^2 n(k) \int_{-1}^1 \left[\delta(2kqx + q^2 + \Omega) - \delta(2kqx + q^2 - \Omega) \right] dx.$$

Після обчислення внутрішнього інтегралу

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m}{2\pi \hbar^2 q} \int_0^\infty n(k) \left[\Theta\left(\left|\frac{q}{2} + \frac{\Omega}{2q}\right| - k\right) - \Theta\left(k - \left|\frac{q}{2} - \frac{\Omega}{2q}\right|\right) \right] k dk$$

або

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m}{2\pi \hbar^2 q} \int_{|q/2 - \Omega/2q|}^{|q/2 + \Omega/2q|} n(k) k dk.$$

Ця функція є непарною щодо частоти. Для класичної електронної плазми

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{\pi \hbar n_e}{\sqrt{2\pi m} (k_B T)^{3/2} q} \int_{|q/2 - \Omega/2q|}^{|q/2 + \Omega/2q|} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) k dk.$$

Цей інтеграл легко обчислюється і

$$\begin{aligned} \text{Im}[\pi(q, \omega)] &= -\frac{\sqrt{2\pi m} n_e}{2\hbar (k_B T)^{1/2} q} \times \\ &\times \left[\exp\left(-\frac{\hbar^2}{2mk_B T} \left|\frac{q}{2} + \frac{\Omega}{2q}\right|^2\right) - \exp\left(-\frac{\hbar^2}{2mk_B T} \left|\frac{q}{2} - \frac{\Omega}{2q}\right|^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Для металів у разі $\hbar\omega \gg k_B T$,

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m}{2\pi \hbar^2 q} \int_{|q/2 - \Omega/2q|}^{|q/2 + \Omega/2q|} \Theta(k_F - k) k dk =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2 q} \text{sign}(\Omega) \left\{ \begin{array}{l} 0, \left| q - \frac{|\Omega|}{q} \right| > 2k_F \\ k_F^2 - \left(\frac{q}{2} - \frac{|\Omega|}{2q} \right)^2, \left| q + \frac{|\Omega|}{q} \right| > 2k_F > \left| q - \frac{|\Omega|}{q} \right| \\ |\Omega|, 2k_F > \left| q + \frac{|\Omega|}{q} \right| \end{array} \right.$$

Для малих частот $\Omega \ll k_F$ та $\hbar\omega < k_B T$

$$\text{Im}[\pi(q, \omega)] = -\frac{m\omega}{2\pi\hbar^4 q},$$

оскільки решта випадків не може бути реалізована.

Поляризаційна функція у наближенні випадкових фаз, щодо електрон-електронної взаємодії і при врахуванні обмінної взаємодії і кореляцій електронів у наближенні локального поля наступним чином визначає діелектричну проникність системи

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 + [v(q) + u(q)]\pi(q, \omega).$$

Тут

$$v(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

- Фур'є-образ Кулонівського потенціалу,

$$u(q) = -\frac{2\pi e^2}{q^2 + \lambda k_F^2}$$

- один із варіантів Фур'є-образ потенціалу обмінної взаємодії.

Дебаєвське екранування. Розглянемо класичний електронний газ. Нехай чистота зовнішнього поля $\omega = 0$. Тоді статична поляризаційна функція матиме вигляд

$$\text{Re}[\pi(q)] = \frac{2\hbar n_e}{\sqrt{2\pi m}(k_B T)^{3/2} q} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) \ln \left| \frac{2k+q}{2k-q} \right| k dk.$$

Знайдемо асимптотику цього виразу для $\lambda \rightarrow \infty$, або $q \rightarrow 0$, тобто довгохвильову асимптотику. Тоді

$$\ln \left| \frac{2k+q}{2k-q} \right| \approx \frac{q}{k}.$$

У висліді

$$\operatorname{Re}[\pi(q)] = \frac{2\hbar n_e}{\sqrt{2\pi m}(k_B T)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) k dk.$$

Введемо безрозмірну змінну інтегрування $\hbar^2 k^2 / 2mk_B T = x^2$. Тоді

$$k = \frac{\sqrt{2mk_B T}}{\hbar} x, \quad dk = \frac{\sqrt{2mk_B T}}{\hbar} dx.$$

Маємо

$$\operatorname{Re}[\pi(q)] = \frac{2\hbar n_e}{\sqrt{2\pi m}(k_B T)^{3/2}} \frac{\sqrt{2mk_B T}}{\hbar} \int_0^\infty \exp(-x^2) dx.$$

