Вступ до теорії зображень

Юрій Дрозд

Зміст

Розділ I

Зображення груп

sec1 1.1. Основні поняття

11 Означення 1.1.1. (1) *Зображенням групи* G над полем $\Bbbk$ зветься гомоморфізм $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, де $\mathrm{GL}(V)$ — група автоморфізмів (обертовних лінійних операторів) простору V.

(2) *Гомоморфізмом* зображення ρ в зображення $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ зветься лінійне відображення $f : V \to W$ таке, що $f\rho(g) = \theta(g)f$ для всіх елементів $g \in G$. Множину всіх гомоморфізмів з ρ в θ позначають через $\mathrm{Hom}_G(\rho, \theta)$. Очевидно, це є векторний простір над полем $\Bbbk$. Його розмірність позначимо $h(\rho, \theta)$. Зокрема, $\mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$ є $\Bbbk$-алгеброю.

(3) Підпростір $U \subseteq V$ зветься *інваріантним* (відносно зображення ρ), якщо $\rho(g)u \in U$ для всіх векторів $u \in U$ і всіх елементів $g \in G$.

(4) Зображення ρ зветься *незвідним*, якщо $V \neq 0$ і єдиними інваріантними підпросторами в просторі V є нульовий підпростір і весь простір V. У цьому випадку визначене *обмеження* ρ_U зображення ρ на підпростір U.

(5) Зображення ρ зветься *розкладним*, якщо V містить два ненульові інваріантні підпростори V_1, V_2 такі, що $V = V_1 \oplus V_2$. У цьому випадку також кажуть, що $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, де $\rho_i = \rho_{V_i}$. Якщо таких підпросторів не існує, а $V \neq 0$, зображення ρ зветься *нерозкладним*.

(6) Зображення ρ зветься *цілком звідним*, якщо V містить такі інваріантні підпростори $V_1, V_2, \dots, V_m$, що $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, а всі обмеження ρ_{V_i} є незвідними.

12 Приклад 1.1.2. (1) *Одиничне зображення* ставить у відповідність кожному елементу $g \in G$ тотожне відображення $\mathbb{1}_V$. Очевидно, воно є нерозкладним тоді й лише тоді, коли $\dim V = 1$.

(2) Нехай група G діє на множині X. З цією дією пов'язані два зображення групи G.

(a) Розглянемо векторний простір $\Bbbk X$, базою якого є елементи множини X. Інакше кажучи, елементи з $\Bbbk X$ — це формальні лінійні комбінації $\sum_{x \in X} \lambda_x x$, де $\lambda_x \in \Bbbk$ і всі коефіцієнти λ_x, крім скінченної кількості, рівні 0. Визначимо

$\rho_X(g)\sum_{x\in X}\lambda_x x=\sum_{x\in X}\lambda_x gx$. Перевірте, що це дійсно зображення.

(b) Розглянемо тепер векторний простір $\Bbbk^X$ усіх функцій $X\to\Bbbk$. Визначимо оператор $\rho^*_X(g)$ правилом $(\rho^*_X(g)f)(x)=f(g^{-1}x)$ для кожної функції $f:X\to\Bbbk$. Перевірте, що це також є зображенням.

(c) Нехай $\Bbbk^{(X)}\subseteq\Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі скінченним носієм, тобто таких, що множина $\{\,x\mid f(x)\neq 0\,\}$ є скінченною. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ^*_X. Доведіть, що обмеження ρ^*_X на цей підпростір ізоморфне зображенню ρ_X. Зокрема, якщо множина X є скінченною, то зображення ρ_X і ρ^*_X ізоморфні. Чи буде так і коли ця множина нескінченна?

Якщо $X=G$ з дією лівими зсувами, зображення ρ_G у просторі $\Bbbk G$ зветься *регулярним зображенням* групи G над полем $\Bbbk$, а зображення ρ^*_G у просторі $\Bbbk^G$ — *корегулярним зображенням.*

`shur` Теорема 1.1.3 (Лема Шура). (1) *Якщо зображення $\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$ і $\theta:G\to\mathrm{GL}(W)$ є незвідними, то будь-який гомоморфізм $f:\rho\to\theta$ є або нульовим, або ізоморфізмом. Зокрема, кільце ендоморфізмів незвідного зображення є тілом.*

(2) *Якщо поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим, а ρ є скінченновимірним незвідним зображенням, то кожен ендоморфізм зображення ρ є скалярним (тобто рівним $\lambda\mathbb{1}_V$, де $\mathbb{1}_V$ — тотожне відображення простору V).*

Доведення. (1) Нехай $f\neq 0$. Легко переконатися (зробіть це), що $\operatorname{Ker} f$ є інваріантним підпростором у V, а $\operatorname{Im} f$ є інваріантним підпростором у W. Оскільки $\operatorname{Ker} f\neq V$, то $\operatorname{Ker} f=0$, тобто f — мономорфізм. Оскільки $\operatorname{Im} f\neq 0$, то $\operatorname{Im} f=W$, тобто f — епіморфізм. Отже, f — ізоморфізм.

(2) Оскільки поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, а простір V скінченновимірний, оператор f має власне число λ. Тоді оператор $f-\lambda\mathbb{1}_V$ має ненульове ядро, отже, необертовний. Але цей оператор також є ендоморфізмом зображення ρ. Тому $f-\lambda\mathbb{1}_V=0$ і $f=\lambda\mathbb{1}_V$. □

`14` Наслідок 1.1.4. *Незвідне зображення комутативної групи над алгебрично замкненим полем є одновимірним.*

Доведення. Якщо група G комутативна, то $\rho(h)\rho(g)=\rho(g)\rho(h)$ для всіх $g,h\in G$. Тому $\rho(h)$ є ендоморфізмом зображення ρ. Якщо ρ незвідне й скінченновимірне, то всі оператори $\rho(h)$ є скалярними. Але тоді будь-який підпростір є інваріантним. Отже, V не має підпросторів, крім 0 та V. Тому $\dim V=1$. □

`maschke` Теорема 1.1.5 (Теорема Машке). *Нехай G — скінченна група порядку n, причому n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$ (наприклад,*

$\operatorname{char}\Bbbk = 0$*). Тоді кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є незвідним. Рівносильно, кожне зображення групи G є цілком звідним.*

Доведення. Доведення теореми Машке ґрунтується на наступній лемі, яку ми також використаємо й надалі.

lem Лема 1.1.6. *Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ і $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ — два зображення скінченної групи G, $\varphi : V \to W$ — довільне лінійне відображення. Тоді відображення*

$$\tilde{\varphi} = \textstyle\sum_{x\in G} \theta(x^{-1})\varphi\rho(x)$$

є гомоморфізмом $\rho \to \theta$.[1]

Дійсно, для довільного елемента $g \in G$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}\rho(h)(v) &= \sum_{g\in G} \rho(g^{-1})\varphi\rho(g)\rho(h)(v) = \sum_{g\in G} \rho(g^{-1})\varphi\rho(gh)(v) = \\ &= \sum_{q\in G} \rho(hq^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \sum_{q\in G} \rho(h)\rho(q^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \\ &= \rho(h)\sum_{q\in G} \rho(q^{-1})\varphi\rho(q)(v) = \rho(h)\tilde{\varphi}(v).\end{aligned}$$

Тут у першому й другому рядках ми скористалися тим, що ρ — зображення, тобто переводить добуток у добуток, а при переході від першого рядка до другого ми зробили заміну змінних $q = gh$.

Перейдемо до доведення теореми Машке. Припустимо, що зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ є звідним, а $U \subset V$ — інваріантний підпростір, відмінний від 0 і від V. Існує доповнення U' підпростору U, тобто такий підпростір, що $V = U \oplus U'$. Розглянемо оператор $\pi : V \to U$ *проектування* на U: саме, якщо $v = u + u'$, де $u \in U$, $u' \in U'$, то $\pi(v) = u$. Очевидно, $\pi^2 = \pi$ і $\pi(u) = u$ для $u \in U$. За лемою, оператор $\bar{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} \rho(g^{-1})\pi\rho(g)$ є ендоморфізмом зображення ρ. Якщо $u \in U$, то $\rho(g)(u) \in U$, тому $\pi\rho(g)(u) = \rho(g)(u)$, звідки випливає, що $\bar{\pi}(u) = u$. З тих самих міркувань завжди $\bar{\pi}(v) \in U$. Тому $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}$. Позначимо $U'' = \operatorname{Ker}\bar{\pi}$. Це інваріантний підпростір і $U \cap U'' = 0$. З іншого боку, $v = \bar{\pi}(v) + (v - \bar{\pi}(v))$ і другий доданок лежить в U''. Отже, $V = U \oplus U''$, тобто зображення ρ є розкладним. $\square$

16 Наслідок 1.1.7. *Нехай виконані умови теореми Машке.*

1. *Кожне нерозкладне зображення групи G над полем $\Bbbk$ є скінченновимірним.*
2. *Зображення ρ є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли його кільце ендоморфізмів є тілом.*
3. *Якщо поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, то зображення ρ є незвідним (або, що те саме, нерозкладним) тоді й лише тоді, коли $h(\rho, \rho) = 1$.*

[1] Зауважимо, що характеристика поля в цій лемі неістотна.

(4) *Кожне скінченновимірне зображення є цілком звідним.*

Доведення. (1) Нехай v — довільний ненульовий вектор простору V. Розглянемо підпростір U, який складається з усіх лінійних комбінацій $\sum_{g\in G} \lambda_g \rho_g(v)$, де $\lambda_g \in \Bbbk$. Він є інваріантним і скінченновимірним. За теоремою Машке, якщо зображення ρ нерозкладне, $U = V$.

(2) Припустимо, що $V = V_1 \oplus V_2$, де обидва підпростори V_1, V_2 ненульові й інваріантні. Якщо $v = v_1 + v_2$, визначимо $\pi(v) = v_1$. Це ендоморфізм зображення ρ (перевірте це), причому він ненульовий і необертовний (оскільки $\operatorname{Ker} \pi = V_2$).

(3) випливає з (2), оскільки якщо $h(\rho, \rho) = 1$, то $\operatorname{Hom}_G(\rho, \rho) = \Bbbk$.

(4) є безпосереднім наслідком теореми Машке. □

Нехай виконані умови теореми Машке. Кожне скінченновимірне зображення ρ розкладається у пряму суму нерозкладних: $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$. Серед них, звичайно, можуть бути ізоморфні. *Кратністю* $\mu(\theta, \rho)$ незвідного зображення θ у зображенні ρ зветься кількість тих прямих доданків у цьому розкладі, які ізоморфні θ.

17 Наслідок 1.1.8. *Нехай виконані умови теореми Машке. Тоді*

$$\mu(\theta, \rho) = \frac{h(\theta, \rho)}{h(\theta, \theta)} = \frac{h(\rho, \theta)}{h(\theta, \theta)}.$$

Зокрема, кратність $\mu(\theta, \rho)$ *не залежить від розкладу зображення* ρ *у пряму суму нерозкладних.*

Доведення. Нехай $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, де всі підпростори V_i інваріантні, причому зображення $\rho_i = \rho_{V_i}$ незвідні. Кожен гомоморфізм $f : \theta \to \rho$ індукує гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, а саме, якщо $f(w) = \sum_{i=1}^m v_i$, де $v_i \in V_i$, то $f_i(w) = v_i$ (перевірте, що це дійсно гомоморфізм). Відображення f повністю визначається відображеннями f_i. Навпаки, якщо задано гомоморфізми $f_i : \theta \to \rho_i$, то відображення f таке, що $f(w) = \sum_{i=1}^m f_i(w)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$ (перевірте це). Отже, $h(\theta, \rho) = \sum_{i=1}^m h(\theta, \rho_i)$. Оскільки $h(\theta, \rho_i) = 0$, якщо $\rho_i \not\simeq \theta$, і $h(\theta, \rho_i) = h(\theta, \theta)$, якщо $\rho_i \simeq \theta$, це доводить першу рівність.

Аналогічне доведення другої рівності залишається як вправа. □

18 Вправа 1.1.9. За умов теореми Машке, доведіть, що для довільних скінченновимірних зображень

$$h(\rho, \rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta, \rho) \mu(\theta, \rho') h(\theta, \theta),$$

де сума береться за всіма незвідними зображеннями. Зокрема,

$$h(\rho, \rho) = \sum_{\theta} \mu(\theta, \rho)^2 h(\theta, \theta).$$

Якщо поле алгебрично замкнене, ці формули переписуються так:

$$h(\rho,\rho') = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)\mu(\theta,\rho'),$$
$$h(\rho,\rho) = \sum_{\theta} \mu(\theta,\rho)^2.$$

Наступний корисний факт не залежить від характеристики поля.

19 Лема 1.1.10. *Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — скінченновимірне зображення. Тоді $h(\rho_G,\rho) = \dim V$, де ρ_G — регулярне зображення групи G* (див. Приклад 1.1.2).

Доведення. Для кожного вектора $v \in V$ визначимо лінійне відображення $\varphi_v : \Bbbk G \to V$ правилом $\varphi_v\big(\sum_{x\in G}\lambda_x x\big) = \sum_{x\in G}\lambda_x\rho(x)v$. Легко перевірити, що φ_v є гомоморфізмом $\rho_G \to \rho$ (зробіть це). Нехай тепер $\psi : \Bbbk G \to V$ — довільний гомоморфізм $\rho_G \to \rho$, $v = \psi(1)$ (ми ототожнюємо кожен елемент $x \in G$ з лінійною комбінацією, в якій коефіцієнт при x дорівнює 1, а всі інші коефіцієнти рівні 0). Тоді

$$\psi\big(\sum_{x\in G}\lambda_x x\big) = \sum_{x\in G}\lambda_x\psi(x) = \sum_{x\in G}\lambda_x\psi(\rho_G(x)1) = \\ = \sum_{x\in G}\lambda_x\rho(x)\psi(1) = \sum_{x\in G}\lambda_x\rho(x)v = \varphi_v\big(\sum_{x\in G}\lambda_x x\big).$$

Отже, φ_v — це всі гомоморфізми $\rho_G \to \rho$ і $h(\rho_G,\rho) = \dim V$. □

10 Наслідок 1.1.11. *Нехай $\widehat{G}$ — множина всіх попарно неізоморфних незвідних зображень групи G. Якщо виконані умови теореми Машке, то*

$$\sum_{\theta\in\widehat{G}} \frac{(\dim\theta)^2}{h(\theta,\theta)} = \#(G)$$

Зокрема, якщо поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим, то

$$\sum_{\theta\in\widehat{G}} (\dim\theta)^2 = \#(G).$$

Доведення. За Лемою 1.1.10, Вправою 1.1.9 і Наслідком 1.1.8,

$$\#(G) = \dim\rho_G = h(\rho_G,\rho_G) = \\ = \sum_{\theta\in\widehat{G}} \mu(\theta,\rho_G)^2 h(\theta,\theta) = \sum_{\theta\in\widehat{G}} \frac{h(\rho_G,\theta)^2}{h(\theta,\theta)^2} h(\theta,\theta) = \sum_{\theta\in\widehat{G}} \frac{(\dim\theta)^2}{h(\theta,\theta)}.$$

□

Якщо взяти до уваги ще Наслідок 1.1.4, одержимо наступний результат.

1a Наслідок 1.1.12. *Якщо виконані умови теореми Машке, група G є комутативною, а поле $\Bbbk$ алгебрично замкненим, то $\#(\widehat{G}) = \#(G)$.*

Надалі,до кінця цього пункту, ми вважаємо, що група G є скінченною, комутативною, а поле $\Bbbk$ є алгебрично замкненим і його характеристика не ділить порядок n групи G.

При цих припущеннях незвідні зображення є одновимірними, тобто є гомоморфізмами $\chi : G \to \Bbbk^\times$. Їх звуть *характерами* групи G. Характери можна перемножати поточково: $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Легко бачити, що відносно цієї операції $\widehat{G}$ теж є комутативною групою. Тому визначена й її група характерів $\widehat{\widehat{G}}$. Існує природний гомоморфізм $\gamma : G \to \widehat{\widehat{G}}$, визначений правилом: $\gamma(g)(\chi) = \chi(g)$.

Теорема 1.1.13 (Теорема двоїстості). *Гомоморфізм γ є ізоморфізмом.*

Доведення. Оскільки, за Наслідком 1.1.12, $\#(\widehat{\widehat{G}}) = \#(G)$, достатньо довести, що $\operatorname{Ker}\gamma = \{1\}$: тоді відображення γ є ін'єктивним, а тому й бієктивним. Але $\operatorname{Ker}\gamma = \{\, g \mid \chi(g) = 1 \,\}$ для всіх $\chi \in \widehat{G}$. Отже, характери групи G збігаються з характерами групи $G/\operatorname{Ker}\gamma$, тому $\#(G) = \#(\widehat{G}) = \#(\widehat{G/\operatorname{Ker}\gamma}) = \#(G/\operatorname{Ker}\gamma)$, звідки $\#(\operatorname{Ker}\gamma) = 1$. □

Зробимо ще одне важливе зауваження.

1b Твердження 1.1.14. *Якщо виконані умови теореми Машке, а всі незвідні зображення групи G є одновимірними, то група G комутативна.*

Доведення. Перш за все, зауважимо, що регулярне зображення групи G є *точним*, тобто $\rho_G(G) = \mathbb{1}$ тоді й лише тоді, коли $g = 1$. Дійсно, якщо $g \neq 1$, то $\rho_G(g)1 = g \neq 1$, отже $\rho_G(g) \neq \mathbb{1}$.

Припустимо, що всі незвідні зображення є одновимірними. За теоремою Машке, регулярне зображення є прямою сумою незвідних, тобто одновимірних. Тому в деякій базі воно задається діагональним матрицями. Оскільки довільні діагональні матриці перестановні між собою, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g) = \rho(hg)$, звідки $gh = hg$ для довільних $g, h \in G$. □

1c Приклад 1.1.15. В усіх цих прикладах ми розглядаємо зображення над полем комплексних чисел.

(1) Нехай G — циклічна група порядку n: $G = \langle\, a \mid a^n = 1 \,\rangle$. Її незвідне зображення ρ є одновимірним, тобто $\rho(a) = \alpha \in \Bbbk$. При цьому $a^n = 1$, тобто $a = \exp(\frac{2\pi k}{n})$, де $0 \leqslant k < n$. Це й є всі незвідні (або, що те саме, нерозкладні) зображення.

(2) Нехай G — група діедра порядку $2n$: $G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$. Перевірте, що
   (a) Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення.

(b) Відповідність

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

задає зображення ρ_k групи G.

(c) Якщо $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, зображення ρ_k є нерозкладними й неізоморфними.
Вказівка: Обчисліть сліди $\operatorname{tr}\rho_k(\sigma)$ та $\operatorname{tr}\rho_k(\tau)$ і скористайтеся тим, що сліди подібних операторів рівні.

(d) Користуючись Наслідком 1.1.11, доведіть, що всі незвідні зображення групи дiедра — або одновимірні, або ρ_k $(1 \leqslant k < \mathfrak{n}2)$.

Наступна теорема показує, що умови теореми Машке є дійсно необхідними.

Теорема 1.1.16. *Нехай характеристики p поля $\Bbbk$ ділить порядок n групи G. Тоді регулярне зображення ρ_G не є цілком звідним.*

Доведення. Нехай ρ — якесь зображення групи G, $S_\rho = \sum_{x\in G}\rho(x)$. Очевидно $\rho(g)S_\rho = S_\rho\rho(g)$ для довільного $g \in G$, тобто S_ρ — ендоморфізм зображення ρ. Звідси ж $(S_\rho)^2 = \sum_{g\in G} gS_\rho = nS_\rho = 0$, оскільки $p \mid n$. Якщо зображення незвідне, з леми Шура випливає, що $S_\rho = 0$. Те саме, звичайно, буде і для кожного цілком звідного зображення. Але $S_{\rho_G}1 = \sum_{x\in G} x \neq 0$, отже ρ_G не є цілком звідним. □

s2 1.2. Співвідношення ортогональності

У цьому розділі ми вважаємо, що поле $\Bbbk$ — алгебрично замкнене, а група G скінченна, причому її порядок n не ділиться на характеристику поля $\Bbbk$.

Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — скінченновимірне зображення групи G. Виберемо базу $v_1, v_2, \dots, v_d$ в просторі V. Тоді кожен оператор $\rho(g)$ задається матрицею $(\rho_{ij}(g))$ розміру $d \times d$. Функції $\rho_i j(g)$ звуться *матричними елеметнами* зображення ρ в базі $v_1, v_2, \dots, v_d$ (часто згадку про базу опускають). Ці функції мають важливі властивості, які звуться *співвідношеннями ортогональності.*

21 Означення 1.2.1. У просторі $\Bbbk^G$ всіх функцій на групі G зі значеннями в полі $\Bbbk$ визначимо білінійну форму $(\xi, \eta)_G$ формулою

$$(\xi, \eta)_G = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{x\in G}\xi(x^{-1})\eta(x).$$

Ця форма є симетричною (перевірте).

22 Теорема 1.2.2. *Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ і $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ — незвідні зображення групи G, ρ_{ij} і θ_{ij} — їхні матричні елементи в якихось*

базах просторів V і W. Тоді $(\rho_{ij}, \theta_{kl})_G = 0$, якщо $\rho \not\simeq \theta$, а

$$(\rho_{ij}, \rho_{kl})_G = \begin{cases} \frac{1}{d}, & \text{якщо } i = l,\ j = k, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

де $d = \dim \rho$.

Доведення. Розглянемо лінійне відображення $\varphi : W \to V$, яке в тих самих базах задається матрицею e_{jk}, в якій на місці jk стоїть 1, а на всіх інших — 0. За Лемою 1.1.6, оператор $\tilde{\varphi} = \sum_{x \in G} \rho(x^{-1}) \varphi \theta(x)$ є гомоморфізмом $\theta \to \rho$. За Лемою Шура, $\tilde{\varphi} = 0$, якщо $\theta \not\simeq \rho$ і $\tilde{\varphi} = \lambda \mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$, якщо $\theta = \rho$. В останньому випадку значення λ можна обчслити, знайшовши слід $\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = d\lambda$. Саме, $\operatorname{tr}(\rho(x)^{-1} \varphi \rho(x)) = \operatorname{tr} \tilde{\varphi}$ для кожного $x \in G$, отже

$$\operatorname{tr} \tilde{\varphi} = n \operatorname{tr} \varphi = \begin{cases} n, & \text{якщо } j = k, \\ 0, & \text{якщо } j \neq k. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнт на місці il у матриці оператора $\tilde{\varphi}$. У добутку $\varphi\theta(x)$ усі рядки, крім j-го нульові, а j-ий дорівнює k-му рядку матриці $\theta(x)$. Тому в матриці φ на місці il стоїть $\sum_x \rho_{ij}(x^{-1}) \theta_{kl}(x) = n(\rho_{ij}, \theta_{kl})$. Цей елемент дорівнює 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$ або якщо $\theta = \rho$, але $i \neq l$ (недіагональне місце). Якщо ж $\theta = \rho$ і $i = l$ (діагональне місце), то, оскільки всі діагональні елементи у $\tilde{\varphi}$ однакові, цей елемент дорівнює $\lambda = \frac{1}{d} \operatorname{tr} \tilde{\varphi}$. Це й доводить необхідну формулу. $\square$

23 Означення 1.2.3. *Характером* зображення ρ зветься функція $\chi_\rho(x) = \operatorname{tr} \rho(x) = \sum_{i=1}^{d} \rho_{ii}(x)$, де $d = \dim \rho$. Зауважимо, що ця функція не залежить від вибору бази, оскільки сліди подібних матриць рівні. Характери незвідних зображень звуться *незвідними характерами* групи G.

