DIMENSI HAUSDORFF DARI BEBERAPA BANGUN FRAKTAL

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh:
Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo
093114006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2014

DIMENSI HAUSDORFF DARI BEBERAPA BANGUN FRAKTAL

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Program Studi Matematika

oleh:
Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo
093114006

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS SANATA DHARMA
YOGYAKARTA
2014

HAUSDORFF DIMENSION OF SOME FRACTAL FIGURES

An Undergraduate Thesis

Presented as Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of *Sarjana Sains* in Mathematics

by:
Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo
093114006

MATHEMATICS STUDY PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
SANATA DHARMA UNIVERSITY
YOGYAKARTA
2014

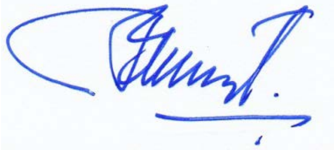
SKRIPSI

DIMENSI HAUSDORFF DARI BEBERAPA BANGUN FRAKTAL

disusun oleh:
Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo
093114006

Telah disetujui oleh:

Pembimbing,



Prof. Dr. Frans Susilo, SJ. Tanggal: 16 Juli 2014

SKRIPSI

DIMENSI HAUSDORFF DARI BEBERAPA BANGUN FRAKTAL

dipersiapkan dan ditulis oleh:
Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo
093114006

Telah dipertahankan di depan Panitia Penguji
pada tanggal 6 Agustus 2014
dan dinyatakan telah memenuhi syarat

Susunan Panitia Penguji

	Nama Lengkap	Tanda Tangan
Ketua	MV. Any Herawati, S.Si., M.Si.	....
Sekretaris	Dr.rer.nat. Herry Pribawanto S., M.Si.	....
Anggota	Prof. Dr. Frans Susilo, SJ	....

Yogyakarta, 15 Agustus 2014
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Sanata Dharma
Dekan,

P. H. Prima Rosa, S.Si., M.Sc.

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA

Saya menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang saya tulis ini tidak memuat karya atau bagian karya orang lain, kecuali yang telah disebutkan dalam kutipan dan daftar pustaka, sebagaimana layaknya karya ilmiah.

Yogyakarta, 16 Juli 2014

Penulis,

Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo

ABSTRAK

Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo. 2014. *Dimensi Hausdorff dari Beberapa Bangun Fraktal*. Skripsi. Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Bangun-bangun fraktal dapat ditemukan di alam sekitar, misalnya bentuk awan, kontur garis pantai, dan musik. Fraktal berasal dari bahasa Latin, yaitu *fractus*. Beberapa sifat yang dipenuhi fraktal adalah struktur yang halus, kesebangunan diri, dan dimensi tidak bulat. Topik yang dibahas dalam skripsi ini adalah dimensi dari bangun-bangun geometri fraktal dan penerapannya dalam penghitungan dimensi dari bangun tersebut.

Dimensi merupakan hal yang penting dalam geometri fraktal. Dimensi ini dinamakan dimensi fraktal. Metode penghitungan dimensi yang dibahas adalah dimensi Hausdorff. Dimensi Hausdorff adalah bilangan real positif s yang memenuhi $\inf\{s|H^s(E) = 0\} = \sup\{s|H^s(E) = \infty\}$ dengan $H^s(E)$ adalah ukuran Hausdorff berdimensi s dari himpunan E. Ukuran tersebut ditentukan dengan mencari infimum dari seluruh jumlahan selimut-δ dari E.

Bangun berdimensi fraktal yang akan dihitung dimensi Hausdorffnya adalah himpunan Cantor, debu Cantor, dan kurva von Koch. Himpunan Cantor terdefinisi pada interval $[0,1]$ dan dikonstruksikan dengan menghilangkan sepertiga bagian tengah setiap interval yang terbentuk. Dimensi Hausdorff dari himpunan Cantor adalah ${}^{\log 2}/_{\log 3}$. Debu Cantor adalah fraktal yang diterapkan pada bidang datar, yaitu persegi. Di setiap tahap konstruksinya setiap persegi yang terbentuk dibagi menjadi 16 persegi yang lebih kecil, lalu menyisakan 4 buah dan menghilangkan yang lain. Debu Cantor berdimensi Hausdorff satu. Kurva von Koch juga terdefinisi pada interval $[0,1]$, tetapi mempunyai prinsip konstruksi yang berbeda dengan himpunan Cantor. Kurva ini dikonstruksikan dengan menghapus sepertiga bagian tengah setiap interval yang terbentuk sebelumnya dan menggantinya dengan dua sisi segitiga dengan panjang yang sama dengan panjang interval yang dihilangkan. Dimensi Hausdorff untuk kurva von Koch adalah ${}^{\log 4}/_{\log 3}$.

ABSTRACT

Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo. 2014. *Hausdorff Dimension of Some Fractal Figures*. An Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Sanata Dharma University, Yogyakarta.

Fractal objects can be found in nature, for example cloud boundaries, coastlines contour, and music. The word fractal comes from Latin word *fractus*. Some properties of fractal objects are fine structure, self-similar, and non-integer dimension. The topics covered in this thesis are dimension of the fractal geometry objects and its application to dimension counting of these objects.

The notion of dimension is central to fractal geometry. It is called fractal dimension. The method in counting a dimension that is discussed is Hausdorff dimension. Hausdorff dimension is a positive real number s satisfying $\inf\{s|H^s(E)=0\} = \sup\{s|H^s(E)=\infty\}$ where $H^s(E)$ is the s-dimensional Hausdorff measure of E. This is determined by taking the infimum of all the sum of δ-cover of E.

Objects with fractal dimension whose Hausdorff dimension is being calculated are Cantor set, Cantor dust, and von Koch curve. Cantor set is defi-ned on interval $[0,1]$ and constructed by deleting the middle third of every obtained interval. Hausdorff dimension of Cantor set is ${}^{\log 2}/_{\log 3}$. Cantor dust is a fractal generated on plane, that is a square. At each stage of its construction each remaining square is divided into 16 smaller squares of which four are kept and the rest discarded. Cantor dust has Hausdorff dimension one. Von Koch curve is also defined on interval $[0,1]$, but has different way of construction with that of Cantor set. This curve is constructed by removing the middle third of every interval obtained before and replacing it by the other two sides of the equilateral triangle based on the removed interval. Hausdorff dimension of the von Koch curve is ${}^{\log 4}/_{\log 3}$.

LEMBAR PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIS

Yang bertandatangan di bawah ini, saya, mahasiswa Universitas Sanata Dharma dengan

Nama : Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo

NIM : 093114006

Demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya memberikan karya ilmiah saya kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma dengan judul

DIMENSI HAUSDORFF DARI BEBERAPA BANGUN FRAKTAL

beserta perangkat yang diperlukan, bila ada. Dengan demikian, saya memberikan hak untuk menyimpan, mengalihkan ke dalam bentuk media lain, mengelolanya dalam bentuk pangkalan data, mendistribusikannya secara terbatas, dan mempublikasikannya di internet atau media lain untuk kepentingan akademis tanpa perlu meminta izin dari saya maupun memberikan royalti kepada saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis kepada Perpustakaan Universitas Sanata Dharma.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya.

Dibuat di Yogyakarta

Pada tanggal 16 Juli 2014

Yang menyatakan,

Yohanes Dimas Nugrahanto Wibowo

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Tuhan, Allah Tritunggal yang Mahakudus atas berkat dan rahmat-Nya, sehingga penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.

Skripsi ini disusun sebagai tugas akademis terakhir untuk menuntaskan masa pendidikan Strata I (S1) dan memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika di Universitas Sanata Dharma.

Penulis sadar bahwa ada pihak-pihak yang membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini. Oleh karena itu, penulis hendak mengucapkan terimakasih kepada mereka semua.

1. Ibu Lusia Krismiyati Budiasih, S.Si., M.Si. yang telah memberikan dukungan yang penulis butuhkan dalam kapasitas beliau sebagai Kaprodi Program Studi Matematika dan Dosen Pembimbing Akademik angkatan 2009.
2. Prof. Dr. Frans Susilo, SJ selaku dosen pembimbing skripsi yang berkenan membimbing penulis dalam penyusunan skripsi dari awal hingga akhir penulisan.
3. Para dosen tetap Program Studi Matematika Universitas Sanata Dharma yang tetap memberikan dukungan dan saran yang berkaitan dengan topik skripsi dan dosen-dosen lain serta seluruh dosen yang telah memberikan pengetahuan selama masa perkuliahan ini.
4. Ibu, Bapak, dan Kakak penulis, pihak keluarga yang telah dan selalu menyemangati penulis setiap saat.
5. Teman-teman angkatan 2009, Yohana Buragoran, Faida Fitria, Yuliana Rosi,

Maria Etik, Sekar Ayuningtyas, Erlika Priyati, Fransiska Dwik, dan Dimas A-di, yang telah berproses bersama selama kuliah dan adik-adik angkatan 2010-2013 yang telah berbagi keceriaan dan sukacita serta keluh-kesah selama penulis menempuh pendidikan di universitas ini.

6. Teman-teman komunitas yang berada di bawah naungan *Campus Ministry* yang selalu bersama penulis selama masa studi.
7. Pihak-pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Ad Maiorem Dei Gloriam. Hanya demi kemuliaan Allah yang lebih besar sajalah tujuan dari penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati meminta saran dan kritik membangun dari pembaca, sehingga tulisan ini tetap mampu memuliakan nama Allah di masa depan. Penulis memohon maaf dari pembaca dengan ketulusan hati atas kekurangannya dan berharap semoga dapat bermanfaat bagi semua pembaca.

Yogyakarta, 16 Juli 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i

HALAMAN JUDUL DALAM BAHASA INGGRIS ii

HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING iii

HALAMAN PENGESAHAN iv

PERNYATAAN KEASLIAN KARYA v

ABSTRAK vi

ABSTRACT vii

PERNYATAAN PERSETUJUAN PUBLIKASI KARYA ILMIAH viii

KATA PENGANTAR ix

DAFTAR ISI xi

DAFTAR GAMBAR xiii

BAB I PENDAHULUAN 1

A. Latar Belakang Masalah 1

B. Rumusan Masalah 5

C. Batasan Masalah 5

D. Tujuan Penulisan 6

E. Manfaat Penulisan 6

F. Metode Penulisan 6

G. Sistematika Penulisan 6

BAB II RUANG METRIK DAN UKURAN 8

A. Ruang Metrik 8

B. Kontinuitas 29

C. Ukuran 34

BAB III UKURAN DAN DIMENSI HAUSDORFF 48

A. Ukuran Hausdorff 48

B. Dimensi Hausdorff 56

BAB IV DIMENSI HAUSDORFF DARI BANGUN BERDIMENSI FRAKTAL 61

A. Bangun Berdimensi Fraktal 61

1. Himpunan Cantor 61

2. Debu Cantor 64

3. Kurva von Koch 66

B. Dimensi Hausdorff dari Bangun Berdimensi Fraktal 69

1. Himpunan Cantor 69

2. Debu Cantor 72

3. Kurva von Koch 72

BAB V PENUTUP 73

A. Kesimpulan 73

B. Saran 74

DAFTAR PUSTAKA 76

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Konstruksi Himpunan Cantor 62

Gambar 2. Konstruksi Debu Cantor 65

Gambar 3. Konstruksi Kurva von Koch 68

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Sejak zaman kuno, matematika dan sains telah dibangun berdampingan satu sama lain, dengan matematika dipakai untuk mendeskripsikan, dan seringkali menjelaskan, fenomena alam dan fisik yang teramati. Hal ini telah berlangsung dengan sukses, bahkan kehidupan modern saat ini dihasilkan dari kesuksesan tersebut. Namun, masih banyak fenomena yang, meskipun diatur oleh hukum alam dasar, dipandang sebagai terlalu tidak biasa atau kompleks untuk dideskripsikan atau dianalisis dengan menggunakan matematika tradisional, antara lain geometri klasik dan kalkulus.

Geometri klasik merupakan salah satu cabang tertua dari matematika. Penyusunannya sudah sejak lama dan menghasilkan penerapan yang luar biasa. Notasi sudut, luasan, dan volume disusun dengan kebutuhan untuk survei dan pembangunan gedung. Geometri klasik membahas bangun-bangun, seperti lingkaran, elips, kubus, atau kerucut. Para filsuf termotivasi oleh aspek estetika dari geometri dan pencarian kesederhanaan dalam struktur geometri dan penerapannya selain memenuhi kebutuhan praktis. Plato (428-348 SM), Euclid (325-265 SM), dan Rene Descartes (1596-1650) memberikan sumbangan yang besar bagi geometri.

Kalkulus yang diperkenalkan oleh Newton dan Leibniz pada paruh kedua abad XVII adalah alat ideal untuk menganalisis benda-benda mulus dan secara cepat menjadi sangat sentral bagi matematika dan sains sehingga mengesampingkan benda-benda yang dikenali sebagai sesuatu yang tidak biasa. Bahkan, banyak fenomena alam diabaikan karena ketidakbiasaan dan kerumitannya sehingga sulit dideskripsikan dalam bentuk matematis yang dapat diatur.

Keadaan ini terus terjadi sampai pada pertengahan era 1960-an ketika studi mengenai gambar tidak biasa mulai dibangun dalam suatu langkah sistematis dan dipelajari secara luas di dalam matematika, seni, dan ekonomi. Hal ini terjadi karena munculnya komputer yang dapat menampilkan gambar tersebut sehingga dapat dilihat keindahan dan kerumitannya. Sebagian besar dari kerja keras ini merupakan sumbangsih dari seorang matematikawan Prancis Benoit Mandelbrot (1924-2010), yang sering dianggap sebagai Bapak Fraktal. Dalam *The Fractal Geometry of Nature*, bukunya yang terbit pada tahun 1982, beliau menulis, "*Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line*" (Falconer, 2013:2).

Ia berpendapat bahwa benda-benda yang terlalu tidak biasa ini seharusnya dipandang sebagai sesuatu yang lazim, daripada sebagai suatu pengecualian, dan lebih lanjut bahwa fenomena-fenomena dari fisika, biologi, keuangan, dan matematika memiliki ketidakbiasaan dari suatu bentuk yang mirip satu sama lain. Mandelbrot memperkenalkan istilah fraktal sebagai deskripsi umum untuk suatu kelompok dari benda-benda tidak biasa dan menggarisbawahi kebutuhan matematika fraktal untuk disusun atau dalam beberapa kasus diperoleh dari karangan-karangan yang terlupakan.

Sejak tahun 1980-an fraktal telah menarik minat yang luas. Secara kasat mata setiap wilayah sains telah dikaji dengan memakai sudut pandang fraktal, dengan geometri fraktal menjadi area yang luas dalam matematika, baik sebagai subjek minat dalam dirinya maupun alat untuk penerapan yang luas. Fraktal juga ditampilkan dengan gambar yang menarik, penuh warna, muncul dalam buku, majalah, dan pameran seni, bahkan dalam film fiksi ilmiah.

Secara umum, fraktal memenuhi sifat, yaitu struktur yang halus, kesebangunan diri, metode geometri dan matematika klasik tidak dapat diterapkan, seberapa besarnya suatu benda bergantung pada ukuran yang dipakai, konstruksi rekursif yang sederhana, penampilan yang alami. Struktur yang halus berarti detail pada setiap skala seberapapun kecilnya. Fraktal berasal dari kata sifat dalam bahasa Latin *fractus*, yang berarti patah.

Konsep kesebangunan adalah ciri yang menonjol dalam geometri klasik. Konsep ini muncul pertama kali dalam tulisan Euclid (300 SM), matematikawan Yunani dan Bapak Geometri. Dua buah bangun di bidang dikatakan sebangun jika memiliki bentuk yang sama, tetapi ukurannya tidak perlu sama besar. Contohnya adalah dua buah segitiga yang besarnya tidak sama akan sebangun jika sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Konsep kesebangunan diri yang terdapat dalam fraktal adalah konsep dengan sifat bahwa suatu bangun dapat dibentuk dari beberapa kopian bentuk tersebut dengan ukuran yang lebih kecil. Sifat kesebangunan diri dapat terlihat jelas pada daun pakis. Apabila dilihat salah satu bagian dari daun pakis tersebut, akan terlihat bentuk yang sebangun dengan bentuk daun secara utuh.

