Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II.

Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen.

Von *Theodor Schneider* in Frankfurt a. M.

Es sind bis jetzt nur sehr wenige Transzendenzaussagen über elliptische Funktionen bekannt. Im Jahre 1931 bewies C. L. Siegel, daß von den vier Größen $g_2, g_3, \omega_1, \omega_2$ nicht alle algebraisch sind [1]), wenn durch g_2 und g_3 die Koeffizienten in der Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion und durch ω_1 und ω_2 zwei zu dieser Funktion gehörende primitive Perioden bezeichnet werden; falls das Periodenverhältnis $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ und die Größen g_2 und g_3 algebraisch sind (z. B. im Falle der komplexen Multiplikation), folgt daraus die Transzendenz von ω_1 und von ω_2. Im Februar dieses Jahres zeigte ich in einer noch nicht gedruckten Arbeit, daß auch die vier Größen g_2, g_3, ω_1 und η_1 nicht sämtlich algebraisch sind.

Diesen Aussagen will ich in dieser Arbeit den folgenden umfassenderen Satz anreihen:

Besteht zwischen β und τ keine lineare Beziehung mit rationalen Zahlkoeffizienten, so sind die fünf Größen g_2, g_3, τ, β und $\wp(\omega_1\beta)$ nicht alle algebraisch.

Wenn die beiden Zahlen β und τ die Eigenschaft haben, daß zwischen ihnen keine (nichttriviale) lineare Gleichung mit rationalen Koeffizienten besteht, so sage ich: es sind β und τ linear unabhängig; im andern Falle nenne ich sie linear abhängig.

Mit dieser Bezeichnung spreche ich den behaupteten Satz in folgenden Fassungen aus:

1. Es seien g_2, g_3, τ und β algebraisch (z. B. sei τ imaginärquadratisch); dann ist $\wp(\omega_1\beta)$ transzendent, wenn β und τ linear unabhängig sind.

2. Es seien $g_2, g_3, \tau, \wp(\omega_1\beta)$ algebraisch; dann ist entweder β transzendent oder es sind τ und β linear abhängig, was man auch durch die Worte — es ist $\beta\omega_1$ ein rationaler Teilwert einer Periode — ausdrücken kann.

3. Man bilde ein Integral erster Gattung mit algebraischen Koeffizienten längs einer Kurve vom Geschlecht Eins mit algebraischen Zahlkoeffizienten zwischen zwei algebraischen Stellen. Der Wert des Integrals ist bei algebraischem τ entweder ein rationaler oder ein transzendenter Teil einer Periode.

Die Aussagen 1 und 2 gelten auch für eine elliptische Funktion $f(u)$ mit den Perioden ω_1 und ω_2 statt der Funktion $\wp(u)$, wenn die in der Darstellung von $f(u)$ durch $\wp(u)$ und $\wp'(u)$ auftretenden Koeffizienten algebraisch sind.

---

[1]) Über die Perioden elliptischer Funktionen, J. f. Math. **167** (1932), p. 62.

Speziell ist in den vorhergehenden Sätzen auch eine Aussage über konstruierbare Teile des Lemniskatenbogens enthalten, die besagt, daß außer den schon bekannten rationalen Teilen nur noch geeignete transzendente Teile des Gesamtumfangs elementargeometrisch konstruierbar sind. — In der Formulierung 2 ist als Spezialfall ein Satz über die Nullstellen der $\wp$-Funktion enthalten. Nimmt man zu diesem Satz noch die in der Teilungstheorie der elliptischen Funktionen bewiesene Tatsache, daß im Falle der komplexen Multiplikation die $\wp$-Funktion an rationalen Periodenteilen nur in zwei Ausnahmefällen verschwinden kann, nämlich im lemniskatischen ($\tau = i, g_3 = 0$) und im äquianharmonischen Fall ($\tau = i\sqrt{3}, g_2 = 0$), so erhält man die Aussage:

Sind g_2 und g_3 algebraisch und liegt komplexe Multiplikation vor, so befinden sich die Nullstellen der $\wp$-Funktion bei Ausschluß der beiden genannten Ausnahmefälle nur an transzendenten Teilen einer Periode.