Оскільки інтеграл Пуассона

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

то

$$\operatorname{Re}[\pi(q)] = \frac{n_e}{k_B T}.$$

Асимптотика діелектричної проникності матиме вигляд

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \frac{n_e}{k_B T}.$$

Якщо ввести величину, що має розмірність довжини і називається радіусом екранування Дебая, та величину, що має розмірність хвильового вектора і називається хвильовим вектором Дебая:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi e^2 n_e}}, \quad q_D = \frac{1}{\lambda_D},$$

то діелектрична проникність запишеться так

$$\varepsilon(q) = 1 + \frac{q_D^2}{q^2}, \quad \varepsilon(q) = 1 + \frac{1}{\lambda_D^2 q^2}.$$

Результат екранування Кулонівського потенціалу $V(q)$ буде таким

$$\frac{V(q)}{\varepsilon(q)} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + q_D^2}.$$

Після виконання оберненого перетворення Фур'є

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \exp(-q_D r).$$

Як бачимо, потенціал швидко (експоненційно) спадає з відстанню. Характерним мірилом такого спадання є радіус Дебая.

2.7. Обчислення сум. Формула Пуассона.

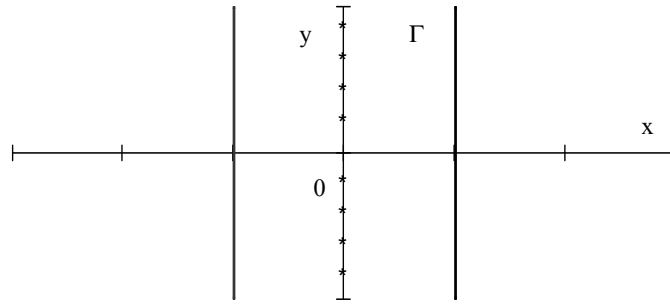
Деякі функційні ряди можна виразити через контурні інтеграли, які, у свою чергу, можна обчислити за допомогою теореми про лишки. У статистичній фізиці зустрічаються, наприклад, такі ряди

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n),$$

де $\omega_n = i2\pi n / \beta$ або $\omega_n = i(2n+1)\pi / \beta$.

Нехай функція $F(\omega)$ аналітична у всій комплексній площині, за виключенням скінченної кількості особливих точок і не має особливостей на уявній осі (нескінченно віддалена точка теж є її звичайною точкою). Розглянемо замкнений контур, що

охоплює всю уявну вісь і розглянемо наступний інтеграл за цим контуром.



Мал. 12.

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega) + 1} d\omega .$$

Оскільки, за умовою, всередину контуру не потрапляють особливі точки функції $F(\omega)$, то такими особливими точками можуть бути лише нулі знаменника, що знаходяться з умови

$$\exp(\beta\omega) + 1 = 0 .$$

Звідси

$$\beta\omega_n = \text{Ln}(-1) = i\pi(2n+1) ,$$

де ми використали показникову форму представлення комплексного числа

$$-1 = \exp[i(\pi + 2\pi n)], \quad n \in Z .$$

Знайдені точки є полюсами першого порядку інтегранди і відповідно до теореми про лишки

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega) + 1} d\omega = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{res} \left[\frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega) + 1}, \omega_n \right] .$$

За означенням

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left[\frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1}, \omega_n \right] &= \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{(\omega - \omega_n)F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1} = \\ &= F(\omega_n) \lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\omega - \omega_n}{\exp(\beta\omega)+1} = \frac{F(\omega_n)}{\beta}. \end{aligned}$$

У висліді

$$\int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1} d\omega = \frac{2\pi i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n).$$

Звідси

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) = \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1} d\omega.$$

Аналогічним чином можна отримати і формулу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) = \frac{\beta}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)-1} d\omega,$$

де $\beta\omega_n = i2\pi n$. Останні дві формули називаються формулами Пуассона.

З однаковим успіхом наведені інтеграли можна трактувати як інтеграли за контуром Γ' , що охоплює всю комплексну площину, за виключенням уявної осі. Зберігаючи той самий напрямок обходу вздовж прямих, паралельних уявній осі, що і у попередньому разі, ми отримаємо від'ємний напрямок обходу відповідних областей. Отже, зв'язок між інтегралами за контурами Γ і Γ' наступний

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1} d\omega &= - \int_{\Gamma'} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)+1} d\omega, \\ \int_{\Gamma} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)-1} d\omega &= - \int_{\Gamma'} \frac{F(\omega)}{\exp(\beta\omega)-1} d\omega. \end{aligned}$$

Саме останній варіант формул Пуассона є зручним для обчислення функційних рядів. Особливо простим їх використання буде у разі, коли у функції $F(\omega)$ невелика

кількість особливих точок, а нескінченно віддалена точка є не просто її звичайною точкою, але нулем вище першого порядку. Остання властивість гарантує зникнення у нескінченності інтеграла за півколами. Іншими словами, лишок функції $F(\omega)$ у нескінченно віддаленій точці дорівнюватиме нулю. Тоді контур Γ' формально збігатиметься з контуром Γ , але лишки інтегранди слід шукати не в особливих точках на уявній осі, а в інших точках комплексної площини.

