איך לרבע את המעגל (בערך)

מוטי בן־ארי

המחלקה להוראת המדעים

מכון ויצמן למדע

http://www.weizmann.ac.il/sci~tea/benari/

© 2017 by Moti Ben-Ari.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License. To view a copy of this license, visit `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/` or send a letter to Creative Commons, 444 Castro Street, Suite 900, Mountain View, California, 94041, USA.

קירובים ל־π

היוונים היו הראשונים שחקרו בנייה גיאומרטית עם סרגל ומחוגה. הם לא הצליחו לפתור שלוש בעיות: חלוקת זווית לשלושה, הכפלת קוביה (נתונה קוביה, בנה קוביה בנפח פי־שניים) וריבוע מעגל (נתון מעגל, בנה ריבוע עם אותו שטח). במאה ה־19 הוכח שאין פתרונות לבעיות אלו.

באמצעות אלגברה ניתן להראות: אם נתונה קטע קו שאורכו 1, המספרים (אורכי הקטעים) שניתן לבנות מהקטע הזה הם תוצאות של חישובים עם פעולות החשבון $+, -, \times, \div, \sqrt{}$. לא ניתן לבנות שורש שלישי, ולכן לא ניתן להכפיל קוביה, כי כדי להכפיל קוביה עם נפח 1 חייבים לפתור את המשוואה $x^3 - 2 = 0$, ולבנות את האורך $\sqrt[3]{2}$. מאותה סיבה לא ניתן לחלק זווית שרירותית לשלושה, כי כדי לחלק 60° חייבים לפתור את המשוואה מסדר שלוש $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

חקר הבעיה של ריבוע המעגל היה איטי יותר ופתרון נמצא רק בשנת 1882. נתון מעגל יחידה ששטחו $\pi r^2 = \pi$, יש לבנות ריבוע שהצלע שלו באורך $\sqrt{\pi}$. אבל π הוא מספר **טרנסנדנטלי**, שמשמעותו היא שהמספר אינו פתרון של אף משוואה אלגבראית. ההוכחה מסובכת ביותר ומשתמשת במושגים מאנליזה ומספרים מרוכבים.

קיימים קירובים פשוטים מאוד ל־π, למשל:

$$\frac{355}{113} = 3.14159292\,,$$

שההפרש בינו לבין $\pi \approx 3.14159265$ הוא רק 2.67×10^{-7}. רדיוס כדור הארץ הוא בערך $6,378.1$ ק"מ. חישוב ההיקף עם $355/113$ נותן תוצאה של $40,074.78421$ ק"מ וחישוב עם π נותן תוצאה של $40,074.78761$ ק"מ. ההפרש הוא פחות מ־4 מטר!

ניתן לבנות את המספר הרציונלי $355/113$ על ידי הארכת קטע קו באורך אחד 113 פעמים, הרחבת נוספת כדי לקבל קטע קו באורך 355, ובניית קטע קו שאורכו מתקבל מחילוק. מסמך זה מביא בנייה קצרה של קטע קו באורך $355/113$ שפורסם על ידי **רמנוג'ן Ramanujan** ב־*Journal of the Indian Mathematical Society*, 1913, p. 138.

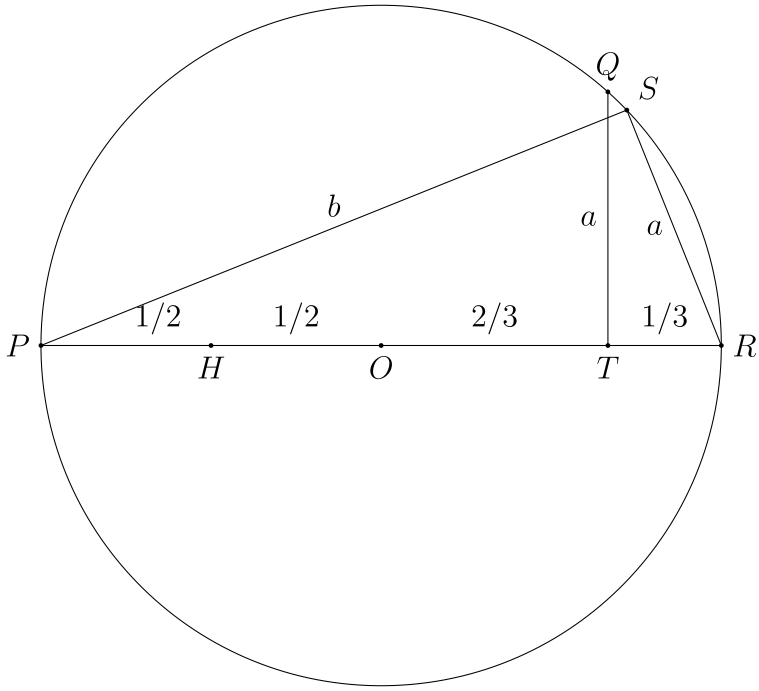
נציג את הבנייה בשלבים ובכל שלב נציג תרגילים המבקשים שתשלים את החישובים. את התשובות ניתן למצוא בסוף המסמך, ביחד עם המאמר המקורי של רמנוג'ן.

