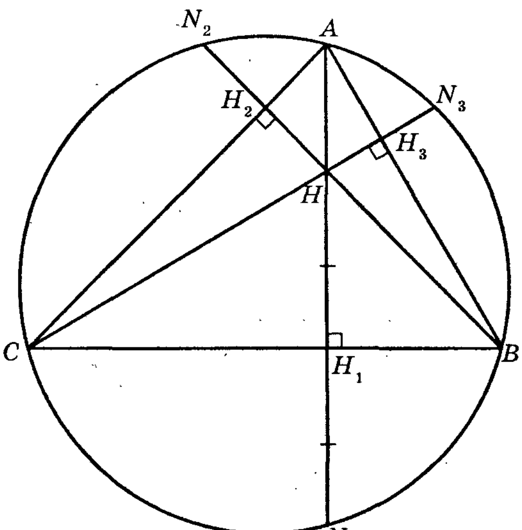
ЭТО ОТКРЫТИЕ – ЗОЛОТОЙ КЛЮЧ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

И. А. Кушнир, г. Киев

В очередной раз удивляет Исаак Аркадьевич Кушнир новыми, значительными и оригинальными фактами. Как говорят, «никому в голову не приходило», что наиболее известные геометрические теоремы являются свойствами одной окружности — окружности Эйлера. Сильный математический факт украсит не только геометрию, но и ее преподавание.
Поздравим автора и...

Изучение геометрии в школе может быть иллюстративным (обычный вариант), а может быть углубленным (не обязательно в математическом классе). Во втором случае знание нижеследующих фактов обязательно, да и сами по себе они популярны и эмоциональны как по своим применениям, так и по многоспособью доказательств. Перечислим их, обозначив как Φ_i $(i=1,2,3...)$.

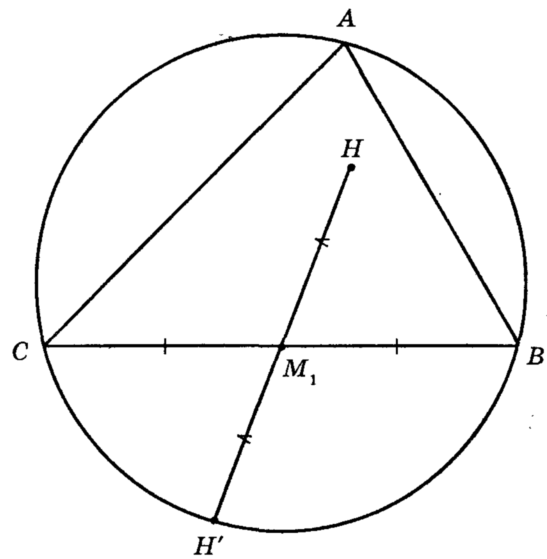
Φ_1. Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной около треугольника окружности (*рис. 1*).



$\boxed{HH_1 = H_1N_1}$

Рис. 1

Φ_2. Точки, симметричные ортоцентру относительно середин сторон треугольника, принадлежат описанной вокруг треугольника окружности (*рис. 2*).



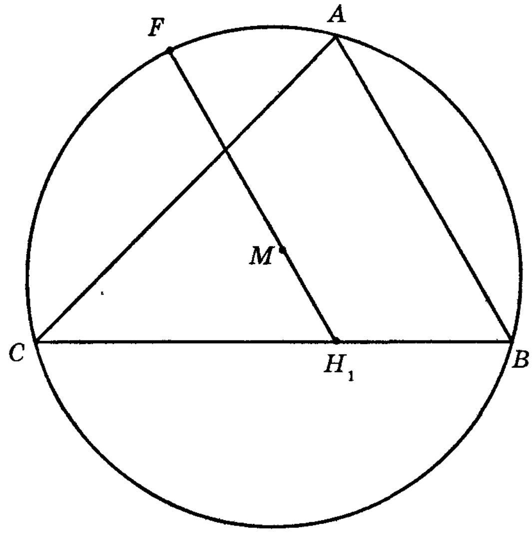
$\boxed{HM_1 = M_1H'}$

Рис. 2

Φ_3. В треугольнике ABC точка H_1 — основание высоты, проведенной из вершины A, точка M — центроид (точка пересечения медиан). Прямая H_1M пересекает описанную вокруг треугольника ABC окружность в точке F. Имеет место равенство:

