ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 12053

В.Н.Первушин

КВАНТОВАЯ ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

1978

Р2 - 12053

В.Н.Первушин

КВАНТОВАЯ ТОПОЛОГИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Направлено в "Physics Letters"

Первушин В.Н.

Р2 - 12053

Квантовая топология калибровочных полей

Предложена схема квантования неабелевых калибровочных полей, в которой разделяются поперечные степени свободы и циклическая переменная, описывающая топологические свойства полей Янга-Миллса. Сделано квантование циклической переменной (ротатора) и получен эффективный лагранжиан. Требование релятивистской инвариантности и конечности эффективного действия теории Янга-Миллса приводит к уравнению, выражающему константу связи через квантовые числа ротатора.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Pervushin V.N.

P2 - 12053

Quantum Topology of Gauge Fields

A quantization scheme is proposed for nonabelian gauge fields which separates transverse degrees of freedom and cyclic variable (rotator) describing the topological properties of Yang-Mills theory. The rotator is quantized and the effective Lagrangian is found. The requirement of relativistic invariance and finiteness of the effective action of the Yang-Mills theory results in the equation for the coupling constant in terms of quantum numbers of the rotator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В последнее время значительное число работ посвящено физическим применениям точных классических решений в теории Янга-Миллса, называемых инстантонами [1]. Эти решения удовлетворяют уравнению дуальности

$$F^{\alpha}_{\mu\nu} = \pm \tilde{F}^{\alpha}_{\mu\nu} \; ; \; \tilde{F}^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\alpha}_{\mu'\nu'}$$

$$F^{\alpha}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{\alpha}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{\alpha}_{\mu} + g\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A^{\beta}_{\mu} A^{\gamma}_{\nu} \; ; \; \alpha, \beta, \gamma = 1,2,3 \qquad /1/$$

и характеризуются топологическим индексом Понтрягина:

$$\nu = \frac{g^2}{16\pi^2} \int F^{\alpha}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha}_{\mu\nu} \, d^4x = \int d\sigma_{\mu} X_{\mu} \; . \qquad /2/$$

Как показано в работе [2], существуют также точные решения в квантовой теории. Эти решения удовлетворяют уравнению Шредингера $\hat{H}\Psi_{\epsilon} = \epsilon \Psi_{\epsilon}$ с нулевым значением энергии, $\epsilon = 0$, и одновременно - уравнению дуальности /1/ в операторной форме, т.е. являются как бы "квантовыми инстантонами". В калибровке $A_0 = 0$ "квантовый инстантон" имеет вид плоской волны $\Psi_0 = \exp(\pm i N[A]\theta)$ по переменной $N[A] = \int d^3x X_0$ /см. /2// с мнимым квазиимпульсом $\theta = i\frac{8\pi^2}{g^2}$ /функционал $N[A]$ является циклической переменной, меняющейся на целое число при топологически нетривиальных калибровочных преобразованиях [3] /. Так как квазиимпульс мнимый, это решение ненормируемо в конфигурационном пространстве, его собственное значение энергии не принадлежит физическому спектру и Ψ_0 не дает вклада в амплитуду перехода между физическими состояниями $\sum\limits_{\epsilon>0} e^{i\epsilon(t'-t'')} \Psi_{\epsilon}(A')\Psi^{*}_{\epsilon}(A'')$.

"Квантовые инстантоны" указывают на возможную нефизическую интерпретацию классических инстантонов, поэтому представляет интерес рассмотреть альтернативную схему квантования неабелевых полей с нетривиальными топологическими свойствами.

Мы сформулируем предлагаемую схему в виде двух правил.

Правило 1. "Динамический метод" выделения поперечных степеней свободы".

Динамический метод неоднократно использовался многими авторами и *заключается в том, что в качестве исходного для квантования лагранжиана, $\mathcal{L}_{\text{кв}}$, берется классический лагранжиан*

$$\mathcal{L}_{\text{кв}}(A_i^\alpha; j) = \mathcal{L}_{\text{кл}}[A_0^\alpha(A_i^\alpha; j); A_i^\alpha; j], \qquad /3/$$

в котором поля с нулевым каноническим импульсом A_0^α *выражаются через остальные поля* A_i^α, j *с помощью классических уравнений Эйлера:*

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{кл}}(A_0, A_i, j)}{\delta A_0} = 0. \qquad /4/$$

В квантовой электродинамике /КЭД/ этот метод был применен Полубариновым[4] для иллюстрации электродинамики в кулоновской калибровке. Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{кв}}$ в таком подходе КЭД выражается только в терминах поперечных компонент $A_i^{(r)}$, определениями которых служат не калибровочные условия, а функции, заданные с помощью проекционного оператора:

$$A_j^{(r)} = (\delta_{jk} - \frac{\partial_j \partial_k}{\partial^2}) A_k = u(A)(A_j + i\frac{\partial_j}{e}) u^{-1}(A) \qquad /5/$$

$$u(A) = \exp(-ie\frac{1}{\partial^2}\partial_k A_k). \qquad /6/$$

Определение /5/ инвариантно относительно калибровочных преобразований, зависящих от времени, и отображает произвольное трехкомпонентное поле в двухкомпонентное.