24 Теорема 1.2.4. *Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Тоді*

$$(\chi_\rho, \chi_\theta) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \theta, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \theta. \end{cases}$$

Доведення. За означенням, $(\chi_\rho, \chi_\theta) = \sum_{i,j} (\rho_{ii}, \theta_{jj})$. Згідно з Теоремою 1.2.2, це дає 0, якщо $\theta \not\simeq \rho$. Якщо ж $\theta = \rho$ і $\dim \rho = d$, з цієї суми залишається лише d доданків, які відповідають членам з $i = j$. Кожен з них дорівнює $\frac{1}{d}$, отже в результаті маємо 1. $\square$

25 Означення 1.2.5. Функція φ на групі G зветься *центральною*, якщо $\varphi(gx) = \varphi(xg)$ для довільних елементів $g, x \in G$. Рівносильна умова: $\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(x)$ для довільних елементів $g, x \in G$ (перевірте це).

25a Лема 1.2.6. *Нехай φ — центральна функція на групі G, ρ — зображення цієї групи. Тоді оператор $\Phi = \sum_{x \in G} \varphi(x) \rho(x^{-1})$ є ендоморфізмом зображення ρ. Зокрема, якщо ρ — незвідне зображення розмірності d, то $\Phi = \lambda \mathbb{1}$, де $\lambda = \frac{n}{d}(\chi_\rho, \varphi)$.*

Доведення. Для довільного елемента $g \in G$

$$\begin{aligned}\Phi\rho(g) &= \sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x^{-1})\rho(g) = \sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x^{-1}g) = \\ &= \sum_{y\in G}\varphi(gy)\rho(y^{-1}) = \sum_{y\in G}\varphi(yg)\rho(y^{-1}) = \\ &= \sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(gz^{-1}) = \sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(g)\rho(z^{-1}) = \\ &= \rho(g)\sum_{z\in G}\varphi(z)\rho(z^{-1}) = \rho(g)\Phi.\end{aligned}$$

Отже Φ — ендоморфізм зображення ρ. Якщо ρ незвідне, то, за Лемою Шура $\Phi = \lambda\mathbb{1}$ для деякого $\lambda \in \Bbbk$. Тоді

$$d\lambda = \operatorname{tr}\Phi = \sum_{x\in G}\varphi(x)\operatorname{tr}\rho(x^{-1}) = n(\chi_\rho, \varphi).$$

□

26 Теорема 1.2.7. *Нехай $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^m$ — повний набір попарно неізоморфних незвідних зображень групи G, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ — характери цих зображень.*

(1) *Матричні елементи ρ^k_{ij} $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant i,j \leqslant \dim\rho^k)$ зображень ρ^k у якихось базах утворюють базу простору функцій $\Bbbk^G$.*

(2) *Харакери χ_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ уворюють базу підпростору ценральних функцій з $\Bbbk^G$.*

Доведення. (1) З Теореми 1.2.2 випливає, що функції ρ^k_{ij} лінійно незалежні. Дійсно, припустимо, що $\sum_{i,j,k}\lambda_{ijk}\rho^k_{ij} = 0$. Тоді

$$0 = (\rho^s_{pq}, \sum_{i,j,k}\lambda_{ijk}\rho^k_{ij}) = \sum_{i,j,k}\lambda_{ijk}(\rho^s_{pq}, \rho^k_{ij}) == \frac{\lambda_{sqp}}{d\ \ _s},$$

тобто всі коефіцієнти λ_{sqp} нульові. З іншого боку, загальна кількість функцій ρ^k_{ij} дорівнює $\sum_{k=1}^m(\dim\rho^k)^2$, що, за Наслідком 1.1.11, дорівнює n, тобто $\dim\Bbbk^G$. Отже, ці функції утворюють базу цього простору.

(2) З Теореми 1.2.4 так само випливає, що характери $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ лінійно незалежні (перевірте). Якщо вони не утворюють бази, знайдеться центральна функція φ така, що $(\chi_k, \varphi) = 0$ для всіх k. За Лемою 1.2.5, $\sum_{x\in G}\varphi(x)\rho^k(x^{-1}) = 0$ для всіх k. Оскільки довльне зображення розкладаєься в пряму суму незвідних, $\sum_{x\in G}\varphi(x)\rho(x^{-1}) = 0$ для кожного зображення ρ, зокрема, для регулярного зображення. Але

$$\sum_{x\in G}\varphi(x)\rho_G(x^{-1})1 = \sum_{x\in G}\varphi(x)x^{-1} \neq 0.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. □

27 Наслідок 1.2.8. *Кількість неізоморфних незвідних зображень дорівнює кількості класів спряженості елементів групи G.*

Доведення. За означенням, функція є центральною тоді й лише тоді, коли вона приймає однакові значення на спряжених елементах. Отже, розмірність простору центральних функцій дорівнює кількості класів спряженості. З іншого боку, за Теоремою 1.2.7, ця розмірність дорівнює кількості неізоморфних незвідних зображень. $\square$

chartab Означення 1.2.9. Нехай $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ — всі неізоморфні незвідні зображення групи G, $\chi_i = \chi_{\rho_i}$, $C_1, C_2, \dots, C_s$ — класи спряженості елементів цієї групи, $h_k = \#(C_k)$, $x_k \in C_k$ — деякі елементи, вибрані з цих класів. Позначимо $\chi_{ik} = \chi_i(x_k)$. Матриця $\mathrm{X}_G = (\chi_{ik})$ (розміру $s \times s$) зветься *таблицею характерів групи G*. Ми також позначимо $\chi^*_{ik} = \chi_i(x_k^{-1})$.

Оскільки значення характеру постійне на елементах з одного класу спряженості, то співвідношення ортогональності для характерів можна переписати в такий спосіб:

ort
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} h_k \chi_{ik}\chi^*_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

З цих формул випливає, що оберненою матрицею до X_G є матриця $\widetilde{\mathrm{X}}_G$ в якій коефіцієнт на місці kj дорівнює $\dfrac{h_k}{n}\chi^*_{jk}$. Записавши рівність $\widetilde{\mathrm{X}}_G \mathrm{X}_G = I$, де I — одинична матриця, ми одержимо так звану «*друге співвідношення ортогональності для характерів*».

28 Теорема 1.2.10.

$$\frac{h_k}{n}\sum_{i=1}^{s} \chi^*_{ik}\chi_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо } k = j, \\ 0, & \textit{якщо } k \neq j. \end{cases}$$

1.3. Операції над зображеннями

s3

Нагадаємо, що *тензорним добутком* векторних просторів V і V' зветься иекторний простір $V \otimes V'$ разом із білінійним відображенням $V \times V' \to V \otimes V'$, $(v, v') \mapsto v \otimes v'$, яке є *універсальним* в тому розумінні, що для кожного білінійного відображення $B : V \times V' \to W$ існує єдине лінійне відображення $\beta : V \otimes V' \to W$ таке, що $B(v, v') = \beta(v \otimes v')$. Тензорний добуток визначений однозначно з точністю до канонічного ізоморфізму. Якщо $v_1, v_2, \dots, v_n$ — база V, а $v'_1, v'_2, \dots, v'_m$ — база V', то вектори $v_i \otimes v'_j$ ($lei \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$) утворюють базу $V \otimes V'$. Якщо задано лінійні відображення $A : V \to W$ і $A' : V' \to W'$, існує єдине лінійне відображення $A \otimes A' : V \otimes V' \to W \otimes W'$ таке, що $(A \otimes A')(v \otimes v') = (Av) \otimes (A'v')$. У відповідних базах $\{v_i \otimes v'_j\}$ простору $V \otimes V'$ та $\{w_k \otimes w'_l\}$ простору $W \otimes W'$ відображення $A \otimes A'$ задається матрицею $(a_{ki}a'_{lj})$, де (a_{ki}) — матриця відображення A, а (a'_{lj}) — матриця відображення A'.

Якщо $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ і $\rho' : tGL(V')$ — зображення групи G, то відображення $g \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g)$ теж є зображенням цієї групи. Воно позначається $\rho \otimes \rho'$ і зветься *тензорним добутком зображень* ρ і ρ'. Матричні елементи $(\rho \otimes \rho 1')_{ij} kl$цього зображення дорівнюють добуткам $\rho_{ik}\rho'_{jl}$. Тому характер зображення $\rho\rho'$ дорівнює

$$\chi_{\rho\otimes\rho'} = \sum_{i,j} \rho_{ii}\rho'_{jj} = \sum_i \rho_{ii} \sum_j \rho'_{jj} = \chi_\rho \chi_{\rho'}.$$

З цієї формули випливає важливий наслідок.

31 Теорема 1.3.1. *Нехай $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ — всі різні незвідні характери групи G. Існують такі натуральні числа γ_{ij}^k, що $\chi_i\chi_j = \sum_{k=1}^s \gamma_{ij}^k \chi_k$.*

Доведення. Нехай $lst\rho s$ — незвідні зображення групи G такі, що $\chi_i = \chi_{\rho_i}$. Розкладемо тензорний добуток $\rho_i \otimes \rho_j$ у пряму суму незвідних зображень:

e31 (1.3.1)
$$\rho_i\rho_j \simeq \bigoplus_{k=1}^s \gamma_{ij}^k \rho_k,$$

де γ_{ij}^k — натуральні числа. Тоді $\chi_i\chi_j = \chi_{\rho_i\otimes\rho_j} = \sum_{k=1}^s \gamma_{ij}^k \chi_k$. □

Коефіцієнти γ_{ij}^k у формулі (1.3.1) звуться *коефіцієнтами Клебша–Гордана.* Їх обчислення є важливою задачею теорії зображень груп.

З Теореми 1.3.1 випливає, що незвідні характери утворюють підкільце кільця функцій на групі. Адитивна група цього кільця — вільна абелева, а незвідні характери утворюють її базу.

Інша важлива операція — перехід до *спряженого зображення.* Саме, нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — зображення групи G, а V^* — *спряжений простір*, тобто простір лінійних функцій $V \to \Bbbk$. Для кожного лінійного оператора φ у просторі V визначений *спряжений оператор* $\varphi*$ — це єдиний лінійний оператор у просторі V^* такий, що $(\varphi^* f)(v) = f(\varphi v)$ для довільного вектора $v \in V$ і довільної функції $f \in V^*$. Визначимо *спряжене зображення* $\rho^* : G \to \mathrm{GL}(V)$ правилом $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^*$. Неважко переконатися, що в такий спосіб ми дійсно одержимо зображення групи G, тобто $\rho^*(gh) = \rho^*(g)\rho^*(h)$. (Переконайтеся в цьому. Перевірте, чи буде зображенням відображення $g \mapsto \rho(g)^*$).

Нагадаємо що *спряжена база* до бази $v_1, v_2, \dots, v_d$ простору V — це база $v_1^*, v_2^*, \dots, v_d^*$ простору V^*, де функції v_i^* визначені правилом

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } i = j, \\ 0 & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Якщо $\mathrm{A} = (a_{ij})$ — матриця оператора φ у базі $v_1, v_2, \dots, v_d$, то матриця спряженого оператора φ^* у спряженій базі $v_1^*, v_2^*, \dots, v_d^*$ — це *транспонована матриця* $A^\perp$, на місці (ij) в якій стоїть a_{ji}. Тому $\operatorname{tr}\varphi = \operatorname{tr}\varphi^*$. Отже, для характеру спряженого зображення маємо формулу $\chi_{\rho^*}(g) = \chi(g^{-1})$.

Зокрема, значення χ_{ik}^* з Означення 1.2.9 — це значення на елементі x_k^{-1} характеру зображення, спряженого до ρ_i. Очевидно, зображення, спряжене до незвідного також є незвідним.

Нехай $G = G_1 \times G_2$, $\rho_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$ — зображення груп G_i ($i = 1, 2$). На тензорному добутку просторі $V_1 \otimes V_2$ визначимо зображення $\rho_1 \otimes \rho_2$ групи G, поклавши $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$. Воно зветься *зовнішнім тензорним добутком* зображень ρ_1 і ρ_2.

32 Теорема 1.3.2. (1) *Якщо зображення ρ_1 і ρ_2 незвідні, таким є й зображення $\rho_1 \otimes \rho_2$.*

(2) *Кожне незвідне зображення групи $G_1 \times G_2$ ізоморфне $\rho_1 \otimes \rho_2$ для деяких незвідних зображень ρ_1 групи G_1 і ρ_2 групи G_2, які визначені однозначно з точністю до ізоморфізму.*

Доведення. Позначимо $n_i = \#(G_i)$ ($i = 1, 2$). Тоді $\#(G) = n = n_1 n_2$. Нехай ρ_1 і θ_1 — незвідні зображення групи G_1, χ_1 і ξ_1 — їх характери, ρ_2 і θ_2 — незвідні зображення групи G_2, χ_2 і ξ_2 — їх характери. Позначимо $\chi = \chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}$ і $\xi = \xi_{\theta_1 \otimes \theta_2}$. Тоді $\chi(x_1, x_2) = \chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$, а $\xi(x_1, x_2) = \xi_1(x_1)\xi_2(x_2)$. Отже

$$
\begin{aligned}
(\chi, \xi)_G &= \frac{1}{n} \sum_{x_1 \in G_1, x_2 \in G_2} \chi(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \xi(x_1, x_2) = \\
&= \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{x_1 \in G_1, x_2 \in G_2} \chi_1(x_1^{-1}) \chi_2(x_2^{-1}) \xi_1(x_1) \xi_2(x_2) = \\
&= \frac{1}{n_1} \sum_{x_1 \in G_1} \chi_1(x_1^{-1}) \xi_1(x_1) \cdot \frac{1}{n_2} \sum_{x_2 \in G_2} \chi_2(x_2^{-1}) \xi_2(x_2) = \\
&= (\chi_1, \xi_1)_{G_1} \cdot (\chi_2, \xi_2)_{G_2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho_1 \simeq \theta_1 \text{ і } \rho_2 \simeq \theta_2, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отже, зовнішні тензорні добутки $\rho_1 \otimes \rho_2$ та $\theta_1 \otimes \theta_2$ є незвідними, причому вони ізоморфні тоді й лише тоді, коли $\rho_1 \simeq \theta_1$ і $\rho_2 \simeq \theta_2$. Кількість s_i різних незвідних зображень групи G_i ($i = 1, 2$) дорівнює кількості класів спряжених елементів у цій групі, а кількість різних незвідних зображень групи $G = G_1 \times G_2$ — кількості s класів спряжених елементів у цій групі. Але, очевидно, пари (x_1, x_2) та (y_1, y_2) спряжені в групі G тоді й лише тоді, коли x_1 спряжений з y_1 у групі G_1, а x_2 спряжений з y_2 в групі G_2. Отже $s = s_1 s_2$. Тому зовнішні тензорні добутки незвіднихНе зображень груп G_i дають всі незвідні зображення групи G. □

Нарешті, важливими операціями є такі, що пов'язані з підгрупами — *обмеження* та *індукування*. .

33 Означення 1.3.3. Нехай H — підгрупа групи G, $G = \sqcup_{i=1}^m z_i H$ — розклад груfи G на класи суміжності по підгрупі H. Для кожного зображення $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ групи H визначимо *індуковане зображення* $\tilde{\rho} = \mathrm{Ind}_H^G \rho$ групи G наступним чином.

(1) Розглянемо простор $\tilde{V} = \bigoplus_{i=1}^m z_i V$, який складаються з формальних сум $\sum_{i=1}^m z_i v_i$, де $v_i \in V$.
(2) Якщо $g \in G$ і $gz_i = z_j h$, де $h \in H$, визначимо $\tilde{\rho}(g)(z_i v) = z_j \rho(h) v$ для всіх $v \in V$.

Перевірте, що $\tilde{\rho}$ є зображенням, тобто $\tilde{\rho}(g_2 g_1) = \tilde{\rho}(g_2)\tilde{\rho}(g_1)$.
Очевидно, $\dim \tilde{\rho} = m \dim \rho$.

34 Вправа 1.3.4. Доведіть, що $\chi_{\tilde{\rho}}(g) = \sum_{gz_i \in z_i H} \chi_\rho(z_i^{-1} g z_i)$.

Ми також позначимо через $\operatorname{Res}_H^G \theta$ *обмеження* зображення θ групи G на підгрупу H. Має місце наступне твердження, відоме, як «закон взаємності Фробеніуса».

34 Теорема 1.3.5 (Закон взаємності). *Для довільних зображень $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ і $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$*

$$\operatorname{Hom}_G(\operatorname{Ind}_H^G \rho, \theta) \simeq \operatorname{Hom}_H(\rho, \operatorname{Res}_H^G \theta).$$

Доведення. Кожному гомоморфізму $\varphi : \operatorname{Ind}_H^G \rho \to \theta$ співставимо гомоморфізм $\tilde{\varphi} : \rho \to \operatorname{Res}_H^G \theta$, поклавши $\tilde{\varphi}(v) = \varphi(1v)$. Очевидно, це гомоморфізм зображень групи H.

Навпаки, кожному гомоморфізму $\psi : \rho \to \operatorname{Res}_H^G \theta$ співставимо відображення $\tilde{\psi} : \tilde{V} \to W$ за правилом $\tilde{\psi}(z_i v) = \theta(z_i)\psi(v)$. Перевіримо, що це — гомоморфізм $\tilde{\rho} \to \theta$, тобто $\theta(g)\tilde{\psi}(z_i v) = \tilde{\psi}(\tilde{\rho}(g) z_i v)$.

За означенням, якщо $gz_i = z_j h$ ($h \in H$), то $\tilde{\rho}(g) z_i v = z_j \rho(h) v$. Тому $\tilde{\psi}(\tilde{\rho}(g) z_i v) = \theta(z_j)\psi(\rho(h)(v)) = \theta(z_j)\theta(h)\psi(v) = \theta(z_j h)\psi(v)$. З іншого боку, $\theta(g)\tilde{\psi}(z_i v) = \theta(g)\theta(z_i)\psi(v) = \theta(g z_i)\psi(v)$. Оскільки $gz_i = z_j h$, ці два вирази рівні.

Очевино, що $\tilde{\tilde{\psi}} = \psi$. З іншого боку,

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(z_i v) = \theta(z_i)\tilde{\varphi}(v) = \theta(z_i)\varphi(1v) = \varphi(\tilde{\rho}(z_i)v) = \varphi(z_i v),$$

тобто $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$, тобто ці відображення взаємно обернені. □

s4

1.4. Теореми цілочисельності

Нехай $\boldsymbol{A}$ — алгебра над полем раціональних чисел (взагалі кажучи, нескінченновимірна). Елемент $\alpha \in \boldsymbol{A}$ зветься *цілим алгебричним*, якщо він задовольняє деякому рівнянню вигляду $\alpha^m + c_1\alpha^{m-1} + \cdots + c_m$, де всі c_i — цілі числа. Якщо, наприклад, $\boldsymbol{A} = \mathbb{C}$, це поняття збігається з поняттям цілого алгебричного числа. Наступна лема є основним інструментом при вивченні властивостей цілих алгебричних елементів.

41 Лема 1.4.1. *Елемент α є цілим алгебричним тоді й лише тоді, коли в алгебрі $\boldsymbol{A}$ існують елементи $u_1, u_2, \dots, u_m$ такі, що для кожного j знайдуться цілі числа a_{ij}, для яких $\alpha u_j = \sum_{i=1}^m u_i$, і, крім того, не існує такого ненульового елемента $\beta \in \boldsymbol{A}$, що $\beta u_i = 0$ для всіх i.*

Доведення. Якщо α є цілим алгебричним, то в якості елементів $u_1, u_2, \dots, u_m$ можна взяти $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^{m-1}$.

Припустимо тепер, що такі $u_1, u_2, \dots, u_m$ існують. Позначимо через A матрицю (a_{ij}), а через $\mathbf{u}$ — вектор (стовпчик) з координатами $u_1, u_2, \dots, u_m$. Попередні рівності тоді перепишуться як матричне рівняння $(\alpha I - B)\mathbf{u} = 0$, де I — одинична матриця. Домноживши цю рівність на матрицю, приєднану до $\alpha I - B$ (в якій кожен елемент замінено на його алгебричне доповнення, а потім транспоновано), одержимо, за відмою властивістю визначника, що $f(\alpha)\mathbf{u} = 0$, де $f(x) = \det(xI - A)$, тобто $f(\alpha)u_i = 0$ для всіх i, звідки $f(\alpha) = 0$. Але, оскільки всі $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, то $f(x) = x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_m$, де всі c_i — цілі числа. Отже α — цілий алгебричний. □

$\boxed{42}$ Наслідок 1.4.2. *Якщо алгебра $\boldsymbol{A}$ комутативна, то всі цілі алгебричні елементи з $\boldsymbol{A}$ утворюють підкільце.*

Доведення. Треба перевірити, що сума й добуток цілих алгебричних елементів α і β знову є таким. Але очевидно, що якщо елементи $u_1, u_2, \dots, u_m$ задовольняють умовам Леми 1.4.1 для α, а елементи $w_1, w_2, \dots, w_k$ — для β, то їхні добутки $\{ u_iw_j \}$ задовольняють цим умовам як для $\alpha + \beta$, так і для $\alpha\beta$. □

$\boxed{43}$ Твердження 1.4.3. *Значення характеру $\chi(g)$ будь-якого зображення групи G є цілими алгебричними числами.*

Доведення. Оскільки $g^n = 1$, також $\rho(g)^n = 1$. Тому всі власні значення оператора $\rho(g)$ — корені степеня n з 1, отже є цілими алгебричними. Тоді й $\chi(g)$, як сума власних значень (з урахуванням кратностей) є цілим алгебричним числом. □

На просторі $\Bbbk G$ можна ввести будову *алгебри*, тобто білінійне асоціативне множення, поклавши $\sum_{x\in G} a_x x \sum_{y\in G} b_y y = \sum_{x,y} a_x b_y xy$. Отже, до цієї алгебри можна застосовувати Лему 1.4.1. Нехай $C_1, C_2, \dots, C_s$ — класи спряжених елементів групи g. Вважатимемо, що $C_1 = \{1\}$. Розглянемо елементи $u_i = \sum 1_{x\in C_i} x$. Очевидно, вони складають базу *центру* алгебри $\Bbbk G$, тобто підалгебри

$$\operatorname{Cen}(\Bbbk G) = \{ \alpha \in \Bbbk G \mid \alpha\beta = \beta\alpha \text{ для всіх } \beta \in \Bbbk G \}.$$

Тоді u_iu_j є лінійною комбінацією елементів u_k. Очевидно, що всі коефіцієнти цієї лінійної комбінації є цілими, тобто $u_iu_j = \sum_{k=1}^s u_k$. Оскільки $1 = u_1$, елементи $u_1, u_2, \dots, u_s$ задовольняють умовам Леми 1.4.1 для елемента u_i. Отже всі елементи $u_1, u_2, \dots, u_s$ є цілими алгебричними.

