KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Martina Bátorová

martina.batorova@fmph.uniba.sk

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

C-bCXX-010/20 Základy matematiky (2)
1-kXX-017/20 Základy matematiky (2)

http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~batorova/ZM2.html

Komplexné čísla

Pri riešení (nielen) kvadratických rovníc sa stretávame s tým, že niektoré z nich bežnými prostriedkami nevieme úspešne vyriešiť – stačí, že sa niekde objaví (párna) odmocnina zo záporného čísla a známe postupy zlyhajú.
Skúsme však využiť známy matematický trik „ak to neexistuje, tak si to vymyslime" :) a skúsme sa (definitoricky) rozhodnúť, že máme také *i*maginárne (=vymyslené) „číslo" i, pre ktoré platí $i^2 = -1$. Nemusíme (aspoň na začiatku) ani vedieť, o čo vlastne ide, stačí, že úspešne rieši problém s odmocňovaním záporných čísel (a mnoho ďalších) a vzhľadom na „rozumne" definované operácie sa správa konzistentne.
Historicky sa ukázalo, že takáto konštrukcia je veľmi užitočná a vieme pomocou nej definovať novú nadmnožinu reálnych čísel – čísla *komplexné*. Uvedením *Gaussovej (Argandovej) roviny* získavame ich geometrickú reprezentáciu a interpretáciu, vrátane *operácií* na nich.
To, čo začalo ako matematická hračka, našlo veľké uplatnenie v mnohých iných disciplínach, minimálne vo fyzike. My si ukážeme skôr geometricko-algebraický pohľad na komplexné čísla a ich aplikácie ponecháme na neskoršie štúdium.

(Všetky?) korene kvadratickej rovnice

Reálne korene

Riešme rovnicu:

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$D = 4 \cdot a^2 \rightsquigarrow$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot a$$

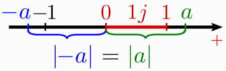
$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm 2 \cdot a}{2 \cdot 1} = \pm a \cdot 1$$

Platí, že $|a| = |-a|$, čiže vzdialenosť každého koreňa od nuly je práve $|a|$:

$$|a| = |0a| = \sqrt{(a-0)^2} = \sqrt{(a)^2} = |a|$$

$$|-a| = |0,-a| = \sqrt{(-a-0)^2} = \sqrt{(-a)^2} = |a|$$

Navyše, pre pevne zvolenú jednotku $1j = 1$ vieme korene naznačiť na reálnej číselnej osi:



Imaginárne korene

Riešme rovnicu:

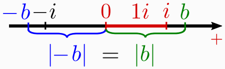
$$x^2 + b^2 = 0$$

$$D = -4 \cdot b^2 \rightsquigarrow \sqrt{D} = ?? \rightsquigarrow i^2 := -1$$

$$\sqrt{D} = 2 \cdot i \cdot b$$

$$x_{1,2} = \frac{-0 \pm 2 \cdot i \cdot b}{2 \cdot 1} = \pm b \cdot i$$

Chceli by sme, aby sa aj tieto „korene" správali čo najviac ako reálne, teda napr. aby ich vzdialenosť od nuly bola rovnaká – ako však vyzerá absolútna hodnota takéhoto „čísla"?
Geometricky by sme vedeli analógiu bežnej reálnej osi vedeli získať priamočiaro – skúsme $1j = i$ zvoliť za *imaginárnu* jednotku na takejto vymyslenej – *imaginárnej* – číselnej osi a naniesť bežnú (= reálnu) absolútnu hodnotu čísla $\pm b$:



Geometrické znázornenie koreňov kvadratickej rovnice

Všeobecné korene

Riešme ďalšiu rovnicu:

$$x^2 - 2 \cdot x - 2 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{4 \cdot i^2} = 2 \cdot i$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2 \cdot i}{2 \cdot 1} =$$

$$= 1 \pm i = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i$$

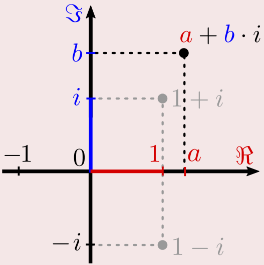
Vidíme, že v riešení vystupujú reálne aj imaginárne jednotky – čo s tým?