רמנוג'ן (1887–1920) גדל בהודו במה שנקרא עכשיו מדינת Tamil Nadu. מהר מאוד הוא התקדם מעבר לרמה של בתי הספר והמכללות המקומיות. הוא שלח את עבודותיו למתמטיקאי האנגלי G.H. Hardy שהזמין אותו לאנגליה. רמנוג'ן הגיע בשנת 1914, וחזרתו להודו לא התאפשרה עד לסיום מלחמת העולם הראשונה. הוא סבל רבות ממזג האוויר הקר ומהאוכל הלא מוכר (כהינדי אדוק היה צמחוני). זמן קצר לאחר שובו להודו נפטר בגיל 32. המתמטיקה שהגה רמנוג'ן נחקרת עד היום לאחר מאה שנים. ביאוגרפיה:

Robert Kanigel. *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan*, 1991.

שלב 1

- בנה מעגל יחידה עם מרכז O וקוטר PR.
- סמן H במחצית הקטע PO, וסמן T כשליש הקטע RO.
- בנה אנך מ־T שחותך את המעגל ב־Q.
- בנה מיתר RS שאורכו שווה ל־QT.



תרגיל 1 בנה את האורך $TR = \dfrac{1}{3}$.

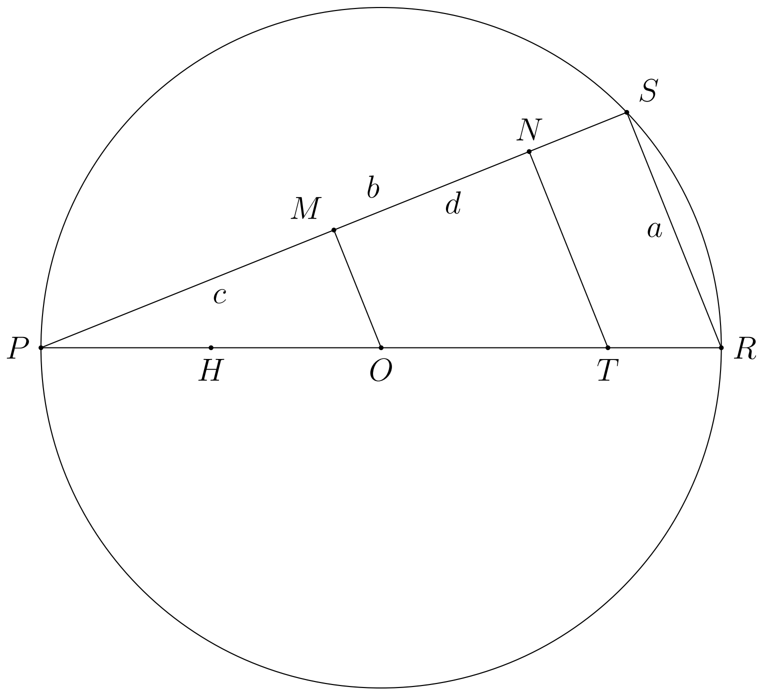
תרגיל 2 חשב את אורכו של QT.

תרגיל 3 חשב את אורכו של PS.

תרגיל 4 בנה את המיתר $QR = RS$.

