

Б. Б. БУХОВЦЕВ, О. В. КУЛАГИНА

ОБЩИЕ СВОЙСТВА И ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМ СВОБОДНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрены общие свойства траекторий корней характеристических уравнений вида $\Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) + \rho^2\theta_l(p) = 0$. Использование общих свойств траекторий корней дает возможность качественного построения корневых годографов. Предложен также метод построения траекторий корней, в котором используются способы, разработанные для траекторий корней уравнений с линейным свободным параметром. Приводятся примеры.

Исследование целого ряда применяемых на практике систем приводит к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых линейно и квадратично зависят от свободного параметра. Такими уравнениями описывается, например, поведение некоторых систем автоматического регулирования, где параметром может служить коэффициент обратной связи. При рассмотрении свойств движущихся объектов, взаимодействующих с дорогой или с потоком воздуха, свободным параметром может быть скорость движения.

Задача изучения устойчивости и качества аналогичных систем в линейном приближении приводит к исследованию поведения корней соответствующего характеристического уравнения при непрерывном изменении свободного параметра.

Рассмотрим характеристическое уравнение с квадратичным свободным параметром

$$\Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) + \rho^2\theta_l(p) = 0, \quad (1)$$

где $\Phi_n(p) = a_n p^n + \dots + a_0$,

$$\Psi_m(p) = b_m p^m + \dots + b_0, \quad \theta_l(p) = c_l p^l + \dots + c_0,$$

a_ν, b_μ, c_λ — заданные постоянные коэффициенты, ρ — свободный параметр, изменяющийся от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ , n, m, l — степени полиномов (положительные целые числа) ($n > l$). Соответственно числам n, m, l характеристическое уравнение вида (1) назовем уравнением класса $[nm]$.

При изменении свободного параметра ρ от $-\infty$ до 0 корни характеристического уравнения движутся по отрицательным ветвям траекторий, при изменении от 0 до ∞ — по положительным.

Точки p_v , удовлетворяющие уравнению $\Phi_n(p) = 0$ и являющиеся решением уравнения (1) при $p=0$, назовем, как и обычно [1], начальными точками. Точки p_λ , удовлетворяющие уравнению $\theta_i(p) = 0$ и являющиеся решением уравнения (1) при $p \rightarrow \pm \infty$, назовем предельными точками. Точки, удовлетворяющие уравнению $\Psi_m(p) = 0$, назовем средними точками. Вообще говоря, средние точки не лежат на траекториях корней, но их расположение на плоскости комплексных частот в значительной мере определяет конфигурацию траекторий корней.

Аналитические формулы для построения траекторий корней с квадратичным свободным параметром могут быть получены способом, аналогичным указанному в работе [1].

Уравнение траекторий комплексных ($\omega \neq 0$) корней имеет вид

$$F_{nml} = (\Phi_r \theta_j - \Phi_j \theta_r)^2 - (\Phi_r \Psi_j - \Phi_j \Psi_r)(\Psi_r \theta_j - \theta_r \Psi_j) = 0, \quad (2)$$

где

$$\Phi_r = \Phi_n(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{IV}(\delta) - \dots,$$

$$\Phi_j = \Phi_n'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^V(\delta) - \dots,$$

$$\Psi_r = \Psi_m(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Psi_m''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Psi_m^{IV}(\delta) - \dots,$$

$$\Psi_j = \Psi_m'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Psi_m'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Psi_m^V(\delta) - \dots,$$

$$\theta_r = \theta_i(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \theta_i''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \theta_i^{IV}(\delta) - \dots,$$

$$\theta_j = \theta_i'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \theta_i'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \theta_i^V(\delta) - \dots$$

Значение свободного параметра p в каждой точке траекторий комплексных ($\omega \neq 0$) корней определяется формулой

$$p = \frac{\Phi_r \theta_i - \Phi_j \theta_r}{\Psi_j \theta_r - \Psi_r \theta_j} = \frac{\Phi_r \Psi_j - \Phi_j \Psi_r}{\Phi_j \theta_r - \Phi \theta_j}. \quad (3)$$

Для точек траекторий корней, лежащих на действительной оси ($\omega = 0$), значения параметра p могут быть найдены по формуле

$$p_{1,2} = \frac{-\Psi_m(\delta) \pm \sqrt{\Psi_m^2(\delta) - 4\Phi_n(\delta)\theta_i(\delta)}}{2\theta_i(\delta)}. \quad (4)$$

В частном случае при $\delta=0$ уравнения (2), (3) и (4) определяют критические частоты и значения критических параметров.