Grafická reprezentácia

Dá sa číselná os a geometrická intuícia absolútnej hodnoty ako vzdialenosti čísel na nej rozšíriť tak, aby korektne reprezentovala všeobecné riešenie kvadratickej rovnice?
A čo toto všeobecné riešenie vôbec je?

Komplexné čísla v Gaussovej rovine

Vytvorme karteziánsku súradnicovú sústavu $\langle 0, \Re(1), \Im(i) \rangle$ a na jej kolmé osi s jednotkami $|1j| = |1i|$. Nanášajme od jej začiatku 0 riešenia kvadratických rovníc nasledovne:



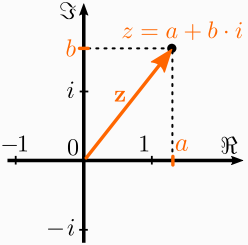
- na *reálnu* os $\Re$ vo vzdialenosti $|a|$ od 0 riešenia $x = a \cdot 1$ pre $a \in \mathbb{R}$,
- na *imaginárnu* os $\Im$ vo vzdialenosti $|b|$ od 0 riešenia $x = b \cdot i$ pre $b \in \mathbb{R}$,
- bod $[a, b]$ v rovine nech reprezentuje riešenie $x = a \cdot 1 + b \cdot i$ pre $a, b \in \mathbb{R}$.

Potom takúto grafickú reprezentáciu *komplexných čísel* $a + b \cdot i$ s *reálnou zložkou* $a \in \mathbb{R}$ a *imaginárnou zložkou* $b \in \mathbb{R}$ nazývame *Gaussova rovina*.

Algebraický a zložkový zápis komplexného čísla

Vektorová reprezentácia komplexného čísla

Uvažujme komplexné číslo z a zaznačme ho v Gaussovej rovine $\langle 0, \Re(1), \Im(i) \rangle$ ako bod $[a, b]$.
Na z možno následne nahliadať aj ako na polohový vektor $\mathbf{z}$ umiestnený do začiatku s.s., a teda majúci súradnice $\mathbf{z} = (a, b)$:



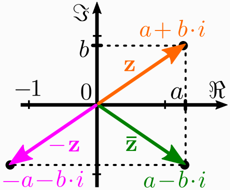
Algebraický a zložkový zápis k.č.

Uvažujme komplexné číslo z. Jeho zápis v tvare $a + b \cdot i$ nazývame *algebraickým*, jeho zápis (a, b) (ako vektora v Gaussovej rovine) *zložkovým*.

Základné pojmy:

Uvažujme komplexné číslo $z = a + b \cdot i$ a interpretujme ho v Gaussovej rovine ako vektor $\mathbf{z} = (a, b)$. Potom:

- *absolútna hodnota* z je jeho dĺžka ako vektora:
$$|z| := |\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
- *komplexne združené číslo* k z je
$$\bar{z} := a - b \cdot i$$
- *opačné číslo* $-z$ je reprezentované opačným vektorom $-\mathbf{z} = -(a, b)$, a teda
$$-z := -a - b \cdot i$$

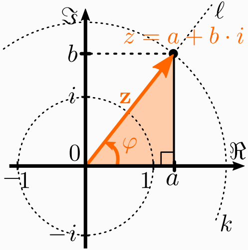


Poznámka:
Opačné číslo je obrazom čísla v *stredovej* súmernosti podľa začiatku s.s. a komplexne združené číslo je jeho obrazom v *osovej súmernosti* s osou $\Re$.

Goniometrický zápis komplexného čísla

Polárne súradnice bodu v rovine

Na komplexné číslo z v rovine $\langle 0, \Re(1), \Im(i)\rangle$ možno nahliadať aj ako na priesečník kružnice $k(0, |\mathbf{z}|)$ a priamky ℓ s odklonom φ od kladného smeru osi $\Re$.



