Вписанные углы

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через P и Q проведены прямые AB и CD, пересекающие первую окружность в точках A и C, а вторую — в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

2. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

3. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Третья окружность с центром P пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую — в точках C и D. Докажите, что $\angle AQD = \angle BQC$.

4. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C, делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

Утверждение. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются в точке M, а лучи AB и DC — в точке P. Тогда угол AMB равен полусумме дуг AB и CD, а угол BPC равен полуразности дуг AD и BC.

5. Точка O, лежащая внутри треугольника ABC, обладает тем свойством, что прямые AO, BO и CO проходят через центры описанных окружностей треугольников BCO, ACO и ABO. Докажите, что O — центр вписанной окружности треугольника ABC.

6. *Лемма о трезубце.* Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; I — центр вписанной окружности, I_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, I и I_b лежат на окружности с центром M.

7. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. Точка M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырехугольник.

8. Пятиугольник $ABCDE$, все углы которого тупые, вписан в окружность ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке E_1; продолжения сторон BC и DE — в точке A_1. Касательная, проведённая в точке B к описанной окружности треугольника BE_1C, пересекает ω в точке B_1; аналогично определяется точка D_1. Докажите, что $B_1D_1 \parallel AE$.