

DR. KAZIMIERZ BARTEL

PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RZUTY  
CECHOWANE



K S I A Ź N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻ. — S. A.

LWÓW—WARSZAWA

1931

## INNE DZIEŁA TEGOŻ AUTORA

K. BARTEL

### **PERSPEKTYWA MALARSKA**

Zasady. Zarys historyczny. Estetyka.

T. I. Z 397 ilustracjami. Str. VIII + 312. (Nauka i Sztuka. T. XVII).  
Brosz. 45'—, w płótnie 52'—, — T. II w przygotowaniu.

Treść: O odwzorowaniu perspektywicznym na płaszczyźnie.  
II. Zasady płaskiej perspektywy stożkowej. III. Perspektywa krzywych stożkowych. IV. Perspektywa powierzchni obrotowych.  
V. Perspektywa obrazów, odbitych w zwierciadłach płaskich.  
VI. Konstrukcja cieni. VII. Perspektywa pośrednia.

#### **Z GŁOSÓW PRASY.**

„Ktokolwiek zajmuje się sztukami plastycznymi, niechaj nie darzy obojętnością dzieła K. Bartla, które jest **poważne, ściśle, a przytem tak powabne, tak pięknie wydane**“.

*M. Treter, Świat, r. 1928, nr. 20.*

„K. Bartel daje artystom w swej drobiazgowej i ściślej książce wiedzę. Artyści będą wiedzieli, co z nią zrobić. Literaturze polskiej, tak ubogiej w dzieła naukowe z dziedziny sztuki, przybywa **książka naprawdę pożyteczna**. Jeżeli w tomie drugim z taką samą ścisłością, jak w tomie pierwszym, poddane będą analizie pytania, których część wyżej wyliczono, to dzieło K. Bartla przyczynić się może do tego, że przestaniemy nareszcie obracać się w sferze nastrojów, gdy mówić będziemy o rysunku, o formie, o stylu“.

*J. Kleczyński, Kurjer Warszawski, r. 1928, nr. 151.*

„Nach den Andeutungen der Vorrede zu schließen, dürfen wir hier auch eine **großangelegte Geschichte der Perspektive** erwarten, nicht nur eine Geschichte der Zentralperspektive, d. h. der seit einigen Jahrhunderten in der abendländischen Malerei herrschenden Form der Raumdarstellung, sondern auch eine Übersicht der höchst merkwürdigen und interessanten Formen der Raumdarstellung der mittelalterlichen und antiken, vielleicht auch der ostasiatischen Malerei“.

*M. Wallis, Pologne Litteraire, r. 1928, nr. 22.*

*K. Bartel*

### **GEOMETRJA WYKREŚLNA**

Wyd. II. popr. i uzupełnione. Z 584 rysunkami. Str. 4 nrb. + 436. Zł. 8'—.

Podstawowe dzieło dla każdego technika, odznaczające się zarówno wyczerpującym opracowaniem, jak i przystępnością wykładu.

**POLECA KSIĄŻNICA-ATLAS S. A.**

ŁWÓW, UL. CZARNIECKIEGO L. 12 — WARSZAWA, UL. NOWY ŚWIAT L. 59

7002

RZUTY  
CECHOWANE

RZUTY CECHOWANE



DR. KAZIMIERZ BARTEL  
PROFESOR POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

# RZUTY CECHOWANE

Z 71 RYSUNKAMI W TEKŚCIE



K S I A Ź N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻ. — S. A.

LWÓW—WARSZAWA

1931



131636



~~P. 5057~~



Wd. inw. 541

2351

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

45.1726/18.

P 52/68

D 109/11

## Wstęp.

Postanowienie realizacji ponownego wydania, ogłoszonej przeze mnie, w r. 1914, książki p. t. „*Geometria rzutów cechowanych*“, przerodziło się w całkowicie nowe opracowanie tematu, jakoteż nowe wykonanie wszystkich, bez wyjątku, rysunków, przy znacznem powiększeniu ich ilości. Fakt ten upoważnia mnie do wydania tej książki, jako odrębnej pracy, pod tytułem, który uznałem za odpowiedniejszy.

Przyjmując, że czytelnik posiada elementarne wiadomości z geometrii, a z geometrii wykreślnej w szczególności, nie budowałem wykładu systematycznego utworów przestrzennych, a z powierzchni uwzględniłem te tylko, na których następnie oparłem — w sformułowaniu geometrycznem — przykłady zastosowań praktycznych.

Ponieważ chodzi o geometrię wykreślną, przywiązywałem wagę do starannego wykonania rysunków. W pracy tej pomocnymi mi byli, asystenci przy mojej katedrze, pp. Mieczysław Telićzek, inż. Józef Tinz, Franciszek Otto i Grzegorz Syniewski — za co wyrażam im podziękowanie.

Wydanie książki, wymagającej znacznego wkładu pieniężnego, w czasie powszechnej „kompresji“, jest niewątpliwie rzadko, w tym stopniu, spotykanem zapoznaniem interesu materialnego, ze strony wydawcy. Tem też większą wdzięczność moją wywołuje S. A. Książnica-Atlas, której, także i za piękne wyposażenie wydawnictwa, serdeczną składam podziękę.

We Lwowie, w kwietniu 1931 r.

*Kazimierz Bartel.*





# Spis rzeczy.

## Rozdział pierwszy.

### Punkt, prosta, płaszczyzna.

1. Uwagi wstępne . . . . .	1
2. Rzut punktu i prostej . . . . .	2
3. Stopniowanie, moduł i nachylenie prostej . . . . .	3
4. Dwie proste . . . . .	5
5. Płaszczyzna . . . . .	6
6. Dwie płaszczyzny . . . . .	7
7. Prosta prostopadła do płaszczyzny . . . . .	8
8. Kład płaszczyzny . . . . .	9
9. Płaszczyzny o danem nachyleniu, przechodzące przez proste . . . . .	10
10. Proste o danem nachyleniu, leżące na danej płaszczyźnie . . . . .	11
11. Zadania . . . . .	12

## Rozdział drugi.

### Krzywe skośne. Powierzchnie prostolinjowe.

12. Rzut linii skośnej. Linje stokowe . . . . .	17
13. Powierzchnie stokowe i walcowe . . . . .	19
14. Linje stokowe i linje spadu na powierzchniach stożkowych i walcowych . . . . .	21
15. Płaskie przekroje powierzchni stożkowych i walcowych . . . . .	23
16. Powierzchnie stożkowe i walcowe rzędu drugiego . . . . .	25
17. O powierzchniach rozwijalnych . . . . .	29
18. Powierzchnie stokowe, przechodzące przez krzywe skośne . . . . .	32
19. O powierzchniach skośnych . . . . .	34
20. Zadania . . . . .	38

## Rozdział trzeci.

### Przykłady zastosowań.

21. Połączenie poziomej terasy z płaszczyzną terenu skarpmi . . . . .	48
22. Przejście z przekopu w nasyp drogi, leżącej w poziomie . . . . .	50
23. Przejście z powierzchni w nasyp drogi, biegnącej w spadku . . . . .	56
24. Połączenie poziomej terasy, kształtu koła, z płaszczyzną terenu . . . . .	61
25. Połączenie poziomej eliptycznej terasy z płaszczyzną terenu . . . . .	64
26. Połączenie poziomej terasy i drogi, idącej łukiem i w spadku, z płaszczyzną terenu . . . . .	65
27. Połączenie dwóch dróg w spadku . . . . .	69

## Rozdział czwarty.

**Powierzchnia topograficzna.**

28. Plan warstwowy . . . . .	70
29. Punkty charakterystyczne powierzchni topograficznej . . . . .	72
30. Linje spadu. Linje grzbietowe. Linje ściekowe . . . . .	74
31. Linje stokowe na powierzchni topograficznej . . . . .	76
32. Linje geodezyjne na powierzchni topograficznej . . . . .	77
33. Płaskie przekroje powierzchni topograficznej. Profile . . . . .	79
34. Przejście z przekopu w nasyp drogi w spadku . . . . .	81
35. Przykład drogi, której płaski profil podłużny jest łukiem koła . . . . .	81
<i>Literatura</i> . . . . .	86

## Rozdział pierwszy.

### Punkt, prosta, płaszczyzna.

**1. Uwagi wstępne.** O wyborze metody geometrycznego odwzorowania, w zagadnieniach praktycznych, decyduje celowość. Objekty architektoniczne i maszynowe, wymagają użycia rzutów prostokątnych na dwie, względnie więcej, płaszczyzn; do przedstawienia pierwszych zastosujemy także często rzuty środkowe, do drugich rzuty aksonometryczne.

Ale metody te okażą się nieodpowiednie, gdy chodzić będzie o zadania, odnoszące się do obszaru powierzchni ziemi, do powierzchni topograficznej. W tych wypadkach posługujemy się wyłącznie metodą rzutów prostokątnych na jedną, z reguły poziomą, płaszczyznę rzutów. Z rzutem każdego punktu związana jest liczba, wyrażająca, w przyjętej jednostce miary, oddalenie tego punktu od płaszczyzny rzutów; każdy punkt ma swoją *cechę*, a ten sposób odwzorowania nazywać będziemy *metodą rzutów cechowanych*.\* Jest ona sposobem wyrażania się topografa, geodety, inżyniera dróg wodnych, bitych i żelaznych.

Pozioma płaszczyzna rzutów nosi, w tej metodzie odwzorowania, nazwę płaszczyzny porównawczej; wszystkie inne płaszczyzny poziome tworzą równoległy pęk płaszczyzn warstwowych, którym nadajemy miana liczb, wyrażających, w przyjętych jednostkach miary, ich oddalenia od płaszczyzny porównawczej. Z reguły płaszczyzny warstwowe przyjęte są w równych od siebie odległościach, tworząc warstwy. Odległości płaszczyzn warstwowych, leżących nad płaszczyzną porównawczą od tej płaszczyzny, nazywamy ich wysokościami, oddalenia płaszczyzn warstwowych, przyjętych pod płaszczyzną porównawczą od niej, określamy jako ich głębokości.

---

\* Nazwę tę wprowadziłem, po raz pierwszy, przy poprzednim opracowaniu tego tematu w r. 1914, jako odpowiednik francuskiego „Projection cotée”, względnie „Géométrie cotée”, zastępujący bezsensowny językowo „rzut kotowany” i takąż „kotę”.

**2. Rzut punktu i prostej.** Położenie punktu  $A$  w przestrzeni, którego rzutem poziomym jest punkt  $A'$ , a cechą liczba  $a$ , jest wyznaczone jednoznacznie, skoro daną jest jednostka długości, użyta do wyrażenia cechy. Cechę punktu ujmujemy w nawias, pisząc ją obok litery, określającej miano danego punktu. Gdy punkt leży nad płaszczyzną rzutów, to oddalenie jego od tej płaszczyzny nazywamy wysokością. Gdy punkt leży pod płaszczyzną porównawczą, to wówczas mówimy o jego głębokości, nadając cesze tego punktu znak ujemny.

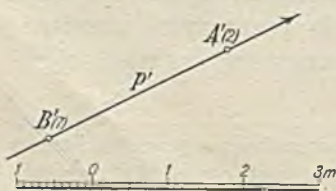
Płaszczyzna  $\varphi$ , przechodząca przez, przyjętą w przestrzeni, prostą  $p$  i prostopadła do płaszczyzny porównawczej  $\pi$ , przecina tę płaszczyznę podług prostej  $p'$ , będącej rzutem prostokątnym prostej  $p$  na płaszczyznę  $\pi$ . Płaszczyzna  $\varphi$  rzuciła prostą  $p$  na płaszczyznę  $\pi$ .

Prosta jest wyznaczona dwoma punktami, a ponieważ rzut jej jest linią prostą, więc cechowany rzut dwóch punktów prostej wyznacza położenie prostej w przestrzeni, w odniesieniu do płaszczyzny porównawczej, w sposób jednoznaczny.



Rys. 1 a—b.

Rys. 1 a podaje rzut cechowany  $p'$  prostej  $p$ , której położenie w przestrzeni, wyznaczone jest punktami  $A$  i  $B$ ; wysokość pierwszego wynosi 3, a drugiego 5 jednostek. Jako jednostkę miary przyjęto 1 cm, co zaznaczono na rysunku, który wykonany jest w naturalnej wielkości (*n. w.*). Strzałka, na prostej  $p'$ , oznacza kierunek nachylenia prostej  $p$ , t. j. kierunek następstwa jej punktów, których wysokości (cechy) maleją.



Rys. 2.

Z reguły przyjmujemy, jako jednostkę miary, 1 metr, wobec czego rysować musimy zawsze w pewnym pomniejszeniu, czyli jak mówimy: w podziałce pomniejszającej. Stopień pomniejszenia, czyli podziałka, zaznaczone być muszą na rysunku. Czynimy to w dwo-

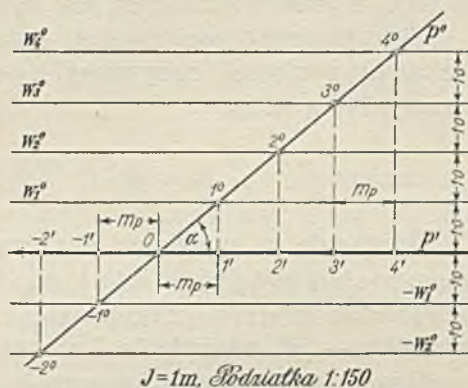
jaki sposób: pierwszy, któryby nazwać można słowny, widzimy na rys. 1 b, drugi, rysunkowy, podaje rys. 2, gdzie zamieszczona podziałka zawiera zarówno jednostkę miary, jak i stopień zmniejszenia.

**3. Stopniowanie, moduł i nachylenie prostej.** Wyobraźmy sobie pęk poziomych płaszczyzn, oddalonych od płaszczyzny porównawczej o jedną, dwie, trzy i t. d. przyjętych jednostek miary. Płaszczyzny te utworzą warstwy, leżące nad i pod płaszczyzną porównawczą, o grubościach równych jednostce.

Rzucająca pionowo, prostą  $p$ , płaszczyzna  $\varphi$  przecnie przyjęty pęk płaszczyzn warstwowych podług prostych poziomych, a te przecną prostą  $p$ , w równo od siebie oddalonych punktach. Różnice wysokości tych punktów będą równe jednostce miary. Obróćmy płaszczyznę  $\varphi$ , wraz z leżącą na niej prostą  $p$  i owymi prostymi poziomymi, około jej śladu poziomego t. j. około prostej  $p'$ , na płaszczyznę porównawczą czyli — jak mówimy — wykonajmy kład prostej  $p$  na płaszczyznę rzutów (rys. 3).

Proste poziome utworzą pęk promieni  $w_1^0, w_2^0, \dots$  —  $w_1^0, -w_2^0, \dots$ , równoległych do prostej  $p'$  i oddalonych od siebie o 1 m, w podziałce rysunku.

Przyjmijmy, że prosta  $p^0$  jest kładem prostej  $p$  na płaszczyznę porównawczą i rzućmy otrzymane na niej punkty  $1^0, 2^0, \dots$  —  $1^0, -2^0, \dots$ , prostopadłe, na prostą  $p'$ . Punkt, oznaczony liczbą 0, leży na płaszczyźnie porównawczej i jest śladem poziomym prostej  $p$ . Punkty  $1', 2', 3', \dots$  prostej  $p'$ , są rzutami punktów prostej  $p$ , których wysokości, mierzone w jednostkach podziałki rysunku, wyrażone są właśnie temi liczbami. (W dalszym ciągu kreski u góry liczb wskazujących pominiemy). Punkty  $-1', -2', \dots$  są rzutami punktów prostej  $p$ , znajdujących się pod płaszczyzną porównawczą. Wyznaczenie na prostej punktów, których wysokości są liczbami całkowitemi układu naturalnego, nazywamy zestopniowaniem tej prostej. Liczby  $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$  na prostej  $p'$ , zwane punktami jej podziałki, stanowią t. zw. podziałkę nachy-



Rys. 3.

lenia. Jednostkę podziałki nachylenia nazywamy modułem prostej i oznaczać go będziemy stale literą  $m$  z wskaźnikiem danej prostej. Jest nim odcinek prostej  $p'$ , ograniczony dwoma punktami, których różnica cech wynosi jednostkę, a więc  $m_p = \frac{0}{1} = \frac{0-1}{1} = 2 \text{ } 3 = \dots$

Kąt  $\alpha$ , zawarty między prostymi  $p'$  i  $p^0$ , równy kątowi, jaki prosta  $p$  zawiera ze swoim rzutem  $p'$ , jest kątem nachylenia prostej  $p$  do płaszczyzny porównawczej, a więc i do każdej płaszczyzny warstwowej. Z rys. 3 widzimy, że wzrost kąta  $\alpha$  pociąga za sobą zmniejszenie modułu prostej, że proste nachylone do poziomu, pod tym samym kątem, mają równe moduły, a więc jednakowe podziałki nachylenia, że moduł prostej, prostopadłej do płaszczyzny poziomej, jest równy zeru, prostej nachylonej pod  $45^\circ$  równy jednostce, a prostej poziomej jest nieskończenie wielki.

Styczną trygonometryczną, kąta nachylenia  $\alpha$ , prostej do płaszczyzny poziomej, nazywamy nachyleniem tej prostej i oznaczamy literą  $n$ .

$$n_p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m_p}.$$

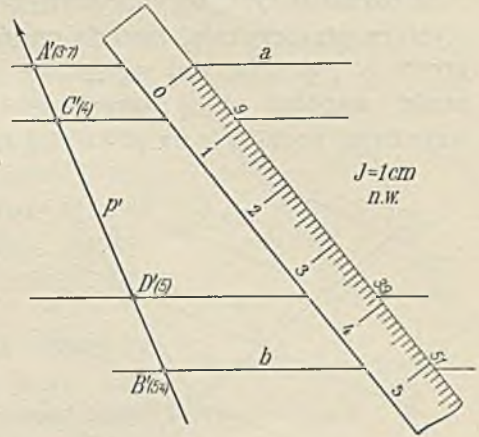
Równanie to mówi, że liczby, wyrażające nachylenie  $n_p$  prostej  $p$  i jej moduł  $m_p$ , są liczbami odwrotnymi. Znajomość modułu prostej określa więc — przy danej podziałce rysunku — jej nachylenie i odwrotnie.

Rzut prostej, cecha jednego jej punktu, moduł i kierunek nachylenia wyznaczają położenie prostej w przestrzeni.

Gdy położenie prostej w przestrzeni jest wyznaczone zapomocą rzutów cechowanych dwóch jej punktów, to moduł — wyrażony w jednostkach podziałki rysunku — jest ilorazem z długości odcinka, ograniczonego temi rzutami cechowanymi i różnicy ich cech.

Do stopniowania prostych, wyznaczonych dwoma punktami, używa się chętnie milimetrowej podziałki, a to w następujący sposób: Przez dane punkty  $A'$  (3·7) i  $B'$  (5·4) poprowadzimy, w dowolnym kierunku, proste równoległe  $a$  i  $b$  (rys. 4). Różnica między wysokościami punktów  $A$  i  $B$  wynosi  $5·4 - 3·7 = 1·7$ . Ustawmy podziałkę milimetrową tak, aby jej kreska zerowa leżała na prostej  $a$ , zaś kreska, odcinająca  $17 \text{ mm}$ , względnie ich wielokrotność, na prostej  $b$ . Użycie wielokrotności liczby, wyrażającej różnicę cech punktów  $A'$  i  $B'$ , stanie się — jak w naszym przypadku —

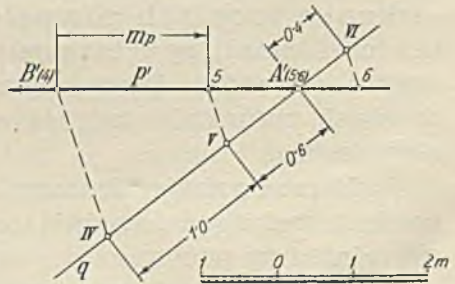
koniecznością, gdy oddalenie prostych  $a$  i  $b$ , wyrażone w pewnych jednostkach miary, jest większe aniżeli liczba, wyrażająca różnicę cech tych punktów, w tych samych jednostkach. Przyjęliśmy mnożnik 3, a więc punktem końcowym podziałki, leżącym na prostej  $b$ , będzie kreska, określająca długość  $3 \cdot 17 = 51 \text{ mm}$ . Na odcinku  $0 - 51$  podziałki mamy 17 jednostek po  $3 \text{ mm}$ . Odmierzmy 3 takie jednostki od punktu 0, a 4 jednostki od punktu 51, to punkty, oznaczone liczbami 9 i 39, dzielą odcinek  $0 - 51$ , krawędzi podziałki milimetrowej, w tym samym stosunku, w jakim podzielony ma być odcinek  $A'B'$ . Proste, równoległe do prostej  $a$ , poprowadzone przez punkty 9 i 39, przetną prostą  $p'$  w punktach  $C'(4)$  i  $D'(5)$ . Odcinek  $C'D'$  jest modulem prostej  $p$ .



Rys. 4.

Graficzny sposób zestopniowania prostej, której dwa cechowane punkty  $A'(56)$  i  $B'(4)$  są dane, wskazuje rys. 5.

Przez punkt  $A'$  poprowadzimy dowolną prostą  $q$ , na której odmierzymy odcinek  $A'VI$ , równy  $0.4$  dowolnej jednostki, a następnie odcinki  $VI\bar{V} = V\bar{I}V$  i równe tej samej jednostce. Proste równoległe do  $IVB'$ , poprowadzone z punktów  $V$  i  $VI$ , wyznaczą na prostej  $p'$  podziałkę nachylenia, której modulem  $m_p$  jest odcinek  $B'5 = 5,6$ .

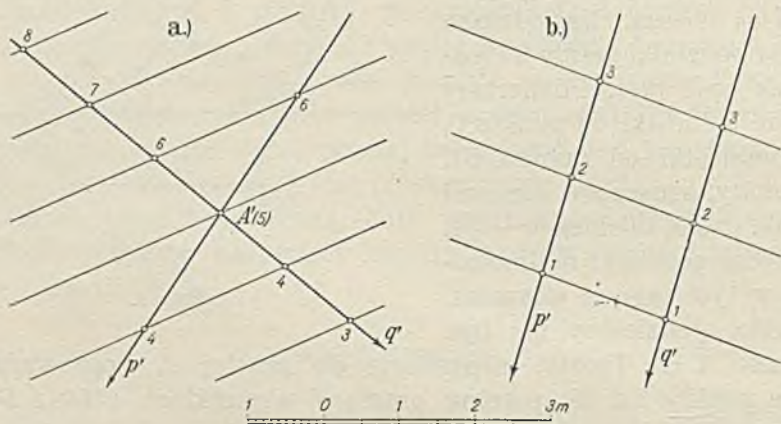


Rys. 5.

**4. Dwie proste.** Mogą one posiadać jeden punkt wspólny w odległości skończonej, a wtedy określamy je mianem prostych przecinających się. Gdy punkt wspólny dwóch prostych leży nieograniczenie daleko, czyli jest punktem niewłaściwym, to proste takie nazywamy równoległymi. Gdy proste nie posiadają ani właściwego ani nie-

właściwego punktu wspólnego, to mówimy, że są skośne lub wichrowate.

Z określeń tych wynika wprost sposób odwzorowania tych prostych na płaszczyźnie, metodą rzutów cechowanych. Zestopniowane proste  $p'$  i  $q'$  (rys. 6a) są rzutem dwóch prostych, posiadających punkt wspólny  $A$  w wysokości 5. Proste, łączące jednakowe wskaźniki podziałek na  $p'$  i  $q'$ , są do siebie równoległe i odwrotnie,



Rys. 6 a—b.

jeśli proste, łączące równoważnościowe wskaźniki podziałek nachylenia dwóch prostych, są do siebie równoległe, to podziałki te odnoszą się do dwóch prostych przecinających się.

Rzuty prostych równoległych są prostymi równoległymi; moduły ich są równe, a kierunki nachylenia zgodne (rys. 6b). Proste, łączące równoważnościowe wskaźniki podziałek nachylenia dwóch prostych równoległych, są do siebie równoległe.

**5. Płaszczyzna.** Wiadomo, że płaszczyznę wyznaczają dwie proste przecinające się, dwie proste równoległe, prosta i punkt, względnie trzy punkty.

Płaszczyzny warstwowe przecinają daną płaszczyznę  $\alpha$  podług prostych poziomych, które nazywamy liniami warstwowymi tej płaszczyzny. Rzut prostokątny linii warstwowych, na płaszczyznę porównawczą, jest pękiem prostych równoległych  $1_a, 2_a, 3_a, \dots$  (rys. 7), które nazywamy warstwicami płaszczyzny  $\alpha$ . Pęk warstwic stanowi plan warstwowy płaszczyzny.



Prosta  $l_a$ , leżąca na płaszczyźnie  $\alpha$ , a prostopadła do jej linii warstwowych, nazywa się linią spadu tej płaszczyzny. Jej rzut poziomy  $l'_a$  będzie prostopadły do warstwicy, gdyż rzut kąta prostego jest kątem prostym, gdy jedno ramię tego kąta jest równoległe do płaszczyzny rzutów. Podziałkę nachylenia linii spadu  $l'_a$  nazywamy podziałką nachylenia płaszczyzny, moduł  $m_a$  podziałki nachylenia płaszczyzny — modułem tej płaszczyzny. Odwrotna wartość liczby, wyrażającej moduł płaszczyzny, jest jej nachyleniem  $n_a$ .

Im większy jest moduł, tem mniejszą jest styczna trygonometryczna kąta, jaki dana płaszczyzna zawiera z płaszczyzną porównawczą, względnie warstwową.

Prosta  $p$ , której podziałka nachylenia powstała z przecięcia się warstwicy płaszczyzny  $\alpha$  z rzutem  $p'$  tej prostej, leży na płaszczyźnie  $\alpha$ .

**6. Dwie płaszczyzny.** Dwie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej, zwanej ich krawędzią. Określić ją można jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się linii warstwowych obu płaszczyzn, leżących parami na płaszczyznach warstwowych. Prosta  $k'$  (rys. 8a) jest rzutem cechowanym krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , wyznaczonych zestopniowanymi liniami spadu  $l'_a$  i  $l'_\beta$ .

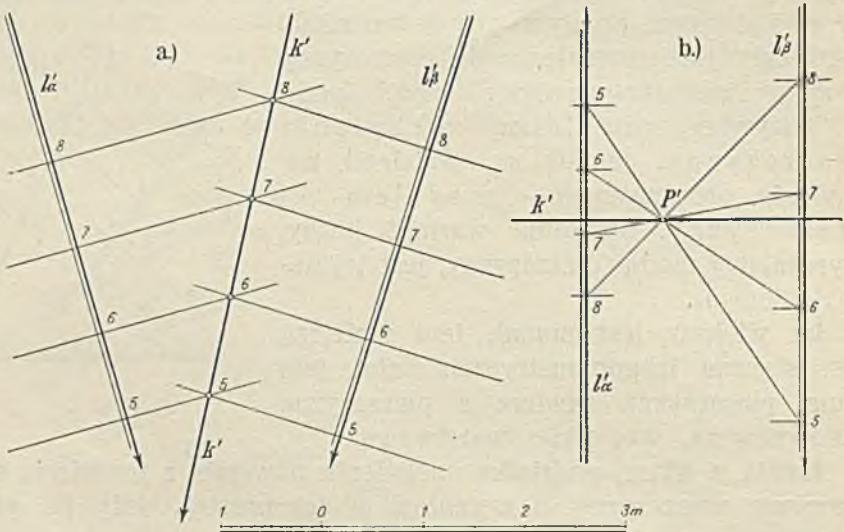
Jeżeli warstwice obu płaszczyzn są do siebie równoległe, a więc gdy równoległe są także ich linie spadu  $l'_a$  i  $l'_\beta$  (rys. 8b), to krawędź  $k$  będzie linią poziomą, a jej rzut  $k'$  prostą, równoległą do warstwicy. Aby wyznaczyć jeden punkt prostej  $k'$  połączmy równoważnościowe wskaźniki linii spadów danych płaszczyzn. Ponieważ szeregi punktów na prostych  $l'_a$  i  $l'_\beta$  są podobne i podobnie położone, więc promienie, łączące ich homologiczne punkty przejdą przez jeden punkt  $P'$ . Prosta  $k'$  przejdzie przez punkt  $P'$ , równoległe do warstwicy obu płaszczyzn. Cecha punktu przecięcia się prostej  $k'$  z linią spadu jednej z obu płaszczyzn wyraża wysokość prostej  $k$ , równoległej do płaszczyzny porównawczej.