$$MF = 2H_1M \quad (\textit{рис. 3}).$$

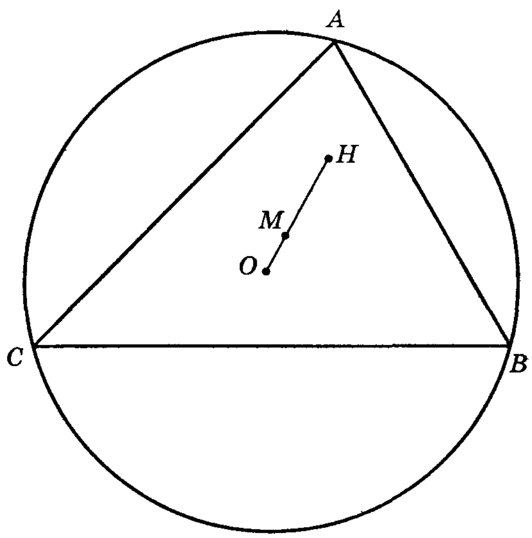
Φ_4: В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, точка M_1 — середина стороны BC, точка H — ортоцентр. Имеет место равенство $OM_1 = \frac{1}{2}AH$.



$\boxed{FM = 2MH_1}$

Рис. 3

Φ_5 (прямая Эйлера). Точки O, M и H принадлежат одной прямой и $2OM = MH$ (*рис. 4*).

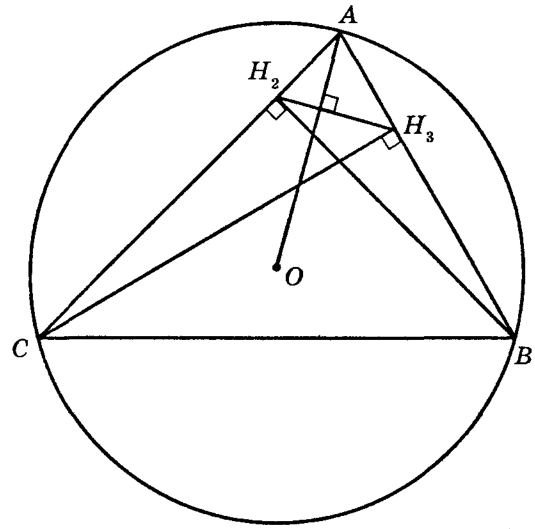


$\boxed{2OM = MH}$

Рис. 4

Φ_6. В треугольнике ABC точки H_1, H_2, и H_3 — основания высот, точка O — центр описанной окружности. Доказать, что

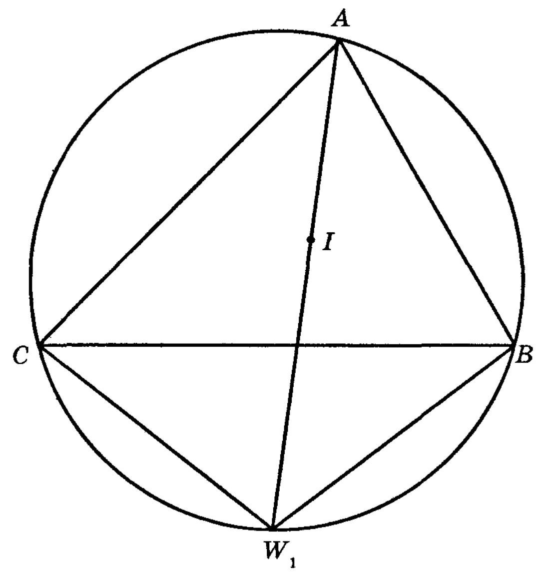
$OA \perp H_2H_3$ (*рис. 5*).



$\boxed{OA \perp H_2H_3}$

Рис. 5

Φ_7 (Теорема трилистника). Вокруг треугольника ABC описана окружность. Биссектриса угла BAC пересекает описанную окружность в точке W_1. Точка I — инцентр (центр вписанной окружности). Имеет место зависимость (*рис. 6*): $IW_1 = W_1B = W_1C$.



$\boxed{IW_1 = W_1B = W_1C}$

Рис. 6

Φ_8. В треугольнике ABC проведена вневписанная окружность с центром I_a. Имеет место равенство: $IW_1 = W_1I_a$ (*рис. 7*).