Bod $z \in k \cap \ell$ je takto určený jednoznačne a $\langle |\mathbf{z}|, \varphi\rangle$ nazývame jeho *polárnymi súradnicami*.

Zároveň z vlastností pravouhlého trojuholníka vidíme, že:

$$a = |\mathbf{z}| \cdot \cos\varphi$$
$$b = |\mathbf{z}| \cdot \sin\varphi$$

Goniometrický zápis k.č.

Uvažujme komplexné číslo z a jeho polárne súradnice $\langle |z|, \varphi\rangle$. Potom zápis z v tvare

$$z = a + b \cdot i = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

nazývame *goniometrickým tvarom zápisu k.č.*. Uhol φ nazývame *argumentom* a $|z|$ *modulom* k.č.

Polárne súradnice dôležitých komplexných čísel:

Uvažujme $z = \langle |z|, \varphi\rangle$, kde pre $z = a + b \cdot i$ platí

$$z = \left\langle \sqrt{a^2 + b^2},\ \operatorname{atan}\frac{b}{a}\right\rangle.$$

Potom:

- opačné číslo je $-z = \langle |z|, \varphi + \pi\rangle$
- komplexne združené číslo je $\bar{z} = \langle |z|, -\varphi\rangle$
- $+1 = \langle 1, 0\rangle$
- $+i = \langle 1, \frac{\pi}{2}\rangle$
- $-1 = \langle 1, \pi\rangle$
- $-i = \langle 1, \frac{3}{2}\pi\rangle = \langle 1, -\frac{1}{2}\pi\rangle$

Rovnosť, súčet a rozdiel komplexných čísel

Uvažujme dve komplexné čísla zapísané v algebraickom resp. zložkovom tvare:

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad \mathbf{z}_1 = (a_1, b_1), \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R},$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \cdot i, \quad \mathbf{z}_2 = (a_2, b_2), \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnosť

Dve komplexné čísla sa rovnajú, ak sa rovnajú po svojich (reálnych $\Re$ a imaginárnych $\Im$) zložkách:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$$

Súčet a rozdiel

Súčet dvoch komplexných je také komplexné číslo, ktorého $\Re$ resp. $\Im$ zložka je súčtom $\Re$ resp. $\Im$ zložiek pôvodných sčítancov:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

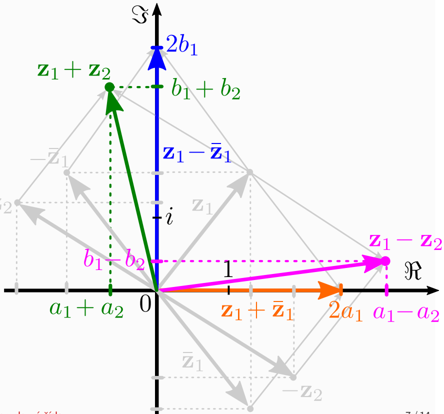
Rozdiel dvoch komplexných čísel je súčtom prvého a čísla opačného k druhému sčítancu:

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i$$

Grafické sčítanie a odčítanie komplexných čísel

Súčet resp. rozdiel komplexných čísel vieme získať aj graficky ako súčet resp. rozdiel ich vektorovej reprezentácie:

$$\mathbf{z}_1 \pm \mathbf{z}_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$



Súčin a reálny násobok komplexných čísel

Uvažujme dve komplexné čísla zapísané v algebraickom resp. zložkovom tvare:

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad \mathbf{z}_1 = (a_1, b_1), \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R},$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \cdot i, \quad \mathbf{z}_2 = (a_2, b_2), \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Súčin

Súčin dvoch komplexných je také komplexné číslo, ktorého $\Re$ resp. $\Im$ zložka vznikne roznásobením a vhodnou úpravou zložiek pôvodných činiteľov:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 b_2 i^2 = \\ &= \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{\in\mathbb{R}} \cdot i \end{aligned}$$

Špeciálne: reálny násobok komplexného čísla

$$\begin{aligned} k \cdot z = k \cdot (a + bi) &= (k + 0i) \cdot (a + bi) = \\ &= (ka) + (kb) \cdot i, \ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Geometricky ide o analógiu škálovania vektorovej reprezentácie $\mathbf{z}$ čísla z.