Jeżeli pęk płaszczyzn warstwowych przetniemy płaszczyznami równoległymi  $\alpha, \beta, \dots$ , to otrzymamy pęk promieni równoległych, stanowiących linie warstwowe płaszczyzn  $\alpha, \beta, \dots$ . Rzut tych linii warstwowych na płaszczyznę porównawczą będzie pękiem równo-



Rys. 7.

ległych warstw płaszczyzn  $\alpha, \beta, \dots$ . Linie spadu tych płaszczyzn będą do siebie równoległe, a moduły równe. A więc równoległe,



Rys. 8 a—b.

o jednym kierunku nachylenia i jednym modułem zestopniowane linie spadu, wyznaczają płaszczyzny równoległe.

**7. Prosta prostopadła do płaszczyzny.** Prosta prostopadła do płaszczyzny jest prostopadłą do wszystkich prostych, leżących na tej płaszczyźnie, a więc i do linii warstwowych. Rzut więc prostej, prostopadłej do płaszczyzny, jest prostopadły do warstw tej płaszczyzny, a zatem równoległy do jej linii spadu.

Wyznamy prostą  $a$ , przechodzącą przez punkt  $A$  i prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 9).

Rzut poziomy  $a'$  prostej  $a$  będzie równoległy do linii spadu  $l'_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , kierunek nachylenia przeciwny. Aby znaleźć moduł tej prostej, wyobraźmy sobie, że z punktu  $A$  poprowadziliśmy, prócz prostej  $a$ , prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , prostą  $b$ , równoległą do linii spadu  $l'_\alpha$ . Proste  $a$  i  $b$  wyznaczają płaszczyznę rzucającą, którą obróćmy na płaszczyznę warstwową np. 9. W tym celu odmierzymy na prostopadłej, wykreślonej w punkcie  $A'$  do prostej  $a' \equiv b'$  odcinek  $A'A^0 = 1\text{ m}$  w podziałce rysunku, a na

prostej  $b'$  odcinek  $\overline{A'M'} = m_b$ , równy modułowi  $m_a$  płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $b^0 = (A^0M')$  jest kładem prostej  $b$  na płaszczyznę warstwową 9; wykreślona w punkcie  $A^0$  prostopadła  $a^0$ , do prostej  $b^0$ , jest kładem szukanej prostej  $a$ , zaś odcinek  $\overline{A'N'} = m_a$  jej modułem.

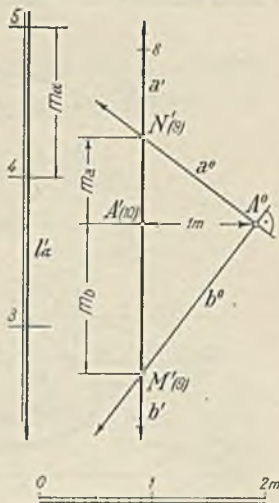
Z rys. 9 czytamy, że:

$$m_a \cdot m_b = 1, \text{ czyli } m_a = \frac{1}{m_b} = \frac{1}{m_a} = n_a$$

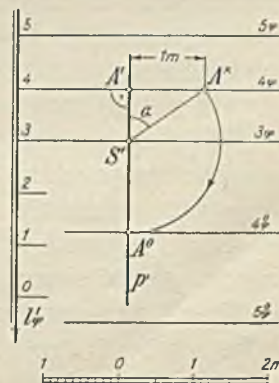
co oznacza, że liczba, wyrażająca, w przyjętej jednostce miary, moduł  $m_a$  prostej  $a$ , prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , jest odwrotnością liczby, która wyraża, w tej samej jednostce, moduł  $m_a$  tej płaszczyzny. W skróceniu wypowiadamy to zdaniem: moduł  $m_a$  prostej  $a$ , prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ , jest równy jej nachyleniu  $n_a$ .

**8. Kład płaszczyzny.** Przez kład płaszczyzny rozumiemy sprowadzenie jej, za pomocą obrotu około którejkolwiek z jej linii warstwowych, na odnośną płaszczyznę warstwową. Oś obrotu jest linia warstwową, około której obracamy dowolny punkt danej płaszczyzny, płaszczyznę obrotu płaszczyzna rzucająca, przechodząca przez, obrócić się mający punkt, prostopadle do osi obrotu. Ślad poziomy płaszczyzny obrotu jest prostą, prostopadłą do warstwy, będącej osią obrotu. Na rys. 10 przyjęliśmy, obrócić się mający punkt  $A$ , na warstwy  $4_\varphi$ . Oś obrotu jest warstwą  $3_\varphi$ ; punkt  $S'$  jest rzutem środka obrotu. Promieniem obrotu jest przeciwprostokątna w trójkącie, którego wierzchołkami są punkt  $A$ , jego rzut  $A'$  na płaszczyznę warstwową  $3$  i punkt  $S'$ , uważany za punkt, leżący na warstwy  $3_\varphi$ . Trójkąt  $S'A'A^*$  jest kładem, trójkąta  $S'A'A$ , na płaszczyznę warstwową, na którą obracamy daną płaszczyznę  $\varphi$ . Równo oddalone od siebie proste  $3_\varphi$ ,  $4_\varphi^0$ ,  $5_\varphi^0$  wyrażają dokonany obrót.

Między rzutem cechowanym płaszczyzny, jako układu płaskiego, a jej kładem, zachodzi prostokątne powinowactwo środkowe, którego osią jest oś dokonanego obrotu.

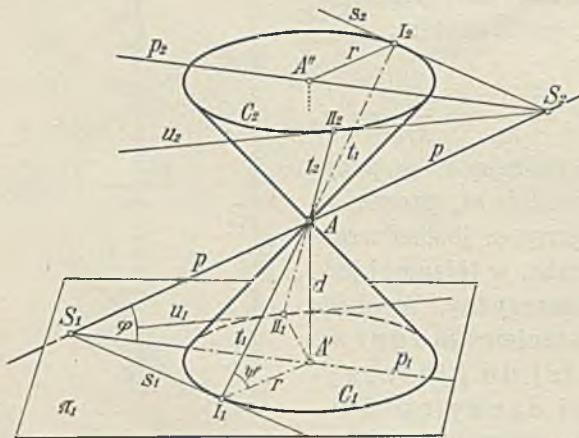


Rys. 9.



Rys. 10.

**9. Płaszczyzny o danym nachyleniu, przechodzące przez prostą.** Przez każdy punkt  $A$ , danej prostej  $p$ , poprowadzić można nieograniczoną ilość płaszczyzn, nachylonych do płaszczyzny



Rys. 11.

poziomej pod danym kątem  $\psi$ . Płaszczyzny te powłóczą obrotywo stożek o osi pionowej, który nazywać będziemy stożkiem stokowym (rys. 11). Dwie z płaszczyzn powłóczących ten stożek, a mianowicie  $\alpha$  i  $\beta$  przechodzić będą przez prostą  $p$ . Aby wyznaczyć te płaszczyzny weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę warstwową  $\pi_1$ , na którą rzucemy dowolny punkt  $A$ , prostą  $p$ . Promień podstawy  $C_1$ , stożka stokowego, którego tworzące mają nachylenie  $\psi$ , wyrazi się równaniem:

$$r = \frac{d}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{d}{n_a} = d \cdot m_a,$$

jeśli  $d = \overline{AA'}$  jest oddaleniem punktu  $A$  od płaszczyzny  $\pi_1$ , a  $m_a$  modulem tworzących stożka, równym modułowi jego płaszczyzn stycznych. Płaszczyzna  $\alpha$ , przechodząca przez prostą  $p$  i nachylona pod kątem  $\psi$ , jest wyznaczona tą prostą i styczną  $s_1$ , do koła  $C_1$ , wykreślonej z punktu  $S_1$ , w którym prosta  $p$  przebija płaszczyznę  $\pi_1$ . Prosta  $p$  i styczna  $u_1$  wyznaczają płaszczyznę  $\beta$ .

Płaszczyzna warstwowa  $\pi_2$ , położona symetrycznie względem punktu  $A$ , przetnie stożek stokowy w kole  $C_2$  o tym samym co koło  $C_1$ , promieniu  $r$ , a prostą  $p$  w punkcie  $S_2$ . Punkt  $A$  jest środkiem odcinka  $S_1S_2$ . Oddalenie punktu  $S_2$  od płaszczyzny  $\pi_1$  jest równe podwójnemu oddaleniu punktu  $A$  od płaszczyzny  $\pi_1$ .

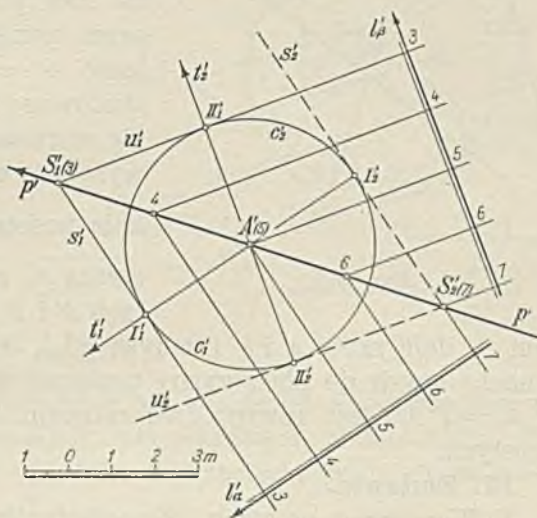
Jeżeli, zamiast punktu  $S_1$ , weźmiemy pod uwagę punkt  $S_2$ , a zamiast koła  $C_1$  koło  $C_2$ , to płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  będą wyznaczone prostą  $p$  i prostymi  $s_2$  i  $u_2$ , wykreślonymi z punktu  $S_2$  stycznie do koła  $C_2$ .

Jeżeli kąt  $\psi$  jest większy, aniżeli kąt nachylenia  $\varphi$  prostej  $p$ , to płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  są rzeczywiste; jeżeli kąt  $\psi$  jest mniejszy od kąta  $\varphi$ , zadanie ma rozwiązanie urojone; jeśli  $\psi = \varphi$  — to obie płaszczyzny schodzą się.

Przejdźmy do rozwiązania zadania w rzucie cechowanym (rys. 12). Załóżmy, że  $\operatorname{tg} \psi = \frac{2}{3}$ . Punkt  $A$ , prostej  $p$ , niechaj ma wysokość 5, a punkt  $S_1$  wysokość 3 jednostek. Koło  $c_1$  leży na płaszczyźnie warstwowej  $\beta$ ; wysokość  $d$  stożka, równa różnicy wysokości punktów  $A$  i  $S_1$ , wyniesie 2  $m$  więc promień  $r$  koła  $c_1$  równy będzie:

$$r = d \cdot m_a = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 m.$$

Styczne  $s_1'$  i  $u_1'$ , wykreślone z punktu  $S_1'$  do koła  $c_1'$ , są warstwicami  $\beta_\alpha$  i  $\beta_\beta$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , przechodzących przez prostą  $p$  i nachy-



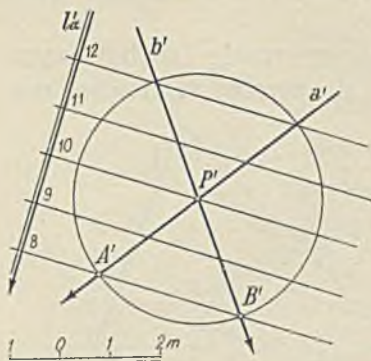
Rys. 12.

lonych w stosunku 2 : 3. Rzuty  $t_1'$  i  $t_2'$  tworzących, wzdłuż których płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  stykają się ze stożkiem stokowym, są kierunkami podziałek nachylenia  $l_\alpha'$  i  $l_\beta'$  tych płaszczyzn.

Zamiast punktu  $S_1'(3)$  możemy użyć punktu  $S_2'(7)$ , z którego poprowadzimy styczne  $s_2'$  i  $u_2'$  do koła  $c_2' \equiv c_1'$ . Styczna  $s_2' \parallel s_1'$  będzie warstwicą 7 płaszczyzny  $\alpha$ , a styczna  $u_2' \parallel u_1'$  warstwicą 7 płaszczyzny  $\beta$ .

**10. Proste, o danym nachyleniu, leżące na danej płaszczyźnie.** Z każdego punktu, danej płaszczyzny  $\alpha$ , poprowadzić można nieograniczenie wiele prostych, nachylonych do płaszczyzny poziomej, pod danym kątem. Wszystkie one utworzą stożek obrotowy (stokowy) o osi pionowej, który płaszczyzna  $\alpha$  przetnie podług dwóch tworzących. Tworzące te mogą być rzeczywiste, urojone lub schodzić się w jedną. Pierwszy przypadek zajdzie, gdy nachylenie płaszczyzny jest większe, aniżeli nachylenie prostych, tworzących stożek stokowy. Gdy nachylenie tworzących stożka

jest większe, aniżeli nachylenie płaszczyzny, zagadnienie daje rozwiązanie urojone; gdy wreszcie oba nachylenia są równe — dwie proste łączą się w jedną, płaszczyzna jest styczna do stożka.

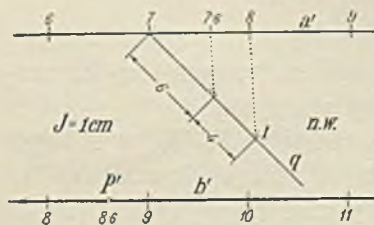


Rys. 13.

Przyjmijmy płaszczyznę  $\alpha$  (rys. 13) o nachyleniu  $n_\alpha = 1:1$  i znajźmy na niej proste  $a$  i  $b$ , przechodzące przez punkt  $P(10)$  i mające nachylenie  $n_1 = 4:5$ . Podstawę stożka stokowego przyjmijmy na płaszczyźnie warstwowej w wysokości 8. Jego wysokość wyniesie  $d = 2\text{ m}$ , promień koła podstawy  $r = \frac{d}{n_1} = 2,5\text{ m}$ . Warstwica  $\delta_\alpha$  przecina koło  $k$  w punktach  $A'$  i  $B'$ , które, połączone z punktem  $P'$ , dają rzuty  $a'$  i  $b'$  prostych  $a$  i  $b$ , leżących na płaszczyźnie  $\alpha$  i nachylonych do płaszczyzny poziomej w stosunku 4:5. Odcinek  $\overline{P'A'} = \overline{P'B'}$  jest równy dwukrotnemu modułowi każdej z tych prostych.

### 11. Zadania.

1. Wyznaczyć prostą  $b$ , równoległą do danej prostej  $a$ , a przechodzącą przez dany punkt  $P$  (rys. 14). Prosta  $b'$  będzie równoległą do  $a'$ . Kierunki nachylenia obu prostych są zgodne, a moduły równe.



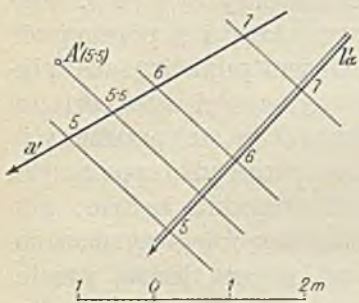
Rys. 14.

Zestopniowania prostej  $b'$  dokonamy bądź przy pomocy podziałki milimetrowej, bądź też drogą rysunkową, jak to uczyniliśmy na rys. 14. Zadanie sprowadza się do znalezienia punktu, dzielącego moduł prostej  $a'$  w stosunku 6:4 i przeniesienia tego podziału na prostą  $b'$ .

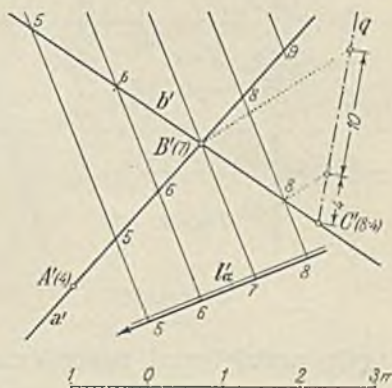
2. Wykreślić podziałkę nachylenia płaszczyzny  $\alpha$ , wyznaczonej prostą  $a$  i punktem  $A$ . Na prostej  $a$  (rys. 15) znajdziemy punkt, którego wysokość równa jest wysokości danego punktu  $A$ . Otrzymamy warstwicę 5'5 płaszczyzny  $\alpha$ , a więc i kierunek jej linii spadu  $l'_\alpha$ , a także i moduł.

3. Wykreślić podziałkę nachylenia płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez trzy dane punkty:  $A'(4)$ ,  $B'(7)$ ,  $C'(8,4)$ . Połączmy punkty

$A'$  i  $C'$  z punktem  $B'$  (rys. 16) prostymi  $a'$  i  $b'$  i zestopniujemy je. Proste, łączące te same wskaźniki obu podziałek, są warstwicami płaszczyzny  $\alpha$  i wyznaczają na prostopadłej do nich podziałkę nachylenia  $l'_\alpha$ .



Rys. 15.



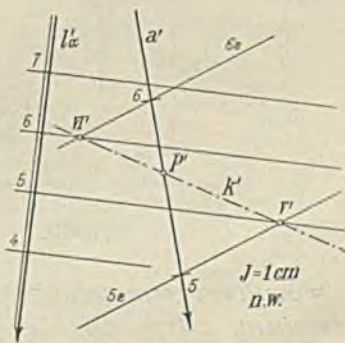
Rys. 16.

4. Wyznaczyć punkt przebicia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Przez prostą  $a$  przeprowadzimy płaszczyznę  $\epsilon$ , i znajdziemy jej krawędź  $k$  z płaszczyzną  $\alpha$ ; punkt  $P$  przecięcia się prostych  $a$  i  $k$  rozwiązuje zadanie (rys. 17).

Płaszczyzna  $\epsilon$ , wyznaczona jest dwiema warstwicami  $5_\epsilon$  i  $6_\epsilon$ , poprowadzonymi w dowolnym kierunku przez punkty 5 i 6 podziałki nachylenia prostej  $a$ . Prosta  $k'$ , łącząca punkty  $V'$  i  $VI'$ , jest rzutem krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\epsilon$ , a punkt  $P'$  rzutem punktu przebicia się, prostej  $a$ , z płaszczyzną  $\alpha$ .

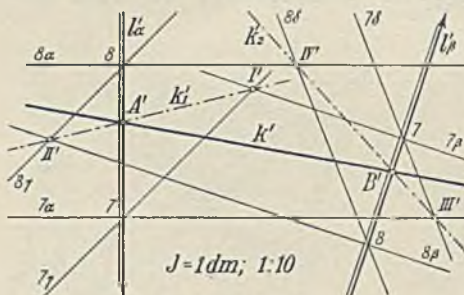
5. Wyznaczyć krawędź dwóch płaszczyzn, których warstwicę, leżące w tych samych wysokościach, nie przecinają się w obszarze rysunku.

Zadanie rozwiązać można w dowolny sposób. Znajdziemy punkt przebicia się prostej, przyjętej na jednej płaszczyźnie, z płaszczyzną drugą i połączymy go z punktem, w którym prosta, przyjęta na drugiej płaszczyźnie, przebija pierwszą. Najdogodniej będzie, gdy owymi przyjętymi prostymi będą linie spadu  $l'_\alpha$  i  $l'_\beta$  danych płaszczyzn (rys. 18).



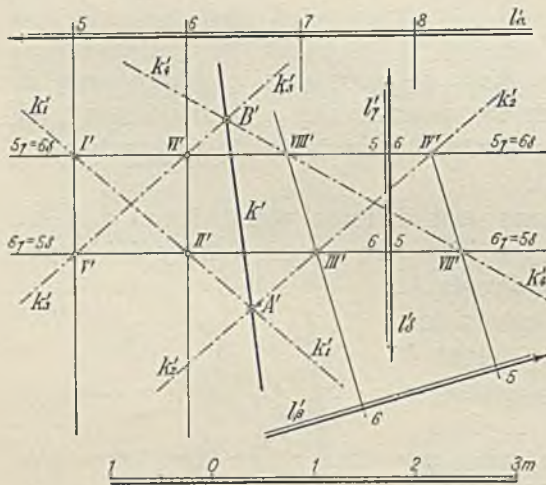
Rys. 17.

Pierwsza przebija płaszczyznę  $\beta$  w punkcie  $A$ , druga, płaszczyznę  $\alpha$ , w punkcie  $B$ . Prosta  $AB$  jest szukaną krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .



Rys. 18.

będą podziałkami nachylenia, schodzącymi się na jednej prostej  $l_\gamma' = l_\delta'$  i o tym samym module. Oczywiście, że kierunki nachylenia obu tych płaszczyzn są przeciwne (rys. 19).



Rys. 19.

Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\gamma$  dają krawędź  $k_1$ , płaszczyzny  $\beta$  i  $\gamma$  krawędź  $k_2$ ; płaszczyzny  $\alpha$  i  $\delta$  przecinają się wzdłuż prostej  $k_3$  a  $\beta$  i  $\delta$  podług krawędzi  $k_4$ . Proste  $k_1$  i  $k_2$  przecinają się w punkcie  $A$ , krawędzie  $k_3$  i  $k_4$  mają wspólny punkt  $B$ . Prosta  $k = (A, B)$  jest krawędzią płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , jej rzutem jest prosta  $k'$ , wyznaczona punktami  $A'$  i  $B'$ .

6. Przez dany punkt  $P$  poprowadzić prostą  $p$ , równoległą do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 20). Na płaszczyźnie  $\alpha$  przyjmiemy dowolną prostą  $a$ , do której poprowadzimy, przez punkt  $P$ , równoległą prostą  $p$ . Moduł prostej  $p$  jest równy modułowi prostej  $a$ .

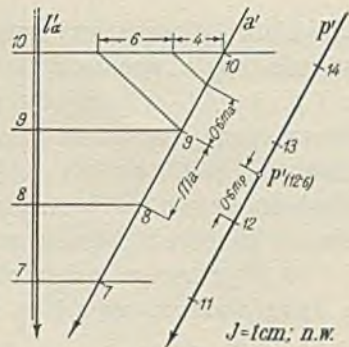
7. Poprowadzić do prostej  $p$ , w punkcie  $P$ , płaszczyznę prostopadłą. Moduł  $m_\alpha$ , szukanej płaszczyzny, będzie odwrotnością modułu prostej (ust. 7); linia spadu równoległą do rzutu prostej,



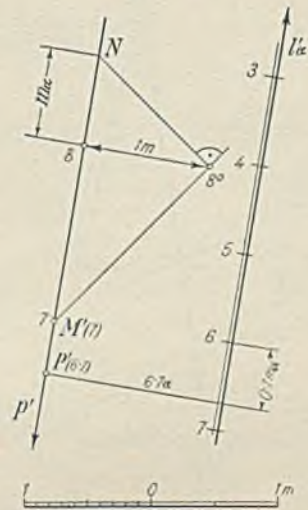
a kierunek nachylenia odwrotny. Przebieg konstrukcji odtworzy czytelnik z łatwością z rys. 21.

8. *Znaleźć odległość dwóch prostych równoległych.* Prosta  $5_a$ , łącząca wskaźniki 5, podziałek nachylenia danych prostych  $a$  i  $b$ , jest warstwicą płaszczyzny  $\alpha$ , przechodzącej przez te proste (rys. 22). Kład tej płaszczyzny, na płaszczyznę warstwową o wysokości 5 jednostek, sprowadzi proste  $a$  i  $b$  na płaszczyznę poziomą, gdzie zmierzyć można ich oddalenie  $r$ . Zadanie redukuje się do obrotu punktu  $\delta$ , prostej  $b$ , około prostej  $5_a$ , jako osi, na płaszczyznę poziomą. Odcinek  $\delta \times \delta$  równy jest jednostce, w podziałce rysunku. Resztę tłumaczy rysunek.

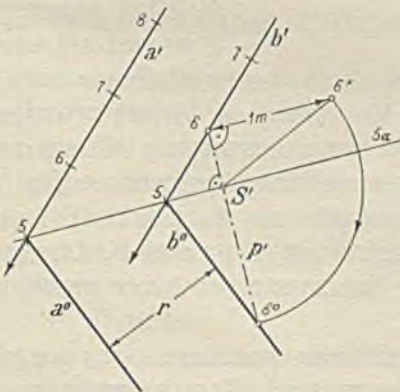
9. *Znaleźć oddalenie dwóch płaszczyzn równoległych* (rys. 23). Do danych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą i równocześnie rzucającą. Przetnie ona dane płaszczyzny podług dwóch krawędzi  $a$  i  $b$ , które sprowadzimy na jedną z płaszczyzn warstwowych, przez wykonanie



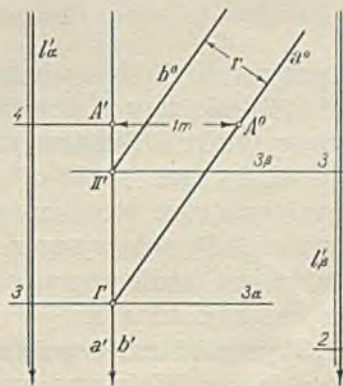
Rys. 20.



Rys. 21.



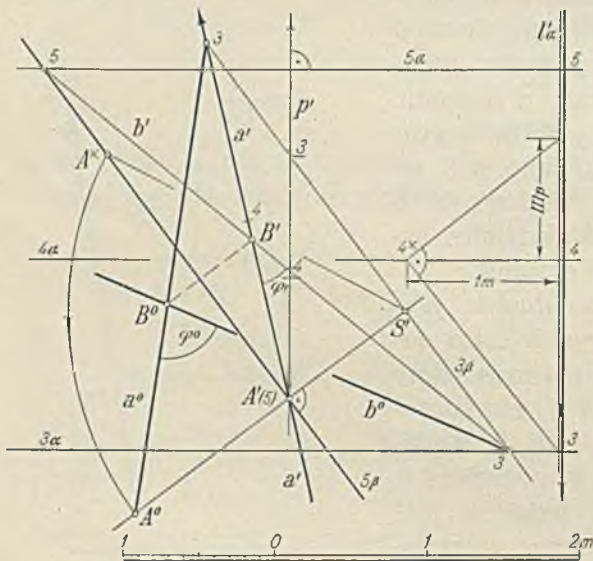
Rys. 22.