Довільне зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ групи G можна розповсюдити за лінійністю до зображення алгебри $\Bbbk G$, тобто до гомоморфізму (який ми позначимо тією самою літерою) $\rho : \Bbbk G \to \mathrm{L}(V)$, де $\mathrm{L}(V)$ — алгебра лінійних операторів у просторі V: $\rho(\sum_{x\in G} a_x x = \sum_{x\in G} a_x \rho(x)$.

Якщо елемент α належить центру $\mathrm{Cen}(\Bbbk G)$, тобто комутує з усіма елементами групи, його образ $\rho(\alpha)$ комутує з усіма операторами $\rho(g)$, тобто є ендоморфізмом зображення ρ. Якщо зображення ρ є незвідним, то $\rho(\alpha) = \lambda \mathbb{1}_V$. При цьому $\lambda = \frac{1}{d} \operatorname{tr} \rho(\alpha)$. Зокрема, $\rho(u_j) = \lambda_j \mathbb{1}_V$, де $\lambda_j = \frac{1}{d} \operatorname{tr} \rho(u_j) = \frac{1}{d} \sum_{x \in C_j} \chi(x) = \frac{h_j}{d} \chi(x)$, де $h_j = \#(C_j)$, а x — довільний елемент з класу C_j. З іншого боку, гомоморфізм переводить цілі алгебричні елементи в цілі алгебричні. Отже оператор $\rho(u_j)$, а тому й число $\lambda_j = \frac{h_j}{d} \chi(x)$ є цілим алгебричним. У термінах таблиці характерів це можна сформулювати так.

44 Твердження 1.4.4. *Усі числа* $\frac{h_j}{d_i} \chi_{ij}$ *є цілими алгебричними.*

Звідси одержуємо таку теорему.

45 Теорема 1.4.5. *Розмірність кожного незвідного зображення є дільником порядку групи.*

Доведення. Скористаймося співвідношенням ортогональності у формі (1.2.1):

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{s} h_j \chi_{ij} \chi_{ij}^* = 1.$$

Домноживши на $\frac{n}{d_i}$, одержимо

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{h_j}{d_i} \chi_{ij} \chi_{ij}^* = \frac{n}{d_i}.$$

За Твердженнями 1.4.3 і 1.4.4, усі доданки в лівій частині — цілі алгебричні числа. Отже й $\dfrac{n}{d_i}$ — ціле алгебричне число. Оскільки воно раціональне, воно є цілим. $\square$

46 Приклад 1.4.6. Нехай $\#(G) = p^2$, де p — первинне число. У групи G є одновимірне (тривіальне) зображення. Тому сума квадратів розмірностей усіх інших зображень дорівнює $p^2 - 1$. Оскільки всі ці розмірності — дільники p^2, єдина можливість — коли всі вони одновимірні. Тоді група G є комутативною (Твердження 1.1.14).

s5 1.5. Теорема Бернсайда

З результатів про характери ми виведемо одну теорему з теорії груп.

51 Теорема 1.5.1 (Теорема Бернсайда). *Якщо порядок групи ділиться лише на два первинні числа, ця група є розв'язною.*

Доведення. Очевидно, достатньо довести, що в цій групі є нетривіальна нормальна підгрупа. Доведення цього факту базується на деяких додаткових результатах.

52 Лема 1.5.2. *Нехай ρ — незвідне зображення групи G, $\chi = \chi_\rho$, C — клас спряжених елементів цієї групи, причому кількість h едементів у класі C є співпервинним з розмірністю d зображення ρ. Тоді або всі оператори $\rho(x)$, де $x \in C$, є скалярними, або $\chi(x) = 0$ для всіх $x \in C$.*

Доведення. Існують цілі числа a, b такі, що $ad + bh = 1$. Оскільки $\chi(x)$ і $\frac{h}{d}\chi(x)$ — цілі алгебричні, таким є й число

$$z = x\chi(x) + y\frac{h}{d}\chi(x) = \frac{xd + yh}{d}\chi(x) = \frac{\chi(x)}{d}.$$

Оскільки $\rho(x)^d = 1$, матриця оператора $\rho(x)$ у деякій базі є діагональною: $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d)$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_d$ — корені степеня n з 1. Якщо ця матриця не є скалярною, тобто не всі ε_i однакові, $|\sum_{i=1}^d \varepsilon_i| < \sum_{i=1}^d |\varepsilon_i| = d$, тому $|z| < 1$. Нехай ε — первинний корінь з 1, $\varepsilon_i = \varepsilon^{m_i}$. Якщо нсд$(k, n) = 1$, позначимо $z_k = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \varepsilon_i^k = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d \varepsilon^{m_i k}$. Тоді також $|z_k| < 1$. Оскільки ε^k також є первинним коренем з 1, поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ і $\mathbb{Q}(\varepsilon^k)$ ізоморфні, причому цей ізоморфізм переводить ε у ε^k. Тому всі числа z_k — також цілі алгебичні. Отже таким є й число $q = \prod_k z_k$. Але це число є раціональним (воно є симетричним многочленом від чисел ε^k з раціональними коефіцієнтами). Тому q — ціле число. Оскільки $|q| < 1$, то $q = 0$, звідки й $z = 0$. □

Скалярні оператори утворюють нормальну підгрупу в $\mathrm{GL}(V)$, тому елементи групи G, які переходять при деякому зображенні в скалярні оператори, утворюють нормальну підгрупу в G.

53 Теорема 1.5.3. *Якщо деякий клас спряжених елементів групи G має p^k елементів, де p — первинне числоЮ а $k > 1$, то група G має нетривіальну нормальну підгрупу.*

Доведення. Нехай $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ — всі різні незвідні зображення групи G, $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ — їхні характери і $d_1, d_2, \dots, d_s$ — їхні розмірності. Вважаємо, що ρ_1 — тривіальне зображення, тобто $\chi_1(x) = 1$ для всіх $x \in G$. Припустимо, що в G немає нетривіальних нормальних підгруп. Тоді в ній немає елементів $g \neq 1$, які в деякому зображенні ρ_i $(1 < i \leqslant s)$ переходять у скалярний оператор. З Леми 1.5.2 випливає, що тоді $\chi_i(x) = 0$, якщо $x \in C$, а d_i не ділиться на p. Розглянемо розклад регулярного зображення: $\rho_G = \bigoplus_{i=1}^s d_i\rho_i$ (за Наслідком 1.1.8 і Лемою 1.1.10). Звідси $\chi_G(x) = \sum_{i=1}^s d_i\chi_i(x)$. Всі $\chi_i(x)$ цілі алгебричні. Якщо $x \in C$, звідси випливає, що $\chi_G(x) = 1 + p\lambda$, де λ — ціле алгебричне. Але $\chi_G(x) = 0$, отже $\lambda = -\frac{1}{p}$, що дає протиріччя. □

Перейдемо до доведення теореми Бернсайда. Нехай $\#(G) = p^a q^b$, де числа p, q первинні, H — силовська p-підгрупа в G. Як кожна p-група H має нетривіальний центр. Нехай $g \neq 1$ — елемент з центру H, C — клас спряженості елемента g. Тоді $\#(C) = (G : N)$, де N — централізатор елемента g. Очевидно, $N \supseteq H$, тому $(G : N) \mid (G : H) = q^b$. За теоремою 1.5.3, у групі G є нетривіальна нормальна підгрупа. □

snsn1

1.6. Зображення симетричної групи

1.6.1. Діаграми й таблиці Юнга. У цьому розділі ми розглянемо зображення симетричної групи $\mathbf{S}_n$ наж полем комплексних чисел. Через $\boldsymbol{A}$ ми позначатимемо групову алгебру $\mathbb{C}\mathbf{S}_n$ цієї групи над полем комплексних чисел. Перш за все, визначимо кількість незвідних зображень або, що те саме, кількість класів спряженості елементів цієї групи. Відомо, що кожни перестановка $\sigma \in \mathbf{S}_n$ однозначно розкладається у добуток циклів

sne1

$$\sigma = (i_{11}i_{12}\dots i_{1\lambda_1})(i_{21}i_{22}\dots i_{2\lambda_2})\dots(i_{k1}i_{k2}\dots i_{k\lambda_k}), \tag{1.6.1}$$

де всі числа i_{ab} різні і $\{\,1,2,\dots,n\,\} = \{\, i_{ab} \mid 1 \leqslant a \leqslant k,\ 1 \leqslant b \leqslant \lambda_a \,\}$ або, що рівносильно, $\sum_{a=1}^{k} \lambda_a = n$. Оскільки цикли, які не містять однакових чисел, перестановні, ми можемо (і завжди будемо) вважати, що $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k$.

Нагадаємо, що набір натуральних чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, де $\sum_{a=1}^{k} \lambda_a = n$ і $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k$, зветься *розбиттям* натурального числа n. Множину всіх таких розбиттів позначимо через $\Lambda(n)$, а їх кількість — через $p(n)$. На множині $\Lambda(n)$ визначений *лексікографічний порядок*: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) > (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{'})_l$, якщо

- $\lambda_1 > \lambda'_1$, або
- $la_1 = \lambda'_1$ і $\lambda_2 > \lambda'_2$, або
- $la_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$ і $\lambda_3 > \lambda'_3$ і т.д.

Приклад 1.6.1. Ось перелік розбиттів чисел $2 \leqslant n \leqslant 6$ (у лексикографічному порядку, від більших до менших):

$n = 2 : (2),\ (1,1);$

$n = 3 : (3),\ (2,1),\ (1,1,1);$

$n = 4 : (4),\ (3,1),\ (2,2),\ (2,1,1),\ (1,1,1,1);$

$n = 5 : (5),\ (4,1),\ (3,2),\ (3,1,1),\ (2,2,1),\ (2,1,1,1),\ (1,1,1,1,1);$

$n = 6 : (6),\ (5,1),\ (4,2),\ (4,1,1),\ (3,3),\ (3,2,1),\ (3,1,1,1),\ (2,2,2),$
$(2,2,1,1),\ (2,1,1,1,1),\ (1,1,1,1,1,1).$

Ось таблиця значень функції $p(n)$:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Функція $p(n)$ швидко зростає, наприклад, $p(100) \approx 1,9 \cdot 10^8$, а $p(1000) \approx 2,4 \cdot 10^{31}$.

Легко перевірити, що, для довільної перестановки $g \in \mathbf{S}_n$,

$$g\sigma g^{-1} = (j_{11}j_{12}\dots j_{1\lambda_1})(j_{21}j_{22}\dots j_{2\lambda_2})\dots(j_{k1}j_{k2}\dots j_{k\lambda_k}),$$

де $j_{ab} = g(i_{ab})$. Отже, одержуємо такий результат.

sn1

Твердження 1.6.2. *Кількість неізоморфних незвідних зображень групи $\mathbf{S}_n$ дорівнює кількості $p(n)$ розбиттів числа n.*

`sn2` Означення 1.6.3. (1) Нам буде зручно зображувати розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ *діаграмою Юнга*D_λ . Вона складається з n клітин, розміщених у k рядках: λ_a клітин у a-му рядку. Ось приклади таких діаграм для $n = 5$:

$$\lambda = (3,2): \ D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array}; \qquad \lambda = (2,2,1): \ D_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

(2) *Таблицею Юнга* T зветься диаграма Юнга $D(T)$, у клітини якої вписані числа $1, 2, \dots, n$ у довільному порядку. Ось приклади

`tabex` таких таблиць для діаграм, намальованих вище:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \cline{1-2}\end{array}; \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Кожна перестановка, розкладена у добуток циклів, як у формулі (1.6.1), визначає таблицю Юнга з діаграмою D_λ, де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$: у рядку з номером a записуються числа $i_{a1}, i_{a2}, \dots, i_{a\lambda_a}$. У наведених прикладах перша таблиця відповідає перестановці (314)(52), друга — перестановці (13)(24)(5).

(3) Таблиця Юнга T зветься *стандартною*, якщо в кожному її рядку й кожному стовпчику числа йдуть у порядку зростання. У наведених прикладах друга таблиця є стандартною, а перша ні. Через $S(D)$ позначимо множину стандартних таблиць з діаграмою D, а через $d(D)$ їх кількість.

Група $\mathbf{S}_n$ природно діє на множині таблиць Юнга з n клітинами: у таблиці σT число $\sigma(i)$ стоїть на тому ж місці, на якому в таблиці T стояло число i. Очевидно, що $\sigma T = \sigma' T$ тоді й лише тоді, коли $\sigma = \sigma'$.

`sns2`

1.6.2. Основна теорема.

`sn3` Означення 1.6.4. Нехай T — таблиця Юнга з n клітин. Позначимо:

(1) $\mathcal{R}(T)$ підгрупу в $\mathbf{S}_n$, яка складається з тих перестановок, які переміщають числа лишн всередині кожного рядка.

(2) $\c{C}(T)$ підгрупу в $\mathbf{S}_n$, яка складається з тих перестановок, які переміщають числа лишн всередині кожного стовпчика.

(3) $P(T) = \sum_{p \in \mathcal{R}(T)} p$, $Q(T) = \sum_{q \in \mathcal{C}(T)} \operatorname{sgn}(q) q$, $E(T) = P(T)Q(T)$ (це елементи алгебри $\boldsymbol{A}$).

(4) $V_T = \boldsymbol{A}E(T) = \{\, AE(T) \mid A \in \boldsymbol{A} \,\}$. Очевидно, це — інваріантний підпростір відносно регулярного зображення, отже визначене зображення $\rho_T : \mathbf{S}_n \to \mathrm{GL}(V_T)$.

Зауважимо, що $\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{C}(T) = \{\mathbf{1}\}$ (тотожна перестановка). Тому всі добутки pq, де $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$ є різними і $E(T) = \sum_{\substack{p \in \mathcal{R}(T) \\ q \in \mathcal{C}(T)}} \operatorname{sgn}(q) pq$.

`sn4` Твердження 1.6.5.

(1) *Якщо* $p \in \mathcal{R}(T)$, *то* $pP(T) = P(T)p = P(T)$.
(2) *Якщо* $q \in \mathcal{C}(T)$, *то* $qQ(T) = Q(T)q = \operatorname{sgn}(q)Q(T)$.
(3) $P(\sigma T) = \sigma P(T)\sigma^{-1}$, $Q(\sigma T) = \sigma Q(T)\sigma^{-1}$ *і* $E(\sigma T) = \sigma E(T)\sigma^{-1}$.

Доведення. Перші два твердження очевидні. Третє випливає з того факту, що якщо $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ — рядок (стовпчик) таблиці T і $\sigma(i_s) = j_s$, то $(j_1, j_2, \dots, j_l)$ — рядок (стовпчик) таблиці σT. $\square$

Для розбиття $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ позначимо T_λ таблицю Юнга з діаграмою D_λ, в якій у r-му рядку стоять числа $i_r, i_r + 1, i_r + 2, \dots, i_r + \lambda_r$, де $i_r = 1 + \sum_{l<r} \lambda_l$. Нехай $V_\lambda = V_{T_\lambda}$, $\rho_\lambda = \rho_{T_\lambda}$.

snmain Теорема 1.6.6. (1) *Кожне зображення* ρ_T *є незвідним.*
(2) $\rho_T \simeq \rho_{T'}$ *тоді й лише тоді, коли* $D(T) = D(T')$. *Зокрема, будь-яке зображення* ρ_T, *де* $D(T) = D_\lambda$, *ізоморфне зображенню* ρ_λ.
(3) $\{\, \rho_\lambda \mid \lambda$ — розбиття числа $n \,\}$ — *повний набір неізоморфних незвідних зображень групи* $\mathbf{S}_n$.
(4) $\dim \rho_D = d(D)$.

Очевидно, третє твердження цієї теореми є наслідком перших двох і Твердження 1.6.2.

sn5 Приклад 1.6.7. Нехай $n = 4$, а $\lambda = (3, 1)$. Тоді $T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$,

$$\begin{aligned}
P(T) =& \mathbf{1} + (12) + (13) + (23) + (123) + (132),\\
Q(T) =& \mathbf{1} - (14),\\
E(T) =& \mathbf{1} + (12) + (13) + (23) + (123) + (132) -\\
&- (14) - (142) - (143) - (14)(23) - (1423) - (1432).
\end{aligned}$$

Існує 3 стандартні таблиці з діаграмою D_λ. Крім T_λ, це таблиці

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{та} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Тому $\dim \rho_\lambda = 3$. Легко бачити, що елементи $v_1 = E(T)$,

$$\begin{aligned}
v_2 = (14)E(T) =& (14) + (124) + (134) + (14)(23) + (1234) + (1324) -\\
&- \mathbf{1} - (24) - (34) - (23) - (234) - (243),\\
v_3 = (24)E(T) =& (24) + (142) + (13)(24) + (234) + (1423) + (1342) -\\
&- (124) - (12) - (1243) - (1234) - (123) - (12)(34)
\end{aligned}$$

лінійно незалежні. Отже, вони утворюють базу V_λ. Нагадаємо, що група $\mathbf{S}_4$ породжується «довгим циклом» $\sigma = (1234)$ і транспозицією $\tau = (12)$. Зауважимо, що $\sigma = (14)(13)(12)$, а $\sigma(14) = (234) = (24)(23)$, тому $\sigma v_1 = v_2$, а $\sigma v_2 = v_3$. Також $\tau(14) = (142) = (24)(12)$, звідки $\tau v_2 = v_3$, а

$\tau v_3 = v_2$. Нарешті, $\sigma(24) = (34)(12)$, звідки

$$\begin{aligned}\sigma v_3 = (34)E =&(34) + (12)(34) + (143) + (243) + (1243) + (1432) - \\ &- (134) - (1342) - (13) - (1324) - (13)(24) - (132) = \\ =& - v_1 - v_2 - v_3.\end{aligned}$$

Отже, зображення ρ_λ у базі $\{ v_1, v_2, v_3 \}$ має вигляд:

$$\rho_\lambda(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_\lambda(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

еле

sns3

1.6.3. Комбінаторика таблиць Юнга. Доведення Теореми 1.6.6 ґрунтується на деяких комбінаторних фактах, які ми розглянемо у цьому підрозділі, та на загальних властивостях прямих сум і прямих доданків.

Нехай T і T' — таблиці Юнга. Будемо писати $T' \vdash T$, якщо існують числа i, j, які стоять в одному рядку таблиці T і в одному стовпчику таблиці T'. Тоді транспозиція (ij) належить $\mathcal{R}(T)$ і $\mathcal{C}(T')$ і з Твердження 1.6.5 випливає, що $Q(T')P(T) = 0$, а тому й $E(T')E(T) = 0$.

snl1

Лема 1.6.8. *Якщо $D(T) > D(T')$, то $T' \vdash T$.*

Доведення. Нехай $D(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $D(T') = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_l)$ і I_1 — множина чисел, які стоять у першому рядку таблиці T (їх λ_1). Якщо $\lambda'_1 < \lambda_1$, таблиця T' має менше, ніж λ_1 стовпчиків, тому принаймні два з цих чисел стоять в одному стовпику й твердження вірне. Припустимо, що $\lambda_1 = \lambda'_1$ і числа з множини I стоять у різних стовпчиках. Переставивши їх перестановками з $Q(T')$, можна вважати, що вони стоять у першому рядку таблиці T. Знов-таки, якщо $\lambda'_2 < \lambda_2$, якісь числа з другого рядка таблиці T стоять в одному стовпчику таблиці T'. Якщо ж всі вони — у різних стовпчиках, то $\lambda_2 = \lambda'_2$ і можна вважати, що множини чисел у других рядках цих таблиць однакові. Продовжуючи такий розгляд, ми, врешті решт знайдемо пару чисел, яка задовольняє твердженню леми. □

snl2

Лема 1.6.9. *Нехай $D(T') = D(T)$. Наступні умови рівносильні:*

(1) $T' \not\vdash T$.
(2) *Існують перестановки $p \in \mathcal{R}(T)$ і $q \in \mathcal{C}(T')$ такі, що $pT = qT'$.*
(3) *Існують перестановки $p \in \mathcal{R}(T)$ і $q \in \mathcal{C}(T)$ такі, що $pqT = T'$.*

Доведення. (2) $\Rightarrow$ (1), бо рядки таблиці $pT = qT'$ — це рядки таблиці T, а її стовпчики — це стовпчики таблиці T'.

(1) $\Rightarrow$ (2). Нехай I — множина чисел першого рядка таблиці T. Тоді вони — в різних стовпчиках таблиці T', а тому перестановкою q_1 з підгрупи $kC(T')$ їх можна пересунути у перший рядок таблиці q_1T'. Після цього знайдеться перестановка p_1 з підгрупи $\mathcal{R}(T)$, така, що в таблиці

p_1T ці числа стоять на тих самих місцях, що й у таблиці q_1T'. Отже, таблиці p_1T і q_1T' мають однакові перші рядки. Застосувавши таку ж процедуру до другого рядка, ми знайдемо перестановки і $q_2 \in \mathcal{C}(T')$ і $p_2 \in \mathcal{R}(T)$ такі, що таблиці p_2p_1T і q_2q_1T' мають однакові перші два рядки. Продовжуючи такий розгляд, ми й доводимо лему.