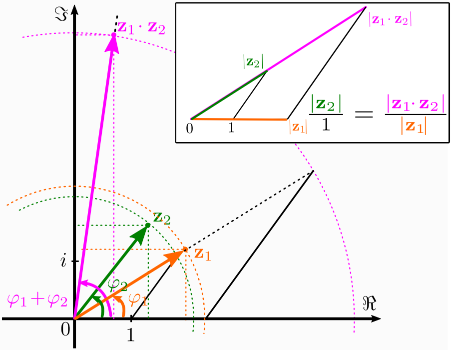
Uvažujme polárne súradnice čísel z_1, z_2:

$$z_1 = \langle |z_1|, \ \varphi_1 \rangle \qquad z_2 = \langle |z_2|, \ \varphi_2 \rangle$$

Potom pre ich súčin platí

$$z_1 \cdot z_2 = \langle |z_1| \cdot |z_2|, \ \varphi_1 + \varphi_2 \rangle$$

Grafický súčin komplexných čísel



Podiel komplexných čísel

Uvažujme dve komplexné čísla zapísané v algebraickom resp. zložkovom tvare:

$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot i, \quad \mathbf{z}_1 = (a_1, b_1), \quad a_1, b_1 \in \mathbb{R},$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \cdot i, \quad \mathbf{z}_2 = (a_2, b_2), \quad a_2, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Podiel

Podiel dvoch komplexných je také komplexné číslo, ktorého $\Re$ resp. $\Im$ zložka vznikne pomocnou úpravou prostredníctvom komplexne združeného čísla k deliteľovi a následným roznásobením:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} =$$
$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot i}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot i$$

Poznámka:

Z predchádzajúceho výpočtu vidíme, že

$$\mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}} = |\mathbf{z}|^2 \Leftrightarrow |\mathbf{z}| = \sqrt{\mathbf{z} \cdot \bar{\mathbf{z}}}$$

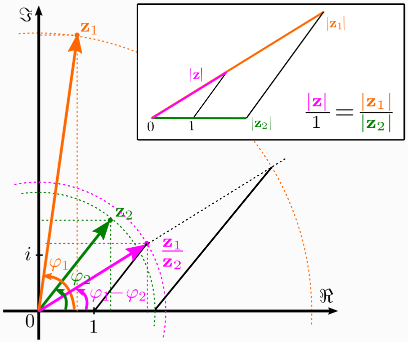
Uvažujme polárne súradnice čísel z_1, z_2:

$$z_1 = \langle |z_1|, \ \varphi_1 \rangle \qquad z_2 = \langle |z_2|, \ \varphi_2 \rangle$$

Potom pre ich podiel platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \left\langle \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ \varphi_1 - \varphi_2 \right\rangle$$

Grafický podiel komplexných čísel



Komplexná jednotka a jej mocniny

Komplexná jednotka

Komplexné číslo z také, že $|z| = 1$, nazývame *komplexnou jednotkou* (ozn. 1_c).

Poznámka:

Komplexnou jednotkou je teda ľubovoľné číslo, ktorého vzdialenosť od 0 je jedna. V Gaussovej rovine je takýchto čísel nekonečne veľa (tvoria kružnicu $k(0,1)$), na $\Re$ osi ležia nám známe (reálne) jednotky ± 1.

Mocnina komplexného čísla

(Komplexnou) n-tou mocninou komplexného čísla z pre $n \in \mathbb{N}_0$ je iné komplexné číslo w také, že

$$w = z^n = z \cdot z^{n-1} = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n\text{-krát}} = \prod_{j=1}^{n} z$$

a $z^0 = 1$.