Secara umum, konsep dimensi selalu mengarah pada bilangan bulat seperti yang dimiliki bangun-bangun geometri klasik. Garis lurus, lingkaran, dan kurva mulus berdimensi satu. Bidang datar dan luasan permukaan bola adalah bangun geometri berdimensi dua. Bangun ruang, seperti bola, kubus, dan balok adalah benda berdimensi tiga. Karena fraktal adalah objek yang bentuknya tidak teratur, dimensi bangun tersebut dinyatakan dengan bilangan yang tidak bulat.

Dimensi fraktal adalah sebutan bagi bilangan yang digunakan untuk membandingkan suatu fraktal dengan fraktal lainnya. Struktur yang halus suatu fraktal dapat dipakai untuk mengetahui dimensinya. Akan tetapi, sangat sulit untuk membandingkan dua fraktal dengan dimensi, sehingga dibutuhkan metode tertentu untuk menghitung dimensi fraktal. Salah seorang tokoh yang melakukan penelitian adalah Felix Hausdorff (1868-1942). Penelitian tersebut dipublikasikan pada tahun 1919 dan menghasilkan suatu metode penghitungan dimensi fraktal, yaitu dimensi Hausdorff. Bahkan, dalam tulisan Mandelbrot, fraktal didefinisikan sebagai himpunan yang dimensi Hausdorffnya lebih besar daripada dimensi topologinya.

Dimensi Hausdorff dari himpunan E ditentukan dari ukuran Hausdorff berdimensi s dari himpunan E untuk s adalah bilangan real positif, yaitu $H^s(E)$. Dimensi Hausdorff dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\dim_H(E) = \inf\{s|H^s(E) = 0\} = \sup\{s|H^s(E) = \infty\}$$

dengan $H^s(E) = \lim_{\delta\to 0} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, \{U_i\} \text{ adalah selimut-}\delta \text{ dari } E\right\}$.

Himpunan Cantor adalah salah satu contoh penting dari fraktal. Himpunan ini pertama kali dipublikasikan tahun 1883 oleh Georg Cantor (1845-1918). Himpunan tersebut merupakan himpunan titik-titik takhingga yang berada dalam interval [0.1]. Salah satu teknik yang diperkenalkan Cantor untuk menghasilkan himpunan tersebut adalah dengan membagi tiga interval tersebut dan menghilangkan bagian tengahnya. Setiap interval yang tersisa dibagi tiga dan dihilangkan bagian tengahnya. Hal ini dilakukan berulang-ulang.

Cara lain yang mirip dapat diterapkan pada bidang datar, yaitu persegi. Pertama, persegi dibagi menjadi 16 bagian, kemudian menyisakan 4 bagian dan yang lain dihapus. Langkah ini diterapkan pada setiap persegi yang terbentuk, dan demikian seterusnya. Fraktal ini disebut debu Cantor.

Fraktal berbentuk unik lainnya adalah kurva von Koch. Kurva ini ditemukan pada tahun 1904 oleh seorang matematikawan Swedia bernama Helge von Koch. Kurva ini dibentuk secara rekursif dari sebuah garis lurus. Garis ini dibagi tiga, kemudian mengganti bagian tengahnya dengan segitiga sama sisi dan menghilangkan bagian dasar segitiga, sehingga terbentuk garis yang terdiri atas 4 bagian garis. Langkah ini diulang untuk setiap bagian garis, kemudian diulang lagi untuk setiap bagian yang baru, dan seterusnya.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah, permasalahan yang akan dibahas dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. Apa yang dimaksud dimensi Hausdorff?
2. Bagaimana menghitung dimensi Hausdorff suatu fraktal?

C. Batasan Masalah

Dalam penulisan skripsi ini hanya akan dibahas mengenai dimensi Hausdorff dan penggunaannya dalam menentukan dimensi suatu fraktal. Dimensi fraktal lainnya, seperti dimensi hitung kotak, tidak akan dibahas. Fraktal yang akan ditentukan dimensinya adalah himpunan Cantor, debu Cantor, dan kurva von Koch.

D. Tujuan Penulisan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk memahami dimensi Hausdorff dan penggunaannya untuk menghitung dimensi pada bangun berdimensi fraktal.

E. Manfaat Penulisan

Manfaat dari penulisan ini adalah penulis memperoleh pengetahuan mengenai dimensi Hausdorff dan proses penghitungan dimensi suatu fraktal.

F. Metode Penulisan

Metode yang digunakan penulis adalah metode studi pustaka, yaitu dengan mempelajari buku-buku dan karangan-karangan yang berkaitan dimensi Hausdorff dan metode pengitungannya, sehingga tidak ada hal-hal baru.

G. Sistematika Penulisan

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

B. Rumusan Masalah

C. Batasan Masalah

D. Tujuan Penulisan

E. Manfaat Penulisan

F. Metode Penulisan

G. Sistematika Penulisan

BAB II RUANG METRIK DAN UKURAN

A. Ruang Metrik

B. Kontinuitas

C. Ukuran

BAB III UKURAN DAN DIMENSI HAUSDORFF

A. Ukuran Hausdorff

B. Dimensi Hausdorff

BAB IV DIMENSI HAUSDORFF DARI BANGUN BERDIMENSI FRAKTAL

A. Bangun Berdimensi Fraktal

B. Dimensi Hausdorff dari Bangun Berdimensi Fraktal

BAB V PENUTUP

A. Kesimpulan

B. Saran

DAFTAR PUSTAKA

BAB II

RUANG METRIK DAN UKURAN

Bab ini akan membahas konsep-konsep dasar dan notasi yang akan digunakan dalam pembahasan di bab-bab berikutnya.

A. Ruang Metrik

Jarak antar elemen-elemen dalam suatu himpunan merupakan konsep penting dalam topologi karena dapat dipakai untuk menjelaskan konsep-konsep kekonvergenan, kekontinuan, dan himpunan kompak. Konsep jarak dapat diperumum menjadi metrik.

Definisi 2.1.1

Ruang metrik (X, d) adalah himpunan tidak kosong X yang dilengkapi pemetaan $d: X \times X \to \mathbb{R}$, yang disebut *metrik*, sedemikian sehingga sifat-sifat berikut ini berlaku untuk setiap $x, y, z \in X$:

1) $d(x, y) \geq 0$ (Positivitas)
2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (Ketaksamaan Segitiga)

Elemen-elemen dalam himpunan X disebut *titik*. Notasi $d(x, y)$ dibaca *jarak* dari x ke y.

Contoh 2.1.1

Diketahui $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Akan diperiksa $d(x, y)$ dengan Definisi 2.1 untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$.

1) Berdasarkan sifat nilai mutlak di $\mathbb{R}$ $|x - y| \geq 0$, sehingga $d(x, y) \geq 0$.

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = |x-y| = |-(-x+y)| = |-x+y| = |y-x| = d(y,x)$

4) $d(x,y) = |x-y|$

$$= |x-z+z-y|$$

$$\leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(y,z)$$

$\therefore d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Karena $d(x,y)$ memenuhi definisi tersebut, d adalah metrik di $\mathbb{R}$ dan disebut *metrik biasa* pada $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.1

Misalkan (X_i, d_i) adalah ruang metrik untuk setiap $i = 1, \dots, n$, $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, dan $z = (z_1, \dots, z_n)$. Jarak yang didefinisikan dengan $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$ adalah metrik pada X.

Bukti:

1) Karena nilai akar dan nilai kuadrat selalu lebih besar atau sama dengan nol, maka $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)} \geq 0$. Jadi, $d(x,y) \geq 0$.

2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$d_1^2(x_1, y_1) + \cdots + d_n^2(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$d_1^2(x_1, y_1) = 0, \ldots,$ dan $d_n^2(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow$

$d_1(x_1, y_1) = 0, \ldots,$ dan $d_n(x_n, y_n) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots,$ dan $x_n = y_n \Leftrightarrow$

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow$$

$$x = y.$$

3) $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$$

$$= \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + \cdots + d_n^2(x_n, y_n)}$$

$$= \sqrt{d_1^2(y_1, x_1) + \cdots + d_n^2(y_n, x_n)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(y_i, x_i)}$$

$$= d(y, x)$$

$$\therefore d(x, y) = d(y, x).$$

4) Jumlahan kuadrat tidak dapat negatif. Oleh karena itu, didapat

$$\sum_{i=1}^{n} \left(d_i(x_i, z_i)t + d_i(z_i, y_i)\right)^2 \geq 0$$

untuk setiap bilangan real t. Pertidaksamaan dapat ditulis dalam bentuk $At^2 + 2Bt + C \geq 0$, dengan

$$A = \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i)\,, \quad B = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) d_i(z_i, y_i)\,, \quad C = \sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i, y_i)\,.$$

Karena $A, B, C \geq 0$, maka jika $t = {}^{-B}/_{A}$, akan didapat

$$A\left(-\frac{B}{A}\right)^2 + 2B\left(-\frac{B}{A}\right) + C = \frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C = -\frac{B^2}{A} + C = \frac{-B^2 + AC}{A}$$

Akibatnya, ${}^{(-B^2 + AC)}/_{A} \geq 0 \Leftrightarrow B^2 \leq AC \Leftrightarrow B \leq \sqrt{AC} \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) d_i(z_i, y_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i) \sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i, y_i)} = d(x, z) d(y, z).$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\big(d(x,y)\big)^2 &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) d_i(x_i, y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \big(d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)\big)\big(d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i) + 2d_i(x_i, z_i) d_i(z_i, y_i) + d_i^2(z_i, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, z_i) + 2\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, z_i) d_i(z_i, y_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i^2(z_i, y_i) \\
&\leq \big(d(x,z)\big)^2 + 2d(x,z)d(y,z) + \big(d(y,z)\big)^2 \\
&= \big(d(x,z) + d(y,z)\big)^2
\end{aligned}$$

$\therefore d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ ■

Definisi 2.1.2

Misal $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ adalah ruang metrik. Ruang metrik (X, d) dengan

$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ dan d adalah metrik seperti di Teorema 2.1.1 disebut *ruang perkalian dari ruang-ruang metrik* $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$.

Contoh 2.1.2

Misalkan $(\mathbb{R}, d_i)$ adalah ruang metrik untuk $i = 1, \ldots, n$ dalam Contoh 2.1.1. Berdasarkan Teorema 2.1.1, $\mathbb{R}^n$ dengan $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ membentuk ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d)$ dan metrik d disebut *jarak Euclides berdimensi* n.

Definisi 2.1.3

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. *Diameter* dari himpunan bagian tidak kosong $A \subseteq X$ didefinisikan sebagai $|A| = \sup\{d(x,y) | x, y \in A\}$. Diameter dari himpunan kosong didefinisikan sama dengan 0.

Definisi 2.1.4

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, A adalah himpunan bagian dari X, dan $x \in X$. *Jarak* dari x ke A adalah $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) | a \in A\}$.

Definisi 2.1.5

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, A dan B adalah himpunan bagian dari X. *Jarak* antara A dan B adalah $\text{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Definisi 2.1.6

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik, $x \in X$, dan $\varepsilon > 0$. *Bola terbuka* yang berpusat di x dengan jari-jari ε didefinisikan sebagai $B_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$. *Bola tertutup* di X yang berpusat di x dan dengan jari-jari ε adalah himpunan $B_\varepsilon[x] = \{y \in X | d(x,y) \leq \varepsilon\}$.

Contoh 2.1.3

Diketahui $(\mathbb{R}, d)$ suatu ruang metrik dengan metrik biasa pada $\mathbb{R}$. Bola terbuka pada $\mathbb{R}$ adalah $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} | |x-y| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Bola tertutup pada $\mathbb{R}$ adalah $B_\varepsilon[x] = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Definisi 2.1.7

Untuk suatu ruang metrik (X,d) dan himpunan bagian $A \subseteq X$, titik $x \in X$ disebut *titik interior* dari A jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B_\varepsilon(x) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior dari A, dilambangkan dengan $A°$, disebut *interior* dari A.

Definisi 2.1.8

Untuk suatu ruang metrik (X,d) dan himpunan bagian $A \subseteq X$, titik $x \in X$ disebut *titik limit* dari A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \backslash \{x\} \cap A \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit dari A dilambangkan dengan A'.

Definisi 2.1.9

Untuk suatu ruang metrik (X,d) dan himpunan bagian $A \subset X$, titik $x \in X$ disebut *titik perbatasan* dari A jika setiap bola terbuka berpusat di titik tersebut berpotongan dengan A dan $X \backslash A$. Himpunan semua titik perbatasan dari A, dilambangkan dengan ∂A, disebut *batas* dari A.

Contoh 2.1.4

Misal $(\mathbb{R}, d)$ suatu ruang metrik dengan metrik biasa pada $\mathbb{R}$ dan himpunan bagian dari $\mathbb{R}$, yaitu $A = [a, b)$ dengan $a < b$. Maka $A° = (a, b)$, $A' = [a, b]$, dan $\partial A = \{a, b\}$.

Definisi 2.1.10

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan bagian $A \subseteq X$ disebut *himpunan terbuka* jika semua titik dari A adalah titik interior, yaitu untuk setiap $x \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Teorema 2.1.2

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X adalah himpunan terbuka.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan adalah himpunan terbuka, harus diperlihatkan bahwa setiap titik adalah titik interior dari himpunan tersebut. Harus dibuktikan: "Jika $x \in \emptyset$, maka x adalah titik interior dari $\emptyset$". Karena himpunan $\emptyset$ tidak memuat elemen, anteseden dari implikasi tersebut bernilai salah, sehingga implikasi bernilai benar. Jadi $\emptyset$ terbuka. Sekarang, ambil sebarang $x \in X$. Karena setiap bola terbuka yang berpusat di x termuat di X, maka X terbuka. ■

Teorema 2.1.3

Dalam ruang metrik (X,d), setiap bola terbuka $B_\varepsilon(x)$ adalah himpunan terbuka.

Bukti:

Misalkan $B_\varepsilon(x)$ adalah bola terbuka di X dan titik $y \in B_\varepsilon(x)$. Karena $d(x,y) < \varepsilon$, maka $\delta = \varepsilon - d(x,y) > 0$. Akan ditunjukkan bahwa $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Ambil sebarang titik $z \in B_\delta(y)$, maka $d(z,y) < \delta$. Selanjutnya, $d(z,x) \leq d(z,y) + d(y,x) < \delta + d(x,y) = \varepsilon$. Jadi $z \in B_\varepsilon(x)$, sehingga $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon(x)$. Artinya, y adalah titik interior dari $B_\varepsilon(x)$. Jadi $B_\varepsilon(x)$ terbuka. ■

Teorema 2.1.4

Misalkan (X,d) adalah ruang metrik. Maka

1) Gabungan dari sebarang keluarga himpunan-himpunan terbuka adalah himpunan terbuka.
2) Irisan dari keluarga berhingga himpunan-himpunan terbuka adalah himpunan terbuka.

Bukti:

1) Diberikan A sebarang himpunan dan keluarga himpunan terbuka $\{G_\alpha | \alpha \in A\}$. Akan dibuktikan himpunan $P = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ adalah himpunan terbuka. Jika $p \in P$, maka terdapat $\alpha_0 \in A$ sedemikian sehingga $p \in G_{\alpha_0}$. Karena G_{α_0} terbuka, maka ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B_\varepsilon(p) \subseteq G_{\alpha_0}$. Akan tetapi, $G_{\alpha_0} \subseteq P$, sehingga $B_\varepsilon(p) \subseteq P$. Dengan demikian, p adalah

titik interior dari P. Jadi P adalah himpunan terbuka.

2) Diberikan keluarga berhingga himpunan terbuka $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$. Akan dibuktikan himpunan $Q = \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ adalah himpunan terbuka. Ambil sebarang $q \in Q$, maka $q \in G_k$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$. Karena G_k terbuka, maka untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$ terdapat $\varepsilon_k > 0$ sedemikian sehingga $B_{\varepsilon_k}(q) \subseteq G_k$. Jika diambil $\varepsilon = \min\{\varepsilon_k | k = 1,2, \dots, n\}$, maka $\varepsilon > 0$ dan $B_\varepsilon(q) \subseteq G_k$ untuk setiap $k = 1,2, \dots, n$. Oleh karena itu, $B_\varepsilon(q) \subseteq Q$, sehingga q adalah titik interior dari Q. Jadi Q terbuka. ■

Definisi 2.1.11

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan bagian $A \subseteq X$ dikatakan *tertutup* jika A memuat semua titik limitnya.