Из формулы (4) следует, что действительная ось не вся принадлежит траекториям корней. Имеются «запрещенные» участки. Траекториям корней принадлежат те точки, которые удовлетворяют неравенству $\Psi_m^2(\delta) - 4\Phi_n(\delta)\theta_i(\delta) \geq 0$. Кроме того, на участках действительной оси, принадлежащих траекториям корней, значение параметра p определяется неоднозначно. Происходит «наложение» траекторий корней.

На рис. 1 показаны траектории корней характеристического уравнения класса [3.1.1]:

$$(p^3 + 3p^2 + 4p + 4) + p(2p + 5) + p^2(p + 2) = 0. \quad (5)$$

Участки $\delta < -2,15$ и $-0,3 < \delta$ являются запрещенными. Траектории корней заключены в области $-2,15 \leq \delta \leq -0,3$. Точки $\delta = -0,3$ и $\delta = -2,15$ являются точками поворота траекторий корней. Траектории корней на действительной оси удобно изображать в виде двойной линии, так как значение параметра ρ определяется неоднозначно: происходит «наложение» ветвей траекторий. При приближенном построении траекторий корней для нахождения точек поворота может быть использована основная идея геометрического метода [1].

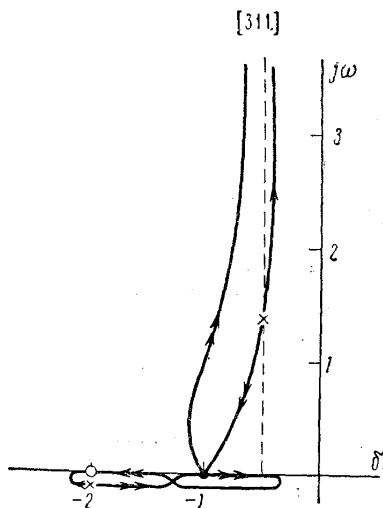


Рис. 1

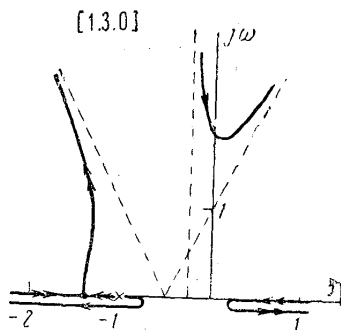


Рис. 2

Уравнение точек поворота $\Psi_m^2(\delta) - 4\Phi_n(\delta)\theta_l(\delta) = 0$ можно представить в виде

$$\prod_1^m (p - p_\mu)^2 = 4 \prod_1^n (p - p_\nu) \prod_1^l (p - p_\lambda), \quad (6)$$

где p_μ — средние точки, p_λ — предельные точки, p_ν — начальные точки. Равенство (6) эквивалентно двум следующим:

$$2 \sum_1^m \psi_\mu = \sum_1^l \vartheta_\lambda + \sum_1^n \varphi_\nu + 2N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (7)$$

$$\prod_1^m |p - p_\mu|^2 = 4 \prod_1^l |p - p_\lambda| \prod_1^n |p - p_\nu|,$$

где

$$\psi_\mu = \arg(p - p_\mu), \quad |p - p_\mu| = \text{mod}(p - p_\mu),$$

$$\vartheta_\lambda = \arg(p - p_\lambda), \quad |p - p_\lambda| = \text{mod}(p - p_\lambda),$$

$$\varphi_\nu = \arg(p - p_\nu), \quad |p - p_\nu| = \text{mod}(p - p_\nu).$$

Точки действительной оси, в которых выполняются оба равенства (7), являются точками поворота.

Общие свойства траекторий корней уравнений с квадратичным свободным параметром во многом аналогичны свойствам траекторий корней уравнений с линейным параметром [1]. Перечислим эти свойства и дадим их краткое обоснование.

Вблизи s -кратной начальной или предельной точки траектории корней образуют правильную $2s$ -лучевую звезду, так как вблизи начальных точек траектории корней уравнения (1) совпадают с траекториями корней уравнения $\Phi_n(\rho) + \rho\Psi_m(\rho) = 0$ с линейным параметром, поскольку членом с $\rho^2\theta_l(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ можно пренебречь. Также вблизи предельных точек можно пренебречь членом $\Phi_n(\rho)$ и рассматривать уравнение

$$\Psi_m(\rho) + \rho\theta_l(\rho) = 0.$$

При параллельном переносе мнимой оси форма траекторий корней не изменится.