Приклад 7. Нехай

$$F(\omega) = \frac{1}{a - \omega}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

і необхідно обчислити наступну суму

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n), \quad \omega_n = i2\pi n\beta.$$

Згідно з формулою Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a - \omega_n} = -\frac{\beta}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{d\omega}{[\exp(\beta\omega) + 1][a - \omega]}.$$

Всередині контуру Γ' інтегранда має лише одну особливу точку $\omega = a$ - полюс першого порядку, отже

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a - \omega_n} = -\beta \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{[\exp(\beta\omega) + 1][a - \omega]}, a \right\} = \frac{\beta}{\exp(\beta a) + 1}.$$

2.8. Задачі для самостійної роботи

Обчислити наступні інтеграли:

Варіант 1

$$1. \quad \text{a) } \int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{\sin^2(z) \cos(z)}, \quad \Gamma = \{z, |z|=1\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{z \sin(z) dz}{(z-1)^2},$$

$$\Gamma = \{z, |z|=2\}.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(2x) dx}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} \cdot 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} \cdot 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \exp(imx) dx}{1+x^2}, \quad m > 0;$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax) dx}{x^2 - a^2}, \quad a > 0.$$

Варіант 2

$$1. \quad \text{a) } \int_{\Gamma} \frac{z dz}{z^2 - 3z + 2}, \quad \Gamma = \{z, |z|=3\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{\sinh(z) dz}{1 - \sin(\pi z)},$$

$$\Gamma = \{z, |z-1|=1\}.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin(x)}, \quad 1 < a. \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) dx}{(x^2+1)^2} \cdot 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x) dx}{x^2 + a^2}, \quad a > 0;$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-a}{x^2-b^2} \sin(2x) dx, \quad b > 0.$$

Варіант 3

$$1. \quad \text{a) } \int_{\Gamma} \frac{\sin(3z) dz}{(2z-1)^2}, \quad \Gamma = \{z, |z|=1\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} z^2 \tan(\pi z) dz,$$

$$\Gamma = \{z, |z|=1\}.$$

$$2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x) dx}{5 + 4 \cos(x)} \cdot 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \cdot 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3x) dx}{x^2 - 2x + 5};$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad b > 0.$$

Варіант 4

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{\exp[1/(z-1)]dz}{z-1}, \quad \Gamma = \{z, |z-1|=1\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

$$\Gamma = \{z, |z-1-i|=2\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a^2 \sin^2(x) + b^2 \cos^2(x)}, \quad 0 < b < a.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4+1}. \quad 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(x) dx}{x^2-2x+10}; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos(3x) dx}{x^2-5x+6}.$$

Варіант 5

$$1 \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{z^2 \cosh(1/z) dz}{(iz-2)^2(z^2+4)}, \quad \Gamma = \{z, |z|=3\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{\cos(\pi/4z) dz}{(z-1)(z+3)^2},$$

$$\Gamma = \{z, |z|=4\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x) + 2}. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-x+2) dx}{x^4+10x^2+9}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x) dx}{x^2-2x+10}; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(imx) dx}{x}.$$

Варіант 6

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} z \sin(\pi/z^2) dz, \quad \Gamma = \{z, |z|=1\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{z^{14} dz}{(z^3+1)(z^4-1)^3},$$

$$\Gamma = \{z, |z|=2\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{[\sin^2(x) + 2 \cos^2(x)]^2}. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin(2x) dx}{x^2+2x+2}; \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) dx}{x}.$$

Варіант 7

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{z^2 dz}{z^3-1}, \quad \Gamma = \{z, x^2 + y^2 - 2x = 0\}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)},$$

$$\Gamma = \{z, x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6(x) + \cos^6(x)}.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}. \quad 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(ax) dx}{x^2+a^2}, \quad a > 0; \text{ b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x) dx}{x(x^2+1)}.$$

Варіант 8

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{\cos(z/2) dz}{z^2-4}, \quad \Gamma = \{z, x^2/9 + y^2/4 = 1\}; \text{ b) } \int_{\Gamma} \frac{\exp(z) dz}{z^4+2z^2+1},$$

$$\Gamma = \{z, |z-1|=1\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(x) dx}{2-\sin(x)}. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(x) dx}{(x^2+1)^2}; \text{ b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{x}.$$