Teorema 2.1.5

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan X adalah himpunan tertutup.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan tertutup, harus diperlihatkan bahwa himpunan itu memuat semua titik limitnya. Harus dibuktikan: "Jika x adalah titik limit dari $\emptyset$, maka $x \in \emptyset$". Anteseden dari implikasi bernilai salah, sehingga implikasi tersebut bernilai benar. Jadi $\emptyset$ adalah himpunan tertutup. Himpunan X adalah himpunan semua titik dalam ruang metrik (X, d), sehingga X memuat semua titik limitnya. Jadi X adalah himpunan tertutup. ■

Teorema 2.1.6

Himpunan A dalam ruang metrik (X, d) adalah himpunan terbuka jika dan hanya jika A^C tertutup.

Bukti:

Misalkan A terbuka dan a adalah titik limit dari A^C. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(a)\backslash\{a\} \cap A^C \neq \emptyset$, sehingga a bukanlah titik interior dari A. Karena A terbuka, maka $a \notin A$. Artinya, $a \in A^C$. Jadi A^C adalah himpunan tertutup.

Misalkan A^C adalah himpunan tertutup. Ambil sebarang $b \in A$. Artinya, $b \notin A^C$ dan b bukanlah titik limit dari A^C. Oleh karena itu, terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B_\varepsilon(b) \cap A^C = \emptyset$. Jadi $B_\varepsilon(b) \subseteq A$. Dapat disimpulkan bahwa A terbuka. ∎

Teorema 2.1.7

Dalam ruang metrik (X, d), setiap bola tertutup $B_\varepsilon[x]$ adalah himpunan tertutup.

Bukti:

Misalkan $B_\varepsilon[x]$ adalah bola tertutup di X. Berdasarkan Teorema 2.1.6, akan dibuktikan bahwa $B_\varepsilon[x]^C$ terbuka. Ambil sebarang titik $y \in B_\varepsilon[x]^C$, maka $y \notin B_\varepsilon[x]$. Artinya, $d(x, y) > \varepsilon$, sehingga $\delta = d(x, y) - \varepsilon > 0$. Akan ditunjukkan bahwa $B_\delta(y) \subseteq B_\varepsilon[x]^C$. Ambil sebarang $z \in B_\delta(y)$. Maka $d(z, y) < \delta$. Dengan sifat ketaksamaan segitiga untuk ruang metrik (X, d), yaitu $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, diperoleh $d(x, z) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - \delta = d(x, y) - (d(x, y) - \varepsilon) = \varepsilon$. Jadi $z \notin B_\varepsilon[x]$, sehingga $z \in B_\varepsilon[x]^C$. Jadi $B_\delta(y)$

$\subseteq B_\varepsilon[x]^C$, sehingga $B_\varepsilon[x]^C$ terbuka. Oleh sebab itu, $B_\varepsilon[x]$ adalah himpunan tertutup. ■

Teorema 2.1.8

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Maka

1) Irisan dari sebarang keluarga himpunan-himpunan tertutup adalah himpunan tertutup.
2) Gabungan dari keluarga berhingga himpunan-himpunan tertutup adalah himpunan tertutup.

Bukti:

1) Diberikan A sebarang himpunan dan keluarga himpunan tertutup $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$. Akan dibuktikan himpunan $R = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ adalah himpunan tertutup. Dengan hukum De Morgan, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} {F_\alpha}^C\right)^C = \bigcap_{\alpha \in A} \left({F_\alpha}^C\right)^C = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = R$$

Menurut Teorema 2.1.6 himpunan ${F_\alpha}^C$ terbuka karena F_α tertutup. Berdasarkan Teorema 2.1.4-(1), $\bigcup_{\alpha \in A} {F_\alpha}^C$ terbuka. Oleh karena itu, menurut Teorema 2.1.6 $\left(\bigcup_{\alpha \in A} {F_\alpha}^C\right)^C = R$ tertutup.

2) Diberikan keluarga berhingga himpunan tertutup $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$. Akan dibuktikan himpunan $S = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ adalah himpunan tertutup. Dengan hu-

kum De Morgan, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} {F_k}^C\right)^C = \bigcup_{k=1}^{n} ({F_k}^C)^C = \bigcup_{k=1}^{n} F_k = S$$

Menurut Teorema 2.1.6 himpunan ${F_k}^C$ terbuka karena F_k tertutup. Menurut Teorema 2.1.4-(2), $\bigcap_{k=1}^{n} {F_k}^C$ terbuka. Oleh karena itu, menurut Teorema 2.1.6 $\left(\bigcap_{k=1}^{n} {F_k}^C\right)^C = S$ tertutup. ■

Definisi 2.1.12

Jika (X, d) adalah ruang metrik dan $A \subseteq X$, maka himpunan $\bar{A} = A \cup A'$ disebut *penutup* dari A.

Contoh 2.1.5

Misal $(\mathbb{R}, d)$ suatu ruang metrik dengan metrik biasa pada $\mathbb{R}$. Maka penutup untuk himpunan dalam Contoh 2.1.4 adalah $\bar{A} = [a, b]$.

Teorema 2.1.9

Misal A dan B adalah sebarang himpunan dalam ruang metrik (X, d). Maka

1) $\bar{A}$ tertutup.
2) $A = \bar{A}$ jika dan hanya jika A tertutup.
3) Jika $A \subseteq B$, maka $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.
4) $\bar{A}$ adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A.
5) $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A.

Bukti:

1) Pembuktian dengan menggunakan Teorema 2.1.6. Ambil sebarang $x \in \bar{A}^{C}$. Karena $x \notin \bar{A}$, maka $x \notin A$ dan $x \notin A'$. Dengan demikian, ada $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $B_{\varepsilon}(x) \cap A = \emptyset$. Sekarang, ambil sebarang $y \in B_{\varepsilon}(x)$, maka $y \notin A$. Berdasarkan Teorema 2.1.3, $B_{\varepsilon}(x)$ terbuka. Jadi ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga $B_{\delta}(y) \subseteq B_{\varepsilon}(x)$. Akibatnya, $B_{\delta}(y) \cap A = \emptyset$, sehingga $y \notin A'$. Artinya, $y \notin A \cup A' = \bar{A}$, yaitu $y \in \bar{A}^{C}$. Dengan demikian, $B_{\delta}(y) \subseteq \bar{A}^{C}$. Oleh karena itu, $\bar{A}^{C}$ adalah himpunan terbuka. Jadi $\bar{A}$ tertutup

2) ($\rightarrow$) Jika $A = \bar{A}$, maka berdasarkan Teorema 2.1.9-(1) A tertutup.

   ($\leftarrow$) Jika A tertutup, maka menurut Definisi 2.1.11 $A' \subseteq A$. Dengan memakai Definisi 2.1.12 dan fakta bahwa $A' \subseteq A$, maka $\bar{A} = A \cup A' = A$.

3) Ambil sebarang $x \in \bar{A}$, maka $x \in A$ atau $x \in A'$. Jika $x \in A$ dan $A \subseteq B$, maka $x \in B$. Karena $B \subseteq \bar{B}$, maka $x \in \bar{B}$. Jadi $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

4) Misalkan F adalah irisan dari semua himpunan tertutup yang memuat A. Jadi $A \subseteq F$, sehingga $\bar{A} \subseteq \bar{F}$. Akan tetapi, menurut Teorema 2.1.8-(1) F tertutup. Oleh karena itu, $\bar{F} = F$, sehingga $\bar{A} \subseteq F$. Karena $\bar{A}$ tertutup dan $A \subseteq \bar{A}$, maka $F \subseteq \bar{A}$. Jadi $\bar{A} = F$.

5) Himpunan $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup yang memuat A dan $\bar{A} \subseteq F$. Berarti $\bar{A}$ termuat dalam semua himpunan tertutup yang memuat A. Jadi $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A. ■

Teorema 2.1.10

Jika $\{E_{\alpha} | \alpha \in A\}$ adalah keluarga himpunan dalam ruang metrik (X, d), maka

1) $\overline{\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} \overline{E_\alpha}$.

2) $\bigcup_{\alpha\in A} \overline{E_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha}$.

3) Jika A berhingga, maka $\overline{\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in A} \overline{E_\alpha}$.

Bukti:

1) Untuk sebarang $\alpha \in A$, berlaku $\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha \subseteq E_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha$. Maka menurut Teorema 2.1.9-(3) $\overline{\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha} \subseteq \overline{E_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha}$ untuk setiap $\alpha \in A$. Akibatnya, $\overline{\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha} \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} \overline{E_\alpha}$.

2) Dengan menggunakan pembuktian sebelumnya, akan diperoleh $\bigcup_{\alpha\in A} \overline{E_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha}$.

3) Misalkan $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ adalah keluarga berhingga himpunan. Akan dibuktikan $\overline{\bigcup_{j=1}^{n} E_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}$. Berdasarkan Teorema 2.1.10-(2) $\bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^{n} E_j}$. Berdasarkan Definisi 2.1.11 $E_j \subseteq \overline{E_j}$ untuk setiap $j = 1, \dots, n$, sehingga $\bigcup_{j=1}^{n} E_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}$. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.1.9-(3) $\overline{\bigcup_{j=1}^{n} E_j} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}}$. Karena $\overline{E_j}$ tertutup, maka berdasarkan Teorema 2.1.8-(2)

$\bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}$ tertutup, sehingga $\overline{\bigcup_{j=1}^{n} E_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}$. Jadi $\overline{\bigcup_{j=1}^{n} E_j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{E_j}$. Dengan demikian, terbukti kesamaan dua himpunan tersebut. ■

Definisi 2.1.13

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik. Himpunan $D \subseteq X$ dikatakan *rapat* di X jika $\overline{D} = X$.

Definisi 2.1.14

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik (X, d) dikatakan *konvergen* ke titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$. Titik x disebut *limit* barisan $\langle x_n \rangle$ dan dapat ditulis $x_n \to x$ atau $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Barisan $\langle x_n \rangle$ yang tidak konvergen disebut barisan *divergen*.

Contoh 2.1.6

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $x_n = {}^1/_n$ dan d adalah metrik biasa. Akan dibuktikan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke 0. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga ${}^1/_N < \varepsilon$. Oleh karena itu, jika $n \geq N$, maka akan didapat ${}^1/_n \leq {}^1/_N < \varepsilon$. Akibatnya, jika $n \geq N$, maka $|{}^1/_n - 0| = {}^1/_n < \varepsilon$.

Teorema 2.1.11

Limit suatu barisan dalam ruang metrik (X, d) adalah tunggal.

Bukti:

Misalkan suatu barisan $\langle x_n \rangle$ memiliki limit x dan y yang berbeda. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat k dan l sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon/_2$ untuk setiap $n \geq k$ dan $d(x_n, y) < \varepsilon/_2$ untuk setiap $n \geq l$. Oleh karena itu, jika $m \geq$ maks $\{k, l\}$, maka dengan ketaksamaan segitiga didapat $d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < \varepsilon/_2 + \varepsilon/_2 = \varepsilon$. Karena $d(x, y) < \varepsilon$ berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $d(x, y) = 0$. Jadi $x = y$. ■

Definisi 2.1.15

Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan di ruang metrik (X, d) dan $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ disebut *subbarisan* dari $\langle x_n \rangle$.

Contoh 2.1.7

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $x_n = {}^1/_n$ dan d adalah metrik biasa. Nilai-nilai berindeks genap dalam barisan tersebut dapat membentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_{n_k} = {}^1/_{2k}$. Barisan ini adalah subbarisan dari $\langle x_n \rangle$.

Definisi 2.1.16

Barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik (X, d) disebut *barisan Cauchy* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$ dan $m \geq N$.

Contoh 2.1.8

Misalkan barisan $\langle x_n \rangle$ di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $x_n = {}^1/_n$ dan d adalah metrik biasa. Akan diperlihatkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ ada $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $1/N < \varepsilon$. Untuk setiap $n \geq N$ dan $m \geq N$ dan dimisalkan $n \geq m$, berlaku $d(x_n, x_m) = d(1/n, 1/m) = |1/n - 1/m| = 1/m - 1/n < 1/m < 1/N < \varepsilon$. Jadi barisan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.1.12

Setiap barisan konvergen di ruang metrik (X, d) adalah barisan Cauchy.

Bukti:

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x dan $\varepsilon > 0$. Berdasarkan Definisi 2.1.14 ada bilangan bulat N sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq N$. Oleh karena itu, untuk setiap setiap $n, m \geq N$ dan dengan ketaksamaan segitiga didapat $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Jadi $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy. ■

Definisi 2.1.17

Suatu ruang metrik (X, d) disebut *lengkap* jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X.

Contoh 2.1.9

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik biasa adalah ruang metrik lengkap. Misalkan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n, m \geq N$. Akibatnya, akan diperoleh $|x_n - x_N| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq N$. Jadi untuk setiap $n \geq N$, $x_n \in \left(x_N - {}^{\varepsilon}/_{2}, x_N + {}^{\varepsilon}/_{2}\right)$. Oleh karena itu,

1) Untuk semua $n \geq N$, akan didapat $x_n \geq x_N - {}^{\varepsilon}/_{2}$.
2) Jika $x_n \geq x_N + {}^{\varepsilon}/_{2}$, maka $n \in \{1,2,\dots,N-1\}$. Himpunan dari n tersebut sedemikian sehingga $x_n \geq x_N + {}^{\varepsilon}/_{2}$ adalah himpunan berhingga.

Diberikan $S = \{x \in \mathbb{R} | \text{ada takhingga banyak } n \text{ sedemikian sehingga } x_n \geq x\}$. Jika diambil $\varepsilon = 1$, maka dari 1) didapat $x_N - {}^{1}/_{2} \in S$. Jadi S tidak kosong. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $x_N + {}^{1}/_{2}$ adalah batas atas dari S. Andaikan $x_N + {}^{1}/_{2}$ bukan batas atas dari S. Maka ada $y \in S$ sedemikian sehingga $y > x_N + {}^{1}/_{2}$ dan $x_n \geq y$ untuk takhingga banyak n. Akibatnya, $x_n > x_N + {}^{1}/_{2}$ untuk takhingga banyak n dan kontradiksi dengan 2). Jadi $x_N + {}^{1}/_{2}$ adalah batas atas dari S. Karena S mempunyai batas atas, maka S memiliki batas atas terkecil, misalkan $L = \sup S$. Akan diperlihatkan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena L adalah batas atas dari S dan $x_N - {}^{\varepsilon}/_{2} \in S$, maka $x_N - {}^{\varepsilon}/_{2} \leq L$. Karena $L = \sup S$, maka $x_N + {}^{\varepsilon}/_{2} \geq L$. Jadi $x_N - {}^{\varepsilon}/_{2} \leq L \leq x_N + {}^{\varepsilon}/_{2} \Leftrightarrow |x_N - L| < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Untuk setiap $n \geq N$ didapat $|x_n - L| \leq |x_n - x_N| + |x_N - L| < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$. Jadi $\langle x_n \rangle$ konvergen ke L. Terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik lengkap.

Contoh 2.1.10

Himpunan $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x \leq 1\}$ dengan metrik biasa adalah ruang metrik tidak lengkap. Misalkan $\langle x_n \rangle$ dengan $x_n = {}^{1}/_{n}$. Dalam Contoh 2.1.6 telah ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy yang konvergen ke 0, tetapi $0 \notin A$. Jadi $\langle x_n \rangle$ divergen.

