Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Поморский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

И.Н. Попов

Совершенные и дружественные числа

Рекомендовано Учебно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по классическому университетскому образованию [в к]ачестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, [обу]чающихся по группе математических направлений и специальностей

Архангельск
Поморский университет
2005

УДК 511(075.8)
ББК 22.13я73
П 58

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор Московского педагогического государственного университета **В.А. Ильин**;
доктор физико-математических наук, профессор Череповецкого государственного университета **В.В. Мухин**;
кандидат физико-математических наук, доцент Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова **В.Н. Попов**

Печатается по решению редакционно-издательского совета Поморского университета

Попов, И.Н.

П 58 Совершенные и дружественные числа: Учеб. пособие / И.Н. Попов; Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. — Архангельск: Поморский университет, 2005. — 153 с. — ISBN 5-88086-514-2.

В пособии изложены классические вопросы теории совершенных и дружественных чисел: рассматриваются свойства совершенных и дружественных чисел; приводятся исторические справки и сведения по разным аспектам возникновения и развития теории; раскрывается проблематика, формулируются нерешенные вопросы и предлагаются направления их решения. Излагаемый материал сопровождается большим количеством примеров и задач.

Учебное пособие предназначено для студентов, изучающих теорию чисел. Может быть полезно учителям и школьникам.

УДК 511(075.8)
ББК 22.13я73

ISBN 5-88086-514-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге часто будут упоминаться имена таких выдающихся людей, как Евклид (Euclid), Пифагор (Pythagoras), Ферма (Fermat), Эйлер (Euler), Мерсенн (Mersenne). Их роль в становлении и развитии математики (в частности теории чисел) неоспорима.

Евклид
ок. 365–
ок. 300 до н.э.

Пифагор
ок. 530–
ок. 430 до н.э.

Пьер Ферма
1601–1665

Леонард Эйлер
1707–1783

Но начнем со сказки.

Пригласило как-то число 28 на свой день рождения всех своих делителей, не забыв и про себя. Первой пришла 1, затем 2, потом прибежали 4, 7 и 14. Когда все гости собрались, то число 28 увидело, что гостей немного. Тогда число 28 попросило позвать в гости и делителей пришедших гостей. Но единица сказала, что новые гости не придут. Чтобы утешить число 28, добавила: "Вы, число 28, — само совершенство! Хотя гостей у Вас собралось и немного, но если всех гостей соединить знаком "+", то получится число 28". Стали гости вспоминать, кто из чисел еще является совершенством наравне с числом 28. Оказалось, что хотя таких чисел мало, но всех их не припомнить.

Действующим персонажем этой сказки является число 28, которое равно сумме всех своих собственных делителей. Такие числа называют совершенными. Это название идет от Пифагора и его школы: все делители числа он (Пифагор) складывал, и если сумма оказывалась меньше числа (без самого числа), то число объявлялось недостаточным, а если больше — то избыточным, и только в том в случае, когда сумма в точности равнялась самому числу, его объявляли совершенным.

Совершенные числа очень редки. Тогда тем более интересна хронология появления каждого совершенного числа. Основными вехами в разговоре о совершенных числах являются теоремы Евклида и Эйлера, о которых будет идти речь в книге. В этих теоремах большую роль играют так называемые простые числа. И среди таких простых чисел выделяются числа вида $M(n) = 2^n - 1$, которые называются числами Мерсенна, в честь французского физика, математика и богослова Марена Мерсенна. Хронология появления интересующих нас чисел непосредственно связана с хронологией появления чисел Мерсенна.

Марен Мерсенн
1588–1648

Ф.Е.А. Люка
1842–1891

Д.Г. Лемер
1905–1991

Первые два совершенных числа, 6 и 28, были известны не только Пифагору, но и до него. Эти числа были "в употреблении" у древних египтян и вавилонян. Связывая все "предметы окружающего мира" с числами, пифагорейцы считали первое совершенное число 6 символом души. В сказочном государстве золотого века, в Атлантиде, описанном Платоном (Plato) (429–348 до н.э.) в ряде его диалогов, особенно в диалоге "Тимей", в разных установлениях фигурирует преимущественно число 6.

При постройке метро в Риме под землей была обнаружена странная комбинация помещений: общий зал и вокруг него 28 келий, выходящих в этот зал. Оказалось, что это помещение неопифагорейской академии, которая существовала в Риме в первые века нашей эры. Очевидно, что в академии было 28 членов. В некоторых обществах (академиях) долгое время по когда-то установленному положению, обоснование которого ныне никто не знает, было 28 действительных членов, подобно тому, как во французской "Академии бессмертных" их сорок. По-видимому, при установлении такого числа членов основанием являлся тот факт, что число 28 — совершенное.

Правило (формула) Евклида ("опубликованное" около 300 г. до н.э.), дающее возможность строить совершенные четные числа, позволило древнегреческому математику Никомаху из Герассы (Nicomachus of Gerasa) (I–II вв.) найти такие совершенные числа, как 496 и 8 128, указанные в его "Введении в арифметику".

Очередное, пятое по счету совершенное число 33 550 336 было открыто лишь в XV веке. Это число было обнаружено в двух манускриптах, один из которых датирован 1461 годом. Второй манускрипт был написан Региомонтаном (Johann Müller Regiomontanus) (1436–1476) тоже в 1461 году, когда он пребывал в Венском университете. Но это же пятое совершенное число также упоминается в более раннем манускрипте, написанном в 1458 году. Пятое и шестое совершенные числа были обнаружены и в другом манускрипте, датированном 1460 годом, вероятно написанном тем же автором. Все, что известно об этом авторе, так это то, что он жил во Флоренции и был студентом Domenico d'Agostino Vaiaio.

В 1977 году было обнаружено, что в комментариях к "Началам" Евклида, написанных Шейблом (J. Scheybl) в 1555 году, упоминается шестое совершенное число. Ясно, что из-за некоторого опоздания в публичном оглашении этот результат не имел большого влияния на развитие теории совершенных чисел.

Первый прорыв в изучении совершенных чисел, обобщив знания своих предшественников, сделал Хадалрик Рег (Hudalrichus Regius). В 1536 году в своей "Арифметике" он показал, что $2^{13} - 1 = 8191$ есть простое число, открыв тем самым пятое совершенное число $2^{12}(2^{13} - 1) = 33\,550\,336$.

Следующий шаг в раскрытии свойств совершенных чисел был сделан в 1603 году, когда Катальди (Pietro Antonio Cataldi) (1548–1626) — итальянский математик, профессор университетов Флоренции и Болоньи — нашел разложения всех чисел до 800 и составил таблицу всех простых чисел до 750, содержащую 132 простых числа. Катальди, используя эту таблицу, показал, что число $2^{17} - 1 = 131\,071$ является простым. Тем самым он открыл шестое совершенное число $2^{16}(2^{17} - 1) = 8\,589\,869\,056$. Катальди, доказав, что число $2^{19} - 1 = 524\,287$ также является простым, дал миру седьмое совершенное число $2^{18}(2^{19} - 1) = 137\,438\,691\,328$.

В своей "Арифметике" Катальди утверждал, что при $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ числа $2^{p-1}(2^p-1)$ являются совершенными. Для первых семи значений числа p утверждения были строго доказаны. Как были получены утверждения для последних четырех значений, остается неясным, так как составленной им таблицы простых чисел явно не достаточно для проверки этих утверждений.

Но результаты деятельности Катальди были обнаружены, к сожалению, поздно, и пальма первенства в открытии шестого и седьмого совершенных чисел принадлежала другим людям.

В 1644 году Мерсенн, один из основателей Парижской Академии наук, друг Декарта (Descartes René) и Ферма, предъявил список простых чисел вида $M(n) = 2^n - 1$, в котором указаны были "составные части" шестого, седьмого и восьмого совершенных чисел. До сих пор остается загадкой, как он мог высказать правильное утверждение, что числа $M(17)$, $M(19)$, $M(31)$ являются простыми. Лишь в 1750 году Леонард Эйлер доказал, что число Мерсенна $M(31)$ является простым.

В 1883 году сельский священник Пермской губернии И.М. Первушин без всяких вычислительных приборов доказал, что число $M(61)$ является простым. В 1886 году Первузэн (Pervusin) и Зилхоф (Seelhov) переоткрыли этот результат. В 1876 году французский математик Эдуард Люка (François Edouard Anatole Lucas) доказывает с помощью новых методов определения простоты числа, что число $M(127)$ является простым.

К эре электронных вычислительных машин было известно 12 совершенных чисел, включая совершенные числа, построенные на простых числах Мерсенна $M(89)$ (открыли Тарри и Поуэрс (Powers) в 1911 году) и $M(107)$ (открыли Фокамберг и Поуэрс в 1914 году). Используя компьютеры, к 1964 году открыли 23 простых числа Мерсенна (а значит, и 23 совершенных числа), добавив к ранее найденным 12 числам числа $M(521)$, $M(607)$, $M(1\,279)$, $M(2\,203)$, $M(2\,281)$ (найдены Лемером), $M(3\,217)$ (найдено Ризелем в 1957 году), $M(4\,253)$, $M(4\,423)$ (найдены Гурвицем в 1962 году), $M(9\,689)$, $M(9\,941)$ (найдены Иллельсом в 1964 году), $M(11\,213)$. Число Мерсенна $M(11\,213)$ было открыто в 1963 году в Иллинойском университете (США). В честь этого события на почтовых отправлениях математического отделения университета ставили штамп с надписью: "$2^{11\,213} - 1$ — простое число".

К 1985 году было уже известно 30 совершенных чисел. В сентябре 1985 года математик из США Марсенн доказал, что число $M(216\,091)$ является простым. Тем самым появилось на свет 31-е совершенное число. К началу 90-х годов самое большое число было $M(132\,049)$, к концу — $M(3\,021\,377)$. 17 ноября 2003 года аспирант университета штата Мичиган (США) Майкл Шефер (Michael Shafer) обнаружил сороковое простое число Мерсенна. Это число — $M(20\,996\,011)$. Его длина более чем на 2 миллиона позиций превосходит длину предыдущего рекордсмена. Всего в этом числе 6 320 430 десятичных цифр.

Первые двенадцать совершенных чисел были открыты людьми, использовавшими лишь карандаш и бумагу. Остальные же и те, которые еще будут открыты, получены с помощью хитроумных программ для компьютеров. И как знать, может быть, для будущих поколений нахождение совершенных чисел станет "простой школьной задачей". И что станет с мистическим ореолом, созданным вокруг совершенных чисел древними учеными и философами — покажет время.

Близкой к теме совершенных чисел является тема дружественных чисел и общительных чисел, ставших обобщением совершенных и дружественных чисел, найденных Полем Пуле.

Рене Декарт
1596–1650

Сабит ибн Корра
826–901

Дружественные числа — это пара чисел, каждое из которых равняется сумме собственных делителей другого.

Следы дружественных чисел теряются в глубине веков. Первым не допускающим двусмысленного толкования документом (в некоторых источниках говорится, что дружественные числа упоминаются в древних вариантах Библии), содержащим упоминание о дружественных числах, является "Изложение пифагорейского учения" — трактат, написанный в III в. н.э. Ямвлихом из Хальуиса, в котором дается ответ Пифагора на заданный ему вопрос о том, кого считать другом: "Того, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284".

Следующая пара дружественных чисел 17 296 и 18 416 была открыта в 1636 году Ферма; Декарт нашел дружественную пару 9 363 584 и 9 437 056. Затем дружественные числа находили Эйлер (опубликовавший 64 пары дружественных чисел, в двух случаях которых он ошибся), Лежандр (нашел новую пару таких чисел в 1830 г.), Чебышев.

Не обошлось и без курьеза. В 1867 году шестнадцатилетний итальянец Никколо Паганини (тезка знаменитого скрипача) потряс математический мир сообщением о том, что числа 1 184 и 1 210 являются дружественными! Эту пару, ближайшую к 220 и 284, проглядели все знаменитые математики, изучавшие дружественные числа.

Рекорд Эйлера по числу найденных пар дружественных чисел первым побил бельгийский математик Поль Пуле. В своей двухтомной монографии по теории чисел, изданной в 1929 году в Брюсселе под многозначительным названием "Охота за числами" ("La chasse aux nombers"), кроме всего прочего, он приводит список из 62 новых пар дружественных чисел. Далее пальму первенства перехватил американец Эскотт, затем рекорд перешел к его соотечественнику Элвину Дж. Ли (E.J. Lee), который впервые прибегнул к помощи ЭВМ.

В 1972 году в журнале "Journal of Recreational Mathematics" ("Математика на досуге") был опубликован список из 1 100 пар дружественных чисел. Пары расположены в порядке возрастания наименьшего числа. Список начинается трехзначной парой Пифагора и заканчивается 25-значной парой Эскотта.

Отметим, что совершенными и дружественными числами занимались и ученые с Востока — арабы, индийцы и так далее, а не только "европейцы". Например, арабский математик ибн аль-Банны (1256–1321) в одной из своих рукописей предложил вывод пары дружественных чисел 17 296 и 18 416. Ибн ал-Хайсам (Abu Ali al-Hasan ibn al-Haytham) (965–1039), крупнейший мусульманский физик, "Оптика" которого имела большое влияние на Западе, в "Трактате об анализе и синтезе" попробовал доказать обратное утверждение Евклида, то есть он показал, что совершенные числа при дополнительных условиях должны иметь форму $2^{p-1}(2^p-1)$, где 2^p-1 — простое число.

Среди многих арабских математиков, на которых повлияла греческая идея о совершенных числах, был Измаил ибн Ибрагим ибн Фалус (1194–

1239) (Ismail ibn Ibrahim ibn Fallus), который написал трактат, основываясь на "Введении в арифметику" Никомаха. Ибн Фалус приводит в своем трактате десять чисел, утверждая, что они совершенны. Среди них первые семь действительно первые семь совершенных чисел; три же последние таковыми не являются.

Отдавая должное арабским математикам, можно сказать, что первые семь совершенных чисел в арабском мире были уже известны в XII веке, а в Европе, как уже отмечалось, пятое совершенное число было найдено только в XV веке.

Указать какой-либо способ или формулу получения *всех* пар дружественных чисел, аналогично формуле Евклида для совершенных четных чисел, пока не удалось. Один из таких способов указал еще в IX веке арабский математик абу-Хасан Сабит ибн Корра ибн Марван аль-Харрани (Thabit ibn Qurra). Как и многие в те времена, Сабит не был *профессиональным математиком*, а был врачом и астрономом и в то же время одним из самых выдающихся мусульманских математиков. Он жил с 836 по 901 год, последнюю часть жизни провел в Багдаде, где был доверенным лицом и советником халифа аль-Мутадада. В "Трактате о дружественных числах" Сабит рассматривал на совершенность числа вида $2^n p$, где p — простое число.

Самый исчерпывающий из всех когда-либо опубликованных документов, касающихся дружественных чисел, — это вышедшая в трех частях статья Ли и Мэдэчи (J.S. Madachy) [8], содержащая в библиографии 67 наименований, в которых представлены оригинальные работы вплоть до 1971 года. Главное внимание Ли и Мэдэчи уделили доскональному протоколированию всех численных результатов с указанием получивших их математиков и использованных методов.

Автор данной книги постарался предложить для читателей как можно больше материала, связанного с вопросами и проблемами классического раздела теории чисел — раздела о совершенных и дружественных числах. При этом уделено внимание как математической составляющей, так и исторической. В качестве главного инструмента для решения вопросов выбраны числовые функции. С помощью их формулируется большинство необходимых определений и свойств. Для лучшего понимания изложение материала сопровождается большим количеством примеров и задач.

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

1.1. Функции

Напомним сначала понятие функции.

Пусть даны два множества. Обозначим первое из них буквой X, а второе — буквой Y. Их элементы будем обозначать соответственно строчными буквами. Если каждому элементу x из множества X по некоторому закону или правилу ставится в соответствие *не более одного* элемента y из множества Y, то говорят, что задана функция, которую по традиции обозначают буквой f (от лат. *functio* — исполнение), и пишут $y = f(x)$.

Переменную x называют аргументом, что можно перевести с латинского как "служащий основанием для рассуждения". Эту же переменную x еще называют независимой переменной, поскольку мы можем выбрать из множества X любой элемент. Значение y зависит от выбранного значения x, и поэтому переменную y называют зависимой переменной, или значением функции.

В дальнейшем функции будем обозначать буквами греческого алфавита. Напомним написание и произношение букв греческого алфавита.

Буква	Название буквы	Буква	Название буквы
$\mathrm{A}\,\alpha$	а́льфа	$\mathrm{N}\,\nu$	ню
$\mathrm{B}\,\beta$	бе́та	$\Xi\,\xi$	кси
$\Gamma\,\gamma$	га́мма	$\mathrm{O}\,\mathrm{o}$	о́микрон
$\Delta\,\delta$	де́льта	$\Pi\,\pi$	пи
$\mathrm{E}\,\varepsilon$	э́псилон	$\mathrm{P}\,\rho$	ро
$\mathrm{Z}\,\zeta$	дзе́та	$\Sigma\,\sigma$	си́гма
$\mathrm{H}\,\eta$	э́та	$\mathrm{T}\,\tau$	та́у
$\Theta\,\theta\,\vartheta$	те́та	$\Upsilon\,\upsilon$	и́псилон
I,ι	йо́та	$\Phi\,\varphi$	фи
$\mathrm{K}\,\varkappa$	ка́ппа	$\mathrm{X}\,\chi$	хи
$\Lambda\,\lambda$	ла́мбда	$\Psi\,\psi$	пси
$\mathrm{M}\,\mu$	мю	$\Omega\,\omega$	оме́га

Далее будут рассматриваться только *числовые функции*, то есть функции, для которых множества X и Y есть подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

Среди всех функций будем выделять две функции: так называемые тождественную функцию и нулевую функцию (функцию тождественный ноль).

Тождественной функцией будем называть функцию, которая всякому значению независимой переменной x ставит в соответствие само же это значение, и обозначать id:

$$\mathrm{id}\,(x) = x \quad \text{для всех } x.$$

Нулевой функцией будем называть функцию, которая всякому значению независимой переменной x ставит в соответствие число 0, и будем обозначать 0:

$$0(x) = 0 \quad \text{для всех } x.$$

1.2. Композиция функций

Пусть даны две числовые функции f и g.

Композицией функций f и g называется такая числовая функция, обозначаемая $f\,g$, что для всякого числа x выполняется равенство:

$$f\,g(x) = f(g(x)),$$

то есть сначала на элемент x действует функция g, а потом на полученный результат $g(x)$ действует функция f.

Введем понятие степени функции с неотрицательным целым показателем.

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и f — числовая функция. *Степенью функции f с натуральным показателем $n > 1$ будем называть функцию, обозначаемую f^n, равную композиции $f\,f\ldots f$*, то есть

$$f^n = \underbrace{f\,f\ldots f}_{n\ \text{раз}}.$$

Если $n = 1$, то будем считать, что $f^1 = f$. Если $n = 0$, то будем считать, что $f^0 = \mathrm{id}$ (за исключением случая, когда f равна нулевой функции).

Пример 1. *Пусть $g(x) = 2^x$ и $f(x) = x + 2$, где x — натуральное число. Тогда $f\,g(x) = 2^x + 2$, $g\,f(x) = 2^{x+2}$.*

Действительно,

$$f\,g(x) = f(g(x)) = f(2^x) = 2^x + 2, \quad f\,g(3) = 2^3 + 2 = 10;$$

$$g\,f(x) = g(f(x)) = g(x+2) = 2^{x+2}, \quad g\,f(3) = 2^{3+2} = 32.$$

1.3. Элементы теории делимости

Определение 1.1. *Говорят, что целое число a делится на целое число b (нацело), если существует целое число c такое, что $a = bc$. При этом число a называют делимым, число b — делителем, число c — частным.*

Если число a делится на число b, то пишут $a \,\vdots\, b$. При этом число b также называют кратным числа a.

Пример 2. $15 \,\vdots\, 5$, $7 \not\vdots\, 3$, $0 \,\vdots\, 2$, $2 \not\vdots\, 0$, $0 \,\vdots\, 0$.

Определение 1.2. *Говорят, что целое число a поделено на целое число b с остатком, если существуют целые числа c и r такие, что $a = bc + r$, где $0 \le r < |b|$. При этом число a называют делимым, число b — делителем, число c — (неполным) частным, число r — остатком.*

В теории чисел доказывается следующая теорема.

Теорема 1.1. *Любое целое число можно разделить с остатком на любое ненулевое целое число.*

Определение 1.3. *Наибольшим общим делителем двух неотрицательных целых чисел a и b называется наибольшее неотрицательное целое число d, на которое делятся и a, и b.*

Если d — наибольший общий делитель чисел a и b, то пишут $d = (a; b)$.

Определение 1.4. *Неотрицательные целые числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.*

Теорема 1.2. *Пусть a, b и c — натуральные числа, причем a и b — взаимно просты. Тогда: а) если произведение ac делится на b, то c делится на b; б) если c делится на a и b, то c делится на ab.*

Основными теоремами о наибольшем общем делителе двух чисел являются следующие две теоремы.

Теорема 1.3. *Для любых неотрицательных целых чисел a и b, где $a \geq b$, справедливо равенство:* $(a; b) = (a - b; b)$.

Теорема 1.4. *Если неотрицательное целое число a разделено на положительное число b с остатком: $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$, то $(a; b) = (b; r)$.*

Последняя теорема является теоретическим обоснованием корректности *алгоритма Евклида*, позволяющего находить наибольший общий делитель двух натуральных чисел. Опишем реализацию этого алгоритма.

Пусть a и b — натуральные числа, причем $a > b$. Будем производить последовательно следующие деления с остатком:

$$\begin{array}{lcl}
a = bq_1 + r_1 & \text{и} & 0 \leq r_1 < b; \\
b = r_1 q_2 + r_2 & \text{и} & 0 \leq r_2 < r_1; \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3 & \text{и} & 0 \leq r_3 < r_2; \\
r_2 = r_3 q_4 + r_4 & \text{и} & 0 \leq r_4 < r_3; \\
\dots & & \\
r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} & \text{и} & 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}; \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n & \text{и} & r_n = 0.
\end{array}$$

Тогда $(a; b) = r_{n-1}$, то есть наибольший общий делитель чисел равен последнему ненулевому остатку в указанном выше последовательном делении чисел.

Задача 1. *Числами Фибоначчи называются числа, которые получаются с помощью рекуррентного соотношения: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$:*

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad 144, \quad 233, \quad 377, \dots$$

то есть каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих.

Докажите, что два последовательных числа Фибоначчи взаимно просты.

Действительно,

$$(u_{n+1}; u_n) = (u_{n+1} - u_n; u_n) = (u_{n-1}; u_n) =$$

$$= (u_{n-1}; u_n - u_{n-1}) = (u_{n-1}; u_{n-2}) = \ldots = (u_1; u_2) = (1; 1) = 1,$$

то есть последовательные числа u_{n+1} и u_n взаимно просты. ■

Определение 1.5. *Наименьшим общим кратным двух неотрицательных целых чисел a и b называется наименьшее неотрицательное целое число k, которое делится и на a, и на b.*

Если k — наименьшее общее кратное чисел a и b, то пишут $k = [a; b]$.

Теорема 1.5. *Для любых неотрицательных целых чисел a и b справедлива формула: $ab = [a; b](a; b)$.*

Определение 1.6. *Целое число p называется простым, если $p \neq 0$, $p \neq \pm 1$ и единственными его делителями являются числа ± 1, $\pm p$.*

Определение 1.7. *Целое число p называется составным, если $p \neq 0$, $p \neq \pm 1$ и не является простым.*

Числа ± 1 и 0 не являются ни простыми, ни составными.

Почти во всех параграфах данной книги под простым и составным числами будут пониматься только положительные числа.

Простые числа обладают важными свойствами:

- если произведение натуральных чисел ab делится на простое число p, то либо a делится на p, либо b делится на p;
- (*основная теорема арифметики*) всякое натуральное число a, отличное от 1, единственным образом записывается в виде $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, причем $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — натуральные числа, называемые *каноническим разложением (представлением) натурального числа.*

Если ограничиться каким-то подмножеством множества натуральных чисел, то в нем также можно рассматривать понятия простого и составного числа. Но при этом основная теорема арифметики может уже не выполняться.

Задача 2. *Выполняется ли основная теорема арифметики во множестве $2\mathbb{Z}$ четных чисел? Какие числа в этом множестве являются простыми?*

В данном множестве число 6 является простым, так как его нельзя представить в виде произведения двух четных чисел. Число же 8 является составным.

В этом множестве число 120 можно разложить в произведение простых множителей двумя различными способами:

$$120 = 2 \cdot 6 \cdot 10 \qquad \text{и} \qquad 120 = 2^2 \cdot 30,$$

где числа 2, 6, 10, 30 действительно являются простыми. Следовательно, основная теорема арифметики во множестве $2\mathbb{Z}$ не выполняется. ■

1.4. Основные функции теории чисел

Введем в рассмотрение три функции, заданные на множестве натуральных чисел:

- $\tau(u)$ — количество всех делителей числа u;
- $\sigma(u)$ — сумма всех делителей числа u;
- $\varphi(u)$ — количество натуральных чисел, не превосходящих числа u и взаимно простых с числом u. (Эту функцию называют функцией Эйлера.)

Пример 3. $\tau(1) = \sigma(1) = \varphi(1) = 1$.

Задача 3. *Вычислите* $\tau(24)$, $\sigma(24)$ *и* $\varphi(24)$.

Имеем: $24 = 2^3 \cdot 3$.

Делителями числа 24 являются числа: 1,2,3,4,6,8,12,24.

Тогда по определениям $\tau(24) = 8$, $\sigma(24) = 1+2+3+4+6+8+12+24 = 60$.

Далее, выпишем все натуральные числа от 1 до 24 и вычеркнем все числа, невзаимно простые с числом 24:

$$1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \cancel{24}.$$

Количество оставшихся чисел равно $\varphi(24)$. Значит, $\varphi(24) = 8$. ■

Задача 4. *Докажите, что если* d *— делитель числа* n, *то количество натуральных чисел, не превышающих* n *и имеющих с* n *наибольшим общим делителем число* d, *равно* $\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)$.

Пусть n и d — фиксированные натуральные числа. Введем в рассмотрение два множества:

$$M_d = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n \text{ и } (x; n) = d\}, \quad M_1 = \{y \in \mathbb{N} | y \leq n/d \text{ и } (x; n/d) = 1\}.$$

Заметим, что множество M_1 состоит из всех натуральных чисел, не превышающих числа $\dfrac{n}{d}$ и взаимно простых с ним. По определению получаем, что множество состоит из $\varphi(n/d)$ чисел, то есть $|M_1| = \varphi(n/d)$.

Определим отображение $f : M_d \to M_1$ правилом: $x \mapsto \dfrac{x}{d}$. Выясним свойства отображения f.

1) Пусть $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $\dfrac{x_1}{d} = \dfrac{x_2}{d}$. Значит, $x_1 = x_2$.

2) Пусть $z \in M_1$. Значит, $z \leq n/d$ и $(z; n/d) = 1$. Тогда $dz \leq n$ и

$$(dz; n) = (d; d \cdot (n/d)) = d \cdot (z; n/d) = d \cdot 1 = d.$$

Это означает, что $dz \in M_d$ и $f(dz) = z$.

Следовательно, f — взаимно однозначное отображение. Поэтому $|M_d| = |M_1|$. Учитывая, что $|M_1| = \varphi(n/d)$, получаем $|M_d| = \varphi(n/d)$. ∎

Задача 5. *Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 450 и имеющих с 450 наибольшим общим делителем число 15.*

Так как $\varphi(450/15) = \varphi(30) = 8$, то требуемое количество натуральных чисел равно 8. ∎

Ясно, что для больших чисел находить значения данных функций по определению достаточно трудно. Необходимы эффективные способы их вычислений.

Понятно, что в некоторых случаях указать простую формулу или алгоритм для вычисления точного значения той или иной числовой функции достаточно трудно. Это относится и к функции π, значением которой является количество простых чисел от 1 до значения аргумента.

Для нахождения значений функции π можно воспользоваться алгоритмом, известным под названием "решето Эратосфена".

Это было удивительное изобретение — один из первых в мире алгоритмов, то есть систем правил, строго следуя которым непременно получишь искомый результат, который всякий раз будет одним и тем же и непременно правильным. И этот способ нахождения простых чисел предложил александрийский ученый Эратосфен (Erathostenes) (276–194 до н.э.) — современник и друг Архимеда (Archimedes) (287–212 до н.э.), с которым он постоянно переписывался, математик, астроном и механик. (Эратосфен, в частности, известен тем, что он первым измерил диаметр земного шара, не выходя из александрийской библиотеки, где работал; причем точность его измерения была поразительно высокой — выше даже, чем та, с которой измерил Землю сам Архимед!)

Метод этот очень прост. Пусть, например, надо найти все простые числа, не превосходящие 25. Выпишем все натуральные числа от 2 до 25. Вычеркнем, начиная с числа, идущего после 2, каждое второе число:

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, 9, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, 15, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, 21, \cancel{22}, 23, \cancel{24}, 25.$$

Первым уцелевшим числом (кроме, конечно, самого числа 2) после вычеркивания будет число 3. Теперь, начиная со следующего за ним числа 4, будем вычеркивать каждое третье число:

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \cancel{24}, 25.$$

При этом первыми уцелевшими числами будут числа 2, 3, 5. Далее вычеркиваем каждое пятое число, начиная с числа, следующего сразу же за числом 5, то есть с 6:

$$2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, 13, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{16}, 17, \cancel{18}, 19, \cancel{20}, \cancel{21}, \cancel{22}, 23, \cancel{24}, \cancel{25}.$$

В конце концов все составные числа окажутся вычеркнутыми и останутся только простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

В древности писали на восковых табличках острой палочкой — стилем. Поэтому Эратосфен, вместо того чтобы вычеркивать написанные им на табличке числа, выкалывал их острым концом стиля. После выкалывания всех составных чисел табличка напоминала решето. С тех пор придуманный Эратосфеном метод отыскания простых чисел называют "решетом Эратосфена".

Пример 4. $\pi(25) = 9$.

В решении вопросов о нахождении приближенного значения некоторых числовых функций нам потребуются еще две целочисленные функции, определенные на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$: *целая часть* *числа* x, обозначаемая $[x]$, равная наибольшему целому числу, не превосходящему числа x, и *дробная часть числа* x, обозначаемая $\{x\}$, равная разности $x - [x]$.

Пример 5. *Для любого натурального числа* n *справедливо неравенство:* $\pi(n) \geq \dfrac{\ln n}{\ln 4}$.

Для фиксированного числа n рассмотрим все числа m такие, что $m \leq n$.

Число m можно представить так: $m = k^2 v$, где $v = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_s^{\beta_s}$ и $\beta_i = 0$ или 1 для всех i от 1 до s.

Учитывая, что $k^2 \leq m \leq n$ и $0 \leq m \leq n$, то k может быть одним из чисел $1, 2, \ldots, [\sqrt{n}]$, а q_i принадлежат совокупности простых чисел, которые не превосходят n, именно $p_1, p_2, \ldots, p_{\pi(n)}$.

Рассмотрим два множества:

$$X = \left\{1; 2; \ldots; [\sqrt{n}]\right\},$$

состоящее из $[\sqrt{n}]$ чисел,

$$Y = \left\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_{\pi(n)}^{\alpha_{\pi(n)}} \mid \alpha_i = 0 \text{ или } 1,\ i = 1, 2, \ldots, \pi(n)\right\},$$

состоящее из $2^{\pi(n)}$ чисел. Тогда $k \in X$ и $v \in Y$. Всего же чисел вида $k^2 v$ можно составить $[\sqrt{n}] \cdot 2^{\pi(n)}$. При этом, учитывая, что чисел получится не меньше, чем n и $\sqrt{n} \geq [\sqrt{n}]$, получим:

$$[\sqrt{n}] \cdot 2^{\pi(n)} \geq n, \quad \sqrt{n} \cdot 2^{\pi(n)} \geq n, \quad 2^{\pi(n)} \geq \sqrt{n},$$

$$\pi(n) \ln 2 \geq \frac{1}{2} \ln n, \quad \pi(n) \geq \frac{\ln n}{2 \ln 2} = \frac{\ln n}{\ln 4}.$$

Следовательно, $\pi(n) \geq \dfrac{\ln n}{\ln 4}$. ∎

В свое время П.Л. Чебышев доказал справедливость неравенства:

$$\pi(n) > \frac{n}{12 \ln n}.$$

Значения функции π можно вычислять, используя функцию ν, заданную следующим образом: для натурального x и простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$ значение $\nu(x; p_1, p_2, \ldots, p_s)$ равно количеству натуральных чисел, не превосходящих числа x и не делящихся ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_s$.

Можно доказать, что функция ν вычисляется следующим образом:

$$\nu(x;p_1,p_2,\ldots,p_s)=[x]-\left[\frac{x}{p_1}\right]-\left[\frac{x}{p_2}\right]-\ldots-\left[\frac{x}{p_s}\right]+$$

$$+\left[\frac{x}{p_1p_2}\right]+\left[\frac{x}{p_1p_3}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{p_1p_s}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{p_{s-1}p_s}\right]-\ldots+(-1)^s\left[\frac{x}{p_1p_2\ldots p_s}\right].$$

Пример 6. $\nu(107;3;5;7)=50$.

Действительно,

$$\nu(107;3,5,7)=$$

$$=[107]-\left[\frac{107}{3}\right]-\left[\frac{107}{5}\right]-\left[\frac{107}{7}\right]+\left[\frac{107}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{107}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{107}{5\cdot 7}\right]-\left[\frac{107}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=$$

$$=107-35-21-15+7+5+3-1=50,$$

то есть $\nu(107;3,5,7)=50$. ∎

Покажем, что справедливо равенство:

$$\pi(x)=\nu(x;p_1,p_2,\ldots,p_s)+s-1$$

для простых чисел $p_1,p_2,\ldots,p_s$ с условиями $2\le p_1,p_2,\ldots,p_s\le\sqrt{x}$.

Пусть x — фиксированное натуральное число и $p_1,p_2,\ldots,p_s$ — простые числа такие, что $2\le p_1,p_2,\ldots,p_s\le\sqrt{x}$.

Пусть y — натуральное число, не превышающее x, и p — простой делитель числа y, причем $p>\sqrt{x}$. Тогда $y=pm$, где $m\in\mathbb{N}$.

Какие простые делители могут быть у числа m? Если предположить, что q — такой простой делитель числа m, что $q>\sqrt{x}$, то $m=qn$, где $n\in\mathbb{N}$, и $y=pm=pqn>\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot n>x$, что не так. Значит, все простые делители числа m принадлежат множеству $\{p_1;p_2;\ldots;p_s\}$.

Получили, что число y может делиться лишь на простые числа из множества $\{p_1;p_2;\ldots;p_s\}$ и, может быть, на одно простое число, большее $\sqrt{x}$. Поэтому, если число y взаимно просто с числами из множества $\{p_1;p_2;\ldots;p_s\}$, то есть $m\not{|}p_i$ для всех $i=1,2,\ldots,s$, то $y=p$, то есть число y является простым. Значит, $\nu(x;p_1,p_2,\ldots,p_s)$ равно количеству простых чисел в интервале от $[\sqrt{x}+1]$ до x, сложенному с числом 1 (так как число 1 является взаимно простым со всеми натуральными числами).

Следовательно, вычитая из $\nu(x; p_1, p_2, \ldots, p_s)$ число 1 и прибавляя число простых чисел во множестве $\{p_1; p_2; \ldots; p_s\}$, то есть s, получаем общее количество простых чисел в интервале от 1 до x. Значит,

$$\pi(x) = \nu(x; p_1, p_2, \ldots, p_s) + s - 1.$$

Пример 7. $\pi(30) = 10$.

Действительно, простые числа 2, 3, 5 не превосходят $\sqrt{30}$ и

$$\pi(30) = \nu(30; 2, 3, 5) + 3 - 1 =$$

$$= [30] - \left[\frac{30}{2}\right] - \left[\frac{30}{3}\right] - \left[\frac{30}{5}\right] + \left[\frac{30}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{30}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{30}{3\cdot 5}\right] - \left[\frac{30}{2\cdot 3\cdot 5}\right] + 3 - 1 = 10,$$

то есть $\pi(30) = 10$. ■

Аналогичным образом, как и с функцией π, для значений которой известны лишь более-менее подходящие оценки, обстоит дело с двумя следующими функциями: ζ, где $\zeta(n)$ — количество цифр в числе n, и ξ, где $\xi(n)$ — сумма цифр числа n.

Пример 8. $\zeta(2345) = 4$.

Пример 9. *Для любого натурального числа A справедливо равенство: $\zeta(A) = \lg(A) + \alpha$, где $\alpha \in (0; 1]$.*

Заметим, что утверждение справедливо для $A = 1$ при $\alpha = 1$: $\zeta(1) = \lg 1 + 1$.

Пусть число A является степенью числа 10, то есть $A = 10^n$ для некоторого натурального значения n. Тогда десятичная запись числа A содержит $n + 1$ цифру. При этом значение $\zeta(A)$ также равно $n + 1$ при $\alpha = 1$: $\zeta(10^n) = \lg 10^n + 1 = n + 1$.

Пусть теперь число A не является степенью числа 10. Тогда

$$10^{\zeta(A)-1} < A < 10^{\zeta(A)}, \quad \zeta(A) - 1 < \lg A < \zeta(A).$$

Тогда $\zeta(A) = \lg A + \alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$. ■

Получаем смысл десятичного логарифма: $\lg A$ — приближенное значение (с точностью до 1) количества цифр в натуральном числе A.