Rys. 23.

nie kładu płaszczyzny rzucającej. Rzut poziomy, krawędzi  $a$  i  $b$ , zejdzie się z prostą  $a' \equiv b'$ , prostopadłą do warstwiec płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Punkt  $A$ , przyjęty na linii warstwowej  $4\alpha$ , położyliśmy na płaszczyznę warstwową  $3$ , odmierając  $\overline{A'A^0} = 1\text{ m}$ . Prosta  $a^0$ , wyznaczona punktami  $I'$  i  $A^0$  jest kładem krawędzi  $a$ , zaś prosta  $b^0 \parallel a^0$  kładem krawędzi  $b$  na tę samą płaszczyznę. Oddalenie  $r$  tych dwóch prostych wyraża oddalenie płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

10. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta, jaki prosta  $a$  zawiera z daną płaszczyzną  $\alpha$  (rys. 24). Z przyjętego na prostej  $a$  punktu  $A$ ,



Rys. 24.

poprowadzimy prostą  $p$ , prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ . Przez proste  $a$  i  $p$  poprowadzimy płaszczyznę  $\beta$ ; znajdziemy jej krawędź  $b$  z płaszczyzną  $\alpha$  i wykonamy jej kład na płaszczyznę warstwową np.  $3$ . Prosta  $3\beta$ , łącząca wskaźniki  $3$  podziałek nachylenia prostych  $a'$  i  $p'$  jest warstwicą płaszczyzny  $\beta$ , podobnie jak prosta  $5\beta$ . Proste  $a$  i  $b$  przecinają się w punkcie  $B$ . Kład płaszczyzny  $\beta$  wyrazi się kładem

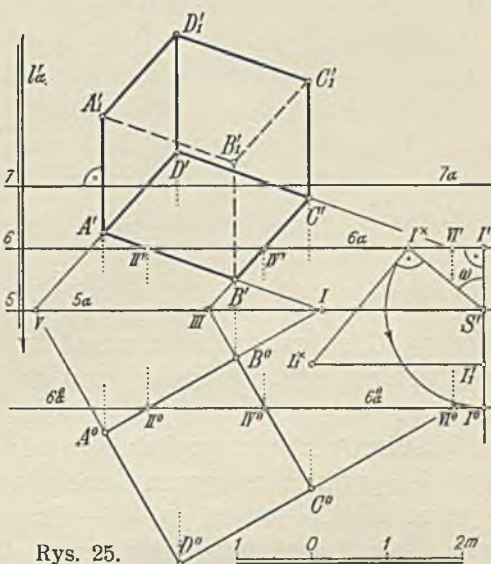
prostych  $a$  i  $b$ . Obróćmy punkt  $A$  około  $3\beta$ ; środkiem obrotu jest punkt  $S$ . Odmierzmy  $\overline{A'A^x} = 2\text{ m}$ , to odcinek  $A^xS'$  jest promieniem obrotu, a punkt  $A^0$  kładem punktu  $A$  na płaszczyznę warstwową  $3$ . Prosta  $a^0$ , łącząca punkt  $A^0$  z wskaźnikiem  $3$  prostej  $a$ , jest kładem tej ostatniej. Rzucimy prostopadłe na  $3\beta$  punkt  $B'$  i otrzymany punkt  $B^0$  połączmy z wskaźnikiem  $3$  prostej  $b'$ . Otrzymana prosta  $b^0$  jest kładem prostej  $b$ . Kąt zawarty między prostymi  $a^0$  i  $b^0$  rozwiązuje zadanie.

11. Wykreślić rzut sześcianu, którego podstawa leży na danej płaszczyźnie  $\alpha$ . Najpierw wykonamy kład płaszczyzny  $\alpha$  na płaszczyznę warstwową  $5$ . W tym celu obrócimy punkt  $I$ , warstwiczy  $6\alpha$

(rys. 25), około warstwy  $5_a$ , aż padnie na płaszczyznę warstwową 5.  $\overline{I'I^x} = 1 m$ , punkt  $S$  jest środkiem obrotu, punkt  $I^0$  kładem punktu  $I$ , zaś prosta  $6_a^0$  kładem warstwy  $6_a$ .

Przyjęliśmy kwadrat  $A^0 B^0 C^0 D^0$  w kładzie i podnieśli go na płaszczyznę  $\alpha$ , uwzględniając, że między rzutem a kładem tego kwadratu zachodzi powinowactwo prostokątne, którego osią jest warstwicą  $5_a$  a punkty  $II^0 II'$  parą punktów odpowiednich.

Rzuty krawędzi bocznych sześcianu będą prostymi prostopadłymi do warstwic płaszczyzny  $\alpha$ . Wykreśliśmy odcinek  $\overline{I'I^x}$ , prostopadły do  $S'I^x$  i równy długości krawędzi sześcianu i rzucmy punkt  $I^x$ , prostopadłe, na prostą  $I'I^0$ . Odcinek  $I'I^x$  wyraża długość rzutu krawędzi bocznej sześcianu. Odmierzmy odcinek  $\overline{A'A_1'}$  równy odcinkowi  $\overline{I'I^x}$  i wykreśliśmy równoległobok, którego boki są równoległe do odpowiednich boków romboidu  $A'B'C'D'$ .



Rys. 25.

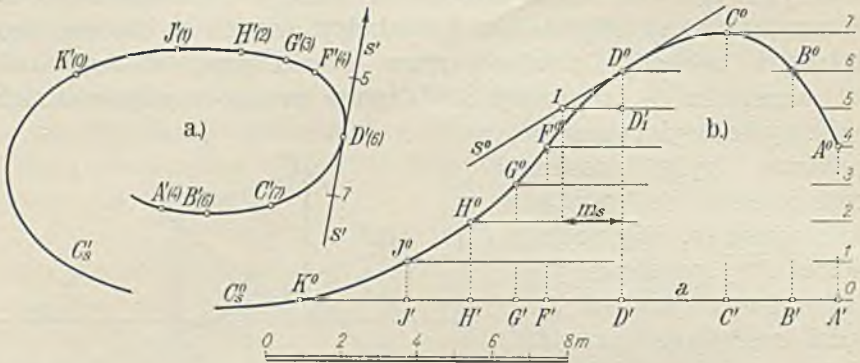
## Rozdział drugi.

### Krzywe skośne. Powierzchnie prostolinjowe.

**12. Rzut linii skośnej. Linje stokowe.** Linja krzywa skośna jest wyznaczona dostateczną ilością cechowanych rzutów swych punktów. Promienie, rzucające punkta danej krzywej skośnej na płaszczyznę poziomą, tworzą walec rzucający. Rozwinięcie tego walca na płaszczyznę, sprowadzi na nią przekształconą krzywą danej krzywej skośnej. Przekształcona charakteryzuje, w pewnym stopniu, przebieg krzywej skośnej i równa jest jej co do długości.

Rys. 26a podaje rzut cechowany  $C_s'$  krzywej skośnej  $C_s$ ; rys. 26b jej przekształconą  $C_s^0$ . Otrzymaliśmy ją w sposób następujący: Długość linii  $C_s'$  przenieśliśmy, dzieląc ją na dostatecznie krótkie

odcinki, na przyjętą prostą  $a$ ; na prostokątnych, poprowadzonych w punktach  $A', B', \dots J'$ , do prostej  $a$ , odmierzyliśmy wysokości odpowiednich punktów i otrzymane punkty  $A^0, B^0, \dots K^0$  połączyliśmy



Rys. 26 a—b.

krzywą  $C_s^0$ . Jest rzeczą zrozumiałą, że wysokości punktów krzywej skośnej zredukować można do dowolnie obranej płaszczyzny warstwowej.

Nachyleniem, względnie modulem, krzywej skośnej w pewnym jej punkcie nazywamy nachylenie, względnie moduł, prostej stycznej do niej w tym punkcie. Ponieważ rzut elementu linii krzywej skośnej jest elementem rzutu tejże linii, więc rzut  $s'$ , stycznej  $s$ , w punkcie  $D$ , do krzywej przestrzennej  $C_s$ , jest styczny do krzywej  $C_s'$  w punkcie  $D'$  (rys. 26 a). Po rozwinięciu walca rzucającego krzywą  $C_s$ , prosta styczna  $s$  w punkcie  $D$ , do krzywej  $C_s$ , przejdzie w styczną  $s_0$ , do przekształconej  $C_s^0$ , w punkcie  $D^0$ .

Aby położenie stycznej  $s$ , w punkcie  $D$  krzywej skośnej  $C_s$ , było wyznaczone, musi być określone nachylenie tej stycznej, a więc znany jej moduł. Moduł ten jest równy modułowi  $m_s$  stycznej  $s_0$ , wykreślonej w punkcie  $D^0$  do krzywej  $C_s^0$ .

Linję krzywą skośną, której wszystkie elementy, a więc styczne wszystkich jej punktów, nachylone są do przyjętej — z reguły poziomej — płaszczyzny pod tym samym kątem, nazywamy linią o stałym spadku, linią stokową lub ogólną linią śrubową. Linja ta posiada, wzdłuż całej swej długości, jednakowy moduł, może więc być stopniowaną, podobnie jak linja prosta. W miejsce odcinków linii prostej wchodzi tu, jako moduły, odcinki krzywoliniowe.

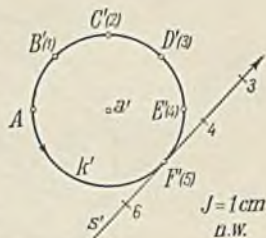
Z określenia linii stokowej wynika wprost, że jej przekształcona jest linią prostą.

Krzywa stokowa wyznaczona jest, podobnie jak prosta, swoim rzutem i cechami dwóch swoich punktów.

Aby na danej, swoim cechowanym rzucie, krzywej skośnej znaleźć punkt o żądanej wysokości, lub określić wysokość punktu, którego rzut jest dany, używamy pośrednictwa krzywej przekształconej. W pierwszym zadaniu poprowadzimy, w danej wysokości, prostą poziomą, która przetnie krzywą przekształconą w jednym, lub w więcej punktach. Punkty te przeniesione na rzut cechowany krzywej rozwiązują zadanie. Gdy chodzi o określenie wysokości punktu krzywej skośnej, którego rzut znany, to znajdziemy przede wszystkim, odpowiadający temu punktowi, punkt krzywej przekształconej. Rzędna tego punktu jest odpowiedzią na pytanie.

W odniesieniu do krzywych stokowych oba powyższe zadania rozwiążemy bezpośrednio, bez pośrednictwa przekształconej, gdyż moduły ich są stałe.

Przykładem linii stokowej jest z wyczajna linia śrubowa. Jej rzut poziomy jest kołem  $k'$  (rys. 27), zestopniowanym łukiem koła o danej długości. Rzut stycznej do linii śrubowej, w pewnym jej punkcie, jest styczną  $s'$  do koła  $k'$  w rzucie tego punktu. Modułem stycznej  $s$ , wspólnym wszystkim stycznym linii śrubowej, jest moduł linii śrubowej t. j. długość łuku koła  $k'$ , zawartego między dwoma punktami, których cechy różnią się o jednostkę. Odwrotność modułu stycznej do linii śrubowej wyraża nachylenie tej linii, jednakowe we wszystkich jej punktach.

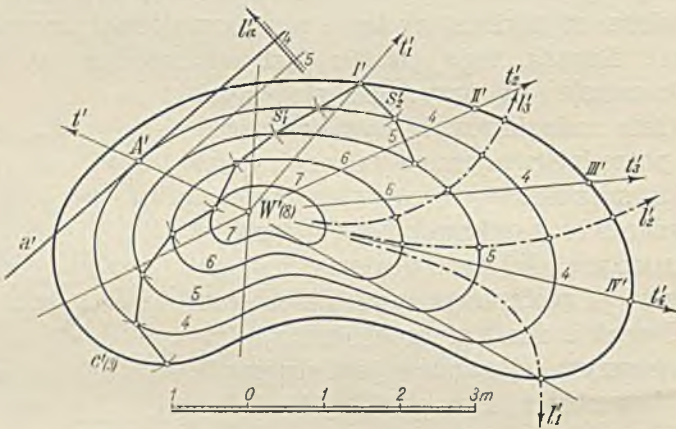


Rys. 27.

**13. Powierzchnie stożkowe i walcowe.** Wiadomo, że linia krzywa płaska lub skośna i dowolny, nie leżący na niej, punkt wyznaczają powierzchnię stożkową. Owa krzywa nosi nazwę kierownicy, a punkt miano wierzchołka stożka. Jeśli wierzchołek jest punktem niewłaściwym, to otrzymana powierzchnia zwie się powierzchnią walcową.

Między przekrojami powierzchni stożkowej, płaszczyznami równoległymi, zachodzi związek podobieństwa środkowego. Płaszczyzny warstwowe przecinają tedy powierzchnię stożkową podług linii krzywych podobnych i podobnie położonych, ze względu na wierzchołek stożka. Stanowią one linje warstwowe powierzchni

stożkowej. Rzut prostokątny linii warstwowej, na płaszczyznę porównawczą, zwie się warstwicą. Wszystkie warstwy są liniami podobnymi i podobnie położonymi, ze względu na rzut wierzchołka stożka, jako środka podobieństwa. Tworzą one t. zw. plan warstwowy powierzchni stożkowej, który jest jej charakterystyką i pozwala na wyobrażeniowe i plastyczne jej odtworzenie. Plan warstwowy jest wykonany zawsze dla przyjętej grubości warstw; odnośne warstwy zwa się głównymi. Względny konstrukcyjne dyktują niekiedy potrzebę włączenia, między warstwy główne, jednej lub więcej, warstw pośrednich. Mówimy wtedy o interpolacji planu warstwowego.



Rys. 28.

Krzywa płaska  $c'$ , przyjęta, jako kierownica, na dowolnej płaszczyźnie warstwowej np. 3 i dowolny cechowany punkt np.  $W'(8)$  (rys. 28), wyznaczają powierzchnię stożkową. Proste:  $t', t_1', t_2', \dots$ , łączące punkt  $W'$  z punktami krzywej  $c'$ , są rzutami tworzących powierzchni. Linje krzywe, powstałe z połączenia punktów o jednakowych cechach tych prostych, są warstwicami stożka i tworzą jego plan warstwowy.

W każdym punkcie powierzchni stożkowej poprowadzić można nieograniczenie wiele prostych stycznych. Każda z nich będzie styczną do jednej linii krzywej płaskiej, przechodzącej przez dany punkt, a leżącej na stożku. Miejszem geometrycznym wszystkich tych prostych stycznych jest płaszczyzna styczna, w danym punkcie, do powierzchni stożkowej. Nachyleniem tej płaszczyzny a więc

nachyleniem jej linii spad, określamy nachylenie powierzchni stożkowej w danym punkcie. Linja spad, płaszczyzny stycznej, posiada największe nachylenie ze wszystkich stycznych, poprowadzonych do powierzchni stożkowej w określonym jej punkcie.

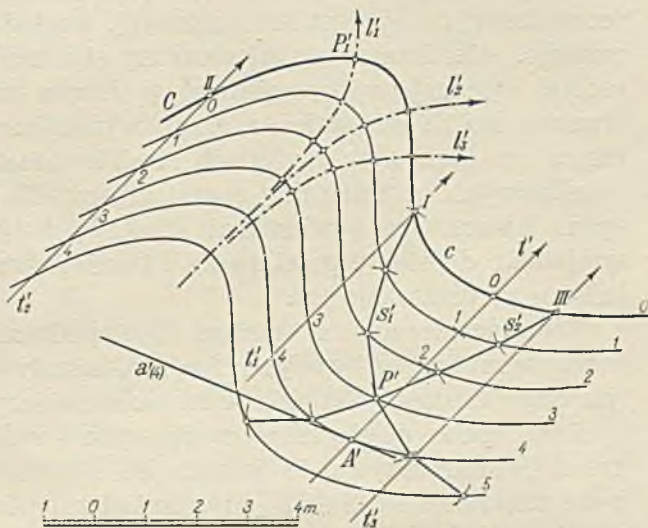
Tworząca  $t$ , przechodząca przez punkt  $A$  powierzchni stożkowej (rys. 28) i styczna  $a$ , w tym punkcie, do warstwic  $4$ , wyznaczają płaszczyznę styczną  $\alpha$ . Płaszczyzna ta styka się ze stożkiem wzdłuż tworzącej  $t$ , a jej linja spadu  $l_a$  będzie prostopadłą do prostej  $a$ .

Z łatwością zauważymy, że im bardziej zbliżają się ku sobie warstwicę stożka, tem większe jest jego w danym miejscu nachylenie.

Krzywa płaska  $c$ , przyjęta na płaszczyźnie porównawczej i przecinająca ją, zestopniowana, prosta  $t$ , wyznaczają powierzchnię walcową (rys. 29). Równoległe do prostej  $t'$  i, przecinające krzywą  $c$ , proste  $t'_1, t'_2 \dots$ , zestopniowane tym samym co prosta  $t'$  modułem, są rzutem tworzących powierzchni walcowej. Linje krzywe, powstałe z połączenia punktów o jednakowych cechach tych prostych, są warstwicami walca i tworzą jego plan warstwowy. Warstwicę walca są krzywymi przystającymi.

Prosta  $t$ , tworząca walca, i styczna  $a$ , w punkcie  $A$ , do warstwic  $4$ , wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni walcowej, w tym punkcie i styczną zarazem we wszystkich punktach tworzącej  $t$ .

**14. Linje spad i linje stokowe na powierzchniach stożkowych i walcowych.** a) Wychodząc z dowolnego punktu, powierzchni stożkowej lub walcowej, w kierunku najbardziej stro-



Rys. 29.

mej stycznej, do punktu sąsiedniego, z tego punktu znowu w kierunku najbardziej nachylonej stycznej do punktu następnego i powtarzając ten przebieg dowolną ilość razy, otrzymamy linię, leżącą na powierzchni, której nachylenie, w każdym punkcie, jest większe, aniżeli nachylenie każdej innej linii, przechodzącej przez ten punkt. Linię tę nazywamy linią spadu powierzchni.

Kierunek nachylenia tej linii, w każdym jej punkcie, schodzi się z kierunkiem nachylenia linii spadu płaszczyzny stycznej, poprowadzonej do powierzchni stożkowej, względnie walcowej, w tym punkcie. Ale linia spadu płaszczyzny stycznej jest prostopadłą do prostej stycznej, wyprowadzonej w danym punkcie do linii warstwowej stożka lub walca, z czego wynika, że każda linia spadu, leżąca na tych powierzchniach, będzie prostopadłą do ich linii warstwowych, a rzuty linii spadu prostopadłe do warstwic. Linie spadu i warstwice powierzchni stożkowych i walcowych są więc wzajemnie do siebie prostopadłe i tworzą dwa układy t. zw. trajektorij prostokątnych.

Teoretycznie uważać można linie spadu za tory płynących po powierzchni cząstek wody, które nie nabrały energii ruchu; bezwładność musiałaby bowiem spowodować odchylenia od linii spadu.

Linie spadu powierzchni stożkowych i walcowych są, w ogólności, linjami krzywymi; jedynie linie spadu stożka obrotowego, o osi poziomej, są linjami prostymi. Rzuty ich tworzą pęk promieni, którego wierzchołkiem jest rzut wierzchołka stożka; warstwice tego stożka tworzą pęk współśrodkowych kół.

Przez każdy punkt powierzchni stożkowej i walcowej przechodzi jedna linia spadu, a wszystkie przechodzą przez wierzchołek, czy to jako punkt właściwy, czy też niewłaściwy.

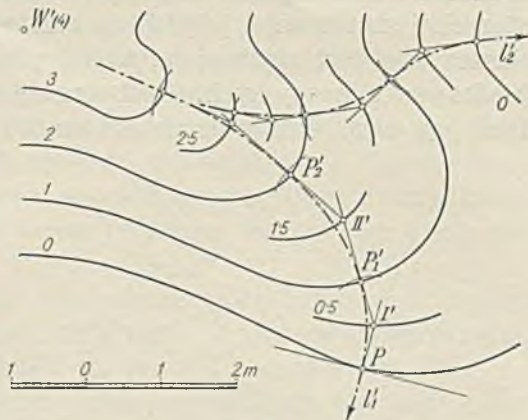
Aby otrzymać linię spadu postąpimy w następujący sposób: Wyjdźmy z punktu  $P$  warstwy  $0$  (rys. 30) i poprowadźmy w nim styczną i normalną. Następnie wstawmy warstwicę  $0'5$  i, z punktu  $I'$  przecięcia się jej z normalną, zakreślmy łuk koła, któryby przeciął warstwicę  $1$  w punktach, leżących dostatecznie blisko siebie. Środek  $P_1'$ , ograniczonego w ten sposób łuku warstwy  $1$ , uważać można z wystarczającym przybliżeniem za punkt rzutu  $l_1'$  linii spadu, wychodzącej z punktu  $P$ .

Prosta  $I'P_1'$  jest normalną do warstwy  $1$ , w punkcie  $P_1'$ . Przecina ona wstawioną warstwicę  $1'5$  w punkcie  $II'$  z którego znowu zakreślmy łuk, przecinający warstwicę  $2$  w dwóch punktach. Dojdziemy do punktu  $P_2'$ . Prosta  $II'P_2'$  jest normalną do warstwy  $2$



w punkcie  $P_2'$ . Powtarzając konstrukcję tę potrzebną ilość razy i łącząc punkty  $P, P_1', P_2', P_3', \dots$  linią ciągłą, otrzymamy krzywą  $l_1'$ , którą będzie styczną w tych punktach do normalnych.

b) Z każdego punktu powierzchni stożkowej lub walcowej poprowadzić na niej można dwie linie stokowe o tym samym module, których nachylenie jest mniejsze, aniżeli nachylenie linii spadu, przechodzącej przez ten punkt powierzchni. Tworzące stożka lub walca są również liniami stokowymi tych powierzchni, a są



Rys. 30.

między nimi i takie, które są równocześnie ich liniami spadu.

Część linii stokowej, leżącej między dwiema warstwicami, uważamy za odcinek linii prostej, a jeżeli różnica wysokości linii warstwowych wynosi jednostkę — odcinek ten jest modulem linii stokowej. Gdy nachylenie linii stokowej jest dane, to znany jest także i jej moduł. Wyszedszy więc np. z punktu  $I'$  (rys. 28 i 29) zakreślać będziemy łuki kół o stałym promieniu, równym temu modułowi i łączyć punkty przecięcia się tych łuków z warstwicami, linią łamaną  $s_1'$ . W ten sposób, z punktu  $I'$  (rys. 28), wykreśliłiśmy linie  $s_1'$  i  $s_2'$ , jako rzuty dwóch linii stokowych, wychodzących z punktu  $I$ , powierzchni stożkowej. W punkcie  $P'$  (rys. 29) przecinają się rzuty,  $s_1'$  i  $s_2'$ , dwóch linii stokowych, przyjętych na powierzchni walcowej.

Nachylenie  $n_s$ , linii stokowej, musi być mniejsze, aniżeli nachylenie linii spadu w punktach, przez które ta linia stokowa przechodzi.

Jeżeli przyjęta grubość warstw wynosi  $g$  jednostek, to odcinek  $p'$  linii stokowej, zawartej między dwiema warstwicami, będzie

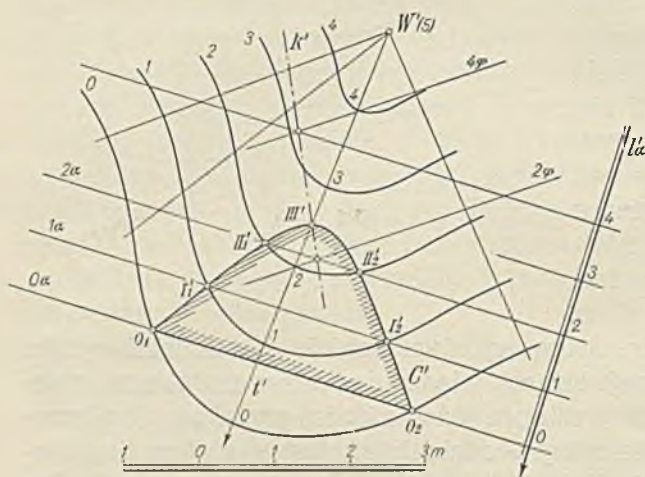
$$p' = \frac{g}{n_s} = g \cdot m_s,$$

gdzie  $m_s$  jest modulem linii stokowej.

**15. Płaskie przekroje powierzchni stożkowych i walcowych.** Między dwoma płaskimi przekrojami powierzchni stożkowej

zachodzi związek kolineacji środkowej. Środkiem kolineacji jest wierzchołek stożka, osią krawędź płaszczyzn siecznych, a promieniami kolineacji, tworzące powierzchni. Rzut prostokątny powierzchni stożkowej i jej dwóch przekrojów płaskich, na dowolną płaszczyznę, jest złączeniem, na tej płaszczyźnie, dwóch układów środkowo-kolineacyjnych. Rzut krawędzi, dwóch płaszczyzn siecznych, jest osią, rzut wierzchołka stożka środkiem, a rzuty tworzących, promieniami tej kolineacji.

Między dwoma przekrojami płaskimi powierzchni walcowej zachodzi, ten sam, co przy przekrojach powierzchni stożkowej, związek kolineacji, której środek jest punktem niewłaściwym i która znana jest pod nazwą powinowactwa środkowego.



Rys. 31.

Poszczególne punkty linii przekroju, danej powierzchni stożkowej lub powierzchni walcowej, znajdziemy jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się warstwic danej powierzchni z odpowiednimi warstwicami płaszczyzny siecznej, albo jako miejsce geometryczne punktów przebicia się, tworzących powierzchni, z płaszczyzną tnącą.

Rys. 31 podaje konstrukcję przekroju powierzchni stożkowej płaszczyzną  $\alpha$ .

Ślad poziomy  $O_\alpha$ , płaszczyzny siecznej  $\alpha$ , przecina ślad poziomy stożka w punktach  $O_1$  i  $O_2$ ; warstwica 1 stożka przecina się z warstwicą 1 płaszczyzny  $\alpha$  w punktach  $I_1'$  i  $I_2'$ . Podobnie znaleźliśmy punkty  $II_1'$  i  $II_2'$ . Punkt  $III'$ , krzywej przekroju  $C'$ , znaleźliśmy jako punkt przebicia się tworzącej  $t$  stożka z płaszczyzną  $\alpha$ . W tym celu użyliśmy pośrednictwa płaszczyzny  $\varphi$ , poprowadzonej przez prostą  $t$  i przecinającą płaszczyznę  $\alpha$  podług krawędzi  $k$ .

## 16. Powierzchnie stożkowe i walcowe rzędu drugiego.

a) Rozważania przeprowadzone w poprzednim ustępie są natury ogólnej i odnoszą się do wszystkich powierzchni stożkowych i walcowych, a więc zarówno graficznych jak i matematycznych. Jeżeli kierownica stożka nie jest krzywą matematyczną, t. zn. nie jest krzywą, której prawo powstania da się określić na drodze matematycznej, jest krzywą narysowaną, graficzną, to powstała powierzchnia stożkowa jest również matematycznie nieokreślona i należy do kategorii utworów przestrzennych, które noszą ogólne miano utworów graficznych. To samo odnosi się i do powierzchni walcowych.

Szczegółowa systematyka obejmować może i dotyczyć dopiero utworów zdefiniowanych matematycznie. Odnosi się to zarówno do linii krzywych płaskich i skośnych, jakoteż i do powierzchni.