Definisi 2.1.18

Diberikan himpunan E di ruang metrik (X, d). Suatu *selimut terbuka* dari E adalah suatu keluarga $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \alpha \in A\}$ dari himpunan-himpunan terbuka dalam X sedemikian sehingga $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jika $\mathcal{H}$ adalah subkeluarga dari $\mathcal{G}$ sedemikian sehingga gabungan semua himpunan dalam $\mathcal{H}$ juga memuat E, maka $\mathcal{H}$ disebut *subselimut* dari $\mathcal{G}$. Jika $\mathcal{H}$ adalah subkeluarga berhingga dari $\mathcal{G}$, maka $\mathcal{H}$ dinamakan *subselimut berhingga* dari $\mathcal{G}$.

Definisi 2.1.19

Himpunan $K \subseteq X$ dikatakan *kompak* jika setiap selimut terbuka dari K mempunyai subselimut berhingga.

Contoh 2.1.11

Diberikan $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di ruang metrik (X, d). Jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \alpha \in A\}$ adalah selimut terbuka dari K, maka untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ terdapat $\alpha_i \in A$ sedemikian sehingga $x_i \in G_{\alpha_i}$. Akibatnya, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. Oleh karena itu, keluarga himpunan $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{G}$. Jadi K kompak.

Contoh 2.1.12

Misalkan $H = [0, \infty)$ di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ himpunan terbuka $G_n = (-1, n)$, maka $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Jadi $\mathcal{G} = \{G_n | n \in \mathbb{N}\}$ adalah selimut terbuka dari H. Namun, jika $\{G_{n_i} | i = 1, \dots, k\}$ adalah subkeluarga dari $\mathcal{G}$ dan $m = \text{maks}\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, maka $G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup \dots \cup G_{n_k} = G_m = (-1, m)$. Gabungan tersebut tidak memuat H. Oleh karena itu, tidak ada subkeluarga dari $\mathcal{G}$ yang gabungannya memuat H. Jadi H tidak kompak.

Teorema 2.1.13

Setiap himpunan bagian tertutup dari ruang metrik yang kompak adalah himpunan kompak.

Bukti:

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ yang kompak dan K himpunan bagian tertutup dari X. Misalkan $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \alpha \in A\}$ adalah selimut terbuka dari himpunan bagian tertutup K, yaitu $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat koleksi berhingga dari $\mathcal{G}$ yang juga merupakan selimut terbuka dari K. Karena K tertutup, maka K^C terbuka. Akibatnya, $\mathcal{G} \cup K^C$ adalah selimut terbuka dari X. Karena X kompak, maka terdapat subselimut berhingga dari X. Jadi $X \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}\right) \cup K^C$. Karena $K \subseteq X$, maka $K \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}\right) \cup K^C$. Namun, K^C tidak memuat K, sehingga $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$. Jadi terbukti bahwa setiap himpunan bagian tertutup dari ruang metrik yang kompak adalah himpunan kompak. ∎

Definisi 2.1.20

Himpunan bagian tidak kosong A dalam ruang metrik (X, d) dikatakan *terbatas* jika terdapat bilangan real M dan titik $y \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$, $d(x, y) < M$.

Teorema 2.1.14

Himpunan bagian yang kompak dari ruang metrik (X, d) adalah himpunan yang tertutup dan terbatas.

Bukti:

Diberikan $K \subseteq X$ adalah himpunan bagian yang kompak. Akan dibuktikan bahwa K^C terbuka. Ambil sebarang $p \in K^C$, maka untuk setiap $q \in K$ dipilih $\varepsilon_q = {d(p,q)}/{3} > 0$, sehingga $B_{\varepsilon_q}(p) \cap B_{\varepsilon_q}(q) = \emptyset$. Keluarga $\mathcal{G} = \left\{B_{\varepsilon_q}(q) \middle| q \in K\right\}$ adalah selimut terbuka dari K. Karena K kompak, maka terdapat $q_1, q_2, \dots, q_n$ sedemikian sehingga $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{q_i}}(q_i)$. Berdasarkan Teorema 2.1.4-(2) $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_{\varepsilon_{q_i}}(p)$ adalah himpunan terbuka yang memuat p. Akibatnya, $B \subseteq K^C$. Dengan demikian, K^C terbuka. Jadi berdasarkan Teorema 2.1.6, K tertutup.

Misalkan $\{B_1(x_i) | i = 1,2, \dots\}$ adalah selimut terbuka dari K. Karena K

kompak, maka terdapat subselimut berhingga $\{B_1(x_i) | i = 1, \dots, n\}$ yang memuat K. Dipilih $y \in X$ sedemikian sehingga $d(x_i, y) < m_i$ untuk $i = 1, \dots, n$. Jika $M = \text{maks}\{m_1, \dots, m_n\}$, maka untuk setiap $x \in K$ didapat $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) \leq 1 + M$. Terbukti bahwa K terbatas. ∎

Teorema 2.1.15

Setiap himpunan bagian kompak dari ruang metrik (X, d) merupakan himpunan lengkap.

Bukti:

Diberikan barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ dalam himpunan T yang kompak, misalkan E adalah himpunan titik-titik $\{x_n\}$ dari barisan Cauchy tersebut. Jika E berhingga, maka $\langle x_n \rangle$ konvergen ke salah satu titik di E. Oleh karena itu, $\langle x_n \rangle$ konvergen di T. Akan dibuktikan bahwa jika E takhingga, maka E mempunyai titik limit. Andaikan untuk setiap $x \in X$, x bukan titik limit E, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $(B_\varepsilon(x) \backslash \{x\}) \cap E = \emptyset$. Misalkan $\{B_\varepsilon(x) | x \in T\}$ adalah selimut terbuka dari T. Karena T kompak, maka terdapat subselimut berhingga yang memuat T. Karena $E \subseteq T$, maka subselimut tersebut juga memuat E. Namun, untuk setiap $x \in E$, $B_\varepsilon(x)$ memuat tepat satu titik x, sehingga selimut terbuka dari E terdiri atas takhingga banyak bola terbuka. Oleh karena itu, timbul kontradiksi. Jadi E mempunyai titik limit $x \in X$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x_m) < {}^{\varepsilon}/_{2}$ untuk setiap $n \geq N$ dan $m \geq N$. Karena $B_{\varepsilon/2}(x_m)$ memuat titik $x_m \in E$ dengan

$m \geq N$, maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x) < {}^{\varepsilon}/_{2} + {}^{\varepsilon}/_{2} = \varepsilon$. Dengan demikian, $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x. Terbukti bahwa T adalah himpunan lengkap. ∎

B. Kontinuitas

Kontinuitas merupakan konsep penting dalam pembahasan mengenai fungsi. Fungsi yang akan dibahas adalah fungsi dari ruang metrik ke ruang metrik yang lain. Pembahasan diawali dari definisi fungsi kontinu di suatu titik, kemudian kontinu pada suatu himpunan, serta penerapan kekontinuan untuk fungsi Lipschitz. Pembahasan diakhiri dengan membahas proyeksi ke-n pada suatu ruang metrik.

Definisi 2.2.1

Misalkan (X, d_X) dan (Y, d_Y) adalah ruang metrik. Fungsi $f: X \to Y$ adalah *fungsi kontinu di* $p \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehing-ga $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$ untuk setiap $x \in X$ yang memenuhi $d_X(x, p) < \delta$. Jika f kontinu di setiap titik dari himpunan $A \subseteq X$, maka dikatakan f *kontinu pada* A.

Contoh 2.2.1

Misal ruang metrik $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$. Akan ditunjukkan bahwa f kontinu pada $\mathbb{R}$. Ambil sebarang $c \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Akan dibentuk $|f(x) - c^2| = |x^2 - c^2| < \varepsilon$ dengan mengambil x yang cukup dekat dengan c. Misal $\delta = 1$, maka untuk $|x - c| < 1$, akan didapat

$$|x + c| = |x - c + 2c| \leq |x - c| + |2c| < 1 + |2c|.$$

Selain itu, jika $|x-c|<1$, maka

$$|x^2-c^2| = |(x-c)(x+c)| = |x-c||x+c| < |x-c|(1+|2c|) < \varepsilon$$

dan akan diperoleh $|x-c| < {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)}$. Akibatnya, jika dipilih $\delta = \min\left\{1, {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)}\right\}$, maka untuk setiap x yang memenuhi $|x-c|<\delta$ berlaku

1) Untuk $\delta = 1 \leq {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)}$

   $|f(x)-c^2| = |x^2-c^2| = |x-c||x+c| < \delta(1+|2c|) = 1(1+|2c|)$

   $\leq {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)}\,(1+|2c|) = \varepsilon$, dan

2) Untuk $\delta = {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)} \leq 1$

   $|f(x)-c^2| = |x^2-c^2| = |(x-c)(x+c)| = |x-c||x+c| <$

   $\delta(1+|2c|) = {}^{\varepsilon}/_{(1+|2c|)}\,(1+|2c|) = \varepsilon.$

Definisi 2.2.2

Misalkan fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y). Fungsi f dikatakan *kontinu seragam pada* X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $d_X(x,y) < \delta$.

Teorema 2.2.1

Jika fungsi f dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) kontinu seragam pada X, maka f kontinu pada X.

Bukti:

Jika f kontinu seragam pada X, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ untuk setiap $x, y \in X$ yang memenuhi $d_X(x, y) < \delta$. Artinya, f kontinu di setiap titik $y \in X$ untuk setiap $x \in X$. Dengan demikian, f kontinu pada X. ■

Contoh 2.2.2

Misal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi suatu ruang metrik $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa. Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = c$ adalah fungsi kontinu seragam. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat dipilih $\delta > 0$, misal $\delta = 1$. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Contoh 2.2.3

Akan ditunjukkan bahwa fungsi yang didefinisikan $f(x) = {}^1\!/_x$ pada ruang metrik $\mathbb{R}$ dengan metrik biasa tidak kontinu seragam. Misalkan $\varepsilon = 2$, ma-ka untuk sebarang $\delta > 0$ dapat dipilih $x, y \in \mathbb{R}$, yaitu $x = n + {}^1\!/_n$ dan $y = n$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Jika $n \to \infty$, maka $|x - y| = \left|{}^1\!/_n\right| < \delta$ dan $|f(x) - f(y)| = \left|\left(n + {}^1\!/_n\right)^2 - n^2\right| = \left|n^2 + 2 + \left({}^1\!/_n\right)^2 - n^2\right| = 2 + \left({}^1\!/_n\right)^2 \geq 2 = \varepsilon$.

Definisi 2.2.3

Untuk suatu ruang metrik (X, d_X) dan (Y, d_Y), $f: X \to Y$ adalah *fungsi Lipschitz* jika terdapat konstanta $c > 0$ sedemikian sehingga

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq c d_X(x, y)$$

untuk setiap $x, y \in X$. Fungsi f disebut *fungsi Lipschitz berpangkat* α dengan

$0 < \alpha \leq 1$ jika memenuhi pertidaksamaan berikut

$$d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq c d_X^\alpha(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

Konstanta c disebut *konstanta Lipschitz*.

Contoh 2.2.4

Akan ditunjukkan bahwa $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$ adalah fungsi Lipschitz. Ambil sebarang $x, y \in [0, b]$, maka $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2b|x - y|$ dan $c = 2b > 0$.

Teorema 2.2.2

Setiap fungsi Lipschitz berpangkat α dari ruang metrik (X, d_X) ke ruang metrik (Y, d_Y) adalah fungsi kontinu seragam.

Bukti:

Misalkan f suatu fungsi Lipschitz berpangkat α dengan konstanta Lipschitz $c > 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat dipilih $\delta = (\varepsilon/c)^{1/\alpha} > 0$ dengan $c > 0$. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $d_X(x, y) < \delta$, $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq c d_X^\alpha(x, y) < c\left((\varepsilon/c)^{1/\alpha}\right)^\alpha = \varepsilon$. Jadi f kontinu seragam. ■

Definisi 2.2.4

Misalkan (X, d) adalah ruang perkalian dari ruang-ruang metrik (X_1, d_1), ..., (X_n, d_n) dengan $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$. Untuk setiap $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, *proyeksi ke i* adalah fungsi $\pi_i: X \to X_i$ dengan $\pi_i(x) = x_i$.

Teorema 2.2.3

Untuk $i = 1, \dots, n$ proyeksi ke i adalah fungsi Lipschitz.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in X$. Untuk setiap $i = 1, \dots, n$, dipenuhi pertidaksamaan berikut

$$d_{X_i}^2\big(\pi_i(x), \pi_i(y)\big) = d_i^2(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i) = d_X^2(x, y)$$

Jadi terdapat $c = 1 > 0$ sedemikian sehingga $d_{X_i}^2\big(\pi_i(x), \pi_i(y)\big) \leq c d_X^2(x, y)$ yang ekivalen dengan $d_{X_i}\big(\pi_i(x), \pi_i(y)\big) \leq c d_X(x, y)$. Dengan demikian, proyeksi ke i adalah fungsi Lipschitz. ■

Contoh 2.2.5

Dalam ruang perkalian $\mathbb{R}^n$ dengan metrik jarak Euclides berdimensi n dan $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, fungsi $\pi_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan $\pi_i(x) = x_i$ untuk $i = 1, \dots, n$ adalah proyeksi ke i. Jumlah proyeksi yang terbentuk adalah n buah.

Contoh 2.2.6

Untuk $n = 2$ terdapat dua proyeksi $\pi_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, yaitu $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ dan $\pi_2(x_1, x_2) = x_2$. Berdasarkan Teorema 2.2.3, kedua proyeksi tersebut adalah fungsi Lipschitz.

C. Ukuran

Ukuran dari suatu himpunan adalah suatu pemetaan yang memasangkan setiap himpunan bagian dari himpunan tersebut ke suatu bilangan. Secara intuitif ukuran dapat diinterpretasikan sebagai seberapa besar suatu himpunan. Jadi ukuran adalah generalisasi dari konsep panjang, luas, dan volume.

Pendefinisian ukuran suatu himpunan didasarkan pada pendefinisian himpunan semua himpunan bagian dari himpunan itu, yang disebut himpunan terukur. Himpunan tersebut diperlukan untuk membentuk aljabar-σ. Artinya, gabungan terbilang, irisan terbilang, dan komplemen dari himpunan bagian terukur bersifat terukur.

Definisi 2.3.1

Misalkan $\mathcal{G}$ adalah keluarga himpunan bagian dari X. Keluarga $\mathcal{G}$ disebut *aljabar* jika

1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$,
2) Jika $A \in \mathcal{G}$, maka $X \backslash A \in \mathcal{G}$, dan
3) Jika $A, B \in \mathcal{G}$, maka $A \cup B \in \mathcal{G}$.

Definisi 2.3.2

Keluarga $\mathcal{G}$ yang terdiri dari himpunan bagian dari X disebut *aljabar-*σ jika

1) $\emptyset, X \in \mathcal{G}$
2) Jika $A \in \mathcal{G}$, maka $X \backslash A \in \mathcal{G}$
3) Jika $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan-himpunan di $\mathcal{G}$, maka $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

Pasangan terurut $(X, \mathcal{G})$ disebut *ruang terukur*.

Contoh 2.3.1

Untuk suatu himpunan X, keluarga $\{\emptyset, X\}$ dan himpunan kuasa $\mathcal{P}(X)$ adalah aljabar-σ dari himpunan bagian dari X.

Teorema 2.3.1

Misalkan $\mathcal{G}$ adalah suatu aljabar-σ dan $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan-himpunan di $\mathcal{G}$.

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

2) Terdapat barisan $\langle B_n \rangle \in \mathcal{G}$ dari himpunan saling asing, sedemikian sehingga $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}$.

Bukti:

1) Berdasarkan Definisi 2.3.2-2), ${A_n}^C \in \mathcal{G}$, sehingga dengan Definisi 2.3.2-3) didapat $\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^C \in \mathcal{G}$. Oleh karena itu, dengan Definisi 2.3.2-2) diperoleh $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} {A_n}^C\right)^C \in \mathcal{G}$.