Задача 6. *Докажите, что $\zeta(2^n) < n - 1$ для любого натурального n, большего 3.*

Действительно, из того, что $\lg 8 < \lg 10 = 1$, следует, что $3 \lg 2 < 1$ или $\lg 2 < \frac{1}{3}$, значит, для некоторого $\alpha \in (0; 1]$ имеем:

$$\zeta(2^n) = \lg 2^n + \alpha = n \lg 2 + \alpha < \frac{1}{3} n + 1 < n - 1 \text{ при } n > 3.$$

Поэтому $\zeta(2^n) < n - 1$ при $n > 3$. ■

Пример 10. *Для любых двух натуральных чисел A и B справедливы неравенства: $\xi(A+B) \leq \xi(A) + \xi(B)$ и $\xi(AB) \leq \xi(A) \cdot \xi(B)$.*

Пусть $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Умножая A на B "столбиком", мы должны сложить n "сдвинутых" на один разряд относительно друг друга чисел $a_n \cdot B$, $a_{n-1} \cdot B$, ..., $a_1 \cdot B$. Поэтому

$$\xi(AB) \leq \xi\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i B \Big) \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \Big) \cdot \xi(B) \leq \xi(A) \cdot \xi(B).$$

Следовательно, $\xi(AB) \leq \xi(A) \cdot \xi(B)$. ■

1.5. Элементы теории сравнений

В некоторых параграфах данной книги часто придется высказывать суждения типа "числа a и b при делении на m дают одинаковые остатки" или, что то же самое, "разность $a - b$ делится на m". Нам нужно иметь возможность легко и уверенно оперировать этими суждениями и переходить от одних суждений такого типа к другим. Для этого рассмотрим так называемую теорию сравнений.

Определение 1.8. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, где m — целое число, если при делении на m числа a и b дают один и тот же остаток.*

Из определения следует, что числа a и b сравнимы по модулю m, если $a - b$ делится нацело на m. Значит, если числа a и b сравнимы по модулю m, то $a = b + mt$ для некоторого целого числа t.

Сравнимость чисел a и b по модулю m записывают как

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Очевидно, что если a делится нацело на m, то

$$a \equiv 0 \pmod{m},$$

и наоборот.

Пример 11. *Верны числовые сравнения* $4 \equiv 19 \pmod{5}$, $3 \equiv -9 \pmod{4}$; *сравнение* $18 \equiv 3 \pmod{7}$ *не является верным.*

Теорема 1.6. *Сравнения по одному модулю можно почленно складывать, то есть если* $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, *то* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod{m}$.

Доказательство

Из условия следует, что на m делится каждая из разностей

$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad \ldots, \quad a_n - b_n,$$

а поэтому делится и их сумма

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_n - b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Значит, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod{m}$. ■

Теорема 1.7. *Сравнения по одному модулю можно почленно умножать, то есть если* $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, *то* $a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \pmod{m}$.

Доказательство

Пусть $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$. Тогда $a_1 = b_1 + mt_1$ и $a_2 = b_2 + mt_2$, где $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. Перемножая почленно полученные равенства, будем иметь:

$$a_1 a_1 = b_1 b_2 + m(b_1 t_2 + b_2 t_1 + m t_1 t_2),$$

а значит, $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 \pmod{m}$. Теперь, умножая полученное сравнение на сначала на сравнение $a_3 \equiv b_3 \pmod{m}$, затем на сравнение $a_4 \equiv b_4 \pmod{m}$ и так далее, получим сравнение $a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \pmod{m}$. ■

Следствие 1.1. *Обе части сравнения можно возводить в любую натуральную степень, то есть если* $a \equiv b \pmod{m}$, *то* $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, *где* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство

Перемножая сравнение $a \equiv b \pmod{m}$ само на себя n раз, где $n \in \mathbb{N}$, получим сравнение $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. ■

Теорема 1.8. *Если $ac \equiv bc \pmod{m}$ и $(c;m) = 1$, то $a \equiv b \pmod{m}$.*

Доказательство

По условию $ac \equiv bc \pmod{m}$. Значит, разность $ac - bc$ делится нацело на m. Учитывая, что $ac - bc = (a - b)c$ и $(c;m) = 1$, то по свойствам отношения делимости получаем, что разность $a - b$ делится нацело на m. Следовательно, $a \equiv b \pmod{c}$. ■

В теории сравнений имеют важное значение следующие две теоремы.

Теорема 1.9 (Эйлер). *Для любого числа a, взаимно простого с данным числом $m > 1$, справедливо сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Теорема 1.10 (Малая теорема Ферма). *Для любого числа a, не делящегося на простое число p, справедливо сравнение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

1.6. Метод математической индукции

Доказательства многих утверждений можно проводить так называемым *методом математической индукции*, который формулируется следующим образом.

Метод математической индукции. *Предположим, что для любого натурального n утверждение $P(n)$, формулировка которого зависит от этого n, обладает следующими свойствами:*

1) $P(1)$ есть верное утверждение;

2) если $P(k)$ есть верное утверждение для натурального k, то $P(k+1)$ также верное утверждение.

Тогда $P(n)$ есть верное утверждение для всех натуральных n.

Действительно, если для утверждения $P(n)$ справедливы свойства 1) и 2) из метода математической индукции, то по первому свойству $P(1)$ — истинное утверждение; применяя свойство 2) для $k = 1$, получим, что $P(2)$ — верное утверждение; теперь, зная об истинности утверждения $P(2)$, мы опять можем применить свойство 2), но на этот раз при $k = 2$ и получим истинное утверждение $P(3)$. Следовательно, выбрав произвольное натуральное n, мы можем действовать подобным образом, пока не достигнем $P(n)$. Поэтому утверждение будет справедливым для каждого натурального n.

Конечно, это рассуждение не доказывает сам метод математической индукции. На самом деле, в некотором смысле он вообще не может быть доказан, а воспринимается математиками как аксиома, то есть как нетребующее доказательства в силу своей "очевидности", и используется по общедоговоренности.

Для того, чтобы констатировать, что некоторое утверждение $P(n)$, формулировка которого зависит от натурального n, справедливо для всех натуральных чисел, нужно доказать, что это утверждение обладает свойствами 1) и 2) метода математической индукции. Доказательство справедливости свойства 1) для утверждения $P(n)$ называется *базой индукции*; доказательство справедливости свойства 2) состоит из *индукционного предположения*, заключающегося в том, что предполагается, что утверждение $P(k)$ справедливо для числа k, и доказательства *индукционного перехода* — доказательства справедливости утверждения $P(k+1)$, исходя из справедливости утверждения $P(k)$. После этого мы можем сделать вывод о том, что утверждение $P(n)$ справедливо для любого натурального n.

Метод математической индукции был разработан математиками в XVII веке. Объяснение этого метода практически в современном виде мы находим в трактате Б. Паскаля (Blaise Pascal) (1623–1662) «Об арифметическом треугольнике», опубликованном в 1654 году.

Пример 12. *Докажите формулу:* $1^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1)$, *где* $n\in\mathbb{N}$.

В нашем случае утверждение $P(n)$ выглядит следующим образом: *для любого натурального числа n справедливо равенство:*

$$1^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1).$$

Очевидно, что данное утверждение $P(n)$ действительно зависит только от натурального числа n. Данная формула дает способ суммирования кубов последовательных нечетных натуральных чисел.

Итак, перейдем к самому доказательству данного утверждения.

1) Докажем базу индукции, то есть докажем, что наше утверждение справедливо для $n=1$. Имеем:

$$1^3=1 \quad \text{и} \quad 1^2\cdot(2\cdot1^2-1)=1.$$

Следовательно, формула справедлива для $n = 1$. База индукции доказана.

2) Индукционное предположение в данном случае выглядит следующим образом: пусть утверждение справедливо для k, то есть

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2k-1)^3 = k^2 \cdot (2k^2 - 1).$$

Докажем индукционный переход, то есть докажем, что данное утверждение справедливо для $k+1$:

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2(k+1)-1)^3 = (k+1)^2 \cdot (2(k+1)^2 - 1).$$

Имеем:

$$1^3+5^3+7^3+\ldots+(2(k+1)-1)^3 = \left[1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2k-1)^3\right] + (2k+1)^3 =$$

$$= k^2 \cdot (2k^2 - 1) + (2k+1)^3 = 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1.$$

Разложим многочлен $2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$ на множители. Методом подбора получаем, что число -1 является корнем этого многочлена:

$$2 \cdot (-1)^4 + 8 \cdot (-1)^3 + 11 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Поделим данный многочлен на многочлен $k+1$ и поделим также полученное от первого деления частное на многочлен $k+1$. Получаем:

$$\begin{array}{r|l}
-\,2k^4+8k^3+11k^2+6k+1 & k+1 \\ \cline{2-2}
2k^4+2k^3 \qquad\qquad\qquad & 2k^3+6k^2+5k+1 \\ \cline{1-1}
-\,6k^3+11k^2+6k+1 & \\
6k^3+\;\;6k^2 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-\,5k^2+6k+1 & \\
5k^2+5k \qquad & \\ \cline{1-1}
-\,k+1 & \\
k+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,2k^3+6k^2+5k+1 & k+1 \\ \cline{2-2}
2k^3+2k^2 \qquad\qquad & 2k^2+4k+1 \\ \cline{1-1}
-\,4k^2+5k+1 & \\
4k^2+4k \qquad & \\ \cline{1-1}
-\,k+1 & \\
k+1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Значит,

$$2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 = (k+1)^2 \cdot (2k^2 + 4k + 1).$$

Учитывая, что $2k^2+4k+1 = 2(k^2+2k+1) - 1 = 2(k+1)^2 - 1$, окончательно получаем, что

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2(k+1)-1)^3 = (k+1)^2 \cdot (2(k+1)^2 - 1).$$

Следовательно, наше утверждение справедливо для $k+1$, а значит, индукционный переход доказан.

Учитывая, что для нашего утверждения выполняются свойства 1) и 2) из метода математической индукции, получаем, что наше утверждение справедливо для любого натурального числа n.

Упражнения и задачи

7. Натуральные числа m и n взаимно просты и $n < m$. Какое число больше: $\left[1\cdot\frac{m}{n}\right]+\left[2\cdot\frac{m}{n}\right]+\ldots+\left[n\cdot\frac{m}{n}\right]$ или $\left[1\cdot\frac{n}{m}\right]+\left[2\cdot\frac{n}{m}\right]+\ldots+\left[m\cdot\frac{n}{m}\right]$?

8. Найдите $\pi(50)$, используя

a) метод "решето Эратосфена";

b) функцию ν.

9. Докажите, что $\pi(30k) \leq 10k$ для любого $k = 1, 2, \ldots$.

10. Найдите $\zeta(2^n) + \zeta(5^n)$ для произвольного натурального числа n.

11. Докажите, что $\zeta(5^n) < n$ для любого натурального числа $n > 3$.

12. Решите уравнение $x + \xi(x) + \xi(\xi(x)) = 60$.

13. Решите уравнение $x + \xi(x) = 1\,000\,000\,000$.

14. Вычислите $\zeta(100!)$.

15. Докажите, что $\zeta(2^n + 1974^n) = \zeta(1974^n)$ для любого натурального n.

16. Натуральное число a называется устойчивым, если десятичная запись числа $1 + 2 + \ldots + a$ заканчивается числом a. Например, число 625 является устойчивым, так как $1 + 2 + \ldots + 625 = 195\,\mathit{625}$.

a) Приведите примеры устойчивых чисел.

b) Укажите необходимые условия устойчивости числа.

c) Является ли множество устойчивых чисел бесконечным?

17. Докажите, что если для натуральных чисел a и b справедливо равенство $\xi(a) = \xi(b)$, то $(a - d) \vdots 9$.

18. Докажите, что если для натурального числа a справедливо равенство $\xi(a) = \xi(9a)$, то $a \vdots 9$.

19. Докажите, что если $\xi(x) = \xi(2x)$, то число x делится на 9.

20. Найдите все двузначные числа x, для которых выполняется равенство $\xi(x) = \xi(a \cdot x)$ для всех $a \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

21. Существует ли такое натуральное число n, что $\xi(n^2) = 100$?

22. Существует ли такое натуральное число n, что $\xi(n) \vdots 7$ и $\xi(n+1) \vdots 7$?

23. Докажите, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

24. Докажите, что $\xi(A \cdot 10^n) = \xi(A)$ для любого натурального числа n.

25. Пусть A — натуральное число.

a) Докажите, что сумма цифр числа A не более чем в 8 раз превосходит сумму цифр числа $8A$.

b) Докажите, что сумма цифр числа A превосходит сумму цифр числа $5^5 \cdot A$ не более чем в 5 раз.

26. Пусть $K(x)$, где $x \in \mathbb{R}$, равно числу несократимых дробей $\frac{a}{b}$ с натуральными a и b таких, что $a < x$ и $b < x$. Например, $K\left(\frac{5}{2}\right) = 3$ (дроби $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$). Вычислите сумму $K(100) + K\left(\frac{100}{2}\right) + K\left(\frac{100}{3}\right) + \ldots + K\left(\frac{100}{100}\right)$.

ГЛАВА 2

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Мультипликативные функции

Пусть u и v — произвольные натуральные числа. Произведение uv назовем *правильным*, если числа u и v взаимно просты.

Функция $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *мультипликативной*, если

- функция θ определена всюду на $\mathbb{N}$ и $\theta(1) = 1$,
- для правильного произведения uv чисел u и v справедливо равенство: $\theta(uv) = \theta(u)\theta(v)$ (в правой части равенства — обычное произведение чисел).

Пример 13. *Функция $\theta_r(u) = u^r$, где r — любое действительное число, является мультипликативной.*

Справедливость свойств определения мультипликативной функции следует из свойств степеней с действительным показателем. Заметим только, что степень с натуральным основанием определена для любого действительного показателя r. ■

Пример 14. *Функция* $\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u > 0, \\ 0, & \text{если } u = 0, \\ -1, & \text{если } u < 0, \end{cases}$ *где u — любое действительное число, является мультипликативной.*

Задача 27. *Определим функцию μ (которая называется функцией Мебиуса) следующим образом:*

- $\mu(1) = 1$;
- $\mu(u) = (-1)^s$, *если $u > 1$ и каноническое разложение числа u имеет вид: $u = p_1p_2 \ldots p_s$;*
- $\mu(u) = 0$ *во всех остальных случаях.*

Докажите, что функция μ является мультипликативной.

Задача 28. *Вычислите $\mu(30)$ и $\mu(48)$.*

2.2. Способ построения мультипликативных функций

В данном параграфе будем рассматривать мультипликативную функцию θ_r, сопоставляющую натуральному числу u его r-ю степень, то есть

$$\theta_r(u) = u^r,$$

где u — натуральное число, r — любое действительное число.

Введем следующее обозначение: символом

$$\sum_{u \,\vdots\, a}$$

будем обозначать сумму чего-либо, в которой суммирование проведено по всем делителям a числа u.

Задача 29. *Вычислите $\sum\limits_{u \,\vdots\, a} a^2$, если $u = 50$.*

Делителями числа 50 являются следующие числа: 1,2,5,10,25,50. Тогда

$$\sum_{50 \,\vdots\, a} a^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 25^2 + 50^2 = 3255. \qquad \blacksquare$$

Ясно, что

$$\sum_{u \,\vdots\, a} a = \sigma(u) \quad \text{и} \quad \sum_{u \,\vdots\, a} a^0 = \tau(u).$$

Далее, пусть uv — правильное произведение чисел u и v. Тогда все делители числа uv имеют вид: ab, где a — делитель числа u, а b — делитель числа v.

Задача 30. *Докажите, что при этом ab — правильное произведение.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — все различные делители числа u,
$b_1, b_2, \ldots, b_t$ — все различные делители числа v.
Заметим, что $s \geq 1$ и $t \geq 1$, так как число 1 является делителем любого числа. Тогда

$$\begin{array}{l} a_1b_1,\ a_1b_2,\ \ldots,\ a_1b_t, \\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_2b_t, \\ \ldots \\ a_sb_1,\ a_sb_2,\ \ldots,\ a_sb_t \end{array}$$

— **все различные** делители числа uv.

Задача 31. *Пусть $a_1b_1 = a_2b_2$ и a_1b_1, a_2b_2 — правильные произведения. Докажите, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.*

Возведем полученные числа в r-ю степень и полученные степени сложим:

$$(a_1^rb_1^r+a_1^rb_2^r+\ldots+a_1^rb_t^r)+(a_2^rb_1^r+a_2^rb_2^r+\ldots+a_2^rb_t^r)+\ldots+(a_s^rb_1^r+a_s^rb_2^r+\ldots+a_s^rb_t^r) =$$

$$= a_1^r(b_1^r + b_2^r + \ldots + b_t^r) + a_2^r(b_1^r + b_2^r + \ldots + b_t^r) + \ldots + a_s^r(b_1^r + b_2^r + \ldots + b_t^r) =$$

$$= (a_1^r + a_2^r + \ldots + a_s^r)(b_1^r + b_2^r + \ldots + b_t^r).$$

Значит,

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq s,\\ 1\leq j\leq t}} a_i^rb_j^r = \sum_{1\leq i\leq s} a_i^r \cdot \sum_{1\leq j\leq t} b_j^r.$$

Так как

$$\sum_{uv\,\vdots\,ab} a^rb^r = (a_1^rb_1^r+a_1^rb_2^r+\ldots+a_1^rb_t^r)+\ldots+(a_s^rb_1^r+a_s^rb_2^r+\ldots+a_s^rb_t^r) = \sum_{\substack{1\leq i\leq s,\\ 1\leq j\leq t}} a_i^rb_j^r,$$

$$\sum_{u\,\vdots\,a} a^r = a_1^r + a_2^r + \ldots + a_s^r = \sum_{1\leq i\leq s} a_i^r,$$

$$\sum_{v\,\vdots\,b} b^r = b_1^r + b_2^r + \ldots + b_s^r = \sum_{1\leq j\leq t} b_j^r,$$

то

$$\sum_{uv\,\vdots\,ab} \theta_r(ab) = \sum_{uv\,\vdots\,ab} a^rb^r = \sum_{\substack{1\leq i\leq s,\\ 1\leq j\leq t}} a_i^rb_j^r = \sum_{1\leq i\leq s} a_i^r \cdot \sum_{1\leq j\leq t} b_j^r =$$

$$= \sum_{u \,\vdots\, a} a^r \cdot \sum_{v \,\vdots\, b} b^r = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a) \cdot \sum_{v \,\vdots\, b} \theta_r(b).$$

Следовательно,

$$\sum_{uv \,\vdots\, ab} \theta_r(ab) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a) \cdot \sum_{v \,\vdots\, b} \theta_r(b)$$

при условии, что произведение uv является правильным.

Задача 32. *Докажите, что*

$$\sum_{\substack{l_i=1,\ldots,n_i,\\ i=1,\ldots,k}} (a_{1,l_1} a_{2,l_2} \cdot \ldots \cdot a_{k,l_k}) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{1,i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_2} a_{2,i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_k} a_{k,i}\right).$$

Введем функцию:

$$\chi_r(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a).$$

Функция χ_r является мультипликативной. Действительно,

- $\chi_r(1) = 1.$

  Так как если $1 \,\vdots\, a$, то $a = 1$ и

$$\chi_r(1) = \sum_{1 \,\vdots\, a} \theta_r(a) = \theta_r(1) = 1.$$

- Если uv — правильное произведение, то $\chi_r(uv) = \chi_r(u)\chi_r(v)$.

  Так как uv — правильное произведение, то

$$\chi_r(uv) = \sum_{uv \,\vdots\, ab} \theta_r(ab) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a) \cdot \sum_{v \,\vdots\, b} \theta_r(b) = \chi_r(u)\chi_r(v).$$

В частности получили, что мультипликативных функций бесконечно много (как минимум континуум).

Пример 15. $\chi_2(50) = 3255.$

2.3. Свойства функции χ_r

В данном параграфе также будем рассматривать мультипликативную функцию θ_r, сопоставляющую натуральному числу u его r-ю степень, и мультипликативную функцию χ_r.

По определению имеем:

$$\theta_r(u) = u^r,$$

где u — натуральное число, r — любое действительное число и

$$\chi_r(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a).$$

Пусть $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $u \neq 1$. При этом произведения

$$p_1^{\alpha_1}(p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}), \quad p_2^{\alpha_2}(p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}), \quad \dots, \quad p_{s-1}^{\alpha_{s-1}} p_s^{\alpha_s}$$

являются правильными.

Пусть $u_2 = p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, $u_3 = p_3^{\alpha_3} \dots p_s^{\alpha_s}$, $\dots$, $u_{s-1} = p_{s-1}^{\alpha_{s-1}} p_s^{\alpha_s}$, $u_s = p_s^{\alpha_s}$. Тогда

$$\sum_{p_1^{\alpha_1} u_2 \,\vdots\, a_1 b_2} \theta_r(a_1 b_2) = \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{u_2 \,\vdots\, b_2} \theta_r(b_2) =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} u_3 \,\vdots\, b_2} \theta_r(b_2) = \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} u_3 \,\vdots\, a_2 b_3} \theta_r(a_2 b_3) =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} \,\vdots\, a_2} \theta_r(a_2) \cdot \sum_{u_3 \,\vdots\, b_3} \theta_r(b_3) =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} \,\vdots\, a_2} \theta_r(a_2) \cdot \sum_{p_3^{\alpha_3} u_4 \,\vdots\, b_3} \theta_r(b_3) =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} \,\vdots\, a_2} \theta_r(a_2) \cdot \sum_{p_3^{\alpha_3} u_4 \,\vdots\, a_3 b_4} \theta_r(a_3 b_4) =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} \,\vdots\, a_2} \theta_r(a_2) \cdot \sum_{p_3^{\alpha_3} \,\vdots\, a_3} \theta_r(a_3) \cdot \sum_{u_4 \,\vdots\, b_4} \theta_r(b_4) = \dots =$$

$$= \sum_{p_1^{\alpha_1} \,\vdots\, a_1} \theta_r(a_1) \cdot \sum_{p_2^{\alpha_2} \,\vdots\, a_2} \theta_r(a_2) \cdot \sum_{p_3^{\alpha_3} \,\vdots\, a_3} \theta_r(a_3) \cdot \ldots \cdot \sum_{p_s^{\alpha_s} \,\vdots\, a_s} \theta_r(a_s).$$

Следовательно,

$$\chi_r(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = \chi_r(p_1^{\alpha_1}) \cdot \chi_r(p_2^{\alpha_2}) \cdot \chi_r(p_3^{\alpha_3}) \cdot \ldots \cdot \chi_r(p_s^{\alpha_s}),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа.

Если p — простое число и α — натуральное, то делителями числа p^α являются числа:

$$1, \ \ p^1, \ \ p^2, \ \ \ldots, \ \ p^\alpha$$

и только они. Тогда

$$\chi_r(p^\alpha) = \sum_{p^\alpha \,\vdots\, a}^{a} \theta_r(a) = \theta_r(1) + \theta_r(p^1) + \theta_r(p^2) + \ldots + \theta_r(p^\alpha).$$

Значит,

$$\chi_r(u) = \chi_r(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = \chi_r(p_1^{\alpha_1}) \cdot \chi_r(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot \chi_r(p_s^{\alpha_s}) =$$

$$= (\theta_r(1) + \theta_r(p_1^1) + \theta_r(p_1^2) + \ldots + \theta_r(p_1^{\alpha_1}))(\theta_r(1) + \theta_r(p_2^1) + \theta_r(p_2^2) + \ldots + \theta_r(p_2^{\alpha_2})) \times$$

$$\times \ldots \times (\theta_r(1) + \theta_r(p_s^1) + \theta_r(p_s^2) + \ldots + \theta_r(p_s^{\alpha_s})).$$

Следовательно,

$$\chi_r(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_r(a)$$

и

$$\chi_r(u) = \prod_{i=1}^{s} \left(\theta_r(1) + \theta_r(p_i^1) + \theta_r(p_i^2) + \ldots + \theta_r(p_i^{\alpha_i})\right)$$

для различных $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — простых делителей числа u.

Учитывая, что при $r \geq 1$ последовательность $1, x^r, x^{2r}, \ldots, x^{\alpha r}$ является геометрической прогрессией со знаменателем x^r и

$$1 + x^r + x^{2r} + \ldots + x^{\alpha r} = \frac{x^{r(\alpha+1)} - 1}{x^r - 1},$$

то

$$\chi_r(u) = \prod_{i=1}^{s} \left(\theta_r(1) + \theta_r(p_i^1) + \theta_r(p_i^2) + \ldots + \theta_r(p_i^{\alpha_i})\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \left(1 + p_i^r + p_i^{2r} + \ldots + p_i^{\alpha_i r}\right) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{r(\alpha_i+1)} - 1}{p_i^r - 1}.$$

Следовательно, при $r \geq 1$ получаем, что

$$\chi_r(u) = \frac{p_1^{r(\alpha_1+1)} - 1}{p_1^r - 1} \cdot \frac{p_2^{r(\alpha_2+1)} - 1}{p_2^r - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{r(\alpha_s+1)} - 1}{p_s^r - 1}.$$

Задача 33. *Вычислите* $\chi_2(24)$.

Так как $24 = 2^3 \cdot 3$, то

$$\chi_2(24) = \chi_2(2^3 \cdot 3) = \frac{2^{2\cdot(3+1)} - 1}{2^2 - 1} \cdot \frac{3^{2\cdot(1+1)} - 1}{3^2 - 1} = 85 \cdot 10 = 850.$$

Значит, $\chi_2(24) = 850$. ■

2.4. Основные мультипликативные функции

Выясним смысл функции χ_r при $r = 0$ и $r = 1$.

Пусть $r = 0$. Тогда $\theta_0(u) = u^0 = 1$ для всякого натурального числа u (то есть функция θ_0 — тождественная единица) и

$$\chi_0(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_0(a) = \sum_{u \,\vdots\, a} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\tau(u) \text{ раз}} = \tau(u)$$

— количество делителей числа u. С другой стороны, если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $u \neq 1$, то

$$\chi_0(u) = \prod_{i=1}^{s} (\theta_0(1) + \theta_0(p_i^1) + \theta_0(p_i^2) + \ldots + \theta_0(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} (1 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\alpha_i \text{ раз}}) = \prod_{i=1}^{s} (1 + \alpha_i) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_s).$$

Следовательно, при $r = 0$ функция χ_0 совпадает с функцией τ. Значит, функция τ является мультипликативной и

$$\tau(u) = \tau(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_s).$$

Пример 16. $\tau(24) = 8$.

Имеем: $24 = 2^3 \cdot 3$. Тогда $\tau(24) = (1+3)(1+1) = 8$. ■

Пример 17. $\tau(720) = 30$.

Имеем: $\tau(720) = \tau(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = (1+4)(1+2)(1+1) = 30$. ■

Задача 34. *Решите уравнение $\tau(x) = 4$.*

Пусть u — решение уравнения $\tau(x) = 4$ и $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha}$ — каноническое представление числа u. Тогда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \geq 1$.

Так как $\tau(u) = 4$, то $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1) = 4$. Так как $\alpha_i + 1 \geq 2$ для всех i, то $s = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ или $s = 1$ и $\alpha_1 = 3$. Тогда $u = pq$, то есть число u есть произведение двух различных простых чисел. ■

Задача 35. *Решите уравнение $\tau(x) = p$ для произвольного простого числа p.*

Задача 36. *Докажите, что для любого натурального числа v справедливо равенство:*

$$\sum_{v \,\vdots\, d} \tau^3(d) = \left(\sum_{v \,\vdots\, d} \tau(d) \right)^2,$$

то есть если $d_1, d_2, \ldots, d_s$ — все делители натурального числа v, то

$$\tau^3(d_1) + \tau^3(d_2) + \ldots + \tau^3(d_s) = \left(\tau(d_1) + \tau(d_2) + \ldots + \tau(d_s)\right)^2.$$

Пусть теперь $r = 1$. Тогда $\theta_1(u) = u^1 = u$ для всякого натурального числа u (то есть функция θ_1 — тождественная функция) и

$$\chi_1(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_1(a) = \sum_{u \,\vdots\, a} a = \sigma(u)$$

— сумма делителей числа u. С другой стороны, если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $u \neq 1$, то

$$\chi_1(u) = \prod_{i=1}^{s} \left(\theta_1(1) + \theta_1(p_i^1) + \theta_1(p_i^2) + \ldots + \theta_1(p_i^{\alpha_i})\right) =$$

$$= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_i-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}.$$

Следовательно, при $r = 1$ функция χ_1 совпадает с функцией σ. Значит, функция σ является мультипликативной и

$$\sigma(u) = \sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_i-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}.$$

Ради справедливости, скажем, что эту формулу в ходе своих исследований вывели Ферма и Декарт. Мультипликативность же функции σ доказал Эйлер.

Пример 18. $\sigma(24) = 60$.

Имеем: $24 = 2^3 \cdot 3$. Тогда $\sigma(24) = \dfrac{2^{3+1}-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^{1+1}-1}{3-1} = \dfrac{15}{1}\cdot\dfrac{8}{2} = 60.$ ■

Пример 19. $\sigma(720) = 2418$.

Имеем: $\sigma(720) = \sigma(2^4\cdot 3^2\cdot 5) = \dfrac{2^5-1}{2-1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3-1}\cdot\dfrac{5^2-1}{5-1} = 2418.$ ■

Упражнения и задачи

37. Пусть $\theta(1) = 1$ и $\theta(p^\alpha) = 2$ для любого простого p и натурального α. Найдите $\theta(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, если θ — мультипликативная функция.

38. Пусть $\theta(1) = 1$ и $\theta(p^\alpha) = \alpha$ для любого простого p и натурального α. Найдите $\theta(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, если θ — мультипликативная функция.

39. Найдите наименьшее натуральное число, имеющее

a) восемь делителей;

b) двенадцать делителей.

40. Найдите число, которое делится на 12 и имеет 14 различных делителей.

41. Найдите число, которое делится на 30 и имеет 30 различных делителей.

42. Пусть $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_s$ — произведение первых s простых чисел.

a) Сколько делителей у числа A, которые не делятся на 2; на 3; на 2 и на 3?

b) Выпишем все делители числа A: $1, 2, 3, \ldots, A$ в порядке возрастания. Под рядом делителей выпишем ряд из $+1$ и -1 по следующему правилу: под 1 пишем $+1$; под числом, разлагающимся на четное число простых сомножителей, пишем $+1$, под остальными числами пишем -1. Докажите, что сумма чисел построенного ряда равна нулю.

43. Вычислите $\tau(7875)$ и $\sigma(7875)$.

44. Найдите $\tau(a^3)$, если

a) $\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1)$;

b) $a = p^\alpha q^\beta$, $\tau(a^2) = 15$, p, q — простые числа;

c) $a = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, $\tau(a^2) = 105$, p, q, r — простые числа.

45. Докажите, что $\varphi(a) = a\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\left(1 - \dfrac{1}{q}\right)$, где φ — функция Эйлера, $a = p^\alpha b^\beta$ и p, q — простые делители числа a.

46. Докажите, что функция Эйлера является мультипликативной и что справедлива формула:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) =$$

$$= p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \ldots p_s^{\alpha_s - 1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_s - 1)$$

для канонического разложения числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$.

47. Вычислите $\varphi(10^n)$, где $n \in \mathbb{N}$.

48. Пусть $\varphi(n) = 48$ и $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$. Найдите n.

49. Проверьте справедливость равенства: $\varphi(240) = \varphi(160)$.

50. Найдите условия, при которых $\varphi(2x) = \varphi(3x)$, где $x \in \mathbb{N}$.

51. Покажите невозможность равенства $\varphi(2x) = \varphi(5x)$, где $x \in \mathbb{N}$.

52. Докажите равенство: $\sum\limits_{n \,\vdots\, d} \varphi(d) = n$.

ГЛАВА 3

СОВЕРШЕННЫЕ И ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

3.1. Порядок числа относительно функции

Пусть u — натуральное число, отличное от 1. Делитель d числа u называется *собственным*, если $d \neq u$.

Пусть u — натуральное число. Рассмотрим функцию $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, заданную следующим образом: $\eta(u)$ — сумма всех собственных делителей числа u, если $u \neq 1$, и $\eta(1) = 1$.

Пример 20. $\eta(16) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

Задача 53. *Найдите $\eta(p^2)$, где p — простое число.*

Так как число p простое, то делителями числа p^2 являются только числа $1, p, p^2$. Тогда $\eta(p^2) = 1 + p$. ■

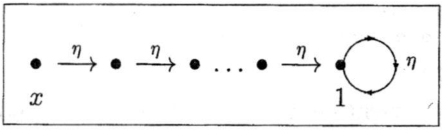
Если для натурального числа u, отличного от 1, найдется такое натуральное число n, что $\eta^n(u) = u$ и для любого натурального k, меньшего n, $\eta^k(u) \neq u$, то число n будем называть *порядком числа u относительно функции η*. В противном случае порядок числа u будем считать равным 0. В частности, у числа 1 порядок равен 0. Порядок числа u будем обозначать $\operatorname{ord}_\eta(u)$.

Если x — число порядка $n \in \mathbb{N}$ относительно функции η и $x_2, x_3, \ldots, x_n$ — образы числа x под действием функций $\eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}$ соответственно и $\eta^n(x) = x$, то графически это будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{tikzcd} \underset{x}{\bullet} \arrow[r, "\eta"] & \underset{x_2}{\bullet} \arrow[r, "\eta"] & \underset{x_3}{\bullet} \cdots \underset{x_{n-1}}{\bullet} \arrow[r, "\eta"] & \underset{x_n}{\bullet} \arrow[lll, bend right, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Задача 54. *Докажите, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\eta^k(u) = 1$, то $\operatorname{ord}_\eta(u) = 0$.*

Графическое истолкование этой задачи следующее:



Задача 55. *Докажите, что если для некоторого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство* $\eta^k(u) = p$, *где* p *— простое число, то* $\operatorname{ord}_\eta(u) = 0$.

Заметим, что *если число* u *является числом порядка* n *относительно функции* η *и* $\operatorname{orb}_\eta(u) = \{\eta^k(u) | k \in \mathbb{N}\}$ *(это множество называют орбитой числа* u*), то при* $n > 0$ $|\operatorname{orb}_\eta(u)| = \operatorname{ord}_\eta(u)$ *и для любого числа* $v \in \operatorname{orb}_\eta(u)$ *справедливо:* $\operatorname{ord}_\eta(v) = \operatorname{ord}_\eta(u)$ *и* $\operatorname{orb}_\eta(v) = \operatorname{orb}_\eta(u)$.

Рассмотрим примеры порядков элементов чисел.

Пример 21. $\operatorname{ord}_\eta(1) = 0$.

Это следует из определения функции η. ∎

Пример 22. $\operatorname{ord}_\eta(28) = 1$.

$u = 28$.
Собственные делители числа 28: 1, 2, 4, 7, 14.
$\eta(28) = 28$.
Значит, $\eta(u) = u$. Следовательно, $\operatorname{ord}_\eta(28) = 1$. ∎

Пример 23. $\operatorname{ord}_\eta(17296) = 2$.

$u = 17296$.
Собственные делители числа 17296: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, 8648.
$\eta(17296) = 18416$.
Собственные делители числа 18416: 1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208.
$\eta(18416) = 17296$.
Значит, $\eta^2(u) = u$. Следовательно, $\operatorname{ord}_\eta(17296) = 2$. ∎

Пример 24. $\operatorname{ord}_\eta(12496) = 5$.

$u = 12496$.
Собственные делители числа 12496: 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 44, 71, 88, 142, 176, 284, 568, 781, 1136, 1562, 3124, 6248.

$\eta(12496) = 14288$.

Собственные делители числа 14288: 1, 2, 4, 8, 16, 19, 38, 47, 76, 94, 152, 188, 304, 376, 752, 893, 1786, 3572, 7144.

$\eta(14288) = 15472$.

Собственные делители числа 15472: 1, 2, 4, 8, 16, 967, 1934, 3868, 7736.

$\eta(15472) = 14536$.

Собственные делители числа 14536: 1, 2, 4, 8, 23, 46, 79, 92, 158, 184, 316, 632, 1817, 3634, 7268.

$\eta(14536) = 14264$.

Собственные делители числа 14264: 1, 2, 4, 8, 1783, 3566, 7132.

$\eta(14264) = 12496$.

Значит, $\eta^5(u) = u$. Следовательно, $\mathrm{ord}_\eta\,(12496) = 5$. ∎

Пример 25. $\mathrm{ord}_\eta\,(14316) = 28$.

$u = 14316$.

Собственные делители числа 14316: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 1193, 2386, 3579, 4772, 7158.

$\eta(14316) = 19116$.

Собственные делители числа 19116: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 59, 81, 108, 118, 162, 177, 236, 324, 354, 531, 708, 1062, 1593, 2124, 3186, 4779, 6372, 9558.

$\eta(19116) = 31704$.

Собственные делители числа 31704: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 1321, 2642, 3963, 5284, 7926, 10568, 15852.

$\eta(31704) = 47616$.

Собственные делители числа 47616: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 31, 32, 48, 62, 64, 93, 96, 124, 128, 186, 192, 248, 256, 372, 384, 496, 512, 744, 768, 992, 1488, 1536, 1984, 2976, 3968, 5952, 7936, 11904, 15872, 23808.

$\eta(47616) = 83328$.

Собственные делители числа 83328: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 31, 32, 42, 48, 56, 62, 64, 84, 93, 96, 112, 124, 128, 168, 186, 192, 217, 224, 248, 336, 372, 384, 434, 448, 496, 651, 672, 744, 868, 896, 992, 1302, 1344, 1488, 1736, 1984, 2604, 2688, 2976, 3472, 3968, 5208, 5952, 6944, 10416, 11904, 13888, 20832, 27776, 41664.

$\eta(83328) = 177792$.

Собственные делители числа 177792: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 384, 463, 926, 1389, 1852, 2778, 3704, 5556, 7408, 11112, 14816, 22224, 29632, 44448, 59264, 88896.

$\eta(177792) = 295488$.

Собственные делители числа 295488: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 19, 24, 27, 32, 36, 38, 48, 54, 57, 64, 72, 76, 81, 96, 108, 114, 144, 152, 162, 171, 192, 216, 228, 243, 288, 304, 324, 342, 432, 456, 486, 513, 576, 608, 648, 684, 864, 912, 972, 1026, 1216, 1296, 1368, 1539, 1728, 1824, 1944, 2052, 2592, 2736, 3078, 3648, 3888, 4104, 4617, 5184, 5472, 6156, 7776, 8208, 9234, 10944, 12312, 15552, 16416, 18468, 24624, 32832, 36936, 49248, 73872, 98496, 1477 44.

$\eta(295488) = 629072$.

Собственные делители числа 629072: 1, 2, 4, 8, 16, 39317, 78634, 157268, 314536.

$\eta(629072) = 589786$.