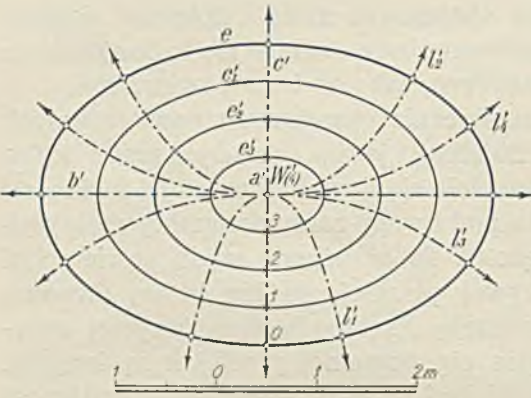
Pozostaniemy przy matematycznie określonych powierzchniach stożkowych i walcowych. Dzielimy je na rzędy, przez które rozumiemy ilość punktów przebicia się dowolnej prostej z badanymi powierzchniami. Bierzymy tu pod uwagę zarówno punkty rzeczywiste, jak też i urojone, sprzężone. To określenie rzędu powierzchni pokrywa się z rzędem krzywej płaskiej, podług której dowolna płaszczyzna przecina powierzchnię. Rzędem bowiem krzywej nazywamy ilość punktów przecięcia się dowolnej prostej z tą krzywą.

b) W dalszym ciągu mówić będziemy o powierzchni stożkowej rzędu drugiego. Jest to powierzchnia utworzona przez dwa homograficzne pęki płaszczyzn o osiach przecinających się w punkcie właściwym. Dowolna płaszczyzna przecina ją podług krzywej stożkowej t. zn. podług elipsy, koła, hiperboli lub paraboli. Gdy płaszczyzna sieczna przechodzi przez wierzchołek stożka, przekrój składa się z dwóch przecinających się prostych. Krzywa stożkowa i punkt, nie należący do niej, wyznaczają powierzchnię stożkową rzędu drugiego. Tę krzywą stożkową, która jest kierownicą powierzchni stożkowej, zastąpić można każdym dowolnym przekrojem płaskim tej powierzchni. W ten sposób stożek rzędu drugiego jest równocześnie stożkiem eliptycznym, hiperbolicznym, parabolicznym i kołowym, jeśli przymiotniki te zechcemy związać z przekrojami płaskimi, ograniczającymi tę powierzchnię, rozciągającą się do nieskończoności.

Powierzchnia stożkowa rzędu drugiego posiada trzy wzajemnie do siebie prostopadłe osie, z których jedna leży „wewnątrz“ tej powierzchni, a dwie inne poza nią. Stożek rzędu drugiego jest

więc powierzchnią trójosiową, nazywać go będziemy krótko stożkiem trójosiowym. Płaszczyzny wyznaczone osiami stożka są jego płaszczyznami symetrii. Dwie z nich przecinają stożek podług dwóch tworzących każda, trzecia przecina go w punkcie, wierzchołku. Płaszczyzny, prostopadłe do osi „wewnętrznej“ stożka, przecinają go podług podobnych i podobnie położonych elips, płaszczyzny prostopadłe do dwóch pozostałych przetną stożek podług podobnych i podobnie położonych hiperbol.

Jeżeli oś „wewnętrzna“ stożka jest prostopadła do poziomej płaszczyzny rzutów, to takie położenie stożka określamy jako normalne. Rys. 32 jest rzutem cechowanym trójosiowego stożka w położeniu normalnym. Oś  $a$  jest pionowa, poziome osie  $b$  i  $c$  przechodzą przez wierzchołek  $W(4)$ . Warstwice tego stożka są elipsami współśrodkowymi, podobnymi i podobnie położonymi. Środkiem podobieństwa jest rzut  $W'$  wierzchołka stożka. Linie  $l'_1, l'_2, \dots$  są rzutami



Rys. 32.

linij spadów stożka, podobnie jak proste  $c'$  i  $b'$ .

c) Jeżeli punkt przecięcia się osi dwóch homograficznych pęków płaszczyzn jest punktem niewłaściwym, to powierzchnia stożkowa przechodzi w walcową. Proste przecięcia się homologicznych płaszczyzn w tych pękach są równoległymi, względem siebie, tworzącymi walca. W przeciwieństwie do powierzchni stożkowej rzędu drugiego, która występuje jako jedyna — mamy walec eliptyczny, hiperboliczny i paraboliczny. Ponieważ między dwoma przekrojami walca zachodzi powinowactwo środkowe, więc walec eliptyczny przeciąć można tylko podług elips lub kół, walec paraboliczny tylko podług parabol, a walec hiperboliczny tylko podług hiperbol. W układach środkowo-powinowatych odpowiadają sobie bowiem wzajemnie punkty właściwe, względnie punkty niewłaściwe. Oczywiście, że płaszczyzny równoległe do tworzących przecinają walec podług dwóch tworzących.

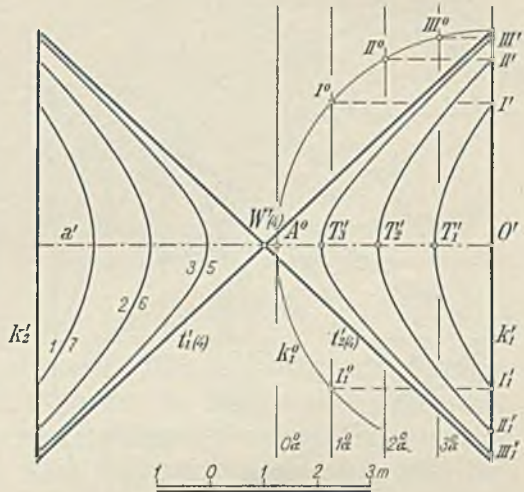
Jeżeli krzywe płaskich przekrojów walca przyjmiemy jako określające tę powierzchnię, to walec eliptyczny jest równocześnie i walcem kołowym.

Położenie walca eliptycznego, przy którym tworzące są prostopadłe do poziomej płaszczyzny rzutów, określamy jako normalne.

d) Jako szczególna forma powierzchni stożkowej rzędu drugiego występuje stożek obrotowy. Posiada on nieograniczoną ilość płaszczyzn symetrii. Płaszczyzny prostopadłe do jego osi „wewnętrznej“, którą nazywać będziemy krótko osią stożka obrotowego, przecinają go podług kół.

Plan warstwowy stożka obrotowego, w położeniu normalnym, jest pękiem współśrodkowych kół, tworzące stożka są jego liniami spadu.

Jeżeli oś stożka obrotowego ma położenie poziome, to jego warstwice są hiperbolami podobnymi i podobnie położonymi, ze względu na rzut wierzchołka stożka. Ograniczmy stożek obrotowy, o osi poziomej, dwoma przekrojami kołowymi  $k_1'$  i  $k_2'$ , położonymi symetrycznie względem wierzchołka



Rys. 33.

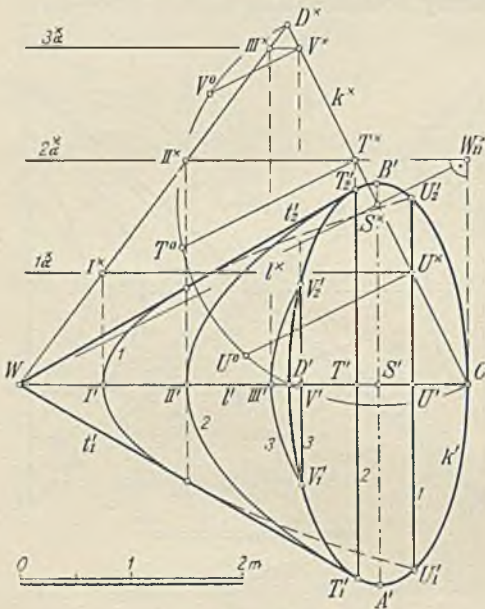
i stycznymi do płaszczyzny porównawczej (rys. 33). Aby wyznaczyć plan warstwowy tego stożka, obróćmy koło  $k_1$ , którego promień równy jest  $4 m$ , około jego poziomej średnicy, aż padnie na płaszczyznę warstwową 4. Obrót ten sprowadzi na tę płaszczyznę warstwową także i linje warstwowe pionowej płaszczyzny  $a$  koła  $k_1$ . Otrzymamy koło  $k_1^0$  i proste równoległe:  $0a^0$ ,  $1a^0$ ,  $2a^0$  i  $3a^0$ , oddalone od siebie o grubość warstwy, którą przyjęliśmy równą  $1 m$ . Proste te przetną koło  $k_1^0$  w punktach  $I^0 I_1^0$ ,  $II^0 II_1^0$ , ... które rzucimy prostopadłe na prostą  $k_1'$ . Punkty  $I'$ ,  $I_1'$ ;  $II'$ , ... są punktami hiperbol. Dwie tworzące  $t_1'$  i  $t_2'$ , podług których płaszczyzna warstwową 4 przecina stożek, są asymptotami wszystkich hiperbol warstwowych. Ze względu na zachodzący związek podobieństwa środkowego, wierzchołki  $T_1'$ ,  $T_2'$  ... tych hiperbol, dzielą odcinek  $W' O'$  na cztery równe części.

Jeżeli stożek obrotowy jest styczny do płaszczyzny poziomej, t. j. jeśli jedna jego tworząca ma położenie poziome, to warstwyce są parabolami.

Rzut cechowany takiego stożka, ograniczonego kołem  $k$ , i jego plan warstwowy przedstawia rys. 34. Do przeprowadzenia konstrukcji użyliśmy płaszczyzny pionowej  $\alpha$ , przechodzącej przez oś stożka. Trójkąt  $W D^x C$  jest kładem, na płaszczyznę porównawczą, przekroju stożka płaszczyzną  $\alpha$ , a proste  $1_a^x$ ,  $2_a^x$  i  $3_a^x$

kładem linii warstwowych. Punkty  $I'$ ,  $II'$  i  $III'$  są wierzchołkami parabol, stanowiących warstwyce 1, 2 i 3 stożka. Punkty  $U_1' U_2'$ ,  $T_1' T_2'$  i  $V_1' V_2'$  tych parabol, leżące na elipsie  $k'$ , znaleźliśmy w dwójaki sposób: najpierw bezpośrednio, przez odniesienie punktów  $U^x$ ,  $T^x$  i  $V^x$  na elipsę  $k'$ , a następnie zapomocą kładu koła  $k$ , podstawy stożka, na płaszczyznę  $\alpha$ . Wtedy  $\overline{V' V_1'} = \overline{V' V_2'} = \overline{V^0 V^x}$  i t. d. Tworzące konturowe stożka znaleźliśmy przy pomocy stożka normalnego.\*

d) Szczególną formą walca eliptycznego jest walec obrotowy, którego prze-



Rys. 34.

kroje płaszczyznami prostopadłymi do tworzących, a więc i do osi, są kołami. Walec eliptyczny posiada dwie płaszczyzny symetrii, walec obrotowy posiada ich nieograniczenie wiele.

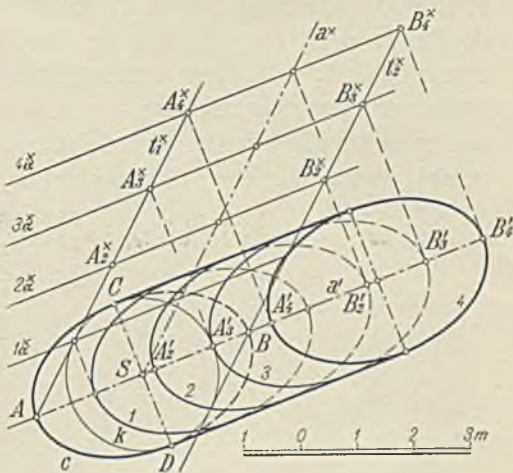
Jeżeli oś walca obrotowego jest pionowa, to takie położenie będziemy nazywali normalnym. W innym położeniu walca warstwyce jego są elipsami; gdy oś jest pozioma, warstwyce są prostymi.

Plan warstwowy walca obrotowego, którego oś ma dowolne nachylenie, podaje rys. 35. Przyjęta na płaszczyźnie rzutów elipsa  $c$  o osiach  $AB$  i  $CD$  i środku  $S$  niech będzie podstawą tego walca.

\* Patrz autora „Geometria wykreślna“ wyd. II, 1922.

Styczne w punktach  $C$  i  $D$  do elipsy  $c$  są prostymi konturu pozornego walca.

Koło  $k$ , zakreślone na małej osi  $\overline{CD}$ , elipsy  $c$ , uważamy za rzut poziomy kuli, wpisanej w walec. Poprowadźmy przez oś  $a$  walca, płaszczyznę rzucającą  $\alpha$  i wykonajmy jej kład na płaszczyznę porównawczą. Płaszczyzna  $\alpha$  przetnie kulę podług koła wielkiego, walec podług dwóch tworzących  $t_1$  i  $t_2$ , a płaszczyzny warstwowe podług prostych, równoległych do prostej  $a'$ . Po wykonaniu kładu, koło wielkie kuli zejdzie się z kołem  $k$ , proste  $t_1^*$  i  $t_2^*$  będą stycznymi do tego koła, poprowadzonymi z wierzchołków  $A$  i  $B$  elipsy  $c$ , a linie warstwowe będą pękiem równoległych



Rys. 35.

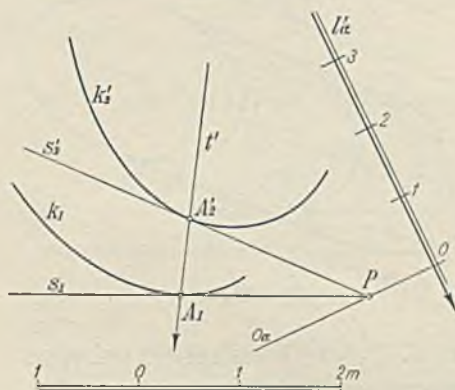
$1a^*, 2a^*, \dots$  i równoległych do prostej  $a'$ . Dalsza konstrukcja osi elips 1, 2, 3 i 4, jako warstwicy walca, tłumaczy się dostatecznie z rysunku.

**17. O powierzchniach rozwijalnych.** Powierzchnia rozwijalna utworzoną być może, albo ruchem linii prostej, albo też ruchem płaszczyzny. Prawo ruchu linii prostej wypowiada się warunkiem, że poruszająca się prosta musi być stale styczną do danej krzywej skośnej, natomiast prawo ruchu płaszczyzny powłóczącej powierzchnię rozwijalną wymaga, by płaszczyzna ta była stale ściśle styczną do danej krzywej skośnej.

Ale prawo ruchu płaszczyzny, powłóczącej powierzchnię rozwijalną, uwarunkowane być może i w ten sposób, by płaszczyzna, we wszystkich swoich położeniach, była styczną równocześnie do dwóch linii krzywych, lub do dwóch powierzchni.

Przyjąwszy dwie krzywe skośne  $k_1$  i  $k_2$  przeprowadźmy, w punkcie  $P_1$  pierwszej z nich, styczną  $p_1$ . Płaszczyzna  $\pi_1$ , przesunięta przez prostą  $p_1$  i obracająca się około niej jako osi, w pewnej ilości swoich położeniach, zetknie się z krzywą  $k_2$ . Proste  $t_1, t_2, \dots$ , łączące punkt  $P_1$  z punktami styczności  $Q_1, Q_2, \dots$  płaszczyzny  $\pi_1$  z krzywą  $k_2$ , są tworzącymi powierzchni rozwijalnej, opisanej na krzywych  $k_1$  i  $k_2$ , zwanych jej kierownicami.

Przyjmijmy, że kierownice  $k_1$  i  $k_2$  są krzywymi płaskimi, przy-  
czem pierwsza leży na płaszczyźnie porównawczej, a druga na  
płaszczyźnie  $\alpha$  (rys. 36). Aby otrzymać tworzącą  $t$ , powierzchni  
rozwijalnej  $\Phi$ , wyznaczonej temi kierownicami, obierzmy na war-  
stwicy  $O_\alpha$  dowolny punkt  $P$ , z którego poprowadzimy styczną  $s_1$   
do krzywej  $k_1$  i styczną  $s_2$  do krzywej  $k_2$ . Prosta, łącząca punkty  
styczności  $A_1$  i  $A_2$  jest szukaną tworzącą  $t$ . Proste  $s_1$  i  $s_2$  wyzna-  
czają płaszczyznę styczną do powierzchni  $\Phi$ , wzdłuż tworzącej  $t$ .  
Ale z każdego punktu prostej  $O_\alpha$ , poprowadzić można kilka, naj-  
mniej dwie, styczne do krzywej  $k_1$ , a tak samo do krzywej  $k_2$ .



Rys. 36.

Przez punkt  $A_1$ , a także przez  
punkt  $A_2$ , przechodzi więc kilka,  
najmniej dwie, tworzące, po-  
wierzchni rozwijalnej  $\Phi$ . Tak  
więc kierownice  $k_1$  i  $k_2$  są krzy-  
wymi wielokrotnymi tej po-  
wierzchni, a będą krzywymi  
podwójnymi, gdy kierownice  $k_1$   
i  $k_2$  są przekrojami stożkowymi.  
Jeżeli jedna z dwóch kierow-  
nic, np.  $k_2$ , będzie punktem, to  
powierzchnia rozwijalna, wy-  
znaczona kierownicą  $k_1$  i tym  
punktem jest powierzchnią  
stożkową. Jeśli ów punkt będzie  
punktem niewłaściwym, otrzy-  
mamy powierzchnię walcową. Tak  
więc powierzchnie stożkowe i  
walcowe mieszczą się w rodzinie  
powierzchni rozwijalnych, wy-  
znaczonych przez dwie krzywe  
kierownice, jako powierzchnie  
szczególne.

Proste, poprowadzone przez dowolny punkt w przestrzeni, rów-  
noległe do tworzących powierzchni rozwijalnej, tworzą jej stożek  
kierowniczy. Stożek kierowniczy i jedna kierownica wyznaczają  
powierzchnię rozwijalną. Płaszczyzny styczne, w poszczególnych  
punktach kierownicy i równocześnie równoległe do tworzących  
stożka, powłóczą powierzchnię rozwijalną. Tworzące tej powierzchni  
przechodzą przez punkty kierownicy i będą równoległe do  
odpowiednich tworzących kierowniczego stożka.

Na szczególną uwagę zasługują powierzchnie rozwijalne wy-  
znaczone krzywą płaską  $k$  i stożkiem kierowniczym, którym jest  
stożek obrotowy. Przyjrzyjmy się tym powierzchniom. W dowol-



nym punkcie  $A$ , kierownicy  $k$ , poprowadźmy prostą styczną  $a$ . Równoległe do niej poprowadzić można dwie płaszczyzny styczne do stożka kierowniczego. Płaszczyzny, równoległe do tych płaszczyzn i przechodzące przez prostą  $a$ , są płaszczyznami stycznymi powierzchni rozwijalnej. Ale wszystkie płaszczyzny styczne do stożka obrotowego mają to samo nachylenie do płaszczyzny przekroju kołowego tego stożka, tę samą własność zachowują też płaszczyzny, powłóczące powierzchnię rozwijalną  $\Phi$ , wyznaczoną kierownicą  $k$  i stożkiem obrotowym. Następujące po sobie bezpośrednio płaszczyzny styczne, powłóczące powierzchnię  $\Phi$ , przecinają się podług prostych, tworzących tę powierzchnię. Tworzące te będą równoległe do odpowiednich tworzących stożka kierowniczego, czyli będą miały to samo co one nachylenie.

Jeżeli obrotowy stożek kierowniczy ma położenie normalne, t. zn. jeżeli jego oś jest pionowa, to powierzchnia rozwijalna, wyznaczona tym stożkiem i płaską kierownicą  $k$ , nosi nazwę powierzchni stokowej. W położeniu normalnym tworzące stożka obrotowego są linjami spadów jego płaszczyzn stycznych, a ponieważ płaszczyzny powłóczące powierzchnię stokową będą równoległe do odpowiednich płaszczyzn stycznych stożka kierowniczego, więc tworzące powierzchni stokowej są linjami spadów płaszczyzn stycznych tej powierzchni, a więc i jej samej.

Rzut poziomy krzywych przekroju powierzchni stokowej  $\Phi$ , płaszczyznami warstwowymi, jest planem warstwowym tej powierzchni. Styczna  $a$ , poprowadzona w punkcie  $A$ , warstwic  $w$ , powierzchni stokowej, jest śladem płaszczyzny stycznej  $a$  do tej powierzchni w punkcie  $A$ , z odnośną płaszczyzną warstwową. Linja spadów płaszczyzny  $a$  jest linią spadów powierzchni  $\Phi$ , prostopadłą do stycznej  $a$ , ale ponieważ prosta  $a$  ma położenie poziome, przeto rzut poziomy tej linii spadów będzie prostopadły do rzutu poziomego  $a'$  prostej  $a$ . Tak więc rzuty poziome  $t'_1, t'_2, \dots$ , tworzących powierzchni stokowej  $\Phi$  są prostopadłe do warstwic tej powierzchni, czyli są rzutami jej linii spadów.

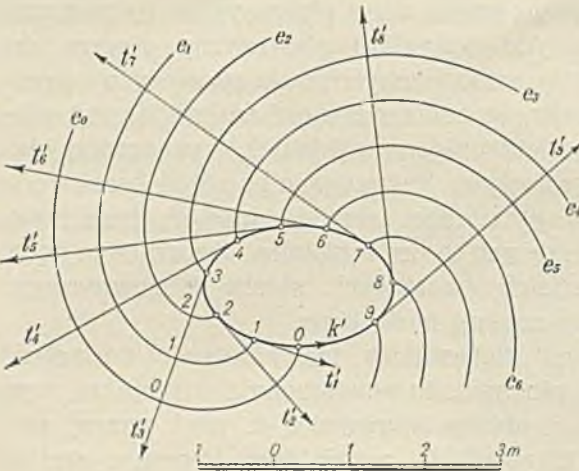
Jedna warstwica i dane nachylenie, względnie moduł tworzącej, wyznaczają powierzchnię stokową. Rzuty dalszych tworzących będą prostopadłe do danej warstwic, a plan warstwowi składać się będzie z krzywych równoległych i równoległych do danej warstwic. Wszystkie te krzywe posiadają wspólną ewolucję, jako obwiednię prostych normalnych do nich.

Z określenia powierzchni stokowej wynika, że jej najprostszym przykładem jest stożek obrotowy. Jedna z dwóch kierownic jest

w tym przypadku zredukowaną do punktu, którym jest wierzchołek stożka.

Styczne w punktach linii stokowej utworzą powierzchnię stokową, zwaną także ogólną powierzchnią śrubową rozwijalną.

Elipsa  $k'$  na rys. 37, zestopniowana przyjętym modułem, jest rzutem linii stokowej (śrubowej), leżącej na walcu eliptycz-

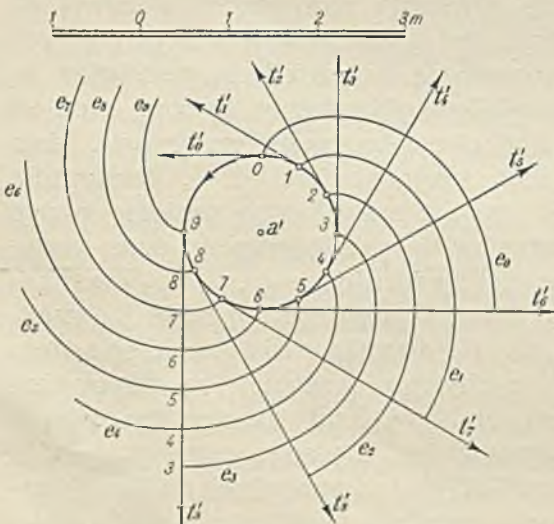


Rys. 37.

nym, przy jego normalnem położeniu. Styczne  $t'_1, t'_2, \dots$  w punktach tej elipsy, zestopniowane jej modułem, są tworzącymi powierzchni stokowej (śrubowej). Warstwicę tej powierzchni są ewolwentami elipsy  $k'$ , która znowu jest ich wspólną ewolutą.

Jeżeli zamiast elipsy  $k'$  przyjmiemy koło (rys. 38), to otrzymamy powierzchnię stokową zwaną zwyczajną powierzchnią śrubową rozwijalną. Powstaje ona przez ruch prostej, stałe stycznej do zwyczajnej linii śrubowej. Warstwicę tej powierzchni są zwyczajnymi ewolwentami koła.

**18. Powierzchnie stokowe, przechodzące przez krzywe**

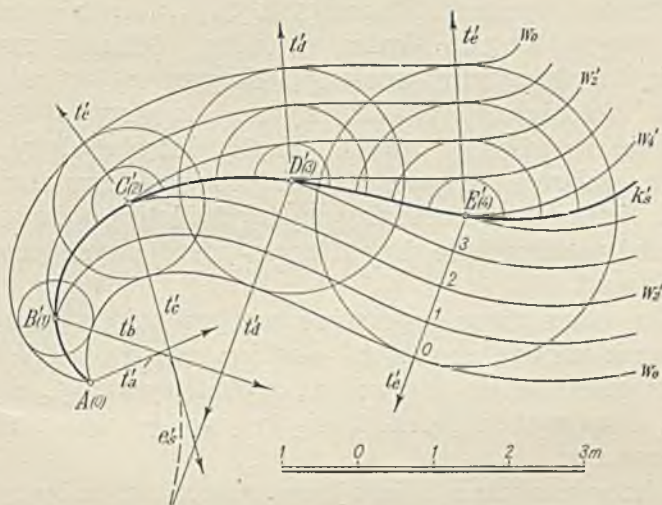


Rys. 38.

**skośne.** Płaszczyzny styczne do przyjętej krzywej skośnej, lub powierzchni, a nachylone pod pewnym danym kątem do płaszczyzny poziomej, powłóczą powierzchnię stokową.

Uważamy daną krzywą skośną  $k_s$  za miejsce geometryczne wierzchołków stożków obrotowych, w położeniu normalnym, to stożki te powłóczą powierzchnię o stałym spadku t. zn. powierzchnię stokową. Powierzchnia ta składa się z dwóch, przenikających się, podług krzywej  $k_s$ , części. Krzywa ta jest więc krzywą podwójną otrzymanej powierzchni stokowej.

Jasnym jest, że przez krzywą  $k_s$  przesunąć można dowolną ilość powierzchni stokowych, zależnie od przyjętego nachylenia tworzącej.



Rys. 39.

Przyjmijmy krzywą wichrowatą  $k_s$ , wyznaczoną zestopniowanym rzutem  $k'_s$  i wyznaczmy plan warstwowy powierzchni stokowej, przechodzącej przez tę krzywą, a mającej nachylenie 2:1 (rys. 39).

Punkty  $B, C, \dots$ , krzywej  $k_s$ , uważamy za wierzchołki stożków stokowych (ust. 9) o nachyleniu 2:1 i wykreślimy ich przekroje z płaszczyznami warstwowymi. Będą to koła o środkach  $B', C', \dots$  i promieniach obliczonych z równania  $r = d \cdot m_t$ , gdzie  $d$  wyraża wysokość warstwy, zaś  $m_t$  moduł tworzących stożka stokowego, równy modułowi powierzchni stokowej i równy, w naszym przykładowie,  $m_t = \frac{1}{2}$ . Punkt  $B'$  będzie więc środkiem koła o promieniu  $r_1 = m_t$ ; punkt  $C'$  środkiem kół o promieniach  $m_t$  i  $2m_t$ ; punkt  $D'$

środkiem kół o promieniach  $m_t$ ,  $2m_t$  i  $3m_t$ , i t. d. Obwiednie tych kół, z których pierwsza  $w_0$  leżeć będzie na płaszczyźnie porównawczej, a następne  $w_1, w_2, \dots$  na płaszczyznach warstwowych 1, 2, ..., są linjami warstwowymi powierzchni stokowej, przechodzącej przez krzywą skośną  $k_s$ . Tworzące tej powierzchni są prostopadłe do jej linii warstwowych, a rzuty,  $t'_a, t'_b, t'_c, \dots$  tych tworzących, prostopadłe do warstw  $w_1', w_2', \dots$ . Proste  $t'_a, t'_b, \dots$  obwiodą ewolucję  $e_s'$ , wspólną dla wszystkich warstw otrzymanej powierzchni stokowej.

Uważajmy ewolucję  $e_s'$  za kierownicę walca rzucającego, to proste  $t'_a, t'_b, \dots$ , obwładające tę ewolucję, są rzutami stycznych tego walca. Punkty styczności tworzących  $t_a, t_b, \dots$ , z walcem rzucającym, tworzą krzywą skośną  $e_s$ , której elementy mają stałe nachylenie do płaszczyzny poziomej. Krzywa ta jest więc linją stokową. Tworzące  $t_a, t_b, \dots$ , styczne do krzywej  $e_s$ , tworzą powierzchnię rozwijalną, opisaną na tej krzywej i będącą powierzchnią stokową. Krzywa  $e_s$  jest krzywą zwrotu tej powierzchni. Należy ona do rodziny ogólnych linii śrubowych, a opisana na niej powierzchnia do ogólnych, rozwijalnych powierzchni śrubowych (ust. 17).