2) Dimisalkan barisan $\langle B_n \rangle$ dengan $B_1 = A_1$ dan $B_n = A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ untuk $n \geq 2$. Akan dibuktikan dengan induksi bahwa

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Pernyataan benar untuk $n = 1$ karena $B_1 = A_1$. Selanjutnya, diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$, yaitu $\bigcup_{n=1}^{k} B_n = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$. Maka untuk $n = k + 1$ didapat

$$\bigcup_{n=1}^{k+1} B_n = \left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right) \cup B_{k+1}$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \cup \left(A_{k+1} \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)\right)$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \cup \left(A_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)^{C}\right)$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \cup A_{k+1}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{k+1} A_n .$$

Dengan demikian, pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Akan diperlihatkan bahwa $\langle B_n \rangle$ adalah barisan himpunan-himpunan saling asing. Andaikan B_n dan B_m dengan $n \neq m$ dan $n < m$. Karena $B_m = A_m \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1})$ dan $n < m$, maka $A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1} = B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1} \supseteq B_n$. Jadi $B_n \cap B_m = \emptyset$. ■

Definisi 2.3.3

Misalkan $\mathcal{G}$ adalah suatu aljabar-σ. Fungsi $\mu: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ disebut *ukuran* pada X jika memenuhi

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) Untuk setiap $A \in \mathcal{G}$, $\mu(A) \geq 0$
3) μ bersifat *aditif terbilang*, yaitu jika $\langle A_n \rangle$ adalah barisan dari himpunan saling asing di $\mathcal{G}$, maka $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Pasangan terurut $(X, \mathcal{G}, \mu)$ disebut *ruang ukuran*.

Teorema 2.3.2

Misal μ adalah ukuran yang terdefinisi pada aljabar-σ $\mathcal{G}$.

1) Jika $A, B \in \mathcal{G}$ dan $A \subseteq B$, maka $\mu(A) \leq \mu(B)$. Jika $\mu(A) < +\infty$, maka $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$. Sifat ini disebut *sifat monoton* dari ukuran μ.
2) Jika $\langle A_n \rangle$ adalah barisan himpunan bagian dari $\mathcal{G}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Sifat ini disebut sifat *subaditif terbilang* dari ukuran μ.

Bukti:

1) Ambil sebarang $A, B \in \mathcal{G}$ sedemikian sehingga $A \subseteq B$. Karena $B = A \cup (B \backslash A)$ dan $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, maka berlaku bahwa $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$. Karena $\mu(B \backslash A) \geq 0$, maka $\mu(B) \geq \mu(A)$. Jika $\mu(A) < +\infty$, maka $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$, sehingga $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
2) Diberikan barisan himpunan bagian $\langle A_n \rangle$. Misalkan $B_1 = A_1$ dan $B_n = A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ untuk $n \geq 2$. Maka $B_n \subseteq A_n$. Berdasarkan Teorema 2.3.1-2), $\langle B_n \rangle$ adalah barisan himpunan saling asing di $\mathcal{G}$ dan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Dengan memakai sifat monoton dan aditif terbilang dari μ, didapat

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) . \qquad \blacksquare$$

Definisi 2.3.4

Ukuran luar dari suatu himpunan $B \subseteq X$ adalah bilangan real taknegatif

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}$$

dengan $\langle E_n \rangle$ adalah barisan himpunan di $\mathcal{G}$.

Teorema 2.3.3

Fungsi dalam Definisi 2.3.4 memenuhi sifat-sifat berikut ini.

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

2) $\mu^*(B) \geq 0$ untuk setiap $B \subseteq X$

3) Jika $A \subseteq B$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Sifat monoton)

4) $\mu^*(B) = \mu(B)$ untuk setiap $B \in \mathcal{G}$

5) Jika $\langle B_n \rangle$ adalah barisan himpunan bagian dari X, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)\,.$$

Sifat ini disebut sifat *subaditif terbilang*.

Bukti:

1) Diberikan $E_n = \emptyset$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka $\emptyset \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, sehingga

$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\right\} = 0$ karena $\mu(E_n) = 0$ untuk setiap n. Jadi $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2) Menurut Definisi 2.3.3, $\mu(E_n) \geq 0$ untuk setiap $n = 1,2,\ldots$. Akibatnya,

$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\right\} \geq 0$. Jadi $\mu^*(B) \geq 0$.

3) Misalkan $A \subseteq B$. Ambil sebarang $\langle E_n \rangle$ sedemikian sehingga $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Maka, $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Akibatnya, $\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \middle| A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\}$

$\leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \middle| B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right\} = \mu^*(B)$. Jadi $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

4) Karena $\{B, \emptyset, \emptyset, \dots\}$ adalah koleksi terbilang himpunan di $\mathcal{G}$ yang gabungannya memuat B, maka berlaku $\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\right\} \leq \mu(B) + 0 + 0 + \cdots = \mu(B)$, yaitu $\mu^*(B) \leq \mu(B)$. Sebaliknya, ambil sebarang barisan $\langle E_n \rangle$ dari $\mathcal{G}$ dengan $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Maka $B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap E_n)$. Karena μ adalah ukuran pada $\mathcal{G}$, maka diperoleh $\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B \cap E_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Akibatnya, $\mu(B) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\right\} = \mu^*(B)$. Jadi $\mu(B) \leq \mu^*(B)$.

5) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap n dipilih barisan $\langle E_k^n \rangle$ dari himpunan di $\mathcal{G}$ sedemikian sehingga

$$B_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^n) \leq \mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Karena $\{E_k^n | n, k \in \mathbb{N}\}$ adalah koleksi terbilang himpunan-himpunan dari

$\mathcal{G}$ yang gabungannya memuat $\bigcup B_n$, maka didapat

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \varepsilon.$$

Jadi $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$. ■

Contoh 2.3.2

Sel I di $\mathbb{R}^n$ adalah $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ dengan $I_p = [a_p, b_p]$ adalah interval berhingga di $\mathbb{R}$. Untuk setiap $p = 1, \ldots, n$ jika I adalah sel di $\mathbb{R}^n$, maka *volume* berdimensi n dari I adalah bilangan real taknegatif $v(I) = \prod_{p=1}^{n}(b_p - a_p)$. Jadi volume berdimensi 1 dari I, disebut *panjang* I, adalah bilangan real tak negatif $v(I) = b_1 - a_1$. Didefinisikan fungsi m^*:

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Fungsi m^* itu disebut *ukuran luar Lebesgue*.

Akan diperlihatkan bahwa $m^*(E) \geq 0$ untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $m^*(\emptyset) = 0$, dan m^* bersifat monoton dan subaditif terbilang.

1) Karena $a_p \leq b_p$ untuk setiap $p = 1, \ldots, n$, maka $v(I) \geq 0$. Akibatnya, jumlahan dalam definisi fungsi tersebut lebih besar atau sama dengan nol. Jadi $m^*(E) \geq 0$.

2) Jika $I_k = \emptyset$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka $\emptyset \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \ldots = I$. Akibatnya, 0

$0 \leq m^*(\emptyset) \leq 0 + 0 + \cdots = 0$. Jadi $m^*(\emptyset) = 0$.

3) Jika $E \subseteq F$ dan $\langle I_k \rangle$ adalah barisan sel sedemikian sehingga $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_k$, maka $E \subseteq F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_k$. Akibatnya, $\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} \leq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \,\middle|\, F \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$. Jadi $m^*(A) \leq m^*(B)$.

4) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dipilih barisan sel $\{I_k^p\}_k$ sedemikian sehingga

$$E_p \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^p \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^p) \leq m^*(E_p) + \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

Karena $\{I_k^p | k, p \in \mathbb{N}\}$ adalah koleksi terbilang dari sel yang gabungannya memuat $\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$, maka berlaku

$$m^*\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p\right) \leq \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k^p) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) + \varepsilon$$

Definisi 2.3.5

Himpunan $E \subseteq X$ disebut *terukur* jika $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E)$ untuk setiap himpunan bagian A dari X. Koleksi semua himpunan terukur dilambangkan dengan $\mathcal{G}^*$.

Teorema 2.3.4

Koleksi $\mathcal{G}^*$ adalah aljabar-σ yang memuat $\mathcal{G}$. Lebih lanjut, jika $\langle E_n \rangle$ adalah barisan saling asing di $\mathcal{G}^*$, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)\,.$$

Bukti:

Untuk setiap himpunan bagian A dari X berlaku $\mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \backslash \emptyset) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A)$ dan $\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \backslash X) = \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A)$. Dengan demikian, $\emptyset$ dan X adalah himpunan terukur, sehingga $\emptyset, X \in \mathcal{G}^*$. Sekarang, ambil sebarang $E \in \mathcal{G}^*$, maka untuk setiap himpunan bagian A dari X, himpunan $X \backslash E$ bersifat terukur karena $\mu^*\big(A \cap (X \backslash E)\big) + \mu^*\big(A \backslash (X \backslash E)\big) = \mu^*(A \backslash E) + \mu^*(A \cap E) = \mu^*(A)$. Oleh karena itu, $X \backslash E \in \mathcal{G}^*$. Jadi $\mathcal{G}^*$ memenuhi sifat 1) dan 2) dari aljabar-σ.

Akan dibuktikan bahwa jika $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{G}^*$, maka $E_1 \cap \dots \cap E_n \in \mathcal{G}^*$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan induksi. Misalkan E_1 dan E_2 adalah adalah himpunan terukur. Maka untuk setiap $A \subseteq X$, didapat $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \backslash E_1)$ dan $\mu^*(A \cap E_1) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*\big((A \cap E_1) \backslash E_2\big)$, sehingga diperoleh $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*\big((A \cap E_1) \backslash E_2\big) + \mu^*(A \backslash E_1)$. Akan tetapi, karena $E_1 \in \mathcal{G}^*$, maka didapat $\mu^*\big(A \backslash (E_1 \cap E_2)\big) = \mu^*(A \backslash (E_1 \cap E_2) \cap E_1) + \mu^*(A \backslash (E_1 \cap E_2) \backslash E_1) = \mu^*\big((A \cap E_1) \backslash E_2\big) + \mu^*(A \backslash E_1)$, sehingga untuk setiap $A \subseteq X$ berlaku $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2) + \mu^*\big(A \backslash (E_1 \cap E_2)\big)$. Dengan demikian, $E_1 \cap E_2$ terukur. Sekarang, dimisalkan $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{G}^*$ dan $E = E_1 \cap \dots \cap E_n$ terukur. Akan ditunjukkan bahwa jika $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{G}^*$, maka $F = E_1 \cap \dots \cap E_{n+1}$ terukur. Karena $F = E_1 \cap \dots \cap E_{n+1} = (E_1 \cap \dots \cap E_n) \cap E_{n+1} = E \cap E_{n+1}$, maka F adalah himpunan terukur, sebab E terukur dan irisan dua himpunan terukur, yaitu E dan E_{n+1}, adalah himpunan terukur. Dengan demikian, $E_1 \cap \ldots \cap E_n \in \mathcal{G}^*$. Karena $\mathcal{G}^*$ memuat komplemen dan irisan dari suatu himpunan di $\mathcal{G}^*$, maka diperoleh ${E_1}^C \cap \ldots \cap {E_n}^C \in \mathcal{G}^*$. Namun, $\mathcal{G}^*$ memenuhi sifat 2) dari aljabar-σ, sehingga $E_1 \cup \ldots \cup E_n = \left({E_1}^C \cap \ldots \cap {E_n}^C\right)^C \in \mathcal{G}^*$. Jadi $\mathcal{G}^*$ memuat gabungan dari suatu himpunan di $\mathcal{G}^*$.

Selanjutnya, akan diperlihatkan dengan induksi bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ jika $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{G}^*$ saling asing dan $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, maka untuk setiap $A \subseteq X$, $\mu^*(A \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$. Pernyataan benar untuk $n = 1$ karena untuk $S_1 = E_1$ berlaku $\mu^*(A \cap S_1) = \mu^*(A \cap E_1)$. Jika diandaikan pernyataan benar untuk $n = j$, maka akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = j + 1$, yaitu

$$\mu^*(A \cap S_j) = \sum_{k=1}^{j} \mu^*(A \cap E_k) \Rightarrow \mu^*(A \cap S_{j+1}) = \sum_{k=1}^{j+1} \mu^*(A \cap E_k).$$

Karena gabungan berhingga dari himpunan terukur adalah himpunan terukur, maka untuk setiap $A \cap S_{j+1}$ berlaku

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap S_{j+1}) &= \mu^*(A \cap S_{j+1} \cap S_j) + \mu^*\left((A \cap S_{j+1}) \backslash S_j\right) \\
&= \mu^*(A \cap S_j) + \mu^*\left(A \cap (S_{j+1} \backslash S_j)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{j} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E_{j+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{j+1} \mu^*(A \cap E_k).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\mu^*\left(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)\right) = \mu^*(A \cap E_1) +$

$\cdots + \mu^*(A \cap E_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Sekarang, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{G}^*$ adalah aljabar-σ dan μ^* aditif terbilang pada $\mathcal{G}^*$. Misalkan $\{E_k\}$ adalah barisan dari himpunan saling asing di $\mathcal{G}^*$ dan $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Telah ditunjukkan bahwa $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{G}^*$ dan jika $A \subseteq X$, maka $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \backslash S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash S_n)$. Karena $S_n \subseteq E$, maka $A \backslash E \subseteq A \backslash S_n$, sehingga $\mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(A \backslash S_n)$. Jika $n \to \infty$, maka akan dihasilkan $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(A)$. Sebaliknya, berdasarkan Teorema 2.3.3-5) akan diperoleh

$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \text{ dan}$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E).$$

Akibatnya,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(A).$$

Karena

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(A) \text{ dan}$$

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash E) \leq \mu^*(A),$$

maka

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \backslash E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \backslash E).$$

Oleh karena itu, E terukur. Jika $A = E$, maka

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \cap E_k\right) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)\,.$$

Jadi $\mathcal{G}^*$ adalah aljabar-σ dan μ^* aditif terbilang pada $\mathcal{G}^*$.

Akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*$. Berdasarkan Teorema 2.3.3-4), jika $A \in \mathcal{G}$, maka $\mu^*(A) = \mu(A)$. Pembuktian berikutnya adalah dengan menunjukkan bahwa A terukur. Ambil sebarang $B \subseteq X$. Berdasarkan Teorema 2.3.3-5), $\mu^*(B) = \mu^*\big((B \cap A) \cup (B\backslash A)\big) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B\backslash A)$. Untuk menunjukkan pertidaksamaan yang sebaliknya, ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan misal $\{F_n\}$ adalah barisan di $\mathcal{G}$ sedemikian sehingga $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(B) + \varepsilon$. Karena $B \cap A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap A)$ dan $B\backslash A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n\backslash A)$, maka berdasarkan Teorema 2.3.3-3) dan Teorema 2.3.3-5) diperoleh

$$\mu^*(B \cap A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n \cap A) \text{ dan}$$

$$\mu^*(B\backslash A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n\backslash A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n\backslash A)\,.$$

Akibatnya, akan didapat

$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B\backslash A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu^*(F_n \cap A) + \mu^*(F_n\backslash A)\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \\ &\leq \mu^*(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \backslash A)$, sehingga A adalah himpunan terukur. Jadi $A \in \mathcal{G}^*$. ■

Contoh 2.3.4

Jika m^* adalah ukuran luar dalam Contoh 2.3.2, maka koleksi semua himpunan bagian terukur di $\mathbb{R}^n$ disebut *aljabar-σ Lebesgue* dari $\mathbb{R}^n$ dan dinotasikan dengan $\mathcal{L}$. Himpunan $E \in \mathcal{L}$ disebut *himpunan bagian terukur Lebesgue* dari $\mathbb{R}^n$ dan $m^*(E)$ disebut *ukuran Lebesgue* pada $\mathbb{R}^n$. Oleh karena itu, notasi $m^*(E)$ dapat ditulis dengan notasi $m(E)$. Ukuran Lebesgue diperkenalkan oleh matematikawan Perancis, Henri Lebesgue dan dipublikasikan pada tahun 1901. Selanjutnya, aljabar-σ terkecil dari $\mathbb{R}^n$ yang memuat semua himpunan terbuka disebut *aljabar-σ Borel* dan dinotasikan dengan $\mathcal{B}$. Himpunan di $\mathcal{B}$ disebut *himpunan Borel*.