שלב 2

- בנה קטעי קו NT ו־OM מקבילים ל־RS.

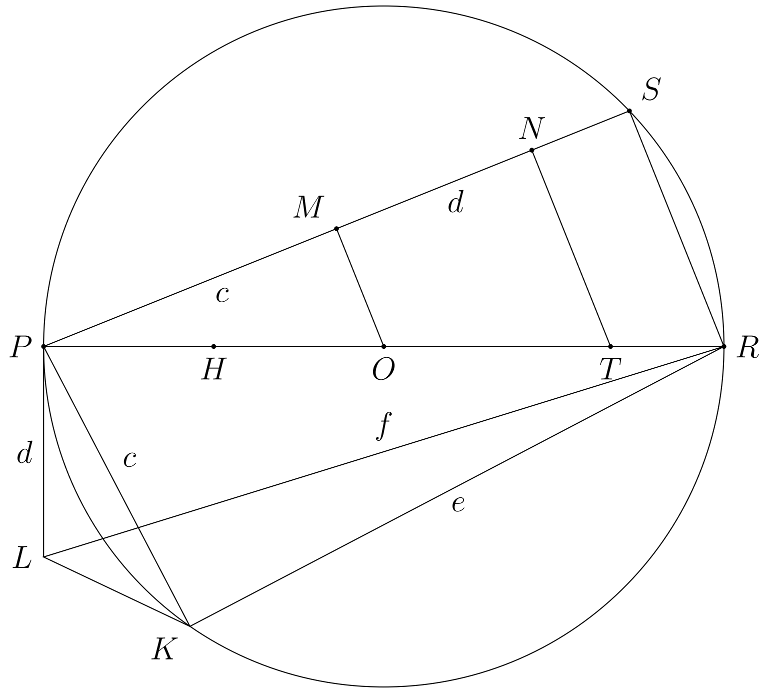


תרגיל 5 חשב את אורכו של PM.

תרגיל 6 חשב את אורכו של MN.

שלב 3

- בנה את המיתר $PK = PM$.
- בנה את המשיק $PL = MN$.
- חבר את הנקודות K, L, R.

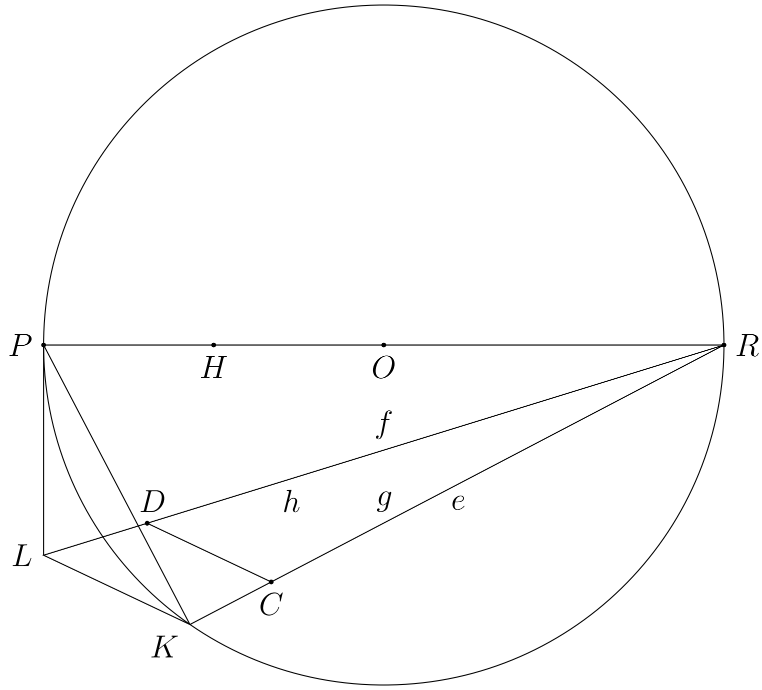


תרגיל 7 מה ידוע על $\triangle PKR$? חשב את אורכו של RK.

תרגיל 8 מה ידוע על $\triangle LPR$? חשב את אורכו של RL.

שלב 4

- סמן את הנקודה C כך ש־$RC = RH$.
- בנה CD מקביל ל־LK.