Собственные делители числа 589786: 1, 2, 294893.

$\eta(589786) = 294896$.

Собственные делители числа 294896: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112, 2633, 5266, 10532, 18431, 21064, 36862, 42128, 73724, 147448.

$\eta(294896) = 358336$.

Собственные делители числа 358336: 1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 32, 44, 64, 88, 176, 352, 509, 704, 1018, 2036, 4072, 5599, 8144, 11198, 16288, 22396, 32576, 44792, 89584, 179168.

$\eta(358336) = 418904$.

Собственные делители числа 418904: 1, 2, 4, 8, 52363, 104726, 209452.

$\eta(418904) = 366556$.

Собственные делители числа 366556: 1, 2, 4, 91639, 183278.

$\eta(366556) = 274924$.

Собственные делители числа 274924: 1, 2, 4, 13, 17, 26, 34, 52, 68, 221, 311, 442, 622, 884, 1244, 4043, 5287, 8086, 10574, 16172, 21148, 68731, 137462.

$\eta(274924) = 275444$.

Собственные делители числа 275444: 1, 2, 4, 13, 26, 52, 5297, 10594, 21188, 68861, 137722.

$\eta(275444) = 243760$.

Собственные делители числа 243760: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 16, 20, 22, 40, 44, 55, 80, 88, 110, 176, 220, 277, 440, 554, 880, 1108, 1385, 2216, 2770, 3047, 4432, 5540, 6094, 11080, 12188, 15235, 22160, 24376, 30470, 48752, 60940, 121880.

$\eta(243760) = 376736$.

Собственные делители числа 376736: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 61, 122, 193, 244, 386, 488, 772, 976, 1544, 1952, 3088, 6176, 11773, 23546, 47092, 94184, 188368.

$\eta(376736) = 381028$.

Собственные делители числа 381028: 1, 2, 4, 95257, 190514.

$\eta(381028) = 285778$.

Собственные делители числа 285778: 1, 2, 43, 86, 3323, 6646, 142889.

$\eta(285778) = 152990$.

Собственные делители числа 152990: 1, 2, 5, 10, 15299, 30598, 76495.

$\eta(152990) = 122410$.

Собственные делители числа 122410: 1, 2, 5, 10, 12241, 24482, 61205.

$\eta(122410) = 97946$.

Собственные делители числа 97946: 1, 2, 48973.

$\eta(97946) = 48976$.

Собственные делители числа 48976: 1, 2, 4, 8, 16, 3061, 6122, 12244, 24488.

$\eta(48976) = 45946$.

Собственные делители числа 45946: 1, 2, 22973.

$\eta(45946) = 22976$.

Собственные делители числа 22976: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 359, 718, 1436, 2872, 5744, 11488.

$\eta(22976) = 22744$.

Собственные делители числа 22744: 1, 2, 4, 8, 2843, 5686, 11372.

$\eta(22744) = 19916$.

Собственные делители числа 19916: 1, 2, 4, 13, 26, 52, 383, 766, 1532, 4979, 9958.

$\eta(19916) = 17716$.

Собственные делители числа 17716: 1, 2, 4, 43, 86, 103, 172, 206, 412, 4429, 8858.

$\eta(17716) = 14316$.

Значит, $\eta^{28}(u) = u$. Следовательно, $\mathrm{ord}_\eta\,(14316) = 28$. ■

Пример 26. $\mathrm{ord}_\eta\,(14) = 0$.

Действительно, $\eta(14) = 1 + 2 + 7 = 10$, $\eta^2(14) = \eta(10) = 1 + 2 + 5 = 8$, $\eta^3(14) = \eta(8) = 1 + 2 + 4 = 7$ — простое число, а значит, $\mathrm{ord}_\eta\,(14) = 0$.

Пример 27. $\mathrm{ord}_\eta\,(177792) = 28$.

Действительно, учитывая, что число 177792 получается из числа 14316 путем применения функции η пять раз, получаем, что $\eta^{23}(177792) = 14316$

и $\eta^5(14316) = 177792$, а значит, $\eta^{28}(177792) = 177792$. Следовательно, $\mathrm{ord}_\eta\,(177792) = \mathrm{ord}_\eta\,(14316) = 28$.

Числа порядков 1 и 2 были известны еще Пифагору: такими числами являлись, например, 6, 28 (с порядком 1) и 220 (с порядком 2). Числа же 12496 и 14316 с конечными порядками 5 и 28 соответственно нашел французский математик Поль Пуле в 1918 году. А вот чисел с порядком 3 до сих пор найти не удалось.

Проблем, связанных с функцией η, достаточно много. Например, вопрос о существовании натуральных чисел с "бесконечным порядком" относительно функции η:

существует ли такая последовательность натуральных чисел, отличных от числа 1, для которых выполняются условия, заданные графом:

$$\bullet \to \bullet \to \bullet \ldots \bullet \to \bullet \ldots,$$

где точки — натуральные числа с порядком 0 относительно функции η, а стрелки — действие функции η?

Задача 56. *Существует ли такая последовательность натуральных чисел, отличных от 1, для которых выполняются условия, заданные графом:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 &&&&&& \bullet & \to & \bullet \ldots \bullet & \to & \bullet \\
 &&&&&& \uparrow &&&& \downarrow \\
\bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \ldots \bullet & \to & \bullet &&&& \bullet, \\
 &&&&&& \uparrow &&&& \downarrow \\
 &&&&&& \bullet & \leftarrow & \bullet \ldots \bullet & \leftarrow & \bullet
\end{array}$$

где точки — натуральные числа, отличные от числа 1, а стрелки — действие функции η?

Покажем, что таким свойством обладают числа 177791^2 и 152989^2.

Эти числа выбраны не случайно. Числа 177791 и 152989, как нетрудно проверить, являются простыми. Тогда $\eta(177791^2) = 1 + 177791 = 177792$ и $\eta(152989) = 1 + 152989 = 152990$, а числа 177792 и 152990 получаем из числа 14316, применяя несколько раз функцию η:

$14316 \to 19116 \to 31704 \to 47616 \to 83328 \to \mathit{177792} \to 295488 \to$
$\to 629072 \to 589786 \to 294896 \to 358336 \to 418904 \to 366556 \to 274924 \to$
$\to 275444 \to 243760 \to 376736 \to 381028 \to 285778 \to \mathit{152990} \to 122410 \to$
$\to 97946 \to 48976 \to 45946 \to 22976 \to 22744 \to 19916 \to 17716 \to$
$\to 14316 \to \ldots$

Тогда получим граф:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\circ_1 & \to \bullet_1 & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & \to \bullet & & \\
& \uparrow & & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
& \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow \bullet & \leftarrow & \bullet_2 & \leftarrow \circ_2, &
\end{array}$$

в котором стрелки соответствуют действию функции η, точки $\bullet_1$ и $\bullet_2$ сопоставлены числам 177792 и 152990 соответственно и все остальные точки $\bullet$ сопоставлены числам, получающимся из числа 177792 последовательным действием функции η, а точки $\circ_1$ и $\circ_2$ сопоставлены числам $177791^2 = (177792-1)^2$ и $152989^2 = (152990-1)^2$ соответственно. ∎

Задача 57. *Найдите* $\mathrm{ord}_\eta\,(177791^2)$ *и* $\mathrm{ord}_\eta\,(152989^2)$.

Задача 58. *Найдите* $\mathrm{ord}_\eta\,(283^2)$.

Понятие порядка числа можно аналогичным образом дать и относительно других функций. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $\Upsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция, заданная следующим образом. Пусть $u = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое представление натурального числа u. Будем считать, что $\Upsilon(u) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_s p_s + 1$. Например,

$$\Upsilon(12) = \Upsilon(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 + 3 + 1 = 8.$$

Тогда порядком натурального числа $u \neq 1$ относительно функции Υ называется наименьшее натуральное число n такое, что $\Upsilon^n(u) = u$, в противном случае порядок равен 0 и обозначается $\mathrm{ord}_\Upsilon\,(u)$. В частности, порядок числа 1 равен 0. Например, $\mathrm{ord}_\Upsilon\,(8) = 2$, так как $\Upsilon(8) = \Upsilon(2^3) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ и $\Upsilon(7) = 7 + 1 = 8$. Для числа же 12 его порядок относительно функции Υ равен 0, так как $\Upsilon^n(12)$ попеременно равняется либо 7, либо 8 для всех натуральных n:

$$\Upsilon(12) = 8, \quad \Upsilon(8) = 7, \quad \Upsilon(7) = 8, \quad \Upsilon(8) = 7, \ldots$$

Аналогично для функции Υ можно задать следующий вопрос:

существует ли такая последовательность натуральных чисел, отличных от 1, для которых выполняются условия, заданные графом:

$$\bullet \to \bullet \to \bullet \ldots \bullet \to \bullet \ldots,$$

где точки — натуральные числа с порядком 0 относительно функции Υ, а стрелки — действие функции Υ?

В этом случае число, соответствующее первой левой точке в данном графе, называют числом с "бесконечным порядком" относительно функции Υ. (На самом деле, исходя из определения, порядок этого числа равен 0). Попробуем ответить на поставленный вопрос.

Задача 59. *Докажите, что для любого натурального числа u, большего 6, справедливо неравенство $\Upsilon^n(u) \leq u + 1$ для всех натуральных n, больших 2.*

Так как для любого $u \in \mathbb{N}$, большего 6, числа $\Upsilon^0(u)$, $\Upsilon^1(u)$, $\Upsilon^2(u)$, ... принадлежат отрезку $[1; u+1]$, то функция Υ принимает какое-то значение дважды, а поэтому с некоторого момента последовательность, составленная из этих чисел, является периодической.

Значит, применяя к некоторому натуральному числу последовательно функцию Υ, получаем последовательность натуральных чисел, которая, начиная с некоторого момента, будет периодической. Следовательно, все числа относительно функции Υ либо имеют порядок, равный 0, либо их порядок есть некоторое натуральное число, то есть натуральных чисел с "бесконечным порядком" относительно функции Υ не существует.

3.2. Функция суммы собственных делителей

Видим, что функции η и σ связаны. Действительно,
1) если $x = 1$, то $\eta(x) = \sigma(x) = 1$;
2) если $x \neq 1$, то $\eta(x) = \sigma(x) - x$.

Заметим, что функция η не является мультипликативной; например, $\eta(3 \cdot 5) \neq \eta(3) \cdot \eta(5)$, так как $\eta(3 \cdot 5) = 1 + 3 + 5 = 9$, а $\eta(3) \cdot \eta(5) = 1 \cdot 1 = 1$. На самом деле, для любого правильного произведения uv справедливо неравенство:

$$\eta(uv) \geq \eta(u)\eta(v).$$

При этом, $\eta(uv) = \eta(u)\eta(v)$ тогда и только тогда, когда $u = 1$ или $v = 1$.

Действительно, если $u = 1$, а v — любое число, то

$$\eta(v) = \eta(1 \cdot v) \quad \text{и} \quad \eta(v) = 1 \cdot \eta(v) = \eta(1) \cdot \eta(v),$$

то есть

$$\eta(1 \cdot v) = \eta(1) \cdot \eta(v).$$

Пусть теперь ни u, ни v не равны 1. Тогда $\sigma(u) = \eta(u) + u$ и $\sigma(v) = \eta(v) + v$. Так как функция σ является мультипликативной и произведение uv является правильным, то $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$. Тогда

$$\eta(uv)+uv = (\eta(u)+u)(\eta(v)+v), \quad \eta(uv)+uv = \eta(u)\eta(v)+uv+u\eta(v)+\eta(u)v,$$

$$\eta(uv) = \eta(u)\eta(v) + u\eta(v) + v\eta(u).$$

Заметим, что $u\eta(v) + v\eta(u) > 0$ для всех u, v (даже равных 1). Значит,

$$\eta(uv) > \eta(u)\eta(v).$$

Если предположить, что $u \neq 1$ и $v \neq 1$, но $\eta(uv) = \eta(u)\eta(v)$, то сразу же приходим к противоречию. Значит, $\eta(uv) = \eta(u)\eta(v)$ тогда и только тогда, когда $u = 1$ или $v = 1$.

Следовательно, $\eta(uv) \geq \eta(u)\eta(v)$ для всех натуральных u, v.

Если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое представление числа u, то

$$\eta(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) > \eta(p_1^{\alpha_1})\eta(p_2^{\alpha_2}) \dots \eta(p_s^{\alpha_s}).$$

Далее, так как функция σ вычисляется достаточно просто исходя из канонического представления числа x, от которого считается эта функция, то и для вычисления значения функции η числа x необязательно находить все его собственные делители; нужно лишь знать каноническое разложение числа x на простые множители.

Обычно при разложении числа на множители находят его простые делители (то есть делители, являющиеся простыми числами). Для этого выбранное число последовательно делят на 2,3,5,7 и так далее. При этом применяют следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть q — наименьший простой делитель числа A. Тогда $q \leq \sqrt{A}$.*

Теорема 3.2. *Если число A не делится ни на одно простое число, не превосходящее числа $\sqrt{A}$, то число A является простым.*

Пример 28. *Число 127 является простым.*

Пусть $A = 127$. Тогда $\sqrt{127} < 12$. Выпишем все простые числа, меньшие 12: 2,3,5,7,11. Путем выполнения операции деления показывается, что число 127 не делится ни на одно из выписанных чисел, а значит, число 127 является простым. ■

Задача 60. *Докажите сформулированные теоремы.*

Пример 29. $\mathrm{ord}_\eta(12\,496) = 5$.

Имеем:

$x_1 = 12\,496 = 2^4 \cdot 11 \cdot 71$;

$$\eta(x_1) = \sigma(x_1) - x_1 = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{11^2-1}{11-1} \cdot \frac{71^2-1}{71-1} - 12496 = 26784 - 12496 = 14288;$$

$x_2 = 14\,288 = 2^4 \cdot 19 \cdot 47$;

$$\eta(x_2) = \sigma(x_2) - x_2 = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{19^2-1}{19-1} \cdot \frac{47^2-1}{47-1} - 14288 = 29760 - 14288 = 15472;$$

$x_3 = 15\,472 = 2^4 \cdot 967$;

$$\eta(x_3) = \sigma(x_3) - x_3 = \frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{967^2-1}{967-1} - 15472 = 30009 - 15472 = 14536;$$

$x_4 = 14\,536 = 2^3 \cdot 23 \cdot 79$;

$$\eta(x_4) = \sigma(x_4) - x_4 = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{23^2-1}{23-1} \cdot \frac{79^2-1}{79-1} - 14536 = 28800 - 14536 = 14264;$$

$x_5 = 14\,264 = 2^3 \cdot 1783$;

$$\eta(x_5) = \sigma(x_5) - x_5 = \frac{2^4-1}{2-1} \cdot \frac{1783^2-1}{1783-1} - 14264 = 26760 - 14264 = 12496;$$

Следовательно, $\eta^5(12496) = 12496$, а значит, $\mathrm{ord}_\eta(12496) = 5$. ∎

3.3. Уравнения $\eta(x) = a$

В данном параграфе рассмотрим решения некоторых уравнений вида $\eta(x) = a$ относительно x.

Уравнение $\eta(x) = 1$ очевидно имеет бесконечно много решений, так как его решением является любое простое число, а простых чисел — бесконечно много. Решением данного уравнения также является и число 1. Других же решений нет, так как лишь у любого простого числа один собственный делитель — 1.

Рассмотрим уравнение $\eta(x) = 2$. Если u — решение данного уравнения, то сумма всех его *различных* собственных делителей должна равняться 2. Но число 2 не представляется в виде суммы различных натуральных чисел, то есть уравнение $s + t = 2$ имеет лишь единственное решение $s = t = 1$. Следовательно, уравнение $\eta(x) = 2$ решений не имеет, а значит, не существует ни одного натурального числа u, образом которого являлось бы число 2.

Легко показать, что у уравнения $\eta(x) = 3$ есть лишь единственное решение: $x = 4$, так как только у числа 4 числа 1 и 2, которые в сумме дают число 3, являются собственными делителями.

Рассмотрим следующую задачу, которая может быть полезна в решении уравнений вида $\eta(x) = a$.

Задача 61. *Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_t$ — все различные делители числа u, включая числа 1 и u. Докажите, что $d_1 d_2 \ldots d_t = u^{t/2}$.*

Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_t$ — все различные делители числа u, включая числа 1 и u. Тогда и числа $\dfrac{u}{d_1}, \dfrac{u}{d_2}, \ldots, \dfrac{u}{d_t}$ также являются *всеми различными* делителями числа u. Действительно, этих чисел t, что совпадает с количеством всех делителей числа u, и если предположить, что $\dfrac{u}{d_i} = \dfrac{u}{d_j}$, то $d_i = d_j$. Другими словами,

$$\{d_1; d_2; \ldots; d_t\} = \left\{\frac{u}{d_1}; \frac{u}{d_2}; \ldots; \frac{u}{d_t}\right\}.$$

Тогда

$$d_1 d_2 \ldots d_t = \frac{u}{d_1} \cdot \frac{u}{d_2} \cdot \ldots \cdot \frac{u}{d_t}$$

или

$$(d_1 d_2 \ldots d_t)^2 = u^t,$$

значит, $d_1 d_2 \ldots d_t = u^{t/2}$. ∎

Задача 62. *Существует ли натуральное число, собственными делителями которого являлись бы числа 1, 2, 3, 4, 6, 12?*

Пусть x — искомое число. Тогда

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 \cdot x = x^{7/2} \quad \text{или} \quad x^5 = 1728^2.$$

Но корень 5-й степени из числа 1728^2 не извлекается в целых числах.

Следовательно, не существует натурального числа, собственными делителями которого являются указанные числа. ∎

Рассмотрим уравнение $\eta(x) = 4$. Число 4 лишь единственным способом представляется в виде суммы различных натуральных чисел: $1 + 3 = 4$.

Тогда если u — решение уравнение $\eta(x) = 4$, то лишь числа 1,3 и u являются делителями числа u. Тогда справедливо равенство: $1 \cdot 3 \cdot u = u^{3/2}$. Получили уравнение $9u^2 = u^3$, решением которого в натуральных числах является только число 9. И действительно, у числа 9 лишь два собственных делителя: 1 и 3.

Задача 63. *Решите уравнение* $\eta(x) = 5$.

Задача 64. *Решите уравнение* $\eta(x) = 28$.

Пусть u — решение данного уравнения. Заметим, что число u не равно произведению только двух простых чисел.

Для решения уравнения $\eta(x) = 28$ воспользуемся следующими неравенствами: если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое представление числа u, то

$$\eta(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}) > \eta(p_1^{\alpha_1})\eta(p_2^{\alpha_2}) \dots \eta(p_s^{\alpha_s}) \geq 1 + p_1 + p_2 + \dots p_s + p_1 p_2 \dots p_s.$$

Тогда

$$28 > 1 + p_1 + p_2 + \dots p_s + p_1 p_2 \dots p_s.$$

Так как $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 28$, то $s \leq 2$. Легко проверить, что число 28 нельзя представить в виде суммы $1 + p + p^2 + \dots$ степеней простого числа p. Тогда $s \leq 2$. Значит, $s = 2$. Следовательно, $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, где $p_1 < p_2$.

Заметим, что $1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 \leq 28$ или $(1 + p_1)(1 + p_2) \leq 28$. Решением последнего неравенства являются пары простых чисел: $(2; 3)$, $(2; 5)$, $(2; 7)$ и $(3; 5)$ (напомним, что $p_1 < p_2$).

По определению и условию $\eta(u) = 1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 + \dots = 28$. Так как для всех указанных пар величина $1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2$ меньше 28, то среди делителей числа u должно быть выражение p_1^2 или p_2^2, то есть

$$\eta(u) = 1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 + p_1^2 + \dots = 28$$

или

$$\eta(u) = 1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 + p_2^2 + \dots = 28.$$

Пары $(2; 3)$, $(2; 5)$ и $(3; 5)$ не подходят, так как в этом случае левые части последних равенств меньше 28. Решением является пара простых чисел $(2; 7)$, то есть $p_1 = 2$ и $p_2 = 7$. При этом $1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 + p_1^2 = 28$.

При добавлении же в левые части равенств других слагаемых, зависящих от p_1 и p_2, эти части становятся больше 28.

Следовательно, число 28 является лишь единственным решением уравнения $\eta(x) = 28$. ∎

Задача 65. *Решите уравнение $\eta(x) = 6$. Каковы порядки относительно функции η чисел, являющихся решениями этого уравнения?*

Видим, что для определения приближенного (оценка сверху) количества различных простых делителей числа нужно перемножать последовательные простые числа, начиная с числа 2, до тех пор, пока не получим в результате число, большее данного.

Пример 30. *У числа 1024 не более четырех различных простых делителей.*

Действительно, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 < 1024 < 2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, а значит, у числа 1024 не более четырех различных делителей.

На самом же деле у числа лишь один простой делитель — 2, так как $2^{10} = 1024$. ■

При рассмотрении уравнений $\eta(x) = a$, решаемых относительно x, для больших чисел a возникает вопрос о других способах их решений. Возможен метод перебора для решения таких уравнений как универсальный метод решения многих задач. Но для его использования необходимо знать границы изменения величин. Попробуем найти такие границы для числа x в уравнении $\eta(x) = a$.

Если $a = 1$ в уравнении $\eta(u) = a$, то u — простое число или 1.

Если $a \neq 1$ в уравнении $\eta(u) = a$, то u — составное число. Пусть $1, d_1, d_2, \ldots, d_t, u$ — все различные делители числа u, причем $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_t < u$. Тогда

$$1 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_t \cdot u = u^{(t+2)/2} \quad \text{или} \quad d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_t = u^{t/2}.$$

Так как $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_t \leq \underbrace{d_t \cdot d_t \cdot \ldots \cdot d_t}_{t \text{ раз}} = (d_t)^t$, то

$$u^{t/2} \leq (d_t)^t \quad \text{или} \quad \sqrt{u} \leq d_t,$$

то есть наибольший собственный делитель составного числа не меньше корня квадратного из этого числа.

Учитывая, что число d_t входит, как слагаемое, в запись выражения $\eta(u)$, получаем, что $\eta(u) = 1 + d_t + \ldots \geq 1 + d_t \geq 1 + \sqrt{u}$. Тогда $u \leq (\eta(u) - 1)^2$.

Далее, пусть $d = d_t$ — наибольший собственный делитель числа u. Тогда $u = dv$, где $v \geq 2$. Значит, $u = dv \geq d \cdot 2$, следовательно, $d \leq \dfrac{u}{2}$, то есть наибольший собственный делитель составного числа не больше половины этого числа.

Все собственные делители числа u принадлежат отрезку $[1; d]$. Тогда очевидно будет справедливо неравенство: $\eta(u) \le 1+2+\ldots+d$, где в правой части стоит не что иное, как сумма членов арифметической прогрессии. Тогда $\eta(u) \le 1+2+\ldots+d = \dfrac{1+d}{2}\cdot d$. Учитывая, что $d \le \dfrac{u}{2}$, получаем верное неравенство $\eta(u) \le \dfrac{1+\frac{u}{2}}{2}\cdot\dfrac{u}{2}$ или $\eta(u) \le \dfrac{u^2+2u}{8}$.

Пусть $\eta(u) = a$. Тогда $a \le \dfrac{u^2+2u}{8}$, окончательно $u^2+2u-8a \ge 0$. Рассматривая последнее неравенство как квадратичное, получим верное неравенство: $u \ge \sqrt{8a+1}-1$.

Последнее неравенство есть оценка снизу для числа x в уравнении $\eta(x) = a$, зависящая также только от числа a.

Итак, если число a не равняется 1, то для x из уравнения $\eta(x) = a$ справедливы оценки:

$$\sqrt{8a+1}-1 \le x \le (a-1)^2.$$

Получили, что

- если $\eta(x) = 1$, то $x = 1$ или x — простое число;
- если $\eta(x) = a$, где $a \ne 1$, то x — составное число и $\sqrt{8a+1}-1 \le x \le (a-1)^2$.

Задача 66. *Решите уравнение $\eta(x) = 6$.*

В данном случае $a = 6$. Тогда

$$\sqrt{8\cdot 6+1}-1 \le x \le (6-1)^2 \quad \text{или} \quad 6 \le x \le 25.$$

Следовательно, претендуют на решение уравнения $\eta(x) = 6$ числа: 6,7 и так далее до 25; всего 20 чисел. Используя метод перебора, получаем, что решением уравнения $\eta(x) = 6$ являются $x = 6$ и $x = 25$ и только они. ■

Заметим, что решениями данного уравнения являются верхняя и нижняя оценки множества решений уравнения. Это говорит о том, что улучшить оценки множества решений уравнения $\eta(x) = a$ для произвольного a нет возможности.

Задача 67. *Решите уравнение* $\eta(x) = 28$.

Задача 68. *Решите уравнение* $\eta(x) = 14$.

В этом случае получаем оценки: $9 \leq x \leq 169$. При этом получим, что число, являющееся верхней гранью, является решением данного уравнения: $\eta(169) = 1+13 = 14$. Другим решением является число 22: $\eta(22) = 1+2+11$. Графически это выглядит следующим образом:

$$\underset{22}{\bullet} \xrightarrow{\eta} \underset{14}{\bullet} \xleftarrow{\eta} \underset{169}{\bullet}$$

Итак, решением уравнения $\eta(x) = 14$ являются числа 22 и 169. ∎

Задача 69. *Докажите, что в уравнении* $\eta(x) = p + 1$, *где* p *— простое число, одним из решений (но не обязательно единственным!) всегда является верхняя грань предложенных оценок.*

Если рассмотреть уравнение $\eta(x) = 316$, то для числа x получим оценки: $49 \leq x < 99\,225$. На самом деле у данного уравнения всего пять решений: 192, 304, 344, 412, 626. Поэтому осуществлять перебор вариантов для нахождения решений уравнения $\eta(x) = 316$ "вручную" достаточно затруднительно.

Задача 70. *Решите уравнение* $\eta(x) = 11$.

3.4. Совершенные числа

Если $\mathrm{ord}_\eta(x) = 1$, то число x называют *совершенным*. Следовательно, $\eta(A) = A$.

Пример 31. *Число 28 является совершенным.*

Так как $\mathrm{ord}_\eta(28) = 1$, то число 28 является совершенным. ∎

Пусть A — число совершенное. Тогда $\eta(A) = A$.

Так как число 1 не является совершенным, то $A \neq 1$. Тогда $\eta(A) = \sigma(A) - A$ и $A = \sigma(A) - A$. Следовательно, $\sigma(A) = 2A$.

Обратно, пусть $\sigma(A) = 2A$. Тогда $\sigma(A) - A = A$.

Так как $\sigma(1) = 1$, то $A \neq 1$, а значит, $\eta(A) = \sigma(A) - A$ или $\eta(A) = A$. Значит, $\operatorname{ord}_\eta(A) = 1$. Следовательно, A — совершенное число.

Тем самым получили следующую теорему.

Теорема 3.3. *Число A является совершенным тогда и только тогда, когда $\sigma(A) = 2A$.*

Пример 32. *Число 8128 является совершенным.*

Имеем:

$$\sigma(8128) = \sigma(2^6 \cdot 127) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{127^2 - 1}{127 - 1} = 16256 = 2 \cdot 8128.$$

Следовательно, по критерию совершенности числа получаем, что число 8128 — совершенное. ■

Вообще говоря, первыми восьмью совершенными числами являются

- $6 = 2 \cdot (2^2 - 1) = 2 \cdot 3$;
- $28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1) = 4 \cdot 7$;
- $496 = 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31$;
- $8\,128 = 2^6 \cdot (2^7 - 1) = 64 \cdot 127$;
- $33\,550\,336 = 2^{12} \cdot (2^13 - 1) = 2^{12} \cdot 8191$;
- $8\,589\,869\,056, 137\,438\,691\,328 = 2^{16} \cdot (2^{17} - 1) = 2^{16} \cdot 131\,071$;
- $137\,438\,691\,328 = 2^{18} \cdot (2^{19} - 1) = 2^{18} \cdot 524\,237$;
- $2\,305\,843\,008\,139\,952\,128 = 2^{30} \cdot (2^{31} - 1) = 2^{30} \cdot 2\,147\,483\,647$.

Можно построить достаточно большой список совершенных чисел. До 1952 года были известны только первые 12 совершенных чисел. С 1952 года начинается "эра компьютерных вычислений", в которую было открыто множество других совершенных чисел с весьма большим количеством цифр. Например, в сентябре 1957 года Риселем было найдено восемнадцатое совершенное число $2^{3216} \cdot (2^{3217} - 1)$, содержащее 2000 цифр. В следующей таблице приведены сведения о количестве цифр у первых 18 совершенных чисел:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кол-во цифр	1	2	3	4	8	10	12	19	37

№	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Кол-во цифр	54	65	77	314	366	770	1327	1373	1937

3.5. Евклид о совершенных числах

"Начала" — самая знаменитая из дошедших до нас греческих книг, написанная в Александрии около 300 г. до н.э., автором которой является Евклид.

"Начала" разделены на 13 книг. Три из них посвящены теории чисел, остальные — геометрии плоскости и трехмерных тел, а также построению вещественных чисел и их свойствам. Обсуждение теоретико-числовых проблем начинается в книге VII. В ней содержатся определения простых и составных чисел и метод вычисления наибольшего общего делителя путем последовательных делений. Книга VIII посвящена в основном геометрическим прогрессиям.

В конце книги IX своих "Начал" — последней из трех, посвященных арифметике, Евклид, доказав бесконечность числа простых чисел, переходит к совершенным числам. Название "совершенное число" встречается и у Платона, в частности, в том месте "Государства", где он пользуется им в туманных рассуждениях по евгенике в связи с так называемым "брачным" числом.

Совершенным, по Евклиду, называется такое число, которое равно сумме всех своих делителей (исключая, конечно, из их состава само число).

Ясно, что ни одно простое число не может быть совершенным. Простое число p делится лишь на 1 и на p, а так как, согласно определению совершенного числа, само число не включается в число его делителей, то сумма всех делителей оказывается здесь всегда равной 1 и поэтому не может быть равной p.

Вообще говоря, никакая натуральная степень простого числа p также не может быть числом совершенным. Действительно, все собственные делители числа p^α, где α — натуральное число, большее 1, есть также степени числа p, а именно:

$$1, p, p^2, \ldots, p^{\alpha-1}.$$

Их сумма, согласно формуле суммы первых членов геометрической прогрессии, которую, кстати, Евклид и выводит как раз по этому поводу, равна

$$1 + p^1 + p^2 + \ldots + p^{\alpha-1} = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1}.$$

Так как число p — простое и $\alpha > 1$, то справедливо неравенство:

$$\frac{p^\alpha - 1}{p - 1} < p^\alpha.$$

Следовательно, число p^α не является совершенным.

Евклид рассматривал на "совершенность" только числа A вида $p \cdot 2^s$, где s — натуральное число. Тогда

$$\sigma(p \cdot 2^s) = \frac{2^{s+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^2 - 1}{p - 1} = (2^{s+1} - 1)(p + 1).$$

Число A будет совершенным, если сумма всех его делителей (включая и само число A) будет равна $A + A$, то есть $2A$:

$$\sigma(p \cdot 2^s) = 2A.$$

Тогда

$$(2^{s+1} - 1)(p + 1) = 2p \cdot 2^s = 2^{s+1}p.$$

Отсюда получаем, что

$$2^{s+1}(p + 1) - (p + 1) = 2^{s+1}p, \quad 2^{s+1}(p + 1) - 2^{s+1}p = p + 1$$

или

$$2^{s+1} = p + 1, \quad p = 2^{s+1} - 1.$$

Следовательно, если простое число p имеет вид $p = 2^{s+1} - 1$, то число $A = 2^s(2^{s+1} - 1)$ является совершенным. Таким образом, Евклид получил следующий результат: *если от единицы откладывается сколько угодно последовательно* [пропорциональных] *чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся* [их] *совокупность сложенная не сделается первым* [простым числом; другими словами, Евклид предлагает образовать сумму $1+2+4+8+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1$, с тем, чтобы эта сумма явилась простым числом] *и* *вся совокупность, умноженная на последнее* [число], *произведет что-то, то возникшее* [число] *будет совершенным.*

Итак, предложение 36 из книги IX "Начал" Евклида утверждает, что если сумма

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = p$$

является простым числом, то число $2^n \cdot p$ будет совершенным.

Очевидно, что для доказательства этого утверждения Евклид пользовался другими рассуждениями, чем те, которые предложены выше.

Поскольку ясно, что собственными делителями числа $2^n \cdot p$ будут числа

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ \ 2^2,\ \ \ldots,\ 2^{n-1},\ \ 2^n, \\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \ldots,\ 2^{n-1}p, \end{array}$$

то доказательство утверждения 36 сводится к доказательству следующих двух утверждений:

1) других делителей, кроме как предъявленных, у числа $2^n \cdot p$ нет;

2) сумма делителей равна самому числу, то есть

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n \cdot p.$$

Первое утверждение у Евклида доказывается с помощью учения о четном и нечетном. (Исследователи Евклида давно обратили внимание на конец книги IX его "Начал" (предложения 21–34), который явно выпадал из общего контекста книги и выделялся своей архаичностью. Сегодня ни у кого не вызывает сомнения, что эта часть "Начал" есть не что иное, как целиком воспроизведенный фрагмент древнего пифагорейского учения о четном и нечетном.)

Второе утверждение легко доказать "наглядно" с помощью "камушек", как это часто делалось в древние времена.

В самом деле, так как по условию

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = p$$

и

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n \cdot p,$$

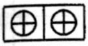
то

$$p + p(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n \cdot p$$

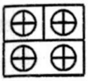
или

$$1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n.$$

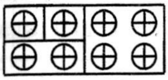
Сумма $1+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})$ действительно равна 2^n, и доказательство в прямом смысле можно изобразить следующим образом:



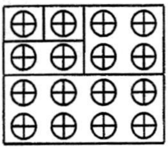
$$1+1=2;$$



$$1+(1+2)=4;$$



$$1+(1+2+4)=8;$$



$$1+(1+2+4+8)=16,$$

откуда и "видно" равенство $1+(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1})=2^n$ (на каждом шаге получаем, что новый результат в два раза больше предыдущего).

Заслуга Евклида в том, что он указал вид *некоторых* совершенных чисел:

$$A=2^s(2^{s+1}-1), \quad \text{где } 2^{s+1}-1 \text{ — простое число.}$$

Доказать же, что число A *наперед заданного вида* $2^s(2^{s+1}-1)$, где $2^{s+1}-1$ — простое число, является совершенным, достаточно легко, используя функцию σ. Действительно, учитывая, что функция σ является мультипликативной и числа $2^s, 2^{s+1}-1$ являются взаимно простыми, получаем:

$$\sigma(A)=\sigma(2^s(2^{s+1}-1))=\sigma(2^s)\sigma(2^{s+1}-1)=$$

$$=\frac{2^{s+1}-1}{2-1}\cdot(1+(2^{s+1}-1))=(2^{s+1}-1)2^{s+1}=2\cdot 2^s(2^{s+1}-1)=2A.$$

Значит, $\sigma(A)=2A$, следовательно, A — совершенное число.

Проведем эксперимент. В формулу $A=2^s(2^{s+1}-1)$ вместо s будем подставлять числа и посмотрим, какие при этом будут получаться совершенные числа. При этом число $2^{s+1}-1$ должно быть простым.

Пусть $p = 2^{s+1} - 1$ и $A = 2^s(2^{s+1} - 1)$. Составим следующую таблицу:

s	p	Число p — простое?	A	Число A — совершенное?
1	3	Да	6	Да
2	7	Да	28	Да
3	15	Нет	120	Нет
4	31	Да	496	Да
5	63	Нет	2016	Нет
6	127	Да	8128	Да

Видим, что полученный Евклидом результат порождает новую проблему: *для какого s число $2^{s+1} - 1$ является простым?*

Покажем, что одним из требований является простота числа $s + 1$.

Действительно, если бы число $s+1$ было составным, скажем, $s+1 = uv$, где $1 < u, v < s + 1$, то

$$2^{s+1} - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1.$$

Формулу суммы первых членов геометрической прогрессии можно записать в виде:

$$x^n - 1 = (x^{n-1} + \ldots + x + 1)(x - 1).$$

Подставляя в эту формулу $x = 2^u$ и $n = v$, получим:

$$(2^u)^v - 1 = ((2^u)^{v-1} + \ldots + (2^u) + 1)((2^u) - 1).$$

Тогда число $2^{s+1} - 1$ разлагается на два множителя, а значит, не является простым, что не так.

Следовательно, *если число $2^{s+1} - 1$ является простым, то и число $s+1$ является простым*; можно также сказать, что *если число $s + 1$ является составным, то и число $2^{s+1} - 1$ является составным.*

Обратное, вообще говоря, не верно. Например, число 11 (то есть $s = 10$) является простым, но число $2^{11} - 1$ простым не является, так как

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89.$$

Вот и все, что дает теорема Евклида. О том, что древние имели об этом предмете более обширные сведения, свидетельствуют разнообразнейшие источники. Прежде всего Ямвлих без всяких дальнейших пояснений сообщает о том, что, *кроме указанных Евклидом, никаких других четных совершенных чисел быть не может.* Было ли это доказано древними и каким именно способом — мы не знаем. Но это было точно доказано Леонардом Эйлером.

3.6. “Физический смысл” совершенных чисел

При выводе формулы совершенного четного числа $2^{p-1}(2^p-1)$ Евклид использовал геометрическую прогрессию с первым членом 1 и знаменателем 2: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ Эту связь лучше проследить на примере древней легенды.

Индийский царь Шерам позвал к себе изобретателя шахматной игры, своего подданного Сету, чтобы наградить его за остроумную выдумку. Сета, издеваясь над царем, потребовал за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зернышко, за другую — два зерна, за третью — четыре и так далее. Оказалось, что царь не был в состоянии выполнить скромное желание Сеты.

Для подсчета количества всех зерен на шахматной доске нужно найти сумму указанной выше геометрической прогрессии:

$$1+2+4+8+\ldots+2^{63}=2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

К сведению: такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с урожая планеты, поверхность которой примерно в 2000 раз больше всей поверхности Земли.

Вернемся к совершенным четным числам.