BAB III

UKURAN DAN DIMENSI HAUSDORFF

Dimensi merupakan hal yang penting dalam geometri fraktal. Dimensi Hausdorff adalah dimensi yang tertua dan mungkin yang paling penting di antara dimensi-dimensi fraktal lainnya. Dimensi ini terdefinisi untuk suatu himpunan dan tepat secara matematis, yaitu berdasar pada ukuran yang cukup mudah untuk menggunakannya. Dimensi ini sulit dalam penghitungan matematis dan estimasi empirisnya.

A. Ukuran Hausdorff

Ruang metrik yang akan digunakan dalam pembahasan pada bab ini adalah ruang metrik $(\mathbb{R}^n, d)$ dengan metrik d adalah jarak Euclides berdimensi n.

Definisi 3.1.1

Misalkan E adalah himpunan bagian tidak kosong dari $\mathbb{R}^n$. Koleksi terbilang (atau berhingga) $\{U_i\}$ dari himpunan-himpunan berdiameter maksimal δ disebut *selimut*-δ dari E jika

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

dengan $0 \leq |U_i| \leq \delta$.

Definisi 3.1.2

Untuk himpunan yang tidak kosong $E \subseteq \mathbb{R}^n$, bilangan taknegatif s, dan $\delta > 0$ didefinisikan

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, \{U_i\} \text{ adalah selimut-}\delta \text{ dari } E\right\}.$$

Teorema 3.1.1

Untuk $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan bilangan taknegatif s berlaku jika $\delta_1 < \delta_2$, maka $\mathcal{H}_{\delta_2}^s(E) \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^s(E)$.

Bukti:

Misal $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \infty$. Maka setiap selimut-$\delta_1$ dari E adalah selimut-δ_2 dari E. Oleh karena itu, koleksi semua selimut-δ_1 dari E termuat di dalam koleksi semua selimut-δ_2 dari E. Akibatnya,

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \,, |U_i| < \delta_2\right\} \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \,, |U_i| < \delta_1\right\}$$

$\Leftrightarrow \mathcal{H}_{\delta_2}^s(E) \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^s(E)$. ■

Definisi 3.1.3

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $s > 0$, maka ukuran yang didefinisikan dengan

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

disebut *ukuran Hausdorff berdimensi s* dari E.

Teorema 3.1.2

1) $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$
2) Jika $E_1 \subseteq E_2$, maka $\mathcal{H}^s(E_1) \leq \mathcal{H}^s(E_2)$ (Sifat monoton)
3) Jika $\{E_j\}$ adalah koleksi terbilang dari himpunan-himpunan di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_j)$$

4) Jika $\{E_j\}$ adalah koleksi himpunan-himpunan yang saling asing, maka

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_j)$$

Bukti:

1) Diberikan $U_i = \emptyset$ untuk setiap i. Maka $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ dan $|U_i| = 0$. Akibatnya, $\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\,, |U_i| = 0\right\} = 0$, sehingga $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

2) Ambil sebarang selimut-δ $\{U_i\}$ dari E_2. Maka $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Akibatnya, $\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, E_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right\} \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \,\middle|\, E_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right\}$ yang ekivalen dengan $\mathcal{H}_\delta^s(E_1) \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_2)$. Penghitungan limit untuk $\delta \to 0$ akan memperoleh pertidaksamaan $\mathcal{H}^s(E_1) \leq \mathcal{H}^s(E_2)$.

3) Diberikan $\delta > 0$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap j ada selimut-δ $\{U_i^j\}$ dari E_j sedemikian sehingga $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ dan $\sum_{i=1}^{\infty} \left|U_i^j\right|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$. Karena $\{U_i^j \,|\, i, j \in \mathbb{N}\}$ adalah koleksi terbilang yang gabungannya memuat E, maka diperoleh

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^j\right|^s \le \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(E_j) + \varepsilon.$$

Akibatnya,

$$\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}_\delta^s(E_j) + \varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(E_j) + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(E_j).$$

Jadi $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(E_j)$.

4) Ambil sebarang $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ yang saling asing dan $\delta > 0$. Maka terdapat selimut-δ $\{U_i\}$ dari $E_1 \cup E_2$. Jika dibentuk himpunan $\{U_i^1\}$ dengan $U_i^1 = U_i \cap E_1$ dan $\{U_i^2\}$ dengan $U_i^2 = U_i \cap E_2$, maka $\{U_i^1\}$ dan $\{U_i^2\}$ adalah selimut-δ dari E_1 dan E_2 dan $U_i^1 \cap U_i^2 = \emptyset$. Karena E_1 dan E_2 berada di $E_1 \cup E_2$, maka $\{U_i\}$ adalah selimut-δ dari E_1 dan E_2. Akibatnya,

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s\right\} \ge \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^1\right|^s\right\} + \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left|U_i^2\right|^s\right\} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{H}_\delta^s(E_1 \cup E_2) \ge \mathcal{H}_\delta^s(E_1) + \mathcal{H}_\delta^s(E_2).$$

Jika dicari limit untuk $\delta \to 0$, maka $\mathcal{H}^s(E_1 \cup E_2) \ge \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2)$. Menurut Teorema 3.1.2-2), $\mathcal{H}^s(E_1 \cup E_2) \le \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2)$. Dengan demikian, $\mathcal{H}^s(E_1 \cup E_2) = \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2)$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{H}^s(E_j) \Rightarrow \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\mathcal{H}^s(E_j).$$

Karena ukuran dari gabungan kedua himpunan adalah jumlahan dari ukuran setiap himpunan, maka

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} E_j\right) = \mathcal{H}^s\left(\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) \cup E_{n+1}\right)$$

$$= \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right) + \mathcal{H}^s(E_{n+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^s(E_j) + \mathcal{H}^s(E_{n+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \mathcal{H}^s(E_j)$$

Jika $n \to \infty$, maka persamaan tersebut terbukti. ■

Teorema 3.1.3

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, dan $\lambda E = \{\lambda x | x \in E\}$, maka $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$.

Bukti:

Jika $\{U_i\}$ adalah selimut-δ dari $E \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $\{\lambda U_i\}$ adalah selimut-$\lambda\delta$ dari λE. Dengan demikian, dihasilkan persamaan berikut.

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda U_i|^s\right\}$$

$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^s |U_i|^s\right\}$$

$$= \inf\left\{\lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\right\}$$

$$= \lambda^s \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\right\}$$

$$= \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Jika dicari limit untuk $\delta \to \infty$, maka $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ ■

Teorema 3.1.4

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $f: E \to \mathbb{R}^m$ adalah fungsi Lipschitz berpangkat α, maka untuk setiap s berlaku

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) \le c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E).$$

Bukti:

Misalkan $\{U_i\}$ adalah selimut-δ dari E. Akan dicek diameter dari himpunan dalam keluarga $\{f(E \cap U_i)\}$.

$$\begin{aligned}
|f(E \cap U_i)| &= \sup\{d\big(f(x), f(y)\big) | x, y \in E \cap U_i\} \\
&\le \sup\{c d^\alpha(x, y) | x, y \in E \cap U_i\} \\
&\le \sup\{c d^\alpha(x, y) | x, y \in U_i\} \\
&= c \sup\{d^\alpha(x, y) | x, y \in U_i\} \\
&= c|U_i|^\alpha
\end{aligned}$$

Karena $|f(E \cap U_i)| \le c|U_i|^\alpha$ dan $|U_i| < \delta$, maka $\{f(E \cap U_i)\}$ adalah selimut-$c\delta^\alpha$ dari $f(E)$. Oleh karena itu, $\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |cU_i|^{s/\alpha}\right\} = c^{s/\alpha} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^{s/\alpha}\right\} \le c^{s/\alpha} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\right\} = c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(E)$. Jika $\delta \to 0$, maka $\mathcal{H}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) \le c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E)$. ■

Lema 3.1.1

Jika $A \subseteq \mathbb{R}^n$, maka untuk setiap $s, t \in \mathbb{R}$ dengan $0 < s < t < \infty$, $\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)$.

Bukti:

Misal $\{U_i\}$ adalah selimut-δ dari A. Sekarang, $\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^t = \sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^{t-s}|U_i|^s$ $\leq \sum_{i=1}^{\infty}\delta^{t-s}|U_i|^s = \delta^{t-s}\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s$. Oleh karena itu, $\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^t \leq \delta^{t-s}\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s$ $\Leftrightarrow \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^t\right\} \leq \delta^{t-s}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s\right\}$. Jadi $\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)$. ■

Teorema 3.1.5

Jika $s, t \in \mathbb{R}$ dan $s < t$, maka untuk $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, $\mathcal{H}^t(E) = 0$ dan untuk $\mathcal{H}^t(E) > 0$, $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

Bukti:

Diketahui $\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)$. Jika $\delta \to 0$, maka dengan memisalkan $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, akan diperoleh $\lim_{\delta\to 0}\delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^t(A) \Leftrightarrow 0 \geq \mathcal{H}^t(E)$. Dengan demikian, $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Sebaliknya, untuk $\mathcal{H}^t(E) > 0$, akan dihasilkan $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s}\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(A) \Leftrightarrow \lim_{\delta\to 0}\delta^{s-t}\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(A) \Leftrightarrow \infty$ $\leq \mathcal{H}^s(E)$. Jadi $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. ■

Lema 3.1.2

Untuk setiap $B \subseteq \mathbb{R}^n$ dan untuk setiap $s < p$ berlaku $\mathcal{H}^s(B) = \infty$.

Bukti:

Berdasarkan Lema 3.1.1, untuk $s < p$, didapat pertidaksamaan berikut.

$$\mathcal{H}_\delta^p(B) \leq \delta^{p-s}\mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Akibatnya,

$$\mathcal{H}^s(B) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(B) \geq \lim_{\delta\to 0}\delta^{s-p}\mathcal{H}_\delta^p(B) = \lim_{\delta\to 0}\delta^{-(p-s)}\mathcal{H}_\delta^p(B) = \infty$$

Dengan demikian, $\mathcal{H}^s(B) = \infty$ untuk setiap $s < p$. ■

Teorema 3.1.6

Untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$ terdapat bilangan $s_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga berlaku

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty, \text{ untuk } s < s_0 \\ 0, \text{ untuk } s > s_0 \end{cases}$$

Bukti:

Diberikan $F = \{s | \mathcal{H}^s(E) = \infty, E \subseteq \mathbb{R}^n\}$. Ini berarti bahwa untuk setiap $s \in F$, $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Berdasarkan Lema 3.1.2, F adalah himpunan tidak kosong dan terbatas ke atas. Oleh karena itu, F mempunyai supremum, misalkan $s_0 = \sup\{F\}$. Dengan Lema 3.1.1, jika $s < s_0$, maka

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \lim_{\delta\to 0}\delta^{s-s_0}\mathcal{H}_\delta^{s_0}(E) = \lim_{\delta\to 0}\delta^{-(s_0-s)}\mathcal{H}_\delta^{s_0}(E) = \infty.$$

Selanjutnya, untuk $s > s_0$, akan diperoleh

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \lim_{\delta\to 0}\delta^{s-s_0}\mathcal{H}_\delta^{s_0}(E) = 0.$$

Karena supremum suatu himpunan bernilai tunggal, maka dapat disimpulkan bahwa $s_0 = \sup\{F\}$ adalah nilai yang memenuhi sifat dalam Teorema, yaitu $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ untuk $s < s_0$ dan $\mathcal{H}^s(E) = 0$ untuk $s > s_0$. ■

B. Dimensi Hausdorff

Dimensi Hausdorff didefinisikan dengan berdasar pada Teorema 3.1.6 di atas.

Definisi 3.2.1

Untuk setiap $E \subseteq \mathbb{R}^n$, *dimensi Hausdorff* (*dimensi Hausdorff-Besicovitch*) dari E, dinotasikan dengan $\dim_H(E)$, adalah bilangan $s \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga

$$\mathcal{H}^t(E) = \begin{cases} \infty, \text{untuk } t < s \\ 0, \text{untuk } t > s \end{cases}.$$

Teorema 3.2.1

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $\dim_H(E) = \inf\{s | H^s(E) = 0\} = \sup\{s | H^s(E) = \infty\}$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.1.6 dan Definisi dimensi Hausdorff, $\dim_H(E) = \sup\{s | H^s(E) = \infty\}$. Sekarang, akan diperlihatkan bahwa $\inf\{s | H^s(E) = 0\} = \dim_H(E)$. Dimisalkan $\dim_H(E) = a$. Berdasarkan definisi, diketahui bahwa $H^s(E) = 0$ untuk $s > a$, sehingga $\inf\{s | H^s(E) = 0\} = \inf\{s | s > a\} = a = \dim_H(E)$. Karena $\inf\{s | H^s(E) = 0\} = \dim_H(E)$ dan $\sup\{s | H^s(E) = \infty\} = \dim_H(E)$, maka $\inf\{s | H^s(E) = 0\} = \sup\{s | H^s(E) = \infty\}$. Jadi terbukti bahwa $\dim_H(E) = \inf\{s | H^s(E) = 0\} = \sup\{s | H^s(E) = \infty\}$. ■

Teorema 3.2.2

1) Jika $E_1 \subseteq E_2$, maka $\dim_H(E_1) \leq \dim_H(E_2)$. Sifat ini disebut *sifat monoton*.

2) Jika $\{E_j\}$ adalah koleksi dari himpunan di $\mathbb{R}^n$, maka

$$\dim_H\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_H(E_j).$$

Sifat ini disebut *stabilitas terbilang*.

3) Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$ terbilang, maka $\dim_H(E) = 0$.

Bukti:

1) Berdasarkan Teorema 3.1.2-1), jika $E_1 \subseteq E_2$, maka $H^s(E_1) \leq H^s(E_2)$. Oleh karena itu, dengan menggunakan definisi akan didapat $\dim_H(E_1) = \inf\{s|H^s(E_1) = 0\} \leq \inf\{s|H^s(E_2) = 0\} = \dim_H(E_2)$.

2) Misal $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Ini berarti bahwa untuk setiap $j = 1,2,\dots$ $E_j \subseteq E$. Menurut Teorema 3.2.2-1), $\dim_H(E_j) \leq \dim_H(E)$. Akibatnya, $\dim_H(E) \geq \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_H(E_j)$. Misalkan terdapat $s > n = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_H(E_j)$, maka menurut Definisi 3.2.1 berlaku $\mathcal{H}^s(E_j) = 0$. Dengan memakai sifat aditif terbilang diperoleh $\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_j) = 0$. Oleh karena itu, $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Karena $\mathcal{H}^s(E) = 0$ untuk $s > n$, maka akan didapat $\dim_H(E) \leq \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_H(E_j)$. Jadi terbukti bahwa $\dim_H\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sup_{1\leq i\leq\infty} \dim_H(E_j)$.

3) Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Diberikan $s \in (0,1)$ dan $\delta \in \left(0, \left((2^s - 1)\varepsilon\right)^{1/s}\right)$. Misalkan $E = \{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ adalah himpunan terbilang dan $\{U_i\}$ adalah selimut-δ dari E sedemikian sehingga $e_i \in U_i$ dan $0 < |U_i| = {}^{\delta}/_{2^i} < \delta$ un-

tuk $i \in \mathbb{N}$. Maka, $\sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{\delta}{2^i}\right)^s = \delta^s \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{si}}$. Deret tersebut adalah deret geometri dengan rasio $1/_{2^s} < 1$ dan nilai awal $1/_{2^s}$, sehingga $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{si}} = \frac{1}{2^s - 1}$ dan $\sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s = \frac{\delta^s}{2^s - 1} < \varepsilon$. Jika dicari nilai infimumnya, maka diperoleh $\mathcal{H}_\delta^s(E) < \varepsilon$. Karena berlaku untuk setiap $0 < \delta < \left((2^s - 1)\varepsilon\right)^{1/s}$, maka didapat

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \varepsilon,$$

sehingga $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Akan tetapi, $s > 0$ sehingga $\dim_H(E_1) = 0$ berdasarkan Definisi 3.2.1. ■

Teorema 3.2.3

1) $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$
2) Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $\dim_H(E) \leq n$

Bukti:

1) Berdasarkan Lema 3.1.1, untuk $s > n$ berlaku $\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \delta^{s-n}\mathcal{H}_\delta^n(E)$, sehingga $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \lim_{\delta \to 0} \delta^{s-n}\mathcal{H}_\delta^n(E) = 0$. Jika $s < n$, maka $\mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \delta^{n-s}\mathcal{H}_\delta^s(E)$. Akibatnya, $\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \lim_{\delta \to 0} \delta^{s-n}\mathcal{H}_\delta^n(E) = \lim_{\delta \to 0} \delta^{-(n-s)}\mathcal{H}_\delta^n(E) = \infty$, sehingga $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Dengan demikian,

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty, \text{untuk } s < n \\ 0, \text{untuk } s > n \end{cases}.$$

Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 3.2.1 $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$.