За начальные точки можно принять любую группу корней характеристического уравнения при $\rho = c$ ($c = \text{const}$). Форма траекторий корней и положение предельных точек при этом не изменится.

Вблизи s -кратных точек траектории корней образуют правильную $2s$ -лучевую звезду. Действительно, начальную точку можно перенести так, чтобы она совпала с кратной точкой. При этом форма траекторий корней не изменится, а в начальной s -кратной точке траектории образуют правильную $2s$ -лучевую звезду. Траектории корней уравнения (5), показанные на рис. 1, имеют трехкратную точку $\delta = -1$. В этой точке траектории корней образуют правильную шестилучевую звезду (траектории корней, как и обычно, вследствие симметрии строятся только в верхней полуплоскости).

Общие свойства траекторий корней облегчают построение траекторий и дают возможность установить приблизительный вид траекторий. Для качественного построения траекторий корней важно знать способ простого нахождения асимптот. Несмотря на то, что асимптотические свойства траекторий корней уравнений с квадратичным свободным параметром определяются не так просто, как в случае уравнений с линейным параметром, все же можно найти общие закономерности, которым подчиняются асимптоты траекторий корней различных классов.

Для исследования асимптотических свойств, в отличие от уравнений с линейным параметром, можно использовать уравнение траекторий корней (2). В зависимости от чисел n , m , l , а именно в зависимости от разности чисел $2m$ и $(n+l)$, классы траекторий корней уравнений с квадратичным свободным параметром можно разбить на несколько групп. Нахождение асимптот траекторий корней для каждой из групп подчиняется вполне определенному правилу. Перечислим эти группы и дадим характеристику асимптотических свойств для каждой из этих групп.

1. $n+l-2m \geq 2$. Асимптоты траекторий корней являются двойными. К каждой асимптоте стремится одна положительная и одна отрицательная ветвь траекторий корней. Асимптоты образуют правильную $(n-l)$ -лучевую звезду с центром в точке

$$\delta = \frac{-\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{c_{l-1}}{c_l}}{n-l}.$$

При $a_n c_l > 0$ звезда асимптот не содержит действительной оси. При $a_n c_l < 0$ действительная ось входит в состав звезды асимптот. Траектории корней уравнения класса [3.1.1], показанные на рис. 1, имеют в качестве асимптот двухлучевую ($3-1=2$) звезду с центром в точке $\delta = \frac{-3+2}{2} = -0,5$.

2. $2m - (n+l) \geq 2$. Траектории корней имеют асимптоты в виде двух правильных звезд: $2(n-m)$ -лучевой звезды, совпадающей со звездой асимптот уравнения

$$\Phi_n(\rho) + \rho\Psi_m(\rho) = 0, \quad (8)$$

и $2(m-l)$ -лучевой звезды, совпадающей со звездой асимптот уравнения

$$\Psi_m(\rho) + \rho\theta_l(\rho) = 0. \quad (9)$$

Действительная ось входит в состав обеих звезд и является двойной асимптотой.

На рис. 2 показаны траектории корней характеристического уравнения класса [1.3.0]

$$(2\rho + 2) + \rho(\rho^3 + 1,5\rho^2 + 2,75\rho + 1,125) + \rho^2 = 0.$$

Траектории корней этого уравнения имеют асимптоты, совпадающие с асимптотами траекторий корней уравнений

$$(2\rho + 2) + \rho(\rho^3 + 1,5\rho^2 + 2,75\rho + 1,125) = 0 \quad (10)$$

и

$$(\rho^3 + 1,5\rho^2 + 2,75\rho + 1,125) + \rho = 0. \quad (11)$$

Асимптоты траекторий корней уравнения (10), соответствующие $\rho \rightarrow 0$ ($n < m$), представляют собой четырехлучевую звезду с центром в точке $a^* = -\frac{0,5}{2} = -0,25$. Асимптотой траекторий корней уравнения

(11) является шестилучевая звезда с центром в точке $a^* = -0,5$.