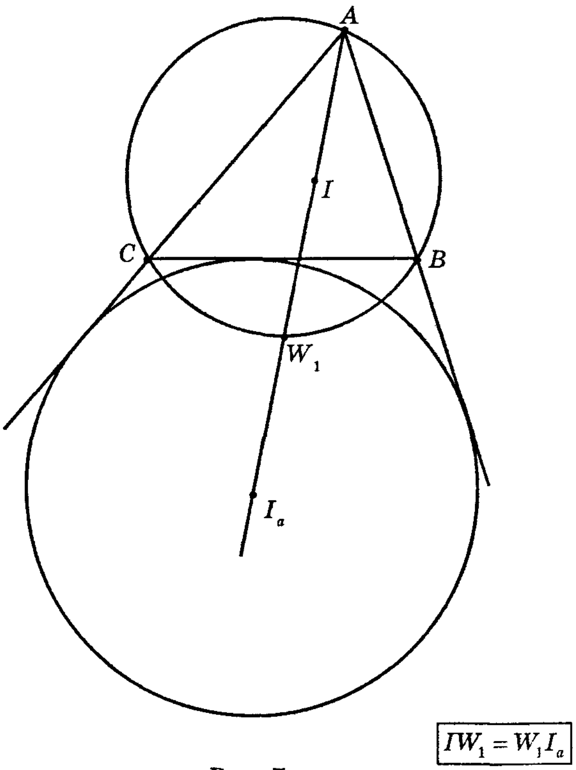


Рис. 7

Φ_9. В треугольнике ABC проведены вневписанные окружности с центрами I_a, I_b, I_c. Точка W^A диаметрально противоположна точке W_1. Имеет место равенство (теорема четырехлистника): $W^AB = W^AC = W^AI_b = W^AI_c$ (*рис. 8*).

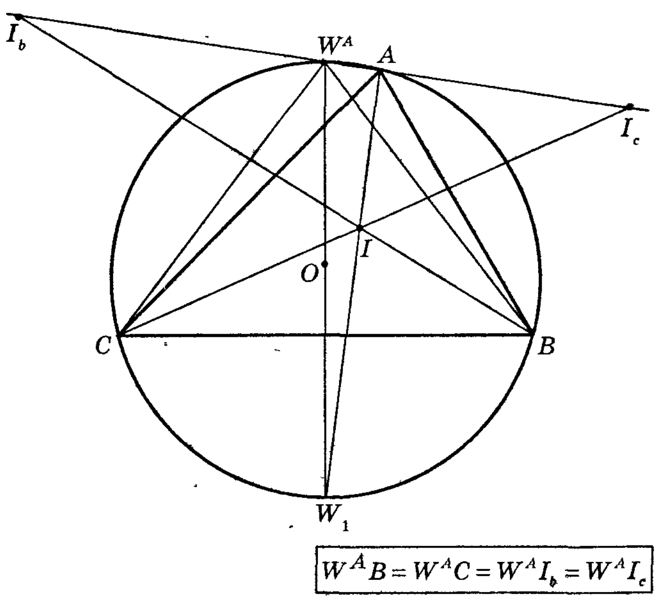


Рис. 8

Все указываемые теоремы были неоднократно сформулированы и доказаны различными способами.

Открытие состоит в том, что все они являются свойствами одного «золотого ключа» — окружности Эйлера (!)

Докажем каждый факт с помощью окружности Эйлера, что естественно, просто, увлекательно и... эмоционально! Итак...

Φ_1. Опишем около ортоцентрического треугольника $H_1H_2H_3$ окружность (окружность Эйлера) и произведем гомотетию этой окружности с центром H и коэффициентом $k=2$ (*рис. 9*). Тогда точке H_1 будет соответствовать точка N_1 и $HH_1 = H_1N_1$. Факт Φ_1 доказан.

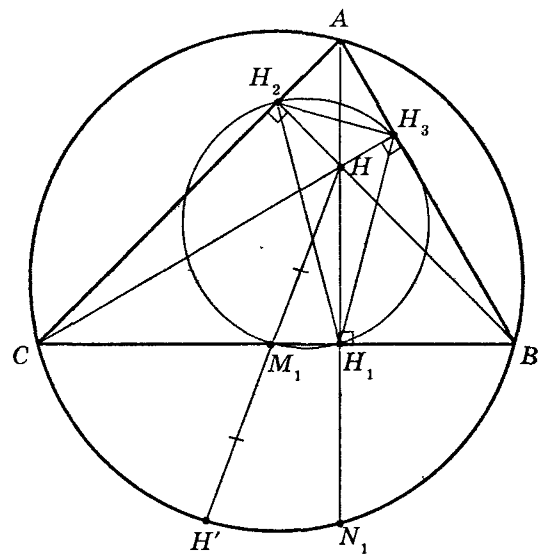


Рис. 9

Аналогично можно доказать и факт Φ_2: точке M_1 будет соответствовать точка H'.

Перейдем к факту Φ_3. Вновь произведем гомотетию окружности Эйлера с центром в точке M (центроид треугольника) и коэффициентом $k=-2$ (*рис. 10*). Тогда точке H_1 будет соответствовать точка F и $2H_1M = MF$. Теорема Φ_3 доказана.

При этой гомотетии очевидна теорема Φ_4 (отрезки OM_1 и AH — гомотетичны и

$$OM_1 = \frac{1}{2}AH),$$

а также и теорема о прямой Эйлера Φ_5 (точки O и H гомотетичны относительно центра гомотетии точки M).