Калибровочное условие $\partial_i A_i^{(r)} = 0$ *в классе основных функций квантовой теории* есть следствие /5/ и нигде не используется.

Выделим поперечные степени свободы в теории Янга-Миллса

$$\mathcal{L}_{\text{кл}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_{\mu\nu}^\alpha + \bar{\psi}\, \partial\!\!\!/ \psi + j_\mu^\alpha A_\mu^\alpha; \quad j_\mu^\alpha = g\bar{\psi}\frac{\tau^\alpha}{2}\psi. \qquad /7/$$

Уравнение /4/ принимает вид

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{кл}}}{\delta A_0^\alpha} = (\nabla^2 A_0)^\alpha - (\nabla_i \partial_0 A_i + j_0)^\alpha = 0$$

$$/8/$$

$$\nabla^2 = \nabla_i \nabla_i \quad \nabla_i^{\alpha\beta} = \nabla_i^{\alpha\beta}(A_i) = \delta^{\alpha\beta}\partial_i - g\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_i^\gamma .$$

В отличие от уравнений КЭД, решение /8/, вообще говоря, содержит нулевые моды оператора $\nabla^2(A_i)$. Предположим, что существует одна такая нулевая мода: $\dot{C}(t) = \partial_0 C(t)$

$$A_0^\alpha = \dot{C}\,\Phi^\alpha + \frac{1}{\nabla^2}(\nabla_i \partial_0 A_i + j_0)^\alpha, \qquad /9/$$

где $\nabla^2 \Phi^\alpha = 0.$

Для выделения поперечных степеней свободы главное, что нужно знать от операторов ∇^2, $1/\nabla^2$, ∇_i – это их трансформационные свойства относительно калибровочных преобразований, зависящих от времени. Подставляя /9/ в /8/, после некоторых преобразований получим для лагранжиана $L_{\text{кв}}$ выражение *

$$L_{\text{кв}} = \int_{(R)} d^3x\, \mathcal{L}_1(A^{(r)}, \psi^{(r)}, \bar{\psi}^{(r)}) + \Delta L \qquad /10/$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}[\partial_0 A_i^{\alpha(r)}]^2 - \frac{1}{2}[B_i^\alpha(A^{(r)})]^2 - \bar{\psi}^{(r)}\, \partial\!\!\!/ \psi^{(r)} -$$

$$- j_i^{\alpha(r)} A_i^{\alpha(r)} + \frac{1}{2} j_0^{\alpha(r)} (\frac{1}{\nabla^2_{(r)}} j_0^{(r)})^\alpha \qquad /11/$$

$$(B_i^\alpha = \epsilon_{ijk}(\partial_j A_k + \frac{g}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_j^\beta A_k^\gamma); \quad \nabla(r) \equiv \nabla(A^{(r)}))$$

$$\Delta L = \frac{\dot{C}^2}{2}\beta + \gamma\dot{C} \qquad /12/$$

---

* Мы работаем в конечном пространстве-времени с размерами R и T.

$$\beta = \sum_i \int d^2 s_i \Phi^\alpha (\nabla_i^{(r)} \Phi^\alpha)\Big|_{x_i=-R/2}^{x_i=R/2} = \oint d^2 s_i \Phi^\alpha (\nabla_i^{(r)} \Phi^\alpha)$$

$$\gamma = \oint d^2 s_i \Phi^\alpha [-\partial_0 A_i^{(r)} + j_i^{(r)}]^\alpha$$

$$\nabla^2(r)\,\Phi^\alpha = 0,$$

где

$$\hat{A}_k^{(r)} = g\frac{\tau^\alpha}{2i} A_k^{\alpha(r)} = u(A)(\hat{A}_k + \frac{1}{g}\partial_k)u^{-1}(A)$$

$$\psi^{(r)} = u^{-1}(A)\,\psi \qquad /13/$$

$$u(A) = T\exp\{\int_{-T/2}^{t} dt' \frac{1}{\nabla^2} \nabla_k \partial_0 \hat{A}_k\}$$

$$(T\exp\int_{t_0}^{t} dt'\partial_0\phi = e^{\phi(t)}\,e^{\phi(t_0)}). \qquad /14/$$