(2) $\Rightarrow$ (3). Якщо $pT = qT'$, то

$$T' = q^{-1}pT = p \cdot (p^{-1}q)q^{-1}(q^{-1}p)T = p \cdot (p^{-1}q)q^{-1}(p^{-1}q)^{-1}T,$$

причому

$$(p^{-1}q)q^{-1}(p^{-1}q)^{-1} \in \mathcal{C}(p^{-1}qT') = \mathcal{C}(T).$$

(3) $\Rightarrow$ (2) доводиться аналогічно, і ми пропонуємо це читачеві як просту вправу. □

snl3 Лема 1.6.10. *Нехай $s \in \mathbf{S}_n$, T — таблиця Юнга. Наступні умови рівносильні:*

(1) *$s \neq pq$ для жодних $p \in \mathcal{R}(T)$ і $q \in \mathcal{C}(T)$.*
(2) *Існують непарні перестановки $p \in \mathcal{R}(T)$ і $q \in \mathcal{C}(T)$ такі, що $s = psq$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). З Леми 1.6.9 випливає, що $sT \vdash T$. Тому знайдеться транспозиція $p \in \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{C}(sT)$. Тоді $q = s^{-1}ps \in \mathcal{C}(s^{-1}sT) = \mathcal{C}(T)$ непарна і $psq = pss^{-1}ps = s$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Якщо одночасно $s = pq$ і $p_1sq_1 = s$, де $p, p_1 \in \mathcal{R}(T)$, а $q, q_1 \in \mathcal{C}(T)$, причому p_1 непарна, то $p_1pqq_1 = pq$ і $p^{-1}p_1p = qq_1^{-1}q^{-1}$. Тут права частина належить $\mathcal{R}(T)$, а ліва $\mathcal{C}(T)$, тому $p^{-1}p_1p = \mathbf{1}$ і $p_1 = \mathbf{1}$, що протирічить умові. □

На множині таблиць з даною діаграмою Юнга розглянемо лексікографічний порядок, вважаючи, що ми продивляємось таблиці спочатку по першому рядку, потім по другому і т.д., а $T < T'$ означає, що перше з чисел, яке в таблиці T не таке, як у таблиці T', є меншим.

snl4 Лема 1.6.11. *Якщо T і T' — стандартні таблиці й $T < T'$, то $T' \vdash T$.*

Доведення. Нехай на (ij)-му місці в таблиці T стоїть t_{ij}, а в таблиці T' стоїть t'_{ij}. Розглянемо перше місце, де $t_{ij} < t'_{ij}$. Оскільки таблиця T стандартна, $t'_{i'j'} \geqslant t'_{ij}$, якщо $i' \geqslant i$ і $j' \geqslant j$. Тому t_{ij} стоїть у таблиці T' у стовпчику з номером $k < j$, а тоді в таблиці T числа $t_{ik} = t'_{ik}$ і t_{ij} стоять в одному рядку, а в таблиці T' — в одному стовпчику. □

sns4

1.6.4. Ідемпотенти і прямий розклад. Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — зображення групи G, $\boldsymbol{E} = \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho)$ — його кільце ендоморфізмів. Нагадаємо, що елемент $e \in \boldsymbol{E}$ зветься *ідемпотентом*, якщо $e^2 = e$. Прикладом ідемпотента є *проекція* на прямий доданок: якщо $V = V_1 \oplus V_2$ і $v = v_1 + v_2$ ($v_i \in V_i$), то $e(v) = v_1$ (поясніть, чому це ідемпотент).

Зауважимо, що $V_2 = \operatorname{Ker} e$. Навпаки, нехай $e \in \boldsymbol{E}$ — ідемпотент, $V_1 = \operatorname{Im} e$, $V_2 = \operatorname{Ker} e$ (це — інваріантні підпростори у V). Тоді $V_1 \cap V_2 = 0$. Дійсно, якщо $v_1 = e(v)$ і $e(v_1) = 0$, то $v_1 = e(v) = e^2(v) = e(v_1) = 0$. Довільний вектор $v \in V$ розкладається в суму $v = e(v) + (v - e(v))$. Перший доданок належить V_1, а другий — V_2, оскільки $e(v-e(v)) = e(v) - e^2(v) = e(v) - e(v) = 0$. Отже $V = V_1 \oplus V_2$, і ми встановили відповідність між ідемпотентами кільця $\boldsymbol{E}$ та прямими розкладими зображення ρ.

snl5 Лема 1.6.12. *Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ і $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ — зображення групи G, $e : V \to V$ і $e' : V' \to V'$ — їх ідемпотентні ендоморфізми, $V = V_1 \oplus V_2$, де $V_1 = \operatorname{Im} e$, $V_2 = \operatorname{Ker} e$, $V' = V_1' \oplus V_2'$, де $V_1' = \operatorname{Im} e'$, $V_2' = \operatorname{Ker} e'$, ρ_1 — обмеження ρ на V_1 і ρ_1' — обмеження ρ' на V_1'. Тоді $\operatorname{Hom}_G(\rho_1, \rho_1') \simeq e' \operatorname{Hom}_G(\rho, \rho')e$.*

Доведення. Якщо $v \in V_1$, то $v = e(v)$ і якщо $f : V \to V'$ — гомоморфізм $\rho \to \rho'$, то $e'fe(v) \in V_1'$, отже, обмеження $e'fe$ на V_1 можна розглядати, як гомоморфізм $\rho_1 \to \rho_1'$. Навпаки, нехай $\varphi : V_1 \to V_1'$ — гомоморфізм $\rho_1 \to \rho_1'$. Оскільки $e(v) \in V_1$ для кожного $v \in V$, добуток φe можна розглядати, як гомоморфізм $\rho \to \rho'$. Більш того, оскільки $e(v) = v$ при $v \in V$ і $e'(v') = v'$ при $v' \in V_1'$, $e'\varphi e = \varphi e$ і $e'\varphi e|_{V_1} = \varphi$. Отже, ми отримали взаємно однозначну відповідність між $\operatorname{Hom}_G(\rho_1, \rho_1')$ і $e' \operatorname{Hom}_G(\rho, \rho')e$. □

Розглянемо регулярне зображення $\rho_G : G \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{A})$. У Лемі 1.1.10 ми встановили, що $\operatorname{Hom}_G(\rho_G, \rho) \simeq V$ для довільного зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Зокрема, $\operatorname{Hom}_G(\rho_G, \rho_G) \simeq \boldsymbol{A}$. При цьому гомоморфізму $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ відповідає елемент $f(1) \in \boldsymbol{A}$, а елементу $A \in \boldsymbol{A}$ — гомоморфім $f_A : v \mapsto vA$. Звідси, зокрема, випливає, що $f_A f_B = f_{BA}$, зокрема, f_A є ідемпотентом тоді й лише тоді, коли A є ідемпотентом. Образ гомоморфізму f_A — це $\boldsymbol{A}A = \{\, vA \mid v \in \boldsymbol{A} \,\}$. З поперредніх розглядів ми одержуємо такий результат.

snl6 Наслідок 1.6.13.
1. *Кожен прямий доданок регулярного зображення — це зображення у підпросторі $\boldsymbol{A}e$ для деякого ідемпотента $e \in \boldsymbol{A}$.*
2. *Якщо e, e' — ідемпотенти в $\boldsymbol{A}$, то $\operatorname{Hom}_G(\boldsymbol{A}e, \boldsymbol{A}e') \simeq e\boldsymbol{A}e'$.*
3. *Зображення ρ_e у підпросторі $\boldsymbol{A}e$ є незвідним тоді й лише тоді, коли $\dim e\boldsymbol{A}e = 1$.*

Доведення. (1) і (2) ми вже перевірили. (3) випливає з (2) і Наслідку 1.1.7. □

Покажемо, що елементи $E(T)$, розглянуті у підрозділі 1.6.2, є «майже ідемпотентами».

snl7 Лема 1.6.14. *Нехай $A \in \boldsymbol{A}$ — такий елемент, що $pAq = \operatorname{sgn}(q)A$ для всіх $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$. Тоді $A = cE(T)$ для деякого числа c.*

Доведення. Нехай $A = \sum_{x\in\mathbf{S}_n} c_x x$. Тоді $pAq = \sum_{x\in\mathbf{S}_n} c_x pxq$, тому $c_{pxq} = \operatorname{sgn}(q)c_x$. Якщо $x = pq$ для деяких p, q, то $c_x = \operatorname{sgn}(q)c_1$. Якщо $x \neq pq$ для жодних p, q, то, за Лемою 1.6.10, знайдуться такі непарні p, q, що $x = pqx$. Звідси $c_x = c_{pxq} = -c_x$ і $c_x = 0$. Отже $A = c_1 E(T)$. □

Нагадаємо, що ми позначили $V_T = \boldsymbol{A}E(T)$, ρ_T — зображення $\mathbf{S}_n$ у просторі V_T.

snl8

Наслідок 1.6.15. (1) *$E(T)^2 = \frac{n!}{d}E(T)$, де $d = \dim V_T$, а елемент $e = e(T) = \frac{d}{n!}$ — ідемпотент в $\boldsymbol{A}$, причому $V_T = \boldsymbol{A}e(T)$.*

(2) *Зображення ρ_T незвідне.*

(3) *$\rho_T \simeq \rho_{T'}$ тоді й лише тоді, коли $D(T) = D(T')$.*

Це доводить пункти (1) і (2), а разом з ними й пункт (3) Теореми 1.6.6.

Доведення. Позначимо $E = E(T)$.

(1). Оскільки $pE^2q = \operatorname{sgn}(q)E^2$ для довільних $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$, маємо $E^2 = cE$. Нехай $v_1, v_2, \dots, v_d$ — база V_T, де $v_i = u_i E$, а $v_1, v_2, \dots, v_{n!}$ — її доповнення до бази $\boldsymbol{A}$. Тоді $v_i E \in V_T$ для всіх i, причому $v_i E = u_i E^2 = c v_i$. Позначимо через r_A оператор множення справа на A у просторі $\boldsymbol{A}$: $r_A(v) = vA$. Тоді $\operatorname{tr} r_E = dc$. Але $E = \sum_{\substack{p\in\mathcal{R}(T)\\ q\in\mathcal{C}(T)}} \operatorname{sgn}(q)pq$. Оскільки $\operatorname{tr} r_1 = n!$ і $\operatorname{tr} r_g = 0$, якщо $g \in \mathbf{S}_n \setminus \{1\}$, маємо $\operatorname{tr} r_E = n!$ і $c = \frac{n!}{d}$. Твердження відносно $e(T)$ очевидні.

(2). Якщо $A \in e\boldsymbol{A}e = E\boldsymbol{A}E$, то $pAq == \operatorname{sgn}(q)A$ для всіх $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$. За Лемою 1.6.14, $e\boldsymbol{A}e = \{\, cE \,\}$ і $\dim e\boldsymbol{A}e = 1$, отже ρ_T незвідне за Наслідком 1.6.13.

(3) Нагадаємо, що $E(gT) = gE(T)g^{-1}$, тобто $gE(T) = E(gT)g$ для довільного $g \in \mathbf{S}_n$. Припустимо, що $D(T) \neq D(T')$, скажімо, $D(T') < D(T)$. За Лемою 1.6.8, тоді $T' \vdash gT$ для всіх $g \in \mathbf{S}_n$. Звідси $E(T')gE(T) = E(T')E(gT)g = 0$. Отже $\operatorname{Hom}_G(\rho_{T'}, \rho_T) = 0$ і $\rho_{T'} \not\simeq \rho_T$.

Навпаки, якщо $D(T') = D(T)$, то $T = gT'$ для деякої перестановки g, звідки $e(T')ge(T) = e(T')^2 g = e(T')g \neq 0$. Отже $\operatorname{Hom}_G(\rho_{T'}, \rho_T) \neq 0$ і $\rho_{T'} \simeq \rho_T$. □

sns5

1.6.5. Стандартні таблиці. Залишилось довести останній пункт Теореми 1.6.6. Нагадаємо, що $\dim \rho_\lambda$ збігається з кратністю $\mu(\rho_\lambda, \rho_G)$, причому $\sum_{\lambda\in\Lambda(n)} (\dim \rho_\lambda)^2 = n!$ (див. Лему 1.1.10 і Наслідок 1.1.11).

Для кожної діаграми $D = D_\lambda$ з n клітинами позначимо через D_{j-} діаграму з $n-1$ клітиною, яка одержується з D вилученням останньої клітини з j-го рядка (звичайно, це можливо лише якщо наступний рядок коротший, тобто $\lambda_{j+1} < \lambda_j$). Якщо $D' = D_{j-}$, будемо також писати $D = D'_{j+}$ і $D' \mid D$. Якщо $D' = D_{\lambda'}$, то D'_{j+} існує тоді й лише тоді, коли $\lambda'_j < \lambda'_{j-1}$ або j на 1 більше, ніж довжина розбиття λ' (додається новий рядок з однією клітиною). У останньому випадку вважаємо, що $\lambda'_j = 0$.

stand

Теорема 1.6.16. (1) *При фіксованій діаграмі D маємо* $d(D) = \sum_{D'|D} d(D')$.

(2) *При фіксованій діаграмі D' маємо* $\sum_{D'|D} d(D) = nd(D')$.

(3) $\sum_{D\in\Lambda(n)} d(D)^2 = n!$.

Доведення. (1). Нехай у таблиці $T \in S(D)$ число n стоїть у j-му рядку. Тоді цей рядок довший за наступний і n стоїть в ньому на останньому місці. Якщо цю клітину вилучити, одержимо стандартну таблицю T' з $n-1$ клітиною, причому $D(T') = D_{j-}$. Очевидно, всі стандартні таблиці з діаграмою D_{j-} одержуються з таблиць з діаграмою D в такий спосіб і по одному разу. Це й дає потрібну формулу.

(2). Скористаймося індукцією за n. Мінімальне значення для n у цій формулі — це 2. Тоді $n-1 = 1$ і формула очевидна. Припустимо, що вона виконується для деякого n і доведемо її для таблиць з $n+1$ клітиною. Якщо $D' = D_\lambda$ — таблиця з n клітинами, то $\sum_{D'|D} d(D) = \sum_j d(D_{j+})$, де j пробігає номери, для яких $\lambda_j < \lambda_{j-1}$. За формулою (1), $d(D'_{j+}) = \sum_k d((D'_{j+})_{k-})$, де j пробігає номери, для яких j-ий рядок у таблиці D'_{j+} довший за наступний. Отже, таблиця $(D'_{j+})_{k-}$ визначена, виконується одна з умов:

- $\lambda_j < \lambda_{j-1},\ k = j$;
- $\lambda_j + 1 < \lambda_{j-1},\ k = j-1$;
- $\lambda_j < \lambda_{j-1},\ \lambda_k > \lambda_{k+1},\ k \notin \{j, j-1\}$,

Порівняємо суму $\Sigma = \sum_{D|D'} d(D) = \sum_{j,k} d((D'_{j+})_{k-})$ з сумою $\S' = \sum_{j,k} d((D'_{k-})_{j+})$. Таблиця $(D'_{k-})_{j+}$ визначена, якщо виконується одна з умов:

- $\lambda_{k+1} < \lambda_k,\ j = k$;
- $\lambda_{k+1} + 1 < \lambda_k,\ j = k+1$;
- $\lambda_j < \lambda_{j-1},\ \lambda_k > \lambda_{k+1},\ j \notin \{k, k+1\}$.

Легко бачити, що множина пар (j,k) в обох випадках однакова, за виключенням пари $(l+1, l+1)$, де l — довжина розбиття λ. Ця пара є в першій сумі, але її немає в другій. Оскільки $(D'_{l+1,+})_{l+1,-} = D'$, $\Sigma = \Sigma' + d(D')$. Але, за припущенням індукції, $\sum_j d((D'_{k-})_{j+}) = nd(D'_{k-})$. Тому $\Sigma' = n\sum_{D''|D'} d(D'') = nd(D')$ за формулою (1), а $\Sigma = (n+1)d(D')$, що й завершує крок індукції.

(3) також доведемо індукцією за n. Випадок $n = 1$ тривіальний. Припустимо, що ця формула вірна для $n-1$ і доведемо її для n. Згідно вже

доведених формул,

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{D\in\Lambda(n)} d(D)^2 &= \sum\nolimits_{D\in\Lambda(n)} d(D) \sum\nolimits_{D'|D} d(D') = \\ &= \sum\nolimits_{D'\in\Lambda(n-1)} d(D') \sum\nolimits_{D'|D} d(D) = \\ &= \sum\nolimits_{D'\in\Lambda(n-1)} n d(D')^2 = \\ &= n\cdot(n-1)! = n!,\end{aligned}$$

що й треба було довести. □

sn19 Лема 1.6.17. *Якщо* $\sum_{T\in S(D)} A_T = 0$ *для деяких елементів* $A_T \in V_T = \boldsymbol{A}e(T)$*, то всі* $A_T = 0$.

Доведення. Припустимо, що не всі $A_T = 0$ і виберемо серед таблиць T, для яких $A_T \neq 0$, найменшу у лексикографічному порядку таблицю T_0. Якщо $A_T \neq 0$ і $T \neq T_0$, то $T_0 < T$ і, за лемою 1.6.11, $T \vdash T_0$. Тоді $e(T)e(T_0) = 0$, звідки $A_T e(T_0) = 0$. Оскільки $A_{T_0} e(T_0) = A_{T_0}$, то й $A_{T_0} = 0$ і ми одержали протиріччя. □

Доведення пункту (4) теореми 1.6.6. Нехай $D = D_\lambda$. З попередньої леми випливає, що підпростір $\sum_{T\in S(D)} V_T$ насправді є прямою сумою $\bigoplus_{T\in S(D)} V_T$. Всі зображення ρ_T, $T \in S(D)$, ізоморфні V_λ. Тому кратність $\mu(\rho_\lambda, \rho_G)$, або, що те саме, $\dim\rho_\lambda$ не менше $d(\lambda)$. Але ми довели, що $\sum_\lambda d(\lambda)^2 = n!$. Оскільки також $\sum_\lambda d(\lambda)^2 = n!$, то $\dim\rho_\lambda = d(\lambda)$. □

Вправа 1.6.18. У цій вправі група $\mathbf{S}_{n-1}$ розглядається як підгрупа в $\mathbf{S}_n$, що складається з перестановок, які не рухають n. Якщо T — стандартна таблиця Юнга для групи $\mathbf{S}_n$, а T' — стандартна таблиця Юнга для групи $\mathbf{S}_{n-1}$, пишемо $T' \mid T$, якщо T' одержується з T вилученням клітини, в якій стоїть n. Позначимо D_- множину всіх таких діаграм D', що $D' \mid D$, а через D'_+ множину таких діаграм D, що $D' \mid D$. Через V_D позначаємо зображення V_T, де T — довільна таблиця Юнга з діаграмою D.

(1) Доведіть, що якщо $T' \mid T$, то $e(T')e(T) \neq 0$.
Вказівка: Якщо $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$ і $p \notin \mathbf{S}_{n-1}$ або $q \notin \mathbf{S}_{n-1}$, то й $pq \notin \mathbf{S}_{n-1}$.

(2) Виведіть звідси, що $\operatorname{Hom}_{\mathbf{S}_{n-1}}(V_{T'}, \operatorname{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_T) \neq 0$.

(3) Доведіть, що $\operatorname{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_D \simeq \bigoplus_{D'\in D_-} V_{D'}$.
Вказівка: Скористайтеся попередньою вправою та зв'язком між $d(D)$ та $d(D')$ (Теорема 6.16).

(4) З закону взаємності виведіть, що $\operatorname{Ind}^{\mathbf{S}_n}_{\mathbf{S}_{n-1}} V_{D'} \simeq \bigoplus_{D\in D'_+} V_{\mathscr{D}}$.

Розділ II

Зображення компактних груп

2.1. Компактні групи

sc1

tgroup ОЗНАЧЕННЯ 2.1.1. *Топологічна група* — це топологічний простір G, на якому визначена структура групи, тобто асоціативна операція (яка зазвичай зветься множенням) $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$, яка задовольняє аксіомам групи, причому відображення $m : G \times G \to G$ і $inv : G \to G$, $inv(a) = a^{-1}$ є неперервними.

Надалі ми завжди вважаємо, що простір G є *гаусдорфовим.* Відомо, що для цього достатньо, щоб множина $\{a\}$ була замкненою для якогось елемента a. Дійсно, якщо $\{a\}$ замкнене, то й $\{1\}$ замкнене, а тоді прообраз $\{1\}$ при неперервному відображенні $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x^{-1}y$, яке є диагоналлю $\{\,(x, x) \mid x \in G\,\}$ теж замкнений. А це рівносильно гаусдорфовості.

Якщо простір G є компактним (локально компактним), кажуть, що G — *компактна група* (*локально компактна група*).

Важливим для теорії зображень є наступний факт, який ми наводимо без доведення, яке можна знайти, наприклад у книзі [**?**, Теорема 5.14].

haar ТЕОРЕМА 2.1.2. *На компактній групі G існує* інваріантна борелівська міра*, тобто така міра μ, визначена на всіх борелівських підмножинах, що $\mu(aB) = \mu(Ba)$ для довільної борелівської множини B і довільного елемента $a \in G$. Ця міра визначена з точністю до множника.*

Така міра зветься мірою Гаара. *Зазвичай її нормують так, щоб $\mu(G) = 1$ (і ми завжді дотримуємося цієї умови).*

Очевидно, тоді, зокрема, для довільної неперервної функції f на такій групі

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(ax)d\mu(x) = \int_G f(xa)d\mu(x).$$

Ця величина зветься *усередненням функції* $f(x)$ по групі G.

З єдиності міри Гаара випливає, що відображення $g \mapsto g^{-1}$ зберігає цю міру, звідки також

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Надалі компактну групу ми завжди розглядаємо разом з нормованою мірою Гаара μ і замість $d\mu(x)$ пишемо dx.

Приклад 2.1.3. (1) Якщо група G скінченна (тоді її топологія дискретна), міра Гаара визначається рівністю $\mu(x) = 1/\#(G)$ для кожного елемента x. Усереднення функції $f(x)$ тоді має вигляд

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_{x\in G} f(x).$$

(2) Звичайна міра Лєбеґа на колі є мірою Гаара, якщо коло розглядати як групу кутів. Для нормування її треба поділити на довжину кола.

2.2. Зображення топологічних груп

sc2

Нехай G — топологічна група, V — топологічний векторний простір над полем комплексних чисел.[1] Зображення $\rho : G \to GL(V)$ зветься *неперервним*, якщо відображення $G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto \rho(g)v$ є неперервним. Зокрема, у цьому випадку кожен оператор $\rho(g)$ є неперервним, а кожна функція $g \mapsto \rho(g)v$ при фіксованому v є також неперервною. Якщо V — нормований простір, зображення ρ зветься *обмеженим*, якщо всі оперетори $\rho(g)$ є неперервними (тобто обмеженими) і їхні норми обмежені у сукупності.

c20 Лема 2.2.1. *Якщо зображення топологічної групи G у нормованому просторі V є обмеженим і функція $g \mapsto \rho(g)v$ є неперервною при кожному $v \in V$, то це зображення неперервне.*

Доведення. Нехай $\|\rho(g)\| < N$ для всіх $g \in G$, $(x, v) \in G \times V$. Існує окіл U елемента g в групі G такий, що $\|\rho(x)v - \rho(y)v\| < \varepsilon$. Якщо $y \in U$, а $\|v - u\| < \varepsilon/N$, то

$$\|\rho(x)v - \rho)y)u\| \leqslant \|\rho(x)v - \rho(y)v\| + \|\rho(y)v - \rho(y)u\| \leqslant \varepsilon + N \cdot \varepsilon/N = 2\varepsilon,$$

тобто відображення $G \times V \to V,\ (g, v) \mapsto \rho(g)v$ є неперервним. □

Якщо V — гільбертів простір, а всі оператори $\rho(g)$ унітарні, зображення ρ зветься *унітарним*. Звичайно, унітарне зображення завжди обмежене. Тому для його неперервності необхідно й достатньо, щоб при кожному v відображення $G \to V$, $g \mapsto \rho(g)v$ було неперервним. Ми позначаємл множину унітарних операторів у просторі V через $\mathbf{U}(V)$.

