Fungsi Zeta Riemann & Hipotesis Riemann

Hendra Gunawan

Bandung, 25 September 2018

Bernhard Riemann (1826-1866)

Hot News

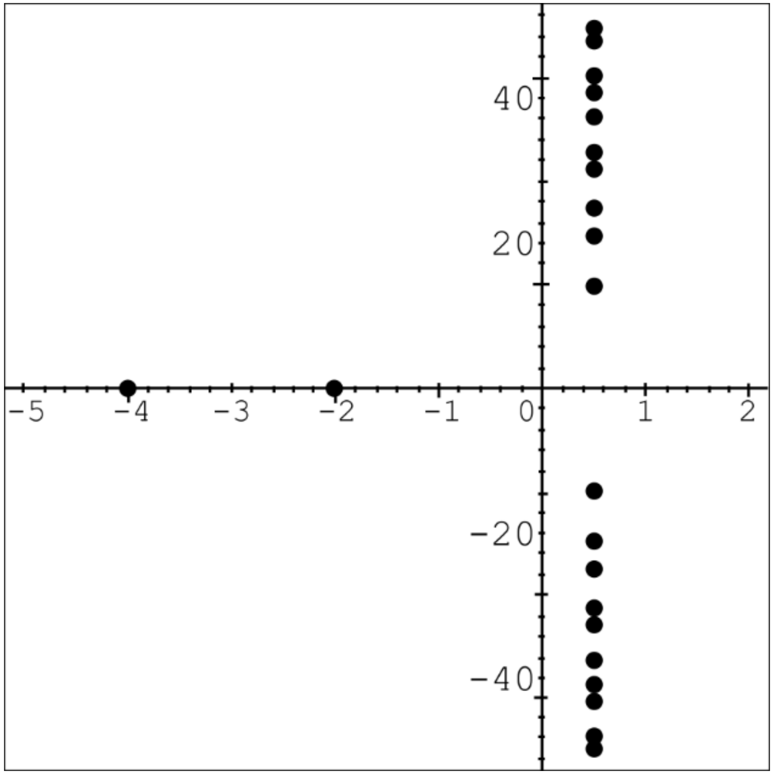
Kemarin, Senin 24-09-2018, **Michael Atiyah** (89 thn) memberikan seminar pada **Heidelberg Laureate Forum** dan menyampaikan bukti **Hipotesis Riemann**.

Hipotesis Riemann diajukan oleh **Bernhard Riemann** pada tahun 1859 dan dinyatakan oleh **David Hilbert** sebagai masalah ke-8 dari 23 masalah yang dikemukakannya pada **ICM 1900** di Paris.

Hipotesis Riemann dicantumkan oleh **The Clay Institute** sebagai salah satu di antara **Millenium Prize Problems**.

Hipotesis Riemann

Hipotesis Riemann menyatakan bahwa **Fungsi zeta Riemann** ζ(s) hanya memiliki akar bilangan genap negatif dan bilangan kompleks dengan bagian real ½.



Fungsi Zeta Riemann

Fungsi zeta Riemann adalah fungsi kompleks

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

yang pada awalnya terdefinisi untuk $s \in \mathbb{C}$ dengan $\mathrm{Re}(s) > 1$, diperluas ke seluruh bidang kompleks melalui **kontinuasi analitik**.

Rujukan: S. Lang, *Complex Analysis*, 3rd ed., Springer-Verlag, NY 1993.

Sifat Simetri

Fungsi zeta Riemann memenuhi persamaan

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \Gamma(1-s) \frac{\sin \frac{1}{2}\pi s}{\pi} \zeta(1-s) \qquad [*]$$

Pada awalnya, [*] berlaku untuk $\mathrm{Re}(s) < 0$, tetapi kemudian dengan kontinuasi analitik [*] berlaku untuk seluruh *s*.

Akar-Akar Trivial Fungsi Zeta Riemann

$$\zeta(s) = (2\pi)^s \Gamma(1-s) \frac{\sin \frac{1}{2}\pi s}{\pi} \zeta(1-s) \qquad [*]$$

Melalui persamaan [*], kita dapat menghitung bahwa $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

Fakta ini sering dipelesetkan sebagai

$$1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Catat bahwa melalui [*] kita dapatkan $\zeta(s) = 0$ untuk $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}$.

Dalam hal ini, $s = -2k,\ k \in \mathbb{N}$, merupakan **akar-akar trivial** dari $\zeta(s)$.

Hipotesis Riemann

Riemann membuat konjektur bahwa akar-akar lainnya hanya mungkin ada pada garis $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Catat bahwa garis $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ merupakan garis simetri persamaan [*].

Kaitan Hipotesis Riemann dengan Teori Bilangan

Untuk $\text{Re}(s) > 1$, kita mempunyai

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prima}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Hasil kali di ruas kanan dikenal sebagai **hasil kali Euler**.

Banyaknya Bilangan Prima (1)

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = \Phi(s) + \sum_p h_p(s)$$

dengan

$$\Phi(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

dan

$$\left|h_p(s)\right| \leq C\,\frac{\log p}{|p^{2s}|}.$$

Jadi $\Phi(s)$ meromorfik untuk $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ dan mempunyai kutub di $s = 1$ dan akar-akar $\zeta(s)$ saja.

Banyaknya Bilangan Prima (2)

Jika

$$\varphi(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

maka

$$\Phi(s) = s \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Jika

$$\pi(x) := \text{banyaknya bilangan prima} \leq x,$$

maka

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Epilog

Banyak teorema tentang bilangan prima yang bertumpu pada Hipotesis Riemann (bahwa fungsi zeta Riemann tidak memiliki akar selain bilangan genap negatif dan bilangan kompleks dengan bagian real $\frac{1}{2}$).

Kebenaran Hipotesis Riemann sangat krusial. Bila Hipotesis Riemann ternyata salah, banyak teorema tentang bilangan prima gugur.