Варіант 9

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{\exp(z) dz}{(z-\pi)^2}, \quad \Gamma = \{z, |z|=4\}; \text{ b) } \int_{\Gamma} \frac{z dz}{\exp(z)+3},$$

$$\Gamma = \{z, |z+1|=4\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \cos(x)}, \quad 0 < b < a. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^4+1) dx}{x^6+1}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax) dx}{1+x^4}, \quad a > 0; \text{ b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x) dx}{x(x^2+1)}.$$

Варіант 10

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} (z+1) \exp(1/z) dz, \quad \Gamma = \{z, |z|=1/3\}; \text{ b) } \int_{\Gamma} z^2 \sin(1/z) dz,$$

$$\Gamma = \{z, |z|=1\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a \cos(x)}, \quad 0 < a < 1. \quad 3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+1)^2}.$$

$$4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) dx}{(x^2+1)(x^2+4)}; \text{ b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(x) dx}{x^2-a^2}, \quad a > 0.$$

Варіант 11

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{z \sin(z) dz}{(z-1)^5}, \quad \Gamma = \{z, x^2/3 + y^2/9 = 1\}; \text{ b) } \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1},$$

$$\Gamma = \{z, x^2 + y^2 = 2x\}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x) dx}{a+b \cos(x)}, \quad 0 < b < a.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x+1)(x^2+4)(x-2i)^3} \cdot 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin(ax) dx}{1+x^2}, \quad a > 0;$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-a}{x^2-b^2} \cos(2x) dx, \quad b > 0.$$

Вариант 12

$$1. \text{ a) } \int_{\Gamma} \frac{(z+1) dz}{z^2+2z-3}, \quad \Gamma = \{ z, x^2+y^2=16 \}; \quad \text{b) } \int_{\Gamma} \frac{\sin(\pi z) dz}{z^2-1},$$

$$\Gamma = \{ z, x^2/4+y^2=1 \}. \quad 2. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos(x)}, \quad 1 < a.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-5) dx}{(x^4+10x^2+9)(x-1)}. \quad 4. \text{ a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x^2-a^2}{x^2+b^2} \cos(mx) dx, \quad a, b, m > 0;$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+b^2} \frac{\cos(x)}{x} dx, \quad b > 0.$$

Література

1. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. Київ: Вища школа, 1980.
2. Мартыненко В.С. Операционное исчисление. Киев: Вища школа, 1990.
3. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. Київ: Наукова думка, 1996.
4. Свідзинський А. Математичні методи теоретичної фізики. Київ: Видавництво імені Олени Теліги, 1998.
5. Вакарчук І.О. Квантова механіка. Львів: Видавництво Львівського державного університету ім. І. Франка, 1998.
6. Микусинский Ян. Операторное исчисление. Москва: Издательство иностранной литературы, 1956.
7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1988.
9. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Т. 1,2. Київ: Техніка, 1999.
10. Кошляков Н.С., Глинэр Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Москва: Высшая школа, 1970.
11. Мэтьюз Дж., Уоркер Р. Математические методы физики. Москва: Атомиздат, 1972.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва: Наука, 1977.
13. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Том 1 и 2. -Москва: Иностранная литература, 1960.
14. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. Москва: Высшая школа, 1964.
15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: специальные функции. Москва: Наука, 1983.

16. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 1985.
17. Джеффрис Г., Свирас В. Методы математической физики. Том 3. Москва: Мир, 1978.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1972.
19. Иваненко Д., Соколов А. Классическая теория поля. Москва: Государственное издательство технико - теоретической литературы, 1949.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Москва: Наука, 1969.
21. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. Москва: Наука, 1977.
22. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1982.
23. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Москва: Наука, 1974.
24. Швець В.Т. Спеціальні функції у задачах математичної фізики. Одеса: Видавничий центр ОДАХ, 2000.
25. Комаров Г.Н., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінчені гібридні інтегральні перетворення, породжені диференційними рівняннями другого порядку. Чернівці: Видавництво Прут, 2001.
26. Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесея із спектральним параметром у задачах математичного моделювання, масопереносу в неоднорідних середовищах. Київ: Наукова думка, 2000.
27. Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. Статистическая механика магнито-упорядоченных систем. Москва: Наука, 1987.
28. Швець В.Т. Вища математика: Комплексний аналіз, інтегральні перетворення, задачі математичної фізики. Одеса: Видавничий центр ОДАХ, 2012.

29. Швець В.Т. Інтегральні перетворення в задачах математичної фізики. Одеса: Видавничий центр ОДАХ, 2005.