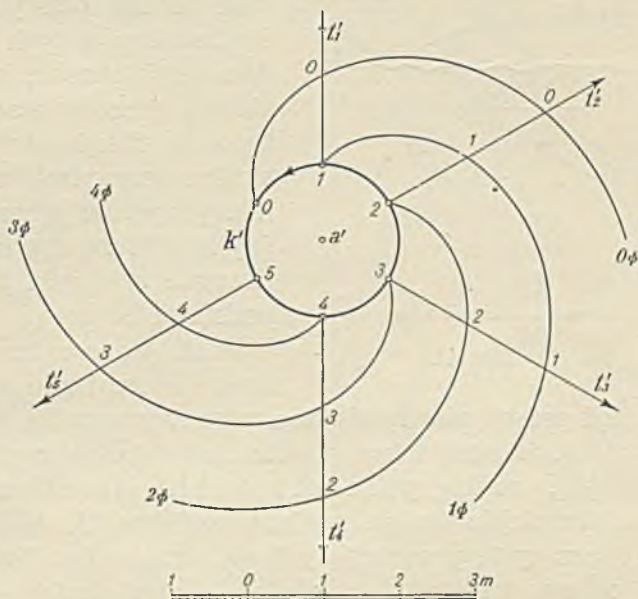
Dowolna płaszczyzna  $\varphi$  przecina powierzchnię stokową, przesuniętą przez krzywą skośną  $k_s$ , podług krzywej, która posiada, w punkcie przebicia się krzywej  $k_s$ , z płaszczyzną  $\varphi$ , punkt podwójny, a w punkcie przebicia się krzywej  $\varphi_s$  z tą płaszczyzną, punkt zwrotu.

Jeżeli krzywa skośna  $k_s$  jest krzywą stokową, to i w tym przypadku przesunąć można przez nią dowolną ilość powierzchni stokowych. Każda z nich określona będzie innym kątem nachylenia swych tworzących do płaszczyzny poziomej. Między powierzchniami temi jest jedna, której tworzące są styczne do krzywej  $k_s$ , która jest więc rozwijalną powierzchnią śrubową. Krzywa  $k_s$  jest krzywą zwrotu tej powierzchni.

**19. O powierzchniach skośnych.** Trzy krzywe płaskie lub skośne, zwane kierownicami, wyznaczają powierzchnię skośną  $\Phi_s$ . Tworzącymi tej powierzchni są wspólne tworzące stożków, których kierownicami są dwie z tych krzywych, a których wspólnymi wierzchołkami są punkty trzeciej. Jedna, dwie lub trzy kierownice powierzchni skośnej mogą być linjami prostymi. Jedna z trzech kierownic powierzchni skośnej może leżeć nieograniczenie daleko, a wtedy wyznaczoną jest za pośrednictwem stożka, do którego

tworzące powierzchni  $\Phi$ , będą równoległe. Jeżeli kierownicą tą jest prosta, to wyznaczona ona jest zapomocą płaszczyzny, zwanej płaszczyzną kierowniczą.

Przykładem powierzchni skośnej, wyznaczonej jedną krzywą skośną, stożkiem kierowniczym i jedną prostą jest t. zw. powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie. Powstanie ona, gdy jedną kierownicą będzie zwyczajna linja śrubowa, np. przy normalnem położeniu walca przez nią przechodzącego, drugą prosta pionowa, a stożkiem kierowniczym stożek obrotowy w położeniu normalnem. Tworzące tej powierzchni, jednako nachylone do płaszczyzny poziomej, przecinać będą linję śrubową i linję prostą, jako swoje kierownice.



Ryc. 40.

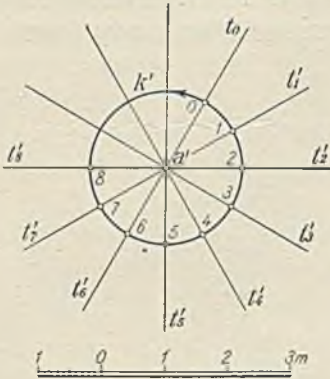
Rzut cechowany tej powierzchni widzimy na rys. 40. Rzuty poziome  $t_1'$ ,  $t_2'$ , ..., tworzących są prostopadłe do koła  $k'$ , rzutu poziomego linii śrubowej, w punktach, przez które przechodzą, a moduł dla wszystkich równy. Warstwyce  $0\phi$ ,  $1\phi$ ,  $2\phi$ , ..., powierzchni śrubowej o ostrym gwincie, są spiralnymi Archimedes'a, o równaniu biegunowem  $r = a \cdot \phi$ .

Jeżeli jedną kierownicą jest linja krzywa, drugą prosta właściwa, a trzecią prosta niewłaściwa, wyznaczona płaszczyzną kierowniczą, to otrzymana powierzchnia skośna zwię się konojdą. Jeśli przytem prosta właściwa jest prostopadłą do płaszczyzny kierowniczej, to konojda jest prosta.

Cechowanym rzutem prostej konojdy zwyczajnej linii śrubowej jest rys. 41. Tworzące  $t_1$ ,  $t_2$ , ... tej powierzchni są poziome, taką bowiem jest płaszczyzna kierownicza. Przecinają one

pionową kierownicę  $a$  i zwyczajną linię śrubową, której rzut poziomy jest kołem  $k'$ .

Jeżeli wszystkie trzy kierownice powierzchni skośnej są linjami prostymi, skośnie względem siebie położonemi, to powierzchnia jest



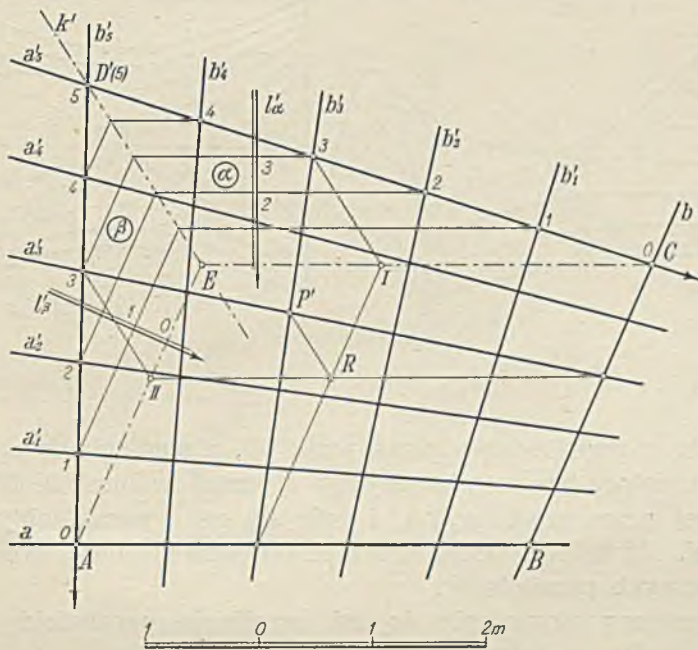
Rys. 41.

rzędu drugiego i zowie się hiperboloidą skośną. Powierzchnia ta posiada dwa układy prostych tworzących; proste każdego z tych układów są względem siebie skośne, każda prosta jednego układu przecina wszystkie proste, należące do układu drugiego. Hiperboloida skośna jest utworem dwóch homograficznych pęków płaszczyzn, o osiach skośnych, a także utworem dwóch homograficznych szeregów punktów o skośnych podstawach.

Jeżeli jedna z trzech prostych, będących kierownicami powierzchni skośnej, jest prostą niewłaściwą, a więc wyznaczoną płaszczyzną kierowniczą, to otrzymana powierzchnia skośna rzędu drugiego jest konoidą, zwaną paraboloidą hiperboliczną. Podobnie jak hiperboloida skośna, posiada powierzchnia ta dwa układy prostych tworzących, przecinających się wzajemnie. Tworzące, należące do jednego układu, są względem siebie skośne. Syntetycznie otrzymamy paraboloidę hiperboliczną z dwóch szeregów podobnych, o podstawach skośnych lub dwóch homograficznych pęków płaszczyzn, o osiach skośnych, w których jedna para homologicznych płaszczyzn jest równoległa. Proste jednego układu paraboloidy hiperbolicznej są równoległe do jednej, a proste drugiego układu do drugiej płaszczyzny kierowniczej. Proste niewłaściwe, wyznaczone płaszczyznami kierowniczymi, są tworzącymi paraboloidy hiperbolicznej, przecinającemi się w punkcie niewłaściwym tej powierzchni. Płaszczyzna styczna w punkcie paraboloidy hiperbolicznej przechodzi przez dwie tworzące, przecinające się w tym punkcie, z których każda należy do innego układu. Płaszczyzna niewłaściwa jest styczną do paraboloidy hiperbolicznej w jej punkcie niewłaściwym.

Ponieważ dwa szeregi podobne są wyznaczone dwoma parami homologicznych punktów, przeto dowolny czworokąt przestrzenny wyznacza paraboloidę hiperboliczną. Obierzmy punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$

na płaszczyźnie porównawczej, a punkt  $D$  w wysokości 5 jednostek, w podziałce rysunku (rys. 42). Zestopniujemy proste  $AD$  i  $CD$ , podzielmy odcinek  $AB$ , a także  $BC$ , każdy na pięć równych części i połączmy punkty podziału prostą  $a$  z punktami podziału prostej  $a_5'$ , zaś punkty podziału prostej  $b$  z punktami podziału prostej  $b_5'$ . Proste  $a, a_1', a_2', \dots$  są rzutem, wzajemnie skośnych, tworzących paraboloidy hiperbolicznej, przecinających proste drugiego

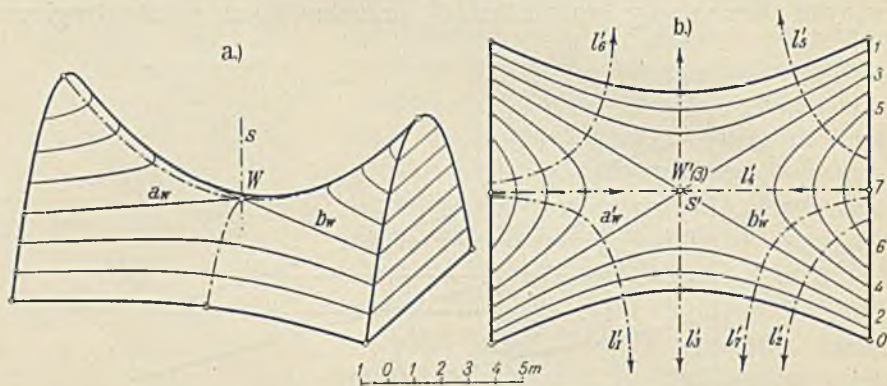


Rys. 42.

układu, których rzutem są proste  $b, b_1', b_2', \dots$ . Poprowadźmy przez punkt  $A$  prostą, równoległą do prostej  $b$ , a przez punkt  $C$  prostą, równoległą do prostej  $a$ . Obie te proste przetną się w punkcie  $E$ , który połączmy z punktem  $D'$ , prostą  $k'$ .

Płaszczyzna  $\alpha$ , wyznaczona punktami  $C, D, E$ , jest równoległą do prostych układu  $a$ , zaś płaszczyzna  $\beta$ , trójkąta  $ADE$ , jest równoległą do prostych układu  $b$ . Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  są więc płaszczyznami kierowniczymi paraboloidy hiperbolicznej i przecinają się podług prostej  $k$  (rys. 42). Warstwy płaszczyzny  $\alpha$  są równoległe do prostej  $CE$ , warstwy płaszczyzny  $\beta$ , równoległe do prostej  $AF$ .

Poprowadźmy, do prostej  $k$ , płaszczyznę prostopadłą i oznaczmy prostą, podług której przecina ona płaszczyznę  $\alpha$ , literą  $p$ , a prostą przecięcia się z płaszczyzną  $\beta$  literą  $q$ . Wyznaczymy tworzącą  $a_w$  układu  $a$ , równoległą do prostej  $p$  i tworzącą  $b_w$ , układu  $b$ , równoległą do prostej  $q$ . Tworzące  $a_w$  i  $b_w$  przetną się w punkcie  $W$  paraboloidy, który nazywać będziemy jej wierzchołkiem (rys. 43 a).



Rys. 43 a-b.

Prosta  $s$ , przechodząca przez punkt  $W$ , równoległa do prostej  $k$ , będzie prostopadłą do płaszczyzny stycznej w punkcie  $W$ , przechodzącej przez proste  $a_w$  i  $b_w$  i zwie się osią paraboloidy hiperbolicznej. Oś ta przechodzi przez punkt przecięcia się tworzących niewłaściwych paraboloidy.

Płaszczyzny równoległe do osi przecinają paraboloidę hiperboliczną podług parabol, których osi są równoległe do powierzchni; wszystkie inne przekroje płaskie są hiperbolami.

Rys. 43 a przedstawia paraboloidę hiperboliczną, w aksonometrii prostokątnej, w położeniu, gdy oś  $s$ , paraboloidy, jest równoległą do osi  $z$  układu prostokątnego. Dwie płaszczyzny równoległe do osi ograniczają paraboloidę hiperboliczną, przecinając ją podług parabol; płaszczyzny warstwowe przecinają ją podług hiperbol.

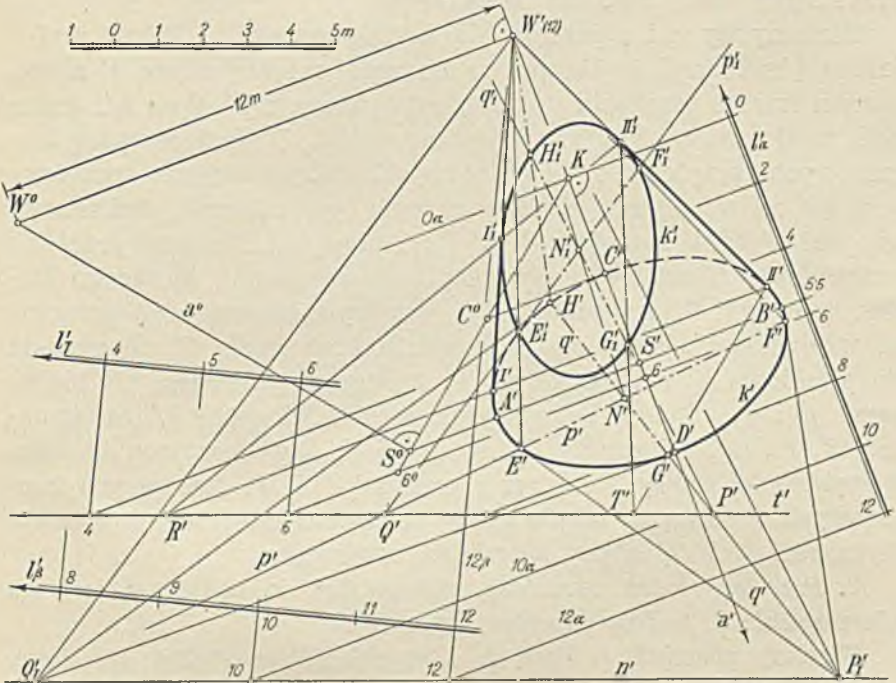
Rys. 43 b, jest planem warstwowym tej samej paraboloidy hiperbolicznej. Wszystkie warstwy są hiperbolami o wspólnych asymptotach  $a_w'$  i  $b_w'$ .

## 20. Zadania.

1. Na płaszczyźnie  $\alpha$ , wyznaczonej podziałką nachylenia  $1_\alpha'$  (rys. 44), leży koło  $k$ , o środku  $S$ , jako podstawa stożka obrotowego; wyznaczyć przekrój tego stożka podług elipsy.



Rzut poziomy koła podstawy jest elipsą  $k'$ , której oś duża  $\overline{A'B'}$ , równoległa do warstwicy płaszczyzny  $\alpha$ , równa jest średnicy koła  $k$ . Prosta  $a'$ , równoległa do  $l_\alpha'$  (w przestrzeni proste  $a$  i  $l_\alpha$  są skośne) i przechodząca przez punkt  $S'$ , przyjęty na warstwiczy 5'5, płaszczyzny  $\alpha$ , jest rzutem poziomym osi stożka. Poprowadźmy przez nią płaszczyznę rzucającą, a następnie położmy ją na płaszczyznę porównawczą. Środek koła  $k$  zajmie położenie punktu  $S^0$ , zaś kład  $a^0$ , prostej  $a$ , przejdzie przez ten punkt, prostopadłe do pro-



Rys. 44.

stej  $S^0K$ . Odmierzmy odcinek  $\overline{S^0C^0} = \overline{A'S'}$  i rzućmy punkt  $C^0$ , prostopadłe, na prostą  $a'$ . Punkt  $C'$  jest trzecim wierzchołkiem elipsy  $k'$ ; czwartym jest punkt  $D'$ , przyczem odcinek  $\overline{D'S'} = \overline{S'C'}$ .

Załóżmy, że wierzchołek stożka ma mieć wysokość  $12 m$ . Aby otrzymać jego rzut  $W'$  poprowadzimy, w odległości  $12 m$ , od prostej  $a'$ , prostą do niej równoległą. Przetnie ona prostą  $a^0$  w punkcie  $W^0$ , który będzie kładem wierzchołka  $W$  na płaszczyznę porównawczą. Rzut prostokątny punktu  $W^0$ , na prostą  $a'$ , jest szukanym rzutem wierzchołka. Styczne, wykreślone z punktu  $W'$  do  $k'$ , dopełnią pozornego konturu stożka.

Poprowadźmy przez wierzchołek stożka dowolną płaszczyznę  $\beta$ . Ponieważ cecha punktu  $W'$  jest  $12$ , więc prosta  $12_\beta$ , poprowadzona w dowolnym kierunku przez punkt  $W'$ , będzie warstwicą  $12$  tej płaszczyzny. Prosta  $l'_\beta$ , prostopadłą do  $12_\beta$  i zestopniowana dowolnym modulem, jest jej podziałką nachylenia. Prosta  $n'$  jest rzutem krawędzi płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Równoległa, do płaszczyzny  $\beta$ , płaszczyzna  $\gamma$  przetnie stożek podług elipsy, nie jest bowiem równoległą do żadnej tworzącej stożka. Podziałka nachylenia  $l'_\gamma$  jest przystająca do  $l'_\beta$  i do niej równoległa.

Płaszczyzny  $\alpha$  i  $\gamma$  przetną się podług prostej  $t$ , której rzut  $t'$  jest osią kolineacji środkowej, zachodzącej między elipsą  $k'$  a szukanym rzutem przekroju stożka płaszczyzną  $\gamma$ , t. j. elipsą  $k'_1$ . Jedną osią wzajemną tej kolineacji jest prosta  $n'$ . Znajdziemy parę biegunowych sprzężonych  $p'$  i  $q'$ , elipsy  $k'$ , których bieguny sprzężone leżą na osi wzajemnej  $n'$ . Biegunowym tym odpowie, kolineacyjnie, para średnic sprzężonych  $p_1'$  i  $q_1'$ , elipsy  $k'_1$ . Pierwsza przejdzie przez punkt  $Q'$  na osi  $t$ , równoległe do promienia, łączącego środek kolineacji  $W'$  z punktem  $Q_1'$ , w którym biegunowa  $p'$  przecina oś wzajemną  $n'$ . Średnica  $q_1'$  przejdzie przez punkt  $P'$ , równoległe do promienia  $W'P_1'$ . Punktowi  $N'$ , w którym przecinają się biegunowe  $p'$  i  $q'$ , odpowie kolineacyjnie środek  $N_1'$ , elipsy  $k'_1$ , zaś punktem  $E', F', G'$  i  $H'$  punkty  $E_1', F_1', G_1'$ , i  $H_1'$ , ograniczające średnice sprzężone tej elipsy. Punktom styczności  $I'$  i  $II'$ , tworzących konturowych z elipsą  $k'$ , odpowiadają środkowo-kolineacyjnie punkty styczności  $I_1'$  i  $II_1'$  elipsy  $k'_1$  z temi tworzącymi.

2. *Przeciąć stożek obrotowy, którego koło  $k$ , podstawy, leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , podług hiperboli (rys. 45).*

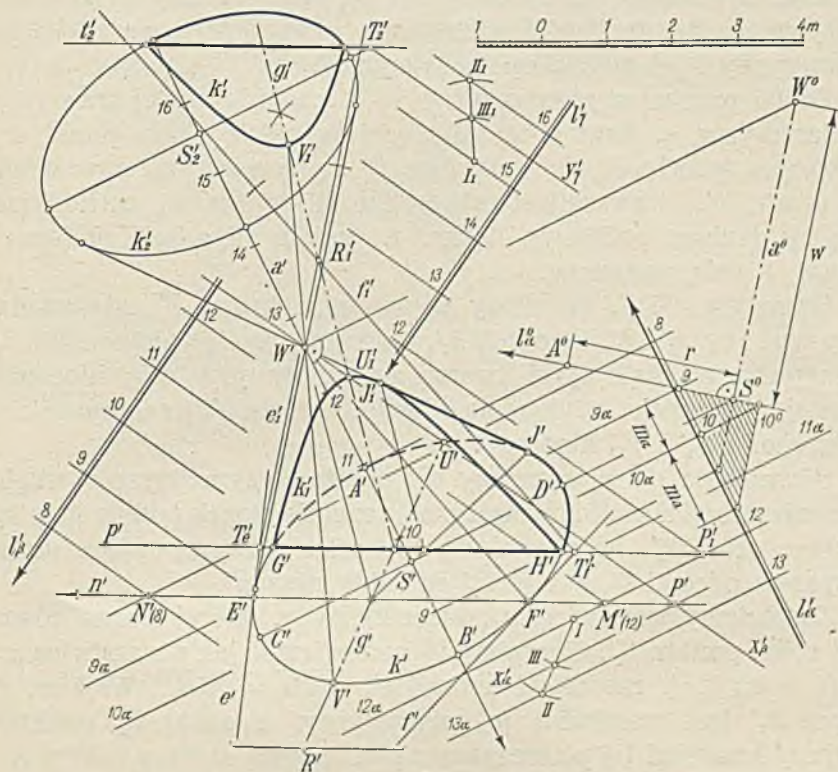
Niechaj promień  $r$  koła  $k$  i wysokość  $w$  stożka są dane, a ponadto niechaj dany jest rzut  $S'$ , środka koła. Cecha punktu  $S'$  nie jest znana, wiadomo jednak, że punkt  $S$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$ .

Poprowadźmy płaszczyznę rzucającą przez linię spadu  $l_a$  i wykonajmy jej kład  $l_a^0$  na płaszczyznę warstwową  $9$ . Na warstwiczy  $10_a$  odmierzymy odcinek  $\overline{10}, 10^0 = 1 m$  i połączmy punkt  $10^0$  z punktem  $9$ , prostą  $l_a'$ . Warstwicą, na której leży punkt  $S'$ , przetnie prostą  $l_a^0$  w punkcie  $S^0$ . Kreślmy  $a^0 \perp l_a^0$  i odmierzymy  $\overline{S^0W^0} = w$ , a także  $\overline{S^0A^0} = r$ .

Rzut  $a'$ , osi stożka, przejdzie przez punkt  $S'$ , równoległe do  $l_a'$ . Rzuty prostokątne punktów  $W^0$  i  $A^0$  na  $a'$  wyznaczą tam rzut  $W'$  wierzchołka stożka i wierzchołek  $A'$  elipsy  $k'$ . Z łatwością znaj-

dziemy osie i dalsze trzy wierzchołki  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ , elipsy  $k'$ , poczem zestopniujemy prostą  $a'$ , modułem  $m_a$ , począwszy od punktu 9.

Aby przekrój stożka był hiperbolą, płaszczyzna sieczna  $\gamma$  musi być równoległą do płaszczyzny  $\beta$ , przechodzącej przez wierzchołek stożka i przecinającej go podług dwóch tworzących.



Rys. 45.

Prosta  $n$ , przyjęta na płaszczyźnie  $\alpha$  i przecinająca podstawę stożka, niechaj będzie krawędzią płaszczyzny  $\beta$  z płaszczyzną  $\alpha$ . Aby wyznaczyć płaszczyznę  $\beta$  przyjmijmy na płaszczyźnie  $\alpha$  warstwicę  $x_a'$ , o cesze równej cesze punktu  $W'$ . Cechy tej nie znamy, znajdziemy ją planimetrycznie w następujący sposób: Z dowolnego punktu  $I$ , warstwiczy  $12_a$ , zakreślmy łuk, promieniem równym  $m_a$  i otrzymany, na warstwiczy  $13_a$ , punkt  $II$ , połączmy z  $I$ . Łukiem koła, zakreślonym z punktu  $I$ , promieniem równym części modułu prostej  $a'$ , zawartej między punktem  $W'$  i cechą 12, przetniemy

prostą  $I II$ , w punkcie  $III$ . Przez ten punkt przejdzie warstwica  $x'_\alpha$ , która przetnie prostą  $n'$  w punkcie  $P'$ . Prosta  $P' W' = x'_\beta$  jest warstwicą płaszczyzny  $\beta$ , o cesze, równej cesze punktu  $W'$ . Na prostej  $n'$  znajdziemy punkty  $M'(12)$  i  $N'(8)$ , przy uwzględnieniu, że prosta  $n$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$ . Proste, poprowadzone przez te punkty, równoległe do prostej  $x'_\beta$ , są warstwicami 12 i 8 płaszczyzny  $\beta$ . Bez trudności wykreślimy teraz dalsze warstwicę tej płaszczyzny i jej podziałkę nachylenia  $l'_\beta$ .

Zkolei przyjmijmy płaszczyznę  $\gamma \parallel \beta$  i znajdziemy jej krawędź  $p$ , z płaszczyzną  $\alpha$ . Rzut  $p'$  tej krawędzi przejdzie przez punkt  $P'_1$ , w którym przecinają się warstwicę 12 obu płaszczyzn, równoległe do prostej  $n'$ . Pierwsza jest osią kolineacji środkowej, zachodzącej między rzutem podstawy stożka, a rzutem hiperboli przekroju, druga — osią wzajemną.

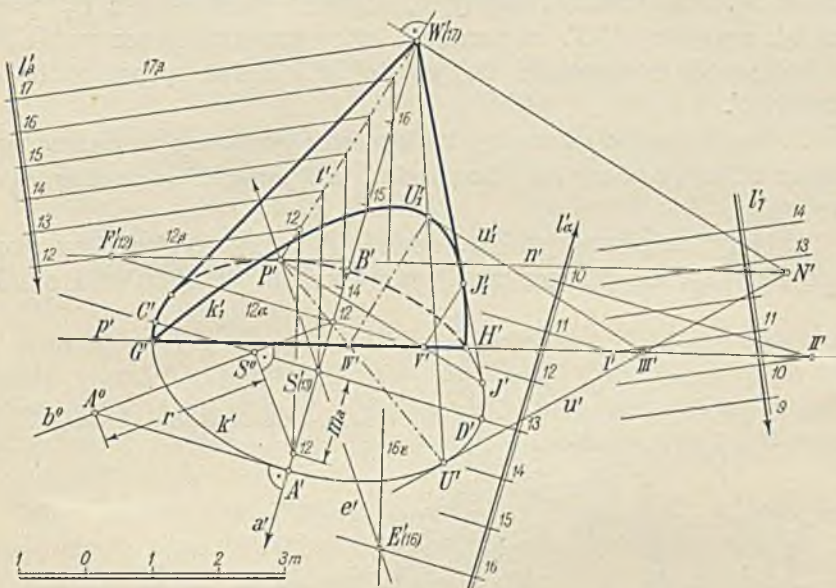
Stycznym  $e'$  i  $f'$ , do elipsy  $k'$ , w punktach  $E'$  i  $F'$ , odpowiedzą asymptoty  $e'_1$  i  $f'_1$ , hiperboli  $k'_1$ , które przetną się w jej środku  $R'_1$ . Symetralna  $q'_1$ , kąta, jaki tworzą asymptoty jest osią hiperboli. Prostej  $g'_1$  odpowie, w układzie elipsy  $k'$ , prosta  $g'$ , punktom  $U'$  i  $V'$ , wierzchołki  $U'_1$  i  $V'_1$  hiperboli.