Mocniny i

Význačnou komplexnou jednotkou je $z = i$. Pre jej mocniny platí:

- $i^1 = i$

  $i^2 = -1$

  $i^3 = i \cdot i^2 = -i$

  $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$

  $i^5 = i \cdot i^4 = i$

  $i^6 = i \cdot i = -1$

- $i^{4k+1} = i$

  $i^{4k+2} = -1$

  $i^{4k+3} = -i$

  $i^{4k+4} = i^{4(k+1)} = 1$

  pre $k \in \mathbb{N}_0$

Určite mocniny komplexnej jednotky $z = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i$

$$z^2 = (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i)^2 = 2/4 + 2 \cdot 2/4 \cdot i + 2/4 \cdot i^2 = i$$
$$z^3 = (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i) \cdot i = -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i$$
$$z^4 = (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i) \cdot (-\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \cdot i) = \ldots$$

... existuje lepší spôsob umocňovania?

Mocnina komplexného čísla. Moivreova veta.

Výpočet komplexnej mocniny

Uvažujme komplexné číslo z s polárnymi súradnicami $\langle |z|, \varphi\rangle$ a goniometrickým tvarom zápisu

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Potom polárne súradnice n-tej mocniny čísla z sú $\langle |z|^n, n\cdot\varphi\rangle$, a teda

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\cdot\varphi) + i \cdot \sin(n\cdot\varphi)).$$

Moivreova veta

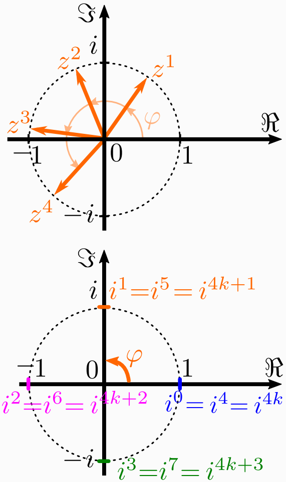
Pre komplexnú jednotku

$$z = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi =: \mathrm{cis}\,\varphi$$

platí

$$z^n = \cos(n\cdot\varphi) + i \cdot \sin(n\cdot\varphi).$$

Grafické umocňovanie komplexnej jednotky



Odmocnina komplexného čísla

Odmocnina komplexného čísla

(Komplexnou) n-tou odmocninou komplexného čísla z je ľubovoľné komplexné číslo w také, že $z = w^n$; píšeme $w = \sqrt[n]{z}^{\,c}$.

Výpočet komplexnej odmocniny

Uvažujme komplexné číslo z s polárnymi súradnicami $\langle |z|, \varphi \rangle$ a goniometrickým tvarom zápisu

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Potom existuje práve n jeho komplexných odmocnín s polárnymi súradnicami

$$\left\langle \sqrt[n]{|z|},\ \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \right\rangle, k = 0, \dots, n-1,$$

a teda

$$w = \sqrt[n]{z}^{\,c} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \cdot \operatorname{cis}\left(\varphi/n + 2\pi/n \cdot k\right) \right\}_{k=0}^{n-1}.$$

Odmocnina komplexnej jednotky:

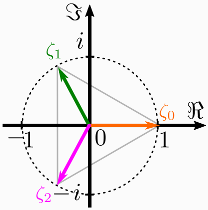
$$\sqrt[n]{1_c}^{\,c} = \left\{ \operatorname{cis}\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi}{n} \cdot k\right) \right\}_{k=0}^{n-1} \text{ pre } 1_c = \langle 1, \varphi \rangle.$$

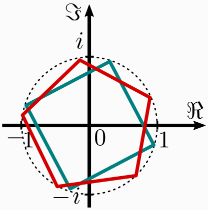
Ukážka: $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0}$

$$\zeta_0 = \operatorname{cis}\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 0\right) = \operatorname{cis} 0 = 1$$

$$\zeta_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 1\right) = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$\zeta_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot 2\right) = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$





Zdroje

- Užitočné ako príprava na skúšku + P/F (url)

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

Martina Bátorová

martina.batorova@fmph.uniba.sk

Katedra algebry a geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzity Komenského v Bratislave

C-bCXX-010/20 Základy matematiky (2)
1-kXX-017/20 Základy matematiky (2)

http://fractal.dam.fmph.uniba.sk/~batorova/ZM2.html