Während sich der behauptete Hauptsatz nach dem Resultat des vorstehenden Teiles I dieser Arbeit [2]) vermuten läßt, ist doch hier der Beweisgang von dem dortigen verschieden. Es ist aber leicht möglich, den hier vorzutragenden Beweis auf das dort behandelte Hilbertsche Problem zu übertragen, wobei sich sogar vieles einfacher gestaltet. Auch kann man mit dieser Beweismethode einen Satz über ganze ganzwertige Funktionen gewinnen. Ich beweise nun den behaupteten Satz.

Für ω_1 setze ich fortan ω und mache die Voraussetzung: Es seien g_2, g_3, τ, β, $\wp(\omega\beta)$ und damit auch $\wp'(\omega\beta)$ algebraisch. Die sechs Größen mögen in einem Körper $\mathfrak{K}$ vom Grade s liegen. Dann werden die sämtlichen Größen durch Multiplikation mit einer geeigneten, nur von $\mathfrak{K}$ abhängigen natürlichen Zahl γ_1 ganzalgebraisch. Ferner seien β und τ linear unabhängig. Unter $\lambda, l, \varkappa, k$ mit $\lambda \leqq l$ und $\varkappa \leqq k$ verstehe ich natürliche Zahlen. Ich behaupte nun in

Hilfssatz 1: Zu jedem l gibt es eine von Null verschiedene, in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraische Zahl Φ_l so, daß alle Zahlen $\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\Phi_l$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, l$; $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$) ganzalgebraisch sind und daß die Ungleichung

$$(1) \qquad \boxed{\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\Phi_l} < \gamma_2^{l^4 \cdot 2k} \text{ [3])}$$

besteht; hierbei sei γ_2, wie auch die später vorkommenden $\gamma_3, \gamma_4, \ldots$, eine nur von $\mathfrak{K}$ abhängige natürliche Zahl.

Beweis: Mittels des Multiplikationstheorems der $\wp$-Funktion läßt sich die Funktion $\wp(\lambda u)$ rational ausdrücken durch $\wp(u)$, $\wp'(u)$, g_2 und g_3 und zwar ist nach Fricke [4]):

$$(2) \qquad \wp(\lambda u) = \wp(u) - \frac{\Psi_{\lambda-1}(u)\,\Psi_{\lambda+1}(u)}{\Psi_\lambda(u)^2};$$

dabei gelten für $\Psi_\lambda(u)$ die folgenden Rekursionsformeln:

$$\Psi_1(u) = 1\,,$$
$$\Psi_2(u) = -\wp'(u)\,,$$
$$\Psi_3(u) = 3\wp(u)^4 - \tfrac{3}{2} g_2\wp(u)^2 - 3g_3\wp(u) - \tfrac{1}{16} g_2^2\,,$$
$$\Psi_4(u) = \wp'(u)\,\{2\wp(u)^6 - \tfrac{5}{2} g_2\wp(u)^4 - 10g_3\wp(u)^3 - \tfrac{5}{8} g_2^2\wp(u)^2 - \tfrac{1}{2} g_2g_3\wp(u) + \tfrac{1}{32} g_2^3 - g_3^2\}\,,$$

und allgemein gilt:

---

[2]) Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I.

[3]) Unter $\boxed{A}$ sei für algebraisches A das Maximum der absoluten Beträge aller Konjugierten von A verstanden.

[4]) Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig u. Berlin 1922, Bd. II, p. 184.