Если на каждой клетке шахматной доски мы выложим столько зерен пшеницы, сколько их причиталось бы за нее изобретателю шахмат, а затем снимем с каждой клетки по одному зерну, то число оставшихся зерен будет точно соответствовать выражению, стоящему в скобках в формуле Евклида, то есть выражению 2^p-1.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{42}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{51}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

		2^2	2^3		2^5		2^7
					2^{13}		
	2^{17}		2^{19}				
							2^{31}
					2^{61}		

Если это число простое (а таких чисел на шахматной доске девять), то, умножая его на число зерен на предыдущей клетке (то есть на 2^{p-1}), мы получим совершенное четное число! Тем самым получаем первые девять совершенных четных чисел.

3.7. Теорема Эйлера о совершенных четных числах

Утверждение, обратное утверждению Евклида, что *любое совершенное четное число A имеет вид:*

$$A = 2^s(2^{s+1} - 1),$$

где $2^{s+1} - 1$ — *простое число*, было доказано Леонардом Эйлером в восемнадцатом веке, однако статья с доказательством этого факта была опубликована лишь в 1849 году, через много лет после его смерти.

Рассмотрим одно из доказательств теоремы Эйлера.

Пусть A — совершенное четное число. Тогда число A можно записать в виде:

$$A = 2^s u,$$

где s, u — натуральные числа, причем u — нечетное число. Заметим, что число u не равно 1, так как степень простого числа не является совершенным числом.

Так как u — нечетное число, то $2^s u$ — правильное произведение, а значит,

$$\sigma(A) = \sigma(2^s)\sigma(u) = (2^{s+1} - 1)\sigma(u).$$

Так как число A — совершенное, то

$$\sigma(A) = 2A = 2 \cdot 2^s u = 2^{s+1}u.$$

Тогда получаем равенство:

$$(2^{s+1} - 1)\sigma(u) = 2^{s+1}u.$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$2^{s+1}\sigma(u) - \sigma(u) = 2^{s+1}u$$

или

$$2^{s+1}(\sigma(u) - u) = \sigma(u) = (\sigma(u) - u) + u,$$
$$2^{s+1}(\sigma(u) - u) - (\sigma(u) - u) = u,$$

окончательно:

$$(2^{s+1} - 1)(\sigma(u) - u) = u.$$

Тогда $u \vdots (\sigma(u) - u)$, то есть число $(\sigma(u) - u)$ — делитель числа u, а значит, оно входит в запись числа $\sigma(u)$ как слагаемое, то есть

$$\sigma(u) = (\sigma(u) - u) + u + x = \sigma(u) + x,$$

так как число u также входит в запись числа $\sigma(u)$ как слагаемое. (Здесь x — сумма остальных делителей числа u, если они есть, и $x = 0$ в противном случае.) Из равенства $\sigma(u) = \sigma(u) + x$ следует, что $x = 0$. Значит, у числа u всего два делителя: $(\sigma(u) - u)$ и u.

Среди делителей числа u есть 1. Учитывая, что $u \neq 1$, то $\sigma(u) - u = 1$. Значит, $\sigma(u) = u + 1$. Из равенства

$$(2^{s+1} - 1)(\sigma(u) - u) = u$$

получаем, что

$$u = 2^{s+1} - 1.$$

Учитывая, что у числа u всего два делителя: 1 и u, получаем, что число u является простым.

Таким образом, если A — совершенное четное число, то число A имеет вид:

$$A = 2^s(2^{s+1} - 1),$$

где $2^{s+1} - 1$ — простое число.

Получили, что из всех четных чисел совершенными являются те и только те, которые указаны Евклидом.

В решении некоторых вопросов, связанных с совершенными числами, не важно, является ли данное совершенное число четным или нечетным.

Задача 71. *Найдите все совершенные числа n, для которых $\sigma(\sigma(n))$ также является совершенным.*

Рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть n — нечетное совершенное число. Тогда $\sigma(n) = 2n$ и получаем, что

$$\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2n) = \sigma(2) \cdot \sigma(n) = 3 \cdot 2n = 6n.$$

Если $6n$ — совершенное число, то оно является четным совершенным числом, и значит, существует простое число p такое, что $6n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где $2^p - 1$ — нечетное простое число. Так как n — нечетное, то $p = 2$. Следовательно, $n = 1$. Но число 1 не является нечетным совершенным числом. Пришли к противоречию.

б) Пусть n — четное совершенное число. Тогда $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ — простые числа. И тогда

$$\sigma(\sigma(n)) = \sigma(2n) = \sigma(2^p(2^p-1)) = \sigma(2^p)\cdot\sigma(2^p-1) = (2^{p+1}-1)\cdot 2^p = 2^p\cdot(2^{p+1}-1).$$

Так как по условию задачи требуется, чтобы число $\sigma(\sigma(n))$ было числом совершенным, то число $2^{p+1}-1$ должно быть простым. Тогда числа p и $p+1$ должны быть простыми. Так как они последовательные, то они могут быть только числами 2 и 3. Следовательно, $n=6$ и $\sigma(\sigma(6))=28$.

Поэтому $n=6$ — единственное решение. ■

3.8. Остатки от деления совершенного четного числа

По всей видимости, "особые" числа должны обладать особыми свойствами. Это должно относиться и к совершенным числам. И действительно, совершенные числа обладают рядом замечательных свойств, о которых говорилось и будет говориться в данной книге.

Было замечено, что при делении совершенного четного числа, кроме 6, на 3 остатком всегда является 1:

$$28 = 3\cdot 9+1, \quad 496 = 3\cdot 165+1, \quad 8128 = 3\cdot 2709+1.$$

Покажем, что это действительно так.

З а д а ч а 72. *Докажите, что при делении на 3 совершенного четного числа, кроме числа 6, остаток равен 1.*

Пусть A — совершенное четное число, отличное от 6. Тогда $A = 2^{p-1}(2^p-1)$, где p и 2^p-1 — простые числа, причем оба нечетные. Тогда $p=2t+1$ для некоторого натурального t.

Очевидное сравнение $2^2\equiv 1 \pmod 3$ возведем в t-ю степень. Получим верное сравнение $2^{2t}\equiv 1 \pmod 3$. Тогда

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod 3.$$

Умножая правую и левую части этого сравнения на 2, получаем верные сравнения:

$$2^p\equiv 2 \pmod 3 \quad \text{и} \quad 2^p-1\equiv 1 \pmod 3.$$

Перемножая сравнения $2^{p-1}\equiv 1 \pmod 3$ и $2^p-1\equiv 1 \pmod 3$, получим верное сравнение:

$$2^{p-1}(2^p-1)\equiv 1 \pmod 3.$$

Следовательно, при делении совершенного четного числа A, отличного от 6, на 3 в остатке получается 1. ■

При делении совершенного четного числа, кроме 6, на 9 остатком всегда также является 1:

$$28 = 9 \cdot 3 + 1, \quad 496 = 9 \cdot 55 + 1, \quad 8128 = 9 \cdot 903 + 1.$$

Покажем, что это свойство справедливо для любого совершенного четного числа, кроме 6.

Задача 73. *Докажите, что при делении на 9 совершенного четного числа, кроме числа 6, остаток равен 1.*

Пусть A — совершенное четное число, отличное от 6. Тогда, в нашем случае, существует такое простое нечетное число p, что $A = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Разделим число p на 6 с остатком: $p = 6t + r$, где t, r — натуральные числа, причем $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Так как p — простое нечетное число, то r может равняться только 1,3 или 5. Тогда число p имеет вид:

$$p = 6t + 1 \quad \text{или} \quad p = 6t + 3 \quad \text{или} \quad p = 6t + 5.$$

Возведя очевидное сравнение $2^6 \equiv 1 \pmod 9$ в степень t, получим верное сравнение $2^{6t} \equiv 1 \pmod 9$.

Верны также сравнения:

$$2^1 \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^3 \equiv 8 \pmod 9 \quad \text{и} \quad 2^5 \equiv 5 \pmod 9.$$

Умножая эти сравнения на сравнение $2^{6t} \equiv 1 \pmod 9$, получим:

$$2^{6t+1} \equiv 2 \pmod 9, \quad 2^{6t+3} \equiv 8 \pmod 9 \quad \text{и} \quad 2^{6t+5} \equiv 5 \pmod 9.$$

Тогда

$$2^p \equiv 2 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^p \equiv 8 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^p \equiv 5 \equiv 14 \pmod 9.$$

Так как числа 2 и 9 — взаимно простые, то каждое сравнение можно поделить на 2. Получим:

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^{p-1} \equiv 4 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^{p-1} \equiv 7 \pmod 9.$$

Так как

$$2^{p-1} - 1 \equiv 1 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^{p-1} - 1 \equiv 7 \pmod 9 \quad \text{или} \quad 2^{p-1} - 1 \equiv 4 \pmod 9,$$

то, перемножая соответственно полученные сравнения и учитывая, что

$$1 \cdot 1 \equiv 4 \cdot 7 \equiv 7 \cdot 4 \equiv 1 \pmod 9,$$

получим:

$$2^{p-1}(2^p - 1) \equiv 1 \pmod 9,$$

то есть $A \equiv 1 \pmod 9$.

Следовательно, при делении совершенного четного числа, отличного от 6, на 9 в остатке всегда будет 1. ■

Задача 74. *Докажите, что при делении на 18 совершенного четного числа, отличного от 6, остаток равен 10.*

Пусть A — совершенное четное число, отличное от 6. Тогда при делении на 9 числа A получим в остатке 1, то есть $A = 9t + 1$, где t — некоторое натуральное число.

Учитывая, что A — четное число, число t будет нечетным. Значит, $t = 2n+1$ для некоторого натурального n. Тогда $A = 9(2n+1)+1 = 18n+10$.

Следовательно, при делении на 18 совершенного четного числа, отличного от 6, в остатке будет 10. ■

Получили, что *совершенные четные числа, отличные от 6, следует искать в последовательности натуральных чисел вида* $18n + 10$, $n \in \mathbb{N}$.

Пример 33. $28 = 18 \cdot 1 + 10$, $496 = 18 \cdot 27 + 10$, $8128 = 18 \cdot 451 + 10$.

3.9. Частота появления цифр в числе

Рассмотрим десять функций $o_0, o_1, \ldots, o_9$, заданных на множестве натуральных чисел, значениями которых являются количества цифр $0, 1, \ldots, 9$ соответственно, входящих в запись числа.

Пример 34. $o_0(100!) = 30$, $o_1(100!) = 15$, $o_2(100!) = 19$, $o_3(100!) = 10$, $o_4(100!) = 10$, $o_5(100!) = 14$, $o_6(100!) = 19$, $o_7(100!) = 7$, $o_8(100!) = 14$, $o_9(100!) = 20$.

Ясно, что $o_0(x) + o_1(x) + \ldots + o_9(x) = \zeta(x)$ для любого натурального числа x.

Составим таблицу, в которой отразим количества цифр в записи первых 23 совершенных чисел.

№	$o_0(A)$	$o_1(A)$	$o_2(A)$	$o_3(A)$	$o_4(A)$	$o_5(A)$	$o_6(A)$	$o_7(A)$	$o_8(A)$	$o_9(A)$	$\zeta(A)$	$\zeta(A)/10$
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,1
2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0,2
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	3	0,3

№	$o_0(A)$	$o_1(A)$	$o_2(A)$	$o_3(A)$	$o_4(A)$	$o_5(A)$	$o_6(A)$	$o_7(A)$	$o_8(A)$	$o_9(A)$	$\zeta(A)$	$\zeta(A)/10$
4	0	1	1	0	0	0	0	0	2	0	4	0,4
5	1	0	0	4	0	2	1	0	0	0	8	0,8
6	1	0	0	0	0	2	2	0	3	2	10	1,0
7	0	2	1	3	1	0	1	1	2	1	12	1,2
8	3	2	3	3	1	2	0	0	3	2	19	1,9
9	0	4	3	2	5	7	6	2	3	5	37	3,7
10	5	8	5	8	4	2	6	4	5	7	54	5,4
11	3	7	8	11	7	4	6	7	8	4	65	6,5
12	3	12	5	7	14	7	7	7	8	7	77	7,7
13	33	24	32	36	33	33	32	37	25	29	314	31,4
14	35	28	35	40	28	36	48	44	43	29	366	36,6
15	67	74	84	73	84	80	76	76	69	87	770	77,0
16	157	127	135	129	124	142	140	117	120	136	1327	132,7
17	136	157	132	150	153	141	123	131	125	125	1373	137,3
18	193	201	170	162	217	215	185	200	205	189	1937	193,7
19	251	270	235	244	254	273	252	261	247	273	2560	256,0
20	259	283	263	270	278	280	281	269	229	251	2663	266,3
21	588	577	557	594	603	581	610	546	557	621	5834	583,4
22	578	624	576	552	595	595	622	588	632	623	5985	598,5
23	683	722	627	685	673	682	662	679	668	670	6751	675,1

Как видим, наблюдаемая частота повторения отдельных цифр, например, в 770-значном 15-м совершенном числе, довольно близка к частоте при равномерном распределении цифр, при котором каждая из них повторялась бы 770 раз.

Чем больше в совершенном числе цифр, тем нагляднее отображается замеченная закономерность. Например, для 31-го совершенного числа справедливо:

$o_0(A)$	$o_1(A)$	$o_2(A)$	$o_3(A)$	$o_4(A)$	$o_5(A)$	$o_6(A)$	$o_7(A)$	$o_8(A)$	$o_9(A)$	$\zeta(A)$	$\zeta(A)/10$
13112	12865	13071	12880	13021	13197	12897	12994	13145	12918	130100	13010,0

Такое же стремление количества отдельных цифр к среднему значению можно также наблюдать в выражении чисел π и e с разным количеством верных знаков. Например, для числа π получаем следующую таблицу распределения его цифр (в первом столбце указано количество верных цифр):

A	$o_0(A)$	$o_1(A)$	$o_2(A)$	$o_3(A)$	$o_4(A)$	$o_5(A)$	$o_6(A)$	$o_7(A)$	$o_8(A)$	$o_9(A)$
100	8	8	12	12	10	8	9	7	13	13
1000	93	116	103	103	93	97	94	95	100	106
10000	968	1026	1021	975	1012	1046	1021	969	948	1014

Можем сделать вывод, что совершенство, неоспоримо, должно проявляться в различных качествах.

3.10. Утверждения Никомаха

Следующее, после Евклида и Пифагора, серьезное изучение совершенных чисел было проведено Никомахом из Герассы.

Никомах
ок. 60–ок. 120

Приблизительно в 100 году н.э. Никомах написал знаменитое "Введение в арифметику", в котором классифицировал числа, как и Пифагор, основываясь на идее совершенных чисел: избыточные, недостаточные и совершенные. Избыточные числа Никомах сравнивал с животными, имеющими избыток чего-либо по сравнению с обычными, например, десять ртов или десять губ, три ряда зубов, сто конечностей или слишком много пальцев на одной конечности. Недостаточные числа, напротив, сравнивал с животными, ущербными в чем-либо, например, с одним глазом, одной конечностью или конечностью с меньшим, чем пять, количеством пальцев или без языка.

"Введение в арифметику", как уже отмечалось, подвигло Измаила ибн Ибрагима ибн Фалуса к написанию своего трактата о совершенных числах, в котором перенимается классификация чисел Никомаха, но этот трактат был *чисто* математическим, не содержащим этических и моральных комментариев Никомаха.

Никомах выдвинул ряд утверждений, хотя бездоказательно, касающихся свойств совершенных чисел. Они звучат в современной формулировке следующим образом:

1) n-е совершенное число состоит из n цифр;

2) все совершенные числа являются четными;

3) все совершенные числа *попеременно* заканчиваются цифрой 6 или 8;

4) по формуле Евклида получаются все совершенные числа;

5) совершенных чисел бесконечно много.

На самом деле утверждения 1-е и 3-е являются ложными, а справедливость остальных свойств до сих пор не выяснена.

Остановимся подробнее на 3-м свойстве. Ложность этого утверждения была доказана еще Катальди : пятое и шестое совершенные числа, найденные им, а именно числа 33 550 336 и 8 589 869 056, заканчиваются цифрой 6. Но если в формулировке свойства убрать слово "попеременно", то оказывается, что Никомах был не так далеко от истины. Покажем, что **у любого четного совершенного числа последней цифрой является 6 или 8**. Это в свое время показал Леонард Эйлер.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Теорема 3.4. *Для всех натуральных t и r, где $r \in \{1; 2; 3; 4\}$, справедливо сравнение:* $2^{4t+r} \equiv 2^r (\mathrm{mod}\, 10)$.

Доказательство

Доказательство проведем методом математической индукции по натуральному числу t.

1) Докажем справедливость базы индукции для $t = 1$.

Заметим, что справедливы сравнения:

$$2^1 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 10), \quad 2^5 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 10),$$

$$2^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 10), \quad 2^6 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 10),$$

$$2^3 \equiv 8(\mathrm{mod}\, 10), \quad 2^7 \equiv 8(\mathrm{mod}\, 10),$$

$$2^4 \equiv 6(\mathrm{mod}\, 10), \quad 2^8 \equiv 6(\mathrm{mod}\, 10).$$

Следовательно, справедливо сравнение $2^{4+r} \equiv 2^r (\mathrm{mod}\, 10)$.

База индукции доказана.

2) Сделаем индукционное предположение. Пусть утверждение справедливо для t, то есть справедливо сравнение: $2^{4t+r} \equiv 2^r (\mathrm{mod}\, 10)$.

Докажем индукционный переход, то есть докажем, что данное утверждение справедливо для $t + 1$, то есть $2^{4(t+1)+r} \equiv 2^r (\mathrm{mod}\, 10)$.

Имеем:

$$2^{4(t+1)+r} \equiv 2^{4t+r} \cdot 2^4 \equiv 2^r \cdot 2^4 \equiv 2^{4+r} \equiv 2^r \,(\mathrm{mod}\, 10).$$

Следовательно, утверждение справедливо для $t+1$, а значит, индукционный переход доказан.

3) По методу математической индукции получаем, что теорема справедлива для любого $t \in \mathbb{N}$.

Вернемся теперь к нашему утверждению.

Пусть A — четное совершенное число. Тогда существует простое число p такое, что $A = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

Если число p равняется 2 или 3, то утверждение справедливо, так как в этих случаях число A равно 6 или 28 соответственно. Поэтому можно считать, что число p больше 3. В этом случае число $p = 4t \pm 1$, где $t \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $p = 4t + 1$. Тогда

$$2^{p-1} \equiv 2^{4t} \equiv 2^4 \equiv 6 \pmod{10}$$

и

$$2^p \equiv 2^{4t+1} \equiv 2 \pmod{10} \quad \text{или} \quad 2^p - 1 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Значит, $2^{p-1}(2^p - 1) \equiv 6 \pmod{10}$. Следовательно, число A заканчивается цифрой 6.

2) Пусть $p = 4t - 1 = 4(t-1) + 3$. Тогда

$$2^{p-1} \equiv 2^{4(t-1)+2} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

и

$$2^p \equiv 2^{4(t-1)+3} \equiv 2^3 \equiv 8 \pmod{10} \quad \text{или} \quad 2^p - 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

Значит, $2^{p-1}(2^p - 1) \equiv 28 \equiv 8 \pmod{10}$. Следовательно, число A заканчивается цифрой 8.

Следовательно, любое четное совершенное число заканчивается на 6 или на 8.

3.11. Числа Мерсенна

Как уже отмечалось, проблема нахождения совершенного четного числа сводится к нахождению простых чисел вида $2^s - 1$.

Числа вида $2^n - 1$, где n — натуральное число, называются *числами Мерсенна*, в честь Марена Мерсенна — священника и математика-любителя семнадцатого века. Числа Мерсенна будем обозначать $M(n)$.

Первый математический журнал появился только в 1794 году. Поэтому математики семнадцатого века обменивались своими идеями в письмах. Задача облегчалась тем, что находились люди, бравшие на себя роль посредников: получив последние новости, они пересылали их всем своим корреспондентам. И самым знаменитым из этих посредников был отец Марен Марсенн. Его корреспондентами были такие великие ученые, как Ферма, Паскаль, Декарт и многие другие.

Числа вида $2^n - 1$ обязаны своим именем утверждению Мерсенна о том, что они просты, если

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257,$$

и являются составными для всех остальных 44 простых n, меньших 257. Как часто бывало в те времена, Мерсенн не привел доказательства своего утверждения.

Мерсенн рассматривал значения функции $2^n - 1$ только при простых n. Уже было показано, что если n — составное число, то и число $2^n - 1$ является составным. Следовательно, если число r делит число n, то и число $M(r)$ делит число $M(n)$. Также было показано, что если n — простое число, то число $M(n)$ не обязано быть простым; например, число $M(11) = 2047 = 23 \cdot 89$ — составное.

В поисках простых чисел Мерсенна принимал участие и Эйлер. В 1732 году он нашел два "новых простых" числа $M(41)$ и $M(47)$, отсутствовавших в списке Мерсенна. Позже выяснилось, что в этом случае Эйлер был не прав. Первую ошибку в списке Мерсенна нашли Первузэн и Зилхоф в 1886 году. Они обнаружили, что число $M(61)$ простое, хотя его и нет в списке. Другие ошибки были найдены в последующие годы. Сейчас известно, что кроме $M(61)$ в списке пропущены простые числа $M(89)$ и $M(107)$ и присутствуют составные числа $M(67)$ и $M(257)$. (То, что число $M(257)$ является составным, было доказано Крайтчиком (Kraitchik) в 1922 году.)

Итак, простыми числами Мерсенна $M(n)$, где $n < 257$, являются числа для следующих случаев:

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127.$$

В эру компьютеров были открыты простые числа Мерсенна $M(521)$ и $M(607)$; также показано, что между числами $M(127)$ и $M(521)$ находятся 66 составных чисел $M(n)$ с простым n. Эти результаты были получены летом 1952 года в Калифорнии; там же было доказано, что 386-значное число $M(1\,279)$ также является простым.

Эйлер заметил, что определенные числа Мерсенна всегда являются составными.

Задача 75. *Докажите, что если числа $p = 4n + 3$ и $q = 2p + 1 = 8n + 7$ — оба простые, где n — натуральное число, то число q — собственный делитель числа $M(p)$ (а значит, число $M(p)$ в этом случае не является простым числом Мерсенна).*

Пример 35. *Число $M(11)$ не является простым.*

Числа $p = 11 = 4 \cdot 2 + 3$ и $q = 23 = 8 \cdot 2 + 7$ (здесь $n = 2$) являются простыми. Следовательно, число $M(11)$ не является простым. ■

Легко понять, что составных чисел Мерсенна бесконечно много. Действительно, если n — составное число (а этих чисел бесконечно много, например, числа вида 2^n — составные для всех натуральных $n > 1$), то и соответствующее число Мерсенна $M(n)$ также будет составным. Но до сих пор не выяснен вопрос о количестве простых чисел Мерсенна, который равносилен вопросу о количестве совершенных четных чисел; решив один вопрос, сразу же решим и другой.

3.12. Числа Каталана

Ренессанс в европейской математике наступил только около 1500 года, и утверждения Никомаха о совершенных числах были приняты безоговорочно. Выдвигались и другие "истинные" утверждения о совершенных числах. Например, Чарльз де Бовеллис (Charles de Bovelles), теолог и философ, в опубликованной в 1509 году книге утверждал, что формула Евклида $2^{p-1}(2^p - 1)$ дает совершенное число для всех нечетных p. Также думал и Пачоли (Luca Pacioli) (ок. 1445–ок. 1514). Лишь в 1536 году Хадалрик Рег в своей "Арифметике" дал разложение $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$, тем самым найдя первое простое число p, для которого $2^{p-1}(2^p - 1)$ не является простым числом.

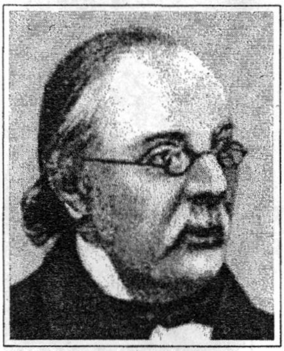
Хадалрик Рег, доказав, что число 33 550 336 является пятым совершенным числом, показал, что первое утверждение Никомаха (см. стр. 68) является ложным, так как пятое совершенное число состоит из восьми цифр.

По велению судьбы за все свои заслуги, за прорыв в теории совершенных чисел Хадалрик Рег фактически остался незаметной фигурой.

Похожие заблуждения совершались и в более поздние времена.

Было замечено, что для простых чисел Мерсенна $p = 3, 7, 31, 127$ числа $2^p - 1$ также являются простыми числами Мерсенна. По этому поводу Каталан (Eugène Charles Catalan) выдвинул идею о том, что если число Мерсенна $M(n)$ является простым, то и число $M(M(n)) = 2^{M(n)} - 1$ является простым. Последовательностью Каталана называется последовательность чисел Мерсенна $M(3)$, $M(M(3))$ и так далее. Например, первыми четырьмя числами Каталана являются числа $M(3)$, $M(7)$, $M(127)$, $M(M(127))$, а именно:

$$p = 3, 7, 127, 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$



Ю.Ч. Каталан
1814–1894

Более 70 лет, после открытия числа Мерсенна $M(127)$ в 1876 году, математики надеялись, что такая закономерность должна привести к заключению о бесконечности ряда простых чисел Мерсенна. Но в 1953 году было показано, что число $p = 2^{13} - 1 = 8191$ является простым числом Мерсенна, а число $2^p - 1 = 2^{8191} - 1$ уже не является простым числом Мерсенна.

3.13. Число И.М. Первушина

Говоря о числах Мерсенна, нельзя не вспомнить Ивана Михеевича Первушина, русского человека, обогатившего математическую науку знаниями благодаря своему таланту и упорному труду.

Ко временам Эйлера наибольшим из найденных простых чисел Мерсенна было 10-значное число $2^{31} - 1$:

$$2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647.$$

Через сто лет самое большое из простых чисел выглядело так:

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951.$$

Оно содержало уже 19 знаков! И открыл его не какой-либо классик математики, а сын безвестного пономаря из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Этот уральский самородок был найден великим русским ученым Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821–1894). Причем при обстоятельствах, весьма далеких от точных наук: на выпускном экзамене в Казанской духовной академии. Именно Чебышев тогда обратил внимание на прямо-таки поразительные математические способности молодого человека.

И.М. Первушин
1827–1900

Иван Михеевич Первушин, уже будучи священником в одном из сел Шадринского уезда Пермской губернии, посылал в Академию наук свои работы по теории чисел, а в 1897 году, когда уже Чебышева не было в живых, закончил составление таблицы простых чисел до 10 миллионов!

П.Л. Чебышев не раз упоминал в своих лекциях об этом замечательном таланте, математике-самородке и просветителе, который в свободное от богослужений время, в перерывах между венчаниями, крещениями и отпеваниями продолжал терпеливо искать истину в запутаннейшем деле о простых числах.

Предложенный И.М. Первушиным метод проверки правильности результатов арифметических действий над большими числами был представлен на математическом конгрессе в Чикаго. Результаты Первушина проверил и подтвердил ученик Чебышева академик Е.И. Золотарев (1847–1878). Были подтверждены они и Парижской академией наук.

3.14. Числа Люка и Коула

Одним из знаменитых простых чисел Мерсенна является число $M(127)$, открытое французом Люка. Это число

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727,$$

содержащее 39 знаков в десятичном своем представлении, оставалось наибольшим 75 лет!

Также знаменитым является составное число Мерсенна $M(67)$.

Ф.Н. Коул
1861–1926

В октябре 1903 года в Нью-Йорке на заседании математического общества слово было предоставлено профессору Франку Нельсону Коулу (Frank Nelson Cole). Профессор Коул подошел к доске и, не говоря ни слова, начал возводить число 2 в степень 67. Затем он вычел из полученного числа 1 и, по-прежнему не говоря ни слова, столбиком перемножил два числа:

$$193\,707\,721 \quad \text{и} \quad 761\,838\,257\,287.$$

Оба результата совпали. Впервые в истории Американского математического общества его члены бурными аплодисментами приветствовали докладчика. Профессор Коул, так и не проронив ни одного слова, сел на место. Никто не задал ему ни одного вопроса.

Так Коул доказал, что число Мерсенна $M(67) = 2^{67} - 1$ составное, а не простое, как это подозревали до него почти 200 лет.

Когда через несколько лет у Коула спросили, сколько времени потратил он на это доказательство, он ответил: "Все воскресенья в течение трех лет".

3.15. Тест Ферма на простоту чисел Мерсенна

Итак, ко временам Эйлера наибольшим из найденных простых чисел Мерсенна было 10-значное число $2^{31}-1$, во времена П.Л. Чебышева самые большие простые числа Мерсенна были открыты И.М. Первушиным в 1883 году (19-значное число $2^{61}-1$) и французом Люка в 1876 году (39-значное число $2^{127}-1$).

В 1952 году, в январе, наибольшее простое число Мерсенна имело сто пятьдесят семь знаков, в августе — триста восемьдесят шесть знаков, в октябре — уже более семисот. В 1957 году оно располагало тысячью знаков, в 1963 году — более чем тремя тысячами знаков, в 1971 году — двенадцатью тысячами знаков. К началу 90-х годов самое большое число было $2^{132\,049}-1$, к концу — $2^{3\,021\,377}-1$, содержащее 909 526 знаков.

Задача 76. *Докажите, что количество цифр в записи числа Мерсенна* $M(n)=2^n-1$ *не превосходит числа* $0,30103n+1$.

Как же определить простоту числа?

Простоту числа можно доказать по определению простого числа, то есть показав неразложимость на два отличных от единицы множителя. Для этого используют *метод проб*, который состоит в следующем: число, которое проверяется на простоту, делится на все простые числа, не превосходящие квадратного корня из тестируемого числа. При этом корректность данного метода основана на уже упомянутой теореме: если число A не делится ни на одно простое число, не превосходящее числа $\sqrt{A}$, то число A является простым.

Этим методом, кстати, пользовался Катальди. Катальди, применяя составленную им таблицу простых чисел до 750, показал, что число $2^{17}-1=131\,071$ является простым. Для этого Катальди пришлось проверить, что это число не делится ни на одно простое число в пределах до 750 (так как $750^2=562\,500>131\,071$). Аналогичным образом Катальди доказал, что число $2^{19}-1=524\,287$ ($750^2=562\,500>524\,287$) также является простым.

Но для таких "числовых гигантов", как $M(521)$ или $M(1279)$, сделать что-то подобное достаточно трудно, даже при современных компьютерных возможностях! Поэтому для решения таких задач привлекают косвенные методы проверки чисел на простоту, которые более просты, экономичны (самое главное, по времени) в реализации, чем непосредственное нахождение делителей данного числа.

При доказательстве простоты чисел Мерсенна можно предложить метод Ферма и гораздо более эффективный тест Люка–Лемера, использующийся в наше время. С помощью этого теста в 1998 году было показано, что число Мерсенна $M(3\,021\,377)$ является простым.

Остановимся на методе, предложенном Пьером Ферма.

Знаменитая малая теорема Ферма (см. стр. 25) была получена именно в ходе (а может быть, даже ради) исследования совершенных чисел. В июне 1640 года Ферма в письме Мерсенну, а затем в октябре того же года в письме Френиклю (Bernard Frenicle de Bessy) (1605–1675), уже в более обобщенном виде, пишет о замечательных свойствах, найденных им, касающихся делимости степеней чисел на простые числа. Одно из этих свойств и является малой теоремой Ферма.

В письме Мерсенну Ферма указывает на свойства двух последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & 127 & 255 & 511 & 1023 & 2047 & 4095 & 8191, \end{array}$$

элементы первой строчки называя показателем, а второй — степенью. Ферма пишет:

1) Если показатель, соответствующий степени, составное число, то и степень является составным числом. Например, 6, соответствующая степени 63, есть составное число, и 63 тоже является составным числом.

2) Если показатель есть простое число, то соответствующая степень, уменьшенная на 1, делится на удвоенный этот показатель. Например, 7, соответствующая степени 127, есть простое число, и 126 делится на $2 \cdot 7 = 14$.

В письме Френиклю Ферма уже сообщает об открытии теоремы, которую впоследствии назовут малой теоремой Ферма.

В доказательстве корректности метода Ферма для определения простоты числа $M(n)$ используется как раз малая теорема Ферма.

Теорема 3.5 (Метод Ферма). *Пусть $p \neq 2$ — простое число и q — простой делитель числа Мерсенна $M(p)$. Тогда найдется такое натуральное число r, что $q = 1 + 2rp$.*

Доказательство

Заметим вначале, что число q должно быть нечетным, так как число

$M(p)$, делителем которого оно является, нечетное. А значит, $(2;q) = 1$. Тогда по малой теореме Ферма получаем, что $2^{q-1} \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$.

Пусть n — такое наименьшее натуральное число, что справедливо сравнение: $2^n \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. Заметим, что $n \neq 1$, так как в противном случае $1 \vdots q$, что не так (q — нечетное простое число). Покажем, что если для некоторого натурального m справедливо сравнение $2^m \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, то $m \vdots n$.

Воспользуемся методом от противного. Пусть число m делится на число n с остатком, то есть $m = nt + s$, где $0 < s < n$. Тогда

$$1 \equiv 2^m \equiv 2^{nt+s} \equiv (2^n)^t \cdot 2^s \equiv 1^t \cdot 2^s \equiv 2^s (\operatorname{mod} q),$$

то есть $2^s \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, где s — натуральное число, меньшее n, что противоречит выбору числа n. Пришли к противоречию.

В частности, получили, что $q - 1 \vdots n$.

Далее, так как по условию $M(p) \vdots q$, то $2^p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$. Тогда $p \vdots n$. Учитывая, что p простое число и $n \neq 1$, получаем, что $n = p$. Следовательно, $q - 1 \vdots p$. Значит, $q = px + 1$ для некоторого натурального x.

Так как числа q и p являются нечетными, то число x — четное число. Тогда $q = 1 + 2rp$, где $r \in \mathbb{N}$. ■

Используя данный метод определения простоты числа Мерсенна, Ферма показал, что числа $2^{23} - 1$ и $2^{37} - 1$, о которых Катальди утверждал, что они простые, на самом деле являются составными, о чем сообщил в июне 1640 года в письме Мерсенну.

Задача 77. *Примените метод Ферма к поиску делителей числа* $M(11) = 2047$.

Согласно формуле, любой простой делитель числа $M(11)$ имеет вид: $q = 1 + 22r$. Теперь предстоит вычислить q при $r = 1, 2, \ldots$ и выбрать из полученных результатов делители числа $M(11)$.

Перед началом вычислений хотелось бы выяснить оценку для числа r сверху.

Пусть $q = 1 + 2rp$ — наименьший простой делитель числа $M(p)$. Тогда

$$\sqrt{M(p)} \geq q = 1 + 2rp.$$

А так как $\sqrt{M(p)} < 2^{p/2}$, из последнего неравенства получаем, что

$$r < \frac{2^{p/2} - 1}{2p}.$$

Следовательно, если $q = 1 + 2rp$ — наименьший простой делитель числа $M(p)$, то $r < \dfrac{2^{p/2} - 1}{2p}$.

При $p = 11$ получаем, что $r = 1$ или $r = 2$. Тогда наименьшим простым делителем числа $M(11)$ является $q = 1 + 22r = 23$ при $r = 1$ или $q = 1 + 22r = 45$ при $r = 2$. Элементарным делением показывается, что число 23 действительно является наименьшим делителем числа $M(11)$. Другой его простой делитель — это $89 = 1 + 22 \cdot 4$, имеющий также вид $q = 1 + 22r$.

Любопытно отметить, что если бы был применен метод проб для определения простоты числа $M(11)$, то безуспешными были бы 8 попыток, так как количество простых чисел, меньших 23, как раз равняется этому числу. ■

Задача 78. *Используя метод Ферма, покажите, что числа Мерсенна $M(23)$ и $M(37)$ являются составными. Покажите также, что число $M(7)$ — простое.*

3.16. Тест Люка–Лемера на простоту чисел Мерсенна

Под высоким куполом одного индийского храма находятся три шпиля, густо усеянные алмазами, как пчела бархатным ворсом. В момент сотворения мира Бог поместил на один из них 64 диска чистого золота: наибольший — внизу, а остальные — сверху, так что получилась башня. Он дал задание главному жрецу храма переставить диски согласно правилам: за один раз можно переместить только один диск; бо́льший диск нельзя класть поверх меньшего. Когда вся башня из 64 дисков будет полностью перенесена на один из шпилей, Бог вернется и положит конец миру.

Итак, чтобы узнать, когда наступит конец света, достаточно решить задачу о минимальном числе перемещений 64 дисков.

Эта легенда, названная "Ханойские башни", впервые была опубликована в Париже в 1883 году, одновременно с головоломкой, неким Н. Клаусом из колледжа в Ли-Соу-Стейна. Имя человека и название колледжа — это анаграммы имени Люка д'Амьен, преподавателя лицея Святого Людовика, придумавшего как саму легенду, так и головоломку. Его книга "Математические развлечения" 1894 года стала классикой предмета. В частности, решением головоломки "Ханойские башни" является следующее: минимальное число перемещений n дисков равно числу $2^n - 1$, то есть n-му числу Мерсенна $M(n)$. Можно сказать, что у чисел Мерсенна есть "физический смысл".

Задача 79. *Докажите, что решениями головоломки "Ханойские башни" являются числа Мерсенна.*

Задача 80. *Дайте оценку времени, которое нужно для перекладки дисков в легенде "Ханойские башни".*

Люка занимался и теорией чисел. Он предложил несколько тестов на простоту чисел. Используя один из них, Люка доказал, что число

$$M(127) = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

является простым.

Тест для определения простоты числа Мерсенна открыл Люка в 1878 году. Затем тест был усовершенствован Лемером (Derrick Norman Lehmer) (1905–1991) в 1932 году, и теперь он называется тестом Люка–Лемера.

Главная составная часть рассматриваемого далее теста — последовательность натуральных чисел $S_0, S_1, S_2, \ldots$, которая определяется рекуррентной формулой:

$$S_0 = 4 \quad \text{и} \quad S_{k+1} = S_k^2 - 2.$$

Можно показать, что

$$S_n = (2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}.$$

Сам тест формулируется следующим образом.