Якщо група G компактна, обмеження унітарності не є істотним, як показує наступне твердження.

unit Теорема 2.2.2. *Нехай $\rho : G \to \mathcal{L}(V)$ — неперервне зображення компактної групи G у гільбертовому просторі V. Існує такий скалярний добуток $\langle u, v \rangle$ у просторі V, що всі оператори $\rho(g)$ є унітарними відносно цього скалярного добутку і визначені добутками (u, v) і $\langle u, v \rangle$ топології збігаються.*

[1] Усі твердження залишаються вірними, якщо замінити комплексні числа на дійсні або взагалі на довільне нормроване поле.

Доведення. Покладемо $\langle\, u, v\,\rangle = \int_G (\rho(x)u, \rho(x)v)dx$. Цей інтеграл існує, оскільки підінтегральна функція неперервна. Очевидно, $\langle\, u, v\,\rangle$ задовольняє всім аксіомам скалярного добутку. Для довільного $g \in G$

$$\begin{aligned}\langle\, \rho(g)u, \rho(g)v\,\rangle &= \int_G (\rho(g)\rho(x)u, \rho(g)\rho(x)v)dx = \int_G (\rho(gx)u, \rho(gx)v)dx = \\ &= \int_G (\rho(y)u, \rho(y)v)d(g^{-1}y) == \int_G (\rho(y)u, \rho(y)v)dy = \\ &= \langle\, u, v\,\rangle.\end{aligned}$$

(ми зробили заміну $gx = y$ і скористалися інваріантністю міри Гаара). Це доводить перше твердження.

Позначимо $\|v\|$ і $\|v\|_1$, відповідно, норми у V відносно скалярних добутків (u, v) та $\langle\, u, v\,\rangle$. Функції $\|\rho(x)\|$ і $\|\rho(x^{-1}\|$ неперервні на G, тому вони обмежені: $\|\rho(x)\| \leqslant A$ і $\|\rho(x^{-1}) \leqslant B\|$ для деяких додатних чисел A, B. Тому

$$\|v\|_1^2 = \int_G \|\rho(x)v\|^2 dx \leqslant A^2 \int_G \|v\|^2 dx = A^2\|v\|^2,$$

а також

$$\|v\|^2 = \int_G \|v\|^2 dx = \int_G \|\rho(x)^{-1}\rho(x)v\|^2 dx \leqslant B^2 \int_G \|\rho(x)v\|^2 dx = B^2\|v\|_1^2.$$

Це доводить друге твердження. □

Отже, розглядаючи неперервні зображення компактної групи в гільбертовому просторі, можна завжди вважати його унітарним.

c22 Наслідок 2.2.3. *Якщо ρ — неперервне зображення компактної групи G у гільбертовому просторі V, U — замкнений інваріантний підпростір, то існує такий замкнений інваріантний підпростір U', що $V = U \oplus U'$.я*

Доведення. Зображення ρ можна вважати унітарним. Покладемо $U' = U^{\perp}$ (ортогональне доповнення до U). Тоді U' замкнене і $V = U \oplus U'$. Якщо $v \in U'$, $u \in U$, то $(\rho(x)v, u) = (v, \rho(x)^{-1}u) = 0$, оскільки $\rho(x)^{-1}u \in U$. Отже, U' також інваріантне. □

Надалі ми розглядаємо комплекснозначні функції на G. Насправді, усі твердження залишаються вірними і для функцій з дісними значеннями. Для довільної функції $f : G \to \mathbb{C}$ позначимо $R(g)f(x) = f(xg)$, де $g \in G$. Очевідно, якщо функція $f(x)$ неперервна (інтегровна по мірі Гаара), такою є й функція $R(g)f$. Позначимо $L_2(G) = L_2(G, \mu)$, де μ — міра Гаара. Нагадаємо, що $L_2(G)$ — гільбертів простір відносно скалярного добутку

$$(u, v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx.$$

c23 Теорема 2.2.4. *Нехай G — компактна група. Відображення $R \mapsto R(g)$ є неперервним унітарним зображенням групи G у просторі $L_2(G)$.* Це зображення зветься *регулярним зображенням компактної групи G.*

Доведення. Оскільки

$$(R(g)u, R(g)v) = \int_G u(xg)\overline{v(xg)}dx = \int_G u(y)\overline{v(y)}d(yg^{-1}) =$$
$$= \int_G u(y)\overline{v(y)}dy = (u, v),$$

це зображення є унітарним. Доведемо, що при фіксованій функції f відображення $G \to L_2(G),\ g \mapsto f(xg)$ є неперервним.

Нехай спочатку $f(x)$ — неперервна функція. Оскільки група G компактна, функція $f(x)$ рівномірно неперервна, тобто існує окіл U одиниці групи G такий, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, якщо $y \in xU$. Тоді, якщо $g' \in gU$, то $|R(g)f(x) - R(g')f(x)| < \varepsilon$ для кожного $x \in G$, а тоді й $\|R(g)f - R(g')f\| < \varepsilon$.

Для довільної функції $f \in L_2(G)$ існує неперервна функція $f_c \in L_2(G)$ така, що $\|f - f_c\| < \varepsilon$. Виберемо окіл одиниці U у групі G так, щоб $\|\rho(g)f_c - \rho(g')f_c\| < \varepsilon$ при $g' \in gU$. Тоді, якщо $g' \in gU$,

$$\|R(g)f - R(g')f\| \leqslant \|R(g)f - R(g)f_c\| + \|R(g)f_c - R(g')f_c\| +$$
$$+ \|R(g')f_c - R(g')f\| < 3\varepsilon,$$

оскільки всі оператори $R(g)$ унітарні, що й завершує доведення. □

sc3

2.3. Скінченновимірні зображення

Надалі ми вважаємо, що G — компактна група. З Теореми 2.2.2 і Наслідку 2.2.3 випливає, що довільне її скінченновимірне зображення подібне унітарному і є цілком звідним (тобто розкладається у пряму суму незвідних зображень). Якщо простір V евклідів (тобто гільбертів), а зображення $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ унітарне, то з доведення Наслідку 2.2.3 випливає, що V розкладається у *ортогоналоьну пряму суму* інваріантних незвідних підпросторів. Нехай $\widehat{G} = \left\{ \rho^\lambda \mid \lambda \in \Lambda \right\}$ — множина всіх попарно неізоморфних унітарних скінченновимірних зображень групи G, де $\rho^\lambda : G \to \mathbf{U}(V^\lambda)$. Позначимо $d_\lambda = \dim V^\lambda$ Фіксуємо у кожному просторі V^λ ортонормовану базу $\left\{ e_i^\lambda \mid 1 \leqslant i \leqslant d_\lambda \right\}$ і позначимо через $\rho_{ij}^\lambda(g)$ коефіцієнти матриці оператора $\rho^\lambda(g)$ у цій базі. Відомо, що $\rho_{ij}^\lambda(g) = (\rho^\lambda(g)e_i, e_j)$. Оскільки $\rho^\lambda(g^{-1}) = \rho^\lambda(g)^*$ (спряжений оператор), то

$$\rho_{ij}^\lambda(g^{-1}) = (\rho^\lambda(g)^* e_i, e_j) = (e_i, \rho^\lambda(g)e_j) = \overline{(\rho^\lambda(g)e_j, e_i)} = \overline{\rho_{ji}^\lambda(g)}$$

. Позачимо також $\tilde{\rho}_{ij}^\lambda = \sqrt{d_\lambda}\rho_{ij}^\lambda$. Ці функція неперервні, отже належать $L_2(G)$.

Наступна теорема є основою теорії зображень компактних груп і гармонійного аналізу не таких групах.

main

Теорема 2.3.1. *Функції* $\left\{ \tilde{\rho}^{\lambda}_{ij} \mid \lambda \in \Lambda,\, i,j = 1,2,\dots,d_\lambda \right\}$ *утворюють ортонормовану базу простору* $L_2(G)$.

kolo

Приклад 2.3.2. Нехай $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — «група кутів» (або одиничне коло). Тоді $L_2(G) = L_2[0,2\pi]$. Оскільки G комутативна, її незвідні скінченновимірні зображення одновимірні, тобто гомоморфізми $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$. Відомо, що всі вони мають вигляд $x \mapsto e^{nxi}$. Тому Теорема 2.3.1 у цьому випадку перетворюється на відому теорему з аналізу Фур'є: кожна функція з $L_2[0,2\pi]$ розкладається у ряд по кратним експонентам, який збігається у середньому квадратичному.

Доведення. Як і для скінченних груп, и почнемо зі *співвідношень ортогональності*. Тут головним є наступний факт.

c32

Лема 2.3.3. *Нехай* $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *і* $\theta : G \to \mathrm{GL}(W)$ *— скінченновимірні неперервні зображення компактної групи* G, $A : V \to W$ *— лінійне відображення. Тоді відображення*

$$\widetilde{A} = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(x) dx$$

є гомоморфізмом зображень. Зокрема, якщо ці зображення незвідні і неізоморфні, то $\widetilde{A} = 0$, *а якщо* $\rho = \theta$ *— незвідне, то* $\widetilde{A} = \dfrac{\operatorname{Tr} A}{\dim V} \cdot \mathbf{1}$.

Доведення.

$$\widetilde{A}\rho(g) = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(x)\rho(g) dx = \int_G \theta(x^{-1}) A \rho(xg) dx =$$

(заміна $y = xg$)

$$= \int_G \theta(gy^{-1}) A \rho(y) d(g^{-1}y) = \int_G \theta(g)\theta(y^{-1}) A \rho(y) dy =$$
$$= \theta(g)\widetilde{A},$$

отже $\widetilde{A} \in \mathrm{Hom}_G(\rho,\theta)$.

Застосуємо лему Шура. Якщо ρ,θ незвідні неізоморфні, то $\widetilde{A} = 0$. Якщо $\rho = \theta$ незвідне, то $\widetilde{A} = \lambda \cdot \mathbf{1}$. Тоді $\operatorname{Tr} \widetilde{A} = \lambda \dim V$, але

$$\operatorname{Tr} \widetilde{A} = \int_G \operatorname{Tr}(\rho(x)^{-1} A \rho(x)) dx = \int_G \operatorname{Tr} A dx = \operatorname{Tr} A \int_G dx = \operatorname{Tr} A$$

і $\lambda = \dfrac{\operatorname{Tr} A}{\dim V}$. □

ortho

Теорема 2.3.4.

$$(\rho^{\lambda}_{ij}, \rho^{\lambda'}_{kl}) = \begin{cases} \frac{1}{d_\lambda}, & \text{якщо } \lambda = \lambda',\ i = k,\ j = l, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Отже, множина функцій $\Phi = \left\{ \tilde{\rho}^{\lambda}_{ij} \mid \lambda \in \Lambda,\, i,j = 1,2,\dots,d_\lambda \right\}$ *ортонормована в* $L_2(G)$.

Доведення. Це твердження дводиться так само, як відповідна теорема для скінченних груп (Теорема 1.2.2). Треба розглянути оператор, який у фіксованій базі задано матрицею

$$\int_G \rho^\lambda(x^{-1}) e_{kl} \rho^{\lambda'}(x) dx,$$

і скористатися Лемою 2.3.3. Деталі доведення залишаємо читачеві як вправу. □

Позначимо L_i^λ лінійну оболонку функцій ρ_{ij}^λ $(1 \leqslant j \leqslant d_\lambda)$ і $L^\lambda = \sum_{i=1}^{d_r} L_i^\lambda$. Зауважимо, що

$$R(g)\rho_{ij}^\lambda(x) = \rho_{ij}^\lambda(xg) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho_{ik}^\lambda(x)\rho_{kj}^\lambda(g).$$

Отже, цей підпростір є інваріантним відносно регулярного зображення, функції $\tilde{\rho}_{ij}^\lambda$ складають його ортонормовану базу, а обмеження $R|_{L_i^\lambda}$ ізоморфне ρ^λ.

Залишилось довести *повноту* множини Φ, тобто перевірити, що підпростір, породжений функціями з Φ, є щільним у $L_2(G)$.

Нехай $\chi(x)$ — така неперервна функція на G, що $\chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)}$ для всіх $x \in G$. Тоді, зокрема, $\chi(xy^{-1}) = \overline{\chi(yx^{-1})}$. Тому формула

$$(A_\chi f)(x) = \int_G \chi(xy^{-1}) f(y) dy$$

задає самоспряжений компактний оператор у просторі $L_2(G)$. Нехай $\{ f_r \}$ — ортонормована множина власних функцій (з ненульовими власними значеннями) оператора A_χ. Відомо, що тоді ядро $\chi(xy^{-1})$ розкладається у сумму $A_\chi = \sum_r b_r f_r(x) f_r(y)$, яка збігається рівномірно на $G \times G$. Поклавши $y = 1$, одержимо розклад

ce31 (2.3.1)
$$\chi(x) = \sum_r c_r f_r(x).$$

Зауважимо, що довільну функцію $v(x)$ можна подати у вигляді $v_1(x) - iv_2(x)$, де

$$v_1(x) = \frac{1}{2}(v(x) + \overline{v(x^{-1})}, \quad v_2 = \frac{i}{2}(v(x) - \overline{v(x^{-1})},$$

причому обидві функції v_k задовольняють вимогу $v_k(x^{-1} = \overline{v_k(x)}$, тобто допускають розклад вигляду (2.3.1).

Нехай c — ненульове власне число оператора A_χ, V_χ^c — відповідний власний простір. Він є скінченновимірним.

c34 Твердження 2.3.5. *Оператор A_χ переставновний з усіма операторами $R(g)$. Зокрема, підпростір V_χ^c є інваріантним відносно регулярного зображення.*

Доведення.

$$(A_\chi R(g)f)(x) = \int_G \chi(xy^{-1})f(yg)dy = \int_G \chi(xgg^{-1}y^{-1})f(yg)d(yg) =$$
$$= \int_G \chi(xgz^{-1})f(z)dz = (R(g)A_\chi f)(x).$$

□

Розкладемо V_χ^c у ортогональну пряму суму незвідних підпросторів: $V_\chi^c = \bigoplus_{k=1}^m V_\chi^{c,k}$. Кожен з підпросторів $V_\chi^{c,k}$ ізоморфний одному з зображень ρ^λ. Якщо $V_\chi^{c,k} \simeq V^\lambda$, у $V_\chi^{c,k}$ є ортонормована база $\{\, v_1, v_2, \dots, v_d \,\}$, де $d = d_\lambda$, така, що $R(g)v_i = \sum_{j=1}^n \rho_{ij}^\lambda v_j$, тобто $v_i(xg) = \sum_{j=1}^d \rho_{ij}^\lambda(g)v_j(x)$. Поклавши у цій рівності $x = 1$, одержимо $v_i(g) = \sum_{j=1}^d v_j(1)\rho_{ij}(g)$. Отже $V_\chi^{c,k} \subseteq L^\lambda$ і $V_c^\chi \subseteq \sum_\lambda L^\lambda$. Разом з розкладом (2.3.1) це дає $\chi \in \sum_\lambda L^\lambda$, а тоді й кожна неперервна функція належить $\sum_\lambda L^\lambda = \Phi$. Оскільки всі неперервні функції належать замиканню $\overline{\Phi}$, а неперервні функції утворюють щільний підпростір у $L_2(G)$, маємо $\overline{\Phi} = L_2(G)$, що й треба було довести. □

c35 Наслідок 2.3.6. *Для довільної функції $f \in L_2(G)$ має місце* формула Фур'є

$$f = \sum_{\lambda,i,j} (f, \tilde\rho_{ij}^\lambda)\tilde\rho_{ij}^\lambda = \sum_{\lambda,i,j} d^\lambda (f, \rho_{ij}^\lambda)\rho_{ij}^\lambda,$$

(сума збігається у метриці простору $L_2(G)$), причому

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\lambda,i,j} d_\lambda^2 |(f, \rho_{ij}^\lambda)|^2 \text{ (рівність Парсеваля).}$$

Зауважимо, що у розкладі регулярного зображення

$$L_2(G) = \overline{\bigoplus_\lambda L^\lambda} = \overline{\bigoplus_{\lambda,j} L_j^\lambda}$$

незвідне зображення ρ^λ зустрічається d_λ разів, так само, як у випадку скінченних груп (Лема 1.1.10).

sc4 2.4. Розклад унітарних зображень

У цьому розділі ми встановимо, що довільне унітарне зображення компактної групи розкладається у (гільбертову) пряму суму скінченновимірних зображень.

c41 Теорема 2.4.1. *Нехай $\theta : G \to \mathbf{U}(V)$ — унітарне зображення компактної групи G у гільбертовому просторі V. Існує набір $\{\, V_s \,\}$ попарно ортогональних інваріантних підпросторів простору V такий, що $V = \overline{\bigoplus_s V_s}$.*

Очевидно, можна вважати, що обмеження зображення θ на кожен підпростір V_s є незвідним, тобто ізоморфним одному з зображень ρ^λ.

Доведення. Позначимо

$$E_{ij}^\lambda = d_\lambda \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}\theta(x)dx.$$

Це лінійний неперервний оператор у просторі V. Позначимо також $E^\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} E_{ii}^\lambda$. Доведемо такі властивості цих операторів:

$$\begin{aligned}
&\theta(g)E_{ij}^\lambda = \sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho_{ki}^\lambda E_{kj}^\lambda,\\
&E_{ij}^\lambda\theta(g) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho_{jk}^\lambda E_{ik}^\lambda,\\
&E_{ij}^\lambda E_{kl}^{\lambda'} = \begin{cases} E_{il}^\lambda & \text{якщо } \lambda=\lambda',\ j=k,\\ 0 & \text{інакше.}\end{cases}\\
&(E_{ij}^\lambda)^* = E_{ji}^\lambda.
\end{aligned}$$

Дійсно,

$$\theta(g)E_{ij}^\lambda = d_\lambda \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}\theta(gx)dx =$$

(заміна $gx=y$)

$$= d_\lambda \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(g^{-1}y)}\theta(y)dy =$$

(оскільки $\rho^\lambda(g^{-1}y) = \rho^\lambda(g^{-1})\rho^\lambda(y) = \rho^\lambda(g)^*\rho^\lambda(y)$)

$$\begin{aligned}
&= d_\lambda \int_G \left(\sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho_{ki}^\lambda(g)\overline{\rho_{kj}^\lambda}(y)\theta(y)\right)dy =\\
&= \sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho_{ki}^\lambda E_{kj}^\lambda.
\end{aligned}$$

Так само доводиться друга рівність. Тоді

$$\begin{aligned}
E_{ij}^\lambda E_{kl}^{\lambda'} &= d^\lambda \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}\theta(x)E_{kl}^{\lambda'}dx =\\
&= d^\lambda \sum_{r=1}^{d_\lambda} \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}\rho_{rk}^{\lambda'}(x)E_{rl}^{\lambda'}dx.
\end{aligned}$$

Згідно з формулами ортогональності (Теорема 2.3.4), єдиний випадок, коли цей інтеграл ненульовий — це коли $\lambda=\lambda'$, $i=r$, $j=k$. Тоді він рівний $\frac{1}{d_\lambda}$ і вся сума дорівнює E^λ_{il}. Це доводить третю формулу. Нарешті,

$$\begin{aligned}(E^{la}_{ij})^* = d_\lambda \int_G \rho^\lambda_{ij}(x)\theta(x)^* dx = d_\lambda \int_G \overline{\rho^\lambda_{ji}(x^{-1})}\theta(x^{-1})dx = \\ = d_\lambda \int_G \overline{\rho^\lambda_{ji}(x^{-1})}\theta(x^{-1}dx = E^\lambda_{ji}.\end{aligned}$$

Звідси, зокрема, для операторів E^λ випливає, що

$$\begin{aligned}&\theta(g)E^\lambda = E^\lambda\theta(g),\\ &E^\lambda_{ij}E^\lambda = E^\lambda E^\lambda_{ij} = E^\lambda_{ij},\\ &E^\lambda E^{\lambda'} = \begin{cases} E^\lambda & \text{якщо } \lambda = \lambda',\\ 0 & \text{інакше,}\end{cases}\\ &(E^\lambda)^* = E^\lambda.\end{aligned}$$

(перевірте це). Отже, E^λ — попарно ортогональні ортопроектори у просторі V, тому їхні образи $H^\lambda = \operatorname{Im} E^\lambda$ — попарно ортогональні замкнені підпростори у V. Оскільки E^λ комутують з $\theta(g)$, ці підпростори інваріантні. Так само, E^λ_{ii} є попарно ортогональними ортопроекторами, тому їх образи $H^\lambda_i = \operatorname{Im} E^\lambda_{ii}$ теж є попарно ортогональними замкненими підпросторами, причому вони є підпросторами у H^λ. Оскільки $E^\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} E^\lambda_{ii}$, очевидно, що $H^\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} H^\lambda_i$. Крім того, $v \in H^\lambda$ тоді й лише тоді, коли $E^\lambda v = v$ і $v \in H^\lambda_i$ тоді й лише тоді, коли $E^\lambda_{ii} v = v$. З рівностей $E^\lambda_{ii}E^\lambda_{ij} = E^\lambda_{ij}E^\lambda_{jj}$ також випливає, що якщо $v \in H^\lambda_k$, то $E^\lambda_{ij}v = 0$ при $k \neq j$ і належить H^λ_i при $k = j$, тобто E^λ_{ij} можна розглядати, як оператор $H^\lambda_j \to H^\lambda_i$. Оскільки $E^\lambda_{ij}E^\lambda_{ji} = E^\lambda_{ii}$, оператори $E^\lambda_{ij} : H^\lambda_j \to H^\lambda_i$ та $E^\lambda_{ji} : H^\lambda_i \to H^\lambda_j$ є взаємно оберненими.

Нехай $\{ e^s_1 \mid s \in \mathsf{S} \}$ — повна ортонормована система векторів з H^λ_1, $e^s_i = E_{i1}e^s_1$, а V^λ_s — підпростір, породжений векторами $e^s_1, e^s_2, \dots, e^s_{d_\lambda}$. Ці вектори утворюють ортонормовану базу підпростору V^λ_s і

$$\theta(g)e^s_i = \theta(g)E^\lambda_{i1}e^s_1 = \sum_{k=1}^{d_\lambda} \rho^\lambda_{ik}E^\lambda_{k1}e^s_1 =$$

$$\sum_{k=1}^{d^\lambda} \rho^\lambda_{ik}e^s_k.$$

Отже, підпростір V^λ_s — інваріантний відносно зображення θ, причому обмеження θ на цей підпростір ізоморфне зображенню ρ^λ. Очевидно також, що всі вектори $\left\{ e^s_i \mid s \in \mathsf{S},\, 1 \leqslant i \leqslant d^\lambda \right\}$ утворюють ортономовану базу простору H^λ.