Нетрудно проверить, что выражения /13/ являются инвариантными относительно калибровочных преобразований, зависящих от времени

$$\hat{A}_i' = v^{-1}(\hat{A}_i + \frac{1}{g}\partial_i)v\;;\quad \psi' = v\psi;\quad v = v(x,t). \qquad /15/$$

Выражение /13/, аналогичное /5/, проектирует произвольные поля $\hat{A}$, ψ в физические состояния $\hat{A}^{(r)}$, содержащие 6 компонент, и $\psi^{(r)}$. Лагранжиан /10/ выражен только в терминах физических поперечных состояний $A^{(r)}$, $\psi^{(r)}$ и нулевой моды $\dot{C}$, взаимодействие которой с поперечными полями сосредоточено в пространственной бесконечности /на границе пространства $R(3)$/.

Для интерпретации нулевой моды $\dot{C}$ была подробно рассмотрена модель Швингера*. Результаты формулируются в виде следующего правила:

*Находится точное решение уравнения Шредингера в модели Швингера /в калибровке $A_0=0$/ $\Psi_\epsilon = \exp\{i(\theta+2k\pi)N[A]\}$

$$N[A] = \frac{e}{2\pi}\int dx_1 A_1(x_1).$$

Функция Грина для этой модели $\sum_\epsilon \exp i\epsilon(t'-t'')\Psi_\epsilon(N')\Psi_\epsilon^*(N'')$ представляется в виде функционального интеграла с определенным классическим лагранжианом. Динамический метод /Правило 1/ воспроизводит этот лагранжиан, если мы выполним Правило 2.

Правило 2. "Гипотеза о ротационной степени свободы."

Нулевая мода $\dot{C}$ дифференциального оператора уравнения Эйлера в п.1 отождествляется с динамической переменной, канонически сопряженной топологическому индексу, с точностью до коэффициента, определяемого уравнением Понтрягина /2/:

$$\nu[A] = \int dt\,\dot{N}[A] = \frac{g^2}{16\pi^2}\int d^4x\,F\tilde{F}\Big|_{A_0=A_0(A_i,j)}. \qquad /16/$$

Подставляя /9/ в /16/, получим

$$\dot{\tilde{N}} = \dot{C}\langle B\rangle;\quad \langle B\rangle = \oint ds_i\,\Phi^\alpha B_i^\alpha(A^{(r)})\frac{g^2}{16\pi^2}, \qquad /17/$$

где

$$\tilde{N} = N + N^{(r)}\;:\quad N^{(r)} = \int d^3x\,X_0(A^{(r)}). \qquad /18/$$

Топологические свойства конфигурационного пространства описываются ротационной степенью свободы $\dot{C}$, так как функционал $N^{(r)}$ от поперечных полей $A^{(r)}$ инвариантен относительно калибровочных преобразований.

Таким образом, лагранжиан для одномерной циклической переменной $\tilde{N}$ имеет вид лагранжиана свободного ротатора

$$\Delta L = \frac{\dot{\tilde{N}}^2}{2}\frac{\beta}{\langle B\rangle^2} + \dot{\tilde{N}}^2\frac{\gamma}{\langle B\rangle}. \qquad /19/$$

Мы должны квантовать /19/ при условии периодичности вектора состояния Ψ:

$$\Psi(N+1) = e^{i\theta}\,\Psi(N). \qquad /20/$$

Вычисляя амплитуду перехода между состояниями с определенной энергией ротатора*, приходим к эффективному лагранжиану для полей Янга-Миллса

*Для этого нужно выразить ΔL в терминах канонического импульса $\frac{\delta\Delta L}{\delta\dot{N}} = p = (2\pi k+\theta)$.

$$[A^{(r)}] = [\int d^3x \frac{1}{2}(E^2 - B^2)] +$$

$$+ \frac{1}{2}[(2\pi k + \theta)^2 (\frac{g^2}{16\pi^2})^2 <\bar{B}>^2 - <\bar{E}>^2]$$

$$<\bar{O}> = \int d^3x\, \nabla_i \Phi^\alpha O_i^\alpha / \sqrt{\int d^3x\, (\nabla_i \Phi^\alpha)^2}\ ; \quad E_i^\alpha = \partial_0 A_i^{\alpha(r)}, \qquad /21/$$

где θ - квазиимпульс, k- номер зоны Бриллюэна. Строго говоря, релятивистская инвариантность /21/ /т.е. форма E^2-B^2/ может быть обеспечена только при условии:

$$(\frac{g^2}{16\pi^2})^2 = \frac{1}{(2\pi k + \theta)^2}. \qquad /21a/$$

Отметим здесь важный момент. Дело в том, что в квантовой теории поля /КТП/ обычно пренебрегают всеми взаимодействиями, локализованными на пространственной бесконечности /т.е. на границе $R(3)$ /. Это существенно опирается на определение пространства основных функций КТП как функций, убывающих на бесконечности /стр. 122 монографии [6]/.