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\Psi_{2\lambda+1}(u) = \Psi_{\lambda+2}(u)\,\Psi_\lambda^3(u) - \Psi_{\lambda-1}(u)\,\Psi_{\lambda+1}^3(u) && (\lambda > 1),\\ &\Psi_{2\lambda}(u)\,\Psi_2(u) = \Psi_\lambda(u)\,\{\Psi_{\lambda+2}(u)\,\Psi_{\lambda-1}^2(u) - \Psi_{\lambda-2}(u)\,\Psi_{\lambda+1}^2(u)\} && (\lambda > 2).\end{aligned}$$

Zunächst überzeuge man sich, daß der Quotient $\Psi_{2\lambda}(u):\Psi_2(u)$ und damit auch die Funktion $\Psi_{2\lambda}(u)$, ebenso wie $\Psi_{2\lambda+1}(u)$, ein Polynom in den vier Größen $\wp(u), \wp'(u), g_2$ und g_3 ist. Ferner folgt aus den Rekursionsformeln, daß die Koeffizienten eines jeden Polynoms $\Psi_\lambda(u)$ rationale Zahlen sind, deren Nenner ein Teiler von 2^{λ^2-1} ist. Versieht man $\wp(u), \wp'(u), g_2, g_3$ mit passenden Gewichten, indem man setzt: $\wp = c_1 t^2$, $\wp' = c_2 t^3$, $g_2 = c_3 t^4$, $g_3 = c_4 t^6$, so erkennt man leicht, daß Ψ_λ in t die Dimension $\lambda^2 - 1$ hat. Daraus folgt, daß der höchste Gesamtgrad des Polynoms $\Psi_\lambda(u)^2$ und nach (2) auch der des Polynoms $\Psi_\lambda(u)^2\wp(\lambda u)$ in den Größen $\wp(u), \wp'(u), g_2, g_3$ kleiner ist als $2\lambda^2$. Setzt man nun für u den Zahlenwert $\omega\beta$ ein, so ist die Zahl $\Psi_\lambda(\omega\beta)$ in $\mathfrak{K}$ algebraisch; aus den vorstehenden Untersuchungen folgt aber weiter, daß $\Psi_\lambda(\omega\beta)\cdot 2^{\lambda^2-1}\gamma_1^{\lambda^2-1}$ in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraisch ist. Nach (2) hat auch die Zahl $\wp(\lambda\omega\beta)\,\Psi_\lambda^2(\omega\beta)\cdot 2^{2\lambda^2}\gamma_1^{2\lambda^2}$ einen ganzalgebraischen Wert. Setze ich daher $\Phi_l = \prod_{\lambda=1}^{l}\left(\Psi_\lambda^2(\omega\beta)\cdot 2^{2\lambda^2}\gamma_1^{2\lambda^2}\right)^k$, so ist immer $\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\,\Phi_l$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l;\ \varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ ganzalgebraisch. Ausgehend von (2) und von der Unabhängigkeit von β und τ, schließt man leicht auf das Nichtverschwinden der Zahlen $\Psi_\lambda(\omega\beta)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ und damit auf das Nichtverschwinden von Φ_l. Aus dem Bestehen von (3) folgt die Richtigkeit der Beziehungen

$$\overline{|\Psi_{2\lambda+1}(\omega\beta)|} \leqq \overline{|\Psi_{\lambda+2}(\omega\beta)|}\cdot\overline{|\Psi_\lambda(\omega\beta)|}^3 + \overline{|\Psi_{\lambda-1}(\omega\beta)|}\cdot\overline{|\Psi_{\lambda+1}(\omega\beta)|}^3,$$

$$\overline{|\Psi_{2\lambda}(\omega\beta)|} < \gamma_3\,\overline{|\Psi_\lambda(\omega\beta)|}\cdot\left\{\overline{|\Psi_{\lambda+2}(\omega\beta)|}\cdot\overline{|\Psi_{\lambda-1}(\omega\beta)|}^2 + \overline{|\Psi_{\lambda-2}(\omega\beta)|}\cdot\overline{|\Psi_{\lambda+1}(\omega\beta)|}^2\right\},$$