Залишилось довести, що $\overline{\bigoplus_\lambda H^\lambda} = V$ (тоді й $\overline{\bigoplus_{\lambda,s} V^\lambda_s} = V$). Якщо це не так, знайдеться ненульовий вектор $v \in V$, ортогональний до всіх підпросторів H_j^λ. Оскільки $E_{ij}^\lambda v \in H_j^\lambda$, то $(v, E_{ij}^\lambda v) = 0$, тобто, для всіх $\lambda, i.j$,

$$0 = (v, \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}\theta(x)v)dx = \int_G \overline{\rho_{ij}^\lambda(x)}(v, \theta(x)v)dx = (\phi, \rho_{ij}^\lambda),$$

де $\phi(x) = (v, \theta(x)v)$ — неперервна функція на G. З формули Фур'є (Наслідок 2.3.6) випливає, що $\phi(x) = 0$ для всіх x, зокрема, $\phi(1) = (v, v) = 0$, тобто $v = 0$. Одержане протиріччя завершує доведення. □

sc5

2.5. Лінійні групи

Лінійними групами звуться підгрупи груп $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Така група G має *тотожне зображення* τ у просторі $V_1 = \mathbb{C}^r$. З нього виникають спряжене зображення $\rho^* : G \to V_1^*$ та *тензорні зображення* τ_m^n $(n \in \mathbb{Z})$:

$$\tau_m^n = \underbrace{\tau \otimes \tau \otimes \ldots \otimes \tau}_{m \text{ разів}} \otimes \underbrace{\tau^* \otimes \tau^* \otimes \ldots \otimes \tau^*}_{n \text{ разів}}$$

Ці зображення, як правило, є звідними, навіть якщо тотожне зображення було незвідним. Нехай $\left\{ \rho^\lambda \mid \lambda \in \widehat{G}_{\mathrm{lin}} \right\}$ — всі попарно неізоморфні унітарні незвідні зображення групи G, які входять у розклади зображень τ_m^n $(n \in \mathbb{Z})$.

tensor

Теорема 2.5.1. *Якщо G — компактна лінійна група, то $\widehat{G}_{\mathrm{lin}} = \widehat{G}$, тобто кожне незвідне зображення групи G ізоморфне деякому незвідному прямому доданку одного з зображень τ_m^n.*

Доведення. Нехай $\mathbf{R}$ — підпростір у алгебрі неперервних функцій $\mathrm{C}(G)$, породжений матричними коефіцієнтами $\left\{ \rho_{ij}^\lambda \mid \lambda \in \widehat{G}_{\mathrm{lin}} \right\}$. Цей підпростір містить одиничну функцію (τ_0^0 — тривіальне зображення). Оскільки матричні коефіцієнти зображення $\rho^\lambda \otimes \rho^{\lambda'}$ — це добутки матричних коефіцінтів $\rho_{ij}^\lambda \rho_{kl}^{\lambda'}$, а $\tau_m^n \otimes \tau_l^k = \tau_{m+l}^{n+k}$, $\mathbf{R}$ є підалгеброю в $C(G)$. Оскільки $\overline{\rho_{ij}^\lambda} = (\rho^\lambda)_{ji}^*$, а $(\tau_m^n)^* = \tau_n^m$, разом з кожною функцією $f(x)$ ця підалгебра містить $\overline{f(x)}$. Нарешті, функції з $\mathbf{R}$ розділяють точки G, бо якщо $x \neq y$, то $\tau(x) \neq \tau(y)$, тобто навіть функції ρ_{ij}^λ, де ρ^λ пробігає незвідні доданки $\tau_1^0 = \tau$, розділяють точки. За теоремою Стоуна–Вайєрштрасса, підалгебра $\mathbf{R}$ щільна в $C(G)$, а тому й у $L_2(G)$. Але якщо $\lambda \notin \widehat{G}_{\mathrm{lin}}$, то матричні елементи ρ_{ij}^λ ортогональні до всіх функцій з $\mathbf{R}$, що неможливо. □

Наведемо один критерій того, що компактна група G ізоморфна лінійній, тобто має точне скінченновимірне зображення. Кажуть, що G — *група без малих підгруп*, якщо в ній існує окіл U одиничного елемента, в якому не міститься жодної нетривіальної підгрупи. Група $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ є такою (див. вправу 5.1), тому й довільна лінійна група є такою (чому?).

small

Теорема 2.5.2. *Компактна група ізоморфна лінійній тоді й лише тоді, коли вона є групою без малих підгруп.*

Доведення. Нехай G — компактна група без малих підгруп, $U \subset G$ — окіл одиничного елемента, в якому не міститься жодна нетривіальна підгрупа. З доведення теореми 2.3.1 випливає, що її незвидні зображення розділяють точки. Зокрема, для кожного елемента $g \notin U$ знайдеться незвідне зображення ρ_g таке, що $\rho_g(g) \neq 1$. Позначимо $U_g = \{\, x \in G \mid \rho_g(x) \neq 1 \,\}$. Це відкрита множина, яка не перетинається з $\operatorname{Ker} \rho_g$ і $\bigcup_{g \in G} U_g \supseteq G \setminus U$. Оскільки множина $G \setminus U$ замкнена в G, , а тому компактна, знайдуться елементи $g_1, g_2, \dots, g_m$ такі, що $\bigcup_{i=1}^m U_{g_i} \supseteq G \setminus U$. Нехай $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_{g_i}$. Це скінченновимірне зображення і $\operatorname{Ker} \rho = \bigcap_{i=1}^m \operatorname{Ker} \rho_{g_i}$ не перетинається з жодним з околів U_{g_i}, а тому міститься в U. За вибором U, звідси випливає, що $\operatorname{Ker} \rho = \{1\}$, тобто зображення ρ є точним. □

Приклад 2.5.3. *Групою Лі* зветься група G, яка одночасно є диференційовним многовидом, причому множення $G \times G \to G$ і обертання елементів $G \to G$ є диференційовними функціями. Очевидно, група Лі є топологічною групою. Зокрема, такими є групи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ та інші підгрупи $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, які є підмноговидами. У теорії Лі доводиться, що група Лі є групою без малих підгруп. Тому кожна компактна група Лі ізоморфна лінійній групі.

Розділ III

Напівпрості алгебри

ch2

3.1. Напівпрості модулі

s21

211 Означення 3.1.1. Нехай $\boldsymbol{A}$ — алгебра над полем $\Bbbk$. *Модулем* (або *лівим модулем*) над алгеброю $\boldsymbol{A}$ зветься векторний простір M разом з білінійним відображенням $\boldsymbol{A} \times M \to M$, $(a, x) \mapsto ax$, таким, що

(1) $1x = x$ для всіх $x \in V$;
(2) $(ab)x = a(bx)$ для всіх $a, b \in \boldsymbol{A}$, $x \in V$.

Замість *модуль над алгеброю* $\boldsymbol{A}$ кажуть ще $\boldsymbol{A}$-*модуль*.

З кожним модулем пов'язано *зображення* алгебри $\boldsymbol{A}$, тобто гомоморфізм $\rho : \boldsymbol{A} \to \mathrm{Lin}(V)$, де $\mathrm{Lin}(V)$ — алгебра лінійних операторів у просторі V. Саме, треба покласти $\rho(a)x = ax$. Навпаки, якщо задано зображення $\rho : \boldsymbol{A} \to \mathrm{Lin}(V)$, то V перетворюється на $\boldsymbol{A}$-модуль, якщо покласти $ax = \rho(a)x$. Отже мова модулів і мова зображень фактично є синонімічними.

Читачеві пропонується визначити поняття *підмодуля, фактормодуля, прямої суми модулів, гомоморфізму* і т.ін. й перевірити, що для модулів мають місце звичайні теореми, типу теорем про гомоморфізм. Детальне обговорення цих питань міститься в [**2**, Глава I]. Простір гомоморфізмів з $\boldsymbol{A}$-модуля M у $\boldsymbol{A}$-модуль N позначається $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$. Алгебра ендоморфізмів $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, M)$ позначається також $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}} M$.

212 Приклад 3.1.2. (1) Кожну алгебру $\boldsymbol{A}$ можна розглядати, як модуль над собою, визначивши av як добуток цих елементів у алгебрі $\boldsymbol{A}$. Цей модуль зветься *регулярним* $\boldsymbol{A}$-*модулем*, а відповідне зображення — регулярним зображенням алгебри $\boldsymbol{A}$. Оскільки $a1 = a \neq 0$, якщо $a \neq 0$, цей зображення є *точним*, тобто визначає занурення алгебри $\boldsymbol{A}$ в алгебру лінійних операторів $\mathrm{Lin}(\boldsymbol{A})$ (це — так звана *теорема Келі* для алгебр).

(2) *Групова алгебра* групи G — це простір $\Bbbk G$ з природним множенням, яке визначене множенням елементів базису, тобто елементів групи G. Очевидно, зображення цієї алгебри — це те саме, що зображення групи G. Відповідно, $\Bbbk G$-модулі звуться також G-модулями.

Модулі, ізоморфні прямим сумам декількох екземплярів регулярного модуля звуться *вільними модулями.* З означення одразу випливає, що $\boldsymbol{A}$-модуль M є вільним тоді й лише тоді, коли в ньому є $\boldsymbol{A}$-*база*, тобто такий набір елементів $\{ v_i \}$ (можливо нескінченний), що кожен елемент $x \in M$ однозначно подається у вигляді суми $\sum_i a_i v_i$, в якій $a_i \in \boldsymbol{A}$ і майже всі коефіцієнти a_i нульові.

213 Означення 3.1.3. (1) $\boldsymbol{A}$-модуль $M \neq \{0\}$ зветься *простим* (або *незвідним*), якщо в ньому немає підмодулів, крім $\{0\}$ та M (*нетривіальних підмодулів*).

(2) Модуль M зветься *напівпростим*, якщо він розкладається в пряму суму простих модулів.

(3) Алгебра $\boldsymbol{A}$ зветься *напівпростою*, якщо регулярний $\boldsymbol{A}$-модуль є напівпростим.

Наприклад, з теореми Машке випливає, що групова алгебра скінченної групи G над полем $\Bbbk$ є напівпростою, якщо $\operatorname{char} \Bbbk \nmid \#(G)$.

Оскільки ядро й образ гомоморфізму завжди є підмодулями, наступне твердження («*Лема Шура*») є очевидним.

214 Теорема 3.1.4 (Лема Шура). *Нехай $f : M \to N$ — ненульовий гомоморфізм модулів.*

(1) *Якщо модуль N простий, то f — епіморфізм* (*сюр'єктивне відображення*).

(2) *Якщо модуль M простий, то f — мономорфізм* (*ін'єктивне відображення)*).

(3) *Якщо і N, і M прості, то f — ізоморфізм.*

Зокрема, алгебра ендроморфізмів простого модуля є тілом *(*алгеброю з діленням*).*

Сформулюємо декілька нескладних, але важливих властивостей напівпростих модулів.

215 Теорема 3.1.5. *Наступні умови рівносильні*:

(1) *Модуль M є напівпростим.*

(2) *Модуль M є сумою простих підмодулів.*

(3) *Для кожного підмодуля $N \subseteq M$ існує* доповнення*, тобто такий підмодуль N', що $M = N \oplus N'$.*

(4) *Кожен ненульовий підмодуль модуля M містить простий підмодуль, а у кожного простого підмодуля є доповнення.*

Доведення. Ми доведемо цю теорему для скінченновимірних модулів. У нескінченновимірному випадку треба застосовувати такі відомості з теорії множин, як лема Цорна або трансфінітна індукція.

Імплікації (1)⇒(2) та (3)⇒(4) тривіальні.

(2)⇒(3) Нехай $M = \sum_i M_i$, де M_i — прості підмодулі. Якщо $N \supseteq M_i$ для всіх i, то $N = M$. Нехай $N \not\supseteq M_1$. Тоді $N \cap M_1 = 0$, отже $N_1 = N + M_1$ є прямою сумою $N \oplus M_1$. Якщо $N_1 = M$, твердження доведене. Інакше знайдеться простий підмодуль $M_2 \nsubseteq N_1$, звідки одержимо підмодуль $N_2 = N_1 \oplus M_2 = N \oplus M_1 \oplus M_2$. Продовжуючи цю процедуру, ми врештірешт одержимо, що $M = N \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$.

(4)⇒(1) Модуль M містить простий підмодуль M_1, отже $M = M_1 \oplus N_1$ для деякого підмодуля N_1. Якщо $N_1 = 0$, M простий, а тому й напівпростий. Інікше N_1 містить простий підмодуль M_2, отже $M = M_2 \oplus M'$. Але тоді $N_1 = M_2 \oplus N_2$, де $N_2 = M' \cap N_1$ (перевірте це). Отже $M = M_1 \oplus M_2 \oplus N_2$. Продовжуючи цю процедуру, ми й розкладемо M у пряму суму простих підмодулів. □

216 Наслідок 3.1.6. *Якщо модуль M є напівпростим, то будь-який його підмодуль і фактормодуль також є напівпростими.*

Доведення. Нехай N — підмодуль в M, N' — його підмодуль. Тоді $M = N' \oplus M'$, звідки $N = N' \oplus (N \cap M')$. Отже, будь-який підмодуль в N має доповнення, а тому N — напівпростий. З іншого боку, $M = N \oplus L$ для деякого підмодуля L, а тоді $M/N \simeq L$. Отже, фактормодуль M/N ізоморфний підмодулю в M, а тому, як ми вже довели, є напівпростим. □

Встановими також важливу властивість вільних модулів.

217 Твердження 3.1.7. *Кожен $\boldsymbol{A}$-модуль ізоморфний фактормодулю деякого вільного модуля.*

Доведення. Для простоти вважаємо модуль M скінченновимірним. Виберемо в модулі M якусь *сім'ю твірних*, тобто такий набір елементів $\{ x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m \}$, що будь-який елемент $x \in M$ подається як лінійна комбінація $\sum_{i=1}^m a_i x_i$, де $a_i \in \boldsymbol{A}$. Визначимо гомоморфізм $f : m\boldsymbol{A} \to M$ правилом $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^m a_i x_i$. Очевидно, f сюр'єктивний, отже $M = \operatorname{Im} f \simeq m\boldsymbol{A}/\operatorname{Ker} f$. □

З цього факту й Наслідку 3.1.6 одразу випливає такий результат.

218 Наслідок 3.1.8. *Якщо алгебра $\boldsymbol{A}$ є напівпростою, то будь-який $\boldsymbol{A}$-модуль є напівпростим.*

219 Означення 3.1.9. Алгебра $\boldsymbol{A} \neq \{0\}$ зветься *простою*, якщо в ній немає ідеалів, крім $\{0\}$ та $\boldsymbol{A}$.[1]

210 Твердження 3.1.10. *Якщо проста алгебра містить простий підмодуль (наприклад, якщо вона скінченновимірна), то вона є напівпростою.*

Доведення. Нехай $M \subseteq \boldsymbol{A}$ — простий підмодуль. Для кожного елемента $a \in \boldsymbol{A}$ добуток Ma знову є підмодулем. Відображення $M \to Ma$, $x \mapsto xa$, є епіморфізмом. Якщо $Ma \neq 0$, то, за лемою Шура, це ізоморфізм. Тому $M\boldsymbol{A} = \sum_{a \in A} Ma$ — напівпростий підмодуль в $\boldsymbol{A}$. Але очевидно, що $M\boldsymbol{A}$ — ідеал в $\boldsymbol{A}$. Отже, $M\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ й $\boldsymbol{A}$ — напівпроста алгебра. □

[1] *Ідеал* тут і надалі завжди означає *двосторонній ідеал.*

Зауваження. Існують прості алгебри, які не є напівпростими, тобто не містять простих підмодулів. Прикладом такої алгебри є так звана *алгебра Вайля* над довільним полем $\Bbbk$ характеристики 0, яка породжується двома елементами x, y зі співвідношенням $yx - xy = 1$. Її можна розглядати, як алгебру диференціювань кільця многочленів $\Bbbk[x]$, якщо ототожнити y з диференціюванням $\frac{d}{dx}$. Ця алгебра відіграє важливу роль у математичних засадах квантової механіки.

Розглянемо важливий приклад. Нехай $\boldsymbol{D}$ — тіло (алгебра з діленням), $\mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$ — алгебра $n \times n$ матриць з коефіцієнтами з тіла $\boldsymbol{D}$. Векторний простір $\boldsymbol{D}^n$ можна розглядати, як модуль над цією алгеброю (відносно звичайного множення матриці на стовпчик). Позначимо через e_{ij} *матричні одиниці*: це матриця, в якій на місці (ij) стоїть 1, а на всіх інших місцях — 0.

21a Теорема 3.1.11. (1) *Модуль $V = \boldsymbol{D}^n$ є простим модулем над алгеброю $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$.*
(2) *$\boldsymbol{A} \simeq nV$, як $\boldsymbol{A}$-модуль. Отже, алгебра $\boldsymbol{A}$ є напівпростою.*
(3) *V є единим, з точністю до ізоморфізму, простим $\boldsymbol{A}$-модулем.*
(4) *Алгебра $\boldsymbol{A}$ є простою.*

Доведення. (1) Нехай U — ненульовий підмодуль у V, $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^\top$ — ненульовий вектор з U, $\lambda_k \neq 0$. Тоді $U \ni u_i = \lambda_k^{-1} e_{ik} u$, а в цьому векторі єдиний ненульовий елемент — це 1 на i-му місці. Оскільки довлільний вектор $v = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ можна подати, як $\sum_{i=1}^n \xi_i u_i$, також $v \in U$, тобто $U = V$.

(2) Нехай V_i — підмножина в $\boldsymbol{A}$, яка складається з матриць, у якмх всі стовпчики, крім i-го, нульові. Очевидно, V_i — підмодуль в $\boldsymbol{A}$, причому $V_i \simeq V$ і $\boldsymbol{A} = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

(3) Нехай M — простий $\boldsymbol{A}$-модуль. З Твердження 3.1.7 випливає, що існує епіморфізм $mV \to M$ для деякого m. Отже, існує ненульовий гомоморфізм $V \to M$, який є ізоморфізмом за лемою Шура.

(4) залишаємо читачеві, як вправу. □

3.2. Теорема Веддерберна–Артіна

s22

Останній приклад з попереднього параграфу є, в деякому розумінні, універсальним. Саме, має місце така теорема.

221 Теорема 3.2.1 (Теорема Ведерберна–Артіна). *Алгебра $\boldsymbol{A}$ є напівпростою тоді й лише тоді, коли вона ізоморфна прямому добутку матричних алгебр $\prod_{k=1}^s \mathrm{Mat}(n_k, \boldsymbol{D}_k)$, де $\boldsymbol{D}_k$ — тіла.*

Доведення. Ми вже довели, що всі алгебри $\mathrm{Mat}(n_k, \boldsymbol{D}_k)$ напівпрості. Тому й їхній прямий добуток є напівпростим. Доведення зворотного твердження спирається на кілька фактів, які є важливими й самі по собі.

222 Твердження 3.2.2. *Для довільного $\boldsymbol{A}$-модуля M має місце ізоморфізм $h : \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}, M) \simeq M$, при якому гомоморфізм f переходить в елемент $f(1)$. Якщо $M = \boldsymbol{A}$ — регулярний модуль, то цей ізоморфізм є насправді ізоморфізмом $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$, де $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ — алгебра, обернена до $\boldsymbol{A}$.*

Тут і надалі *обернена* до $\boldsymbol{A}$ алгебра $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ — це алгебра, яка збігається з $\boldsymbol{A}$, як векторний простір, але множення $\circ$ в ній задається правилом $a \circ b = ba$ (останній добуток — це добуток в алгебрі $\boldsymbol{A}$).

Доведення. Для довільного елементу $a \in \boldsymbol{A}$ і довільного гомоморфізму $f : \boldsymbol{A} \to M$ має місце рівність $f(a) = f(a \cdot 1) = af(1)$. Отже значення $f(1)$ визначає гомоморфізм f, тобто відображення h є ін'єктивним. Для довільного елемента $x \in M$ визначимо відображення $f_x : \boldsymbol{A} \to M$ формулою $f_x(a) = ax$. Легко бачити, що це гомоморфізм, причому $f_x(1) = x$, тобто $h(f_x) = x$. Отже відображення h є також сюр'єктивним, тобто є ізоморфізмом.

Нехай тепер $M = \boldsymbol{A}$. Треба перевірити, що $h(fg) = h(g)h(f)$ для довільних гомоморфізмів $f, g : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$. Але $h(fg) = (fg)(1) = f(g(1)) = f(g(1) \cdot 1) = g(1)f(1) = h(g)h(f)$. □

Нехай тепер $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$. Позначимо через ε_i занурення $M_i \to M$, а через π_i — проекцію M на M_i: якщо $x = \sum_{i=1}^m x_i$, то $\pi_i(x) = x_i$. Тоді $\pi_i \varepsilon_i = \mathbb{1}_{M_i}$, а $\pi_i \varepsilon_j = 0$, якщо $i \neq j$. Нехай також $N = \bigoplus_{j=1}^n N_j$, ε'_j — занурення $N_j \to N$, а π'_j — проекція N на N_j. Якщо $f : N \to M$ — гомоморфізм, позначимо $f_{ij} = \pi_i f \varepsilon'_j$. Це гомоморфізм $N_j \to M_i$ і легко перевірити, що $f = \sum_{i,j} \varepsilon_i f_{ij} \pi'_j$. Отже, знання f_{ij} визначає f. З іншого боку, якщо задані довільні гомоморфізми $g_{ij} : N_j \to M_i$, то визначений гомоморфізм $g = \sum_{i,j} \varepsilon_i g_{ij} \pi'_j : N \to M$, причому $\pi_i g \varepsilon_j = g_{ij}$ (перевірте це). $m \times n$ матриця (f_{ij}) зветься *матрицею гомоморфізму f відносно розкладу $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$, $N = \bigoplus_{j=1}^n N_j$.*

Нехай ще задано гомоморфізм $g : L \to N$, де $L = \bigoplus_{k=1}^l L_k$, ε''_k — занурення $L_k \to L$, π''_k — проекція $L \to L_k$ і (g_{jk}) — матриця гомоморфізму g відносно заданих розкладів N і L, тобто $g_{jk} = \pi'_j g \varepsilon''_k$. Тоді

$$\pi_i(fg)\varepsilon''_k = \pi_i\Big(\sum_{q,j} \varepsilon_q f_{qj} \pi'_j\Big)\Big(\sum_{l,p} \varepsilon'_l g_{lp} \pi''_p\Big)\varepsilon''_k =$$
$$= \sum_{q,j,l,p} \pi_i \varepsilon_q f_{qj} \pi'_j \varepsilon'_l g_{lp} \pi''_p \varepsilon''_k = \sum_j f_{ij} g_{jk}.$$

Отже, при множенні гомоморфізмів відповідні матриці перемножаються за звичайним правилом множення матриць

Тепер можна завершити доведення теореми Веддерберна–Артіна. Нехай $\boldsymbol{A}$ — напівпроста алгебра, $\boldsymbol{A} = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ — розклад її регулярного модуля у пряму суму простих модулів. Збираючи ізоморфні доданки, можна записати $\boldsymbol{A} = \bigoplus_{k=1}^{s}(\bigoplus_{i=1}^{n} kU_i)$, де $U_1, U_2, \dots, U_s$ — попарно неізоморфні прості $\boldsymbol{A}$-модулі. Кожен ендоморфізм f модуля $\boldsymbol{A}$ відносно даного розкладу записується матрицею з гомоморфізмів між окремими доданками. Але за лемою Шура $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(U_j, U_k) = 0$, якщо $k \neq j$, а $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(U_k, U_k) = \boldsymbol{D}_k$ є тілом. Звідси, враховуючи Твердження 3.2.2,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}\, \boldsymbol{A} \simeq \prod_{k=1}^{s} \mathrm{Mat}(n_k, \boldsymbol{D}_k).$$

Залишається зауважити, що $\mathrm{Mat}(n_k, \boldsymbol{D}_k)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Mat}(n_k, \boldsymbol{D}_k^{\mathrm{op}})$. Доведення цього ізоморфізму залишаємо читачеві, як вправу. $\square$

Враховуючи Твердження 3.1.10, з теореми Веддерберна–Артіна одержуємо такий наслідок.