תרגיל 9 חשב את אורכו של RC.

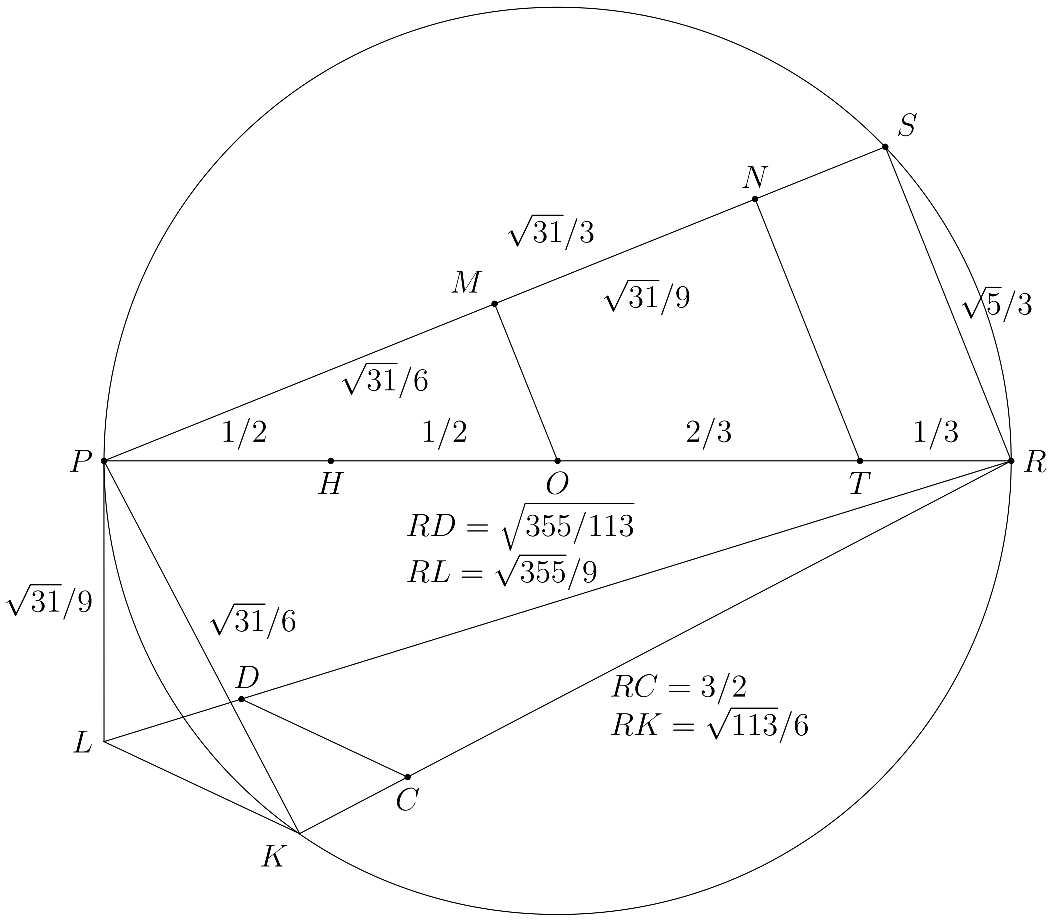
תרגיל 10 חשב את אורכו של RD.

תרגיל 11 בנה ריבוע שאורך הצלע שלו הוא RD.

תרגיל 12 חשב את RD^2 שהוא שטח הריבוע. חשב גם כשבר וגם כמספר עשרוני.

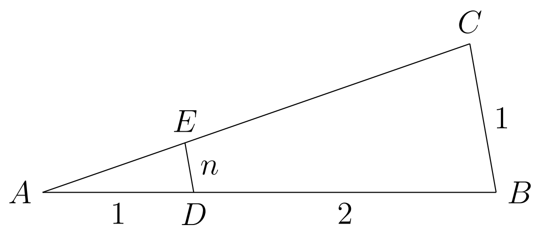
סיכום

להלן הבנייה בשלמותה כאשר כל האורכים מסומנים.



תשובות לתרגילים

1. בנה $\triangle ABC$ עם האורכים הרשומים ובנה DE מקביל ל־BC.