2) Karena $E \subseteq \mathbb{R}^n$, maka dengan memakai sifat kemonotonan dimensi akan

didapat $\dim_H(E) \leq \dim_H(\mathbb{R}^n) = n$. ■

Contoh 3.2.1

Misal $n = 1,2,3$. Berdasarkan Teorema 3.2.4, $\dim_H(\mathbb{R}) = 1$, $\dim_H(\mathbb{R}^2) = 2$, dan $\dim_H(\mathbb{R}^3) = 3$. Jadi garis lurus berdimensi Hausdorff satu, bidang datar berdimensi Hausdorff dua, dan bangun ruang berdimensi Hausdorff tiga.

Teorema 3.2.4

Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, dan $\lambda E = \{\lambda x | x \in E\}$, maka $\dim_H(E) = \dim_H(\lambda E)$.

Bukti:

Menurut Teorema 3.1.3, $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$. Akan tetapi, untuk $s > \dim_H(E)$, didapat $\mathcal{H}^s(E) = 0$, sehingga $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E) = 0$. Karena $0 < \lambda^s$, maka $s = \dim_H(\lambda E)$ untuk semua $s > \dim_H(E)$. Jika dicari infimum untuk semua $s > \dim_H(E)$, maka didapatkan $\dim_H(\lambda E) = \inf\{\dim_H(\lambda E)\} = \inf\{s | s > \dim_H(E)\} = \dim_H(E)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $\dim_H(E) = \dim_H(\lambda E)$. ■

Teorema 3.2.5

1) Jika $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $f: E \to \mathbb{R}^n$ memenuhi syarat $d\big(f(x), f(y)\big) \leq c d^\alpha(x, y)$, maka $\dim_H f(E) \leq {}^1\!/_\alpha \dim_H(E)$.
2) Jika $f: E \to \mathbb{R}^n$ adalah fungsi Lipschitz, maka $\dim_H f(E) \leq \dim_H(E)$.

Bukti:

1) Berdasarkan Teorema 3.1.4, $\mathcal{H}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E)$. Menurut Defi-

nisi 3.2.1, jika $s > \dim_H(E)$, maka $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Akibatnya, $\mathcal{H}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(E) = 0$, sehingga $\mathcal{H}^{s/\alpha}\big(f(E)\big) = 0$. Karena $c^{s/\alpha} > 0$, maka ${}^{s}/_{\alpha} \geq \dim_H f(E)$ untuk semua $s > \dim_H(E)$. Jika dicari infimum untuk semua $s > \dim_H(E)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\dim_H f(E) &= \inf\{\dim_H f(E)\} \\ &\leq \inf\left\{\frac{s}{\alpha}\middle| s > \dim_H(E)\right\} \\ &= \frac{1}{\alpha}\inf\{s|s > \dim_H(E)\} \\ &= \frac{1}{\alpha}\dim_H(E)\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\dim_H f(E) \leq {}^{1}/_{\alpha} \dim_H(E)$.

2) Fungsi Lipschitz merupakan kejadian khusus dari fungsi yang dibahas pada Teorema 3.2.3-1) dengan $\alpha = 1$. Oleh karena itu, dengan mengambil $\alpha = 1$ diperoleh $\dim_H f(E) \leq \dim_H(E)$. ■

BAB IV

DIMENSI HAUSDORFF DARI BANGUN BERDIMENSI FRAKTAL

Penerapan dari penghitungan dimensi Hausdorff untuk bangun-bangun berdimensi fraktal akan dibahas dengan menerapkan pembahasan teori-teori yang telah dibahas di dalam bab sebelumnya. Pembahasan diawali dengan membahas bangun-bangun yang akan dihitung dimensinya. Bangun-bangun tersebut adalah Himpunan Cantor, Debu Cantor, dan Kurva von Koch. Bangun berdimensi fraktal ini akan dikonstruksikan secara singkat dan dicari sifat-sifatnya yang akan digunakan untuk penghitungan dimensi Hausdorff dalam pembahasan selanjutnya.

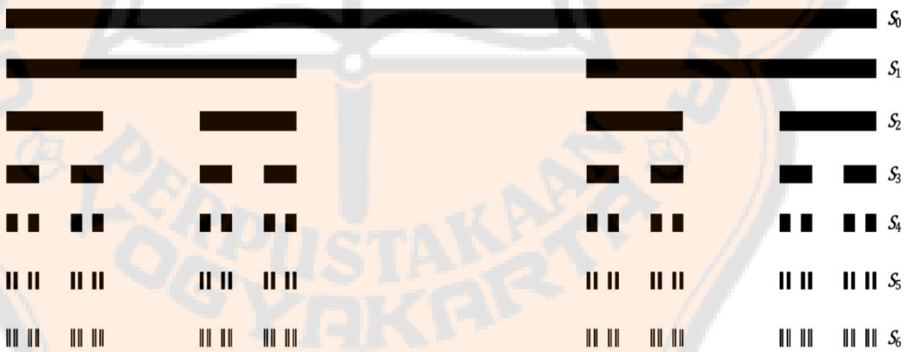
A. Bangun Berdimensi Fraktal

1. Himpunan Cantor

Himpunan Cantor pertama kali dipublikasikan pada tahun 1883 oleh Georg Cantor (1845-1918). Ia adalah matematikawan Jerman di Universitas Halle di mana ia mempublikasikan hasil karya matematika yang sekarang dikenal sebagai Teori Himpunan. Sebagai salah satu contoh dari fraktal klasik, himpunan ini paling penting dan dapat dipahami bahwa himpunan Cantor memainkan peranan di banyak cabang matematika dan menyimpan kerangka penting atau model di balik banyak fraktal lain.

Dasar dari himpunan Cantor adalah himpunan tidak berhingga titik-titik pada interval $[0,1]$, yaitu himpunan bilangan seperti $0, 1, {}^1/_3, {}^2/_3, {}^1/_9, {}^2/_9, {}^7/_9, {}^8/_9, \ldots$. Dengan melihat posisi titik tersebut pada garis bilangan tidak dapat diteliti sesuatu yang menarik, sehingga diperlukan suatu cara lain. Cara tersebut adalah dengan meletakkan satu garis vertikal untuk setiap bilangan dalam himpunan dan setiap garis mempunyai panjang yang sama, sehingga dapat melihat distribusi titik tersebut lebih baik. Oleh karena itu, dapat diketahui sifat-sifat yang dimiliki himpunan Cantor.

Himpunan Cantor C dikonstruksikan dengan menghilangkan sebarisan interval terbuka dari interval tertutup $S_0 = [0,1]$. Pertama, dihilangkan sepertiga interval terbuka bagian tengah dari $[0,1]$, yaitu $\left({}^{1}/_{3}, {}^{2}/_{3}\right)$ untuk menghasilkan $S_1 = \left[0, {}^{1}/_{3}\right] \cup \left[{}^{2}/_{3}, 1\right]$. Selanjutnya, setiap interval di S_1 dihilangkan sepertiga interval terbuka bagian tengah untuk menghasilkan $S_2 = \left[0, {}^{1}/_{9}\right] \cup \left[{}^{2}/_{9}, {}^{1}/_{3}\right] \cup \left[{}^{2}/_{3}, {}^{7}/_{9}\right] \cup \left[{}^{8}/_{9}, 1\right]$. Berikut ini adalah gambar dari proses konstruksi tersebut.



Gambar 1. Konstruksi Himpunan Cantor

Berdasarkan gambar dapat dilihat bahwa jika S_1 memiliki 2 buah interval bagian, S_2 memiliki 4 buah, dan seterusnya, maka S_n memiliki 2^n buah interval bagian dan panjang setiap interval bagian di S_n berukuran ${}^{1}/_{3}$ dari panjang setiap interval bagian di S_{n-1}.

Definisi 4.1.1

Misalkan $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah koleksi dari himpunan seperti yang telah dikonstruksikan. *Himpunan Cantor* didefinisikan sebagai berikut.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

Teorema 4.1.1

Panjang himpunan Cantor adalah nol.

Bukti:

Untuk ${S_1}^C$ terdapat sebuah interval terbuka dengan panjang $1/_3$. Himpunan ${S_2}^C$ memiliki 2 buah interval terbuka dengan panjang $1/_{3^2}$ dan interval terbuka dari ${S_1}^C$. Untuk ${S_3}^C$ terdapat 2 buah interval terbuka dengan panjang $1/_{3^3}$ dan interval-interval terbuka dari ${S_2}^C$. Jika L_n adalah panjang keseluruhan interval terbuka di ${S_n}^C$, maka didapat hasil berikut.

$$L_1 = \frac{1}{3}, L_2 = \frac{2}{3^2} + L_1 = \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3}, L_3 = \frac{2}{3^3} + L_2 = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$L_n = \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Oleh karena itu, panjang dari himpunan Cantor dihitung dengan selisih antara panjang interval $[0,1]$ dan L_n untuk $n \to \infty$, sehingga

$$L = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) = 0.$$

Jadi panjang himpunan Cantor adalah nol. ∎

Teorema 4.1.2

Himpunan Cantor mempunyai takhingga banyak interval bagian.

Bukti:

Untuk setiap n terdapat 2^n interval tertutup di S_n. Jika $n \to \infty$, maka $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$. Dengan demikian, himpunan Cantor mempunyai takhingga banyak interval bagian. ■

2. Debu Cantor

Sekarang, akan dibahas salah satu fraktal yang dikonstruksikan pada suatu persegi dengan panjang L. Prinsip dalam konstruksi fraktal ini mirip dengan konstruksi himpunan Cantor, yaitu dengan menghilangkan sebagian dari himpunan. Prosesnya dimulai dengan mendefinisikan suatu persegi A_0 dengan panjang sisi L. Proses dilanjutkan dengan menyisakan 4 persegi dengan panjang sisi $L/_4$ dan menghilangkan yang lain. Proses ini dapat dideskripsikan secara rekursif sebagai berikut.

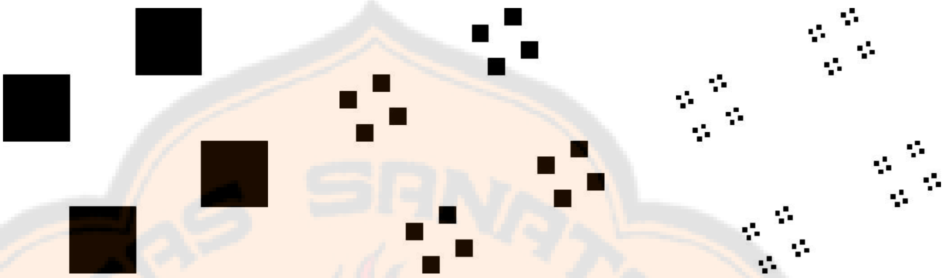
Pertama, A_1 dihasilkan dari 4 bagian persegi A_0 dengan panjang sisi $L/_4$. Berikutnya, setiap persegi di A_1 dihasilkan 4 bagian persegi dengan panjang sisi $L/_{4^2}$ untuk membentuk A_2 dan banyaknya persegi yang terbentuk adalah 4^2 buah. Oleh karena itu, A_k mempunyai 4^k persegi dengan panjang sisi $L/_{4^k}$, sehingga luas setiap persegi di A_k adalah $\left(L/_{4^k}\right)^2$.

Definisi 4.1.2

Untuk $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ didefinisikan *Debu Cantor* dengan

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_k \, .$$

Sekarang akan disajikan gambar dari konstruksi debu Cantor.



A_1 A_2 A_3

Gambar 2. Konstruksi Debu Cantor

Teorema 4.1.3

Debu Cantor memiliki luas daerah sebesar nol.

Bukti:

Untuk setiap persegi di A_k luasnya adalah $\left(L/_{4^k}\right)^2$. Sekarang,

$$4^k \left(\frac{L}{4^k}\right)^2 = \frac{4^k L^2}{4^{2k}} = \frac{L^2}{4^k}.$$

Jika $k \to \infty$, maka $\lim_{k\to\infty} \frac{L^2}{4^k} = L^2 \lim_{k\to\infty} 4^{-k} = 0$. Jadi luas dari debu Cantor adalah nol. ■

Teorema 4.1.4

Debu Cantor mempunyai takhingga banyak persegi.

Bukti:

Untuk setiap k terdapat 4^k persegi di A_k. Jika $k \to \infty$, maka $\lim_{k\to\infty} 4^k = \infty$. Dengan demikian, debu Cantor memiliki takhingga banyak persegi. ■

Teorema 4.1.5

Misalkan debu Cantor berada di $D = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ dan $\pi_1 : D \to \mathbb{R}$ adalah proyeksi dengan $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ untuk $(x_1, x_2) \in D$. Panjang proyeksi debu Cantor adalah 1.

Bukti:

Persegi $A_0 = D$, sehingga $\pi_1(A_0) = [0,1]$. Karena A_1 memiliki 4 persegi dengan panjang ${}^1\!/_4$, maka proyeksi A_1 adalah $\pi_1(A_1) = \left[0, {}^1\!/_4\right] \cup \left[{}^1\!/_4, {}^1\!/_2\right] \cup \left[{}^1\!/_2, {}^3\!/_4\right] \cup \left[{}^3\!/_4, 1\right] = [0,1]$. Himpunan A_2 mempunyai 16 buah dengan panjang ${}^1\!/_{16}$, sehingga $\pi_1(A_2) = [0,1]$. Oleh karena i-tu, A_k mempunyai 4^k persegi dengan panjang ${}^1\!/_{4^k}$ dan $\pi_1(A_k) = [0,1]$. Dengan demikian, panjang proyeksi debu Cantor sama dengan panjang interval $[0,1]$, yaitu 1. ■

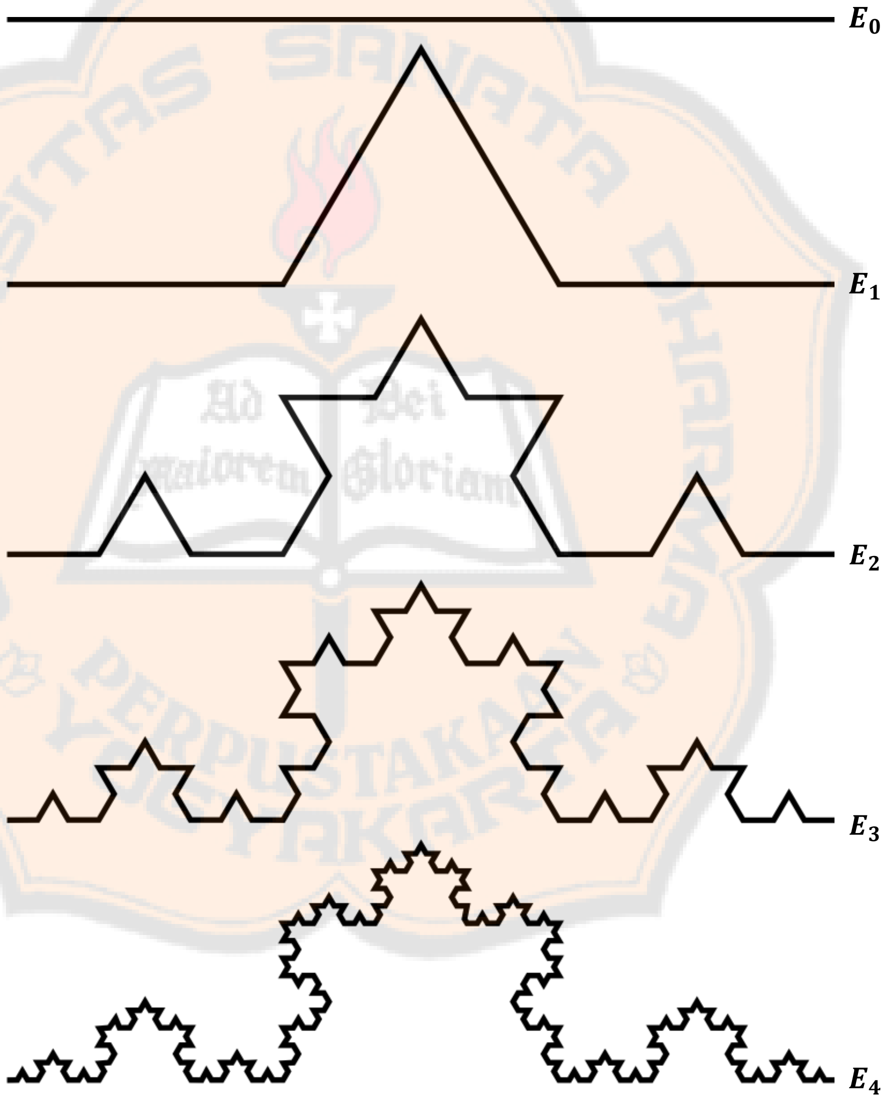
3. Kurva von Koch

Helge von Koch adalah seorang matematikawan Swedia yang pada tahun 1904 memperkenalkan apa yang sekarang dikenal sebagai kurva von Koch. Tidak terdapat banyak informasi tentang von Koch, termasuk kontribusinya di dalam matematika, jika dibandingkan dengan beberapa orang ternama lainnya, seperti Cantor, Peano, Hilbert, Sierpinski, atau Hausdorff. Namun, konstruksi yang dilakukannya pastilah memiliki tem-pat tersendiri karena kurva ini dapat menuju ke suatu generalisasi menarik. Kurva tersebut tidak sesulit himpunan Cantor untuk memahaminya.