und daraus erhält man $\overline{|\Psi_\lambda(\omega\beta)|} < \gamma_4^{\lambda^3}$. Mithin ist $\overline{\left|\dfrac{\Phi_l}{\Psi_\lambda^2(\omega\beta)}\right|} < \gamma_4^{2kl^4}\,(2\gamma_1)^{2kl^3}$, woraus nach (2) die Abschätzung

$$\overline{|\wp(\lambda\omega\beta)^{\varkappa-1}\Phi_l|} < \gamma_4^{2kl^4}\,(2\gamma_1)^{2kl^3}\,\gamma_5^k\,\gamma_4^{2k(l+1)^3}\,(2\gamma_1)^{2k(l+1)^2} < \gamma_2^{2kl^4}$$

folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Unter m, n und d seien noch näher zu bestimmende, natürliche Zahlen verstanden, zwischen denen die Beziehungen

$$4d^{60} = n = km$$

und

$$(4)\qquad 2k^2 < d^4$$

gelten. Dann mache ich die folgende Aussage in

Hilfssatz 2: Die Form

$$L(x) = P_1(x) + P_2(x)\wp(\omega x) + \cdots + P_k(x)\wp(\omega x)^{k-1},$$

wobei die $P_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ Polynome in x vom Grade $2m - 1$ seien, verschwinde an den Stellen $a + b\tau + c\beta$ mit

$$1 \leqq |a| \leqq d^{24}, \quad 1 \leqq |b| \leqq d^{24}, \quad 1 \leqq c \leqq d^{12}.$$

Dann sind die Koeffizienten X_i der Polynome $P_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ derart wählbar, daß sie nicht sämtlich verschwinden, in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraisch sind und der Bedingung

$$(5)\qquad \overline{|X_i|} < \gamma_6^m\,n^m$$

genügen.

Beweis: Es gelten für die $2n$ unbekannten Koeffizienten X_i genau n lineare homogene Gleichungen. Die Koeffizienten A_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, 2n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ dieser Gleichungen will ich untersuchen. Sie sind Polynome in β und τ vom Grade $G_1 < 2m$ und in $\wp(\omega\beta), \wp(2\omega\beta), \ldots, \wp(d^{12}\omega\beta)$ vom Grade $G_2 < k$ mit ganzrationalen Zahlkoeffizienten. Nach Hilfssatz 1 sind die Zahlen $A_{ij}\,\Phi_{d^{12}}$ in $\mathfrak{K}$ algebraisch und die Zahlen $A_{ij}\,\Phi_{d^{12}}\,\gamma_1^{4m} = a_{ij}$ sind ganzalgebraisch. Ferner schließt man aus dem obigen und aus (1), daß die folgende Ungleichung gilt:

$$\boxed{a_{ij}} < (\gamma_7\, d^{24})^{2m}\, \gamma_2^{2kd^{48}} < \gamma_7^{2m}\, \gamma_2^{2kd^{48}}\, n^m.$$

Nach (4) ist $2kd^{48} < m$ und mithin $\boxed{a_{ij}} < \gamma_8^m n^m$. Durch einen zu Hilfssatz 1 aus Teil I analogen Satz erhält man die Aussage, daß die homogenen linearen Gleichungen $\sum_{i=1}^{2n} a_{ij} X_i = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ lösbar sind in nicht sämtlich verschwindenden, in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraischen Zahlen X_i, die der Bedingung (5) genügen.

Bis hierhin liefen die Beweise von Teil I und II parallel; nun aber werden dort vorkommende algebraische Schlüsse hier durch funktionentheoretische ersetzt werden.