Тест Люка–Лемера. *Пусть p — простое число. Число Мерсенна $M(p)$ является простым тогда и только тогда, когда $S_{p-2} \vdots M(p)$.*

Этот тест не что иное, как критерий простоты числа Мерсенна $M(n)$.

Несмотря на трудность доказательства корректности теста, его очень легко реализовать и применить. В 1978 году два старшеклассника Лора Никель (Nickel) и Курт Нолль (Noll) с помощью теста Люка–Лемера доказали простоту числа $M(21\,701)$, воспользовавшись локальной компьютерной сетью местного университета. Их успех был отражен в передовице «Нью-Йорк Таймс».

Пример 36. *Число Мерсенна $M(7)$ является простым.*

Для доказательства воспользуемся тестом Люка–Лемера.

По условию $p = 7$. Тогда $M(p) = 2^p - 1 = 2^7 - 1 = 127$ и $S_{p-2} = S_5$.

Найдем элемент S_5. Так как $S_0 = 4$ и $S_k = S_{k-1}^2 - 2$, то

$S_0 = 4$;

$S_1 = S_0^2 - 2 = 14$;

$S_2 = S_1^2 - 2 = 194$;

$S_3 = S_2^2 - 2 = 37\,634$;

$S_4 = S_3^2 - 2 = 1\,416\,317\,954$;

$S_5 = S_4^2 - 2 = 2\,005\,956\,546\,822\,746\,114$.

Осталось поделить число S_5 на $M(7)$ и выяснить, какой будет остаток. Имеем:

$$2\,005\,956\,546\,822\,746\,114 = 127 \cdot 15\,794\,933\,439\,549\,182,$$

то есть $S_5 \vdots M(7)$. Значит, число Мерсенна $M(7)$ является простым. ■

Видим, что числа последовательности $S_0, S_1, S_2, \ldots$ даже при малых индексах принимают достаточно большие значения. Поэтому все вычисления следует переложить на "плечи компьютера" с программным обеспечением, позволяющим работать с очень большими натуральными числами.

Задача 81. *Используя тест Люка–Лемера, докажите, что число Мерсенна $M(5)$ является простым.*

3.17. Задача Френикля о совершенных числах

Возвращаясь к теме совершенных чисел, можем сказать, что числа $2^s(2^{s+1} - 1)$ являются совершенными при $s + 1$, равном

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 3\,021\,377, 21\,701.$$

В 1640 году шевалье Френикль, один из математиков-любителей того времени, занимавшийся попытками разложения чисел Мерсенна, спросил Ферма через Мерсенна о том, найдется ли совершенное число в промежутке между 10^{20} и 10^{22}. Ферма дал отрицательный ответ.

Приведем доказательство этого утверждения, разбив его на ряд задач.

Задача 82. *Покажите, что при $n \geq 2$ справедливы неравенства:*

$$-1 < \lg(1 - 2^{-n}) < 0 \quad \text{и} \quad n \lg 2 - 1 < \lg(2^n - 1) < n \lg 2.$$

Так как $0 < 1 - 2^{-n} < 1$ для всякого натурального числа $n \geq 2$, то $\lg(1 - 2^{-n}) < 0$.

Предположим, что верно неравенство $-1 > \lg(1 - 2^{-n})$ для некоторого $n \geq 2$. Тогда по свойствам логарифмической функции получаем:

$$0,1 > 1 - \frac{1}{2^n}, \quad 0,1 \cdot 2^n > 2^n - 1, \quad 1 > 0,9 \cdot 2^n,$$

что не так. Следовательно, для любого натурального $n \geq 2$ справедливо неравенство $-1 < \lg(1 - 2^{-n})$. Значит,

$$-1 < \lg(1 - 2^{-n}) < 0$$

для всех натуральных $n \geq 2$.

Из этого неравенства получаем:

$$-1 < \lg\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) < 0, \quad -1 < \lg(2^n - 1) - \lg(2^n) < 0,$$

$$\lg(2^n) - 1 < \lg(2^n - 1) < \lg(2^n), \quad n \lg 2 - 1 < \lg(2^n - 1) < n \lg 2. \qquad \blacksquare$$

Задача 83. *Покажите, что если n — натуральное число и*

$$10^{20} < 2^{n-1}(2^n - 1) < 10^{22},$$

то $34 \leq n \leq 37$.

Прологарифмируем данное неравенство и получим:

$$10^{20} < 2^{n-1}(2^n - 1) < 10^{22}, \quad \lg(10^{20}) < \lg(2^{n-1}(2^n - 1)) < \lg(10^{22}),$$

$$20 \lg 10 < \lg(2^{n-1}) + \lg(2^n - 1) < 22 \lg 10, \quad 20 < \lg(2^{n-1}) + \lg(2^n - 1) < 22,$$

$$20 < (n - 1) \lg 2 + \lg(2^n - 1) < 22.$$

Так как

$$n \lg 2 - 1 < \lg(2^n - 1) < n \lg 2,$$

то

$$22 > (n - 1) \lg 2 + \lg(2^n - 1) > (n - 1) \lg 2 + n \lg 2 - 1 = (2n - 1) \lg 2 - 1,$$

$$n < \frac{1}{2}\left(\frac{23}{\lg 2} + 1\right) \leq 38$$

и

$$20 < (n-1)\lg 2 + \lg(2^n - 1) < (n-1)\lg 2 + n\lg 2 = (2n-1)\lg 2,$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{20}{\lg 2} + 1\right) > 33.$$

Следовательно, $33 < n < 38$. ■

Вернемся теперь к задаче Френикля.

Предположим, что найдется совершенное число A, заключенное между числами 10^{20} и 10^{22}. Тогда $A = 2^{n-1}(2^n - 1)$, где $2^n - 1$ — простое число Мерсенна, причем число n также должно быть простым. При этом, по доказанному, $33 < n < 38$. В этом интервале всего лишь одно простое число — 37. Но в реестре простых чисел Мерсенна числа $M(37)$ нет. Значит, число $M(37)$ является составным, тогда число A не является совершенным. Пришли к противоречию. Следовательно, совершенных чисел между числами 10^{20} и 10^{22} нет.

Эта задача показывает, что совершенные числа встречаются редко. Пифагореец Ямвлих в своем сочинении о совершенных числах написал, что от мириады (десяти тысяч) до мириады мириад содержится лишь одно такое число, от мириады мириад до мириады мириад мириад — еще одно и так далее. Проверка же показала, что совершенные числа встречаются еще реже. От числа 10^{20} до 10^{36} нет ни одного совершенного числа, хотя, по Ямвлиху, их должно быть четыре.

3.18. Нечетные совершенные числа

Вопрос о количестве простых чисел решается очень просто. Еще Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много.

Вопрос же о количестве совершенных чисел остается открытым.

Теоремы Евклида и Эйлера дают полное описание строения четных совершенных чисел. Но до сих пор не найдено ни одного нечетного совершенного числа, и представляется весьма невероятным, чтобы таковые существовали; однако никтс еще не смог доказать, что это действительно так.

Было уже показано, что степень любого простого (четного или нечетного) числа не может быть простым числом. Можно показать, что ряд нечетных чисел (чисел особого вида) также не являются совершенными числами.

Пример 37. *Не существует совершенных чисел вида $p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые числа, большие 3, и α, β — натуральные числа.*

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Пусть p — простое число, большее 3, и α — натуральное число. Тогда справедливо неравенство:

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \sqrt{2}p^\alpha.$$

Доказательство проведем методом математической индукции по α.

1. Докажем базу индукции.

Пусть $\alpha = 1$.

Рассмотрим разность $\sqrt{2}p^\alpha - \dfrac{p^2-1}{p-1}$. Имеем:

$$\sqrt{2}p^\alpha - \frac{p^2-1}{p-1} = \sqrt{2}p^\alpha - p - 1 = p(\sqrt{2}-1) - 1 > 0.$$

Последнее неравенство справедливо, так как из неравенств $\sqrt{2}-1 > 0,4$ и $p > 3$ следует неравенство $p(\sqrt{2}-1) > 1,2$.

Следовательно, утверждение верно для $\alpha = 1$ и база индукции доказана.

2. Рассмотрим индукционное предположение.

Пусть утверждение справедливо для α, то есть справедливо неравенство:

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \sqrt{2}p^\alpha.$$

Докажем индукционный переход, то есть что для $\alpha + 1$ справедливо неравенство:

$$\frac{p^{\alpha+2}-1}{p-1} < \sqrt{2}p^{\alpha+1}.$$

Имеем:

$$\frac{p^{\alpha+2}-1}{p-1} = 1 + p^1 + p^2 + \ldots + p^\alpha + p^{\alpha+1} = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} + p^{\alpha+1} <$$

$$< \sqrt{2}p^\alpha + p^{\alpha+1} = \sqrt{2}p^{\alpha+1}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \sqrt{2}p^{\alpha+1},$$

так как при $p > 3$ справедливо неравенство $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Индукционный переход доказан.

3. По методу математической индукции получаем, что утверждение справедливо для любого натурального α.

Перейдем теперь к самому примеру.

Пусть существует нечетное совершенное число A вида $p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые нечетные числа, большие 3, и α, β — натуральные числа.

С одной стороны, $\sigma(A) = 2A$, то есть (учитывая, что числа p и q простые)

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\alpha+1}-1}{p-1} = 2p^\alpha q^\beta.$$

С другой стороны, по только что доказанному имеем:

$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{\alpha+1}-1}{p-1} < \left(\sqrt{2}p^\alpha\right)\left(\sqrt{2}q^\beta\right) = 2p^\alpha q^\beta.$$

Пришли к противоречию.

Следовательно, не существует совершенных чисел вида $p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые числа, большие 3, и α, β — натуральные числа. ■

Предложенный метод оценки дроби $\dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$ позволяет доказывать отсутствие совершенных нечетных чисел с большим числом нечетных простых сомножителей.

Действительно, пусть n такое натуральное число, что для некоторого простого числа q справедливы неравенства:

$$q(\sqrt[n]{2}-1) - 1 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} < 1.$$

Тогда

$$q > \frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} \quad \text{и} \quad q > \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}.$$

Заметим, что для выполнения последних двух неравенств достаточно требовать, чтобы $q > \dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}$, так как для любого натурального n справедливо неравенство $\dfrac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1} > \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$.

Следовательно, для всех простых чисел $p \geq q$ будет справедливо неравенство
$$\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} < \sqrt[n]{2}p^{\alpha}.$$

Отсюда следует, что если $A = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \dots, p_s$ — нечетные простые числа, не меньшие числа q, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — натуральные числа, то число A не является совершенным, так как

$$\sigma(A) = \sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s}) = \frac{p_1^{\alpha_1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\frac{p_s^{\alpha_s}-1}{p_s-1} <$$
$$< (\sqrt[n]{2}p_1^{\alpha_1-1})(\sqrt[n]{2}p_2^{\alpha_2-1})\dots(\sqrt[n]{2}p_s^{\alpha_s-1}) = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_s^{\alpha_s} = 2A,$$

то есть $\sigma(A) < 2A$.

Пример 38. *Числа вида $A = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}p_4^{\alpha_4}$, где p_1, p_2, p_3, p_4 — простые числа, не меньшие 7, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{N}$, не являются совершенными.*

Действительно, $7 > \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1} = 6,285...$, значит, при указанных условиях число A не является совершенным. ■

Задача 84. *Докажите, что не существует совершенных чисел вида $p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r — простые числа, большие 3, и α, β, γ — натуральные числа.*

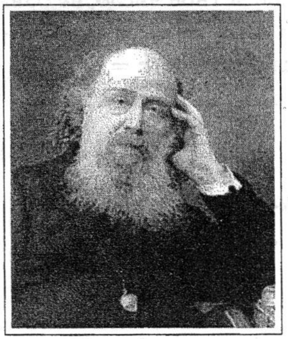
Задача 85. *Докажите, что не существует совершенных чисел вида $p_1p_2\dots p_s$, где $p_1, p_2, \dots, p_s$ — различные нечетные простые числа.*

Многие математики в разные века пытались решить проблему о природе нечетных совершенных чисел. Декарт в письме Мерсенну в 1638 году писал, что он может доказать, что не существует четных совершенных чисел, получающихся по другой формуле, отличной от формулы Евклида, а также что не существует нечетных совершенных чисел, если они не являются числами вида "простое число, умноженное на квадрат, корень которого есть составное число, делящееся на другие простые числа". В этом же письме Декарт пишет о том, что он хотел бы предостеречь всех, кто намеревается найти числа такого вида: "Например, если кто-то простое число 22 021 умножит на 9 018 009, которое является квадратом, корень которого является составным числом, делящимся на простые числа 3, 7, 11, 13, то получит число 198 585 576 189, которое может быть совершенным числом. Но каким бы он методом ни пользовался, все равно требуется много времени для проверки."

Эйлер имел некоторые успехи в решении проблем нечетных совершенных чисел. Он не только передоказал утверждение Декарта, но и пошел немного дальше, доказав, что если нечетные совершенные числа и существуют, то они должны иметь вид

$$(4n+1)^{4k+1} \cdot b^2,$$

где $4n+1$ — простое число.



Дж.Ж. Сильвестр
1814–1897

В 1888 году Сильвестр (James Joseph Sylvester) показал, что если нечетные совершенные числа существуют, то они должны иметь по крайней мере четыре различных простых делителя. В том же самом году он передоказал свой результат для пяти простых чисел. В дальнейшем было доказано, что если нечетные совершенные числа существуют, то каждое из них содержит более чем 300 цифр и имеет не менее восьми простых делителей, больших, чем 10^6.

Среди советских математиков, занимавшихся установлением свойств нечетных совершенных чисел при условии их существования, можно выделить А.С. Турчанинова и И.С. Градштейна.

Декарт уверял, что решит вопрос о существовании нечетных совершенных чисел, если он будет иметь три месяца "творческого отпуска". Однако прошло с тех пор более трехсот лет, и как знать, сколько еще пройдет времени до того, как ответ на этот вопрос будет получен.

3.19. Совершенные четные числа и кубы нечетных чисел

Видим, что совершенные числа обладают рядом замечательных свойств (значит, недаром их называют *совершенными*!). Рассмотрим еще одно из свойств совершенных четных чисел.

Докажем, что *любое совершенное четное число, кроме 6, есть частичная сумма ряда кубов последовательных нечетных чисел.* Например,

$$28 = 1^3 + 3^3, \quad 496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3.$$

Пусть A — совершенное четное число, не равное 6. Тогда число A можно представить в виде: $A = 2^k(2^{k+1} - 1)$, где $k+1$ — *нечетное* простое число. Значит, число k является четным: $k = 2t$, где t — некоторое натуральное число. Тогда число A можно записать в виде:

$$A = (2^t)^2 \cdot (2 \cdot (2^t)^2 - 1).$$

Используя теперь формулу

$$1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 \cdot (2n^2 - 1)$$

для случая $n = 2^t$, получим:

$$A = (2^t)^2 \cdot (2 \cdot (2^t)^2 - 1) = 1^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots + (2 \cdot 2^t - 1)^3.$$

Следовательно, любое совершенное четное число, отличное от числа 6, есть сумма конечного ряда кубов последовательных нечетных чисел (начиная с числа 1).

Пример 39. *Для четного совершенного числа* 33 550 336, *равного* $2^{12}(2^{13} - 1)$, *число* t *равно* 6 $(12 : 2 = 6)$, *и тогда это совершенное число есть сумма кубов первых* $2^6 = 64$ *нечетных чисел:*

$$33\,550\,336 = 2^{12}(2^{13} - 1) = 1^3 + 3^3 + \ldots + (2 \cdot 64 - 1)^3 = 1^3 + 3^3 + \ldots + 127^3.$$

3.20. Функция χ_{-1}

Для случая $r = -1$ функция χ_r имеет вид:

$$\chi_{-1}(u) = \sum_{u \,\vdots\, a} \theta_{-1}(a) = \sum_{u \,\vdots\, a} a^{-1} = \sum_{u \,\vdots\, a} \frac{1}{a}.$$

Так как функция χ_r является мультипликативной для всех значений r, то функция χ_{-1} также является мультипликативной. При этом если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различных простых чисел, то

$$\chi_{-1}(u) = \prod_{i=1}^{s} \left(\theta_{-1}(1) + \theta_{-1}(p_i^1) + \theta_{-1}(p_i^2) + \ldots + \theta_{-1}(p_i^{\alpha_i})\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p_i^1} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots + \frac{1}{p_i^{\alpha_i}}\right)$$

Задача 86. *Вычислите* $\chi_{-1}(6)$.

Так как $6 = 2 \cdot 3$, то $s = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и

$$\chi_{-1}(6) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2. \qquad \blacksquare$$

Задача 87. *Вычислите* $\chi_{-1}(A)$*, где* A *— совершенное число.*

Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_s$ — все различные делители числа A, включая числа 1 и A. Тогда и числа $\frac{A}{d_1}, \frac{A}{d_2}, \ldots, \frac{A}{d_s}$ также являются *всеми различными* делителями числа A. Действительно, этих чисел s, что совпадает с количеством всех делителей числа A, и если предположить, что $\frac{A}{d_i} = \frac{A}{d_j}$, то $d_i = d_j$. Другими словами,

$$\{d_1; d_2; \ldots; d_s\} = \left\{\frac{A}{d_1}, \frac{A}{d_2}, \ldots, \frac{A}{d_s}\right\}.$$

Тогда

$$\left\{\frac{1}{d_1}; \frac{1}{d_2}; \ldots; \frac{1}{d_s}\right\} = \left\{\frac{d_1}{A}, \frac{d_2}{A}, \ldots, \frac{d_s}{A}\right\}$$

и

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_s} = \frac{d_1}{A} + \frac{d_2}{A} + \ldots + \frac{d_s}{A} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_s}{A}.$$

Учитывая, что A — совершенное число, получаем, что $d_1 + d_2 + \ldots + d_s = 2A$. Значит,

$$\frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_s}{A} = \frac{2A}{A} = 2.$$

Следовательно, $\chi_{-1}(A) = 2$. ∎

Получили, что сумма величин, обратных всем делителям совершенного числа, включая его самого, всегда равна 2.

Пример 40. *Для совершенного числа 28 справедливо:*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2,$$

где 1,2,4,7,14,28 — все различные делители числа 28.

Задача 88. *Докажите, что если $\chi_{-1}(A) = 2$, то число A является совершенным.*

Действительно, если $d_1, d_2, \ldots, d_s$ — все делители числа A, включая 1 и само число A, то

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_s} = \frac{d_1}{A} + \frac{d_2}{A} + \ldots + \frac{d_s}{A} = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_s}{A} = \frac{\sigma(A)}{A}.$$

Учитывая, что $\chi_{-1}(A) = 2$, получаем, что $\sigma(A) = 2A$. Следовательно, число A является совершенным. ∎

Получили, что *число A является совершенным тогда и только тогда, когда $\chi_{-1}(A) = 2A$.*

Задача 89. *В случае совершенного четного числа A предложите другое доказательство равенства $\chi_{-1}(A) = 2$.*

3.21. Дружественные числа

Вернемся к функции η суммы всех собственных делителей числа.

Если $\operatorname{ord}_\eta(x) = 2$, то числа x и $\eta(x)$ называют *дружественными*. Следовательно, $x \neq 1$, то есть если A и B — дружественные числа, то ни A, ни B не равны 1, при этом сами числа A и B неравны (иначе $\operatorname{ord}_\eta(A)$ равнялся бы 1, а не 2, что противоречит определению).

Пример 41. *Числа 17 296 и 18 416 являются дружественными.*

Так как $\operatorname{ord}_\eta(17\,296) = 2$ и $\eta(17\,296) = 18\,416$, то числа 17 296, 18 416 являются дружественными. ∎

Заметим, что для дружественных чисел A и B справедливо:

$$\eta(A) = B \quad \text{и} \quad \eta(B) = A.$$

Действительно, если $\eta(A) = B$, то $A = \eta^2(A) = \eta(B)$, то есть $\eta(B) = A$.

Далее, пусть A и B — дружественные числа. Тогда $A \neq 1$ и $B \neq 1$. Значит, $\eta(A) = \sigma(A) - A$ и $\eta(B) = \sigma(B) - B$. При этом $\eta(A) = B$ и $\eta(B) = A$. Тогда $\sigma(A) - A = B$ и $\sigma(B) - B = A$. Значит, $\sigma(A) = A + B$ и $\sigma(B) = A + B$. Следовательно, $\sigma(A) = \sigma(B) = A + B$.

Обратно, пусть A и B — различные числа и $\sigma(A) = \sigma(B) = A + B$.

Так как $\sigma(1) = 1$, то числа A и B не равны 1. Значит, $\eta(A) = \sigma(A) - A$ и $\eta(B) = \sigma(B) - B$. Тогда $\eta(A) = (A + B) - A = B$ и $\eta(B) = (A + B) - B = A$. Значит, $\eta^2(A) = A$. Следовательно, числа A и B являются дружественными.

Тем самым получили следующий критерий дружественности чисел:

Теорема 3.6. *Числа A и B являются дружественными тогда и только тогда, когда $\sigma(A) = \sigma(B) = A + B$.*

Заметим, что для совершенных равных чисел A и B (то есть $A = B$) также справедливы равенства $\sigma(A) = \sigma(B) = A + B$, так как для совершенного числа A справедливо равенство $\sigma(A) = 2A$. Обратно, если A — совершенное число и для некоторого числа B справедливы равенства $\sigma(A) = \sigma(B) = A + B$, то $2A = A + B$, значит, $A = B$. Отсюда следует, что совершенные числа являются эгоистами в мире чисел, ибо они "дружат" только сами с собой, что характерно и для людей: совершенства — всегда одиноки!

Пример 42. *Числа 5020 и 5564 являются дружественными.*

Имеем:

$$\sigma(5020) = \sigma(2^2 \cdot 5 \cdot 251) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^2 - 1}{5 - 1} \cdot \frac{251^2 - 1}{251 - 1} = 10584$$

и

$$\sigma(5564) = \sigma(2^2 \cdot 13 \cdot 107) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{13^2 - 1}{13 - 1} \cdot \frac{107^2 - 1}{107 - 1} = 10584.$$

Заметим, что $5020 + 5564 = 10584$. Значит, $\sigma(5020) = \sigma(5564) = 5020 + 5564$. Следовательно, числа 5020 и 5564 являются дружественными. ■

3.22. Теорема Сабита о дружественных числах

Если про совершенные четные числа достаточно много известно благодаря теореме Эйлера о представлении совершенного четного числа, то про дружественные числа известно очень мало.

Найти формулы, по которым можно бы (при определенных условиях, конечно) получать некоторые пары дружественных чисел, достаточно трудно. Но такие формулы существуют. В XVIII веке Леонард Эйлер предложил пять способов нахождения дружественных чисел. Используя их, он опубликовал список 64 дружественных пар, однако, как показала проверка, в двух случаях он ошибся.

Один из способов получения пар дружественных чисел изложим в виде теоремы, сформулированной Сабитом (см. стр. 11).

Теорема 3.7. *Если все три числа $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ — числа простые и n — натуральное число, то числа $A = 2^n pq$ и $B = 2^n r$ есть числа дружественные.*

Доказательство

Заметим, что все три числа p, q и r — различны, а значит, взаимно просты. Напомним, что для простого числа p справедливо: $\sigma(p) = p + 1$.

1) Сравним $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\sigma(A) &= \sigma(2^n pq) = \sigma(2^n)\sigma(p)\sigma(q) = (2^{n+1} - 1)(p+1)(q+1) = \\
&= (2^{n+1} - 1) \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^n = \\
&= 9 \cdot 2^{2n-1} \cdot (2^{n+1} - 1); \\
\sigma(B) &= \sigma(2^n r) = \sigma(2^n)\sigma(r) = (2^{n+1} - 1)(r+1) = \\
&= 9 \cdot 2^{2n-1} \cdot (2^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

Значит, $\sigma(A) = \sigma(B)$.

2) Вычислим $A + B$. Имеем:

$$\begin{aligned}
A + B &= 2^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1) + 2^n(9 \cdot 2^{2n-1} - 1) = \\
&= 2^n \left[(3 \cdot 2^{n-1} - 1)(3 \cdot 2^n - 1) + (9 \cdot 2^{2n-1} - 1)\right] = \\
&= 2^n \left[9 \cdot 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} - 3 \cdot 2^n + 1 + 9 \cdot 2^{2n-1} - 1\right] = \\
&= 2^n \cdot 2^{n-1} \left[9 \cdot 2^n - 3 - 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2^n\right] = \\
&= 2^{2n-1} \left[2 \cdot 9 \cdot 2^n - 9\right] = \\
&= 9 \cdot 2^{2n-1} \cdot (2^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

Значит, $A + B = \sigma(A) = \sigma(B)$.

Следовательно, по критерию получаем, что числа A и B являются дружественными. ■

Задача 90. *Найдите пару дружественных чисел, используя теорему Сабита для случая $n = 2$.*

Найдем числа p, q, r при $n = 2$. Имеем:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5, \quad q = 3 \cdot 2^n - 1 = 3 \cdot 4 - 1 = 11,$$

$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 = 9 \cdot 8 - 1 = 71,$$

$$A = 2^n pq = 4 \cdot 5 \cdot 11 = 220 \quad \text{и} \quad B = 2^n r = 4 \cdot 71 = 284.$$

Так как числа 5, 11 и 71 являются простыми, то по теореме Сабита числа 220 и 284 являются дружественными. ■

Задача 91. *Используя теорему Сабита, найдите пары дружественных чисел при $n = 4$ и $n = 7$.*

Теорему Сабита независимо друг от друга переоткрыли Ферма в 1636 году и Декарт в 1638 году. Ферма по этой теореме нашел пару дружественных чисел 17 296 и 18 416; Декарт же указал пару 9 363 584 и 9 437 056.

3.23. "Рецепт" получения дружественных чисел

На самом деле, можно предложить теоремы, аналогичные теореме Сабита, по которым также можно получать пары дружественных чисел. Такие теоремы называются "правилами Сабита".

Рассмотрим один из способов ("рецепт"), по которому из уже известных дружественных чисел можно получить ("изготовить") новые дружественные числа.

Теорема 3.8 (Вальтер Боро). *Пусть $A = a \cdot u$ и $B = a \cdot s$ — дружественные числа, причем s — простое число и $a \nmid s$. Рассмотрим числа:*

$$p = u + s + 1, \quad q_1(n) = (u+1)p^n - 1, \quad q_2(n) = (u+1)(s+1)p^n - 1, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

Если числа p, $q_1(n)$, $q_2(n)$ являются простыми и число a не делится на число p, то числа

$$C = A \cdot p^n \cdot q_1(n), \qquad D = a \cdot p^n \cdot q_2(n)$$

являются дружественными.

Доказательство

Пусть $A = a \cdot u$ и $B = a \cdot s$ — дружественные числа, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда по критерию дружественности чисел получаем, что $A + B = \sigma(B)$, значит, $a(u+s) = \sigma(a) \cdot \sigma(s) = \sigma(a) \cdot (s+1)$. Тогда $a = \dfrac{\sigma(a) \cdot (s+1)}{u+s}$. Заметим, что число a не обязательно является простым.

Так как

$$C = A \cdot p^n \cdot q_1(n), \qquad D = a \cdot p^n \cdot q_2(n)$$

и числа $A, p^n, q_1(n)$, так же как и числа $a, p^n, q_2(n)$, попарно взаимно просты, то

$$\sigma(C) = \sigma(A) \cdot \sigma(p^n) \cdot \sigma(q_1(n)) = (A+B) \cdot \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \cdot (q_1(n)+1) =$$

$$= a \cdot (u+s) \cdot \frac{p^{n+1}-1}{u+s} \cdot (u+1) \cdot p^n = a \cdot (u+1) \cdot p^n \cdot (p^{n+1}-1)$$

и

$$\sigma(D) = \sigma(a) \cdot \sigma(p^n) \cdot \sigma(q_2(n)) = \sigma(a) \cdot \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \cdot (u+1) \cdot (s+1) \cdot p^n =$$

$$= (u+1) \cdot p^n \cdot (p^{n+1}-1) \cdot \left(\frac{\sigma(a) \cdot (s+1)}{u+s}\right) = a \cdot (u+1) \cdot p^n \cdot (p^{n+1}-1).$$

Значит, $\sigma(C) = \sigma(D)$.

Далее, найдем сумму $C + D$. Имеем:

$$C + D = Ap^n q_1(n) + ap^n q_2(n) = aup^n q_1(n) + ap^n q_2(n) = ap^n(uq_1(n) + q_2(n)) =$$

$$= ap^n\Big(u((u+1)p^n - 1) + (u+1)(s+1)p^n - 1 \Big) =$$

$$= ap^n\Big(u(u+1)p^n - u + (u+1)(s+1)p^n - 1 \Big) =$$

$$= ap^n\Big((u+1)p^n(u+s+1) - (u+1) \Big) =$$

$$= ap^n\Big((u+1)p^n \cdot p - (u+1) \Big) = ap^n(u+1)(p^{n+1}-1).$$

Следовательно, $\sigma(C) = \sigma(D) = C + D$. Значит, числа C и D являются дружественными. ∎

Рассмотрим использование данного "рецепта приготовления" пар дружественных чисел в применении к парам дружественных чисел 220, 284 и 11 498 355, 12 024 045.

1) $A = 220 = 2^2 \cdot 55$, $B = 284 = 2^2 \cdot 71$, $a = 2^2$, $u = 55$, $s = 71$. Число $s = 71$ — простое. Число $p = u + s + 1 = 127$ — также простое и $a \not| p$. Рассмотрим числа

$$q_1(n) = (u+1)p^n - 1 = 56 \cdot 127^n - 1,$$
$$q_2(n) = (u+1)(s+1)p^n - 1 = 4032 \cdot 127^n - 1, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

a) При $n = 1$ имеем: $q_1(1) = 7\,111$ и $q_2(1) = 512\,063$. Так как $7\,111 = 13 \cdot 547$, то число $q_1(1)$ не является простым.

b) При $n = 2$ имеем: $q_1(2) = 903\,223$ и $q_2(2) = 65\,032\,127$. Можно доказать, что числа 903 223 и 65 032 127 являются простыми.

Следовательно, числа

$C = A \cdot p^2 \cdot q_1(2) = 220 \cdot 127^2 \cdot 903\,223 = 3\,204\,978\,428\,740$,

$D = a \cdot p^2 \cdot q_2(2) = 2^2 \cdot 127^2 \cdot 65\,032\,127 = 4\,195\,612\,705\,532$

являются дружественными.

2) $A = 11\,498\,355 = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89$, $B = 12\,024\,045 = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2\,699$, $a = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 = 4\,455$, $u = 29 \cdot 89 = 2\,581$, $s = 2\,699$. Число $s = 2\,699$ — простое. Число $p = u + s + 1 = 5\,281$ — также простое и $a \not| p$. Рассмотрим числа

$$q_1(n) = (u+1)p^n - 1 = 2\,582 \cdot 5\,281^n - 1,$$
$$q_2(n) = (u+1)(s+1)p^n - 1 = 6\,971\,400 \cdot 5\,281^n - 1, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

Видим, что даже при $n = 1$ числа $q_1(1)$ и $q_2(1)$ очень большие. Можно проверить, что $q_1(1) = 13\,635\,541$ и $q_2(1) = 36\,815\,963\,399$ — простые числа.

Следовательно, числа

$C = A \cdot p^1 \cdot q_1(1) = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89 \cdot 5\,281 \cdot 13\,635\,541 =$

$= 827\,988\,402\,956\,125\,455$,

$D = a \cdot p^1 \cdot q_2(1) = 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 5\,281 \cdot 36\,815\,963\,399 =$

$= 866\,163\,832\,573\,580\,145$

являются дружественными.

Задача 92. *Покажите, что найденные числа* $C = 220 \cdot 127^2 \cdot 903\,223 = 3\,204\,978\,428\,740$, $D = 2^2 \cdot 127^2 \cdot 65\,032\,127 = 4\,195\,612\,705\,532$ *действительно являются дружественными.*

3.24. Нерешенные вопросы о дружественных числах

Среди дружественных чисел есть и пары нечетных чисел. Примером является пара чисел 87 633 и 69 615. Эту пару дружественных чисел нашел Эйлер.

Задача 93. *Докажите, что числа 87633 и 69615 являются дружественными.*

Вспомним, что вопрос о существовании нечетных совершенных чисел является открытым; нет ни одного примера такого числа и не доказано, что таких чисел нет. Для дружественных чисел есть аналогичная проблема: нет ни одного примера пары дружественных чисел, среди которых одно четное, а другое нечетное, и не доказано, что таких пар не существует.

Задача 94. *Докажите, что среди пар дружественных чисел нет ни одной, содержащей простое число.*

Далее, рассмотрим таблицу пар дружественных чисел A и B (нечетные числа выделены курсивом).

№	A	B	$A+B$
1	220	284	504
2	1184	1210	2394
3	2620	2924	5544
4	5020	5564	10584
5	6232	6368	12600
6	10744	10856	21600
7	*12285*	*14595*	26880

№	A	B	$A+B$
7	*12285*	*14595*	26880
8	17296	18416	35712
9	63020	76084	139104
10	66928	66992	133920
11	*67095*	*71145*	138240
12	*69615*	*87633*	157248
13	79750	88730	168480

Легко проверить, что сумма четных дружественных чисел кратна 9, а все нечетные дружественные числа кратны 3. Возникает вопрос о справедливости этих свойств для всех пар дружественных чисел (так называемая гипотеза Брэтни–Мак-Кэйя). Например, для дружественных четных пар, получаемых по теореме Сабита, это верно, так как

$$A + B = 9 \cdot 2^{2n-1} \cdot (2^{n+1} - 1),$$

а значит, $A + B \vdots 9$. В общем же случае это не доказано.

Упражнения и задачи

95. Найдите каноническое разложение числа 312 439.

96. Докажите, что $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

97. Докажите, что число, делящееся нацело на число 12, не является совершенным.

98. Докажите, что из двенадцати последовательных натуральных чисел хотя бы одно меньше суммы своих собственных делителей. (Как следствие: из двенадцати последовательных чисел хотя бы одно не является совершенным.)

99. Даны два натуральных числа A и B. Выписываются все различные делители числа A: $d_1, d_2, \ldots, d_s$ и все различные делители числа B: $c_1, c_2, \ldots, c_t$. (Само число и число 1 тоже включается в число делителей.) Оказалось, что

$$d_1+d_2+\ldots+d_s = c_1+c_2+\ldots+c_t \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_s} = \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}+\ldots+\frac{1}{c_t}.$$

Докажите, что $A = B$.

100. Найдите орбиту числа 34 относительно функции η.

101. Найдите орбиту числа 25 относительно функции Υ.

102. Покажите, что совершенное число 6 является "совершенным" и относительно функции Υ. Приведите примеры "дружественных" натуральных чисел относительно функции Υ. Является ли совершенное число 28 "совершенным" относительно функции Υ?

103. Какие натуральные числа являются "совершенными" или "дружественными" относительно функции Υ?

104. Докажите, что хотя бы одно из чисел Мерсенна $M(1), M(2), M(3), \ldots, M(n-1)$, где n — нечетное число, большее или равное 3, делится на n.

105. Пусть $m < n$ — натуральные числа, а r — остаток от деления n на m. Докажите, что остаток от деления $M(n)$ на $M(m)$ равен $M(r)$.

106. Докажите справедливость формулы:

$$a^n - b^n = (a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}),$$

где a и b — произвольные числа, n — натуральное число.

107. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо: $(7^n - 6 \cdot 2^n) \vdots 5$.

108. Докажите, что наибольший общий делитель двух чисел Мерсенна есть число Мерсенна. Более того, докажите, что $(M(n); M(k)) = M((n; k))$.

109. Для чисел, задаваемых некоторыми способами или формулами, отличных от чисел Мерсенна, также существуют теоремы, указывающие, какого вида могут быть их простые делители.

a) (Числа Фибоначчи.) Докажите, что у числа Фибоначчи с нечетным номером все его нечетные делители имеют вид $q = 4t + 1$ (а значит, и простые делители имеют такой вид). Проверьте на простоту число Фибоначчи u_{19}.

b) (Числа Ферма.) История чисел Ферма очень схожа с историей чисел Мерсенна. Ферма знал, что если $F = 2^m + 1$ простое, то m должно быть степенью числа 2, то есть $F = F(n) = 2^{2^n} + 1$. В письме, адресованном шевалье Френиклю, Ферма выписал эти числа для $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$3, \quad 5, \quad 17, \quad 257, \quad 65\,537, \quad 4\,294\,967\,297, \quad 18\,446\,744\,073\,709\,551\,617.$$

Затем Ферма предположил, что все числа вида $F(n) = 2^{2^n} + 1$ простые.

На самом деле, на сегодняшний день известно, что простыми числами являются лишь $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$.

Одним из методов определения простоты чисел Ферма является метод Эйлера: *если q — простой делитель числа $F(k)$, то найдется такое натуральное r, что $q = 1 + 2^{k+1}r$.* Используя метод Эйлера, выясните простоту числа Ферма $F(5) = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$.

110. Докажите справедливость формулы:

$$a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n} - a^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - a + 1),$$

где a — произвольное число, n — натуральное число.

111. Докажите, что число Мерсенна, большее 1, не может быть степенью натурального числа с показателем, большим 1.

112. Докажите, что следующие условия равносильны:

1) существует конечное число натуральных чисел n, для которых из чисел n и $n + 1$ имеется только один простой делитель;

2) существует конечное число простых чисел Мерсенна и Ферма.

113. Докажите, что если разность между некоторым кубом натурального числа и некоторым квадратом натурального числа равна ± 1, то этот куб равен 8, а квадрат равен 9. (Эта задача связана с *гипотезой Каталана*: существуют ли два последовательных натуральных числа, отличных от 8 и 9, каждое из которых является степенью простого числа.)

114. Предложите другой способ доказательства того, что не существует совершенных чисел вида $p^\alpha q^\beta$, для простых чисел $p \geq 3$, $q \geq 5$ и натуральных α, β.

115. На концах отрезка стоит по единице. Первым шагом между ними ставится их сумма — число 2. Следующим шагом между каждыми двумя соседними числами ставится их сумма (при этом получается последовательность чисел $1 - 3 - 2 - 3 - 1$) и так далее. Докажите, что любое число a, большее 1, будет записано на этом отрезке ровно $\varphi(a)$ раз. Через сколько шагов указанной процедуры последний раз число a "породится" соседними числами?