Jika berdasarkan konstruksinya, maka kurva von Koch tidak dapat terlihat secara langsung sebagai kurva. Kurva ini tidak mulus karena terlihat seperti garis yang bengkok. Kurva ini memiliki kerumitan seperti yang dimiliki garis pantai.

Sebenarnya, Koch membuat kurva tersebut sebagai contoh lain dari penemuan yang dibuat pertama kali oleh matematikawan Jerman bernama Karl Weierstraβ yang pada tahun 1872 telah menimbulkan suatu gejolak di dalam matematika. Weierstraβ mendeskripsikan kurva yang tidak dapat didiferensialkan, yaitu kurva yang tidak mempunyai tangen di suatu titik. Kurva yang memiliki nilai tangen adalah kurva mulus. Akibatnya, jika kurva mempunyai ujung, maka timbul permasalahan karena tidak ada jalan untuk menemukan nilai tangen yang tunggal. Kurva von Koch adalah contoh kurva yang memiliki ujung di mana-mana, sehingga tidak ada jalan untuk mencari tangennya.

Prinsip dari konstruksi kurva von Koch adalah subtitusi sepertiga bagian tengah dari suatu ruas garis dengan dua sisi segitiga yang panjang setiap sisinya sama dengan panjang sepertiga bagian tengah yang diganti. Jika E_0 adalah ruas garis dengan panjang L, maka E_1 dikonstruksikan dengan mengganti sepertiga bagian tengah dari E_0 oleh 2 ruas dengan panjang $L/3$. Dengan demikian, E_1 terdiri atas 4 buah ruas garis sepanjang $L/3$. Kurva E_2 dikonstruksikan dengan mengganti sepertiga bagian tengah dari setiap ruas di E_1 oleh 2 ruas garis dengan panjang $L/9$ untuk setiap ruasnya, sehingga akan didapat E_2 terdiri atas 16 ruas garis dengan panjang setiap ruasnya adalah $L/_9$. Jadi E_k adalah kurva yang terdiri atas 4^k ruas garis yang panjangnya adalah $L/_{3^k}$. Berikut adalah gambar konstruksi kurva von Koch.



Gambar 3. Konstruksi Kurva von Koch

Teorema 4.1.6

Panjang kurva von Koch adalah takhingga.

Bukti:

Kurva E_k terdiri atas 4^k ruas garis yang panjangnya adalah $^L/_{3^k}$. Oleh karena itu, panjang dari kurva E_k adalah $4^k\left(^L/_{3^k}\right) = L\left(^4/_3\right)^k$. Jika $k \to \infty$, maka $\lim_{k\to\infty} 4^k = \infty$. Jadi panjang kurva von Koch adalah takhingga. ■

Teorema 4.1.7

Kurva von Koch terdiri atas takhingga banyak ruas garis.

Bukti:

Karena kurva E_k terdiri atas 4^k ruas garis, maka dapat dihitung banyaknya ruas garis keseluruhan dari kurva von Koch dengan mencari nilai limit untuk $k \to \infty$, yaitu

$$\lim_{k\to\infty} 4^k = \infty.$$

Jadi banyaknya ruas garis pada kurva von Koch adalah takhingga. ■

B. Dimensi Hausdorff dari Bangun Berdimensi Fraktal

Bagian ini akan membahas secara langsung mengenai cara menghitung dimensi Hausdorff untuk bangun-bangun berdimensi fraktal berikut.

1. Himpunan Cantor

Akan dibahas dalam dua cara.

a) Himpunan Cantor C dapat dibagi menjadi dua, yaitu $A = [0, ^1/_3] \cap C$ dan $B = [^2/_3, 1] \cap C$. Jadi $C = A \cup B$ dan $A \cap B = \emptyset$. Himpunan A dan B secara geometris sebangun dengan C dengan skala $^1/_3$. Jika diasumsikan $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$, maka menurut Teorema 3.1.3 didapat

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = 2\left(3^{-s}\mathcal{H}^s(C)\right) \Leftrightarrow$$

$$3^s = 2 \Leftrightarrow$$

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Dari sini diperoleh $s = \dim_H(E) = {}^{\log 2}/_{\log 3}$.

b) Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, $E_k = \bigcup_{r=1}^{2^k} I_r$ memuat E sehingga $\{I_1, \dots, I_{2^k}\}$, yaitu keluarga 2^k interval dengan panjang 3^{-k}, suatu selimut-δ untuk E dengan $\delta = 3^{-k}$ dan $\sum_{r=1}^{2^k} |I_r|^t = 2^k 3^{-kt}$. Jadi untuk semua $k \in \mathbb{N}$ didapat $\mathcal{H}^t_{3^{-k}}(E) = \inf\left\{\sum_{r=1}^{2^k} |I_r|^t\right\} \le 2^k 3^{-kt}$. Syarat untuk t agar $2^k 3^{-kt} \le 1$ adalah

$$2^k 3^{-kt} \le 1 \Leftrightarrow 2^k \le 3^{kt} \Leftrightarrow$$

$$\log 2^k \le \log 3^{kt} \Leftrightarrow$$

$$k \log 2 \le kt \log 3 \Leftrightarrow$$

$$t \ge \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Jadi untuk $t \ge {}^{\log 2}/_{\log 3}$, $\mathcal{H}^t_{3^{-k}}(E) \le 1$ dan jika diambil limitnya untuk $\delta \to 0$, maka untuk $t \ge {}^{\log 2}/_{\log 3}$ didapat ukuran Hausdorff berdimensi t $\mathcal{H}^t(E) \le 1$. Akan ditunjukkan bahwa $s = {}^{\log 2}/_{\log 3}$

adalah $\dim_H(E)$ dengan memperlihatkan bahwa ${}^1/_2 \leq \mathcal{H}^s(E) \leq 1$. Karena telah diperlihatkan $\mathcal{H}^s(E) \leq 1$, maka hanya tinggal menunjukkan ${}^1/_2 \leq \mathcal{H}^s(E)$. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, keluarga 2^k interval penyusun E_k adalah suatu selimut-δ untuk E dan mengingat bahwa $s = {}^{\log 2}/_{\log 3}$, berlaku $2^k 3^{-ks} = 2^k 3^{-k \log_3 2} = 1$. Misalkan G adalah keluarga berhingga interval $\{U_i\}$ dengan $U_i \subseteq [0,1]$. Untuk setiap U_i yang diberikan terdapat $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga $3^{-(k+1)} \leq |U_i| \leq 3^{-k}$. Dengan demikian, terdapat paling banyak satu interval penyusun E_k sedemikian sehingga $I \cap U_i \neq \emptyset$, karena interval di E_k terpisah sekurang-kurangnya sejauh 3^{-k}. Jika $j \geq k$, maka paling banyak terdapat 2^{j-k} interval penyusun E_j yang beririsan dengan U_i. Karena $0 < s < 1$, $2^k 3^{-ks} = 1 \Leftrightarrow 2^k = 3^{ks}$, dan $3^{-(k+1)} \leq |U_i|$, maka $2^{j-k} = 2^j 3^{-ks} = 2^j 3^{-s} 3^{-(k+1)s} \leq 2^j 3^{-s} |U_i|^s$. Jika j diambil cukup besar sehingga $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ untuk U_i dan karena keluarga berhingga $\{U_i\}$ beririsan dengan semua 2^j interval tertutup penyusun E yang masing-masing panjangnya 3^{-j}, maka $2^j \leq 2^j 3^s \sum_{i=1}^{2^k} |U_i|^s$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^k} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}$. Karena berlaku untuk sebarang selimut $\{U_i\}$ selimut $\{U_i\}$ dari E, maka diperoleh $\mathcal{H}^s(E) \geq {}^1/_2$, sehingga terbukti bahwa $\dim_H(E) = {}^{\log 2}/_{\log 3}$.

2. Debu Cantor

Misal A adalah debu Cantor berdasarkan Definisi 4.1.2 dengan panjang $L = 1$. Berdasarkan konstruksi dari A_k diketahui bahwa A_k mempunyai 4^k dengan panjang 4^{-k}, sehingga A_k berdiameter $4^{-k}\sqrt{2}$. Dengan mengambil persegi A_k sebagai selimut-δ untuk A, akan diperoleh $\mathcal{H}_\delta^1(A) \leq 4^k 4^{-k}\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Untuk $\delta \to 0$ didapat $\mathcal{H}^1(A) \leq \sqrt{2}$.

Berdasarkan Teorema 4.1.5 diketahui bahwa panjang proyeksi dari debu Cantor adalah 1. Dengan menggunakan Teorema 3.1.4 untuk $\alpha = 1$ dan Teorema 2.2.3 didapat $1 = \mathcal{H}^1[0,1] \leq \mathcal{H}^1(A)$. Dengan demikian, $1 \leq \mathcal{H}^1(A) \leq \sqrt{2}$, sehingga $0 < \mathcal{H}^1(A) < \infty$. Jadi $\dim_H(E) = 1$.

3. Kurva von Koch

Himpunan E kita bentuk dari $E_0 = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. Maka $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ sebangun dengan E_0 dengan faktor kesebangunan ${}^1/_3$, sedangkan untuk $i = 1,2,3,4$ masing-masing E_i satu sama lain sama dan sebangun. Dengan asumsi bahwa untuk titik-titik s nilai $\mathcal{H}^s(E)$ berhingga dan $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ dan mengingat Teorema 3.1.3, maka

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E_1) + \mathcal{H}^s(E_2) + \mathcal{H}^s(E_3) + \mathcal{H}^s(E_4) = 4\left(3^{-s}\mathcal{H}^s(E)\right),$$

sehingga diperoleh $\dim_H(E) = s = {}^{\log 4}/_{\log 3}$.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Dimensi merupakan salah satu sifat penting dari fraktal. Salah seorang tokoh yang melakukan penelitian mengenai dimensi adalah Felix Hausdorff. Dimensi yang ditelitinya tersebut sekarang diberi nama Dimensi Hausdorff. Dimensi Hausdorff dari himpunan E ditentukan dari ukuran Hausdorff berdimensi s dari himpunan E dengan s adalah bilangan real positif, yaitu $H^s(E)$. Dimensi Hausdorff adalah bilangan s yang memenuhi $\inf\{s|H^s(E) = 0\} = \sup\{s|H^s(E) = \infty\}$ dengan $H^s(E)$ ditentukan dengan mencari infimum dari seluruh jumlahan selimut-δ dari E. Dimensi ini merupakan dimensi tertua dan sulit dalam penghitungan matematisnya.

Bangun berdimensi fraktal yang akan dihitung dimensi Hausdorffnya adalah himpunan Cantor, debu Cantor, dan kurva von Koch. Himpunan Cantor terdefinisi pada interval $[0,1]$ dan dikonstruksikan dengan menghilangkan sepertiga bagian tengah setiap interval yang terbentuk. Debu Cantor adalah fraktal yang diterapkan pada bidang datar, yaitu persegi. Konstruksinya memakai prinsip yang sama dengan himpunan Cantor. Kurva von Koch juga terdefinisi pada interval $[0,1]$, tetapi mempunyai prinsip konstruksi yang berbeda dengan himpunan Cantor. Kurva ini dikonstruksikan dengan mengganti sepertiga bagian tengah setiap interval yang terbentuk sebelumnya dengan dua sisi segitiga dan setiap sisi memiliki panjang yang sama dengan panjang interval yang diganti.

Dimensi Hausdorff untuk himpunan Cantor dihitung dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan sifat-sifat dari himpunan dan sifat dari ukuran Hausdorff dan dengan mengonstruksi selimut untuk himpunan Cantor. Dimensinya adalah ${}^{\log 2}/_{\log 3}$. Dimensi untuk debu Cantor ditentukan dengan memakai peta dari proyeksi fraktal tersebut. Debu Cantor berdimensi Hausdorff satu. Akhirnya, dimensi Hausdorff untuk kurva von Koch adalah ${}^{\log 4}/_{\log 3}$.

B. Saran

Dalam skripsi ini topik yang dibahas adalah dimensi Hausdorff dari beberapa bangun fraktal klasik. Metode penghitungan dimensi lainnya, seperti dimensi hitung kotak, dimensi Renyi, dan dimensi Lyapunov, dapat dijadikan bahan pelengkap, sehingga dapat semakin memahami dimensi fraktal.

Dimensi Hausdorff dibahas secara analitik, yaitu menggunakan konsep-konsep yang terdapat dalam mata kuliah analisis dan topologi. Dimensi ini dapat dilihat dari sudut pandang lain dengan membahasnya secara numerik. Pembahasan tentang penghitungan dimensi Hausdorff secara numerik ini cukup menantang bagi siapapun yang menyukai pemrograman.

Bangun yang dihitung dimensi fraktalnya adalah himpunan Cantor, debu Cantor, dan kurva von Koch. Namun, masih terdapat banyak bangun yang memiliki dimensi tidak bulat, antara lain segitiga Sierpinski, kurva Peano, dan generalisasi dari himpunan Cantor, debu Cantor, dan kurva von Koch. Bangun berdimensi fraktal yang terkenal berada dalam himpunan bilangan kompleks, yakni himpunan-himpunan Julia dan himpunan Mandelbrot. Penghitungan dimensi untuk kedua himpunan tersebut memerlukan keahlian tertentu karena penghitungannya yang rumit.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G. (1995). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure (Wiley Classics Library Edition)*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

_______________ dan Sherbert, Donald R. (2011). *Introduction to Real Analysis (4th Edition)*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Falconer, Kenneth. (2003). *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications (2nd Edition)*. West Sussex: John Wiley and Sons Ltd.

________________. (2013). *Fractals: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press.

Kumaresan, S. (2005). *Topology of Metric Spaces*. Harrow: Alpha Science International Ltd.

Peitgen Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut, dan Saupe, Dietmar. (2004). *Chaos and Fractals (2rd Edition)*. New York: Springer.

Soemantri, R. (1998). Dimensi Tak Utuh: Pendekatan Praktis dan Teoretis. Dalam Frans Susilo, St. Suwarsono, dan Fr. Y. Kartika Budi (Ed.). *Pendidikan Matematika dan Sains: Tantangan dan Harapan* (hlm. 106-121). Yogyakarta: Penerbitan Universitas Sanata Dharma.

Sohrab, Houshang H. (2003). *Basic Real Analysis*. Boston: Birkhäuser.

Yeh, J. (2006). *Real Analysis: Theory of Measure and Integration (2nd Edition)*. London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.