Równoległa do płaszczyzny  $\alpha$  i położona symetrycznie względem wierzchołka stożka płaszczyzna, przetnie stożek podług koła  $k'_2$ , którego rzut,  $k'_2$ , będzie elipsą, o środku  $S'_2$ , przystającą do  $k'$ , przyczem odcinki  $\overline{W'S}$  i  $\overline{W'S'_2}$  są sobie równe.

Znajdziemy warstwicę  $y'_7$ , płaszczyzny  $\gamma$ , której cecha równa jest cesze punktu  $S'_2$ . Uczynimy to analogicznie jak z warstwicą  $x'_\alpha$ ;  $\overline{I_1 II_1} = m_\alpha$  t. j. modułowi prostej  $a'$ ;  $\overline{I_1 III_1} = 15 S_2$ . Większa oś elipsy  $k'_2$  jest warstwicą jej płaszczyzny, a punkt  $T'_2$  punktem rzutu  $t'_2$  krawędzi tej płaszczyzny z płaszczyzną sieczną  $\gamma$ . Prosta  $t_2$  jest równoległa do  $p' \parallel n'$ .

3. *Stożek obrotowy, którego podstawa, koło, leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , przecięć podług paraboli* (rys. 46). Przez przyjęty na warstwicę 13, płaszczyzny  $\alpha$ , rzut  $S'$  środka podstawy stożka, poprowadzimy prostą  $a'$ , jako rzut jego osi. Następnie położymy płaszczyznę rzucającą, poprowadzoną przez oś stożka, na płaszczyznę warstwową 12. Prosta  $b^0$  będzie kładem krawędzi tej płaszczyzny z płaszczyzną  $\alpha$ . Prostopadła, w punkcie  $S^0$  do prostej  $b^0$ , przetnie prostą  $a'$  w punkcie 12, wyznaczając moduł  $m_\alpha$ , osi stożka  $a$ . Odcinek  $\overline{S^0 A^0}$ , równy promieniowi koła, rzucimy prostopadłe na  $a'$ , otrzymując wierzchołek  $A'$ , elipsy  $k'$ . Dalsze wierzchołki elipsy otrzymamy jak w zadaniach poprzednich.

Zestopniowawszy prostą  $a'$  modułem  $m_\alpha$ , obierzemy na niej rzut wierzchołka stożka w punkcie  $W'$  (17). Wzdłuż przyjętej tworzącej  $t$ , stożka, poprowadzimy doń płaszczyznę styczną  $\beta$ . Aby znaleźć, w tym celu, podziałkę nachylenia prostej  $t$ , odnajdziemy warstwicę  $16_\epsilon$ , płaszczyzny  $SPW = \epsilon$ . Warstwica  $16$ , płaszczyzny  $\alpha$ , przecina prostą  $e' = S'P'$  w punkcie  $E'(16)$ ; prosta, łącząca ten punkt z wskaźnikiem  $16$ , prostą  $a'$ , jest szukaną warstwicą  $16_\epsilon$ . Dalsze warstwy płaszczyzny  $\epsilon$  przechodzą przez punkty podziału



Rys. 46.

prostą  $a'$  i przetną prostą  $t'$  w punktach podziałki nachylenia. Zkolei musimy zestopniować prostą  $n'$ , styczną do elipsy  $k'$ , w punkcie  $P'$ . Ponieważ prosta  $n$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , więc przecięcie się warstwy np.  $12$  tej płaszczyzny, z prostą  $n'$ , jest punktem  $F'$  tej prostej, o cesze  $12$ . Prosta, łącząca ten punkt z punktem  $12$  prostej  $t'$ , jest warstwicą  $12_\beta$ , płaszczyzny  $\beta$ , stycznej do stożka, wzdłuż tworzącej  $t$ . Wykreślenie warstwy  $17_\beta$ , przechodzącej przez punkt  $W'$ , umożliwi wyznaczenie planu warstwowego tej płaszczyzny. Płaszczyzna  $\gamma$ , równoległa do  $\beta$ , przetnie stożek podług paraboli. Jej podziałka nachylenia  $l'_\gamma$  będzie równoległa do  $l_\beta$ , kierunku nachylenia zgodny, a moduł ten sam.

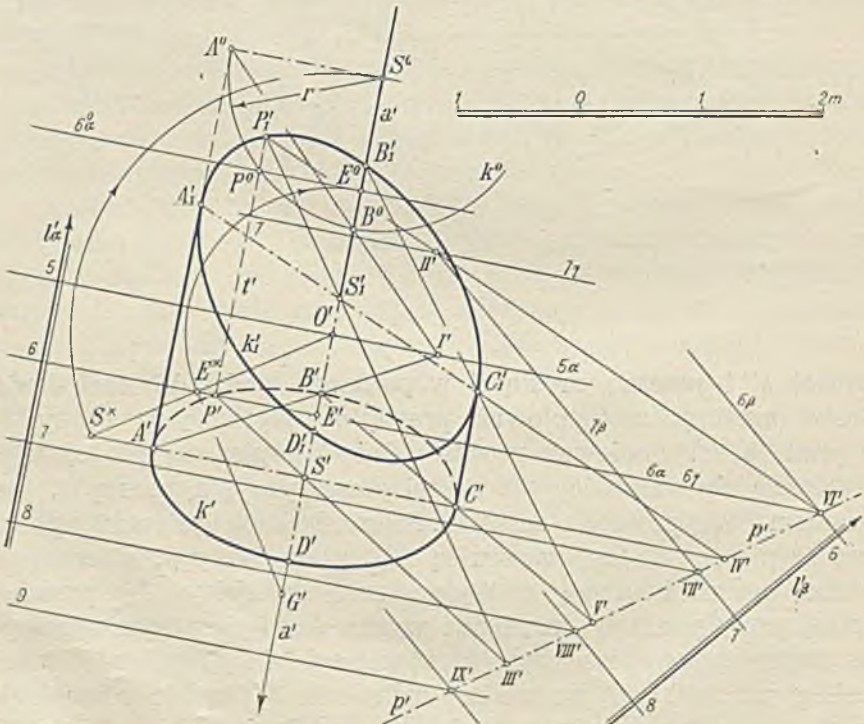
Płaszczyzna  $\alpha$  przecina płaszczyznę  $\gamma$  podług prostej  $p$ , która

jest osią kolineacji środkowej, zachodzącej między kołem  $k$ , podstawy, a parabolą  $k_1$ , przekroju. Rzut  $p'$ , tej prostej, będzie osią kolineacji środkowej, wiążącej elipsę  $k'$  z parabolą  $k_1'$ . Ośą wzajemną tej kolineacji jest prosta  $n'$ .

Prostopadła, wykreślona do  $t'$  w punkcie  $W'$ , przecina oś  $n'$  w punkcie  $N'$ , z którego poprowadzimy styczną  $u'$  do elipsy  $k'$ . Stycznej tej odpowie, kolineacyjnie, styczna  $u_1'$  do szukanej paraboli przekroju, przechodząca przez punkt  $III'$ , równoległe do prostej  $W'N'$ . Punktowi  $U'$ , elipsy  $k'$ , odpowie wierzchołek  $U_1'$  paraboli  $k_1'$ , a prostą  $P'U'$ , oś paraboli, która przejdzie przez punkt  $IV'$ , osi kolineacji, równoległe do prostej  $t'$  i będzie prostopadłą do prostej  $u_1'$ .

4. Przyjmując walec obrotowy, którego koło podstawy, o danym promieniu  $r$ , znajduje się na płaszczyźnie  $\alpha$  i przeciąć go podług elipsy (rys. 47).

Przyjęty, na płaszczyźnie  $\alpha$ , dowolnie, punkt  $S$ , obrócimy około warstwy  $5_\alpha$ , na płaszczyznę warstwową  $5$ . W tym celu odmie-



Rys. 47.

rzemy  $\overline{E'E^x} = 1 m$ , punkt  $E^x$  połączymy z  $O'$ , a w punkcie  $S'$  wykreślimy prostopadłą do prostej  $a'$ , t. j. rzutu osi  $a$  walca. Odcinek  $\overline{O'S^x}$  jest promieniem obrotu. Łuk koła, zakreślony tym promieniem, z punktu  $O'$ , przetnie prostą  $a'$  w punkcie  $S^0$ .

Danym promieniem  $r$  zakreślimy, z punktu  $S^0$ , koło  $k^0$  i podnieśmy jego punkty  $A^0$  i  $B^0$  na płaszczyznę  $\alpha$ . Z łatwością wyznaczymy dwa dalsze wierzchołki  $C^0$  i  $D^0$  elipsy  $k'$ , a więc i ją samą. Wykreślimy tworzące konturowe walca i obierzemy tworzącą  $t$ , przechodzącą przez punkt  $P$  jego podstawy; punkt ten przyjęliśmy na warstwicę  $\theta_\alpha$ .

Prostopadła, wykreślona w punkcie  $E^x$  do  $O'S^x$ , przecina prosta  $a'$  w punkcie  $G'$ . Odcinek  $\overline{E'G'}$  jest modułem prostych, prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ , a więc i modułem tworzącej  $t$ . Odmierzmy  $\overline{P'7} = \overline{E'G'}$ , czem dopełnimy wyznaczenia położenia prostej  $t$ .

Przyjmijmy płaszczyznę sieczną  $\beta$  i znajdziemy punkt przebicia się  $P_1$ , tworzącej  $t$ , z tą płaszczyzną. Użyliśmy do tego celu pośrednictwa płaszczyzny  $\gamma$ , której warstwica  $\theta_\gamma$  schodzi się z warstwicą  $\theta_\alpha$ .

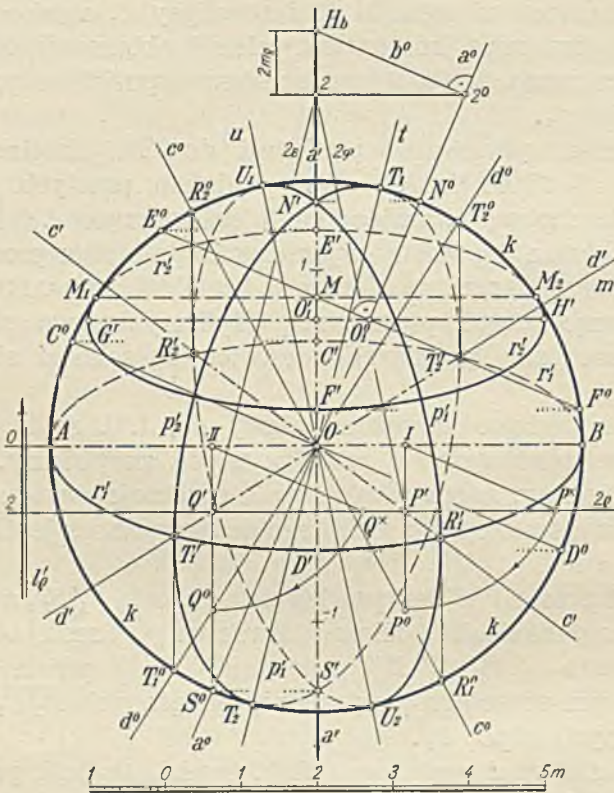
Środek i średnice sprzężone elipsy  $k_1'$ , t. j. rzutu elipsy  $k_1$ , podług której płaszczyzna  $\beta$  przecina walec, znajdziemy, uwzględniając, zachodzący, między podstawą a przekrojem walca, związek powinowactwa środkowego. Osią tego powinowactwa jest krawędź  $p$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ .

Tak więc prosta  $P'S'$  jest powinowatą z prostą  $P_1'S_1'$ , a obie przecinają się w punkcie  $III'$ , osi powinowactwa  $p'$ . Prostej  $A'S' C' IV'$  odpowie prosta  $A_1' S_1' C_1' IV'$ , a prostej  $B' C' V'$  prosta  $B_1' C_1' V'$ . Dostajemy tym sposobem parę średnic sprzężonych  $\overline{A_1'C_1'}$  i  $\overline{B_1'D_1'}$ , wyznaczających elipsę  $k_1'$ .

5. *Wykreślić rzut cechowany kuli.* Środek  $O$ , kuli, przyjmijmy na płaszczyźnie rysunku, jako płaszczyźnie porównawczej. Rzut kuli jest kołem  $k$ , zakreślonym z punktu  $O$ , promieniem  $r$ , równym promieniowi kuli.

Poprowadźmy przez środek kuli  $O$  prostą  $a$ , o nachyleniu 3 : 7 i uważajmy ją za oś kuli. Płaszczyzna równika i płaszczyzny równoleżnikowe będą prostopadłe do prostej  $a$ . Poprowadźmy przez prostą  $a$  płaszczyznę rzucającą  $\pi$ , która przetnie kulę w kole wielkiem (południku), a płaszczyzny równoleżników podług prostych, prostopadłych do prostej  $a$ . Wykonajmy kład płaszczyzny  $\pi$ , wraz z leżącą na niej prostą  $a$  i kołem wielkiem, na płaszczyznę porównawczą. Oś kuli zajmie położenie prostej  $a^0$ , a koło wielkie,

leżące na płaszczyźnie  $\pi$ , zjedzie się z kołem  $k$ . Rzucone, prostopadłe na prostą  $a'$ , punkty  $N^0$  i  $S^3$  są rzutami punktów przebiecia się prostej  $a$  z kulą. Prostopadła, wykreślona w punkcie  $O$  do prostej  $a^0$ , przecina koło  $k$  w punktach  $C^0$  i  $D^0$ . Odcinek  $\overline{C^0D^0}$  jest rzutem równika na płaszczyznę  $\pi$ . Rzut poziomy równika jest



Rys. 48.

elipsą  $r_1'$ , o osiach  $\overline{AB}$  i  $\overline{C'D'}$ . Odcinek  $\overline{E^0F^0}$ , prostopadły do prostej  $a^0$ , w dowolnie przyjętym na niej punkcie  $O_1^0$ , jest kładem krawędzi płaszczyzny  $\pi$  i płaszczyzny równoleżnika. Rzut poziomy tego równoleżnika jest elipsą  $r_2'$ , której mała oś równa jest odcinkowi  $\overline{E'F'}$ , otrzymanemu jako prostokątny rzut odcinka  $\overline{E^0F^0}$  na prostą  $a'$ , a której oś wielka  $\overline{G'H'}$  jest równa odcinkowi  $\overline{E^0F^0}$ . Płaszczyzna, równoleżnika  $r_2$ , przecina płaszczyznę porównawczą podług prostej, przechodzącej przez punkt  $M$ , prostopadłe do  $a'$ .



terasy (rys. 59). Oś drogi, na długości  $MN$ , jest zwyczajną linią śrubową, którą zestopniujemy, podobnie jak część osi, która jest linią prostą, modułem  $8 m$ . Korona drogi w części krzywej jest prostą konojdą linii śrubowej (ust. 19), której tworzące są równocześnie jej warstwicami.

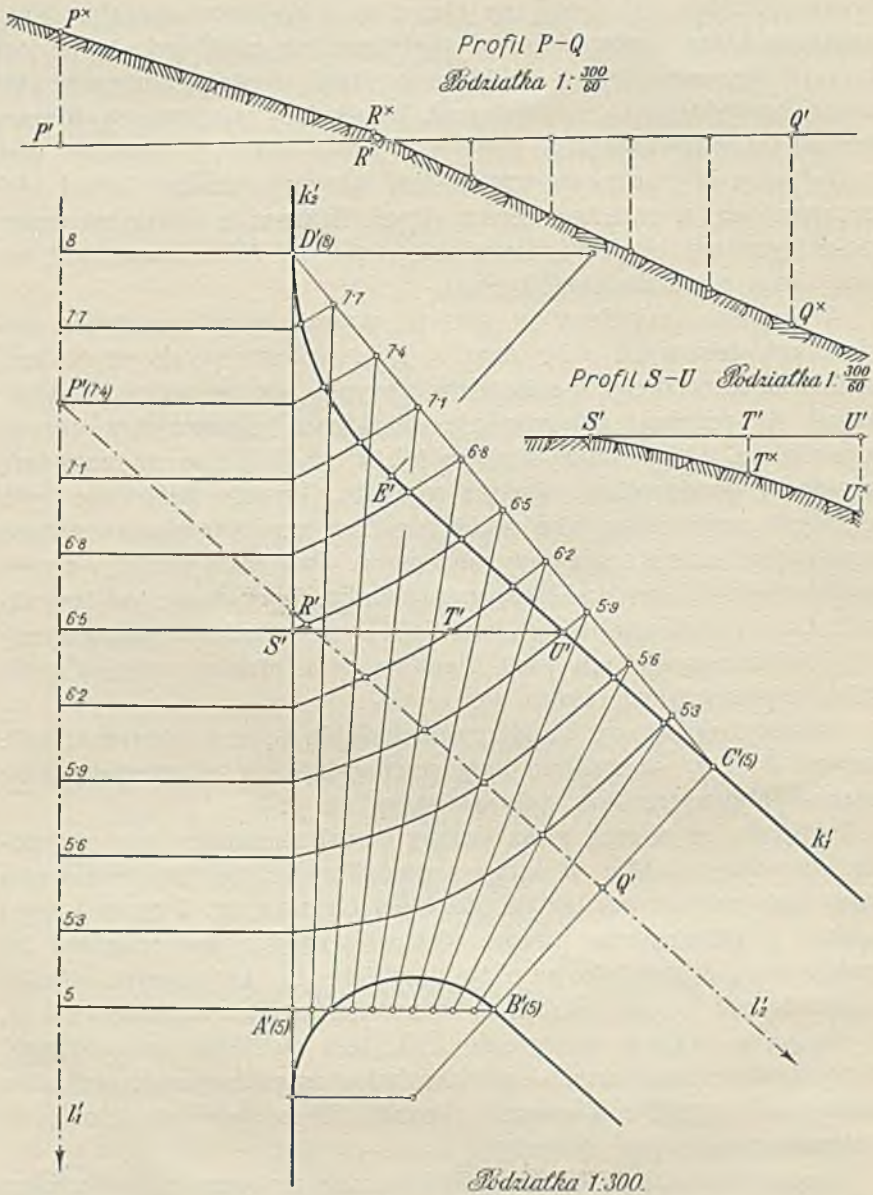
Najpierw wyznaczmy rzut  $k'$  linii krzywej, podług której płaszczyna terenu przecina koronę drogi. Krzywa ta będzie miejscem geometrycznym punktów przecięcia się  $I' II' III' \dots$  warstwic korony drogi z warstwicami terenu.

W sposób omówiony w ust. 18 wyznaczmy warstwicę powierzchni stokowych  $\alpha$  i  $\beta$  oraz  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ , przesuniętych przez krawędzie korony drogi, zarówno w nasypie jak w wykopie. Warstwicę te przetną odpowiednie warstwicę płaszczyny terenu w punktach, które dadzą krzywe  $k_1', k_2', k_3'$  i  $k_4'$ ; są to rzuty linii przecięcia powierzchni skarp z terenem. Punkty pośrednie tych krzywych znajdziemy jako rzuty punktów przebicia się tworzących powierzchni skarp z płaszczyną terenu. Dwa takie punkty, a mianowicie  $T'$  i  $T_1'$ , wskazaliśmy na rysunku. Poczynając od tworzących  $t_2$  i  $t_3$ , powierzchnie stokowe  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  przechodzą w płaszczyny  $\gamma$  i  $\delta$ . Wyznaczmy ich plan warstwowy i proste przecięcia się  $k_5$  i  $k_6$  z płaszczyną terenu.

Płaszczynie skarpy  $\lambda$  nadamy nachylenie  $1:1$ , a skarpie  $\varepsilon$ ,  $2:3$ . Krzywe  $k_7'$  i  $k_8'$  są rzutami linii, podług których płaszczyny  $\lambda$  i  $\varepsilon$  przecinają powierzchnie stokowe skarpy  $\alpha$  i  $\beta$ .

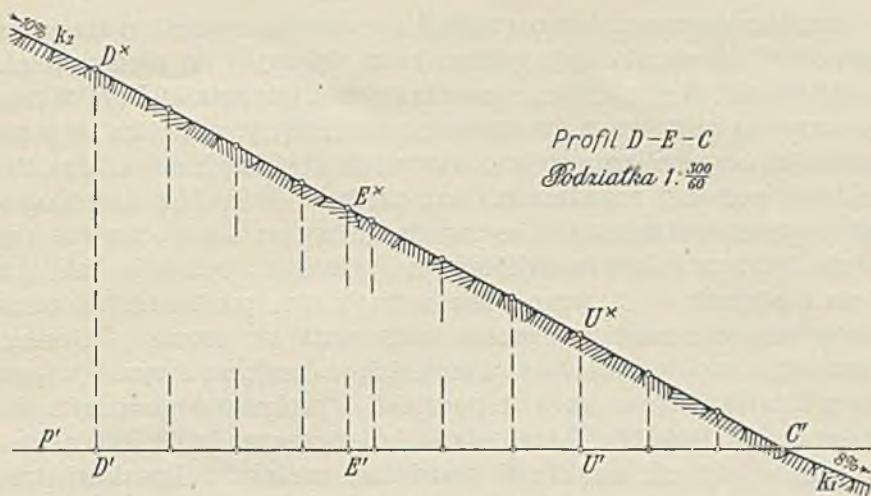
Przejdźcie, ze skarpy  $\varepsilon$  do skarpy  $\varphi$ , uskutecznione jest za pośrednictwem stożka  $\psi$ , który z uwagi na to, że nachylenie obu skarpy jest jednakowe, będzie stożkiem obrotowym. Przekrój tego stożka, z płaszczyną terenu, jest elipsą  $k_9$ ; poszczególne jej punkty znajdziemy jako punkty przebicia się tworzących stożka z płaszczyną terenu. Stożek  $\nu$ , łącząc skarpy  $\lambda$ , o nachyleniu  $1:1$ , ze skarpy  $\varphi$ , mająca nachylenie  $2:3$ , jest stożkiem trójosiowym, w położeniu normalnym. Jego warstwicę są podobnymi, podobnie położonymi współśrodkowymi elipsami. Przecięcie się stożka  $\nu$  z płaszczyną terenu jest elipsą  $k_{10}$ .

Powierzchnia skarpy  $\sigma$  jest powierzchnią stokową, przechodzącą przez parabolę  $CDE$ . Tworzące  $t_8, t_9, t_{10}$  tej powierzchni są jej liniami spadu, rzuty tych linii prostymi, normalnymi, do paraboli  $CDE$ . Normalne te znajdziemy zapomocą stycznych, które znowu otrzymamy, uwzględniając, że wierzchołek paraboli jest środkiem podstycznej. Warstwicę powierzchni  $\sigma$  są krzywymi



Rys. 60.

równoległymi do paraboli. Krzywa  $k_{11}$  jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się tworzących powierzchni  $\sigma$  z płaszczyzną terenu.



Rys. 61.

**27. Połączenie dwóch dróg w spadku.** Przyjmijmy, że droga główna, o spadku  $10\%$ , łączy się z drogą boczną o spadku np.  $8\cdot3\%$  (rys. 60). Oś pierwszej jest zestopniowaną linią  $l_1'$ , oś  $l_2$  drugiej przecina się z pierwszą w punkcie  $P$  w wysokości  $7\cdot4$  m. Przejście z jednej korony drogi w drugą — obie przyjęliśmy jako płaszczyzny — uskutecznimy za pośrednictwem paraboloidy hiperbolicznej, wyznaczonej czworokątem przestrzennym  $ABCD$ . Wierzchołki  $A, B, C$ , tego czworokąta, leżą na płaszczyźnie warstwowej 5, wierzchołek  $D$  leży o  $3$  m wyżej.

W celu wyznaczenia planu warstwowego paraboloidy hiperbolicznej zestopniowaliśmy odcinek  $\overline{CD}$ , przy uwzględnieniu różnicy wysokości, między punktami podziału, równej  $0\cdot3$  m. Odcinek  $\overline{A'B'}$  podzieliliśmy na dziesięć części i połączyli punkty podziału z punktami podziałki na odcinku  $\overline{C'D'}$ . Tym sposobem otrzymaliśmy jeden układ tworzących paraboloidy. Następnie zestopniowaliśmy każdą z tych tworzących — przy uwzględnieniu różnicy wysokości punktów podziału równej  $0\cdot3$  m — i połączyli punkty, o tych samych cechach liniami, które są hiperbolami i które tworzą plan warstwowy powierzchni skośnej, łączącej obie korony drogi.

Na rys. 60 wykonaliśmy dwa profile. Jeden wzdłuż osi drogi bocznej daje linię  $P^*R^*Q^*$ , która od  $P^*$  do  $R^*$  jest prostą, a od  $R^*$  do  $Q^*$  hiperbolą, drugi, prostopadły do osi drogi głównej, daje linię  $S'TU$ , która jest również hiperbolą.

Rzut krawędzi  $k_1'$ , korony drogi bocznej, łączy się z rzutem krawędzi  $k_2$ , drogi głównej, łukiem koła, stycznym do nich w punktach  $D'$  i  $E'$ . Walec, którego podstawą jest łuk koła  $D'E'$ , a którego tworzące są pionowe, t. zw. walec rzucający, przenika się z paraboloidą hiperboliczną podług krzywej skośnej, rzędu czwartego, której rzut poziomy schodzi się z łukiem koła  $D'E'$ . Aby zorientować się w przebiegu krawędzi korony drogi, wykonaliśmy, wzdłuż niej, profil. W tym celu przenieśliśmy na prostą  $p'$ , (rys. 61), łuk  $D'E'$  koła i odcinek  $E'C$ , wraz z leżącymi na nim punktami. W punktach tych poprowadzimy proste prostopadłe do prostej  $p'$  i odnieśliśmy na nie odpowiednie wysokości, odczytane z rys. 60, przy uwzględnieniu stosunku 5:1 podziałki wysokości do podziałki długości. „Podziałka 1:  $\frac{300}{60}$ ” na rys. 60 i 61 oznacza, że 1:300 jest podziałką odciętych, zaś 1:60 podziałką rzędnych. Podziałki, inne w kierunku pionowym aniżeli poziomym i z reguły od nich większe, używane są przy profilach, dla uwypuklenia przebiegu linii przekrojów, względnie przenikań.

Miejscem geometrycznym otrzymanych punktów jest linja krzywa  $D^x E^x U^x C'$ . Krzywa  $D^x E^x$  jest rozwinięciem linii przenikania paraboloidy hiperbolicznej z walcem rzucającym, którego podstawą jest łuk koła  $D'E'$  na rys. 60. Linja  $E^x C'$  jest hiperbolą, podług której płaszczyzna pionowa, przechodząca przez prostą  $C'E'$  (patrz rys. 60) przecina paraboloidę hiperboliczną, łączącą korony obu dróg. Od punktu  $C'$  profil jest prostą  $k_1$ , nachyloną do poziomu w stosunku 8:100, od punktu  $D^x$ , ku górze, profil jest prostą  $k_2$ , o nachyleniu 1:10.

## Rozdział czwarty.

### Powierzchnia topograficzna.

**28. Plan warstwowy.** Powierzchnię naturalnego obszaru ziemi nazywamy powierzchnią topograficzną, lub krótko terenem. Powierzchnia ta nie da się zdefiniować matematycznie i należy do kategorii powierzchni graficznych.