116. Докажите, что значение функции Эйлера от числа, большего 2, есть число четное.

117. Аналогично вопросам о решении уравнения $\eta(x) = a$ относительно x с функцией η могут возникнуть вопросы о подобных уравнениях относительно других функций.

a) Предложите оценки границ решений уравнения $\varphi(x) = a$ относительно x с функцией Эйлера.

b) Решите уравнение $\varphi(x) = 6$.

c) Решите уравнение $\varphi(x) = 14$.

d) Решите уравнение $\varphi(x) = p$, где p — простое число.

118. Докажите, что $\dfrac{a^2}{2} < \varphi(a)\sigma(a) < a^2$ для любого натурального a.

ГЛАВА 4

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

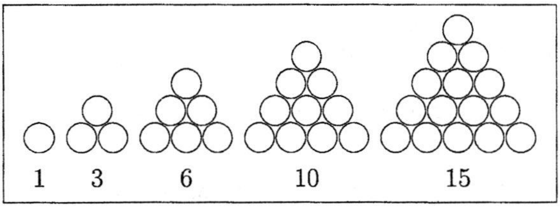
4.1. Фигурные числа

Построение фигуры той или иной формы, которая была бы равновелика данной, и родственные задачи составляют существенную часть греческой математики.

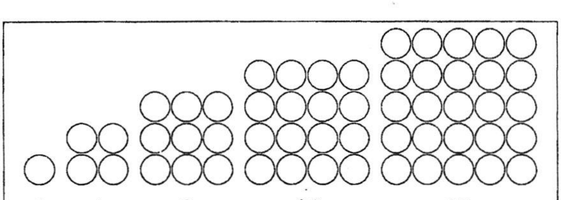
Строительное искусство требовало складывания фигур треугольной, квадратной или многоугольной формы из квадратных плит или кирпичей. Эта задача, по всей вероятности, дала начало учению о треугольных, квадратных и вообще о многоугольных числах, которые впоследствии стали называть *фигурными числами.*

Если мы возьмем некоторое количество шаров и из них сможем сложить равносторонний треугольник, то число, соответствующее этому количеству шаров, называют *треугольным.* Если же из взятых шаров можно сложить квадрат, то соответствующее число называют *квадратным.*

Треугольными числами являются: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 и так далее.

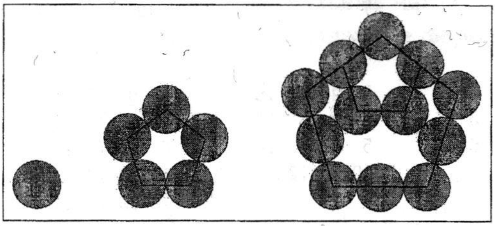


Квадратными числами являются: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и так далее.



Пример 43. *Первыми тремя пятиугольными (иногда еще говорят "пентагональными") числами являются числа 1, 5, 12 соответственно.*

Для изображения второго пятиугольного числа пять шаров располагаем в вершинах правильного пятиугольника; для изображения третьего пятиугольного числа выкладываем 7 шаров к построенному уже правильному пятиугольнику из 5 шаров так, чтобы шары, образующие периметр, образовывали правильный пятиугольник. Тем самым получаем следующие изображения первого, второго и третьего пятиугольного числа (первое пятиугольное число, понятно, изображается в виде одного шара):



Фигурные числа можно также получить чисто арифметически. Действительно, натуральный ряд чисел $1, 2, 3, \ldots$ начинается с единицы, а все последующие числа получаются прибавлением единицы к предшествующему числу. Естественно приходит мысль составить последовательность, начинающуюся с единицы, в которой каждое число получается прибавлением к предыдущему числу не единицы, а некоторого другого числа, например, 2 или 3. Таким образом получаются последовательности

$$\begin{array}{l}
1,\ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ldots,\ 1n-0,\ \ldots,\\
1,\ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots,\\
1,\ 4,\ \ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \ldots,\ 3n-2,\ \ldots,\\
1,\ 5,\ \ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25,\ \ldots,\ 4n-3,\ \ldots,\\
1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ 31,\ \ldots,\ 5n-4,\ \ldots,\\
1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37,\ \ldots,\ 6n-5,\ \ldots
\end{array}$$

и так далее.

Находя суммы одного, двух, трех и так далее чисел выписанных последовательностей, получаем последовательности фигурных чисел

$$\begin{array}{l}
1,\ 3,\ \ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ 28,\ \ldots \text{ — треугольные числа,}\\
1,\ 4,\ \ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ 49,\ \ldots \text{ — квадратные числа,}\\
1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ 51,\ \ 70,\ \ldots \text{ — пятиугольные числа,}
\end{array}$$

1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, ... — шестиугольные числа,
1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, ... — семиугольные числа,
1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, ... — восьмиугольные числа

и так далее.

Построить многоугольные числа можно способами, указанными на следующих рисунках:

1

1	3
2	

1	3	6
2	5	
4		

1	3	6	10
2	5	9	
4	8		
7			

1	3	6	10	15
2	5	9	14	
4	8	13		
7	12			
11				

1	3	6	10	15	21
2	5	9	14	20	
4	8	13	19		
7	12	18			
11	17				
18					

1

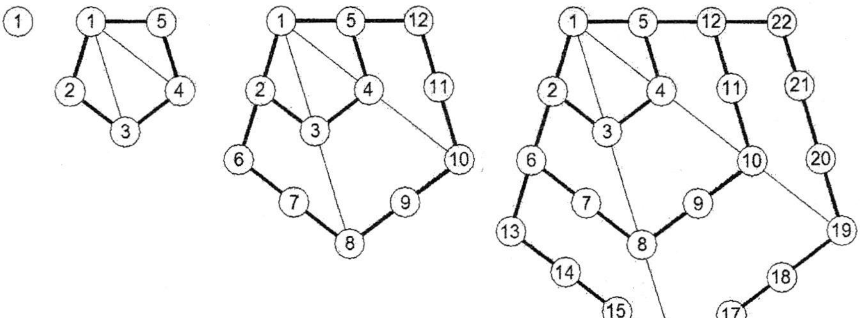
1	4
2	3

1	4	9
2	3	8
5	6	7

1	4	9	16
2	3	8	15
5	6	7	14
10	11	12	13

1	4	9	16	25
2	3	8	15	24
5	6	7	14	23
10	11	12	13	22
17	18	19	20	21

1	4	9	16	25	36
2	3	8	15	24	35
5	6	7	14	23	34
10	11	12	13	22	33
17	18	19	20	21	32
26	27	28	29	30	31



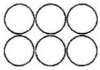
Рассматривая вопрос об изображении фигурных чисел, касаемся еще одного важного вопроса о построении правильных многоугольников. В задаче №109.b) упоминаются знаменитые числа Ферма. Оказывается, что ответ на названный вопрос непосредственно касается этих чисел. А именно: справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 (Гаусс). *Правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки в том и только в том случае, когда $n = 2^m \cdot p_1 p_2 \ldots p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа Ферма.*

Это утверждение было доказано Гауссом (Carl Friedrich Gaauss) (1777–1855) на рубеже XVIII и XIX веков. Например, с помощью циркуля и линейки можно построить правильный 17-угольник, так как число 17 есть простое число Ферма. Несмотря на достаточно энергичные попытки, до сих пор не найдено ни одного простого числа Ферма, отличного от первых пяти (см. задачу №109.b)), так что неизвестно, конечно или бесконечно количество правильных многоугольников с простым числом сторон, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

Вернемся к рассмотрению фигурных чисел.

Также можем рассматривать прямоугольные числа, равные произведению двух соседних чисел, то есть числа, заданные формулой $n \cdot (n+1)$:

 — прямоугольное число $2 \cdot 3 = 6$.

Квадратные плиты (кирпичики) были основным строительным материалом в Индии и в особенности в соседнем с ней Вавилоне, совершенно лишенном камня и дерева. Равновеликость фигур (то есть равенство площадей фигур) определялась по числу этих плит.

Эта задача строительного искусства выдвинула вопрос об определении числа плит, необходимых для получения треугольной, квадратной или многоугольной фигуры с заданной величиной площади.

Решение этой задачи требовало изучения свойств последовательностей чисел натурального ряда. Этими вопросами занимались вавилоняне, индусы, а позднее — греческие математики, в особенности Пифагор и его школа.

В жизнеописаниях Пифагора рассказывается о пребывании его в Индии, Египте и Вавилоне. Вероятно, многие приписываемые ему открытия, в том числе учение о фигурных числах, были им получены в путешествиях по данным странам. Фигурные числа также изучали Эратосфен, Никомах. Дань этому увлечению отдает и отец греческой алгебры Диофант (III в.), написавший о них целую книгу, дошедшую до нас.

Именно от фигурных чисел пошло выражение "возвести число в квадрат или куб".

Пусть P_n^k — n-е k-угольное число. Например, символ P_2^3 означает второе по счету треугольное число, которое равно 3; P_3^4 — третье четырехугольное (то есть квадратное) число, равное 9.

В общем случае выражение P_n^k находится по формуле:

$$P_n^k = n + (k-2) \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Например, для нахождения треугольных чисел используется формула:

$$P_n^3 = n + (3-2) \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

а для квадратных — формула:

$$P_n^4 = n + (4-2) \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = n^2.$$

4.2. Все началось с Пифагора

Пифагор — едва ли не самый популярный ученый за всю историю человечества; миллионы людей знают это имя благодаря его известной со школьной скамьи теореме.

Пифагор был основателем первой научной школы. Он был властителем дум, проповедником собственной этики, обладающим невероятной силой духа и силой воздействия.

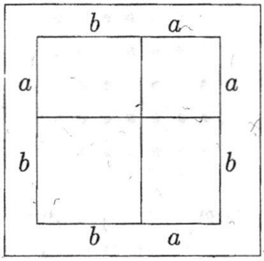
Годы жизни этого великого человека определены лишь приближенно: ок. 530–ок. 430 гг. до н.э.

Пифагорейская система знаний состояла из четырех разделов: арифметики (учение о числах), геометрии (учение о фигурах и их измерении), музыки (учение о гармонии или теория музыки) и астрономии (учение о строении Вселенной). Все четыре направления стали называть одним словом — математика, что означает "учение", "знание".

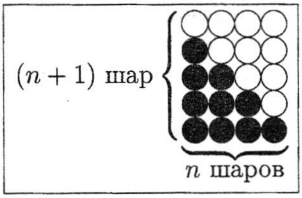
Пифагор сродни Фалесу (Thales) (ок. 624–548 до н.э.); как тот, так и другой не просто выдвигали утверждения о тех или иных объектах исследований, а доказывали их. Точно так же, как Фалес в геометрии, Пифагор начал в арифметике с простейших фактов, относительно которых ранее не ощущалось потребности в доказательстве. Пифагор первым стал использовать при доказательствах метод от противного.

Раздел пифагорейской математики — учение о четном и нечетном — положил начало теории чисел. В "Началах" Евклида (книга IX) это учение передано "слово в слово", в неизмененном виде.

Сейчас (да и раньше) очень часто пользуются "наглядным" доказательством, то есть, например, с помощью рисунка. Например, для доказательства равенства $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ достаточно знать формулу площади прямоугольника, а все остальное подскажет рисунок:

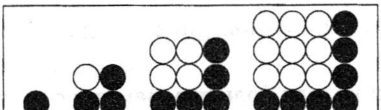


Чтобы получить общее выражение P_n^3 для n-го треугольного числа, которое есть не что иное, как сумма n натуральных чисел $1+2+3+\ldots+n$, достаточно дополнить это число до прямоугольного числа $n\cdot(n+1)$ и увидеть (именно увидеть глазами!) равенство



$$1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Написав последовательность квадратных чисел, опять-таки легко увидеть выражение для суммы n нечетных чисел:

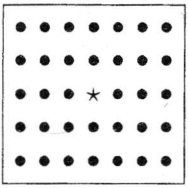


$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2.$$

"Наглядным" доказательством пользовался и Пифагор для доказательства свойств четных и нечетных чисел (надо учитывать тот факт, что сейчас мы легко обозначаем неизвестное число или величину буквой (например, x), но в то время люди еще до этого не догадывались, да и развитой символики не было). Пифагор придумал замечательный способ доказательства общих утверждений о числах: он стал изображать числа точками. Картинки получались двух видов: у одних чисел была средняя точка

($\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ — 5), а у других такой точки не было ($\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ $\bullet$ — 4). Первые числа были нечетными, а вторые — четными.

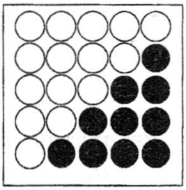
Чтобы доказать, что произведение двух нечетных чисел нечетно, Пифагор строил из точек прямоугольник:



Так как и снизу, и сбоку есть средняя точка, то найдется она и во всем прямоугольнике (отмечена $\star$). А значит, число точек в прямоугольнике нечетно. Следовательно, произведение двух нечетных чисел нечетно.

Своеобразным связующим звеном между геометрией и арифметикой была теория фигурных чисел, устанавливающая взаимосвязь чисел с геометрическими фигурами.

Действительно, разрезая и складывая фигуры, которым соответствуют числа, можно установить свойства этих чисел. Например, из следующего рисунка



видно, что всякое квадратное число является суммой двух соседних треугольных чисел.

В числах Пифагор и его последователи видели большее, чем просто числа; они вдохнули в них жизнь, давая им право на существование, полное волшебства, как если бы речь шла о чем-то, что может поведать намного больше о реальной жизни. Вспомним, что в Древней Греции числа изображались буквами алфавита и поэтому каждому написанному слову соответствовало некоторое число. Перерабатывая эти числа, можно было рассказать много любопытного о "носителе" слова, соответствующего этому числу (гадания и предсказания по имени человека и так далее). Отсюда зародилась числовая магия и мистика.

Начав с побед в Олимпийских играх, первые исследования, как ученый, Пифагор провел в области музыки. Открыв связь музыкальной гармонии с числами (столь эфемерное физическое явление, как звук и тем более приятное созвучие, поддавалось числовой характеристике, и день, когда было сделано это открытие, немецкий физик А. Зоммерфельд назвал днем рождения математической физики), Пифагор решил, что не только законы музыки, но и вообще все на свете можно выразить с помощью чисел. Пифагор провозгласил, что числа правят миром. При осмыслении "всего мира" через числа в основе лежала следующая мысль: "Все познаваемое, конечно же, имеет число: ведь без него невозможно ничего ни помыслить, ни познать".

С помощью чисел Пифагор смог выразить такие понятия, как справедливость, совершенство, дружба. Например, справедливость Пифагор и его ученики изображали числом 4 — оно является первым произведением равных множителей: $2 \cdot 2 = 4$ (единица не была полноправным числом, а представлялась как некий "числовой атом", из которого образовывались все числа). Как и вавилоняне, четные числа Пифагор считал женскими, а нечетные мужскими (в нынешнем календаре не случайно месяцы июль и август содержат нечетное количество дней, ибо они названы в честь двух великих правителей Римской империи — Юлия Цезаря и Октавиана Августа). Поэтому бракосочетание обозначалось числом 5 — сумма первого нечетного и первого четного чисел: $2 + 3 = 5$.

Чтобы изобразить совершенство, Пифагор использовал собственные делители числа. Если при сложении собственных делителей числа сумма оказывалась меньше самого числа, оно объявлялось недостаточным (таковым является число 14, так как $1 + 2 + 7 = 10 < 14$), а если больше — то избыточным (например, число 12, так как $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16 > 12$). И только в случае, когда сумма в точности равнялось числу, его объявляли совершенным.

Древним грекам были известны только четыре первых совершенных числа: 6, 28, 496 и 8128. Совершенные числа очень ценились. Даже в XII веке церковь утверждала, что для спасения души достаточно найти пятое число. Это число было найдено только в XV веке (33 550 336 — пятое совершенное число).

Совершенное число 6 пользуется большой популярностью в описании многих явлений и представлений. Недаром в Библии сказано, что мир был создан за шесть дней: ведь это же *первое* совершенное число! Святой

Августин (Saint Augustine) (354–430) в своем знаменитом "Городе Бога" писал: "Шесть есть совершенное число, и не поэтому ли Бог создал все за шесть дней; скорее верно обратное. Бог создал все за шесть дней, потому что это число является совершенным".

В Вавилоне и Древнем Египте рука с загнутым безымянным пальцем обозначала также число шесть. Тем самым этот палец сам стал причастен к совершенству и за ним закрепилась привилегия носить обручальное кольцо.

Основные положения теории фигурных чисел не попали в собрание Евклида. Они, в частности, даются в популярной форме в книгах выдающегося греческого философа и математика Никомаха из Герассы. Также у Никомаха рассматриваются совершенные числа. Он пишет: "Совершенные числа прекрасны. Однако известно, что прекрасные вещи редки, негодных же всюду полно".

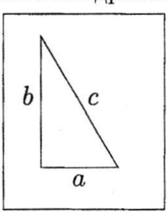
Есть легенда, которая гласит, что когда Пифагора спросили, что такое дружба, он ответил: "220 и 284". Так возник термин "дружественные числа": каждое из них равняется сумме собственных делителей другого. До XVII века эта пара чисел 220 и 284 оставалась единственной известной парой дружественных чисел; лишь Ферма сумел отыскать новую пару дружественных чисел 17 296 и 18 416.

Теперь занятия Пифагора кажутся нам ненужной забавой. Какое отношение к дружбе имеют числа 220 и 284? Но нельзя забывать, что с этих забав началось серьезное знакомство людей с числами.

4.3. Теорема Пифагора

Говоря о Пифагоре, чаще всего вспоминают теорему, носящую его имя.

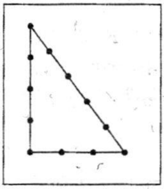
Теорема Пифагора звучит так: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов этого треугольника.



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Задача состоит в том, чтобы найти все тройки натуральных чисел a, b и c такие, что было бы верно равенство $c^2 = a^2 + b^2$. Эти тройки называются *пифагоровыми тройками*.

Для практических целей нужна теорема, обратная теореме Пифагора (если в треугольнике стороны a, b и c связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$, то такой треугольник прямоугольный), с помощью которой на самом деле можно построить прямой угол (например, как в древние времена во время разметки и закладки того или иного сооружения). Тогда с помощью веревки с 12 узелками можно построить прямой угол:

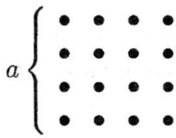


$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

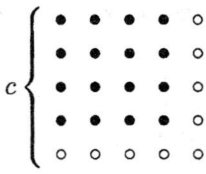
Прямоугольный треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5 упоминается еще в папирусе времен фараона Аменемхета I, датированном около 2000 года до н.э., хранящемся в Египетском музее в Берлине. Поэтому сегодня треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5 называют египетским.

Развивая идеи о фигурных числах, Пифагор пришел к тому, что зависимость сторон прямоугольного треугольника тоже связана с этими числами. При исследовании свойств квадратных чисел был, вероятно, найден и метод определения пифагоровых троек. Его можно представить следующим образом.

Строим квадратное число:



Добавляем еще точки так, чтобы при этом получилось следующее квадратное число:



Видим, что $c = a + 1$. Ряд из белых точек называют гномоном.

Гномоном (переводится как "знаток", "толкователь") пифагорейцы называли число или фигуру (на рисунке — белые точки), которая, будучи приложенной к основной фигуре (черные точки), сохраняет ее форму. Первоначально гномоном (буквально "тот, кто знает") греки называли солнечные часы. Впоследствии число и стало для пифагорейцев таким гносеологическим гномоном, дававшим возможность различать вещи и тем самым овладевать ими в сознании. Методом гномона растут все живые организмы, что позволяет им сохранять свою индивидуальную форму.

Прибавляя к квадрату гномон, мы получаем следующий квадрат. Следовательно, нужно найти такой гномон, который сам был бы квадратным числом, то есть количество точек в гномоне равнялось бы m^2.

Глядя на рисунок, заключаем, что $m^2 = 2a + 1$. Тогда

$$a = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{и} \quad c = a + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}.$$

Значит,

$$a^2 + m^2 = c^2 \quad \text{или} \quad m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2.$$

Так как $m^2 = 2a + 1$, то число m — нечетное. Например, для $m = 13$ получаем:

$$m = 13, \quad a = \frac{13^2 - 1}{2} = 84, \quad c = \frac{m^2 + 1}{2} = 85,$$

при этом $13^2 + 84^2 = 85^2$, то есть получили пифагорову тройку: 13, 84, 85.

Задавая m нечетные значения, будем получать пифагоровы тройки:

$m = 3$: $3, 4, 5$;

$m = 5$: $5, 12, 13$;

$m = 7$: $7, 24, 25$

и так далее.

Платон дал более общее решение этой задачи:

$$\begin{cases} a = 2n, \\ b = n^2 - 1, \\ c = n^2 + 1, n = 2, 3, 4, \ldots, \end{cases}$$

где число n уже не обязательно является нечетным. Но следует заметить, что решения, получаемые по формулам Платона, не исчерпывают множество всех пифагоровых троек.

Задача 119. *Укажите хотя бы одну пифагорову тройку, не являющуюся решением системы формул Платона.*

Общее же решение уравнения в натуральных числах вида $x^2 + y^2 = z^2$ имеет вид:

$$\begin{cases} x = 2pq, \\ y = p^2 - q^2, \\ z = p^2 + q^2, \quad p > q \end{cases}$$

при любых натуральных значениях чисел p и q.

В Колумбийском университете города Нью-Йорка хранится глиняная табличка с древневавилонским клинописным текстом, содержащим 15 наборов пифагоровых троек, среди которых есть и такая нетривиальная тройка как 12 709, 13 500, 18 541. Невозможно вообразить, что такая тройка была получена перебором. Наверное, у вавилонян были свои способы получения таких чисел.

Задача 120. *Найдите значения чисел p и q для получения пифагоровой тройки* 12 709, 13 500, 18 541.

Но вопрос об обнаружении пифагоровых троек был поставлен в общем виде (что было чуждо и древним египтянам, и древним вавилонянам) и решен только пифагорейцами.

Видим, что учение о фигурных числах помогло в решении задачи о нахождении пифагоровых троек, и можем сказать, что математика не только решает задачи, а на основе их уточнения, обобщения математика сама развивается, находит новые применения накопленным знаниям.

4.4. Треугольность совершенных четных чисел

Пусть A — совершенное четное число. Тогда существует простое число s такое, что

$$A = 2^s(2^{s+1} - 1),$$

где число $2^{s+1} - 1$ — простое.

Покажем, что существует натуральное число r такое, что

$$1 + 2 + \ldots + r = A$$

или

$$\frac{r+1}{2} \cdot r = A.$$

Последнее равенство можно записать в виде квадратного уравнения

$$r^2 + r - 2A = 0$$

относительно r. Тогда

$$r = \frac{\sqrt{8A+1} - 1}{2}.$$

Рассмотрим число $8A + 1$. Имеем:

$$8A+1 = 8\cdot 2^s(2^{s+1}-1)+1 = 2^{s+3}(2^{s+1}-1)+1 = 2^{2s+4}-2\cdot 2^{s+2}+1 = (2^{s+2}-1)^2,$$

то есть $8A + 1 = (2^{s+2} - 1)^2$.

Тогда

$$r = 2^{s+1} - 1.$$

Значит,

$$1 + 2 + \ldots + (2^{s+1} - 1) = A.$$

Если, например, $A = 28$, то $s = 2$, $r = 7$ и

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Следовательно, **любое совершенное четное число является треугольным**.

Задача 121. *Предложите другой способ доказательства треугольности совершенных четных чисел.*

4.5. Ферма о "разложении" чисел на фигурные

Разложить натуральное число на фигурные числа значит представить данное число в виде суммы однотипных фигурных чисел (не обязательно разных), то есть представить в виде суммы либо нескольких треугольных чисел, либо нескольких квадратных чисел и так далее. Например, число 35 можно записать в виде суммы треугольных чисел 1, 6 и 28:

$$35 = 1 + 6 + 28,$$

а также в виде суммы квадратных чисел 1, 9 и 25:

$$35 = 1 + 9 + 25 \quad \text{или} \quad 35 = 1 + 9 + 9 + 16.$$

В свое время Ферма выдвинул следующую гипотезу: *всякое натуральное число есть сумма не более трех треугольных чисел, не более четырех квадратных чисел, не более пяти пятиугольных чисел и так далее.* Справедливость этой гипотезы была доказана Коши (Cauchy) в 1815 году.

Доказательство того, что любое натуральное число есть сумма трех треугольных чисел, может быть основано на следующем факте:

любое число вида $8n+3$, где $n>0$, есть сумма трех квадратов.

Другими словами, для любого натурального числа вида $8n+3$ справедливо равенство:

$$8n+3=u^2+v^2+w^2,$$

где u, v, w — натуральные числа.

Эта теорема является частным случаем теорем, которые были доказаны Гауссом. Есть также доказательства этого факта, основанные на свойствах особых "чисел", называемых кватернионами.

Задача 122. *Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трех кубов.*

Задача 123. *Пусть $8n+3=u^2+v^2+w^2$, где $u, v, w \in \mathbb{N}$. Докажите, что числа u, v, w являются нечетными.*

Далее, так как для любого натурального числа n справедливо равенство:

$$8n+3=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2,$$

где x, y, z — натуральные числа, то

$$8n=\left((2x+1)^2-1\right)+\left((2y+1)^2-1\right)+\left((2z+1)^2-1\right),$$

$$8n=(2x+1-1)(2x+1+1)+(2y+1-1)(2y+1+1)+(2z+1-1)(2z+1+1),$$

$$n=\frac{2x(2x+2)}{8}+\frac{2y(2y+2)}{8}+\frac{2z(2z+2)}{8},$$

и окончательно

$$n=\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y+1)}{2}+\frac{z(z+1)}{2}.$$

Получили план разложения натурального числа n в виде суммы трех треугольных чисел: сначала раскладываем натуральное число $8n+3$ в сумму трех квадратов нечетных натуральных чисел, а затем, используя последнюю формулу, получаем разложение данного числа в виде суммы трех треугольных чисел.

Например, для $n = 35$ имеем:

$$8 \cdot 35 + 3 = 283 = 3^2 + 7^2 + 15^2$$

и тогда $x = 1$, $y = 3$, $z = 7$ и

$$35 = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{7 \cdot 8}{2} = 1 + 6 + 28.$$

Задача 124. *Представьте число 13 в виде суммы не более трех треугольных чисел.*

Заметим, что разложение натурального числа в сумму трех треугольных чисел может быть не единственно вследствие неединственности представления натурального числа в виде суммы трех квадратов. Например, число $83 = 8 \cdot 10 + 3$ может быть записано следующими способами:

$$83 = 3^2 + 5^2 + 7^2 \quad \text{и} \quad 83 = 1^2 + 1^2 + 9^2.$$

При этом получили, что треугольное число 10 представимо в виде суммы других треугольных чисел, а именно 1, 3 и 6.

Упражнения и задачи

125. Изобразите первое, второе и третье шестиугольные числа.

126. Можно ли из треугольного числа шаров сложить квадрат, сплошь заполненный шарами? (Другими словами, может ли треугольное число быть квадратным?)

127. Существуют ли квадратные совершенные четные числа?

128. Выясните некоторые свойства квадратных чисел.

a) Докажите, что $2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1$ — квадратное число.

b) Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на единицу, есть квадратное число.

c) Докажите, что если имеются два числа, каждое из которых может быть представлено в виде суммы двух квадратных чисел, то этим же свойством обладает и произведение этих чисел.

d) Докажите, что если убрать из квадратного числа шаров квадратное число шаров, то из оставшихся шаров можно сложить прямоугольник, сплошь заполненный шарами.

129. Докажите, что любое k-угольное число есть сумма нескольких треугольных чисел.

130. Выясните вопрос о фигурности чисел Ферма.

a) Докажите, что никакое треугольное число при делении на 3 не дает в остатке 2.

b) Какие числа Ферма являются треугольными?

c) Какие из чисел Ферма являются квадратными?

131. Учитывая, что любое совершенное четное число, за исключением числа 6, является треугольным (а значит, оно обладает всеми свойствами треугольных чисел), выясните, какие могут быть остатки от деления совершенного четного числа на число 3.

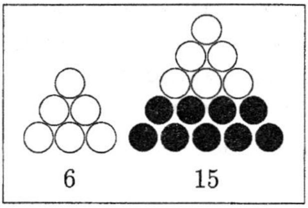
132. Докажите, что любое четное совершенное число является шестиугольным.

ГЛАВА 5

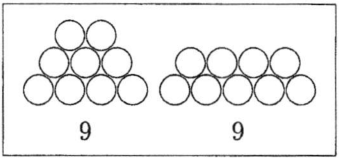
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СУММЫ ЧИСЕЛ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

5.1. Определение трапециевидных чисел

Определим трапециевидное число как разность двух треугольных чисел A и B, где $A > B$. При этом из трапециевидного числа шаров можно образовать равнобокую трапецию. Например, число 9 является трапециевидным, так как является разностью двух треугольных чисел 15 и 6:



Очевидно, что из треугольного числа шаров можно сложить лишь единственный правильный треугольник. Если же взять трапециевидное число шаров, то при этом может получиться так, что сможем сложить не только одну равнобокую трапецию. Например, из 9 шаров можно сложить две равнобокие трапеции:



Действительно, трапециевидное число 9 можно представить как разность двух треугольных чисел:

$$9 = 10 - 1 \quad \text{и} \quad 9 = 15 - 6.$$

Задача 133. *Является ли число 27 трапециевидным? Если да, то сколько существует равнобоких трапеций, составленных из 27 шаров?*

Задача 134. *Докажите, что любое трапециевидное число является разностью лишь конечного числа треугольных чисел.*

Для любого трапециевидного числа A существуют такие натуральные числа a и n, что

$$A = a + (a+1) + \ldots + (a+n),$$

то есть любое трапециевидное число есть сумма некоторой арифметической прогрессии с разностью, равной 1. Например, для трапециевидного числа 9 справедливо:

$$9 = 2+3+4 \quad \text{и} \quad 9 = 4+5.$$

Из определений треугольного и трапециевидного чисел следует, что такие числа являются суммами последовательных чисел натурального ряда, начиная с некоторого натурального числа. Поэтому если натуральное число является треугольным или трапециевидным, то будем говорить, что это *число является суммой чисел натурального ряда.*

Возникают вопросы:

1) какие натуральные числа являются треугольными или трапециевидными?

2) сколько существует представлений натурального числа в виде суммы чисел натурального ряда?

Последний вопрос касается количества равнобочных трапеций или правильных треугольников, которые можно сложить из данного числа шаров.

На эти вопросы дадут ответы следующие параграфы.

5.2. Условия треугольности или трапециевидности чисел

Легко показать, какие натуральные числа являются либо треугольными, либо трапециевидными.

Докажем, что справедливо следующее утверждение: *если число A имеет нечетный делитель, то есть $A = p(2q+1)$, где $p \geq 1$, $q \geq 1$, то число A можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.*

Действительно,

а) если $p \leq q$, то число $A = p(2q+1)$ равно сумме

$$(q-p+1) + (q-p+2) + \ldots + (q-p+2p)$$

и, следовательно, удовлетворяет требованию представимости в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел, причем количество слагаемых равно $2p$;
б) если $p > q$, то число $A = p(2q + 1)$ равно сумме

$$(p - q) + (p - q + 1) + (p - q + 2) + \ldots + (p - q + 2q),$$

количество слагаемых равно $1 + 2q$.

Верно и обратное.

Пусть A — есть сумма m, где $m \geq 2$, последовательных натуральных чисел, начиная с числа n, где $n \geq 1$. Тогда

$$A = n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + m - 1) = \frac{(2n + m - 1)m}{2}.$$

Покажем, что в этом случае число A имеет нечетный делитель.

Действительно,
а) если m — четное число, то есть $m = 2k$, где $k \geq 1$, то число $A = (2n + 2k - 1)k$ делится на нечетное число $2n + 2k - 1$;
б) если m — нечетное число, то есть $m = 2k + 1$, где $k \geq 1$, то число $A = (n + k)(2k + 1)$ делится на нечетное число $2k + 1$.

Итак, число A обязательно имеет нечетный делитель.

Из предложенных рассуждений легко определить, какие числа не являются ни треугольными, ни трапециевидными: *натуральное число не может быть представлено в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел тогда и только тогда, когда это число не имеет нечетных делителей*, то есть *тогда и только тогда, когда является степенью числа 2.*

Этот факт можно получить и из более общих рассуждений, которые будут востребованы для определения количества представлений данного натурального числа в виде суммы чисел натурального ряда.

Пусть A — треугольное или трапециевидное число.

Тогда существуют натуральные числа a и n такие, что

$$A = a + (a + 1) + (a + 2) + \ldots + (a + n).$$

Используя формулу суммы первых элементов арифметической прогрессии, получаем, что

$$A = \frac{2a + n}{2} \cdot (n + 1)$$

или
$$2A = (n+1)(2a+n).$$

Число A запишем в виде:
$$A = 2^m B,$$
где $m \geq 0$ и B — нечетное число. Тогда
$$2^{m+1}B = (n+1)(2a+n).$$

Заметим, что числа $n+1$ и $2a+n$ одновременно делиться на 2 не могут. Тогда
$$(n+1) \vdots 2^{m+1} \quad \text{или} \quad (2a+n) \vdots 2^{m+1}.$$

Следовательно,
$$\begin{cases} n+1 = 2^{m+1}p \\ 2a+n = q \\ 2A = 2^{m+1}pq \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2a+n = 2^{m+1}p \\ n+1 = q \\ 2A = 2^{m+1}pq, \end{cases}$$
где p, q — натуральные нечетные числа.

Тогда
$$\begin{cases} n = 2^{m+1}p - 1 \\ 2a = q - 2^{m+1}p + 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = q - 1 \\ 2a = 2^{m+1}p - q + 1. \end{cases}$$

Если $p = q = 1$, то
$$\begin{cases} n = 2^{m+1} - 1 \\ 2a = 1 - 2^{m+1} + 1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = 1 - 1 = 0 \\ 2a = 2^{m+1}1 - 1 + 1, \end{cases}$$
что противоречит тому, что числа a и n натуральные.

Значит, любое число, являющееся степенью 2
$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots,$$
кроме 1, не является ни треугольным, ни трапециевидным.

Следовательно, в дальнейшем можем считать, что $q \neq 1$.

Если $\begin{cases} n = 2^{m+1}p - 1 \\ 2a = q - 2^{m+1}p + 1, \end{cases}$ то $\begin{cases} p \geq 1 \\ q + 1 > 2^{m+1}p. \end{cases}$ Так как $q = \dfrac{A}{2^m p}$, то $\dfrac{A}{2^m p} + 1 > 2^{m+1}p$ или
$$2^{2m+1}p^2 - 2^m p - A < 0.$$

Рассматривая последнее неравенство как квадратичное, получаем, что

$$1 \le p < \frac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}}.$$

Если $\begin{cases} n = q-1 \\ 2a = 2^{m+1}p - q + 1, \end{cases}$ то $\begin{cases} q > 1 \\ 2^{m+1}p + 1 > q. \end{cases}$ Так как $p = \dfrac{A}{2^m q}$, то $2^{m+1} \cdot \dfrac{A}{2^m q} + 1 > q$ или

$$q^2 - q - 2A < 0.$$

Тогда

$$1 < q < \frac{\sqrt{8A+1}+1}{2}.$$

Следовательно, если A — треугольное или трапециевидное число, то

$$2A = 2^{m+1}pq = (n+1)(2a+n),\ m \ge 0,$$

где

$$\begin{cases} n = 2^{m+1}p - 1 \\ 2a = q - 2^{m+1}p + 1 \\ q + 1 > 2^{m+1}p \\ 1 \le p < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} n = q - 1 \\ 2a = 2^{m+1}p - q + 1 \\ 2^{m+1}p + 1 > q \\ 1 < q < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2}. \end{cases}$$

5.3. Теоремы о треугольных и трапециевидных числах

Видим, что для того, чтобы число A было треугольным или трапециевидным, необходимо, чтобы число A было представлено в виде $A = 2^m pq$, где $m \ge 0$ и p, q — нечетные числа, обладающие свойствами:

$$\begin{cases} 2^{m+1}p - 1 > 0 \\ q + 1 > 2^{m+1}p \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q - 1 > 0 \\ 2^{m+1}p + 1 > q. \end{cases}$$

Покажем, что любое натуральное число A, не являющееся степенью числа 2, можно представить в указанном виде.

Действительно, любое число A, не являющееся степенью числа 2, можно представить в виде: $A = 2^m pq$, где $m \ge 0$ и p, q — нечетные числа. Как и прежде, считаем, что $q \ne 1$. Тогда $q > 1$.

Так как числа p, q — нечетные и $q > 1$, то неравенства $q - 1 > 0$ и $2^{m+1}p - 1 > 0$ справедливы для любого m.

Если предположить, что

$$q + 1 \leq 2^{m+1}p \quad \text{и} \quad 2^{m+1}p + 1 \leq q,$$

то

$$q + 2 \leq q,$$

что не так. Значит,

$$q + 1 > 2^{m+1}p \quad \text{или} \quad 2^{m+1}p + 1 > q.$$

Значит, **любое натуральное число A, не являющееся степенью числа 2, является треугольным или трапециевидным; число, являющееся степенью числа 2, не является ни тем, ни другим.**

Выясним теперь вопрос о количестве различных представлений данного числа в виде суммы чисел натурального ряда.

Пусть $A = 2^m pq$, где $m \in \mathbb{N}$ и числа p, q — нечетные натуральные числа. Для числа p справедливы оценки:

$$\frac{A}{2^{m+1}p} + 1 > 2^{m+1}p \quad \text{или} \quad 2^{m+1}p + 1 > \frac{A}{2^{m+1}p},$$

или

$$2^{2m+1}p^2 - 2^{m+1}p - A < 0 \quad \text{или} \quad 2^{2m+1}p^2 + 2^{m+1}p - A > 0.$$

Тогда

$$1 \leq p < \frac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{8A+1}-1}{2^{m+2}} < p < A/2^m.$$

Заметим, что $p \neq A/2^m$, так как $q \neq 1$.