3. $n+l-2m=1$. Траектории корней имеют только действительные или вертикальные асимптоты. При $n-l > 2$ существуют ветви, уходящие в бесконечность без асимптот. На рис. 3 показаны в качестве примера траектории корней уравнения $(\rho^3 + 3\rho^2 + 3\rho + 1) + \rho(\rho + 2) + \rho^2 = 0$. Ветви траекторий корней, уходящие в бесконечность, не имеют асимптот.

4. $2m-(n+l)=1$. Все ветви траекторий корней, уходящие в бесконечность, имеют асимптоты. Угловые коэффициенты этих асимптот определяются уравнениями с линейным параметром (8) и (9).

5. $2m-(n+l)=0$. В этом случае асимптотические свойства траекторий корней зависят от значений коэффициентов $a_n, a_{n-1}, b_m, b_{m-1}, c_l, c_{l-1}$ характеристического уравнения. Из уравнения траекторий корней, записанного в общем виде, можно получить формулы, дающие значения углового коэффициента и координаты центра асимптот.

Для траекторий корней уравнений классов [2.1.0], [3.2.1], [4.3.2] (т. е. таких, для которых $n=m+1=l+2$), угловой коэффициент t и координата центра асимптот a^*

$$t = \pm \sqrt{4 \frac{a_n c_l}{b_m^2} - 1},$$

$$a^* = \frac{2a_{n-1} c_l^2 + b_m^2 c_{l-1} + b_m b_{m-1} c_l - 2a_n c_l c_{l-1}}{-4a_n c_l^2 + b_m^2 c_l}. \quad (12)$$

Из этих формул следует, что траектории корней уравнений рассматриваемых классов имеют асимптоты при $a_n c_l / b_m^2 > 1/4$; так как только в этом случае значение углового коэффициента t будет действительным. При $a_n c_l / b_m^2 < 1/4$ траектории комплексных корней замкнуты.

В качестве примера найдем асимптоты траекторий корней уравнения класса [3.2.1] (см. рис. 4)

$$(\rho^3 + \rho) + \rho(\rho^2 + 2\rho + 2) + \rho^2(2\rho + 3) = 0. \quad (13)$$

Угловый коэффициент асимптот, вычисляемый по формуле (12), равен $t = \pm \sqrt{8-1} = \pm 2,46$, центр асимптот: $a^* = \frac{3-4-12}{-16+2} = 0,93$. Траектории корней уравнения (13) показаны на рис. 4.

Траектории корней уравнения класса [4.2.0] ($n=m+2=l+4$) имеют следующие асимптоты. При $a_4c_0 < 0$ — вертикальные асимптоты

$$\delta = \frac{-b_1(b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_4c_0}) + 2a_3c_0}{b_2(b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_4c_0}) - 4a_4c_0}.$$

Кроме того, при $a_4c_0 < 0$ траектории корней имеют действительные ветви, уходящие в бесконечность в положительном и отрицательном направлении оси δ .

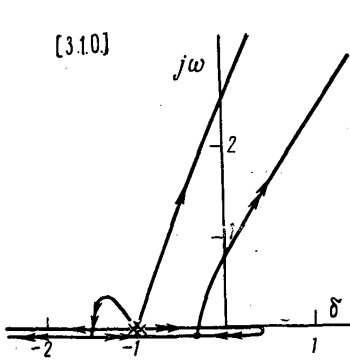


Рис. 3

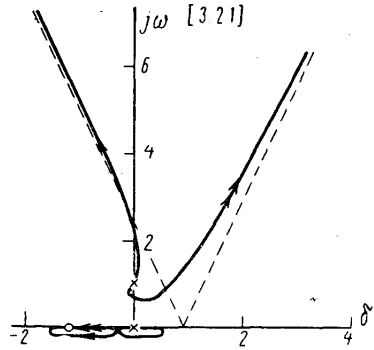


Рис. 4

При $a_4c_0 > 0$ траектории корней имеют асимптоты, угловые коэффициенты и центры которых находятся по формулам

$$t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2\sqrt{a_4c_0} \pm b_2}{2\sqrt{a_4c_0} \pm b_2}}.$$

$$a_{1,2} = \frac{\sqrt{a_4c_0}(2a_3c_0 - b_2b_1) \pm c_0(2a_4b_1 - a_3b_2)}{(4a_4c_0 - b_2^2)}.$$

Бесконечно удаленные точки действительной оси при $a_4c_0 > 0$ запрещены.