Оставаясь в классе основных функций КТП, мы, по-видимому, не получим от введения нулевых мод и топологии ничего нового, по сравнению с обычной теорией возмущений [7]. Введение ротационной степени свободы приобретает физический смысл, если, например, разделить поперечные поля на неисчезающие в бесконечности стационарные поля c_i^α и динамические поля b_i^α /взаимодействием которых на бесконечности можно пренебречь/:

$$A_j^{\alpha(r)} = c_i^\alpha + b_i^\alpha(x,t). \qquad /22/$$

При этом мы должны потребовать для нетривиальности S-матрицы в евклидовом пространстве конечности эффективного действия от c_i^α. Условие конечности действия с учетом "квантовой топологии" /21/

$$[\frac{g^2}{16\pi^2}(2\pi k + \theta)]^2 [\int d^3x (\nabla_i(c)\Phi)^\alpha B_i^\alpha(c)]^2 = [\int d^3x (B_i^\alpha(c))^2] \times \qquad /23/$$

$$\times [\int d^3x (\nabla_i(c)\Phi^\alpha)^2]$$

может иметь нетривиальное решение. В частности, из самого вида /23/ следует ограничение на константу связи

$$(\frac{g^2}{16\pi^2})^2 (2\pi k + \theta)^2 \geq 1. \qquad /24/$$

Нижняя граница /21a/ неравенства /24/ достигается для c_i^α, удовлетворяющих уравнению

$$(\nabla_i(c)\Phi)^\alpha = B_i^\alpha(c).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод квантования неабелевых калибровочных полей, который не использует калибровочных условий [7]. Правила *1,2* позволяют выделить поперечные поля единственным образом и отделить их от циклической переменной /тем самым здесь предложен путь решений проблемы Грибова [8] /.

В свою очередь, в таком методе /*правила 1* и *2*/ возникают следующие проблемы:

1/ Формулировка "динамического метода" в релятивистско-ковариантной форме.

2/ Математическое обоснование правила *2* /которое сформулировано в виде гипотезы и оправданием которого является модель Швингера/, в частности, доказательство того, что число нулевых мод совпадает с числом топологических индексов теории.

Автор благодарен Д.И.Блохинцеву за ценные советы, а также А.С.Гальперину, В.Н.Грибову, А.В.Ефремову, Е.А.Иванову и особенно И.В.Полубаринову за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belavin A. e.a. Phys. Lett., 1975, 59B, p.85.*
2. *Гальперин А.С., Первушин В.Н. ОИЯИ, Р2-11830, Дубна, 1978.*
3. *Фаддеев Л.Д. Материалы IV Международного совещания по нелокальным теориям поля, 1976. ОИЯИ, Д1-9768, Дубна, 1976, с.267.*
4. *Полубаринов И.В. ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965.*
5. *Bogolubov N.N., Tyablikov S.V., Zh.E.T.F. (USSR), 1949, 19, p.256.*

6. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1972.*
7. *Faddeev L.D., Popov V.N. Phys. Lett., 1967, 25B, p.30.*
8. *Gribov V.N. Nucl.Phys., 1978, B139, p.1.*
Singer I.M. Comm. Math. Phys., 1978, 60, p.7.

*Рукопись поступила в издательский отдел
1 декабря 1978 года.*

Примечание при корректуре: Для сферически симметричных полей нетрудно показать, что уравнение $(\nabla_i(c)\Phi)^a = B^a_i(c)$ сводится к уравнению Лиувилля в теории релятивистской струны (Barbashov B.M. et al. JINR E2-11669, Dubna, 1978). Одним из решений этого уравнения является

$$c^a_i(x) = \epsilon_{ia\ell}\, x_\ell \frac{m}{g\,|x|}\left[\frac{1}{\sin(m|x|)} - \frac{1}{m|x|}\right],$$

где m - параметр "размерной трансмутации". Поскольку фоновые поля c^a_i не исчезают на бесконечности, то отсутствуют возбуждения цветных полей типа "свободных частиц".