Przekroje powierzchni topograficznej płaszczyznami warstwowymi, a więc jej linje warstwowe są linjami zamkniętymi, typu graficznego. Rzuty poziome tych linii, na przyjętą, poziomą, płaszczyznę porównawczą, stanowią warstwice powierzchni topograficznej. Warstwice są graficznymi krzywymi zamkniętymi, przy-

stającymi do linii warstwowych i tworzą plan warstwowy danego obszaru. Grubość warstw przyjmujemy, w zależności od celu, któremu służyć ma plan warstwowy. Rozróżniamy warstwice główne od pośrednich, dopełniających.

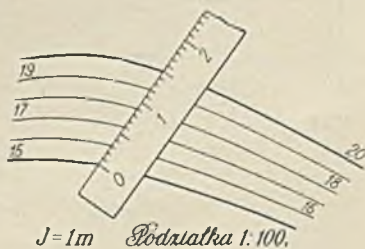
Punkty, a więc i linje warstwowe, leżące nad płaszczyzną porównawczą, otrzymują cechy dodatnie, leżące pod płaszczyzną porównawczą cechy ujemne. Jeżeli jako płaszczyzna porównawcza, przyjęte będzie zwierciadło morza, to warstwice jego dna będą miały cechy ujemne.

Kształt powierzchni topograficznej, między dwiema warstwicami, nie jest znany; przyjmujemy jedynie, że nie posiada ona, na tym obszarze, żadnych szczególności, że kształtem swym zbliża się do powierzchni stokowej, że jest więc, w granicach dwóch linii warstwowych, w przybliżeniu, powierzchnią prostolinjową, której tworzące są prostopadłe do tych linii.

Zrozumiałem jest, że im cieńsze są warstwy, a więc gęstsze warstwice, tem dokładniej odtworzony jest odnośny teren.

Często zachodzi potrzeba uzupełnienia (interpolacji) planu warstwowego, przez wrysowanie warstwice pośrednich. Zadanie to polega na wyznaczeniu dostatecznej ilości punktów, o jednakowych wysokościach, leżących na terenie, między dwiema linjami warstwowymi. Sprowadza się ono do dzielenia, w żądanym stosunku, odcinków prostopadłych, w przybliżeniu, równocześnie do dwóch, bezpośrednio po sobie następujących, warstwice. Podział ten skutecznie możemy w sposób podany w ust. 3, rys. 4. Cechy warstwice głównych są z reguły liczbami całymi; warstwice pośrednie otrzymują, jako cechy, liczby całe lub wielokrotność dziesiątej części jednostki. Ułatwia to interpolację, gdyż pozwala na bezpośrednie użycie podziałki milimetrowej. Przykładamy ją mianowicie tak, aby jej krawędź była, w przybliżeniu, prostopadłą, równocześnie, do obu warstwice i długość odcinka, odczytaną wprost na podziałce, dzielimy w żądanym stosunku.

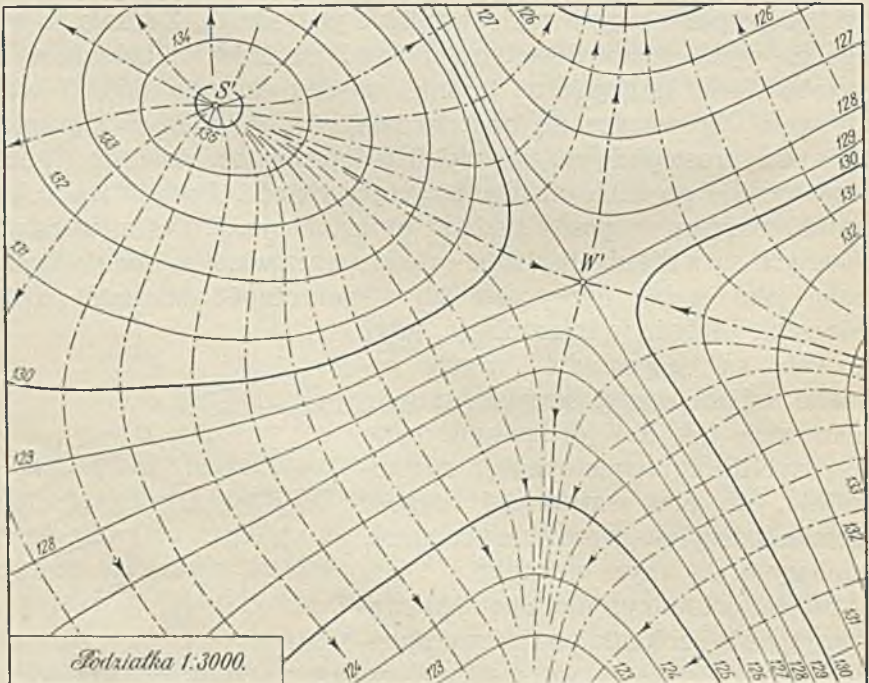
Mniej dokładny, ale chętnie używany sposób szukania punktów pośrednich między dwiema warstwicami, zwłaszcza gdy ich krzywizny są małe, jest następujący: Przykładamy podziałkę tak, aby warstwice odcięły na niej (rys. 62) pewną okrągłą liczbę milimetrów



Rys. 62.

i podzielną, w żądanym stosunku, względnie stosunkach. Na rys. 62 podziałka przyłożona jest w ten sposób, że warstwy 15 i 20 odcinają na niej 15 mm. Punkty podziału, odmierzające 3, 6, 9 i 12 mm są, w przybliżeniu, punktami o cechach 16, 17, 18 i 19. Krzywe, łączące otrzymane w ten sposób punkty, uzupełniają plan warstwowy, między danymi warstwicami głównymi 15 i 20.

**29. Punkty charakterystyczne powierzchni topograficznej.** Warstwy są, jak wiemy, linjami zamkniętymi. W pewnych miejscach terenu te linie zamknięte, dając coraz mniejsze linie owalne, redukują się do punktów, charakteryzowanych w geometrii nazwą punktów eliptycznych. Zachodzić tu mogą dwa wypadki. W pierwszym wysokość punktu jest większa, aniżeli wysokość punktów sąsiednich; taki punkt nazywa się punktem szczytowym, szczytem, a otaczający go teren kopą. W drugim wypadku wysokość punktu eliptycznego jest mniejsza, aniżeli wysokość punktów sąsiednich. Punkt taki nazywać będziemy punktem kotlinowym, a otaczający go teren kotliną.

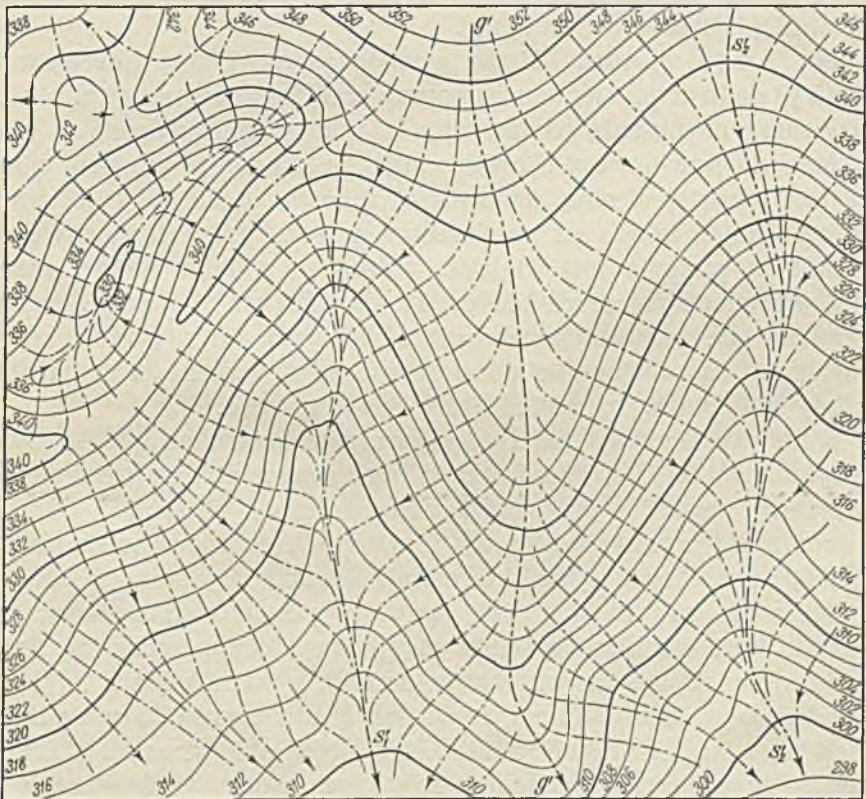


Rys. 63.

Rys. 63 jest planem warstwowym terenu, w którym warstwicze 125, 130 i 135 są warstwicami głównymi. Grubość warstw głównych wynosi więc 5 m, warstw pośrednich 1 m. Punkt  $S'$  jest rzutem najwyższego punktu terenu, objętego planem, rzutem punktu szczytowego.

Warstwicze 129, których jest dwie, przecinają się w punkcie  $W'$ . Przyjmijmy, że plan warstwowo jest zorientowany w ten sposób, że linia pionowa wskazuje ku górze na północ, to teren, od punktu  $W$  na wschód i zachód — jak nas o tem pouczają cechy warstwic — wznosi się, natomiast opada ku północy i południowi. Miejsce terenu w okolicy punktu  $W$  nazywamy siodłem. Punkt  $W$  jest punktem podwójnym, ma charakter punktu hiperbolicznego powierzchni topograficznej i zwie się wierzchołkiem siodła.

Inną konfigurację terenu odwzorowuje plan warstwowo na rys. 64. W szczególności zwróćmy uwagę na kotlinę, leżącą



Podziałka 1:5000.

Rys. 64.

w okolicy głównej warstwic 330. Graficznie okolice punktów szczytowych i kotlinowych przedstawiają się identycznie, jedynie następstwo cech ich warstwicz pozwoli odróżnić punkt szczytowy od kotlinowego. Cechy warstwicz, okalających punkt szczytowy i oddalających się od niego, są liczbami malejącymi; warstwice, okalające punkt kotlinowy i oddalające się od niego, cechowane są liczbami rosnącymi.

W tem samym znaczeniu, co przy powierzchni geometrycznej, mówimy o płaszczyznach stycznych do powierzchni topograficznej. Płaszczyzna taka jest miejscem geometrycznym prostych, stycznych do krzywych, przechodzących przez dany punkt powierzchni terenu. W punktach szczytowych, w punktach kotlinowych i w wierzchołku siodła płaszczyzny styczne są poziome. Płaszczyzna styczna w wierzchołku siodła, przecina powierzchnię topograficzną podług krzywej, warstwic, posiadającej, w punkcie styczności, punkt podwójny.

### **30. Linje spadu. Linje grzbietowe. Linje ściekowe.**

Nachyleniem powierzchni topograficznej, w pewnym jej punkcie, nazywamy nachylenie płaszczyzny stycznej, poprowadzonej w tym punkcie do powierzchni. Powierzchnia terenu jest w pewnym miejscu tem bardziej stromą, im szybciej zbliżają się ku sobie jej warstwice. Linje, leżące na powierzchni terenu, których nachylenie w każdym punkcie jest większe, aniżeli nachylenie każdej innej linii, przechodzącej przez ten punkt, są linjami spadu terenu. Podobnie jak przy powierzchniach stożkowych i walcowych, rzuty linii spadu są prostopadłe do warstwicz powierzchni terenu a oba układy linii tworzą prostokątne trajektorje.

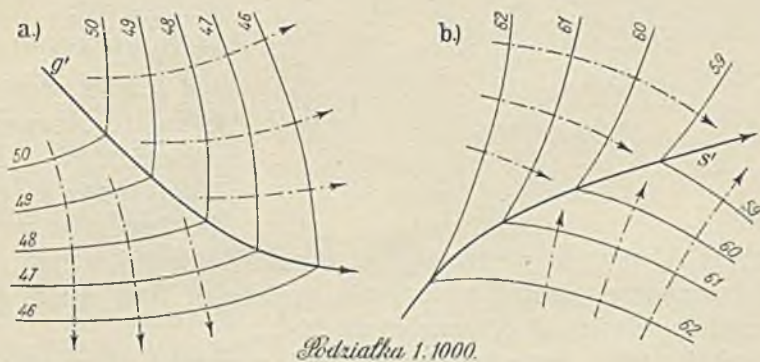
Weźmy pod uwagę linje spadu, wrysowane w plany warstwowe na rysunkach 63 i 64. Przedewszystkiem zauważmy, że przez punkt szczytowy (rys. 63) przechodzi nieograniczona ilość linii spadu, podobnie przez punkt kotlinowy (rys. 64). Przez wierzchołek siodła (rys. 63) przechodzą tylko dwie linje spadu.

Spójrzmy na przebieg linii spadu w planie warstwowym, na rys. 64. Poza punktem kotlinowym, przez który przechodzą linje spadu, skupiają się one wzdłuż trzech linii, a mianowicie  $s_1'$ ,  $g'$  i  $s_2'$ . Uwzględniając kierunki nachylenia linii spadu, zauważymy, że linje te oddalają się od linii  $g'$ , rozchodząc się w obie strony i charakteryzują kierunek spływającej w obie strony wody. Tę linię spadu  $g$  nazywamy linią grzbietową, grzbietem lub linią działu wód. Linje  $s_1$  i  $s_2$ , ku którym zbiegają się, z obu stron, linje spadu,



zwą się linjami ściekowymi lub żlebowymi. Okolice terenu, koło linii ściekowej, zwie się ściekiem lub żlebem. Spływająca, ku linii ściekowej, z obu stron terenu, woda tworzy strumienie, potoki i rzeki.

Przez wierzchołek siodła przechodzi zawsze jedna linia grzbietowa i jedna ściekowa. Wierzchołek paraboloidy hiperbolicznej (rys. 43 a—b) jest wierzchołkiem siodła, w znaczeniu powierzchni topograficznej. Linia  $l_3'$  jest rzutem linii grzbietowej, zaś linia  $l_4'$  rzutem linii ściekowej paraboloidy hiperbolicznej.



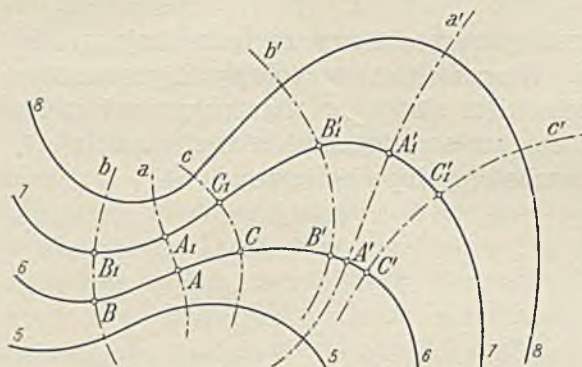
Rys. 65 a—b.

Jeżeli plan warstwowy nie jest pocechowany, to linie grzbietowe nie różnią się od żlebowych, a pierwsze staną się drugimi jedynie przez przestawienie cech.

Niekiedy występują linie grzbietowe i ściekowe bezpośrednio na powierzchni terenu, jako krawędzie przesunięcia się jego stoków. Taką krawędź grzbietową  $g$  przedstawia rys. 65 a; kierunki nachylenia linii spadu na obszarze, gdzie krawędź taka występuje, odchylają się od niej. Linia  $s'$  na rys. 65 b przedstawia rzut krawędzi ściekowej; kierunki nachylenia linii spadu zbiegają tu ku krawędzi.

Weźmy pod uwagę plan warstwowy terenu (rys. 66) i poprowadźmy w miejscu, gdzie oddalenie warstw  $6$  i  $7$  jest najmniejsze, linię spadu  $a$ , zaś tam, gdzie oddalenie tych warstw jest największe, linię spadu  $a'$ . Wykreślmy, sąsiadujące z obu stron linii  $a$  i  $a'$ , linie spadu  $b$ ,  $c$  i  $b'$ ,  $c'$ , przecinające warstwy  $6$  i  $7$  w punktach  $B$ ,  $B_1$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $B'$ ,  $B'_1$  i  $C'$ ,  $C'_1$ . Ponieważ odcinek  $AA_1$  krzywej  $a$  jest krótszy, aniżeli odcinki  $BB_1$  i  $CC_1$ , więc linie spadu

$b$  i  $c$  zwrócone będą ku punktowi  $A$  swemi stronami wklęsłemi, a linja spadu  $a$  posiadać będzie, w punkcie między  $AA_1$ , punkt przegięcia. Nachylenie linji spadu  $a$  w tym punkcie jest większe,



Rys. 66.

aniżeli nachylenie sąsiednich linii spadu  $b$  i  $c$  w punktach między  $BB_1$ , względnie  $CC_1$ . Linje spadu  $b'$  i  $c'$  zwrócone będą ku punktowi  $A'$  swemi stronami wypukłemi, gdyż odcinek  $A'A_1'$  krzywej  $a$  jest, wedle założenia, dłuższy aniżeli odcinki  $B'B_1$  i  $C'C_1$ . Linja spadu  $a'$  posiadać będzie w punkcie między  $A'A_1'$  punkt przegięcia, a nachylenie jej w tym punkcie jest mniejsze, aniżeli nachylenie sąsiednich linii spadu  $b'$  i  $c'$  w punktach między  $B'B_1$  względnie  $C'C_1$ .

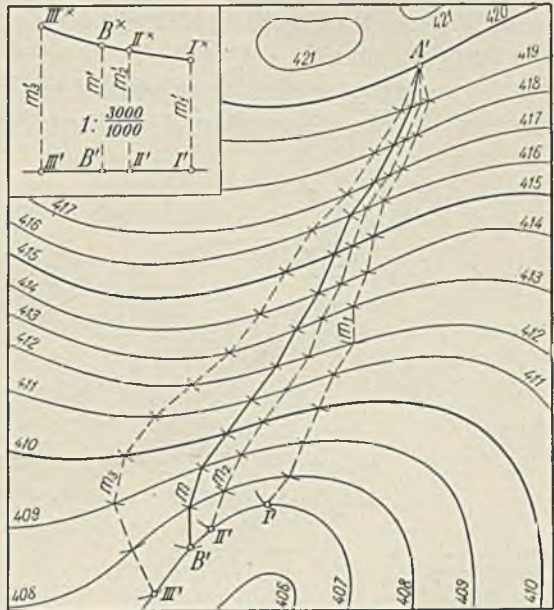
Niechaj punkt porusza się po linii warstwowej powierzchni topograficznej i niechaj, w każdym jego położeniu, zaznaczoną będzie, przechodząca przez niego, linja spadu. W punkcie, w którym linja spadu ma punkt przegięcia, nachylenie stoku powierzchni terenu, wzdłuż przebieganej linii warstwowej, będzie największe lub najmniejsze, zależnie od tego, czy sąsiednie, z obu stron tego punktu leżące, linje spadu zwrócone są ku niemu swemi stronami wklęsłemi czy wypukłemi. Punkty przegięcia linii spadów połączone dadzą linje największego, względnie najmniejszego nachylenia powierzchni topograficznej.

### 31. Linje stokowe na powierzchni topograficznej.

Z każdego punktu powierzchni topograficznej poprowadzić na niej można dwie linje stokowe, o tym samym module, których nachylenie jest mniejsze, aniżeli nachylenie linji spadu, przechodzącej przez ten punkt powierzchni (porównaj ust. 14, punkt  $b$ ). Znając nachylenie linji stokowej znamy i jej moduł, którym następnie, zakreślać będziemy, z danego punktu  $A'$  (rys. 67), łuki kół o promieniu równym temu modułowi. Linja, łącząca otrzymane, w ten sposób, punkty, jest rzutem linji stokowej o module  $m_1$ , wychodzącej z punktu  $A'$  warstwy 420 i dochodzącej do punktu  $I'$  warstwy 407.

Zadanie połączenia dwóch punktów  $A$  i  $B$ , powierzchni terenu, linią stokową ma kilka rozwiązań, które ograniczyć możemy warunkiem, by linja ta nie odbiegała, o ile możliwości, od najkrótszej linii, łączącej owe dwa punkty. Ale i wówczas zadanie rozwiązać możemy tylko drogą prób.

Jako pierwszy moduł  $m_1$ , szukanej linii stokowej, przyjmiemy odcinek, równy ilorazowi z długości odcinka  $A'B'$  prostej i różnicy ich cech, pomnożonemu przez grubość warstwy (rys. 67). Wykreślony rzut linii stokowej o module  $m_1$  dochodzi do punktu  $I'$ . Przypuścimy, że, zmieniając nieznacznie długość modułu na odcinek  $m_2$ , nie osiągnęliśmy punktu  $B'$  lecz punkt  $II'$  a następnie, przy użyciu modułu  $m_3$ ,



Podziałka 1:3000

Rys. 67.

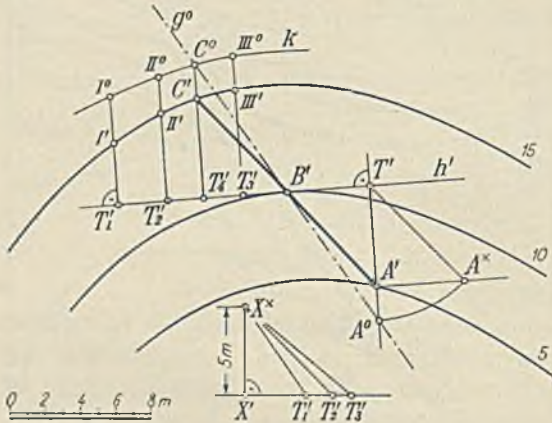
doszliśmy do punktu  $III'$ . Wtedy przeniesiemy, na przyjętą prostą, odcinek warstwiczy 407 od punktu  $I'$  do  $III'$  wraz z punktami  $II'$  i  $B'$  i odmierzymy, na prostopadłych, wykreślonych w punktach  $I'$ ,  $II'$  i  $III'$ , odcinki  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$ , w podziałce 1:1000, a więc w powiększeniu trzykrotnym, w porównaniu z podziałką poziomą, która wynosi 1:3000. Połączmy punkty końcowe  $I^x$ ,  $II^x$  i  $III^x$ , tych odcinków, krzywą ciągłą, to odcinek  $B'B^x = m'$  będzie — z dostatecznym przybliżeniem — potrójnym modulem szukanej linii stokowej, łączącej punkt  $A$  z punktem  $B$ , powierzchni terenu.

### 32. Linje geodezyjne na powierzchni topograficznej.

Linja, wyznaczająca najkrótszą odległość, między dwoma punktami na powierzchni, nazywa się linią geodezyjną. Posiada ona tę własność, że ściśle styczna płaszczyzna, w każdym jej punkcie, przechodzi przez prostą normalną, przeprowadzoną w tym punkcie, do powierzchni.

Każda linia spadku jest najkrótszą linią, łączącą leżące na niej punkty, ale przez dwa, dowolnie na powierzchni topograficznej przyjęte punkty, nie przechodzi jedna linia spadku. Z przyjętego, na powierzchni topograficznej, punktu poprowadzić można dowolną ilość linii geodezyjnych, z których każda zmierza do innego punktu, ma inny kierunek.

Wyobraźmy sobie, że wychodzimy z przyjętego na linii warstwowej 5 (rys. 68) punktu  $A$ , w kierunku, oznaczonym punktem  $B$  na warstwie 10 i że przyjęty kierunek  $AB$  jest kierunkiem linii geodezyjnej, która przecina warstwę 15 w punkcie  $C'$ . Jeżeli punkt  $B$  zastąpimy jego punktem sąsiednim np. punktem  $D$ , zaś linia  $ABC$  jest linią geodezyjną, łączącą punkty  $A$  i  $C$ , to linia  $ADC$ , łącząca także punkty  $A$  i  $C$ , winna być od pierwszej dłuższą. Punkt  $D$



Rys. 68.

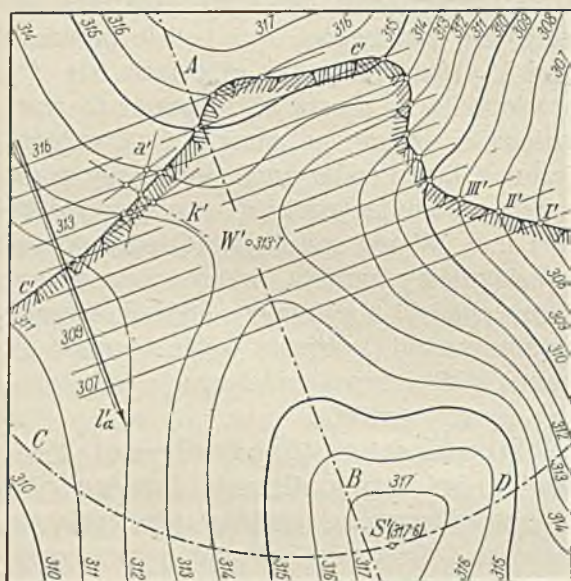
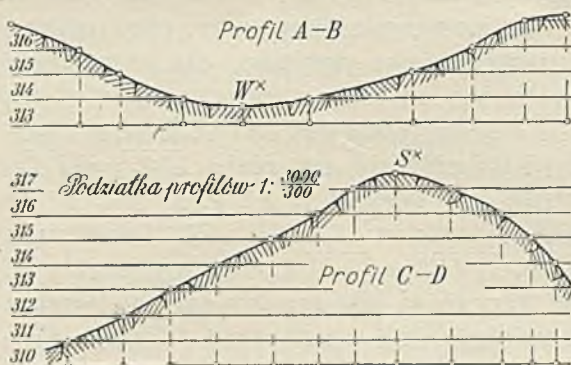
przyjąć można na stycznej  $h$ , poprowadzonej w punkcie  $B$  do linii warstwowej 10, a wtedy punkty  $A, C$  i prosta  $h$  wyznaczają dwie płaszczyzny, przecinające się wzdłuż prostej  $h$ . Punkt  $B$  musi mieć takie położenie, aby linia łamana, łącząca go z punktem  $A$ , na płaszczyźnie  $Ah$  i z punktem  $C$  na płaszczyźnie  $Ch$ , była najkrótszą z możliwych połączeń. Aby linię taką znaleźć, obróćmy obie płaszczyzny, około prostej  $h$ , do położenia poziomego, to — jeśli linia  $ABC$  ma być najkrótszą — wówczas na tej płaszczyźnie poziomej, punkty  $A, B, C$  muszą tworzyć prostą. Konstrukcję obrotu punktu  $A$ , około prostej  $h$ , widzimy na rys. 68. Wykreślona, z punktu  $A'$ , prostopadłe do prostej  $h'$ , prosta jest śladem płaszczyzny obrotu; punkt  $T'$  jest rzutem poziomym środka obrotu. Odcinek  $A'A^x$ , prostopadły do  $A'T'$ , jest różnicą wysokości punktów  $A$  i  $T$ , równą  $5\text{ m}$  w podziałce rysunku, zaś odcinek  $T'A^x$  promieniem obrotu. Punkt  $A^0$  jest, sprowadzonym na płaszczyznę warstwową 10, punktem  $A$ . Prosta  $g^0$ , łącząca punkt  $A^0$  z punktem  $B'$ , jest ową prostą, na której będzie leżał, sprowadzony na płaszczyznę warstwową 10,

punkt *C*. Aby punkt ten znaleźć, obróćmy kilka punktów np. *I*, *II*, *III*, warstwy 15, około prostej *h*, tak, aż padną na warstwową płaszczyznę 10. Obróty te przeprowadzić można w ten sam sposób jak obrót punktu *A*, albo, dla przejrzystości rysunku, przy pomocy rysunku pomocniczego, uwzględniając wspólne, dla wszystkich punktów warstwy 15, oddalenie od płaszczyzny warstwowej 10, t. j.  $w = 5 m = \overline{A'A^x} = \overline{X'X^x}$ . Poprowadźmy w punkcie *X'*, odcinka  $\overline{X'X^x}$ , prostopadłą i odmierzymy na niej:  $\overline{X'T_1'} = \overline{I'T_1'}$ ,  $\overline{X'T_2'} = \overline{II'T_2'}$  i  $\overline{X'T_3'} = \overline{III'T_3'}$ , to odcinki  $\overline{T_1'X^x}$ ,  $\overline{T_2'X^x}$  i  $\overline{T_3'X^x}$  są równe promieniom obrotów punktów *I*, *II* i *III*. Odmierzmy  $\overline{T_1'I^0} = \overline{T_1'X^x}$ ,  $\overline{T_2'II^0} = \overline{T_2'X^x}$ ,  $\overline{T_3'III^0} = \overline{T_3'X^x}$  i połączmy punkty  $I^0$ ,  $II^0$  i  $III^0$  krzywą ciągłą *k*. Krzywa ta jest przekrojem powierzchni obrotowej, powstałej przez obrót linii warstwowej 15 około prostej *h*, z płaszczyzną warstwową 10. Szukany punkt *C* będzie punktem linii warstwowej 15. Obracając się około prostej *h*, jako osi, punkt ten padnie na płaszczyznę warstwową 10 i będzie punktem krzywej *k*, a także prostej  $g^0$ . Rzućmy punkt przecięcia się  $C^0$ , prostej  $g^0$  i krzywej *k*, prostopadle na prostą *h'*, to punkt *C'* warstwy 15 jest rzutem poziomym szukanego punktu *C*. Uważając teraz odcinek  $\overline{B'C'}$  za kierunek linii geodezyjnej, ponowimy przeprowadzoną wyżej konstrukcję, znajdując punkt *E* na warstwy 20, punkt *F* na warstwy 25 i t. d. W ten sposób dojdziemy do żądanej warstwy, ale nie osiągniemy punktu, który, obrany tam jest jako cel, przez który przechodzić ma linia geodezyjna, łącząca go z punktem *A*. Wtedy też zmuszeni będziemy wyjść z punktu *A*, zmieniać początkowy kierunek *A'B'* i powtarzać operację tak długo, aż, drogą prób, osiągniemy żądany punkt.