לפי משולשים דומים:

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{3}\,.$$

2. לפי משפרט פיתגורס: $\triangle QOT$:

$$QT = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$

3. $\triangle PSR$ הוא משולש ישר זווית כי הוא כולא קוטר. לפי משפט פיתגורס:

$$PS = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}\,.$$

4. הצב את רגלי המחוגה על QT. בנה מעגל עם מרכז R ורדיוס זה.

5. לפי המשולשים הדומים:

$$\frac{PM}{PO} = \frac{PS}{PR}, \quad \frac{PM}{1} = \frac{\sqrt{31}/3}{2}, \quad PM = \frac{\sqrt{31}}{6}.$$

6. לפי המשולשים הדומים:

$$\frac{PN}{PT} = \frac{PS}{PR}, \quad \frac{PN}{5/3} = \frac{\sqrt{31}/3}{2}, \quad PN = \frac{5\sqrt{31}}{18}\,.$$

$$MN = PN - PM = \sqrt{31}\left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{31}}{9}\,.$$

7. $\triangle PKR$ הוא משולש ישר זווית כי הוא כולא קוטר. לפי משפט פיתגורוס:

$$RK = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}\,.$$

8. $\triangle PLR$ הוא משולש ישר זווית כי PL משיק. לפי משפט פיתגורס:

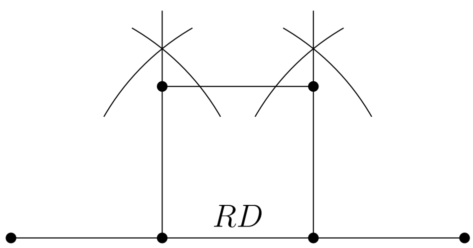
$$RL = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}\,.$$

9. $RC = RH = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

10. בגלל ש־CD מקביל ל־LK, לפי המשולשים הדומים:

$$\frac{RD}{RC} = \frac{RL}{RK}\,, \quad \frac{RD}{3/2} = \frac{\sqrt{355}/9}{\sqrt{113}/6}\,, \quad RD = \sqrt{\frac{355}{113}}\,.$$

11. נתון קטע קו באורך RD, הארך אותו לקטע קו באורך $3RD$. בנה אנכים באורך RD מנקודות הקצה של הקטע האמצעי. חבר את קצות האנכים.



12.

$$\frac{355}{113} = 3.14159292\,.$$

Squaring the circle

(*Journal of the Indian Mathematical Society, v, 1913, 138*)

Let PQR be a circle with centre O, of which a diameter is PR. Bisect PO at H and let T be the point of trisection of OR nearer R. Draw TQ perpendicular to PR and place the chord $RS = TQ$.

Join PS, and draw OM and TN parallel to RS. Place a chord $PK = PM$, and draw the tangent $PL = MN$. Join RL, RK and KL. Cut off $RC = RH$. Draw CD parallel to KL, meeting RL at D.

Then the square on RD will be equal to the circle PQR approximately.

For $$RS^2 = \frac{5}{36}d^2,$$

where d is the diameter of the circle.

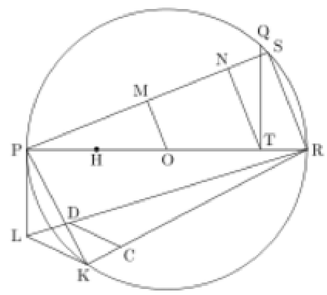
Therefore $$PS^2 = \frac{31}{36}d^2.$$

But PL and PK are equal to MN and PM respectively.

Therefore $$PK^2 = \frac{31}{144}d^2, \text{ and } PL^2 = \frac{31}{324}d^2.$$

Hence $$RK^2 = PR^2 - PK^2 = \frac{113}{144}d^2,$$

and $$RL^2 = PR^2 + PL^2 = \frac{355}{324}d^2.$$



But $$\frac{RK}{RL} = \frac{RC}{RD} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{113}{355}},$$

and $$RC = \frac{3}{4}d.$$

Therefore $$RD = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{355}{113}} = r\sqrt{\pi}, \text{ very nearly.}$$

Note.—If the area of the circle be $140,000$ square miles, then RD is greater than the true length by about an inch.