Unter den Gitterpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}(q)$ will ich die Gesamtheit der Stellen $a + b\tau + c\beta$ mit

$$1 \leqq |a| \leqq q^2, \quad 1 \leqq |b| \leqq q^2, \quad 1 \leqq c \leqq q$$

verstehen. Die natürlichen Zahlen δ und ν und die Zahl μ sollen die folgenden Bedingungen erfüllen: $\delta \geqq d$ und $4\delta^{60} = \nu = k\mu$. Aus (4) folgt dann

$$2k^2 < \delta^4. \tag{6}$$

Ich behaupte nun in

Hilfssatz 3: Ist d genügend groß gewählt, so folgt aus dem Verschwinden von $L(x)$ in $\mathfrak{B}(\delta^{12})$, daß die Funktion $L(x)$ auch an allen Stellen von $\mathfrak{B}(\delta^{13})$ den Wert Null annimmt.

Beweis: Es sei ξ irgendeine der Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}(\delta^{13})$. Weiterhin gibt es eine Konstante γ_9 so, daß $L(z) \cdot \prod_{|a'|<\delta^{28},\, |b'|<\delta^{28}} (\gamma_1(z - a' - b'\tau))^{2k}$ eine in dem Kreis C um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \frac{1}{\gamma_9}\delta^{28}$ ganze Funktion ist. Die Zahl

$$L_1(\xi) = L(\xi) \prod (\gamma_1(\xi - a' - b'\tau))^{2k}\, \Phi_{\delta^{12}}\, \gamma_1^{4m}$$

ist nach Hilfssatz 1 ganzalgebraisch. Wenn ich also beweisen kann, daß die in $\mathfrak{K}$ gebildete Norm dieser Zahl, die ich mit $N(L_1(\xi))$ bezeichne, absolut genommen kleiner als Eins ist, dann ist mein Hilfssatz bewiesen.

Die nach Voraussetzung innerhalb von C ganze Funktion $\dfrac{L_1(z)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{12})}(z - (a + b\tau + c\beta))}$ hat nach dem Residuensatz für das Argument $z = \xi$ die Darstellung

$$\frac{L_1(\xi)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{12})}(\xi - (a + b\tau + c\beta))} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{L_1(x)}{\prod_{\mathfrak{B}(\delta^{12})}(x - (a + b\tau + c\beta))} \cdot \frac{dx}{x - \xi}; \tag{7}$$

hierbei sei C' eine aus den Mittellinien des Periodennetzes der $\wp$-Funktion gebildete Treppenkurve, die ganz innerhalb des Kreises C liegt und einen möglichst großen Flächeninhalt besitzt. Auf dieser Kurve ist die Funktion $\wp(\omega x)$ beschränkt. Ich will zunächst $L_1(x)$, wenn x ein Punkt von C' ist, abschätzen. Zu diesem Zweck überzeuge ich mich von der Richtigkeit der folgenden Ungleichungen. Es ist nach (5)

$$\underset{x \text{ auf } C'}{\operatorname{Max}} |L(x)| < \gamma_6^m \, n^m (\delta^{28})^{2m} \, \gamma_{10}^k \, 2km < \gamma_{11}^m \, \nu^{2m},$$

und durch Berücksichtigung von (6) erhält man

$$\underset{x \text{ auf } C'}{\operatorname{Max}} |\Pi(\gamma_1(x - a' - b'\tau))^{2k}| < (\gamma_{12}\delta^{28})^{4\delta^{56} \cdot 2k} < \gamma_{12}^\mu \, \nu^\mu .$$

Daraus ergibt sich unter Benutzung von (1) die nachstehende Ungleichung:

$$(8) \qquad \underset{x \text{ auf } C'}{\operatorname{Max}} |L_1(x)| < \gamma_{11}^m \, \nu^{2m} \, \gamma_{12}^\mu \, \nu^\mu \, \gamma_2^{\delta^{52} \cdot 2k} \, \gamma_1^{4m} < \gamma_{13}^\mu \, \nu^{3\mu} .$$