223 Наслідок 3.2.3. *Якщо проста алгебра містить простий підмодуль (наприклад, вона скінченновимірна), то вона ізоморфна матричній алгебрі* $\mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$, *де* $\boldsymbol{D}$ *— тіло.*

З теореми Веддерберна–Артіна випливає ще такий факт.

224 Наслідок 3.2.4 (Теорема Вайєрштраса–Дедекінда). *Комутативна напівпроста алгебра ізоморфга прямому добутку полів. Зокрема, якщо поле* $\Bbbk$ *алгебраїчно замкнене, то комутативна напівпроста* $\Bbbk$*-алгебра розмірності* n *ізоморфна* $\Bbbk^n$.

Розділ IV

Ненапівпрості алгебри

ch3

s31 4.1. Приклади зображень ненапівпростих алгебр

311 Приклад 4.1.1. Нехай $\boldsymbol{A} = \Bbbk[t]/(t^n)$. Зображення ρ цієї алгебри задається однією матрицею $X = \rho(x)$ такою, що $X^n = 0$. За теоремою Жордана, матриця X подібна прямій сумі клітин Жордана $J_k(0)$ з власним числом 0 розмірів $k \leqslant n$. Тому нерозкладний $\boldsymbol{A}$-модуль задається однією клітиною Жордана $J_k(0)$. Легко переконатися, що цей модуль ізоморфний $\Bbbk[x]/(x^k)$. Він не є незвідним, якщо $k > 1$. Отже, адгебра $\boldsymbol{A}$ має n неізоморфіних нерозкладних модулів.

312 Приклад 4.1.2. Нехай тепер $\boldsymbol{A} = \Bbbk[x,y]/(x^2,y^2,xy)$. Зображення ρ цієї алгебри задається двома матрицями $X = \rho(x)$, $Y = \rho(y)$ такими, що $X^2 = Y^2 = XY = 0$. Нехай M — довільний $\boldsymbol{A}$-модуль, $M_0 = \{\, u \in M \mid xu = yu = 0 \,\}$. Тоді $xM \subseteq M_0$ і $yM \subseteq M_0$. Виберемо базу $v_1, v_2, \dots, v_m$ підмодуля M_0 і доповнимо її до бази $v_1, v_2, \dots, v_{m+n}$ всього простору M. У такій базі матриці X, Y матимуть вигляд

e311
$$X = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1.1}$$

де матриці A і B — розміру $m \times n$, а діагональні нульові блоки — квадратні. Зауважимо, що з означення M_0 випливає, що якщо $Xu = Yu = 0$, то $u = 0$. Нехай M' — інший $\boldsymbol{A}$-модуль, для якого відповідні матриці X', Y' теж мають вигляд (4.1.1), але з блоками A', B', $f : M \to M'$ — гомоморфізм. У відповідних базах просторів M та M' нехай матриця гомоморфізму f має вигляд $F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$. Рівності $FX = X'F$ та $FY = Y'F$ зводяться до рівностей

$$\begin{gathered} X'F_3 = 0,\ Y'F_3 = 0, \\ F_1A = A'F_4,\ F_1B = B'F_4, \\ F_3X = 0,\ F_3Y = 0. \end{gathered}$$

З перших двох рівностей випливає, що $F_3 = 0$, після чого залишаються лише умови з другого рядка. Зокрема, $M \simeq M'$ тоді й лише тоді, коли існують такі обертовні матриці F_1, F_4, що $A' = F_1AF_4^{-1}$ і $B' = F_1BF_4^{-1}$. Зауважимо, що $A \mapsto F_1AF_4^{-1}$ — це правило зміни матриці лінійного відображення $V_1 \to V_2$ при зміні баз у просторах V_1 і V_2. Отже, задачп про класифікацію зображень алгебри $\boldsymbol{A}$ рівносильна *задачі Кронекера* про знаходження нормальної форми матриць пари лінійних відображень (таку пару ще звуть *пучком матриць*, англійською — *matrix pencil*).

Якщо матриця A є квадратною невиродженою, то, домноживши A і B ліворуч на A^{-1}, одержимо ізоморфний пучок, в якому $A = I$. Два таких пучки (I, B) та (I, B') є ізоморфними тоді й лише тоді, коли $B' = F_1 B F_1^{-1}$ для деякої невиродженої матриці F_1. Такими перетвореннями B зводиться до нормальної форми Фробеніуса: $B \mapsto \bigoplus_{i=1}^k \Phi_k$, де Φ_k — клітини Фробеніуса, характеристичні многочлени яких є степенями незвідних многочленів. Відповідно, модуль M розкладеться у пряму суму модулів, у яких матриці X, Y мають вигляд $X = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та $Y = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Якщо поле $\Bbbk$ алгебрично замкнене, клітини Фробеніуса можна замінити на клітини Жордана. Якщо невиродженою є матриця B, результат буде цілком аналогічним. Тут треба зауважити, що вироджена клітина Фробеніуса збігається з клітиною Жордана з власним значенням 0. Отже, нові зображення, які ми одержимо в такий спосіб — це $X = \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, де J — клітина Жордана з власним значенням 0.

Припустимо, що обидві матриці A, B є виродженими. Перетвореннями $A \mapsto F_1 A F_4^{-1}$ (елементарними перетвореннями рядків і стовпчиків) матрицю A можна звести до вигляду $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Відповідно, матриця B розіб'ється на блоки $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$. Будемо надалі розглядати лише такі пучки. У рівностях $F_1 A = A' F_4$ та $F_1 B = B' F_4$ розіб'ємо й матриці F_1 та F_4 на аналогічні блоки: $F_1 = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}$, $F_4 = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}$. З рівності $F_1 A = A' F_1$ одержимо, що $S_1 = T_1$, $T_2 = 0$ і $S_3 = 0$. Після цього рівності $F_1 B = B' F_4$ перепишуться так:

e312 (4.1.2) $$S_1 B_1 + S_2 B_2 = B_1 S_1 + B_2 T_3,$$
e313 (4.1.3) $$S_1 B_2 + S_2 B_4 = B_2 T_4,$$
e314 (4.1.4) $$S_4 B_3 = B_3 S_1 + B_4 T_3,$$
e315 (4.1.5) $$S_4 B_4 = B_4 T_4.$$

Матриці F_1 і F_4 є невиродженими тоді й лише тоді, коли такими є матриці S_1, S_4 і T_4. Матриці S_2 та T_3 при цьому можуть бути довільними. Тому ці рівності означають, що з матрицями B_i можна робити такі перетворення:

(1) Одночасні елементарні перетворення рядків матриць B_1 і B_2, визначені матрицею S_1;
(2) Одночасні елементарні перетворення рядків матриць B_3 і B_4, визначені матрицею S_4;

(3) Одночасні елементарні перетворення стовпчиків матриць B_1 і B_3, визначені матрицею S_1^{-1};

(4) Одночасні елементарні перетворення стовпчиків матриць B_2 і B_4, визначені матрицею T_4^{-1};

(5) Додавання до матриці B_2 матриці B_4, домноженої зліва на довільну матрицю S_2 підходящого розміру з одночасним додаванням до матриці B_1 матриці B_3, домноженої зліва на ту саму матрицю S_2;

(6) Додавання до матриці B_3 матриці B_4, домноженої справа на довільну матрицю T_3 підходящого розміру з одночасним додаванням до матриці B_1 матриці B_2, домноженої справа на ту саму матрицю T_3.

Ці перетворення зручно задавати «картинкою»:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|}\hline B_1^* & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \\ \hline \end{array}\ \Big\uparrow \\
\longleftarrow
\end{array}$$

де зірочка показує, що матриця B_1 насправді перетворюється подібними перетвореннями, тобто перетворення першої горизонтальної смуги й першої вертикальної смуги є, як кажуть у лінійній алгебрі, *контрагредієнтними*. Наприклад, якщо у горизонтальній смузі ми додаємо перший рядок, домножений на число, до другого, у вертикальній ми маємо відняти другий рядок, домножения на те саме число, від першого; якщо якийсь рядок множимо на число, то відповідний стовпчик треба поділити на те саме число.

Очевидно, матрицю B_4 можна звести до вигляду $\left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Перетвореннями (5) і (6) можна зробити нульовими стовпчики матриці B_2 та рядки матриці B_3, проти яких у матриці B_4 стоять одинички. Тоді з пучка (A, B) виділиться прямий доданок вигляду $A = (0), B = (1)$. Тому надалі можна вважати, що $B_4 = 0$. Зведемо матрицю B_2 до вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Перетвореннями (6) зробимо нульовими всі рядки матриці B_1, проти яких в B_2 стоять одинички. Вся матриця B набуде вигляду

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline
\overline{B}_1 & \overline{B}_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 \\ \hline
\overline{B}_3 & \overline{B}_4 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}$$

Можна перевірити, що з матрицями $\overline{B}_i$ можна робити такі самі перетворення (1-6), описані вище, так, щоб вигляд матриці B_3 не змінювався. Тому очевидна індукція дає наступний результат.

313 Лема 4.1.3. *Перетвореннями вигляду* (1-6) *матрицю* B *можна звести до такого вигляду, що в будь-якому рядку й будь-якому стовпчику стоятиме щонайбальше один ненульовий елемент, який дорівнює* 1.

Тепер вже легко знайти канонічні форми нерозкладних пучків, а тому й нерозкладних $\boldsymbol{A}$-модулів.

314 Теорема 4.1.4 (Кронекер). *Нерозкладний пучок матриць ізоморфний одному з пучків наступних типів:*

$$
\begin{aligned}
&A = I,\ B = \Phi,\\
&A = J,\ B = I,\\
&A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \hdotsfor{6}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \hdotsfor{6}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},\\
&A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

де Φ *— клітина Фробеніуса, характеристичний многочлен якого є степенем незвідного многочлена,* J *— клітина Жордана з власним числом* 0.

Доведення цієї теореми залишаємо читатчеві.

315 Приклад 4.1.5. Розглянемо тепер алгебру $\boldsymbol{A} = \Bbbk[x,y,z]/(x^2,y^2,z^2,xy,xz,yz)$. Аналогічно попередньому випадку, зображення цієї алгебри задається трійкою матриць вигляду

$$
X = \begin{pmatrix} 0 & A\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & B\\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 0 & C\\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

причому ізоморфні забраження отримуються перетвореннями $A \mapsto SAT^{-1}$, $B \mapsto SBT^{-1}$, $C \mapsto SCT^{-1}$. Зокрема, якщо розглядати лише такі зображення, в яких $C = I$, то пара матриць (A, B) (у даному випадку квадратних) перетворюється так: $A \mapsto SAS^{-1}$, $B \mapsto SBS^{-1}$. Отже, отримуємо задачу про канонічну форму пари лінійних операторів у векторному просторі. Виявляється, ця задача містить у собі задачу про канонічну форму n-ок лінійних операторів для довільного n. Це випливає з наступного твердження, доведення якого ми також залишаємо читачеві.

316 Твердження 4.1.6. *Нехай* $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ *— набір квадратних матриць однакового розміру. Позначимо*

$$
A(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & I & \dots & 0\\ \hdotsfor{5}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & I\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ B(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & M_2 & \dots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{pmatrix}.
$$

Нехай $\mathbf{M}'\,(M_1', M_2', \dots, M_n')$ *— інший набір матриць такого ж розміру. Існує матриця* S *така, що* $A(\mathbf{M}') = SA(\mathbf{M})S^{-1}$ *тоді й лише тоді, коли існує матриця* T *така, що* $TM_iT^{-1} = M_i'$ *для всіх* $i = 1, 2, \dots, n$.

Алгебра, для якої класифікація зображень містить в собі класифікацію n-ок лінійних операторів, зветься *дикою* (або, якщо треба уточнити, *зображувально дикою*).[1] Отже розглядувана алгебра є дикою.

sec32 4.2. Один критерій напівпростоти.

Встановимо один нескладний, але важливий критерій напівпростоти деякої алгебри. Спочатку доведемо таку просту лему.

321 Лема 4.2.1 (Лема Брауера). *Нехай $I \subset \boldsymbol{A}$ — мінімальний підмодуль регулярного модуля (або, що те саме, мінімальний лівий ідеал). Тоді або $I^2 = 0$, або $I = \boldsymbol{A}e$, де e —* ідемпотент*, тобто $e^2 = e$.*

У останньому випадку, очевидно, $I^2 = I$.

Доведення. Припустимо, що $I^2 \neq 0$ і виберемо такий елемент $u \in I$, що $Iu \neq 0$. Тоді $Iu = I$. Відображення $I \to I$, яке переводить x в xu є гомоморфізмом, а тому ізоморфізмом. Зокрема, існує елемент е $\in I$, для якого $eu = u$. Тоді $e^2u = eu$, звідки $e^2 = e$. Отже $Ie \neq 0$, а тому $I = Ie = \boldsymbol{A}e$. □

322 Означення 4.2.2. (1) Лівий (правий, двосторонній) ідеал I зветься *нільпотентним*, якщо $I^m = 0$ для деякого m. Він зветься *ніль-ідеалом*, якщо кожен елемент з I є нільпотентним.

(2) Елемент $a \in \boldsymbol{A}$ зветься *істотно нільпотентним*, якщо лівий ідеал $\boldsymbol{A}a$ (або, що рівносильно, правий ідеал $a\boldsymbol{A}$) є нільпотентним. Очевидно, це означає, що існує таке m, що довільний добуток $ab_1ab_2 \dots b_{m-1}a = 0$ $(b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in \boldsymbol{A})$.

323 Теорема 4.2.3. *Нехай $\boldsymbol{A}$ — скінченновимірна алгебра. Наступні умови рівносильні:*

(1) *Алгебра $\boldsymbol{A}$ є напвіпростою.*
(2) *В алгебрі $\boldsymbol{A}$ немає ненульових лівих ніль-ідеалів.*
(3) *В алгебрі $\boldsymbol{A}$ немає ненульових ніль-ідеалів.*
(4) *В алгебрі $\boldsymbol{A}$ немає ненульових лівих нільпотентних ідеалів.*
(5) *В алгебрі $\boldsymbol{A}$ немає ненульових нільпотентних ідеалів.*
(6) *В алгебрі $\boldsymbol{A}$ немає ненульових істотно нільпотентних елементів.*

Доведення. Очевидно, (2)⇒(3)⇒(5), (4)⇒(5) і (2)⇒(4). З іншого боку, якщо I — лівий ідеал і $I^m = 0$, то $I\boldsymbol{A}$ — ідеал, причому $(I\boldsymbol{A})^m = I^m\boldsymbol{A} = 0$, отже (5)⇒(4). Нарешті, (4)⇔(6) за означенням.

(1)⇒(2) Нехай I — ненульовий лівий ідеал. Існує лівий ідеал I' такий, що $\boldsymbol{A} = I \oplus I'$, зокрема $1 = e + e'$, де $e \in I$, $e' \in I'$. Очевидно, $e \neq 0$. Звідси $e + 0 = e = e1 = e^2 + ee'$, а тому $e^2 = e$, $ee' = 0$. Отже, ідеал I не є ніль-ідеалом.

[1] Насправді, це означення не є строгим, оскільки тут не визначено, що означає «*містить*». Строге означення ми дамо пізніше.

(4)⇒(1) Нехай I — мінімальний лівий ідеал в $\boldsymbol{A}$. Оскільки він не є нільпотентним, то, за лемою Брауера, $I = \boldsymbol{A}e$ для деякого ідемпотента e. Але тоді, як легко перевірити, $\boldsymbol{A} = I \oplus I'$, де $I' = \boldsymbol{A}(1-e)$. Отже, за Теоремою 3.1.5, алгебра $\boldsymbol{A}$ є напівпростою. □

sec33

4.3. Радикал

331 Означення 4.3.1. (1) *Радикалом модуля* M зветься підмодуль

$$\operatorname{rad} M = \{\, x \in M \mid f(x) = 0 \ \text{ для всіх гомоморфізмів } f : M \to U, \text{ де } U \text{ пробігає всі прості модулі} \,\}.$$

Рівносильно: $\operatorname{rad} M$ є перетином всіх максимальних підмодулів в M.

(2) *Радикалом алгебри* $\boldsymbol{A}$ зветься радикал регулярного $\boldsymbol{A}$-модуля.

Якщо в M взагалі немає максимальних підмодулів, або, що те саме, немає ненульових гомоморфізмів у прості модулі, то $\operatorname{rad} M = M$. Прикладом є група типу p^∞, розглянута як модуль над кільцем цідих чисел.

332 Твердження 4.3.2. *Якщо ненульовий модуль M є скінченнопородженим, то в ньому є максимальні підмодулі. Отже.* $\operatorname{rad} M \neq M$. *Більш того, нехай N — власний підмодуль в M, $x_1, x_2, \dots, x_m$ — мінімальна множина твірних фактормодуля M/N і $y_i \in M$ — прообрази елементів x_i. Існує максимальний підмодуль $M' \subset M$ такий, що $M' \supseteq N$ і $y_1 \notin M'$. Зокрема,* $\operatorname{rad} M \neq M$.

Зауважимо, що регулярний модуль породжений одним елементом 1, отже $\operatorname{rad} \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A}$.

Доведення. Очевидно, замінивши N на підмодуль, породжений N і елементами $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, можна вважати, що $m = 1$, тобто $M = \langle N, y \rangle$ для деякого елемента $y \in M \setminus N$. Якщо $\{ N_i \}$ — деякий ланцюг підмодулів, які містять N і не містять y, то об'єднання $\bigcup_i N_i$ — теж підмодуль, який містить N і не містить y. За лемою Цорна, серед підмодулів, які містять N і не містять y, є максимальний M'. Це означає, що кожен підмодуль M'', який строго більший за M', містить y. Але тоді $M'' = M$. Отже, M' — максимальний підмодуль в M. □

Наступні твердження майже очевидні й їх доведення ми залишаємо, як вправу.

333 Твердження 4.3.3. (1) $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad} M) = 0$.

(2) $f(\operatorname{rad} M) \subseteq \operatorname{rad} N$ *для кожного гомоморфізма* $f : M \to N$.

(3) $\operatorname{rad}(\bigoplus_{i=1}^k M_i) = \bigoplus_{i=1}^k \operatorname{rad} M_i$.

334 Наслідок 4.3.4. (1) $(\operatorname{rad} \boldsymbol{A})M \subseteq \operatorname{rad} M$.

(2) $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ — *ідеал в* $\boldsymbol{A}$.

(3) *Якщо ненульовий модуль M є скінченнопородженим, то* $(\operatorname{rad} \boldsymbol{A})M \neq M$.

(Останнє твердження відоме, як «*Лема Накаями*».)

Доведення. (1) Для кожного елемента $x \in M$ відображення $a \mapsto ax$ є гомоморфізмом $\boldsymbol{A} \to M$. Отже, $(\operatorname{rad} \boldsymbol{A})x \subseteq \operatorname{rad} M$, звідки $(\operatorname{rad} \boldsymbol{A})M \subseteq \operatorname{rad} M$. Поклавши $M = \boldsymbol{A}$, одержимо й твердження (2). Нарешті, (3) випливає з Твердження 4.3.2. $\square$

335 Означення 4.3.5. Лівий (правий, двосторонній) ідеал $I \subseteq \boldsymbol{A}$ зветься *квазірегулярним*, якщо кожен елемент $1 + a$, де $a \in I$ є обертовним.

336 Теорема 4.3.6. (1) *Радикал* $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ *алгебри* $\boldsymbol{A}$ *є квазірегулярним ідеалом і містить всі ліві квазірегулярні ідеали.*

(2) *Радикал* $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ *оберненої алгебри збігається з радикалом алгебри* $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$. *Зокрема, радикал містить всі праві квазірегулярні ідеали.*

Доведення. (1) Нехай $a \in \operatorname{rad} \boldsymbol{A}$. Тоді a міститься в усіх максимальних підмодулях, отже $1 + a$ не належить жодному з них. З Твердження 4.3.2 випливає, що породжений ним підмодуль $\boldsymbol{A}(1 + a) = \boldsymbol{A}$, тобто існує елемент x такий, що $x(1 + a) = 1$. Тоді $x = 1 - xa$, причому $xa \in \operatorname{rad} \boldsymbol{A}$. Отже, як і вище, знайдеться елемент y такий, що $yx = 1$. Звідси y $= yx(1 + a) = 1 + a$, отже x — обернений до $1 + a$ і $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ — квазірегулярний ідеал. З іншого боку, припустимо, що лівий ідеал I не міститься в радикалі. Тоді він не міститься в якомусь максимальному лівому ідеалі J, а тому $I + J = \boldsymbol{A}$. Отже, знайдуться елементи $x \in I$, $y \in J$ такі, що $x + y = 1$. Тоді елемент $y = 1 - x$ не є обертовним (оскільки $y \in J$), а x не є квазіврегулярним.

(2) З вже доведеного випливає, що $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ — це квазірегулярний ідеал в $\boldsymbol{A}$, який містить всі праві квазірегулярні ідеали. Звідси маємо $\operatorname{rad} \boldsymbol{A} \supseteq \operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$ і $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}} \supseteq \operatorname{rad} \boldsymbol{A}$. $\square$

Домашні Завдання

Завдання 1.