Рассмотрим разность $\dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}} - \dfrac{\sqrt{8A+1}-1}{2^{m+2}}$. Имеем:

$$\frac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}} - \frac{\sqrt{8A+1}-1}{2^{m+2}} = \frac{2}{2^{m+2}} = \frac{1}{2^{m+1}},$$

то есть число $\dfrac{\sqrt{8A+1}-1}{2^{m+2}}$ находится левее числа $\dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}}$ на числовой оси. Тогда объединение множеств решений данных неравенств есть интервал $[1; A/2^m)$. Так как p — делитель числа $\dfrac{A}{2^m}$, то общее количество различных решений полученных неравенств $\tau(A/2^m) - 1$.

Тем самым справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *У натурального числа $A = 2^m pq$, не равного 1, где числа m, p, q — неотрицательные целые, причем числа p, q — нечетные, есть ровно $\tau(A/2^m) - 1$ различных представлений в виде суммы чисел натурального ряда.*

Задача 135. *Выясните, сколько существует различных представлений числа $A = 204$ в виде суммы чисел натурального ряда, и найдите их.*

Число 204 запишем в следующем виде: $204 = 2^2 \cdot 51$. Тогда $m = 2$ и количество различных представлений числа 204 равно $\tau(204/2^2) - 1 = \tau(51) - 1 = \tau(3 \cdot 17) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Найдем значения чисел p и q.

1) Если $1 \le p < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}}$, то

$$\begin{cases} n = 2^{m+1}p - 1 \\ 2a = q - 2^{m+1}p + 1. \end{cases}$$

При этом p — делитель числа 204.

Имеем: $1 \le p < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}}$, $1 \le p \le 2$. Тогда $p = 1$. Значит, $q = 51$ и

$$\begin{cases} n = 7 \\ a = 22. \end{cases}$$

Поэтому имеем следующее представление:

$$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 = 204.$$

2) Если $1 < p < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2}$, то

$$\begin{cases} n = q - 1 \\ 2a = 2^{m+1}p - q + 1. \end{cases}$$

При этом q — делитель числа 204.

Имеем: $1 < q < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2}$, $1 < q \leq 20$. Тогда $q = 3$ или $q = 17$.

Если $q = 3$, то $p = 17$ и

$$\begin{cases} n = 2 \\ a = 67. \end{cases}$$

Поэтому имеем следующее представление:

$$67 + 68 + 69 = 204.$$

Если $q = 17$, то $p = 3$ и

$$\begin{cases} n = 16 \\ a = 4. \end{cases}$$

Поэтому имеем следующее представление:

$$4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20 = 204.$$

Следовательно, число 204 имеет ровно три различных представления в виде суммы чисел натурального ряда.

$$4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20 = 204,$$

$$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 = 204,$$

$$67 + 68 + 69 = 204.$$

■

Задача 136. *Выясните, сколько существует различных представлений чисел 945 и 944 в виде суммы чисел натурального ряда?*

Задача 137. *Выясните, сколько существует различных представлений простого нечетного числа в виде суммы чисел натурального ряда, и найдите их.*

Пусть A — простое нечетное число. Тогда $m = 0$, $p = 1$ и $q = A$ (так как $pq = A$ и $q \neq 1$).

Значит, любое простое нечетное число A имеет лишь единственное представление в виде суммы чисел натурального ряда, а именно:

$$\begin{cases} n = 1 \\ a = \dfrac{A-1}{2} \end{cases}$$

и

$$A = \frac{A-1}{2} + \frac{A+1}{2}.$$

Если, например, $A = 23$, то $23 = \dfrac{23-1}{2} + \dfrac{23+1}{2}$, то есть $23 = 11 + 12$ — единственное представление числа 23 в виде суммы чисел натурального ряда. ■

Заметим, что если A — простое число, то $\tau(A) - 1 = 2 - 1 = 1$.

Для числа 3 справедливо равенство: $3 = 1 + 2$, то есть число 3 является треугольным.

Следовательно, **любое простое нечетное число, отличное от 3, является трапециевидным, но не является треугольным**.

5.4. Представления совершенных четных чисел

Рассмотрим представления совершенных четных чисел в виде суммы чисел натурального ряда.

Пусть A — совершенное четное число. Тогда существует простое число s такое, что

$$A = 2^s(2^{s+1} - 1),$$

где число $2^{s+1} - 1$ также простое. При этом $m = s$.

Так как $2^{s+1} - 1$ — простое число, $pq = 2^{s+1} - 1$ и $q \neq 1$, то $p = 1$ и $q = 2^{s+1} - 1$. Значит,

$$\begin{cases} n = 2^{s+1} - 2 \\ a = \dfrac{1}{2}(2^{s+1} - (2^{s+1} - 1) - 1) = 1. \end{cases}$$

Значит,

$$1 + 2 + \ldots + (1 + (2^{s+1} - 2)) = 1 + 2 + \ldots + (2^{s+1} - 1) = A$$

— единственное представление совершенного четного числа в виде суммы чисел натурального ряда.

Если, например, $A = 28$, то $s = 2$ и $n = 6$, $a = 1$ и

$$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$$

Следовательно, **любое совершенное четное число является треугольным, но не является трапециевидным**.

Упражнения и задачи

138. Пусть $\varkappa(A)$ обозначает число представлений натурального числа A в виде суммы последовательных нечетных натуральных чисел. Например,

A	$\varkappa(A)$	Разложения
15	2	15; $3+5+7$.
45	3	45; $13+15+17$; $5+7+9+11+13$.
48	3	$23+25$; $9+11+13+15$; $3+5+7+9+11+13$.

Заметим, что каждое нечетное число выступает в роли разложения в виде суммы нечетных натуральных чисел с одним слагаемым.

Докажите, что

a) любое натуральное число, являющееся точным квадратом, представимо в виде суммы последовательных нечетных натуральных чисел;

b) если A — нечетно и не является точным квадратом, то

$$\varkappa(A) = \frac{\tau(A)}{2};$$

c) если A — нечетно и является точным квадратом, то

$$\varkappa(A) = \frac{\tau(A)+1}{2};$$

d) если A — четно и не делится нацело на 4, то

$$\varkappa(A) = 0;$$

e) если A делится нацело на 4 и не является точным квадратом, то

$$\varkappa(A) = \frac{\tau(A/4)}{2};$$

f) если A делится нацело на 4 и является точным квадратом, то

$$\varkappa(A) = \frac{\tau(A/4)+1}{2}.$$

139. Назовем представление числа A в виде

$$A = \underbrace{a + (a+1) + (a+2) + \ldots + (a+r-1)}_{r \text{ слагаемых}}, \quad r \geq 0$$

r-рядным представлением числа A.

a) Какие натуральные числа имеют 1-рядное представление?

b) Какие натуральные числа имеют 2-рядное представление?

c) Какие натуральные числа имеют r-рядное представление, где r — фиксированное число?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

"Перестаньте отыскивать интересные числа! Оставьте для интереса хотя бы одно неинтересное число!" — это цитата из письма читателя Мартину Гарднеру. И действительно возникает вопрос, с какой целью столько математиков (подчас именитых) во все времена занимались проблемами совершенных и дружественных чисел.

Вот некоторые высказывания по этому поводу.

Барлоу в своей "Теории чисел", опубликованной в 1811 году, пишет: "Трудность нахождения совершенных чисел зависит от трудности установления простоты чисел вида 2^n-1. Эйлер показал, что $2^{31}-1 = 2\,147\,483\,647$ есть простое число, и оно является наибольшим ныне известным простым числом. Зависящее от него совершенное число есть вместе с тем наибольшее известное совершенное число и, вероятно, наибольшее из них, которое когда-либо будет известно. Так как эти числа только курьезны, не будучи полезными для чего бы то ни было, то не является правдоподобным, чтобы кто-нибудь стал делать попытку найти дальнейшее."

Эдмунд Ландау (1877–1938) в своей "Элементарной теории чисел", изданной в 1946 году, пишет: "Древняя идея о совершенном числе и связанные с этим вопросы не имеют особого значения, и я касаюсь этой материи лишь в связи с тем, чтобы указать на две проблемы, остающиеся нерешенными до сих пор (написано в 1927 году):

– Имеется ли бесконечное множество четных совершенных чисел?

– Не знаю.

– Имеется ли бесконечное число нечетных совершенных чисел?

– Я даже не знаю, существует ли одно такое число.

Но я прошу читателя не углубляться в эти вопросы. Он при изучении этой книги встретит достаточное количество гораздо более обещающих и трудных проблем."

Американский математик Э.Т. Белл в 1933 году писал: "Возникает интересный и крайне трудный вопрос о нахождении простых чисел вида $2^n - 1$ сверх двенадцати чисел Мерсенна. Можно ли по этому вопросу утверждать что-нибудь общее? Если вы знаете, шепните это кой-кому из математиков, и вы можете быть уверены, что найдете ухо, которое это с удовольствием подслушает."

Если вопрос о совершенных числах, как и вопрос о дружественных, не имеет практического значения, то возможно ли какое-нибудь теоретическое применение этих чисел?

Можно сказать, что изучение совершенных и дружественных чисел преследует общую цель арифметики — изучение свойств чисел. В решении подобных вопросов вырабатываются методы, которые могут оказаться полезными для решения вопросов, имеющих практическое значение. Академик Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) не раз подчеркивал, что знание, кажущееся неприменимым в данный момент, может оказаться применимым в будущем.

Подтверждением пользы исследования является также то, что уже в Древней Греции в силу специфических исторических условий впервые в истории человечества получили общественное одобрение все формы творчества, все формы продуктивной духовной деятельности, в том числе и лишенные непосредственно утилитарного значения. Только в такой атмосфере Фалес, влиятельный и богатый человек, мог, не будучи профессионалом, взяться за доказательство того, что диаметр делит круг пополам. Значит, общественная и культурная обстановка того времени была такова, что широкую известность получали авторы даже таких открытий, которые не имели практической ценности, — тем самым создавались мощные стимулы для новых поисков в этой области.

Может статься так, что через несколько поколений появится человек (не обязательно математик), который укажет на необходимость и значимость рассмотренных в данной книге чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю., Крафт Ч., Янцев Е.* Живые числа. М.: Мир, 1985.
2. *Волошинов А.В.* Пифагор. М.: Просвещение, 1993.
3. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.
4. *Коутинхо С.* Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. М.: Постмаркет, 2001.
5. *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* Сборник задач по алгебре и теории чисел. М.: Просвещение, 1993.
6. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. М.: Наука, 1966.
7. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984.
8. *Li E.J., Madachy J.S.* The histori and discovery of amicable numbers/ J. of Recreat. Math. 5 (1972). P. 77–93, 153–174, 231–249.
9. *Mc. Carthy P.J.* Odd perfect numbers/ Scripta Mathematica 23 (1957).

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

7. Докажем, что после отбрасывания одного крайнего слагаемого в каждой сумме, то есть чисел m и n, оставшиеся суммы S_1 и S_2 будут равны.

Рассмотрим все целочисленные точки (то есть точки с целыми координатами) в прямоугольнике $m \times n$, левый нижний угол которого расположен в начале координат в точке O: $1 \le x \le m-1$, $1 \le y \le n-1$. Всего их $(m-1)(n-1)$, причем ровно половина — над диагональю, выходящей из точки O, и ровна половина – под ней (на диагонали нет целочисленных точек, так как числа m и n взаимно просты.) Но количество целочисленных точек с абсциссой k равно $\left[k \cdot \dfrac{m}{n}\right]$ (то же верно и для ординаты y). Следовательно, $S_1 = S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot (m-1)(n-1)$.

Значит, из данных в условии задачи сумм первая больше второй на $m-n$.

9. Доказательство проведем методом математической индукции по числу k.

1) Докажем базу индукции, то есть докажем, что данное утверждение справедливо для $k = 1$.

В интервале $[1; 30]$ содержатся следующие простые числа: 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29. Значит, $\pi(30) = 10$, то есть $\pi(30) \le 10$. Следовательно, утверждение справедливо для $k = 1$. База индукции доказана.

2) Индукционное предположение в данном случае выглядит следующим образом: пусть утверждение справедливо для k, то есть $\pi(30k) \le 10k$. Докажем индукционный переход, то есть докажем, что данное утверждение справедливо для $k+1$, то есть $\pi(30(k+1)) \le 10(k+1)$.

Отрезок натуральных чисел $[1; 30(k+1)]$ есть объединение двух отрезков $[1; 30k]$ и $[30k+1; 30(k+1)]$. По индукционному предположению в отрезке $[1; 30k]$ не более $10k$ простых чисел. В отрезке же $[30k+1; 30(k+1)]$ не более 10 простых чисел. Действительно, числа этого отрезка

$$\begin{array}{lllll}
30k+2, & 30k+8, & 30k+15, & 30k+22, & 30k+28, \\
30k+3, & 30k+9, & 30k+16, & 30k+24, & 30k+30, \\
30k+4, & 30k+10, & 30k+18, & 30k+25, & \\
30k+5, & 30k+12, & 30k+20, & 30k+26, & \\
30k+6, & 30k+14, & 30k+21, & 30k+27, &
\end{array}$$

очевидно, являются составными. Количество этих чисел равно 22. Значит, простых чисел в отрезке $[30k+1; 30(k+1)]$ не более 10.

Получили, что $\pi(30(k+1)) \le 10k+10 = 10(k+1)$. Следовательно, данное утверждение справедливо для $k+1$, а значит, индукционный переход доказан.

3) Учитывая, что для данного утверждения выполняются свойства 1) и 2) принципа математической индукции, получаем, что наше утверждение справедливо для любого натурального k.

10. Пусть s — количество цифр в числе 2^n, а t — количество цифр в числе 5^n. Тогда

$$s = \lg 2^n + \alpha_1 = n \lg 2 + \alpha_1, \quad 0 < \alpha_1 < 1,$$

$$t = \lg 5^n + \alpha_2 = n\lg 5 + \alpha_2, \quad 0 < \alpha_2 < 1.$$

Поэтому

$$s + t = n\lg 2 + \alpha_1 + n\lg 5 + \alpha_2 = n\lg 2 + n\lg 5 + \alpha_1 + \alpha_2 =$$
$$= n(\lg 2 + \lg 5) + \alpha_1 + \alpha_2 = n\lg 10 + \alpha_1 + \alpha_2 = n + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Отсюда следует, что число $\alpha_1 + \alpha_2$ является натуральным, а так как $1 < \alpha_1 + \alpha_2 < 2$, то $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Следовательно, $s + t = n + 1$, а значит, $\zeta(2^n) + \zeta(5^n) = n + 1$.

11. Для некоторого $\alpha \in (0; 1]$ имеем: $\zeta(5^n) = \lg 5^n + \alpha = n\lg 5 + \alpha < 0,7n + 1 < n$ при $n > 3$.

12. Заметим, что $x < 60$. Тогда x — не более чем двузначное число, и значит, $1 \le \xi(x) \le 18$ и $1 \le \xi(\xi(x)) \le 9$. Поэтому $60 \le x + 18 + 9 = x + 27$ и $60 \ge x + 1 + 1 = x + 2$. Значит, $33 \le x \le 58$. Переберем возможные варианты и результаты вычислений оформим в таблицу.

x	$x + \xi(x) + \xi(\xi(x))$	x	$x + \xi(x) + \xi(\xi(x))$	x	$x + \xi(x) + \xi(\xi(x))$
33	$33 + 6 + 6 = 45$	42	$42 + 6 + 6 = 54$	51	$51 + 6 + 6 = 63$
34	$34 + 7 + 7 = 48$	43	$43 + 7 + 7 = 57$	52	$52 + 7 + 7 = 66$
35	$35 + 8 + 8 = 51$	44	$44 + 8 + 8 = 60$	53	$53 + 8 + 8 = 69$
36	$36 + 9 + 9 = 54$	45	$45 + 9 + 9 = 63$	54	$54 + 9 + 9 = 72$
37	$37 + 10 + 1 = 48$	46	$46 + 10 + 1 = 57$	55	$55 + 10 + 1 = 66$
38	$38 + 11 + 2 = 51$	47	$47 + 11 + 2 = 60$	56	$56 + 11 + 2 = 69$
39	$39 + 12 + 3 = 54$	48	$48 + 12 + 3 = 63$	57	$57 + 12 + 3 = 72$
40	$40 + 4 + 4 = 48$	49	$49 + 13 + 4 = 66$	58	$58 + 13 + 4 = 75$
41	$41 + 5 + 5 = 51$	50	$50 + 5 + 5 = 60$		

Следовательно, решением уравнения являются числа 44, 47 и 50.

13. Очевидно, что число x меньше числа 1 000 000 000. Тогда $\xi(x) \le 9 \cdot 9 = 81$ и $x \le 1\,000\,000\,000 - 81 = 999\,999\,919$. Значит, $x = \overline{999\,999\,9ab}$, где a и b — некоторые цифры. Тогда $\xi(x) = 9 \cdot 7 + a + b = 63 + a + b$. Следовательно,

$$x + \xi(x) = 1\,000\,000\,000, \quad 999\,999\,900 + \overline{ab} + 63 + a + b = 1\,000\,000\,000,$$

$$\overline{ab} + 63 + a + b = 100, \quad \overline{ab} + a + b = 37, \quad 10a + b + a + b = 37, \quad 11a + 2b = 37.$$

Тогда $1 \le a \le 3$. Заметим, что число a должно быть нечетным. Решение задачи завершим методом перебора. Имеем: если $a = 1$, то $b = 13$; если $a = 3$, то $b = 2$. Так как a и b — цифры, то $a = 3$, $b = 2$. Следовательно, $x = 999\,999\,932$.

14. 158.

15. Поскольку $1974^n > 10^{3n}$, то $\zeta(1974^n) \ge 3n$. Пусть $\zeta(1974^n) = k$. Теперь воспользуемся методом от противного. Предположим, что $\zeta(2^n + 1974^n) > \zeta(1974^n)$. Тогда $2^n + 1974^n \ge 1974^n$. Поскольку $10^k \vdots 2^n$, то $987^n < 2^{k-n} \cdot 5^k \le 987^n + 1$. Следовательно, $2^{k-n} \cdot 5^k = 987^n + 1$, $k - n \ge 2n$. Если $n \ge 2$, то $2^{k-n} \cdot 5^k$ делится на 8, но число $987^n + 1$ на 8 не делится (дает в остатке 2, 4 или 6). Пришли к противоречию.

16.a) Устойчивыми числами, например, являются числа 5, 25. **b)** Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — n-значное устойчивое натуральное число. Тогда существует натуральное число $b = \overline{b_1b_2\ldots b_ma_1a_2\ldots a_n}$ такое, что $1 + 2 + \ldots + a = b$. Число b можно записать в виде:

$$b = \overline{b_1b_2\ldots b_ma_1a_2\ldots a_n} = \overline{b_1b_2\ldots b_m} \cdot 10^n + \overline{a_1a_2\ldots a_n} = c \cdot 10^n + a,$$

где $c = \overline{b_1 b_2 \ldots b_m}$. Тогда

$$\frac{1+a}{2} \cdot a = c \cdot 10^n + a; \quad 2c \cdot 10^n = a(a-1).$$

Следовательно, $a \cdot (a-1) \vdots 10^n$. Так как $n = \zeta(a)$, то $a \cdot (a-1) \vdots 10^{\zeta(a)}$.

Заметим, что $d \not\vdots\, 10^{\zeta(d)}$ для любого натурального числа d. Действительно, если число d является степенью числа 10, то есть $d = 10^k$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\zeta(d) = k+1$ и $10^k \not\vdots\, 10^{k+1}$, то есть $10^k \not\vdots\, 10^{\zeta(d)}$; если число d не является степенью числа 10, то $10^{l-1} < d < 10^l$ для некоторого натурального числа l и $\zeta(d) = l$, тогда $d \not\vdots\, 10^l$, то есть $d \not\vdots\, 10^{\zeta(d)}$.

Следовательно, из условия $a \cdot (a-1) \vdots 10^{\zeta(a)}$ следует, что

$$\begin{cases} (a-1) & \vdots & 5^{\zeta(a)} \\ a & \vdots & 2^{\zeta(a)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a-1) & \vdots & 2^{\zeta(a)} \\ a & \vdots & 5^{\zeta(a)}. \end{cases}$$

Для устойчивого числа $a = 25$ справедливо: $25 \cdot (25-1) \vdots 10^{\zeta(25)}$.

17. Так как $a \equiv \xi(a) \pmod 9$ и $b \equiv \xi(b) \pmod 9$, то $a - b \equiv \xi(a) - \xi(b) \pmod 9$. По условию же $\xi(a) = \xi(b)$. Значит, $(a-b) \vdots 9$.

18. Так как по условию $\xi(a) = \xi(9a)$, то $(a - 9a) \vdots 9$, то есть $a \vdots 9$.

19. Заметим, что если у двух чисел суммы цифр равны, то разность этих чисел кратна 9. Так как $2x - x = x$, то $x \vdots 9$.

20. Так как по условию при умножении на 9 сумма цифр числа x не меняется, то есть $\xi(x) = \xi(9x)$, то исходное число x кратно 9. Умножая все двузначные числа, кратные 9, на оставшиеся цифры 3,4,5,6,7,8,9, получаем, что решением данного уравнения являются числа 18, 45, 90, 99.

21. Да, например, число 10 111 111 111.

22. Да, например, $\xi(159\,999) \vdots 7$ и $\xi(159\,999+1) = \xi(160\,000) \vdots 7$. Вообще говоря, таким свойством будут обладать числа вида $\overline{ab9\,999}$, где $a + b = 6$ или $a + b = 13$.

23. Пусть m — очередное число, сумма цифр которого делится на 11; покажем, что среди следующих 39 чисел есть число с тем же свойством. а) Если последняя цифра числа m не 0, а предпоследняя цифра не 9, то сумма цифр числа $m + 9$ равна сумме цифр числа m, то есть $m + 9$ — искомое число. б) Если число m кончается нулем, а предыдущая цифра не больше 7, то подходит число $m + 29$ (его сумма цифр больше на 11). в) Если предпоследняя цифра числа m равна 9, то, прибавив к m не больше 10, мы получим число, оканчивающееся по меньшей мере двумя нулями. Прибавляя к такому числу $1, 2, \ldots, 19$, мы получим всевозможные остатки от деления суммы на 11, в частности, одно из этих чисел дает остаток 0. Таким образом, подходящее число превышает m не более чем на $10 + 19 = 29$. г) Нерассмотренным остался только случай, когда $m = \overline{\ldots 80}$. Но здесь те же рассуждения, что и в случае в), показывают, что следующее подходящее число превосходит m не более чем на $20 + 19 = 39$. Пример $m = 999\,980$ показывает, что эту оценку улучшить нельзя.

25.a) Имеем: $\xi(A) = \xi(1000A) = \xi(125 \cdot 8A) \le \xi(125) \cdot \xi(8A) \le 8 \cdot \xi(8A)$. **b)** Имеем: $\xi(A) = \xi(10^5 A) = \xi(2^5 \cdot 5^5 A) \le \xi(32) \cdot \xi(5^5 A) = 5 \cdot \xi(5^5 A)$.

26. Рассмотрим все дроби, сократимые и несократимые, у которых числитель и знаменатель не превосходит 100. Их 100^2. Если $(a;b) = d$, то дробь $\dfrac{a}{b}$ сократима на d, при этом полученная несократимая дробь $\dfrac{a_1}{b_1}$ такова, что $a_1 \le \dfrac{100}{d}$ и $b_1 \le \dfrac{100}{d}$, то есть в количестве $K\left(\dfrac{100}{d}\right)$ несократимых дробей мы учтем и эту. Следовательно, искомая сумма равна количеству всех вначале рассмотренных дробей, то есть равна 10 000.

28. Имеем: $\mu(30) = \mu(2 \cdot 3 \cdot 5) = (-1)^3 = -1$; $\mu(48) = \mu(2^4 \cdot 3) = 0$.

31. Так как $a_1 b_1 \vdots a_2$ и $(b_1, a_2) = 1$, то $a_1 \vdots a_2$; так как $a_2 b_2 \vdots a_1$ и $(b_2, a_1) = 1$, то $a_2 \vdots a_1$, следовательно, $a_1 = a_2$, а значит, $b_1 = b_2$.

32. Данная формула говорит о том, что произведение

$$(a_{1,1} + a_{1,2} + \ldots + a_{1,n_1})(a_{2,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{2,n_2}) \cdot \ldots \cdot (a_{k,1} + a_{k,2} + \ldots + a_{k,n_1})$$

является суммой всевозможных произведений $a_{1,l_1} a_{2,l_2} \cdot \ldots \cdot a_{k,l_k}$, в которых первый сомножитель является каким-либо слагаемым первой суммы, второй — слагаемым второй суммы и так далее.

Доказательство проводится аналогично доказательству мультипликативности функции θ_r.

35. Пусть u — решение уравнения $\tau(x) = p$, где p — простое число, и $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha}$ — каноническое представление числа u.

Так как $\tau(u) = p$, то $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_s + 1) = p$. Значит, $s = 1$, $\alpha_1 + 1 = p$. Тогда $u = p_1^{p-1}$. Действительно, у числа $u = p_1^{p-1}$ делителями являются числа $1, p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{p-1}$, которых p штук.

36. Проиллюстрируем данную задачу примером.

Возьмем наугад какое-нибудь натуральное число, например, 12, и выпишем все его делители: 1, 2, 3, 4, 6 и 12. Для каждого из этих чисел запишем, сколько у него делителей: у 1 — один делитель, у 2 — два делителя, у 3 — два делителя, у 4 — три делителя, у 6 — четыре делителя, у 12 — шесть делителей. Получили числа 1, 2, 2, 3, 4 и 6. У них есть замечательная особенность: если возвести эти числа в куб и сложить ответы, получится в точности такая же сумма, которую мы бы получили, сначала сложив эти числа, а потом возведя сумму в квадрат, то есть

$$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2.$$

И данное свойство справедливо для любого числа v. Докажем это свойство.

В ходе доказательства будем использовать следующую формулу:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$$

и тот факт, что

$$\sum_{\substack{l_i=1,\ldots,n_i,\\ i=1,\ldots,k}} (a_{1,l_1} a_{2,l_2} \cdot \ldots \cdot a_{k,l_k}) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{1,i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_2} a_{2,i}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_k} a_{k,i}\right).$$

Пусть число v записано в каноническом виде:

$$v = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}.$$

Тогда делителями числа v являются числа $p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_t^{\gamma_t}$, где $0 \le \gamma_i \le \alpha_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. При этом $\tau(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_t^{\gamma_t}) = (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) \dots (\gamma_t + 1)$. Обозначим все делители числа v через $d_1, d_2, \dots, d_s$. Тогда

$$\sum_{v \,\vdots\, d} \tau^3(d) = \sum_{\substack{\gamma_i = 1, \dots, \alpha_i, \\ i = 1, \dots, t}} ((\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) \dots (\gamma_t + 1))^3 = \sum_{\substack{\gamma_i = 1, \dots, \alpha_i, \\ i = 1, \dots, t}} ((\gamma_1 + 1)^3 (\gamma_2 + 1)^3 \dots (\gamma_t + 1)^3) =$$

$$= \left(\sum_{\gamma_1 = 1}^{\alpha_1} (\gamma_1 + 1)^3 \right) \cdot \left(\sum_{\gamma_2 = 1}^{\alpha_2} (\gamma_2 + 1)^3 \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{\gamma_t = 1}^{\alpha_t} (\gamma_t + 1)^3 \right) =$$

$$= \left(1^3 + 2^3 + \ldots + (\alpha_1 + 1)^3\right) \left(1^3 + 2^3 + \ldots + (\alpha_2 + 1)^3\right) \dots \left(1^3 + 2^3 + \ldots + (\alpha_t + 1)^3\right) =$$

$$= (1 + 2 + \ldots + (\alpha_1 + 1))^2 (1 + 2 + \ldots + (\alpha_2 + 1))^2 \dots (1 + 2 + \ldots + (\alpha_t + 1))^2 =$$

$$\left(\sum_{\substack{\gamma_i = 1, \dots, \alpha_i, \\ i = 1, \dots, t}} (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 + 1) \dots (\gamma_t + 1) \right)^2 = \left(\sum_{v \,\vdots\, d} \tau(d) \right)^2.$$

Следовательно, $\tau^3(d_1) + \tau^3(d_2) + \ldots + \tau^3(d_s) = (\tau(d_1) + \tau(d_2) + \ldots + \tau(d_s))^2$.

37. 2^n.

38. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$.

39.a) 24. **b)** 60.

40. Пусть x — искомое число. Так как $x \,\vdots\, 12$, то $x \,\vdots\, 1, 2, 3, 4, 6, 12$ и $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot \ldots$ для некоторых натуральных чисел $\alpha, \beta, \ldots$, причем $\alpha \ge 2$, так как $x \,\vdots\, 2^2$.

По условию $\tau(x) = 14$. Тогда $(\alpha + 1)(\beta + 1) \ldots = 14$. Так как $14 = 2 \cdot 7$, числа 2 и 7 являются простыми и числа $\alpha + 1, \beta + 1, \ldots$ не меньше 2, то количество простых делителей числа x равно 2. Учитывая, что $\alpha \ge 2$, то $\alpha = 6$ и $\beta = 1$. Следовательно, $x = 2^6 \cdot 3^1 = 192$.

41. Пусть x — искомое число. Так как $x \,\vdots\, 30$, то $x \,\vdots\, 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ и $x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \ldots$ для некоторых натуральных чисел $\alpha, \beta, \gamma \ldots$

По условию $\tau(x) = 30$. Тогда $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots = 14$. Так как $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, числа 2, 3 и 5 являются простыми и числа $\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1 \ldots$ не меньше 2, то количество простых делителей числа x равно 3. Рассмотрим следующие возможные варианты.

№	$\alpha+1$	$\beta+1$	$\gamma+1$
1	2	3	5
2	2	5	3
3	3	2	5
4	3	5	2
5	5	2	3
6	5	3	2

или

№	α	β	γ	$x = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$
1	1	2	4	11250
2	1	4	2	4050
3	2	1	4	7500
4	2	4	1	1620
5	4	1	2	1200
6	4	2	1	720

Следовательно, число x может равняться $720, 1200, 1620, 4050, 7500, 11250$.

42.a) Всего делителей у числа A равно $\tau(A) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{s \text{ раз}} = 2^s$. Количество нечетных делителей числа A равно количеству всех делителей числа $B = 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_s$, то есть $\tau(B) = 2^{s-1}$, что в два раза меньше всех делителей числа A. Значит, количество нечетных делителей у числа A равно 2^{s-1}. Аналогично рассуждая, получаем, что количество делителей у числа A, не делящихся на 3 и не делящихся на 2 и на 3, равно 2^{s-1} и 2^{s-2} соответственно. **b)** Если $A = 2 \cdot 3 \cdot 5$, то получаем следующий ряд из $+1$ и -1:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \\ +1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 & -1 \end{array}$$

Видим, что сумма полученного ряда действительно равна 0. Рассмотрим решение задачи в общем случае.

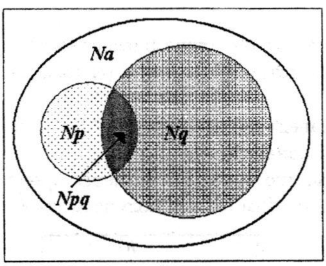
Учитывая, что четных и нечетных делителей у числа A поровну, получаем, что если под нечетным делителем d выписано число ε, где $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$, то при умножении числа d на число 2 четность числа простых делителей у числа $2d$ противоположна четности числа делителей числа d (была четной — станет нечетной и наоборот), а значит, под числом $2d$ выписано число $-\varepsilon$. И наоборот, если под четным делителем $2d$ выписано число ε, то под числом d выписано число $-\varepsilon$. При этом сумма чисел, выписанных под числами d и $2d$, равна 0. Следовательно, и сумма всех чисел, выписанных под всеми делителями числа A, равна 0.

43. Так как $7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, то $\tau(7875) = 24$ и $\sigma(7875) = 16224$.

44.b) 28. **c)** 280.

45. Пусть N_a — множество натуральных чисел, не превосходящих числа a, N_p — множество натуральных чисел, не превышающих числа a, делящихся на число p, N_q — множество натуральных чисел, не превышающих числа a, делящихся на число q, $N_{p,q}$ — множество натуральных чисел, не превышающих числа a, делящихся на числа p и q. Тогда $|N_a| = a$, $|N_p| = \dfrac{a}{p}$, $|N_q| = \dfrac{a}{q}$, $|N_{p,q}| = \dfrac{a}{pq}$, где под символом $|M|$ понимается количество элементов в конечном множестве M.

Для решения задачи воспользуемся "кругами Эйлера" для наглядного представления пересечения и объединения множеств:



Видим, что числа, взаимно простые с числом a, попадают в множество $N_a \setminus \Big(N_p \cup N_q \Big)$. Также замечаем, что $N_{p,q} = N_p \cap N_q$. Значит, $\varphi(a) = |N_a \setminus \Big(N_p \cup N_q \Big)| = |N_a| - |\Big(N_p \cup N_q \Big)|$.

Так как

$$|N_p \cup N_q| = |N_p| + |N_q| - |N_p \cap N_q| = \frac{a}{p} + \frac{a}{q} - \frac{a}{pq},$$

то

$$\varphi(a) = a - \frac{a}{p} - \frac{a}{q} + \frac{a}{pq} = a\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

то есть $\varphi(a) = a\,(1 - 1/p)\,(1 - 1/q)$.

46. Приведем доказательство, предложенное И.М. Виноградовым.

Пусть $e_k^p = 1$, если целое число k делится на простое число p, и $e_k^p = 0$ в противном случае. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые делители числа n. Тогда

$$\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n}(1 - e_m^{p_1})(1 - e_m^{p_2})\ldots(1 - e_m^{p_s}) =$$

$$= n - \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_1} - \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_2} - \ldots - \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_s} + \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_1} e_m^{p_2} + \ldots + \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_{s-1}} e_m^{p_s} - \ldots + (-1)^s \sum_{m=1}^{n} e_m^{p_1} e_m^{p_2} \ldots e_m^{p_s} =$$

$$= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_s} + \frac{n}{p_1 p_2} + \ldots + \frac{n}{p_{s-1} p_s} - \ldots + (-1)^s \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_s} = n \prod_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Следовательно, $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)\left(1 - \dfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{p_s}\right)$.

Пусть uv — правильное произведение и $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все простые делители числа u, $q_1, q_2, \ldots, q_t$ — все простые делители числа v. Тогда, учитывая, что uv есть правильное произведение, получаем, что $\{p_1; p_2; \ldots; p_s\} \cap \{q_1; q_2; \ldots; q_t\} = \emptyset$ и $p_1, p_2, \ldots, p_s, q_1, q_2, \ldots, q_t$ — все различные простые делители числа uv. Тогда

$$\varphi(uv) = uv \prod_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \cdot \prod_{j=1}^{t}\left(1 - \frac{1}{q_j}\right) = \varphi(u) \cdot \varphi(v),$$

откуда и следует, что функция Эйлера является мультипликативной.

47. Имеем: $\varphi(10^n) = 10^n\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 4 \cdot 10^{n-1}$.

48. 210.

54. Для всех $m > k$ будет справедливо равенство $\eta^m(u) = 1$. Значит, ни для какого n не будет справедливо равенство $\eta^m(u) = u$ (если u отлично от 1). Следовательно, $\operatorname{ord}_\eta(u) = 0$.

55. Для $k + 1$ будет справедливо равенство $\eta^{k+1}(u) = 1$. Значит, $\operatorname{ord}_\eta(u) = 0$.

57. Порядки этих чисел равны 0.

58. Нетрудно проверить, что число 283 является простым. Тогда $\eta(283^2) = 1 + 283 = 284$, $\eta(284) = 220$, $\eta(220) = 284$. Тем самым получаем граф:

$$\begin{tikzcd} 283^2 \arrow[r, "\eta"] & 284 \arrow[r, "\eta"] & 220 \arrow[l, bend right, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Следовательно, $\mathrm{ord}_\eta(283^2) = 0$.

63. Пусть u — решение уравнения $\eta(x) = 5$. Число 5 можно представить в виде суммы различных натуральных чисел лишь следующими способами: $5 = 1+4$ и $5 = 2+3$.

Пусть $5 = 1 + 4$. Тогда число u делится на 4. Если же число делится на 4, то оно должно делиться и на 2. Тогда среди делителей числа u должно быть число 2, которого нет в разложении $5 = 1 + 4$.

Пусть $5 = 2 + 3$. У числа u, как и у любого натурального числа, делителем всегда является число 1, которого нет в разложении $5 = 2 + 3$.

Значит, у данного уравнения нет решений.

65. Для решения уравнения $\eta(x) = 6$ воспользуемся следующим неравенством: если $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое представление числа u, то

$$\eta(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}) > \eta(p_1^{\alpha_1})\eta(p_2^{\alpha_2}) \ldots \eta(p_s^{\alpha_s}).$$

Пусть u — решение уравнения $\eta(x) = 6$ и $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ — каноническое представление числа u. Тогда

$$6 = \eta(u) > \eta(p_1^{\alpha_1})\eta(p_2^{\alpha_2}) \ldots \eta(p_s^{\alpha_s})$$

или

$$6 > \eta(p_1^{\alpha_1})\eta(p_2^{\alpha_2}) \ldots \eta(p_s^{\alpha_s}).$$

Значит, $\eta(p_i^{\alpha_i}) < 6$ для все $i = 1, 2, \ldots, s$.

Так как для всех $i = 1, 2, \ldots, s$ справедливо: $\eta(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i - 1} < 6$ и p_i — простое число, то $p_i = 2$, $p_i = 3$ или $p_i = 5$. Значит, $s \le 2$. Тогда $u = p_1^{\alpha_1}$ или $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$.

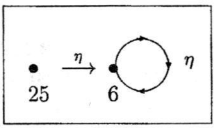
Очевидно, что $6 = 1 + 5$ и числа 1 и 5 являются собственными делителями числа 25. Следовательно, число 25 является решением уравнения $\eta(x) = 6$.

Рассмотрим теперь случай, когда $p_i \ne 5$.