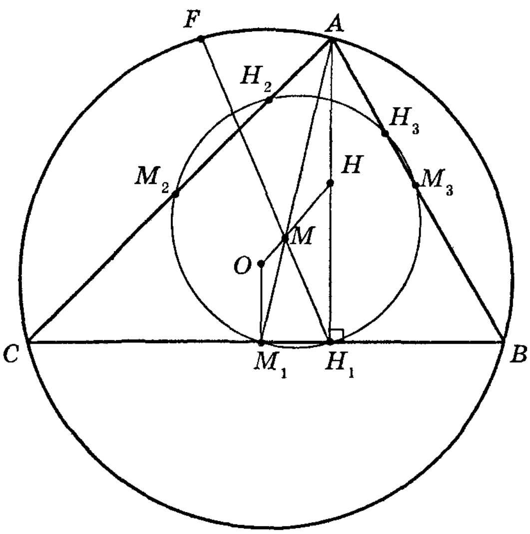


Рис. 10

Докажем теорему Φ_6. Обозначим середину отрезка AH как E_1 (*рис. 11*). Тогда $H_2E_1 = H_3E_1$ (медианы прямоугольных треугольников HH_2A и HH_3A). Поэтому дуги H_2E_1 и H_3E_1 равны, значит, $O_9E_1 \perp H_2H_3$ (точка O_9 — центр окружности Эйлера). Поскольку отрезки OA и O_9E_1 гомотетичны, то $OA \parallel O_9E_1$ и $OA \perp H_2H_3$.

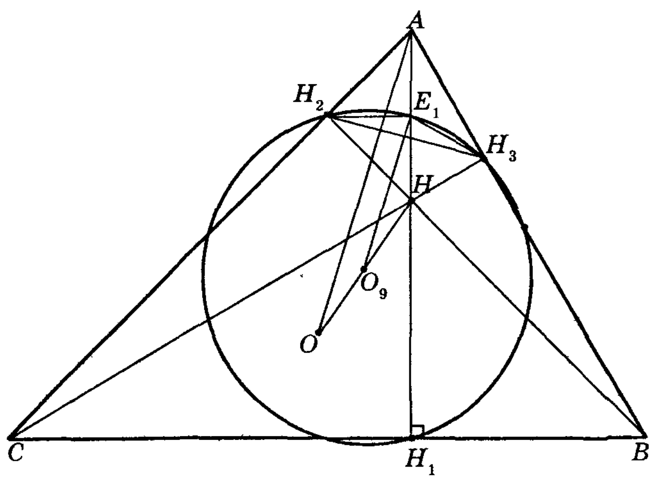


Рис. 11

Докажем теорему трилистника (Φ_7) и теорему Мансиона (Φ_8). Рассмотрим треугольник $I_aI_bI_c$ (I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC) (*рис. 12*). Поскольку треугольник ABC является ортоцентрическим треугольником треугольника $I_aI_bI_c$, то окружность ABC является окружностью Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$, а значит, $IW_1 = W_1I_a$ — доказана теорема Φ_8 и $IW_1 = CW_1 = BW_1$ — доказана теорема Φ_7.

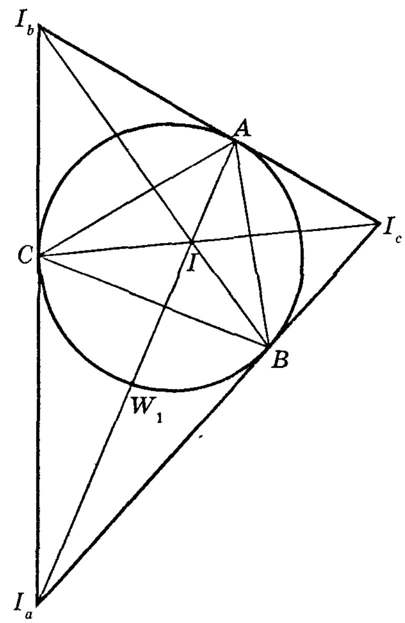


Рис. 12

Докажем теорему Φ_9:

$$W^AB = W^AC = W^AI_b = W^AI_c.$$

Равенство $W^AB = W^AC$ очевидно

$$(\cup W^AB = \cup W^AC),$$

а $W^AC = W^AI_c$ следует также из окружности Эйлера треугольника $I_aI_bI_c$.

* * *

Кажется, что применение окружности Эйлера для доказательства известных и неизвестных свойств бесконечно. Но всякий раз, находя новый способ доказательства свойств окружности и треугольника, посмотрим, не делается ли это... с помощью окружности Эйлера. Так что, как написано в «Геометрии на баррикадах»: «Окружность Эйлера — в жизнь!»

Воспользуемся ею как золотым ключом к открытию новых фактов углубленной геометрии. ■