1.1. Нехай $\Bbbk^{(X)} \subseteq \Bbbk^X$ — підпростір функцій f зі *скінченним носієм*, тобто таких, що множина $\{\, x \mid f(x) \neq 0 \,\}$ є скінченною. Очевидно, цей підпростір є інваріантним відносно зображення ρ_X^*. Доведіть, що обмеження ρ_X^* на цей підпростір ізоморфне зображенню ρ_X у просторі $\Bbbk X$.

1.2. Доведіть, що за умов теореми Машке для довільних незвідних зображень ρ, θ

$$\mu(\theta,\rho) = \frac{h(\rho,\theta)}{h(\theta,\theta)}.$$

1.3. За умов теореми Машке, доведіть, що для довільних скінченновимірних зображень

$$h(\rho,\rho') = \sum_\theta \mu(\theta,\rho)\mu(\theta,\rho')h(\theta,\theta),$$

де сума береться за всіма незвідними зображеннями. Зокрема,

$$h(\rho,\rho) = \sum_\theta \mu(\theta,\rho)^2 h(\theta,\theta).$$

Якщо поле алгебрично замкнене, ці формули переписуються так:

$$h(\rho,\rho') = \sum_\theta \mu(\theta,\rho)\mu(\theta,\rho'),$$
$$h(\rho,\rho) = \sum_\theta \mu(\theta,\rho)^2.$$

1.4. Нехай G — група діедра порядку $2n$:

$$G = \langle\, \sigma,\tau \mid \sigma^n = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle.$$

Доведіть, що:

(1) Якщо n парне, група G має 4 одновимірних зображення, а якщо n непарне — 2 одновимірних зображення. Знайдіть ці зображення.

(2) Відповідність

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}, \quad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

задає зображення ρ_k групи G.

(3) Якщо $1 \leqslant k < \frac{n}{2}$, зображення ρ_k є нерозкладними й неізоморфними.
Вказівка: Обчисліть сліди $\operatorname{tr}\rho_k(\sigma)$ та $\operatorname{tr}\rho_k(\tau)$ і скористайтеся тим, що сліди подібних операторів рівні.

(4) Всі незвідні зображення групи діедра над полем дійсних або комплексних чисел — або одновимірні, або ρ_k $(1 \leqslant k < \frac{n}{2})$.

Завдання 2.

Всюди G — група порядку n, а всі зображення — скінченновимірні, над полем комплексних чисел.

2.1. Доведіть, що для довільних зображень ρ і θ

$$\dim \operatorname{Hom}_G(\rho, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi_\rho(x) \chi_\theta(x^{-1}).$$

2.2. Довести, що $\chi_\rho(x^{-1}) = \overline{\chi_\rho(x)}$ для кожного зображення ρ і кожного $x \in G$. ($\overline{z}$ — комплексно спряжене до z число).

Вказівка: Скористайтесь тим, що всі оператори $\rho(x)$ періодичні: $\rho(x)^n = \mathbb{1}$, і тим, що всяка періодична матриця діагоналізовна.

2.3. Доведіть, що, якщо χ — характер незвідного зображення ρ, то
$$\frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi(x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \rho \simeq \rho^*, \\ 0, & \text{якщо } \rho \not\simeq \rho^*, \end{cases}$$

де ρ^* — *спряжене зображення*, тобто $\rho^*(x) = \rho(x^{-1})^\top$ (у деякій базі; легко переконатися, що заміна бази дає ізоморфне зображення).

2.4. Нехай ρ і θ — незвідні зображення групи G. Доведіть, що

$$\sum_{x \in G} \chi_\rho(x) \theta(x) = \begin{cases} \frac{n}{d} \mathbb{1}, & \text{якщо } \theta \simeq \rho^*, \\ 0 & \text{інакше}, \end{cases}$$

де $d = \dim \rho$.

2.5. Нехай $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ — довільне скінченновимірне зображення, $V^G = \{\, v \in V \mid \rho(g)v = v \text{ для всіх } g \in G \,\}$. Доведіть, що $\dim V^G = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \chi_\rho(x)$.

2.6. Нехай група G діє на скінченній множині X. Позначимо через $o(G, X)$ кількість орбіт цієї дії, $\nu(g) = \#\{\, x \in X \mid gx = x \,\}$. Користуючись попередньою вправою, доведіть, що $o(G, X) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \nu(g)$ («кількість орбіт дорівнює середній кількості нерухомих точок»).

Завдання 3.

3.1. Обчисліть характери і коефіцієнти Клебша–Гордана для діедральної групи $D_n = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = 1,\, \tau^2 = 1,\, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \,\rangle$ (див. Вправу 4 Завдання 1).

3.2. Нехай G — некомутативна група порядку pq, де p, q первинні й $p < q$. Доведіть, що $p \mid q - 1$.

Вказівка: Скористайтесь тим, що G містить нормальну підгрупу порядку q і не містить нормальної підгрупи порядку p. Підрахуйте кількість одновимірних зображень групи G.

3.3. Виразіть характер зображення $\rho_1 \otimes \rho_2$ через характери зображень ρ_1 і ρ_2.

3.4. Нехай зображення ρ_i обидва незвідні.

(1) Доведіть, що зображення $\rho_1 \otimes \rho_2$ також незвідне.
(2) Якщо θ_i — інші незвідні зображення груп G_i, доведіть, що $\rho_1 \otimes \rho_2 \simeq \theta_1 \otimes \theta_2$ тоді й лише тоді, коли $\rho_1 \simeq \theta_1$ і $\rho_2 \simeq \theta_2$.

Вказівка: Обчисліть скалярні добутки характерів.

3.5. Доведіть, що кожне незвідне зображення групи $G_1 \times G_2$ ізоморфне зовнішньому тензорному добутку зображень груп G_1 і G_2.

Вказівка: Підрахуйте кількість незвідних зображень цих груп.

3.6. Нехай ρ — незвідне зображення групи G, Z — центр G,
$G_n = \underbrace{G \times G \times \ldots \times G}_{n \text{ разів}}$, $\rho_n = \underbrace{\rho \otimes \rho \otimes \ldots \otimes \rho}_{n \text{ разів}}$,
$H = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in Z,\ x_1 x_2 \ldots x_n = 1 \,\} \subset G_n$.

(1) Доведіть, що $\rho_n(h) = \mathbb{1}$, якщо $h \in H$. Отже, ρ_n можна розглядати, як зображення групи G_n/H.
(2) Виведіть звідси, що розмірність зображення ρ ділить індекс $(G : Z)$.

Завдання 4.

У цих вправах група $\mathbf{S}_{n-1}$ розглядається як підгрупа в $\mathbf{S}_n$, що складається з перестановок, які не рухають n. Якщо T — стандартна таблиця Юнга для групи $\mathbf{S}_n$, а T' — стандартна таблиця Юнга для групи $\mathbf{S}_{n-1}$, пишемо $T' \mid T$, якщо T' одержується з T вилученням клітини, в якій стоїть n. Позначимо D_- множину всіх таких діаграм D', що $D' \mid D$, а через D'_+ множину таких діаграм D, що $D' \mid D$. Через V_D позначаємо зображення V_T, де T — довільна таблиця Юнга з діаграмою D.

4.1. Доведіть, що якщо $T' \mid T$, то $e(T')e(T) \neq 0$.
Вказівка: Якщо $p \in \mathcal{R}(T)$, $q \in \mathcal{C}(T)$ і $p \notin \mathbf{S}_{n-1}$ або $q \notin \mathbf{S}_{n-1}$, то й $pq \notin \mathbf{S}_{n-1}$.

4.2. Виведіть з попередньої вправи, що $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_{n-1}}(V_{T'}, \mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_T) \neq 0$, якщо $T' \mid T$.

4.3. Доведіть, що $\mathrm{Res}^{S_n}_{S_{n-1}} V_D \simeq \bigoplus_{D' \in D_-} V_{D'}$.
Вказівка: Скористайтеся попередньою вправою та зв'язком між $d(D)$ і $d(D')$ (Теорема 6.16).

4.4. З закону взаємності виведіть, що $\mathrm{Ind}^{\mathbf{S}_n}_{\mathbf{S}_{n-1}} V_{D'} \simeq \bigoplus_{D \in D'_+} V_{\mathscr{D}}$.

Завдання 5.

glsmall

5.1. Ми фіксуємо деяку норму $\|\_\|$ у просторі $\mathbb{C}^n$ і визначаємо норму матриці $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ як $\|A\| = \max\{\, \|Av\| \mid \|v\| = 1 \,\}$. Через I позначаємо одиничну $n \times n$ матрицю.

(1) Доведіть, що якщо λ — власне число матриці A, то $\|A\| \geqslant |\lambda|$.
(2) Доведіть, що для кожного комплексного числа $\lambda \notin \{0, 1\}$ існує ціле число k таке, що $|\lambda^k - 1| > 1$.
(3) Доведіть, що для кожної матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $A \neq I$, існує ціле число k таке, що $\|A^k - I\| > 1$.
(4) Виведіть звідси, що окіл одиничної матриці
$$U = \{\, A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid \|A - I\| < 1 \,\}$$
не містить нетривіальних підгруп.

Отже $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ — група без малих підгруп. Тому й усі лінійні групи є групами без малих підгруп.

char

Завдання 6 (Характери).

Надалі G — компактна група, $\left\{ \rho_\lambda \mid \lambda \in \widehat{G} \right\}$ — всі її попарно неізоморфні незвідні унітарні зобрвження, $d_\lambda = \dim \rho_\lambda$, $\rho^\lambda_{ij}(x)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant d_\lambda)$ — матричні елементи матриці $\rho^\lambda(x)$. Для функції $f \in L_2(G)$ позначимо $R_g f$ функцію $f(xg)$, а $L_g f$ — функцію $f(gx)$.

ch1

6.1. Нехай $f(x) \in L_2(G)$, $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} c^\lambda_{ij} \rho^\lambda_{ji}(x)$ — її розклад у ряд Фур'є за функціями ρ^λ_{ij}, $C_\lambda(f) = (c^\lambda_{ij})$ (матриця розміру $d_\lambda \times d_\lambda$).[2]

Доведіть, що

$$C_\lambda(R_g f) = \rho_\lambda(g) C_\lambda(f),$$
$$C_\lambda(L_g f) = C_\lambda(f) \rho_\lambda(g).$$

Вказівка: $C_\lambda = \sqrt{d_\lambda} \int_G f(x) \rho_\lambda(x^{-1}) dx$.

6.2. Функція $f(x)$ зветься *центральною*, якщо $f(gxg^{-1}) = f(x)$ для всіх $g \in G$. Через $L_2^c(G)$ позначається підпростір у $L_2(G)$, який складається з центральних функцій.

(1) Доведіть, що характер $\chi_\lambda(x) = \operatorname{tr} \rho_\lambda(x)$ зображення ρ_λ — центральна функція

(2) Перевірте, що $(\chi_\lambda, \chi_{\lambda'}) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \lambda = \lambda', \\ 0 & \text{якщо } \lambda \neq \lambda'. \end{cases}$

6.3. Доведіть, що $\{ \rho_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ — ортонормована база $L_2^c(G)$.

Вказівка: Виведіть з задачі 6.1, що для центральної функції f оператор $C_\lambda(f)$ перестановний з усіма матрицями $\rho_\lambda(x)$ і скористайтеся лемою Шура.

[2] Зверніть увагу, що c^λ_{ij} — це коефіцієнт при ρ^λ_{ji}.

Завдання 7 (Гармонійний аналіз на однорідному просторі).

Нехай H — замкнена підгрупа компактної групи G, $X = G/H$ — простір правих класів суміжності групи G за підгрупою H. Функції на просторі X ототожнюються з такими функціями f на G, що $f(xh) = f(x)$ для всіх $x \in G$ і всіх $h \in H$. Позначимо $L_2(X)$ підпростір у $L_2(G)$, який складається з таких функцій. (Його можна ототожнити з простором $L_2(X, \mu_X)$, де μ_X — борелівська міра на X, для якої $\mu_X(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$, де μ — міра Хаара на G, а π — проекція $G \to X$).

Для кожного незвідного унітарного зображення $\rho_\lambda : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda)$ ($\lambda \in \widehat{G}$) позначимо $V_\lambda^H = \{\, v \in V_\lambda \mid \rho_\lambda(h)v = v \,\}$ (підпростір H-інваріантів), $d_\lambda^H = \dim V_\lambda^H$ і виберемо ортонормовану базу $e_1, e_2, \dots, e_{d_\lambda}$ простору V_λ так, щоб $v_1, v_2, \dots, v_{d_\lambda^H}$ було базою V_λ^H. Надалі матричні коефіцієнти ρ_{ij}^λ обчислюються в такій базі. Позначимо U_λ ортогональне доповнення до V_λ^H у просторі V_λ.

7.1. (1) Доведіть, що $\rho_{ij}^\lambda(h) = 0$, якщо $i \leqslant d_\lambda^H$, $j > d_\lambda^H$ або $j \leqslant d_\lambda^H$, $i > d_\lambda^H$.

(2) Доведіть, що $\int_H \overline{\rho_{ij}^\lambda(h)}dh = 0$, якщо $j \geqslant d_\lambda^H$. (Тут dh — міра Хаара на H).
Вказівка: Якщо розглядати обмеження зображення ρ_λ на підгрупу H, то U_λ — інваріантний підпростір і зображення H у цьому підпросторі не містить тривіальних прямих доданків.

7.2. Нехай $f \in L_2(X)$, $f = \sum_{\lambda,i,j} c_{ij}^\lambda \rho_{ij}^\lambda$ — її розклад у ряд Фур'є по функціях ρ_{ij}^λ.

(1) Доведіть, що для кожного $h \in H$

equ (Д.1)
$$c_{ij}^\lambda = \sum_{k=1}^{d_\lambda} c_{ik}^\lambda \overline{\rho_{kj}^\lambda}(h).$$

Вказівка: Скористайтеся формулою для c_{ij}^λ і тим, що $f(xh) = f(x)$.

(2) Виведіть звідси, що $c_{ij}^\lambda = 0$ при $j > d_\lambda^H$.
Вказівка: Проінтегруйте рівність (Д.1) по группі H.

7.3. Виведіть звідси, що $\left\{\, \rho_{ij}^\lambda \mid \lambda \in \widehat{G},\ 1 \leqslant i \leqslant d_\lambda,\ 1 \leqslant j \leqslant d_\lambda^H \,\right\}$ — ортогональна база $L_2(X)$.

Завдання 8.

8.1. Доведіть, що матрична алгебра $\mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$, де $\boldsymbol{D}$ — тіло, є простою.

8.2. Нехай M — простий модуль над алгеброю $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$, де $\boldsymbol{D}$ — тіло. Доведіть, що $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}} M \simeq \boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}$.

8.3. Доведіть, що якщо $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D})$, то $\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{D}^{\mathrm{op}})$.

8.4.
(1) Доведіть, що скінченовимірний модуль над простою скінченновимірною алгеброю визначається з точністю до ізоморфізму своєю розмірністю.
(2) Доведіть, що ізоморфні прості підалгебри в алгебрі $\mathrm{Mat}(n, \Bbbk)$ є спряженими.

Завдання 9.

9.1. Доведіть, що пучок матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є нерозкладним.

Вказівка: Перевірте, що якщо (S, T) — такі квадратні матриці, що $SA = AT$, $SB = BT$, причому $S^2 = S$ і $T^2 = T$, то обидві ці матриці або нульові, або одиничні. Покажіть, що для розкладного пучка це вже не так.

9.2. Опишіть скінченновимірні алгебри без нільпотентних елементів.

9.3. Опишіть скінченновимірні алгебри, в яких будь-яка комутативна підалгебра є напівпростою.

9.4. Нехай $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(n, \Bbbk)$, $X \in \boldsymbol{A}$ — деяка матриця і $\boldsymbol{A}X = \{ AX \mid A \in \boldsymbol{A} \}$ — породжнеий нею підмодуль в $\boldsymbol{A}$. При яких умовах на матриці X та Y модулі $\boldsymbol{A}X$ та $\boldsymbol{A}Y$ є ізоморфними?

Завдання 10.

10.1. Нехай M — скінченнопороджений $\boldsymbol{A}$-модуль.

(1) Нехай M' — підмодуль в M такий, що $M' + \operatorname{rad} M = M$. Доведіть, що $M' = M$.

(2) Доведіть, що гомоморфізм $f : N \to M$ є епіморфізмом тоді й лише тоді, коли таким є індукований гомоморфізм $N/\operatorname{rad} N \to M/\operatorname{rad} M$.

10.2. Нехай $\boldsymbol{A}$ — скінченновимірна алгебра.

(1) Доведіть, що $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ — нільпотентний ідеал, який містить усі праві й усі ліві ніль-ідеали.

(2) Виведіть звідси, що $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ — це множина всіх строго нільпотентних елементів алгебри $\boldsymbol{A}$.

(3) Доведіть, що скінченнопороджений $\boldsymbol{A}$-модуль M є напівпростим тоді й лише тоді, коли $\operatorname{rad} M = 0$.

(4) Доведіть, що $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}$ — єдиний ніль-ідеал, факторалгебра за яким є напівпростою.

(5) Доведіть, що $\operatorname{rad} M = (\operatorname{rad} \boldsymbol{A})M$ для довільного скінченнопородженого $\boldsymbol{A}$-модуля M.

Завдання 11.

Всі алгебри й модулі вважаються скінченновимірними.
Ідеал завжди означає *двосторонній ідеал.*

11.1. *Цоколем* $\operatorname{soc} M$ модуля M зветься сума всіх його простих підмодулів. Це максимальний напівпростий підмодуль в M.

(1) Доведіть, що $\operatorname{soc} M = \{\, x \in M \mid (\operatorname{rad} \boldsymbol{A})x = 0 \,\}$.
(2) Доведіть, що якщо $f : M \to N$ — довільний гомоморфізм, то $f(\operatorname{soc} M) \subseteq \operatorname{soc} N$.
(3) Доведіть, що $\operatorname{soc} \boldsymbol{A}$ — ідеал в $\boldsymbol{A}$.
(4) Нехай $\boldsymbol{A}$ — алгебра верхніх трикутних матриць. Знайдіть $\operatorname{soc} \boldsymbol{A}$ і $\operatorname{soc} \boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}$, переконайтеся, що вони різні.

11.2. Нехай $\preccurlyeq$ — якийсь частковий порядок на множині $\{\, 1, 2, \dots, n \,\}$. Позначимо $\boldsymbol{A}_{\preccurlyeq}$ підалгебру в $\operatorname{Mat}(n, \Bbbk)$ з базою з матричних одиниць $\{\, e_{ij} \mid i \preccurlyeq j \,\}$. Знайдіть $\operatorname{rad} \boldsymbol{A}_{\preccurlyeq}$ і факторалгебру $\boldsymbol{A}_{\preccurlyeq} / \operatorname{rad} \boldsymbol{A}_{\preccurlyeq}$.

11.3. Доведіть, що в кожній алгебрі є такий максимальний ідеал $I \neq 0$, що $\operatorname{Ann} I = \{\, a \in \boldsymbol{A} \mid Ia = 0 \,\}$ — ненульовий ідеал.

11.4. Позначимо $R(M) = \{\, f \in \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M \mid \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{rad} M \,\}$. Доведіть, що $R(M)$ — нільпотентний ідеал в $\operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M$. Зокрема, $R(M) \subseteq \operatorname{rad} \operatorname{End}_{\boldsymbol{A}} M$.

Завдання 12.

12.1. Нехай дано комутативну діаграму з точними рядками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_4}\Big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4
\end{array}$$

Доведіть, що

(1) якщо f_2 і f_4 — мономорфізми, а f_1 — епіморфізм, то й f_3 — мономорфізм;

(2) якщо f_1 і f_3 — епіморфізми, а f_4 — мономорфізм, то й f_2 — епіморфізм.

12.2. Позначимо $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, \boldsymbol{A})$. Оскільки $\boldsymbol{A}$ є $\boldsymbol{A}$-$\boldsymbol{A}$-бімодулем, $M^\vee$ є правим $\boldsymbol{A}$-модулем. Розглянемо гомоморфізм $\varphi : M^\vee \otimes_{\boldsymbol{A}} N \to \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(M, N)$, який переводить $\alpha \otimes x$ ($\alpha \in M^\vee$, $x \in N$) у гомоморфізм $f : M \to N$ такий, що $f(y) = \alpha(y)x$ для кожного $y \in M$. Доведіть, що, якщо M або N є скінченнопородженим проективним модулем, то φ є ізоморфізмом.

Вказівка: Перевірте, що це так, якщо $M = \boldsymbol{A}$ або $N = \boldsymbol{A}$.

12.3. Нехай G — скінченна група, H її підгрупа, $G = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma H$ — розклад G у суміжні класи за H. Для елемента $g \in G$ позначимо $\Sigma_g = \{\, \sigma \in \Sigma \mid g \in \sigma H \sigma^{-1} \,\}$. Нехай M — деякий H-модуль, χ — характер відповідного зображення групи H. Доведіть, що $\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = \sum_{\sigma\in\Sigma_g} \chi(\sigma^{-1} g \sigma)$. Зокрема, якщо $\Sigma_g = \emptyset$, то $\mathrm{Ind}_H^G \chi(g) = 0$.

Вказівка: Оберіть базу G-модуля $\mathrm{Ind}_H^G M$ у вигляді $\{\, \sigma \otimes v_1, \sigma \otimes v_2, \dots, \sigma \otimes v_m \,\}$, де $\{\, v_1, v_2, \dots, v_m \,\}$ — база M.

Завдання 13.

13.1. Перевірте, що квадратичні форми графів Динкіна є додатно визначеними.

13.2. Доведіть, що якщо квадратична форма Q_Γ є додатно визначеною, то існує лише скінченна кількість цілочисельних векторів $\mathbf{v}$, для яких $Q_\Gamma(\mathbf{v}) = 1$.

13.3. Доведіть, що якщо форма Q_Γ є додатно визначеною, то $\rho(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ для довільного ненульового вектора $\mathbf{x}$, де ρ — перетворення Кокстера для довільного упорядкування вершин.

13.4. Доведіть, що якщо вершина i є додатною, то $F_i^- F_i^+ M \simeq M$ для кожного зображення, яке не має прямих доданків, ізоморфних E_i.

13.5. Обчислити зображення $C^+ E_1$ для графа

$$\begin{tikzcd} & 3 & \\ 4 & 1 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & 2, \end{tikzcd}$$

де C^+ — перетворення Кокстера, що відповідає якійсь додатній нумерації вершин.

Бібліоґрафія

vin [1] Винберг Э.Б. Линейные представления групп. Наука, 1985.

dk [2] Дрозд Ю.А., Кириченко В.В. Конечномерные алгебры. Вища школа, 1980.

zh [3] Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. МЦНМО, 2007.

kir [4] Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Наука, 1978.

nai [5] Наймарк М.А. Теория представлений групп. Физматлит, 2010.

ser [6] Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. Мир, 1970.