**33. Płaskie przekroje powierzchni topograficznej. Profile.** Linia przekroju powierzchni topograficznej, dowolną płaszczyzną *a*, jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się linii warstwowych powierzchni i linii warstwowych płaszczyzny, leżących na tych samych płaszczyznach warstwowych.

Przykład takiego przekroju widzimy na rys. 69, Warstwy płaszczyzny *a* przecinają warstwy powierzchni terenu, o tych samych cechach, w punktach *I'*, *II'*, ..., które połączone dają linię krzywą płaską *c'*. Linia ta jest rzutem przekroju powierzchni terenu, płaszczyzną *a*. Jeśli warstwy są zbyt od siebie oddalone, to punkty pośrednie linii przekroju znaleźć możemy w dwojaki sposób. Między dwie warstwy terenu włączymy jedną, lub więcej warstw pośrednich i znajdziemy ich punkty przecięcia się z uzupeł-

nionym planem warstwowym płaszczyzny, albo też, uważając teren, między dwiema linjami warstwowymi, za zbliżony do powierzchni



Podziałka 1:3000.

Rys. 69.

stokowej, przyjmiemy na nim proste prostopadłe, w przybliżeniu, równocześnie do obu linii warstwowych i znajdziemy ich punkty przebicia z powierzchnią terenu. Na rys. 69 przyjęliśmy prostą  $a'$  prostopadłą, w przybliżeniu, do warstw 313 i 314; prosta  $k'$  jest rzutem krawędzi płaszczyzny  $a$  z płaszczyzną, poprowadzoną przez prostą  $a$ . W ten sposób pośrednictwo prostej  $a$  pozwoliło na znalezienie punktu, szukanej linii przekroju, leżącego między warstwicami 313 i 314 terenu.

Przekroje płaszczyznami rzucającymi nazywamy „profilami“ (str. 49). Określenie to rozszerzymy w tym kierunku, że prócz płaszczyzn rzucających weźmiemy pod uwagę przenikania się powierzchni to-

pograficznej z walcami, których tworzące są pionowe. Walce takie nazywać będziemy rzucającymi; rozwinięte na płaszczyznę sprowadzają one na nią linię swego przenikania się z powierzchnią topograficzną, którą określamy także mianem profilu.

Na rys. 69 wykonaliśmy profil płaski  $A-B$  i profil walcowy  $C-D$ , stosując, dla wysokości (rzędnych) podziałkę 1:300, gdy podziałka długości (odciętych) przyjęta jest 1:3000 (patrz ust. 27, str. 70).

**34. Przejście z przekopu w nasyp drogi w spadku.** Powierzchnia terenu  $\tau$  wyznaczona jest planem warstwowym (rys. 70), przyczem grubość warstw wynosi 0,5 m. Korona drogi przyjęta jest jako płaszczyzna  $\pi$ , wyznaczona planem warstwowym o tej samej, co teren, grubości warstw.

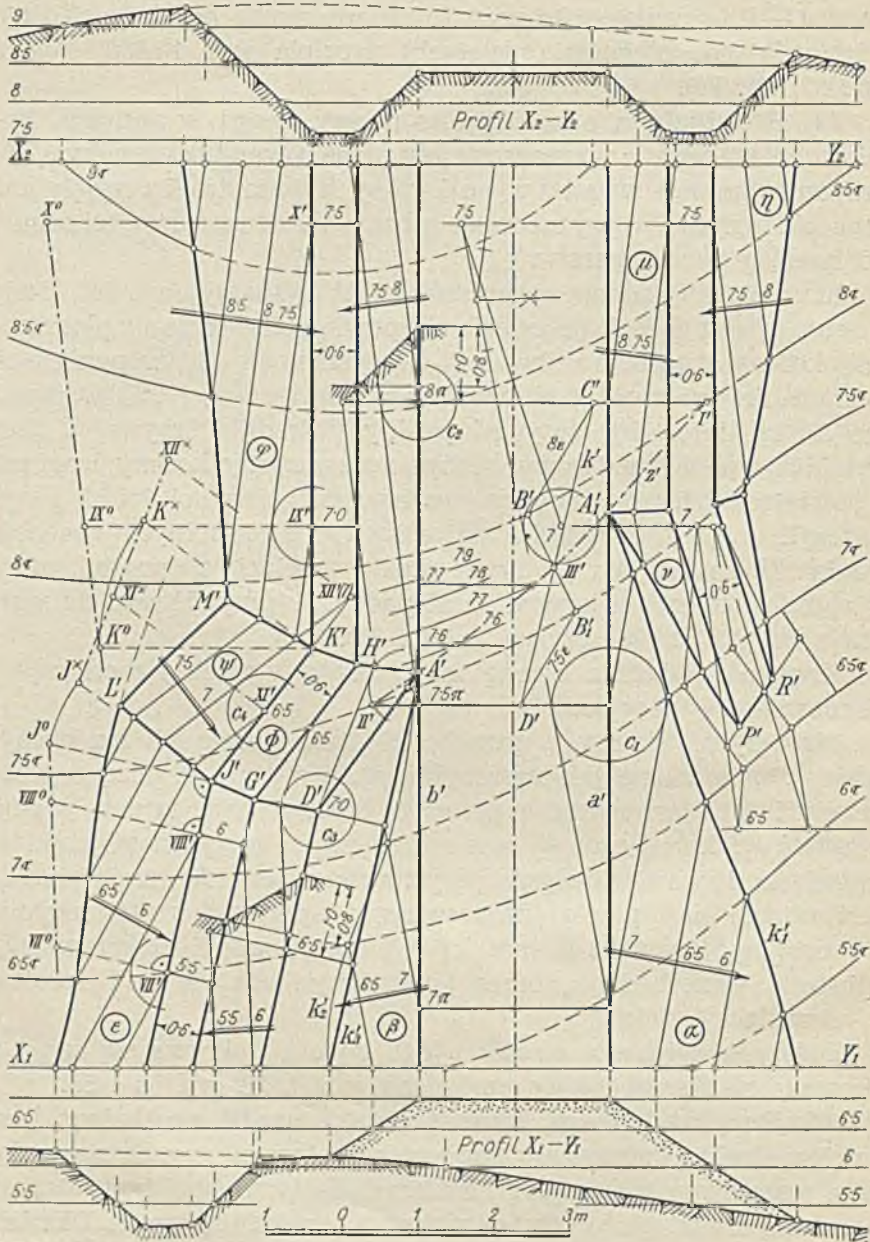
Rozwiązanie zadania rozpoczniemy od wyznaczenia t. zw. linii zerowej  $z$ , t. j. linii przecięcia się powierzchni terenu z płaszczyzną korony drogi. Warstwicę  $8_r$  i  $8_\pi$  przecinają się w punkcie  $I'$  rzutu  $z'$  linii zerowej, podobnie jak warstwicę  $7,5_r$  i  $7,5_\pi$  w punkcie  $II'$ , tej linii. Aby otrzymać punkty pośrednie krzywej  $z'$  uzupełniliśmy plan warstwowy, zarówno płaszczyzny korony drogi jak i powierzchni terenu, między warstwicami głównymi  $7,5$  i  $8$  i wyznaczyli punkty przecięcia się warstwic o wspólnych cechach. Punkt  $III'$  znaleźliśmy jako rzut punktu przebicia się prostej, przyjętej na powierzchni terenu, prostopadłej, w przybliżeniu, do warstwic  $7,5_r$  i  $8_r$  z płaszczyzną  $\pi$  (ust. 33).

Krzywa  $z'$  oddziela koronę drogi, leżącą w przekopie od części, zbudowanej w nasypie.

Płaszczyzna skarpy  $\alpha$ , przechodzi przez prostą  $a$  i ma nachylenie 2:3, podobnie jak płaszczyzna skarpy  $\beta$ , przechodząca przez krawędź  $b$ . Płaszczyzna  $\alpha$  przecina powierzchnię terenu podług krzywej  $k_1$ , której rzut  $k_1'$  jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się warstwic płaszczyzny z warstwicami terenu. Krzywa  $k_2'$  jest rzutem linii przekroju płaszczyzny spary  $\beta$  z powierzchnią terenu. Jako krawędź ławeczki przyjmiemy, w pobliżu krzywej  $k_2$ , prostą  $k_3$ , przechodzącą przez punkt przecięcia się linii zerowej z krawędzią  $b$  drogi.

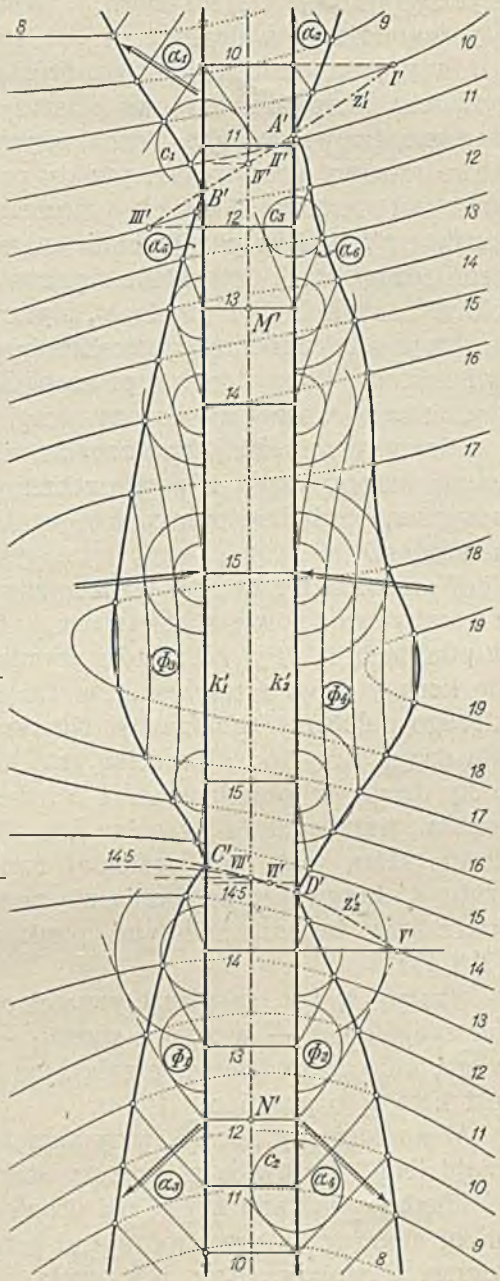
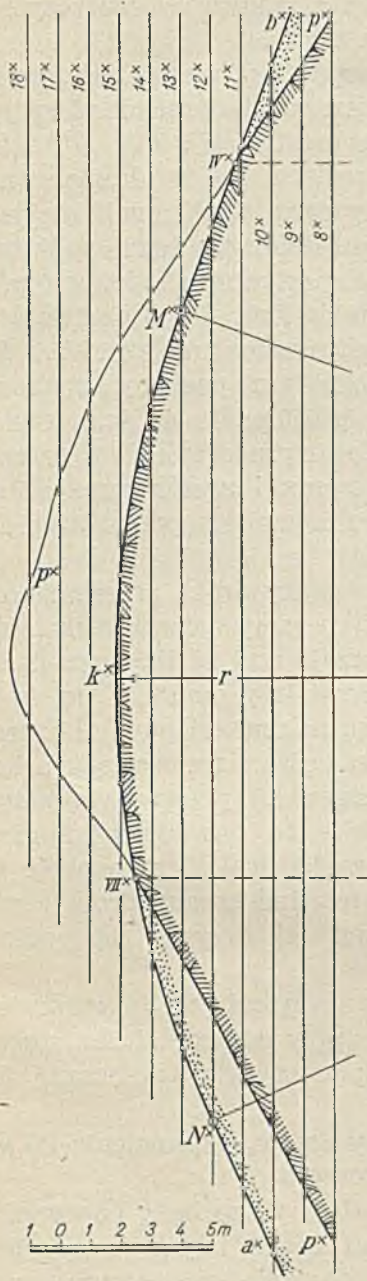
Dalsza konstrukcja rowów i jego wylotu pokrywa się z przeprowadzoną i szczegółowo omówioną w ust. 23 rys. 54 i 55.

**35. Przykład drogi, której płaski profil podłużny jest łukiem koła.** Przyjmiemy powierzchnię terenu, wyznaczoną planem warstwowym (rys. 71) i założmy, że w terenie tym ma być położona droga, której rzut poziomy osi jest linią prostą. Ukształtowanie terenu wymaga jednak, aby, dla uniknięcia zbyt głębokich przekopów, droga wznosiła się, a następnie opadała. Korona drogi, początkowo płaszczyzna, przechodzi następnie w walec obrotowy,



Rys. 70.





Rys. 71.

styczny do tej płaszczyzny, a wreszcie znowu w płaszczyznę, styczną do tego walca.

Przyjąwszy rzut poziomy osi drogi znajdziemy, wzdłuż niej, profil powierzchni terenu. Pionowa płaszczyzna profilu przetnie płaszczyzny warstwowe w pęku równoległych prostych  $8^x, 9^x, \dots 18^x$ , na które rzucimy prostopadłe, punkty przecięcia się osi drogi z warstwicami terenu. Miejscem geometrycznym tych punktów jest krzywa  $p^x$ , profilu powierzchni terenu. Obierzmy teraz podłużny profil drogi, na który składa się prosta  $a^x$ , styczny do niej, w punkcie  $N^x$ , łuk koła  $k^x$  i prosta  $b^x$ , styczna do koła  $K^x$  w punkcie  $M^x$ .

Linia  $a^x k^x b^x$ , podłużnego profilu drogi, przecina proste  $8^x, 9^x, \dots 15^x$  w punktach, które rzucone prostopadłe na rzut poziomy osi drogi, wyznaczają warstwicę korony drogi, prostopadłe do tego rzutu.

Mamy przed sobą dwa zagadnienia: wyznaczenie linii przenikania korony drogi z powierzchnią terenu i wyznaczenie skarp nasypów, względnie przekopów, wraz z linjami ich przenikania się z terenem.

Warstwicę 10, 11 i 12, płaszczyzny korony drogi, przecinają się z warstwicami powierzchni terenu, o tych samych cechach, kolejno w punktach  $I', II'$  i  $III'$ , które wyznaczają rzut  $z_1'$  linii przecięcia się korony drogi z terenem. Na osi drogi leży punkt  $IV'$  tej linii, którego położenie znajdziemy, odnosząc na rzut osi punkt  $IV^x$  profilu drogi. Krzywa  $z_1'$  przecina rzut krawędzi, ograniczających koronę drogi, w punktach  $A'$  i  $B'$ . Leżąca na przeciwnym stoku terenu, warstwicę 14 przecina warstwicę 14, powierzchni korony drogi, którą jest rzut poziomej tworzącej walca, w punkcie  $V'$  rzutu  $z_2'$  krzywej przenikania się powierzchni korony drogi z powierzchnią terenu. Dalszemi punktami tej krzywej są punkty  $VI'$  i  $VII'$ .

Skarpy  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są płaszczyznami o nachyleniu 2:3; warstwicę ich znajdziemy — w znany sposób — przy pomocy stożka stokowego, którego podstawą, przyjętą na płaszczyźnie warstwowej 10, jest koło  $c_1$  o promieniu 1·5  $m$ .

W analogiczny sposób, przy pomocy koła  $c_2$  o promieniu 1·5  $m$ , znajdziemy warstwicę płaszczyzn stokowych  $\alpha_3$  i  $\alpha_4$ .

Między punktami  $M$  i  $N$ , osi drogi, stoki skarp będą powierzchniami stokowymi, przechodzącymi przez koła  $k_1$  i  $k_2$ . Tworzące powierzchni stokowych  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  mają nachylenie 2:3 (nasyp), tworzące powierzchni  $\Phi_3$  i  $\Phi_4$  nachylenie 1:1 (przekop). Warstwicę tych powierzchni znajdziemy w ten sam sposób, jak warstwicę

powierzchni stokowej, przechodzącej przez krzywą skośną (ust. 18). Punkty kół  $k_1$  i  $k_2$  uważać będziemy za wierzchołki stożków obrotowych o osiach pionowych i tworzących o nachyleniu 2:3, względnie 1:1. Płaszczyzny warstwowe przecinają te stożki podług kół, do których są styczne linje warstwowe powierzchni stokowych.

Linja spadu płaszczyzny  $\alpha_3$ , przechodząca przez punkt koła  $k_1$  o wysokości 12, jest równocześnie tworzącą powierzchni  $\Phi_1$ , wzdłuż której styka się ona z płaszczyzną  $\alpha$ . Podobnie linja spadu płaszczyzny  $\alpha_4$ , która przechodzi przez punkt koła  $k_2$ , o wysokości 12, jest tworzącą powierzchni  $\Phi_2$ , wzdłuż której powierzchnia ta styka się z płaszczyzną  $\alpha_4$ . Warstwice powierzchni stokowych  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  zwrócone są ku osi drogi stronami wklęsłymi, warstwice zaś powierzchni stokowych  $\Phi_3$  i  $\Phi_4$  stronami wypukłymi.

Linje przenikania powierzchni skarp  $\Phi_1 \dots \Phi_4$ , z powierzchnią terenu, będą linjami skośnymi, które znajdziemy jako miejsca geometryczne przecięcia się, leżących na tych samych płaszczyznach warstwowych, linii warstwowych terenu i linii warstwowych powierzchni skarp.

## Literatura.

- Noizet F.*, Mémoire sur la géométrie appliqué au dessin de la fortification. Mémorial de l'Officier du Génie Nr. 6. Paris 1823, str. 5—224.
- Leroy, C. F. A.*, Traité de géométrie descriptive. Paris 1834, 379—390
- Rochefort M.*, Leçon de géométrie descriptive par cotes. Paris 1867.
- Gournerie Jules de la*, Traité de géométrie descriptive. Wydanie 2. Paris 1873. Tom I, str. 110—119; Tom II, str. 191—215.
- Licka Josef L.*, Zur Geschichte der Horisontallinien oder Isohypsen. Zeitschrift für Vermessungswesen. IX. Band 1880, str. 37—50.
- Caron J.*, Cours de géométrie descriptive. Paris 1882. Tom I, str. 149—166.
- Sągaylo Ernest*, Wykład geometrii wykreslnej. Paryż 1882, str. 407—420.
- Peschka Gustav, Dr.*, Kotirte Ebenen und deren Anwendungen. Brünn 1877, 2 wydanie 1882.
- Gerke R.*, Die Festlegung der Böschungsknickkurve mittelst kotirter Projektion als Beitrag zu der Tracierungslehre. Hannover 1885.
- Wiener Christian Dr.*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Leipzig 1887. Tom I, str. 100—103; Tom II, str. 388—402.
- Antomari X.*, Cours de géométrie descriptive. Paris 1897. 4 wydanie 1908.
- Charruit N.*, Problèmes et épreuves de géométrie descriptive et de géométrie cotée. Paris 1890. Wydanie 2 1897.
- Binder W.*, Die cotierte Darstellung auf einer Bildebene. Programm d. Realschule Wiener-Neustadt. Jahrg. 1897 u. 1898.
- Charruit N.*, Cours de géométrie cotée a l'usage des candidats a l'école spéciale militaire de Saints-Cyr. Paris 1898.
- Nicol J.*, Cours de géométrie cotée. Paris 1897. 2 wydanie 1900.
- Grassi Nicola*, Elementi di geometria descrittiva. Livorno 1901, str. 187—200.
- Schlessler E.*, Géométrie descriptive et géométrie cotée. Paris 1902. 2 wydanie 1906.
- Javary A.*, Projections cotées et surfaces topographiques. Paris 1904.
- Chomé F.*, Cours de géométrie descriptive de l'école militaire. Bruxelles et Paris 1904.
- Ibach L. et Mariaud H.*, Géométrie cotée. Paris 1905.
- Loria Gino*, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsch von *Fr. Schütte*. Leipzig 1907. Tom I. str. 147—163.
- Danelie M. R.*, Géométrie cotée. Paris 1908.
- Ferval H.*, Géométrie cotée. Wydanie 4. Paris 1909.
- Chollet T. et Mineur P.*, Traité de géométrie descriptive. Tom I, wydanie 7. Paris 1910. Tom II, wydanie 4. Paris 1909.

- Ferval H.*, *Eléments de géométrie descriptive*. 2 wydanie. Paris 1910, str. 1—68, 301—324.
- Müller Emil Dr.*, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen*. Tom II. Leipzig 1912, str. 1—68.
- Rothe R.*, *Darstellende Geometrie des Geländes*. Leipzig 1914.
- Scheffers Georg Dr.*, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. Tom I. Berlin 1919. Tom II, Berlin 1920.
- Hessenberg-Salkowski*. *Vorlesungen über darstellende Geometrie*. Leipzig 1929.





# KSIĄŻNICA-ATLAS S. A.

LWÓW, CZARNIECKIEGO 12 — WARSZAWA, NOWY ŚWIAT 59

poleca dzieła techniczne:

*St. Anczyk*

## BADANIA METALOGRAFICZNE W ZASTOSOWANIU FABRYCZNYM

Wyd. II. Z 126 ilustracjami. Str. VIII + 68. Zł. 6.—.

Podręcznik ten omawia czynności i zabiegi, potrzebne do przeprowadzenia mikroskopowego badania żelaza, czynności tak niezmiernie doniosłe dla zakładów przemysłowych, gdzie gorsza albo nieodpowiednia jakość stosowanej stali może fabrykanta i odbiorcę narazić na dotkliwe straty.

*E. T. Geisler*

## OBRABIARKI DO METALI I PRACA NA NICH

Podręcznik dla studentów, techników i inżynierów.

Cz. I i II. Skrawanie metali. Mechanizmy obrabiarek. Z 201 rysunkami. Str. VIII + 208. Zł. 7 20 — Cz. III. Obrabiarki o ruchu roboczym obrotowym. Str. VIII + 384. Z 376 ryc. Zł. 22 80.

Zadaniem tego dzieła jest możliwie przystępne, lecz równocześnie wyczerpujące zaznajomienie z współczesnym stanem obróbki metali. Autor prowadzi wykład głównie z punktu widzenia praktyki, mając na celu stworzenie podręcznika, któryby, poza celem dydaktycznym, mógł być pomocny w rozwiązywaniu zagadnień z dziedziny obróbki metali, nasuwających się w życiu codziennym zarówno w wytwórni, jak i w biurze konstrukcyjnym. Poziom wykładu uprzystępnia treść dzieła najszerszym kołom technicznym.

*H. Mierzejewski*

## METROLOGJA TECHNICZNA

Z 184 rycinami. Str. 208. Zł. 9.—.

Treść: Przedmowa. — I. Pasowanie wałków i długości. — II. Pasowanie gwintów. — III. Narzędzia miernicze. — IV. Specjalne metody miernicze. — V. Wiadomości z optyki geometrycznej. — VI. Maszyny miernicze i podziałowe. — VII. Metody interferencyjne. — VIII. Wyznaczenie metra w długości fali świetlnej. — Bibliografia.

Dzieło ma charakter przeważnie praktyczny. Autor położył główny nacisk na konstrukcyjną stronę zagadnień, mając na uwadze osoby, specjalizujące się w technice metrologicznej.

ЦІНА 2 КРБ. 50 КОП.

BG Politechniki Śląskiej  
nr inw.: 102 - 131636



Dyr.1 131636

KSIĄŻNICA  
LWÓW, CZARNIECKIEGO 12

poleca dzieła techniczne:

*A. Plamitzer*

## AKSONOMETRJA PROSTOKĄTNA

Z 241 rysunkami. Str. XII + 208. Zł. 12.—.

Treść: Wstęp. — I. Wiadomości przygotowawcze. — II. Rzuty aksonometryczne punktu. — III. Prosta i płaszczyzna. — IV. O prostych i punktach, przynależnych do płaszczyzny. — V. Problemy równoległości i prostopadłości. — VI. Obroty. Zmiana rzutni. — VII. Zadania miarowe. — VIII. Wielokąty płaskie. — IX. Wielościany. — X. Związki miarowe i zależne od nich konstrukcje w aksonometrii prostokątnej.

*W. Pogorzelski*

## ZARYS TEORJI WEKTORÓW

Z 25 rysunkami. Str. 4 nlb. + 72. Zł. 4.80.

Dziełko niniejsze poświęcone jest rozważaniom teoretycznym i praktycznym tych pojęć fizycznych, które charakteryzuje nie tylko pewna wartość liczbowa, lecz także określony kierunek w przestrzeni, a które znane są pod nazwą wektorów. Praca rozpada się na dwie części; pierwsza z nich omawia pojęcie wektora i działań wektorowych, druga pole wektorowe i jego własności.

*K. Skotnicki*

## NAUKA MELJORACJI

Wodnictwo rolne.

Z 195 rycinami. Str. VIII + 312. Zł. 16.—.

Treść: I. Część wstępna. 1. Wiadomości ogólne o meljoracjach. 2. Grunt. 3. Woda. — II. Osuszanie gruntów. 1. Przyczyny zabagnienia i środki jego zwalczania. 2. Budowa odpływów naturalnych i sztucznych. 3. Rozplanowanie szczegółów urządzeń odwodniających. 4. Odwodnienie pól sposobem H. Korzybskiego. — III. Drenowanie. 1. Wiadomości ogólne. 2. Roboty wykonawcze. — IV. Nawodnienie. 1. Wiadomości ogólne. 2. Dostarczanie wody do nawodniania. 3. Urządzenia, doprowadzające i odprowadzające wodę. 4. Opis systemów nawodniania. 5. Zapotrzebowanie wody do nawodnień. 6. Sposoby użytkowania i korzyści, osiągnięte przez nawodnienie. — V. Kulturowanie torfowisk.