Dieselbe Abschätzung gilt, eventuell mit einem anderen γ_{13}, für $\left|\overline{L_1(\xi)}\right|$. Aus (7) und (8) folgt wegen $\delta \geqq d$ für hinreichend großes d

$$|L_1(\xi)| < \gamma_{13}^\mu \, \nu^{3\mu} \left(\frac{\delta^{28}}{\gamma_{14}}\right)^{-\nu} (\gamma_{15}\delta^{26})^\nu \, \gamma_{16} < \gamma_{17}^\nu \, \nu^{3\mu} \, \delta^{-2\nu} .$$

Durch einfache Umformung ergibt sich daraus

$$|L_1(\xi)| < \gamma_{17}^\nu \, (4\delta^{60})^{3\mu} \, \delta^{-2k\mu} < \gamma_{18}^\nu \, \delta^{-2\mu(k-90)} .$$

Mithin erhält man für die Norm die Abschätzung

$$(9) \qquad |N(L_1(\xi))| < \gamma_{19}^{\mu(s-1)} \, \nu^{3\mu(s-1)} \, \gamma_{18}^\nu \, \delta^{-2\mu(k-90)} < \gamma_{20}^\nu \, \delta^{-2\mu(k-90s)} .$$

Setze ich nun $k = 90s + 1$, so kann ich d so groß wählen, daß aus (9)

$$|N(L_1(\xi))| < 1$$

folgt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. —

Jetzt komme ich zum Beweis des Hauptsatzes. Für d sollen die folgenden Bedingungen, in denen alle seitherigen auch enthalten sind, gelten: Es sei (4) erfüllt und Hilfssatz 3 gültig; ferner sei $d_1 = [d^{\frac{13}{12}}]$ größer als d und schließlich sei d die kleinste, durch k teilbare natürliche Zahl, die den vorstehenden drei Forderungen genügt. Damit sind auch die natürlichen Zahlen m und n festgelegt. Unter d_0 sei der Wert von d verstanden und es werde d_{r+1} definiert durch $d_{r+1} = [d_r^{\frac{13}{12}}]$ $(r = 0, 1, \ldots)$. Dann divergieren die Zahlwerte d_r mit wachsendem r gegen Unendlich. Verschwindet nun $L(x)$ in $\mathfrak{B}(d_r^{12})$, so ist es nach Hilfssatz 3 auch für alle Zahlwerte $a + b\tau + c\beta$ in $\mathfrak{B}(d_r^{13})$ gleich Null. Nach Definition ist aber $d_r^{13} \geqq d_{r+1}^{12}$, folglich verschwindet $L(x)$ sicher in $\mathfrak{B}(d_{r+1}^{12})$. In den Gitterpunkten des Bereiches $\mathfrak{B}(d_0^{12})$ nimmt es den Wert Null nach Konstruktion an. Durch vollständige Induktion folgt daraus, daß die Funktion $L(x)$ für alle Argumentwerte $a + b\tau + c\beta$, $1 \leqq |a|$, $1 \leqq |b|$, $1 \leqq c$ den Wert Null annimmt. Diese Stellen besitzen in der komplexen Ebene mindestens einen Häufungspunkt im Endlichen. Ferner ist $L(x)$ eine meromorphe Funktion. Es läßt sich darstellen als Quotient zweier ganzen Funktionen, und die Nullstellen der Zählerfunktion häufen sich im Endlichen. Nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze, der durch eine einfache Überlegung zu bestätigen ist, ist dies nur möglich, wenn die im Zähler stehende ganze Funktion identisch Null ist. Also ist auch $L(x)$ identisch Null und $\wp(\omega x)$ ist eine algebraische Funktion. Dies ist ein Widerspruch, der sich nur behebt, wenn man die zu Anfang gemachte Voraussetzung, die besagt, daß die fünf Größen g_2, g_3, τ, β und $\wp(\omega\beta)$ sämtlich algebraisch sind, fallen läßt.

Eingegangen 20. Juli 1934.