К уравнениям с $2m - (n+l) = 0$ относятся также уравнения классов [1.1.1], [2.2.2], [3.3.3], [4.4.4] ($n=m=l$), заведомо не имеющие асимптот.

Приведенные формулы нахождения асимптот траекторий корней уравнения различных классов дают возможность качественного построения траекторий корней без вычисления по аналитическим формулам, которые в большинстве случаев имеют довольно высокий порядок. Сформулированные выше общие свойства траекторий корней облегчают их качественное построение.

Один из способов построения траекторий корней уравнения (1) основан на использовании методов, применяемых для уравнений с линейным параметром [1].

Уравнение (1) можно рассматривать как частный случай более общего уравнения с двумя переменными параметрами

$$\Phi_n(p) + \rho_1[\Psi_m(p) + \rho_2\theta_l(p)] = 0. \quad (14)$$

Это уравнение определяет семейство траекторий корней уравнений с линейным свободным параметром ρ_1 и параметром семейства ρ_2 . Семейство таких траекторий может быть построено геометрическим или аналитическим методом [1]. Построение траекторий корней уравнения (1) сводится к нахождению таких точек этого семейства траекторий, для которых $\rho_1 = \rho_2$.

Пусть требуется построить корневой годограф уравнения

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) + \rho (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) + \rho^2 (c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0) = 0. \quad (15)$$

Для этого рассмотрим семейство траекторий корней уравнения вида

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) + \rho_1 [(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) + \rho_2 (c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0)] = 0, \quad (16)$$

где ρ_1 — параметр траекторий, ρ_2 — параметр семейства траекторий.

Изложим порядок построения траекторий корней.

Построим корневой годограф уравнения

$$(b_m p^m + \dots + b_0) + \rho_2 (c_l p^l + \dots + c_0) = 0, \quad (17)$$

считая ρ_2 свободным параметром. Очевидно, корневой годограф уравнения (1) является геометрическим местом предельных точек семейства траекторий корней (16).

Определим значение параметра ρ_2 в точках этого корневого годографа и произведем калибровку корневого годографа по ρ_2 . Такую калибровку сделаем с помощью формул параметра.

Построим семейство траекторий корней уравнения (16) с параметром траекторий ρ_1 для фиксированных значений ρ_2 , соответствующих точкам калибровки.

Найдем на каждом корневом годографе этого семейства точки, для которых $\rho_1 = \rho_2$. Это производится с помощью графика $\rho_1(\delta, \omega)$, построенного для траекторий семейства по формулам параметра. Найденные точки являются точками траекторий корней исходного уравнения с квадратичным свободным параметром (15).

Соединим найденные точки плавной линией и получим корневой годограф уравнения (15). Одновременно построим график параметра $\rho(\delta, \omega)$.

Проиллюстрируем процесс построения примером. Пусть требуется построить корневой годограф характеристического уравнения (см. рис. 5).

$$(p^2 + p + 1,25) + \rho (p^2 + 3p + 2,5) + \rho^2 (p^2 + 4p + 6,25) = 0. \quad (18)$$

Для этого рассмотрим семейство траекторий корней следующего уравнения

$$(p^2 + p + 1,25) + \rho_1 [(p^2 + 3p + 2,5) + \rho_2 (p^2 + 4p + 6,25)] = 0, \quad (19)$$

где ρ_1 — параметр траекторий, ρ_2 — параметр семейства траекторий. Произведем построение в указанном выше порядке.

Построим корневой годограф уравнения

$$(p^2 + 3p + 2,5) + \rho_2 (p^2 + 4p + 6,25) = 0. \quad (20)$$

На рис. 5 (верхний чертеж) изображена часть корневого годографа, необходимая для дальнейших построений (кривая II). Предельная точ-

ка этого корневого годографа обозначена кружком, а начальная — треугольником.

На рис. 5 произведена калибровка корневого годографа по параметру ρ_2 со следующими значениями: 1 — $\rho_2=0,25$, 2 — $\rho_2=0,67$, 3 — $\rho_2=1,5$ и 4 — $\rho_2=4,0$. Эти точки обозначены маленькими кружками. Калибровка произведена с помощью графика значений параметра ρ_2 . Считая намеченные точки заданными предельными точками семейства траекторий корней (19), построим несколько траекторий корней из этого семейства. На рис. 5 показаны траектории для $\rho_2=0,25; 0,67; 1,5$ и $4,0$. Все траектории имеют одинаковые начальные точки (обозначены крестом).