Так как ни для $p_1 = 2$, ни для $p_1 = 3$ не является справедливым равенство $1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{\alpha_1 - 1} = 6$, то $u \ne p_1^{\alpha_1}$. Следовательно, число u следует искать только в виде $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. Так как p_1, p_2 — простые числа, равные 2 или 3, то можем считать, что $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Значит, $u = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2}$. Учитывая, что $(1 + 2)(1 + 3) = 12 > 6$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Следовательно, $u = 6$ — решение уравнения $\eta(x) = 6$.

Окончательно получаем, что у уравнения $\eta(x) = 6$ два решения: $x = 6; 25$.

Графически это означает следующее:



Тогда получаем, что $\mathrm{ord}_\eta(25) = 0$ и $\mathrm{ord}_\eta(6) = 1$.

67. В данном случае $a = 28$. Тогда

$$\sqrt{8 \cdot 28 + 1} - 1 \le x \le (28 - 1)^2 \quad \text{или} \quad 14 \le x \le 729.$$

Следовательно, претендуют на решение уравнения $\eta(x) = 28$ числа из отрезка $[14; 729]$, в котором 716 чисел. Используя метод перебора, получим, что решением уравнения $\eta(x) = 28$ является только число 28.

69. Пусть u — решение уравнения $\eta(x) = 1 + p$, где p — простое число. Тогда у числа u делителями являются числа 1, p и u. Тогда $1 \cdot p \cdot u = u^{3/2}$. Решая полученное уравнение относительно u, найдем, что p^2 — решение последнего уравнения, которое совпадает с верхней границей оценки $(a-1)^2$ числа x уравнения $\eta(x) = 1 + p$.

Далее, например, решением уравнения $\eta(x) = 32 = 1 + 31$ будет число $961 = 31^2$, так как у этого числа собственными делителями являются только числа 1 и 31. Но это не означает, что других решений нет. Дело в том, что число 32 можно представить в следующем виде: $32 = 1 + 2 + 29$, и при этом числа 1, 2, 29 и только они являются собственными делителями числа 58, а значит, $\eta(58) = 1 + 2 + 29 = 32$.

С другой стороны, у уравнения $\eta(x) = 1 + 29$ есть лишь единственное решение $x = 29^2$.

Следовательно, у уравнения $\eta(x) = 1 + p$, где p — простое число, обязательно будет решением число p^2, но не обязательно единственным.

70. Единственное решение $x = 21$.

75. Если число q — простое, то, как известно, символ Лежандра $\left(\frac{2}{q}\right)$ равен 1, так что $2^{(q-1)/2} \equiv 2^p \equiv 1 (\operatorname{mod} q)$, то есть $M(p) \vdots q$. Так как $p > 3$ и всегда $2^p - 1 > 2p + 1$, то в этом случае $M(p) > q$. Следовательно, число q — собственный делитель числа $M(p)$.

76. Действительно, если m — количество цифр в числе Мерсенна $M(n) = 2^n - 1$, то существует такое $\alpha \in (0; 1)$, что $m = \lg(2^n - 1) + \alpha < \lg(2^n - 1) + 1 < \lg 2^n + 1 = n \lg 2 + 1 < 0,30103n + 1$.

78. $2^{23} - 1 = 47 \cdot 178481$. Рассмотрим число $2^{37} - 1$. Если p — простой делитель этого числа, то число 37 делит число $p - 1$ и $p = 2 \cdot 37m + 1$ для некоторого натурального числа m. При $m = 1$ число $p = 75$ не является простым; при $m = 2$ получаем, что $p = 149$ является простым, и простой проверкой показываем, что число $M(37)$ не делится на 149. При $m = 2$ получаем, что $p = 223$ является простым числом и $M(37) = 223 \cdot 616\,318\,177$

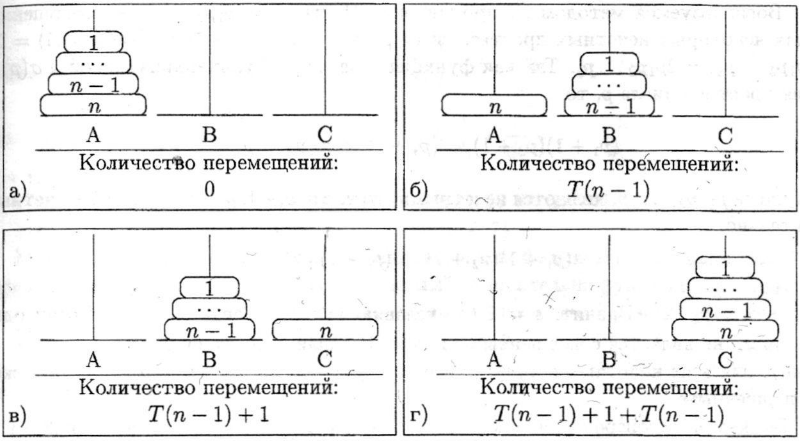
79. Для решения данной задачи возьмем три деревянных стержня, закрепленных на деревянной основе, и некоторое число деревянных дисков. В центре каждого диска есть отверстие для нанизывания на стержень. Обозначим стержни A, B и C. Диаметры дисков различны; в начале игры все они расположены на стержне A в порядке убывания размеров: самый большой внизу, а самый маленький — наверху башни.

Напомним, что цель задачи состоит в том, что нужно переместить всю башню со стержня A на стержень C, используя стержень B как перевалочный пункт. При этом за один ход можно переместить только один диск и бóльший диск нельзя класть поверх меньшего.

Все диски пронумерованы сверху вниз числами $1, 2, \ldots, n-1, n$, так что наименьший диск имеет номер 1 (и находится вверху), а наибольший — n (он внизу стержня).

Ясно, что сначала нужно переместить $n - 1$-й диск со стержня A на стержень B, используя стержень B как перевалочный пункт, затем переместить n-й диск со стержня A на стержень C, а потом переместить $n - 1$-й диск со стержня B на стержень C поверх n-го диска, используя уже стержень A как перевалочный пункт.

Обозначим через $T(n-1)$ наименьшее число перемещений $n - 1$-го диска со стержня A на стержень B, выполняя два упомянутых требования. Перемещая n-й диск со стержня A на стержень C, мы совершим еще одно перемещение. Переместить же $n - 1$ диск со стержня B на стержень C можно за те же $T(n-1)$ перемещений. Все диски со стержня A переместили на стержень C. При этом будет совершено $T(n-1)+1+T(n-1) = 2T(n-1)+1$ перемещений.



С другой стороны, мы переместили n дисков со стержня A на стержень C. При этом должно было использоваться $T(n)$ перемещений. Следовательно,

$$T(n) = 2T(n-1) + 1, \quad T(1) = 1, \quad n > 1.$$

Получили так называемое рекуррентное уравнение с начальными данными.

Найдем, для примера, $T(2)$, $T(3)$ и $T(4)$. Имеем:

$$T(2) = 2T(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad T(3) = 2T(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$T(4) = 2T(3) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

По определению число $T(4)$ означает количество наименьших перемещений четырех дисков со стержня A на стержень C с использованием стержня B, то есть количество таких перемещений равно 15.

Используя метод математической индукции, можно доказать, что

$$T(n) = 2^n - 1,$$

то есть n-му числу Мерсенна.

80. Предположим, что жрецу для перетаскивания одного диска потребуется в среднем 30 минут. Диски, разумеется, имеют разные размеры. Нам не сказано, насколько велик максимальный из них, но, по-видимому, не маленький, поскольку создал его сам Бог. А так как они, к тому же, сделаны из золота, то должны быть довольно тяжелыми. Поэтому полчаса — достаточно осторожное предположение. Величина 2^{64} имеет порядок 10^{19}, и несложные вычисления показывают, что жрецу потребуется около 10^{14} лет, чтобы перенести все диски. Таким образом, считая, что от Большого Взрыва прошло около 10^{11} лет, можно прикинуть, сколько еще осталось.

81. Число $S_3 = 37\,634$ делится на число $M(5) = 31$ нацело: $37\,634 = 31 \cdot 1\,214$. Значит, число $M(5)$ является простым.

84. Так как $5 > \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1} = 4,847...$, то утверждение справедливо для всех простых чисел, не меньших 5.

85. Воспользуемся методом от противного. Пусть $A = p_1p_2\dots p_s$ — совершенное число для некоторых нечетных простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_s$, где $s \geq 1$. Тогда $\sigma(A) = 2A$ или $\sigma(p_1p_2\dots p_s) = 2p_1p_2\dots p_s$. Так как функция σ является мультипликативной и $\sigma(p) = p+1$ для простого числа p, то

$$(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_s+1) = 2p_1p_2\dots p_s.$$

Так как числа $p_1, p_2, \dots, p_s$ являются нечетными, то числа $p_1+1, p_2+1, \dots, p_s+1$ — четные. Следовательно,

$$(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_s+1) \,\vdots\, 2^s.$$

Тогда и $p_1p_2\dots p_s \,\vdots\, 2^s$. Значит, $s = 1$ (по условию $s \geq 1$). Тогда $A = p_1$. Но ни одно простое число не является совершенным числом. Пришли к противоречию.

Значит, для всех нечетных простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_s$ число $A = p_1p_2\dots p_s$ не может быть совершенным.

89. Так как A — совершенное четное число, то $A = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где числа p и $2^p - 1$ — просты. Так как одно из них четное, а другое — нечетное, то произведение $2^{p-1}(2^p-1)$ является правильным. Тогда

$$\chi_{-1}(A) = \chi_{-1}(2^{p-1}(2^p-1)) = \chi_{-1}(2^{p-1})\chi_{-1}(2^p-1) =$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + p^{p-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^p-1}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2^p}{2^p-1} = 2.$$

91. При $n = 7$ получаем дружественные числа: 9 363 584 и 9 437 056.

93. Для решения используйте разложения $87633 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$ и $69615 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ и критерий дружественности чисел.

94. Пусть A и B — дружественные числа и число A является простым. Тогда $\sigma(A) = A + B$ и $\sigma(A) = A + 1$, как для простого числа. Тогда $A + B = A + 1$, то есть $B = 1$, что не так.

95. $397 \cdot 787$.

96. Пусть d — делитель числа n. Тогда и число $\delta = \dfrac{n}{d}$ также является делителем числа n. Пусть $\delta \leq d$ (если n — точный квадрат, то для некоторого делителя d делитель δ равен делителю d). Тогда $n = d \cdot \delta \geq \delta \cdot \delta = \delta^2$. Значит, $\delta \leq \sqrt{n}$.

Итак, все делители числа n можно разбить на пары d и δ, меньший из делителей не больше $\sqrt{n}$. Всего же натуральных чисел от 1 до $\sqrt{n}$ не больше, чем $\sqrt{n}$. Тогда всего указанных пар делителей числа n не больше, чем $\sqrt{n}$. Следовательно, $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$.

97. Пусть число A делится на 12. Тогда $A = 12t$, где $t \in \mathbb{N}$. Тогда $\eta(A) = (1+2+3+4+6)t + \dots = 16t + \dots > 12t = A$, то есть $\eta(A) > A$. Следовательно, число A не является совершенным.

98. Одно из 12 последовательных натуральных чисел делится на число 12, и у этого числа сумма собственных делителей больше самого числа.

99. Имеем:

$$A \cdot \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_s}\right) = d_1 + d_1 + \dots + d_s$$

и

$$B \cdot \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_t}\right) = c_1 + c_1 + \ldots + c_t.$$

Так как $d_1 + d_2 + \ldots + d_s = c_1 + c_2 + \ldots + c_t$ и $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_s} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_t}$, то $A = B$.

100. $\{\eta^0(34); \eta^1(34); \eta^2(34); \ldots\} = \{1; 34; 20; 22; 24; 36; 55; 17\}$.

101. $\{\Upsilon^0(34); \Upsilon^1(34); \Upsilon^2(34); \ldots\} = \{1; 34; 10; 8; 7\}$.

102. Имеем: $\Upsilon(6) = 2 + 3 + 1 = 6$, значит, число 6 является "совершенным" относительно функции Υ. Число же 28 "совершенным" относительно функции Υ не является, так как $\Upsilon(28) = 12 \neq 28$. Числа 7 и 8 являются "дружественными" относительно функции Υ.

104. Рассмотрим n чисел $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$. Если n — нечетное и $n \geq 3$, то все эти числа не делятся на n. Обозначим остатки от деления этих чисел на n через $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Они могут принимать лишь значения $1, 2, \ldots, n-1$. Так как число этих значений равно $n-1$, а число остатков равно n, то среди остатков есть два равных. Пусть $r_i = r_j$, где $i < j$. Тогда число $2^j - 2^i = 2^i(2^{j-i} - 1)$ делится на n. Так как числа 2^i и n не имеют общих делителей, отличных от числа 1, то число $2^{j-i} - 1$ делится на n. Заметим, что $1 \leq j - i \leq n - 1$.

107. Имеем:

$$7^n - 6 \cdot 2^n = (7^n - 2^n) - 5 \cdot 2^n = (7-2)(7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 7 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}) - 5 \cdot 2^n =$$

$$5 \cdot (7^{n-1} + 7^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 7 \cdot 2^{n-2} + 2^{n-1}) - 5 \cdot 2^n.$$

Так как каждое слагаемое делится на 5, то и вся разность делится на 5. Следовательно, $(7^n - 6 \cdot 2^n) \vdots 5$.

108. Начнем с того, что пусть $n > m$ — натуральные числа, а r — остаток от деления числа n на число m. Покажем, что остаток от деления числа Мерсенна $M(n)$ на число $M(m)$ равен $M(r)$. Для доказательства воспользуемся равенством

$$a^n - b^n = (a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}),$$

которое справедливо для всех чисел a и b и натурального числа n.

По условию $n = mt + r$ для некоторого целого числа t. Тогда $M(r) < M(m)$. Пусть $a = 2^m$. Тогда:

$$\frac{M(n)}{M(m)} = \frac{2^n - 1}{2^m - 1} = \frac{2^{mt+r} - 1}{2^m - 1} = \frac{2^{mt} \cdot 2^r - 1}{2^m - 1} = \frac{a^t \cdot 2^r - 1}{a - 1} = \frac{2^r(a^t - 1) + 2^r - 1}{a - 1} =$$

$$= \frac{2^r(a-1)(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1) + 2^r - 1}{a - 1} = 2^r(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1) + \frac{2^r - 1}{a - 1}.$$

Обозначив $2^r(a^{t-1} + a^{t-2} + \ldots + a + 1)$ через q, получаем, что $M(n) = M(m) \cdot q + M(r)$, где $M(r) < M(m)$. Значит, $M(r)$ — остаток от деления числа $M(n)$ на число $M(m)$.

Теперь, воспользовавшись алгоритмом Евклида, найдем наибольший общий делитель чисел Мерсенна $M(n)$ и $M(m)$. Имеем:

$$n = mt_1 + r_1, \qquad 0 \leq r_1 < m, \qquad M(n) = M(m)q_1 + M(r_1) \qquad \text{и} \qquad 0 \leq M(r_1) < M(m);$$

$$\begin{array}{llll} m = r_1t_2 + r_2, & 0 \le r_2 < r_1, & M(m) = M(r_1)q_2 + M(r_2) & \text{и} \quad 0 \le M(r_2) < M(r_1); \\ r_1 = r_2t_3 + r_3, & 0 \le r_3 < r_2, & M(r_1) = M(r_2)q_3 + M(r_3) & \text{и} \quad 0 \le M(r_3) < M(r_2); \\ r_2 = r_3t_4 + r_4, & 0 \le r_4 < r_3, & M(r_2) = M(r_3)q_4 + M(r_4) & \text{и} \quad 0 \le M(r_4) < M(r_3); \\ \ldots & & & \\ r_{k-2} = r_{k-1}t_k, & r_k = 0, & M(r_{k-2}) = M(r_{k-1})q_k & \text{и} \quad M(r_k) = 0. \end{array}$$

При этом $(n; m) = r_{k-1}$. Следовательно, $(M(n); M(m)) = M(r_{k-1}) = M((n; m))$.

109.a) Доказательство этого факта см. [3], стр. 51. Далее, $u_{19} = 4181$. Так как это число является нечетным, то все его делители являются также нечетными и по теореме имеют вид $q = 4t + 1$. Тогда оценка на число t следующая: $t \le 1045$. Будем искать лишь простые делители данного числа. Число q будет простым при $t = 1, 3, 4, 7, 9, \ldots$. При $t = 9$ получаем первый простой делитель $q = 37$ числа u_{19}: $u_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Заметим, что при использовании метода проб первый делитель 37 данного числа появился бы на 11-й пробе. Применяя же указанную теорему о числах Фибоначчи, пришлось совершить лишь пять проб. **b)** Заметим, что $F(5) = 2^{32} + 1$ и любой его простой делитель имеет вид $q = 1 + 64r$. Таким образом, следует определить, есть ли среди натуральных чисел $q < \sqrt{2^{32}+1} \le 66\,000$, представимых в виде $q = 1+64r$, делители числа $F(5)$. Ограничения на q дает оценку $r < 1031$. Напомним, что число q должно быть простым.

Наименьшее значение r, при котором число q является простым, равно 3, что соответствует $q = 193$. Вычисления показывают, что $F(5) \not\vdots\, 193$. При $r = 4$ имеем $q = 257$ — простое число. Но $F(5) \not\vdots\, 257$. Следующее значение r, при котором q будет простым, это $r = 7$. Причем $q = 449$. Но и в этот раз $F(5) \not\vdots\, 449$. Следующее простое $q = 577$, что соответствует $r = 9$. По-прежнему $F(5) \not\vdots\, 577$. Наконец, при $r = 10$ получаем долгожданный делитель $q = 641$ числа $F(5)$.

Более эффективный метод определения простоты числа Ферма см. [4], стр. 254.

111. Пусть $2^n - 1 = t^m$, где $n, m, t \in \mathbb{N}$. Тогда t — нечетное число. И пусть $t = 2^kq + 1$, где q — нечетное число. Тогда $2^n = (2^kq+1)^m + 1$. По формуле бинома Ньютона получаем:

$$2^n = (2^kq)^m + C_m^1(2^kq)^{m-1} + \ldots + C_m^{m-2}(2^kq)^2 + C_m^{m-1}(2^kq) + 1 + 1.$$

Так как $k \le n$, то $2 \,\vdots\, 2^k$. Значит, $k = 0$ или $k = 1$. Так как числа t и q являются нечетными, то $k = 1$. Следовательно, $t = 2q + 1$, где q — нечетное число. Тогда

$$2^{n-1} = \left(2^{m-1}q^m + C_m^1 2^{m-2}q^{m-1} + \ldots + C_m^{m-2}2q^2\right) + C_m^{m-1}q + 1.$$

Значит, число $C_m^{m-1}q + 1 = mq + 1$ делится нацело на число 2. Так как q — нечетное число, то число m также является нечетным. Пусть $m = 2s + 1$, где $s \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$2^n = t^m + 1 = t^{2s+1} + 1 = (t+1)(t^{2s} - t^{2s-1} + \ldots - t + 1).$$

Таким образом, $2^n \,\vdots\, (t+1)$, то есть число $t+1$ есть степень числа 2. Пусть $t+1 = 2^l$. Тогда $2^n - 1 = (2^l - 1)^m$. Заметим, что $l \le n$. По биному Ньютона при нечетном m получаем:

$$2^n - 1 = (2^l)^m - C_m^1(2^l)^{m-1} + \ldots - C_m^{m-2}(2^l)^{m-2} + C_m^{m-1}(2^l) - C_m^m.$$

или

$$2^n = (2^l)^m - C_m^1(2^l)^{m-1} + \ldots - C_m^{m-2}(2^l)^2 + C_m^{m-1}(2^l).$$

Тогда

$$2^{n-l} = \left(2^{lm-l} - C_m^1 2^{lm-2l} + \ldots - C_m^{m-2} 2^l\right) + m.$$

Так как число m является нечетным, то $n = l$. Тогда $m = 1$.

112. Пусть существует бесконечное число натуральных чисел n, у которых каждое из чисел n и $n+1$ имеет только один простой делитель. Тогда считая, что $n > 1$, и учитывая, что одно из чисел n и $n+1$ является четным, а другое нечетным, для некоторого простого числа p будем иметь $p^k - 2^m = \pm 1$, где k и m — натуральные числа. Отсюда $p^k = 2^m \pm 1$. Так как числа Мерсенна, большие 1, не могут быть степенью натурального числа с показателем, большим 1, то из равенства $p^k = 2^m - 1$ следует, что $k = 1$, то есть $p = 2^m - 1$ — простое число Мерсенна.

Если $p^k = 2^m + 1$, то при $k = 1$ число $p = 2^m + 1$ есть простое число Ферма. При $k > 1$ имеем: $2^m = p^k - 1 = (p-1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \ldots + 1)$, где $m > 1$. Отсюда следует, что число k должно быть четным, то есть $k = 2l$, где $l \in \mathbb{N}$. Значит, $2^m = (2^l - 1)(2^l + 1)$. Таким образом, числа $2^l - 1$ и $2^l + 1$ должны быть степенью числа 2. Тогда $p^l - 1 = 2$ и $p^l + 1 = 4$, а значит, $p = 3$ и $m = 3$, что дает $3^2 = 2^3 + 1$.

Тем самым доказали, что если для $n > 8$ числа n и $n+1$ имеют только по одному простому делителю, то либо n является простым числом Мерсенна, либо $n+1$ является простым числом Ферма.

Обратно, если $M(m)$ — простое числа Мерсенна, то числа $M(m)$ и $M(m) + 1 = 2^m$ имеют только по одному простому делителю. Если $F(k)$ — простое число Ферма, то числа $F(k)$ и $F(k) - 1 = 2^{2^k}$ также имеют по одному простому делителю. Задача решена полностью.

Следует отметить, что мы не знаем, существует ли натуральное число m такое, что для $n \geq m$ хотя бы одно из натуральных чисел n и $n+1$ имеет только по крайней мере два различных простых делителя. Знаем только, что если такое число m существует, то должно выполняться неравенство $m \geq 2^{4423}$, так как каждое из чисел $2^{4423} - 1$ и 2^{4423} имеет только один простой делитель. Итак, если такое m существует, то существует лишь конечное количество чисел Мерсенна и конечное количество чисел Ферма.

114. Пусть $A = p^\alpha q^\beta$. Тогда $\sigma(A) = \dfrac{p^{n+1} - 1}{p-1} \cdot \dfrac{q^{n+1} - 1}{q-1} < \dfrac{p^{n+1}}{p-1} \cdot \dfrac{q^{n+1}}{q-1}$, поэтому $\dfrac{\sigma(A)}{A} < \dfrac{p}{p-1} \cdot \dfrac{q}{q-1} \leq \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{15}{8} < 2$, то есть $\sigma(A) < 2A$. Следовательно, число A не является совершенным.

115. Используя метод математической индукции, покажем, что все числа, стоящие рядом после применения данной процедуры конечное число раз, являются взаимно простыми.

1. Докажем базу индукции.

На первом шаге на отрезке получаются числа $1 - 2 - 1$. При этом все числа, стоящие рядом, являются взаимно простыми. База индукции доказана.

2. Рассмотрим следующее индукционное предположение. Пусть утверждение верно для n-го шага. Докажем индукционный переход, то есть докажем, что утверждение справедливо для $(n+1)$-го шага.

Пусть на n-м шаге числа s и t стоят рядом. Тогда по индукционному предположению $(s;t) = 1$. На $(n+1)$-м шаге получим число a, стоящее между числами s и t: $s - a - t$. При этом $a = s + t$. Так как $(a;s) = (s+t;s) = (t;s) = 1$, то числа, рядом стоящие и получающиеся на $(n+1)$-м шаге, являются взаимно простыми. Индукционный переход доказан.

3. По методу математической индукции получаем, что утверждение справедливо для любого шага.

Далее, используя метод математической индукции, докажем, что для любого числа a, большего единицы, справедливо свойство: если $a = s+t$, где числа s и t являются взаимно простыми, то числа s и t на некотором шаге будут стоять рядом на рассматриваемом отрезке. Доказательство будем проводить по натуральному числу a.

1. Докажем базу индукции.

Очевидно, что данное свойство справедливо для чисел 2 и 3: $2 = 1 + 1$ и числа 1 и 1 стоят рядом; $3 = 1+2$ и $(1;2) = 1$ и на втором шаге числа 1 и 2 стоят рядом. Тем самым база индукции доказана.

2. Рассмотрим индукционное предположение. Пусть для всех чисел, меньших a, верно утверждение о том, что если число $b < a$ представимо в виде суммы $b = s+t$, где $(s;t) = 1$, то числа s и t стоят рядом. Докажем справедливость утверждения для числа a.

Пусть $a = p + q$, где $(p;q) = 1$. Пусть для определенности $p < q$. Тогда $c = q - p > 0$ и $q = c+p$. Заметим, что числа p, q, c меньше числа a. Так как $(q;c) = (c+p;c) = (p;c)$, то есть $(q;c) = (p;c)$, и $(p;q) = 1$, то $(q;c) = (p;c) = 1$. По индукционному предположению получаем, что на некотором шаге применения процедуры суммирования рядом стоящих чисел получим, что числа c и p стоят рядом: $c - p$. Тогда и числа p и q стоят рядом: $p - q - c$. Индукционный переход доказан.

3. По методу математической индукции получаем, что утверждение справедливо для любого числа a.

Используя доказанные выше утверждения, получаем, что любое число a появится после применения некоторого числа раз указанной процедуры на отрезке столько раз, сколькими способами можно разложить число a в сумму двух взаимно простых чисел, меньших числа a, без учета порядка следования слагаемых. Количество таких разложений равно $\varphi(a)$ — значению функции Эйлера от числа a.

Заметим, что необходимо не более $a+1$ шагов для появления на отрезке всех $\varphi(a)$ экземпляров числа a.

116. Пусть число k взаимно просто с числом a и $k < a$, где $a > 2$. Тогда и число $a-k$ тоже меньше числа a. При этом $a-k \neq k$ (иначе $a \,\vdots\, k$, что не так) и числа a и $a-k$ взаимно просты (если числа a и $a-k$ имели общий делитель, то их разность $a-(a-k)$ тоже делилась бы на этот общий делитель, что противоречит взаимной простоте чисел a и k). Значит, числа, взаимно простые с числом a, разбиваются на пары k и $a-k$. Следовательно, их число четное. Значит, значение функции Эйлера есть число четное, за исключением случая $\varphi(2) = \varphi(1) = 1$.

Четность функции Эйлера следует также из решения задачи №115, так как количество появлений некоторого числа $a > 2$, находящихся слева от числа 2, равно количеству таких появлений справа от числа 2. Значит, функция Эйлера принимает только четные значения.

117.а) Из задачи №46 получаем, что

$$\varphi(x) = x\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые делители числа x. Так как все числа $p_1, p_2, \ldots, p_s$ не меньше 2, то

$$\frac{x}{2} \le \varphi(x) \le x.$$

Значит, $a \le x \le \frac{a}{2}$. Следовательно, все решения уравнения $\varphi(x) = a$ заключены в отрезке $[a/2; a]$. **b)** Имеем: $6 \le x \le 12$. Данное уравнение имеет лишь единственное решение $x = 9$. **c)** Уравнение не имеет решений. **d)** Если p — нечетное простое число, то решений нет (см. задачу №116). Если $p = 2$, то $x = 3$ или $x = 4$.

121. Пусть A — совершенное четное число. Тогда $A = 2^s(2^{s+1} - 1)$ для некоторого натурального числа s. Обозначим 2^{s+1} через m: $m = 2^{s+1}$. Тогда $2^s = \dfrac{m+1}{2}$. Следовательно, $A = \dfrac{m+1}{2} \cdot m$. Так как $\dfrac{m+1}{2} \cdot m = 1 + 2 + \ldots + m$, то $A = 2^s(2^{s+1} - 1) = 1+2+\ldots+(2^{s+1}-1)$. Следовательно, *любое* число вида $2^s(2^{s+1}-1)$ является треугольным. А значит, в частности, таковым является и любое совершенное четное число.

122. Пусть A — натуральное число. Разделим число A на число 9 с остатком. Имеем: $A = 9q + r$, где $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Возведем число A в куб. Получим:

$$A^3 = (9q)^3 + 3 \cdot (9q)^2 \cdot r + 3 \cdot (3q) \cdot r^2 + r^3 = 9 \cdot (81q^3 + 27q^2r + 3qr^2) + r^3.$$

При делении числа r^3 на число 9 могут быть лишь остатки 0, 1 и 8. Следовательно, $r^3 = 9s + t$, где $t = 0, \pm 1$. Тогда $A^3 = 9k + t$, где $t = 0, \pm 1$ и k — число натуральное. Значит, куб любого натурального числа есть число либо вида $9k$, либо вида $9k \pm 1$.

Из доказанного получаем, что числа вида $9k+4$ и $9k+5$ не представимы в виде суммы трех кубов.

123. Разделим числа u, v, w на число 2 с остатком. Получим:

$$u = 2q_1 + r_1, \quad v = 2q_2 + r_2, \quad w = 2q_3 + r_3, \quad \text{где } r_1, r_2, r_3 \in \{0; 1\}.$$

Тогда

$$8n + 3 = u^2 + v^2 + w^2 = 4(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3) + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Значит, $(3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)) \,\vdots\, 4$. Рассмотрим таблицу всевозможных значений выражения $3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$:

№	r_1	r_2	r_3	$3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$
1	0	0	0	$3 \not\vdots\, 4$
2	0	0	1	$2 \not\vdots\, 4$
3	0	1	0	$2 \not\vdots\, 4$
4	0	1	1	$1 \not\vdots\, 4$

№	r_1	r_2	r_3	$3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$
5	1	0	0	$2 \not\vdots\, 4$
6	1	0	1	$1 \not\vdots\, 4$
7	1	1	0	$1 \not\vdots\, 4$
8	1	1	1	$0 \,\vdots\, 4$

Видим, что выражение $3 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$ делится на число 4 только в одном случае, когда все числа r_1, r_2, r_3 равны 1. Следовательно, числа u, v, w являются нечетными.

124. Имеем: $8 \cdot 13 + 3 = 107 = 1^2 + 5^2 + 9^2$. Тогда: $13 = \frac{0 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} = 3 + 10$, то есть число 13 есть сумма только двух треугольных чисел.

126. Для числа A, одновременно являющегося треугольным и квадратным, должны выполняться равенства: $A = \frac{n(n+1)}{2}$ и $A = m^2$ для натуральных чисел n и m. Тогда справедливо равенство $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ или $n(n+1) = 2m^2$. Не теряя общности, можно сказать, что число n является четным. Пусть $n = 2t$. Тогда $t(2t+1) = m^2$. Заметим, что числа t и $2t+1$ являются также квадратами натуральных чисел. Пусть $t = u^2$ и $2t + 1 = v^2$. Тогда $v^2 - 2u^2 = 1$. Очевидно, что число v является нечетным. Тогда и $(v-1) \vdots 2$, и $(v+1) \vdots 2$. Значит, число u является четным числом.

Следовательно, задача о нахождении чисел, одновременно являющихся треугольными и квадратными, свелась к задаче о решении в натуральных числах уравнения $v^2 - 2u^2 = 1$, где число u является четным, а число v — нечетным.

Одним из решений указанного уравнения является пара чисел $v = 3$ и $u = 2$, так как $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$. Значит, число $3^2 \cdot 2^2 = 36$ является и треугольным, и квадратным.

128.a) $2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 + 1 = 40\,220\,029$. **b)** Пусть $n, n+1, n+2, n+3$ — четыре последовательных натуральных числа. Тогда

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = n \cdot (n+3) \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 1 =$$

$$= (n^2 + 3n) \cdot (n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2.$$

Следовательно, $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1$ — квадратное число. **c)** Это следует из равенства: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Например, $533 = 13 \cdot 41 = (3^2 + 2^2)(5^2 + 4^2) = (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 4 - 2 \cdot 5)^2 = 23^2 + 2^2$. **d)** Это следует из равенства: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

130.a) Разделим натуральное число n на число 3 с остатком. Имеем: $n = 3q + r$, где $q \in \mathbb{Z}$ и $r \in \{0; 1; 2\}$. Так как $n \equiv r \pmod 3$, то $n^2 \equiv r^2 \pmod 3$ и $n^2 + n \equiv r^2 + r \pmod 3$. Так как

r	$r^2 + r$	Остаток при делении на 3
0	0	0
1	2	2
2	6	0

то $n^2 + n \equiv 2 \pmod 3$ или $n^2 + n \equiv 0 \pmod 3$. Так как $(2; 3) = 1$, то $\frac{n^2 + n}{2} \equiv 1 \pmod 3$ или $\frac{n^2+n}{2} \equiv 0 \pmod 3$. Значит, остаток от деления треугольного числа на число 3 может быть равен либо 1, либо 0. **b)** Легко показать, что для чисел Ферма F_n справедливо равенство: $F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$. Используя метод математической индукции, можно показать, что каждое число Ферма, большее 3, при делении на число 3 дает в остатке 2, то есть справедливо сравнение: $F_n \equiv 2 \pmod 3$. Учитывая, что при делении на число 3 треугольного числа в остатке не может быть 2, получаем, что треугольным числом является лишь число Ферма $F_0 = 3$. **c)** Так как при $n > 3$ справедливо сравнение $F_n \equiv$

$2 \pmod 3$ и квадрат никакого натурального числа не дает при делении на число 3 остаток 2, то ни одно число Ферма не является квадратным.

131. Остатки могут быть только 0 (для числа 6) или 1 (для всех остальных совершенных четных чисел).

132. По формуле n-го k-угольного числа при $k = 6$ получаем:

$$P_n^6 = n + (6-2) \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = n(2n-1).$$

Пусть A — четное совершенное число. Тогда $A = 2^s(2^{s+1}-1)$ для некоторого натурального s. Обозначив 2^s через n, получаем, что $A = n(2n-1)$, то есть A является шестиугольным числом.

133. Число 27 является разностью треугольных чисел 28 и 1. Следовательно, число 27 является трапециевидным. Существует 3 равнобокие трапеции, составленные из 27 шаров.

136. Пусть $A = 945$. Тогда $A = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $m = 0$ и количество различных разложений равно $\tau(945) - 1 = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 16 - 1 = 15$.

Выпишем все делители числа 945: 1,3,5,7,9,15,21,27,35,45,63,105,135,189,315,945.

1) Найдем разложения числа A в виде суммы чисел натурального ряда, подчиняющиеся условиям:

$$\begin{cases} n = 2^{m+1}p - 1 = 2p - 1 \\ 2a = q - 2^{m+1}p + 1 = q - 2p + 1. \end{cases}$$

При этом $1 \leq p < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2^{m+2}} < 21,9\ldots$ Так как p — делитель числа A, то $p = 1, 3, 5, 7, 9, 15, 21$. Соответствующие значения чисел q, n, a занесем в таблицу:

p	1	3	5	7	9	15	21
q	945	315	189	135	105	63	45
n	1	5	9	13	17	29	41
a	472	155	90	61	44	17	2

Итого 7 различных представлений.

2) Найдем разложения числа A в виде суммы чисел натурального ряда, подчиняющиеся условиям:

$$\begin{cases} n = q - 1 \\ 2a = 2^{m+1}p - q + 1 = 2p - q + 1. \end{cases}$$

При этом $1 < q < \dfrac{\sqrt{8A+1}+1}{2} < 43,9\ldots$ Так как q — делитель числа A, то $p = 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35$. Соответствующие значения чисел p, n, a занесем в таблицу:

q	3	5	7	9	15	21	27	35
p	315	189	135	105	63	45	35	27
n	2	4	6	8	14	20	26	34
a	314	187	132	101	56	35	22	10

Итого 8 различных представлений.

Следовательно, всего различных представлений числа 945 существует 15.

Число 944 имеет лишь единственное разложение: $944 = 14 + \ldots + 45$.

138. Доказывая эти равенства, следует заметить, что $A = (2a+1)+(2a+3)+\ldots+(2a+2r-1) = r(r+2a)$ для $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $r \in \mathbb{N}$. При этом если $A \vdots 4$, то $A/4 = (r/2) \cdot ((r/2)+a)$.

Таблица простых чисел (до 997)

2	79	191	311	439	577	709	857
3	83	193	313	443	587	719	859
5	89	197	317	449	593	727	863
7	97	199	331	457	599	733	877
11	101	211	337	461	601	739	881
13	103	223	347	463	607	743	883
17	107	227	349	467	613	751	887
19	109	229	353	479	617	757	907
23	113	233	359	487	619	761	911
29	127	239	367	491	631	769	919
31	131	241	373	499	641	773	929
37	137	251	379	503	643	787	937
41	139	257	383	509	647	797	941
43	149	263	389	521	653	809	947
47	151	269	397	523	659	811	953
53	157	271	401	541	661	821	967
59	163	277	409	547	673	823	971
61	167	281	419	557	677	827	977
67	173	283	421	563	683	829	983
71	179	293	431	569	691	839	991
73	181	307	433	571	701	853	997

Формулы арифметической прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad a_n = a_1 + d(n-1), \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где S_n — сумма всех элементов арифметической прогрессии от 1-го до n-го элемента.

Формулы геометрической прогрессии

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где S_n — сумма всех элементов геометрической прогрессии от 1-го до n-го элемента.

Таблица десятичных логарифмов (до 10)

1	0	6	0,77815125
2	0,301029996	7	0,84509804
3	0,477121255	8	0,903089987
4	0,602059991	9	0,954242509
5	0,698970004	10	1

Таблица квадратов натуральных чисел (от 10 до 99)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Формулы разложений

$$a^n - b^n = (a-b)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}),$$

$$a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n} - a^{2n-1} + 2^{2n-2} - \ldots - a + 1)$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

Попов Иван Николаевич

Совершенные и дружественные числа

Учебное пособие

Директор издательского центра *В.П. Базаркина*
Начальник редакционного отдела *И.М. Кудрявина*
Начальник отдела компьютерной
и множительной техники *В.М. Личутина*
Редактор *Л.Н. Рогова*
Оригинал-макет выполнил *И.Н. Попов*

Подписано в печать 05.07.2005.
Формат $60 \times 84\,1/16$. Усл. печ. л. 9,06. Уч.-изд. л. 10,92.
Бумага писчая. Тираж 150 экз. Заказ №146

Отпечатано с готового оригинал-макета
Издательский центр Поморского университета
163002, Архангельск, пр. Ломоносова, 6
E-mail: publish@pomorsu.ru