На каждой траектории находим точку, в которой $\rho_1=\rho_2$. На рис. 5 отмечены эти точки для соответствующих значений параметра (1' — $\rho_1=0,25$; 2' — $\rho_1=0,67$; 3' — $\rho_1=1,5$ и 4' — $\rho_1=4,0$). Соединив найденные точки плавной кривой, получим искомый корневой годограф.

На рис. 5 показано построение

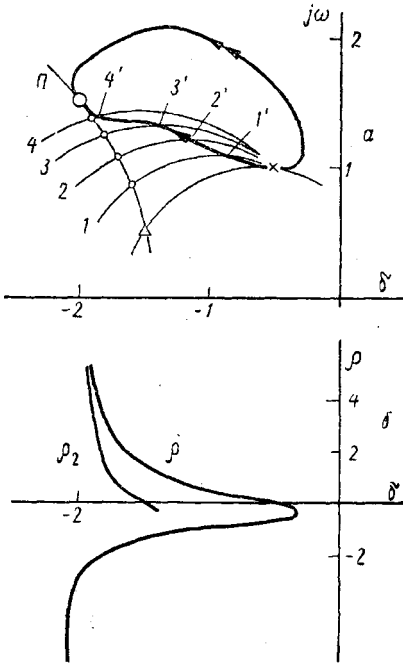


Рис. 5

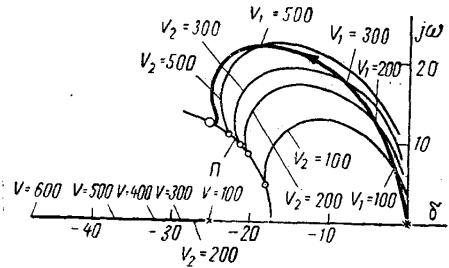


Рис. 6

положительного годографа (обозначен стрелкой) и отрицательного годографа (обозначен двойной стрелкой).

На рис. 5 приведен график параметра $\rho(\delta, \omega)$.

Применим описанный метод построения траекторий корней для исследования практического примера. Движения управляемого самолета по крену [2] описываются следующим характеристическим уравнением (см. рис. 6):

$$(400\rho^3 + 10\,000\rho^2) + V(8\rho^2 + 200\rho) + V^2(0,064\rho^2 + 3,2\rho + 50) = 0, \quad (21)$$

где V — скорость полета самолета (свободный параметр). Характеристика сервопривода предполагается аperiodической, а регулирование осуществляется по углу крена, угловой скорости крена и угловому ускорению.

Вспомогательные построения и корневой годограф исследуемого уравнения изображены на рис. 6. Дуга Π — корневой годограф уравнения

$$(8\rho^2 + 200\rho) + V_2(0,064\rho^2 + 3,2\rho + 50) = 0. \quad (22)$$

Кривые для значения $V_2=100; 200; 300; 500$, изображенные тонкими линиями, — траектории корней из семейства

$$(400p^3 + 10000p^2) + V_1[(8p^2 + 200p) + V_2(0,064p^2 + 3,2p + 50)] = 0. \quad (23)$$

Предельные точки этих траекторий, лежащие на корневом годографе (22), обозначены маленькими кружками. На корневом годографе $V_2=100$ найдена точка с $V_1=100$. На корневом годографе $V_2=200$ найдена точка с $V_1=200$ и т. д. Полученные точки соединены плавной кривой (толстая линия). Данная кривая является корневым годографом исходного уравнения (21). Начальные точки обозначены крестом, предельная — большим кружком. Одновременно получена действительная ветвь корневого годографа.

При построении траекторий корней из семейства (23) мы воспользовались аналитическим методом. При этом уравнение траекторий корней имеет второй порядок относительно ω^2 , в то время как уравнение траекторий корней исходного уравнения (21) — четвертого порядка относительно ω^2 . Таким образом, изложенный метод построения траекторий корней приводит к значительному снижению порядка уравнений, по которым необходимо произвести вычисления.

Авторы выражают благодарность Г. А. Бендрикову за обсуждение работы и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Остославский И. В. Аэродинамика самолета. М., Оборонгиз, 1957.

Поступила в редакцию
22.4 1969 г.

Кафедра
физики колебаний